

فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ و $n=2$ باشد. (1) \Rightarrow د

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2)$$

\sim یعنی $n=2$ باشد.

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

مثال ۱۲- برای $n=3$ بر مبنای n و A در صورت زیر و جواب دهید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^T A \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(\mathbf{n}) = a_{11} n_1^2 + 2a_{12} n_1 n_2 + 2a_{13} n_1 n_3 + a_{22} n_2^2 + 2a_{23} n_2 n_3 + a_{33} n_3^2}$$

مثال ۱۳- برای n و A در صورت زیر

$$f(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} n_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} n_i n_j$$

تعداد حالات برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است، برای $n=2$ و $n=3$ محاسبه کنید.

بسیار ساده است، برای $n=2$ و $n=3$ در مثال ۱۲ و ۱۳ محاسبه کنید.

مثلاً $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ کے اجزاء A_x, A_y, A_z کے ساتھ $\vec{r} = (x, y, z)$ کے ساتھ $\vec{A} \cdot \vec{r} = A_x x + A_y y + A_z z$ ہے۔

$$\frac{\delta f}{\delta n} = 2A$$

مثلاً $n=2$ کے لیے

$$\frac{\delta f}{\delta n_1} = 2(a_{11}n_1 + a_{12}n_2)$$

$$\frac{\delta f}{\delta n_2} = 2(a_{12}n_1 + a_{22}n_2)$$

مثلاً $n=3$ کے لیے

$$\frac{\delta f}{\delta n_1} = 2(a_{11}n_1 + a_{12}n_2 + a_{13}n_3)$$

$$\frac{\delta f}{\delta n_2} = 2(a_{12}n_1 + a_{22}n_2 + a_{23}n_3)$$

$$\frac{\delta f}{\delta n_3} = 2(a_{13}n_1 + a_{23}n_2 + a_{33}n_3)$$

$$f(n) = (n^T, An)$$

۱) اگر ماتریس A مثبت معین باشد، هر مقادیر در n مثبت باشند، تابع $f(n)$ را

$$f(n) \neq 0 \quad n^T A n > 0$$

زبان انتفاقی یافته، A یک ماتریس همبستگی یا یک ماتریس قطری با مقادیر مثبت در قطرهاست.

۲) اگر ماتریس A مثبت معین باشد، هر مقادیر در n مثبت باشند، تابع $f(n)$ را

$$f(n) \neq 0 \quad n^T A n < 0$$

این حالت زبان انتفاقی یافته، ماتریس A ماتریس قطری با مقادیر منفی در قطرهاست.

۳) اگر A همبستگی باشد (مثلاً در انتفاقی در n ضرب شود) تابع $f(n)$ می تواند

به ازای برخی n ها صفر شود.

$$n^T A n = 0$$

این حالت زبان انتفاقی یافته، ماتریس A در مقادیر در n ضرب شود به یک ماتریس انتفاقی باشد.