Equation de Korteweg-de Vries : de la modélisation au calcul scientifique

Mostafa ABOUNOUH
Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences et Techniques, Marrakech, Maroc
abounouh@fstg-marrakech.ac.ma

October 10, 2012

L'équation de Korteweg-de Vries est un modèle plus simple que les équations d'Euler pour traduire le phénomène physique d'une onde se déplaçant à la surface d'un canal. Ce phénomène a été observé la première fois par John Scott Russel en 1834 mais ce n'est qu'en 1895 que Korteweg et de Vries ont obtenu l'équation, portant leurs noms, qui modélise ce type d'onde hydrodynamique.
On donne les différentes étapes qui conduisent à l'obtention de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV en abrégé).

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0. \tag{0.1}$$

Ensuite, on considère l'équation de KdV périodique en espace, amortie et en présence d'une force exterieure qu'on suppose indépendante du temps. Soit

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + \alpha u + u_{xxx} + uu_x = f, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \\ u(t=0,x) = u_0(x), \\ u \text{ périodique en } \ x, \end{array}\right. \tag{0.2}$$

Nous nous sommes interessés à l'étude du comportement pour les grands temps des solutions de (0.2). Nous avons essayé de répondre aux questions suivantes :

- Quel schéma numérique proposer qui conserve les propriétés qualitatives de (0.2) ?
- Comment s'assurer que les qualités de ce schéma ne se détériorent pas lorsque le pas d'espace tend vers zéro ?

Pour répondre à ces questions, nous avons discrétisé le problème (0.2) en temps en laissant la variable d'espace continue et ainsi notre schéma est indépendant du pas d'espace :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u^{n+1} - \delta u^n}{\Delta t} + \partial_x^3 \left(\dfrac{u^{n+1} + \delta u^n}{2}\right) + \frac{1}{2}\partial_x \left(\dfrac{u^{n+1} + \delta u^n}{2}\right)^2 = f \\ u^0 = u_0 \\ u^n \text{ est périodique en } \ x \end{array}\right. \tag{0.3}$$

où $\delta = \dfrac{1 - \frac{\alpha \Delta t}{2}}{1 + \frac{\alpha \Delta t}{2}} < 1$, Δt est le pas de temps et $u^n \sim u(n\Delta t), \ n \geq 0$.
Les résultats essentiels de ce travail sont.

Theorem 0.1 *Soient $u_0 \in L^2(\mathrm{T})$ et $f \in L^2(\mathrm{T})$ tels que $2(\Delta t)^{\frac{1}{4}} \|f\|_{L^2} \leq \alpha$ et $(\Delta t)^{\frac{1}{4}} \|u_0\|_{L^2} \leq 1$, alors l'équation (0.3) possède un semi-groupe discret $S^n, \ n \geq 1$, satisfaisant $u^n = S^n u_0$.*

Theorem 0.2 *Le semi-groupe S^n, $n \geq 1$, défini ci-dessus possède un attracteur global $\mathcal{A}_{\Delta t}$ compact dans $H^3(\mathbb{T})$.*

Theorem 0.3 *L'attracteur global $\mathcal{A}_{\Delta t}$ est de dimension de Hausdorff finie.*

References

[1] M. Abounouh, H. Al Moatassime, J-P. Chehab, S. Dumont and O. Goubet, *Discrete Schrodinger Equations and dissipative dynamical systems*, Communication on Pure and Applied Analysis, 7 (2008), 211-227.

[2] J. Bona and R. Smith, *The initial value problem for the Korteweg de Vries equation*, Trans. Roy. Soc. London, 278 (1975), 555-604.

[3] J. Bourgain, *Fourier restriction phenomena for certain lattices subsets and applications to nonlinear equations*, Geometric and Functional Analysis 3 (1993), 107-156 and 209-262.

[4] J. Boussinesq, *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal*, J. Math. Pures Appl. 17 (2) (1872) 55-108.

[5] J. Hale, *Asymptotic behavior of Dissipative Systems*, Math. surveys and Monographs, vol 25, AMS, Providence, 1988.

[6] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-possedness of the initial value problem for the KdV*, Journal of the AMS, vol. 4 (1991), 323-347.

[7] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Bilinear estimates and applications to the KdV equations*, Journal of the AMS, vol. 9, n 2 (1996), 573-603.

[8] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on new type of long stationary waves,* Phil. Mag. (5), 39 (1895), p. 422.

[9] J.S. Russel, *Report on waves*, Rept. 14th Meeting of British Association for the Advencement of Science, (John Murray, London, 1844) 311-390.

[10] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics,* Springer-Verlag, Second Edition, 1997.

[11] K. Tsugawa, *Existence of the global attractor for weakly damped, forced KdV equation on Sobolev spaces of negative index,* Commun. Pure Appl. Anal. , 3 (2004), no. 2, 301-318.