Introduction à la théorie des

GRAPHES

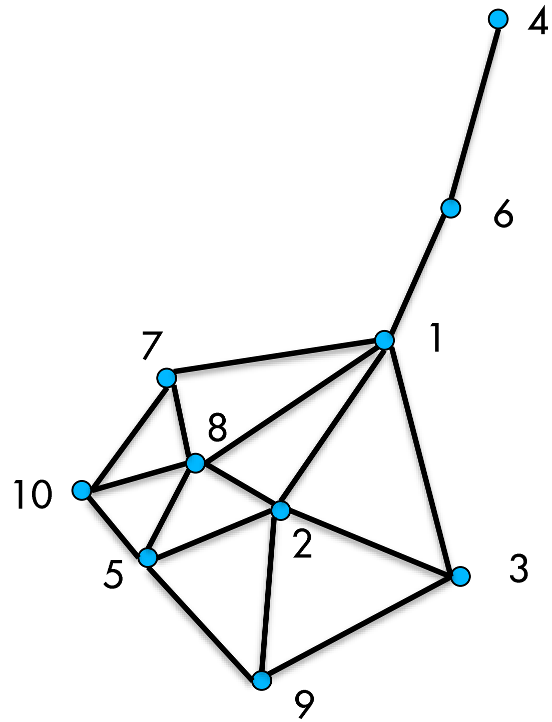
Partie I:Graphes et orientation

02.2017

Un petit dessin vaut mieux qu'un grand discours,
Napoléon

Menu

Quelle relation faites-vous entre ces deux images?



1.1- Graphes non-orientés

Dans la théorie des graphes, nous distinguons deux types de graphes:

- Les graphes orientés dans lesquels un ordre est défini
- Les graphes non-orientés dans lesquels un ordre n'est pas défini

Dans cette partie du cours, nous nous attarderons sur la définition de ces notions et leurs implications.

Nous verrons aussi quelques exemples pour nous permettre de mieux appréhender ces notions.

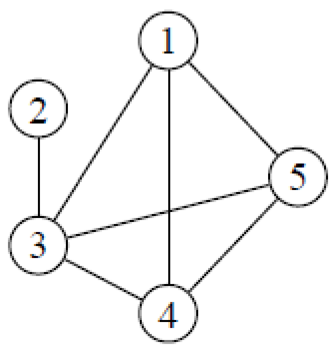
1.1- Graphes non-orientés

Représentation graphique

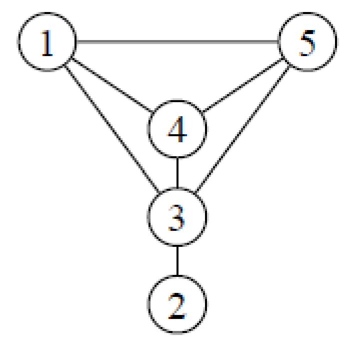
Les graphes tirent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. A chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Il existe donc une infinité de représentations d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.

1.1- Graphes non-orientés

Si on peut dessiner un graphe G dans le plan sans qu'aucune arête n'en coupe une autre (les arêtes ne sont pas forcément rectilignes), on dit que G est **planaire**. Le graphe G ci-dessus est planaire.



Une représentation non planaire du graphe G (des arêtes se croisent)

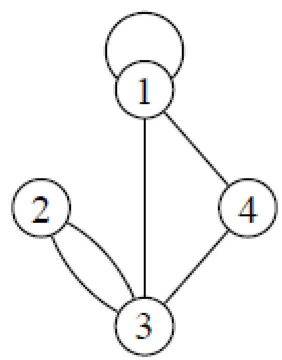


Une représentation planaire de G

1.1- Graphes non-orientés

Quelques types de graphes

Un graphe est **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet. On peut imaginer des graphes avec une arête qui relie un sommet à lui-même (une boucle), ou plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets. On appellera ces graphes des **multigraphes**.



Multigraphe

1.1- Graphes non-orientés

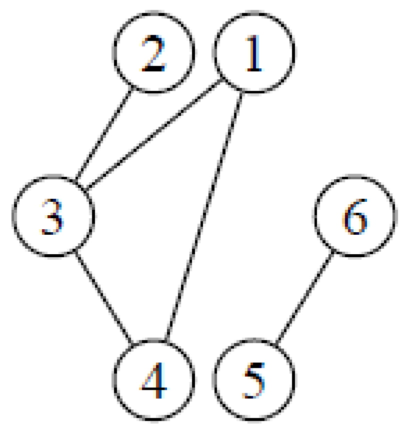
Quelques types de graphes

Un graphe est **connexe** s’il est possible, à partir de n’importe quel sommet, de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes. Un graphe non connexe se décompose en composantes connexes. Sur le graphe ci-dessous, les **composantes connexes** sont {1,2,3,4} et {5,6}.

Graphe non connexe

V = {1,2,3,4,5,6}

E = {{1,3},{1,4},{2,3},{3,4},{5,6}}



1.1- Graphes non-orientés

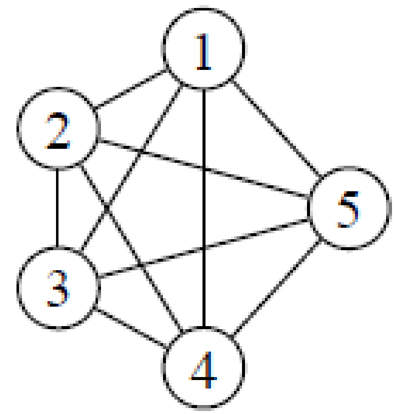
Quelques types de graphes

Un graphe est **complet** si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres sommets.

Graphe complet K_5

$V = \{1,2,3,4,5\}$

$E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$



1.1- Graphes non-orientés

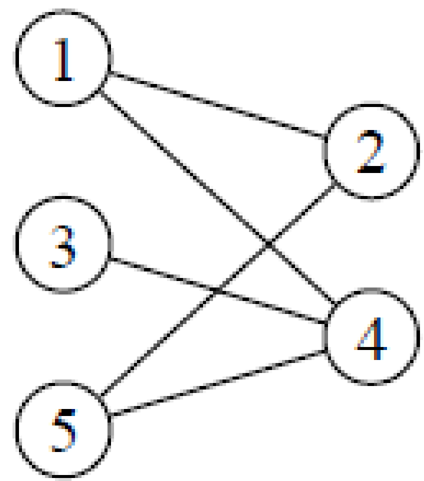
Quelques types de graphes

Un graphe est **biparti** si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans X à un sommet dans Y (dans l'exemple ci-dessous, on a X = {1,3,5} et Y = {2,4}, ou vice versa).

Graphe biparti

V = {1,2,3,4,5}

E = {{1,2},{1,4},{2,5},{3,4},{4,5}}



1.1- Graphes non-orientés

Exemple d'utilisation d'un graphe pour résoudre un problème

On a six wagons à trier. Dans la gare de triage, les wagons entrent dans l'ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent sortir dans l'ordre croissant. Deux wagons i et j peuvent être mis sur la même voie si et seulement s'ils entrent dans l'ordre dans lequel ils doivent sortir.

Dessinez un graphe illustrant la situation, en indiquant ce que représentent les sommets et les arêtes de votre graphe. Quel sera le nombre minimal de voies nécessaires au tri ?

1.1- Graphes non-orientés

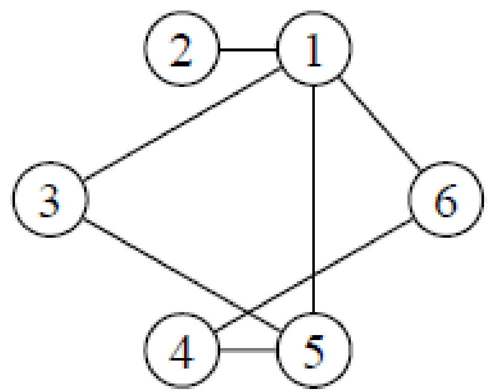
Exemple d'utilisation d'un graphe pour résoudre un problème

Solution

On représente les wagons par les sommets. Une arête relie deux sommets i et j si les wagons i et j ne peuvent pas être sur la même voie. On obtient le graphe ci-contre.

On voit que 1, 3 et 5 ne peuvent pas être sur la même voie.

Il faut donc trois voies au minimum.



1.1- Graphes non-orientés

Exercice 1

Trois professeurs P1 , P2 , P3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C1 , C2 , C3 :

P1 doit donner 2 heures de cours à C1 et 1 heure à C2 ;

P2 doit donner 1 heure de cours à C1 , 1 heure à C2 et 1 heure à C3 ;

P3 doit donner 1 heure de cours à C1 , 1 heure à C2 et 2 heures à C3 .

Comment représenter cette situation par un graphe ? Quel type de graphe obtenez-vous ?

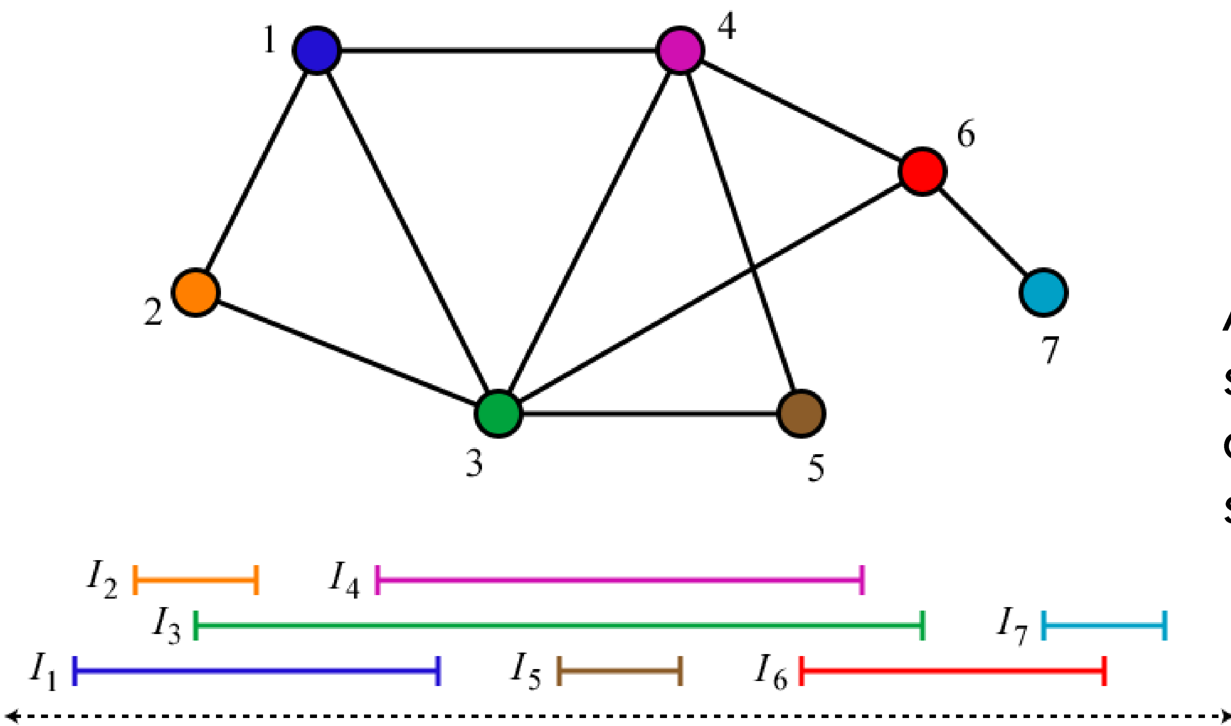
Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum?

Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

1.1- Graphes non-orientés

Graphes d'intervalles

On construit un graphe G à partir des intervalles de la droite réelle I1, . . . , In , où les sommets de G sont numérotés de 1 à n. Dans un graphe d'intervalles, il existe une arête entre les sommets i et j , i≠j , si et seulement si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.



Autrement dit, deux sommets sont reliés si et seulement si les deux intervalles correspondants se chevauchent.

1.1- Graphes non-orientés

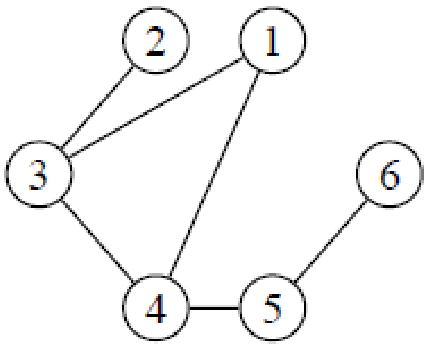
Graphe partiel et sous-graphe

Soit G = (V,E) un graphe. Le graphe G′ = (V,E′) est un **graphe partiel** de G, si E′ est inclus dans E . Autrement dit, on obtient G′ en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G.

Pour un sous-ensemble de sommets A inclus dans V , le **sous-graphe** de G induit par A est le graphe G ={A,E(A)} dont l'ensemble des sommets est A et l'ensemble des arêtes E(A) est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans A. Autrement dit, on obtient G′ en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G, ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.

1.1- Graphes non-orientés

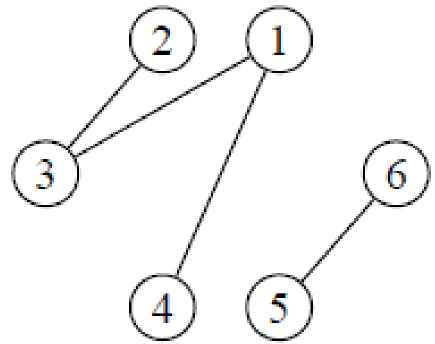
Graphe partiel et sous-graphe



Graphe G

$$V = \{1,2,3,4,5,6\}$$

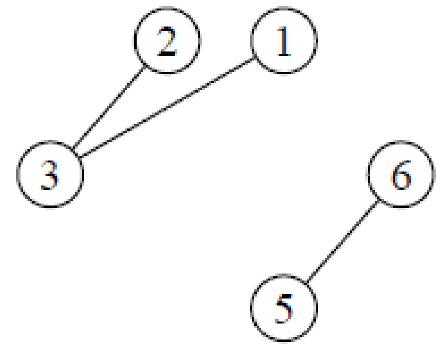
$$E = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}\}$$



Graphe partiel de G

$$V = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$E = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}$$



Sous-graphe de G

$$V = \{1,2,3,5,6\}$$

$$E = \{\{1,3\},\{2,3\},\{5,6\}\}$$

Un graphe partiel d'un sous-graphe est un **sous-graphe partiel** de G. On appelle clique un sous-graphe complet de G. Dans le graphe G ci-dessus, le sous-graphe K= (V,E), avec V = {1,3,4} et E = {{1,3},{1,4},{3,4}} est une **clique**.

1.1- Graphes non-orientés

Degrés

Degré d'un sommet

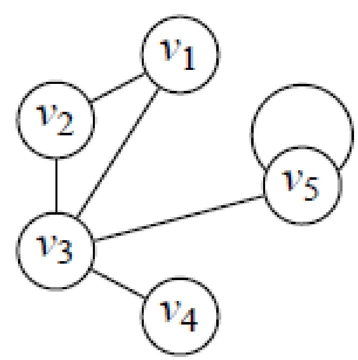
On appelle degré du sommet v, et on note d(v), le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Attention ! Une boucle sur un sommet compte double.

Dans un graphe simple, on peut aussi définir le degré d'un sommet comme étant le nombre de ses voisins (la taille de son voisinage).

Dans le multigraphe ci-contre, on a les degrés :

d(v1) = 2
d(v2) = 2
d(v3) = 4
d(v4) = 1
d(v5) = 3



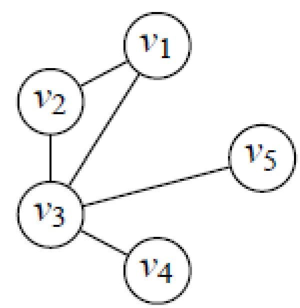
1.1- Graphes non-orientés

Théorème (Lemme des poignées de mains)

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Degré d'un graphe

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets. Dans l'exemple ci-dessous, le degré du graphe est 4, à cause du sommet v3 .



Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit **régulier**. Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est k-régulier.

1.1- Graphes non-orientés

Exercice

Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice

Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

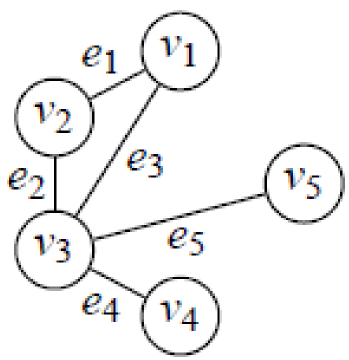
1.1- Graphes non-orientés

Chaînes et cycles

Une chaîne dans G, est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités.

On dira que la chaîne relie le premier sommet de la suite au dernier sommet. En plus, on dira que la chaîne a pour longueur le nombre d'arêtes de la chaîne.

Le graphe ci-dessous contient entre autres les chaînes (v1, e1, v2, e2, v3, e5, v5) et (v4, e4, v3, e2, v2, e1, v1).



On ne change pas une chaîne en inversant l'ordre des éléments dans la suite correspondante. Ainsi, les chaînes (v1, e3, v3, e4, v4) et (v4, e4, v3, e3, v1) sont identiques.

1.1- Graphes non-orientés

Chaînes et cycles

On appelle **distance** entre deux sommets la longueur de la plus petite chaîne les reliant.

On appelle **diamètre** d'un graphe la plus longue des distances entre deux sommets.

Une chaîne est **élémentaire** si chaque sommet y apparaît au plus une fois.

Une chaîne est **simple** si chaque arête apparaît au plus une fois. Dans le graphe précédent, (v1, e1, v2, e2, v3) est une chaîne simple et élémentaire.

Une chaîne dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes est appelée chaîne **fermée**.

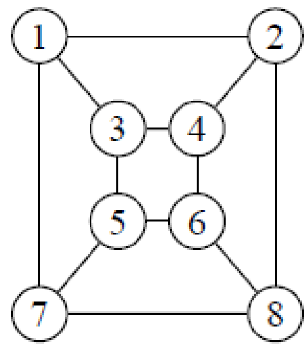
Dans le graphe précédent, (v4, e4, v3, e5, v5, e5, v3, e4, v4) est une chaîne fermée.

Une chaîne fermée simple est appelée **cycle**. Dans le graphe précédent, la chaîne (v1, e1, v2, e2, v3, e3, v1) est un cycle.

1.1- Graphes non-orientés

Chaînes et cycles

Théorème Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.



Exercice

Quels sont les graphes de diamètre 1 ?

1.1- Graphes non-orientés

Graphes eulériens

On appelle **cycle eulérien** d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un cycle eulérien.

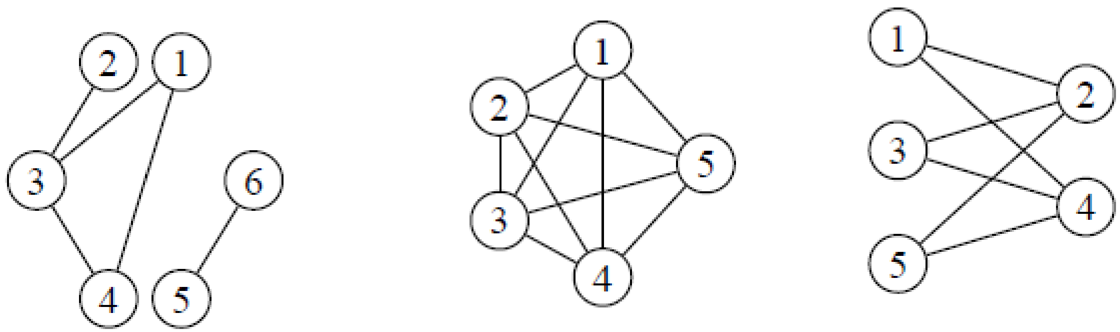
On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est **semi-eulérien**.

Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

1.1- Graphes non-orientés

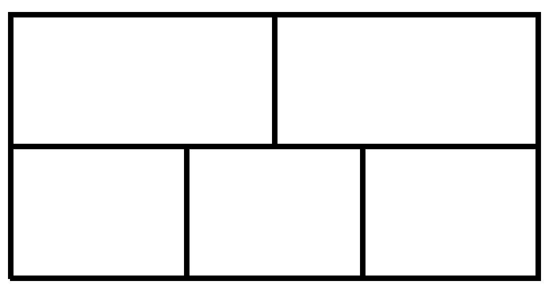
Exercice

Les graphes suivants sont-ils eulériens (ou semi-eulériens) ?



Exercice

Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



1.1- Graphes non-orientés

Graphes hamiltoniens

On appelle **cycle hamiltonien** d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe est dit **hamiltonien** s'il possède un cycle hamiltonien.

On appelle **chaîne hamiltonienne** d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est **semi-hamiltonien**.

Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes (semi-)hamiltoniens. On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

1.1- Graphes non-orientés

Graphes hamiltoniens

On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

– un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien ;

– si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien ;

– les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théorème (Ore) Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x)+d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.

1.1- Graphes non-orientés

Graphes hamiltoniens

On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

– un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien ;

– si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien ;

– les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théorème (Ore) Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x)+d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.

1.1- Graphes non-orientés

Exercice

Dessinez un graphe d'ordre au moins 5 qui est. . .

1) hamiltonien et eulérien

2) hamiltonien et non eulérien

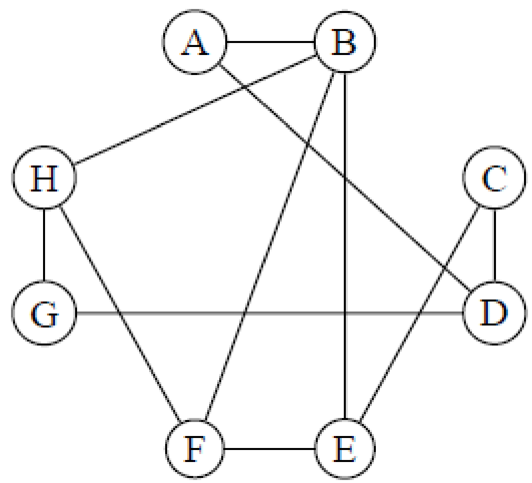
3) non hamiltonien et eulérien

4) non hamiltonien et non eulérien.

1.1- Graphes non-orientés

Exercice

Huit personnes se retrouvent pour un repas de mariage. Le graphe ci-dessous précise les incompatibilités d'humeur entre ces personnes (une arête reliant deux personnes indique qu'elles ne se supportent pas).



Proposez un plan de table (la table est ronde) en évitant de placer côte à côte deux personnes incompatibles.

1.1- Graphes non-orientés

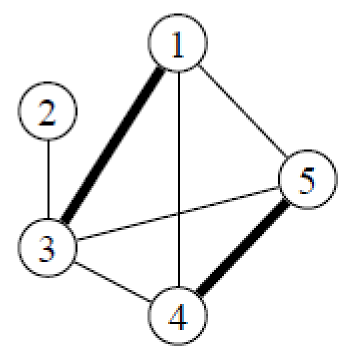
Couplages

Soit G un graphe simple. Un **couplage** C de G est un sous-graphe partiel 1-régulier de G. On peut aussi dire qu'un couplage (ou appariement) est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes.

Un sommet v est **saturé** par un couplage C si v est l'extrémité d'une arête de C. Dans le cas contraire, v est **insaturé**.

Un **couplage maximum** est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes.

Un graphe peut posséder plusieurs couplages maximum.

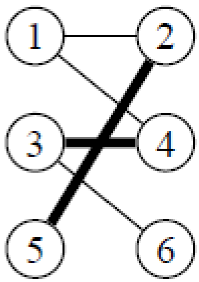


En gras, un couplage maximum de G. Les sommets 1, 3, 4 et 5 sont saturés.

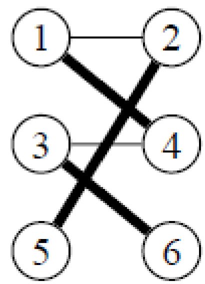
1.1- Graphes non-orientés

Couplages

Un couplage parfait est un couplage où chaque sommet du graphe est saturé.



Un couplage



Un couplage maximum et parfait

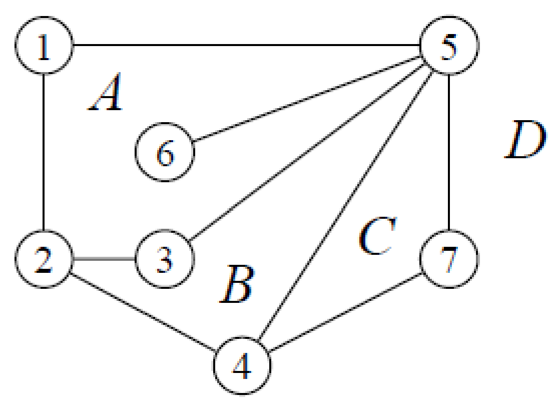
1.1- Graphes non-orientés

Graphes planaires

On dit qu'un graphe est planaire si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas. Rappelons que les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.

Une carte, ou graphe planaire topologique, est une représentation particulière d'un multigraphe planaire fini. On dit qu'une carte est connexe si son graphe l'est. Une carte divise le plan en plusieurs régions.

Par exemple, la carte ci-dessous, avec sept sommets et neuf arêtes, divise le plan en quatre régions (A,B,C,D). Trois régions sont limitées alors que la quatrième (D), extérieure au diagramme, ne l'est pas.

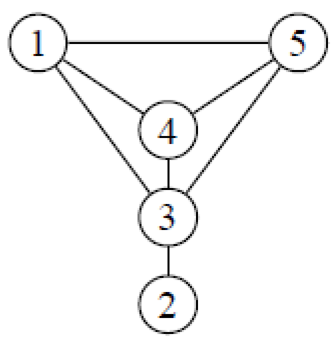


1.1- Graphes non-orientés

Représentations non graphiques d'un graphe

Matrice d'adjacences

On peut représenter un graphe simple par une matrice d'adjacences. Une matrice $(n \times m)$ est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j . Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Un « 1 » à la position (i, j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j .



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1- Graphes non-orientés

Représentations non graphiques d'un graphe

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

1. Elle est carrée : il y a autant de lignes que de colonnes.
2. Il n'y a que des zéros sur la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un « 1 » sur la diagonale indiquerait une boucle.
3. Elle est symétrique : $m_{ij} = m_{ji}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie.
4. Une fois que l'on fixe l'ordre des sommets, il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque graphe. Celle-ci n'est la matrice d'adjacences d'aucun autre graphe.

1.1- Graphes non-orientés

Représentations non graphiques d'un graphe

Listes d'adjacences

On peut aussi représenter un graphe simple en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets auxquels il est adjacent. Ce sont les listes d'adjacences.

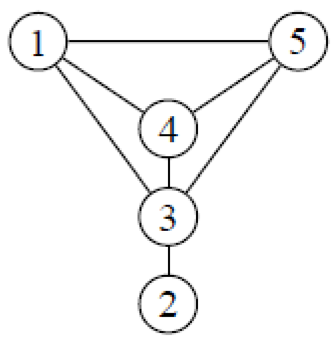
1 : 3, 4, 5

2 : 3

3 : 1, 2, 4, 5

4 : 1, 3, 5

5 : 1, 3, 4

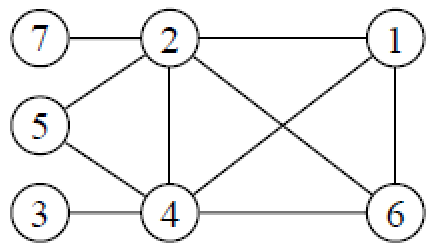


1.1- Graphes non-orientés

Représentations non graphiques d'un graphe

Exercice

Décrivez le graphe G ci-dessous par une matrice d'adjacences et des listes d'adjacences.

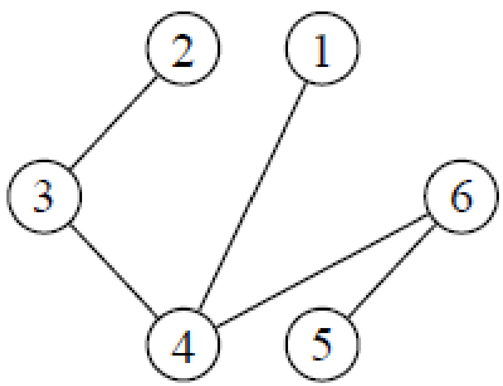


1.1- Graphes non-orientés

Arbres

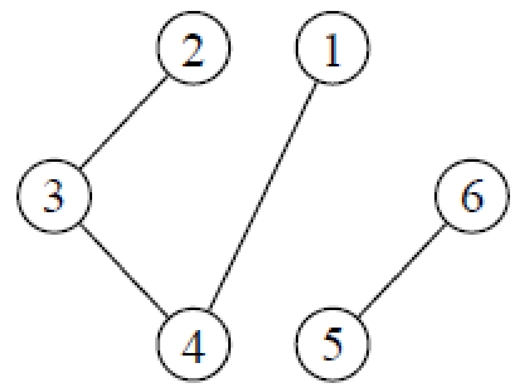
On appelle **arbre** tout graphe connexe sans cycle. Un graphe sans cycle mais non connexe est appelé une **forêt**.

Une **feuille** ou **sommet pendant** est un sommet de degré 1.



Arbre

Les sommets 1, 2 et 5 sont les feuilles



Forêt

Les sommets 1, 2, 5 et 6 sont les feuilles

1.1- Graphes non-orientés

Théorème

Les affirmations suivantes sont équivalentes pour tout graphe G à n sommets.

1. G est un arbre,
2. G est sans cycle et connexe,
3. G est sans cycle et comporte n-1 arêtes,
4. G est connexe et comporte n-1 arêtes,
5. chaque paire u, v de sommets distincts est reliée par une seule chaîne simple (et le graphe est sans boucle).

1.1- Graphes non-orientés

Exercice

Combien d'arbres différents existe-t-il avec 5 sommets ? avec 6 sommets ? avec 7 sommets ?

1.1- Graphes non-orientés

Arbre couvrant de poids minimum

Soit le graphe G = (V,E) avec un poids associé à chacune de ses arêtes. On veut trouver, dans G, un arbre maximal A = (V,F) de poids total minimum.

Algorithme de Kruskal (1956)

Données :

– Graphe G = (V,E) ($|V| = n$, $|E| = m$)

– Pour chaque arête e de E , son poids c(e).

Résultat : Arbre ou forêt maximale A = (V,F) de poids minimum.

1.1- Graphes non-orientés

Arbre couvrant de poids minimum

Trier et renuméroter les arêtes de G dans l'ordre croissant de leur poids :

$c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots \leq c(e_m)$.

Poser $F := \emptyset$, $k := 0$

Tant que $k < m$ et $|F| < n-1$ faire

  Début

    si e_{k+1} ne forme pas de cycle avec F alors $F := F \cup \{e_{k+1}\}$

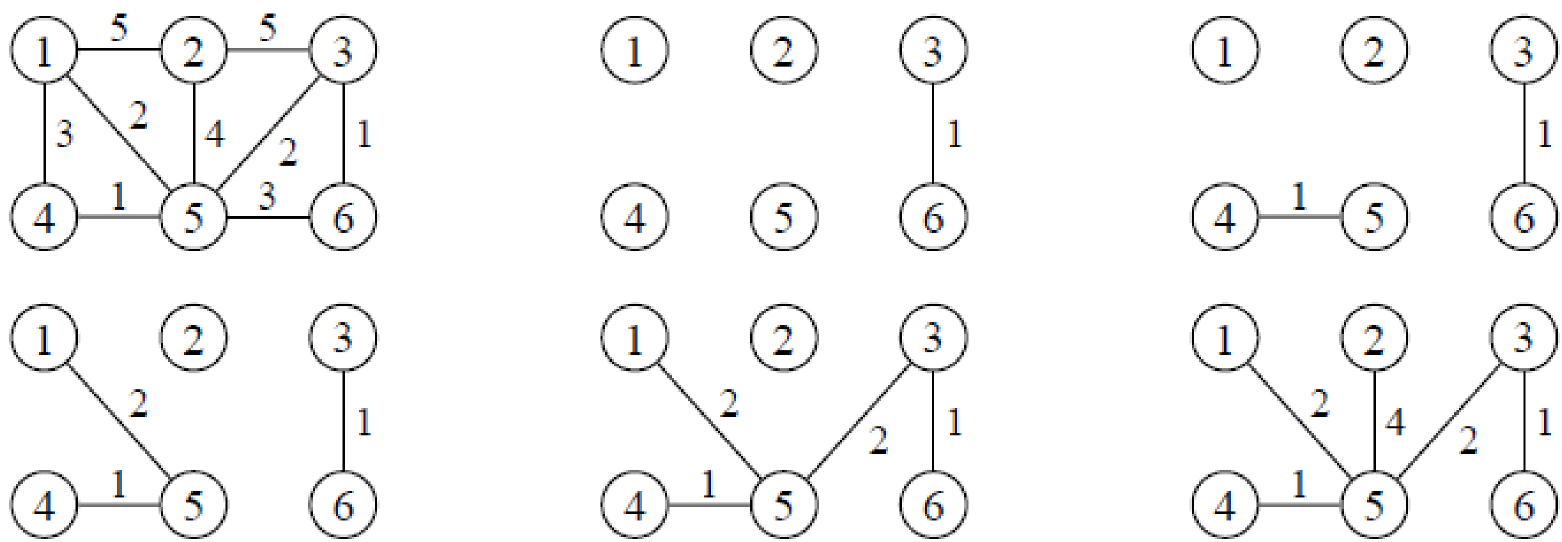
    $k := k+1$

  Fin

1.1- Graphes non-orientés

Arbre couvrant de poids minimum

Exemple



Les arêtes de poids 3 n'ont pas pu être placées, car elles auraient formé un cycle. L'algorithme s'est arrêté dès que cinq arêtes ont été placées. Toute arête supplémentaire aurait créé un cycle.

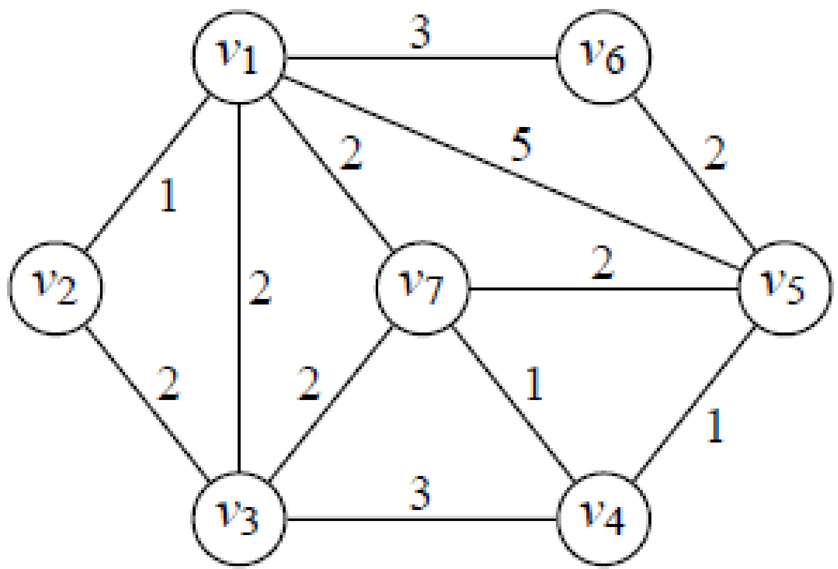
S'il y a plusieurs arêtes de même poids, il peut y avoir plusieurs arbres couvrants de poids minimum : tout dépend de l'ordre dans lequel ces arêtes ont été triées.

1.1- Graphes non-orientés

Arbre couvrant de poids minimum

Exercice

Trouvez tous les arbres couvrants de poids minimum du graphe ci-après (les chiffres sur les arêtes représentent leur poids).

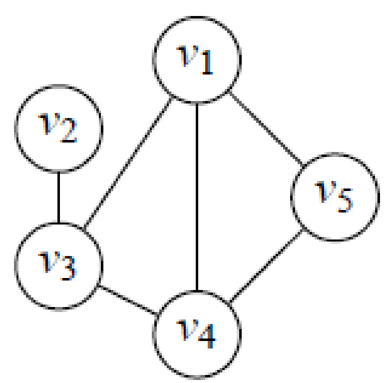


1.1- Graphes non-orientés

Coloration

Soit G = (V,E) un graphe. Un sous-ensemble S de V est un stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux. Dans le graphe ci-dessous, $\{v_1, v_2\}$ forment un stable ; $\{v_2, v_4\}$ aussi, ainsi que $\{v_2, v_5\}$ et $\{v_3, v_5\}$.

Le cardinal du plus grand stable est le nombre de stabilité de G ; on le note $\alpha(G)$. Dans le graphe ci-dessous, on a $\alpha(G)=2$.



1.1- Graphes non-orientés

Coloration

La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k stables.

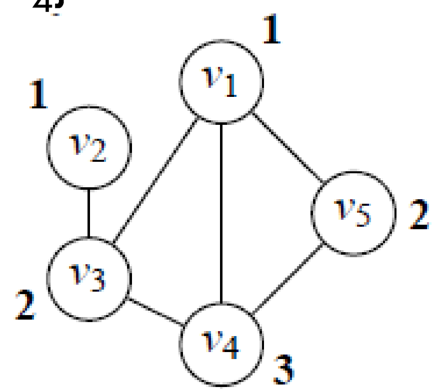
Le nombre chromatique du graphe G, noté $\gamma(G)$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de V en k sous-ensembles stables.

Sur le graphe ci-dessous, on a eu besoin de trois couleurs (notées 1, 2 et 3) pour colorer les sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. On a donc trois stables : $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_5\}$ et $\{v_4\}$. On ne peut pas utiliser moins de couleurs, à cause des cliques $\{v_1, v_4, v_5\}$ et $\{v_1, v_3, v_4\}$.

1.1- Graphes non-orientés

Coloration

Sur le graphe ci-dessous, on a eu besoin de trois couleurs (notées 1, 2 et 3) pour colorer les sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. On a donc trois stables : $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_5\}$ et $\{v_4\}$. On ne peut pas utiliser moins de couleurs, à cause des cliques $\{v_1, v_4, v_5\}$ et $\{v_1, v_3, v_4\}$.



Remarquons enfin que le sommet v_2 aurait aussi pu être coloré « 3 ». La coloration minimale n'est donc pas forcément unique.

1.2- Graphes orientés

1.2- Graphes orientés

En donnant un sens aux arêtes d'un graphe, on obtient un **digraphe** (ou **graphe orienté**). Le mot « digraphe » est la contraction de l'expression anglaise « directed graph ».

Un digraphe fini $G = (V,E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, . . . , v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, . . . , e_m\}$ dont les éléments sont appelés **arcs**.

Un arc e de l'ensemble E est défini par une paire ordonnée de sommets. Lorsque $e=(u, v)$, on dit que l'arc e va de u à v. On dit aussi que u est l'extrémité initiale et v l'extrémité finale de e.

1.2- Graphes orientés

Degré d'un sommet d'un digraphe

Soit v un sommet d'un graphe orienté.

On note $d^+(v)$ le degré extérieur du sommet v, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité initiale.

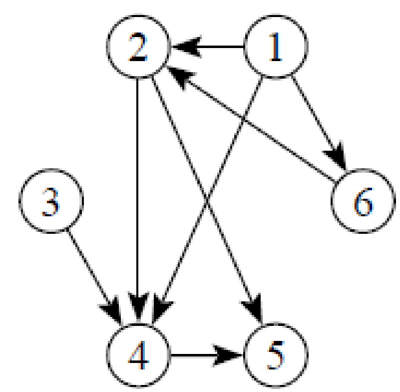
On note $d^-(v)$ le degré intérieur du sommet v, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité finale.

On définit le degré :

$$d(v) = d^+(v)+d^-(v)$$

Exercice

Trouvez les degrés extérieurs et intérieurs de chacun des sommets du graphe ci-contre:



1.2- Graphes orientés

Chemins et circuits

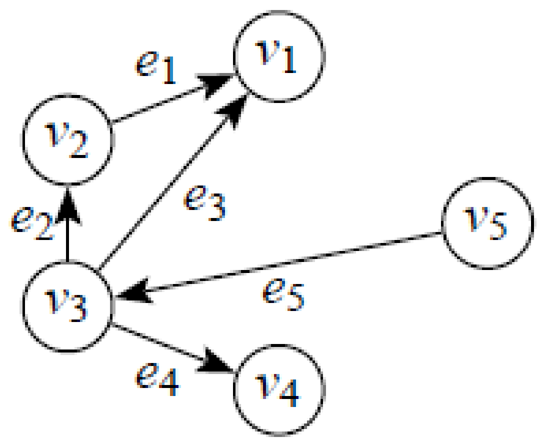
Un chemin conduisant du sommet a au sommet b est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arcs, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arc est encadré à gauche par son sommet origine et à droite par son sommet destination. On ne peut donc pas prendre les arc à rebours. Sur le digraphe ci-après, on peut voir par exemple le chemin (v_3, e_2, v_2, e1 , v_1). Par convention, tout chemin comporte au moins un arc.

On appelle distance entre deux sommets d'un digraphe la longueur du plus petit chemin les reliant. S'il n'existe pas de chemin entre les sommets x et y, on pose $d(x, y) = \infty$.

1.2- Graphes orientés

Chemins et circuits

Par exemple, sur le digraphe ci-dessous, $d(v_5, v_4) = 2$, $d(v_4, v_5) = \infty$, $d(v_3, v_1) = 1$



Un circuit est un chemin dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes. Le digraphe ci-dessus ne contient pas de circuit.

Les notions de chemins et de circuits sont analogues à celles des chaînes et des cycles pour les graphes non orientés.

1.2- Graphes orientés

Digraphe fortement connexe

Un digraphe est **fortement connexe**, si toute paire ordonnée (a,b) de sommets distincts du graphe est reliée par au moins un chemin. En d'autres termes, tout sommet est atteignable depuis tous les autres sommets par au moins un chemin.

Un digraphe est **connexe** s'il existe un sommet à partir duquel n'importe quel autre sommet peut être atteint.

On appelle **composante fortement connexe** tout sous-graphe induit maximal fortement connexe (maximal signifie qu'il n'y a pas de sous-graphe induit connexe plus grand contenant les sommets de la composante).

1.2- Graphes orientés

Représentations non graphiques des digraphes

Matrice d'adjacences

On peut représenter un digraphe par une matrice d'adjacences. Une matrice (n x m) est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

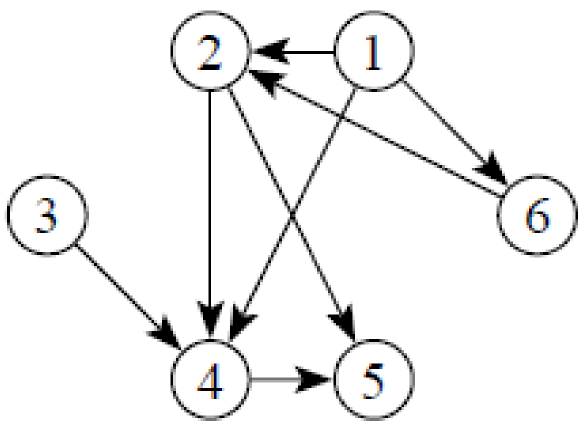
Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Un « 1 » à la position (i, j) signifie qu'un arc part de i pour rejoindre j .

1.2- Graphes orientés

Représentations non graphiques des digraphes

Exemple

Voici la matrice d'adjacences du digraphe G :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2- Graphes orientés

Représentations non graphiques des digraphes

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

1. Elle est carrée : il y a autant de lignes que de colonnes.
2. Il n'y a que des zéros sur la diagonale. Un « 1 » sur la diagonale indiquerait une boucle.
3. Contrairement à celle d'un graphe non orienté, elle n'est pas symétrique.
4. Une fois que l'on fixe l'ordre des sommets, il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque digraphe. Celle-ci n'est la matrice d'adjacences d'aucun autre digraphe.

1.2- Graphes orientés

Représentations non graphiques des digraphes

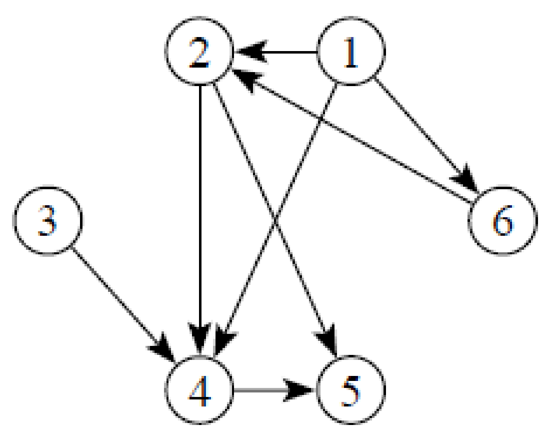
Listes d'adjacences

On peut aussi représenter un digraphe en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets qu'on peut atteindre directement en suivant un arc (dans le sens de la flèche).

Exemple

Voici les listes d'adjacences du digraphe G :

1 : 2, 4, 6
2 : 4, 5
3 : 4
4 : 5
5 : –
6 : 2

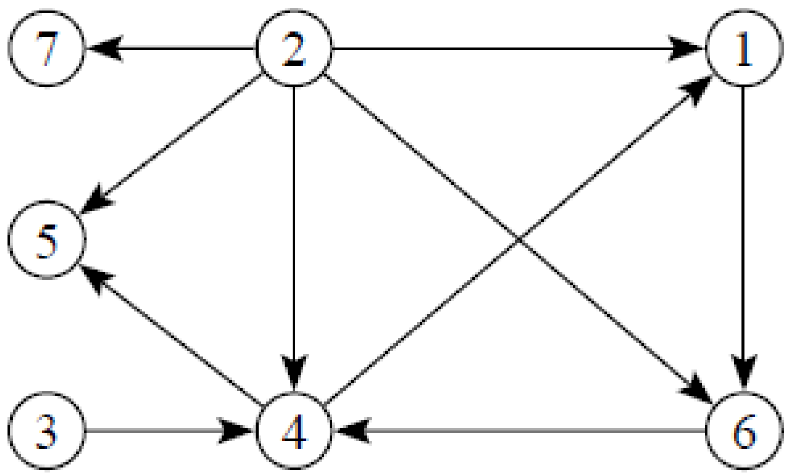


1.2- Graphes orientés

Représentations non graphiques des digraphes

Exercice

Décrivez le graphe G ci-dessous par une matrice d'adjacences et des listes d'adjacences.



1.2- Graphes orientés

Algorithme de Dijkstra

Edgser Wybe Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres. Le résultat est une **arborescence**, c'est-à-dire un arbre avec un sommet particulier appelé **racine**.

Numérotons les sommets du graphe G = (V,E) de 1 à n. Supposons que l'on s'intéresse aux chemins partant du sommet 1. On construit un vecteur $\lambda = \lambda(1); \lambda(2); \ldots ; \lambda(n)$ ayant n composantes tel que $\lambda(j)$ soit égal à la longueur du plus court chemin allant de 1 au sommet j . On initialise ce vecteur à c_{1j} , c'est-à-dire à la première ligne de la matrice des coûts du graphe, définie comme indiqué ci-dessous :

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } i \neq j \text{ et } (i,j) \notin E \\ \delta(i,j) & \text{si } i \neq j \text{ et } (i,j) \in E \end{cases}$$

où $\delta(i, j) > 0$ est le poids de l'arc (i, j).

1.2- Graphes orientés

Algorithme de Dijkstra

On considère ensuite deux ensembles de sommets, S initialisé à {1} et T initialisé à {2,3, . . . ,n}. A chaque pas de l'algorithme, on ajoute à S un sommet jusqu'à ce que S =V de telle sorte que le vecteur λ donne à chaque étape la longueur minimale des chemins de 1 aux sommets de S.

On suppose que le sommet de départ (qui sera la racine de l'arborescence) est le sommet numéroté1. Notons qu'on peut toujours renuméroter les sommets pour que ce soit le cas.

1.2- Graphes orientés

Algorithme de Dijkstra

Initialisations

$\lambda(j) = c_{1j}$ et $p(j) = \text{NIL}$, pour $1 \leq j \leq n$
Pour $2 \leq j \leq n$ **faire**
    Si $c_{1j} < \infty$ **alors** $p(j) = 1$.
$S = 1$; $T = \{2, 3, \ldots, n\}$.

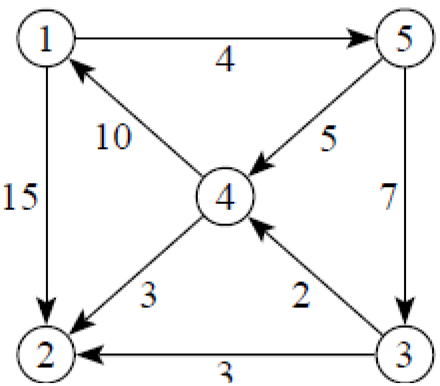
Itérations

Tant que T n'est pas vide **faire**
    Choisir i dans T tel que $\lambda(i)$ est minimum
    Retirer i de T et l'ajouter à S
    Pour chaque successeur j de i, avec j dans T, **faire**
        Si $\lambda(j) > \lambda(i) + \delta(i, j)$ **alors**
            $\lambda(j) = \lambda(i) + \delta(i, j)$
            $p(j) = i$

1.2- Graphes orientés

Algorithme de Dijkstra

Exemple



Initialisations

$S=\{1\}\ ;\ T=\{2,3,4,5\}\ ;\ \lambda=(0,15,\infty,\infty,4)\ ;\ p=(\mathrm{NIL},1,\mathrm{NIL},\mathrm{NIL},1)$

1ère itération

$i=5$ car $\lambda(5)=\min(15,\infty,\infty,4)=4$

$S=\{1,5\}\ ;\ T=\{2,3,4\}$

les successeurs de 5 dans T sont 3 et 4

$\lambda(3)$ prend la nouvelle valeur $\min(\infty;\lambda(5)+\delta(5;3))=\min(\lambda;4+7)=11\ ;\ p(3)=5$

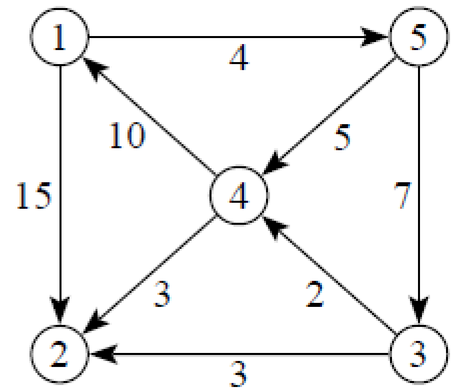
$\lambda(4)$ prend la nouvelle valeur $\min(\infty;\lambda(5)+\delta(5;4))=9\ ;\ p(4)=5$

d'où les nouveaux vecteurs $\lambda=(0,15,11,9,4)$ et $p=(\mathrm{NIL},1,5,5,1)$

1.2- Graphes orientés

Algorithme de Dijkstra

Exemple



2ème itération

$i = 4$; $\lambda(4) = 9$

$S = \{1, 5, 4\}$; $T = \{2, 3\}$

le seul successeur de 4 dans T est 2

$\lambda(2)$ prend la nouvelle valeur $\min(15; \lambda(4) + \delta(4;2)) = \min(15; 9+3) = 12$; $p(2) = 4$

d'où les nouveaux vecteurs $\lambda = (0, 12, 11, 9, 4)$ et $p = (\text{NIL}, 4, 5, 5, 1)$

3ème itération

$i = 3$; $\lambda(3) = 11$

$S = \{1, 5, 4, 3\}$; $T = \{2\}$

le seul successeur de 3 dans T est 2

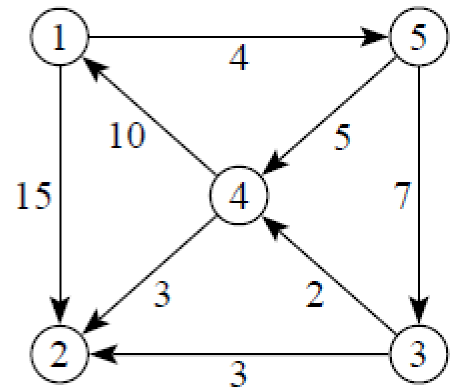
$\lambda(2)$ garde sa valeur car $\min(12; \lambda(3) + \delta(3;2)) = \min(12; 11+3) = 12$

d'où les vecteurs inchangés $\lambda = (0, 12, 11, 9, 4)$ et $p = (\text{NIL}, 4, 5, 5, 1)$

1.2- Graphes orientés

Algorithme de Dijkstra

Exemple



4ème itération

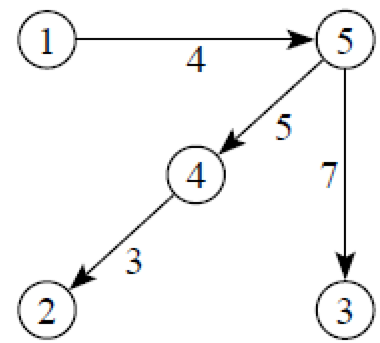
$i = 2$; $\lambda(2) = 12$

$S = \{1,5,4,3,2\}$; $T = \{\}$

$\lambda = (0,12,11,9,4)$

$p = (\text{NIL},4,5,5,1)$

L'algorithme se termine, car $T = \{\}$.



On peut lire les coûts des chemins les plus courts dans l et les chemins eux-mêmes grâce au vecteur p. Par exemple, le chemin minimal de 1 à 4 est de coût 9, car l (4) = 9. C'est le chemin 1–5–4, car p(4) = 5 et p(5) =1. Voici la réponse sous forme d'arborescence :

1.2- Graphes orientés