Introduction à la théorie des

GRAPHES

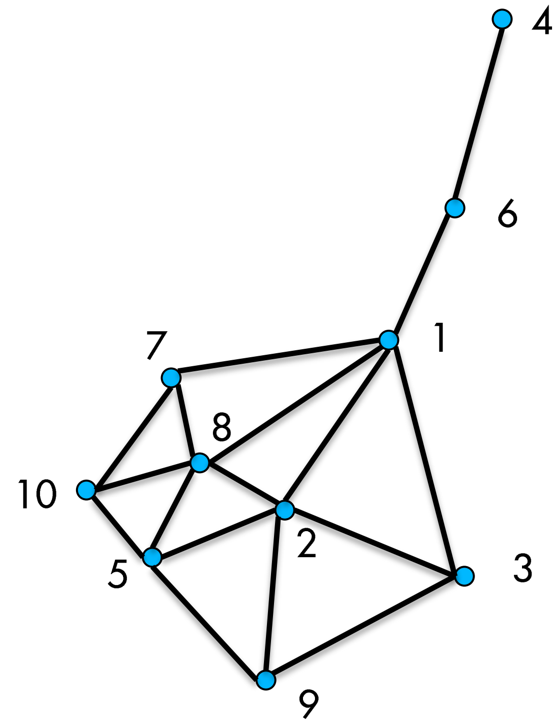
Partie I:Graphes et orientation

09.2016

Un petit dessin vaut mieux qu'un grand discours,
Napoléon

Menu

Quelle relation faites-vous entre ces deux images?



1- Graphe et orientation

Dans la théorie des graphes, nous distinguons deux types de graphes:

- Les graphes orientés dans lesquels un ordre est défini
- Les graphes non-orientés dans lesquels un ordre n'est pas défini

Dans cette partie du cours, nous nous attarderons sur la définition de ces notions et leurs implications.

Nous verrons aussi quelques exemples pour nous permettre de mieux appréhender ces notions.

1.1- Graphes orientés

Définition I.1. Soient V un ensemble (fini ou infini) et E une partie de $V \times V$ (i.e., une relation sur V). Le graphe G = (V,E) est la donnée du couple (V,E).

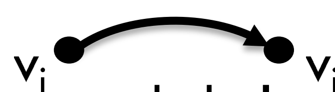
Les éléments de **V** sont appelés les **sommets ou noeuds** (ou encore Vertex en anglais – Vertices au pluriel) de G.
Les éléments de **E** sont appelés les **arcs ou arêtes** (ou encore Edge en anglais – Edges au pluriel) de G.

Si **V est fini**, on parlera de **graphe fini** (en particulier, E est alors fini et contient au plus $(\#V)^2$ arcs).

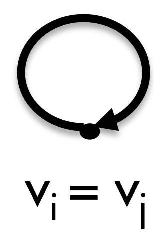
1.1- Graphes orientés

Remarque I.1. Dans un **graphe orienté** encore appelé **graphe dirigé**, l'ordre au sein des **couples** appartenant à E est intrinsèquement présent. On parle de couple et non de paire parce qu'un couple est une paire ordonnée.

Soit I, un ensemble d'indices. Si $V = \{v_i \mid i \in I\}$ et si $\mathbf{a = (v_i, v_j)}$, $i, j \in I$, on pourra alors parler de **l'origine v_i** et de la **destination v_j** de l'arc a. On dit que v_i et v_j sont les extrémités de l'arc a et que a relie v_i à v_j . Les sommets sont représentés par des points et si (v_i, v_j) est un arc, alors on trace une flèche de v_i vers v_j. **Deux arcs sont adjacents s'ils ont au moins une extrémité en commun.**



Si $\mathbf{b = (v_i, v_i)}$, on parle généralement de la **boucle b.**



1.1- Graphes orientés

Définition I.2. Soit $a = (v_i, v_j) \in E$. On dit que *a* est un **arc sortant de v_i** ou encore que *a* est un arc incident à v_i vers l'extérieur (resp. un **arc entrant** dans v_j ou encore que *a* est un arc incident à v_j vers l'intérieur).

L'ensemble des arcs sortant de vi est noté $\omega^+(v_i)$ et l'ensemble des arcs entrant dans v_j est noté $\omega^-(v_j)$. L'ensemble des arcs incidents à un sommet *v* est

$$\omega(v) := \omega^+(v) \cup \omega^-(v).$$

On définit le **demi-degré** sortant (resp. demi degré entrant) d'un sommet v par:

$$d^+(v) = \#(\omega^+(v)) \qquad (\text{resp. } d^-(v) = \#(\omega^-(v))).$$

1.1- Graphes orientés

Si G = (V,E) est un graphe fini, il est clair que

$$\sum_{v \in V} d^{+}(v) = \sum_{v \in V} d^{-}(v)$$

Handshaking formula

Enfin, le degré de v est $\deg(v) = d^{+}(v) + d^{-}(v)$. L'ensemble des successeurs d'un sommet v est l'ensemble $succ(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$ des sommets si tels que $(v, s_i) \in \omega^{+}(v)$, i.e., $(v, s_i) \in E$. De manière analogue, l'ensemble des prédécesseurs d'un sommet v est l'ensemble $pred(v) = \{s_1, \dots, s_k\}$ des sommets si tels que $(s_i, v) \in \omega^{-}(v)$, i.e., $(s_i, v) \in E$. Enfin, l'ensemble des voisins de v est simplement $\mathcal{v}(v) = pred(v) \cup succ(v)$.

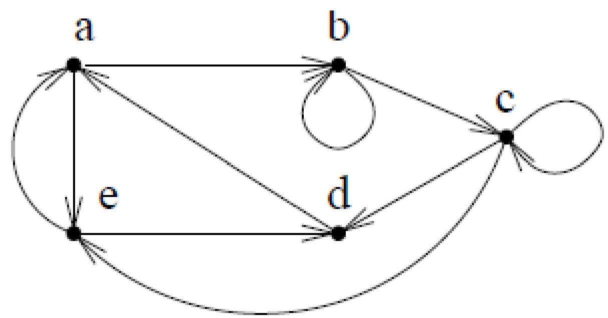
Si $u \in \mathcal{v}(v)$, on dit que u et v sont des sommets voisins ou **adjacents**.

1.1- Graphes orientés

Soit le graphe $G = (V, E)$ où $V = \{a, b, c, d, e\}$ et

$E = \{(a, b), (a, e), (b, b), (b, c), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (e, a), (e, d)\}$.

Celui-ci est représenté à la figure ci-dessus.



$\omega^+(a) = \{(a, b), (a, e)\}$ et $\omega^-(d) = \{(c, d), (e, d)\}$. On a aussi $succ(a) = \{b, e\}$, $succ(b) = \{b, c\}$, $pred(d) = \{c, e\}$ et $\nu(a) = \{b, d, e\}$. On voit aussi que les arcs (e, a) et (d, a) sont adjacents. Enfin, le demi-degré sortant de c est $d^+(c) = 3$.

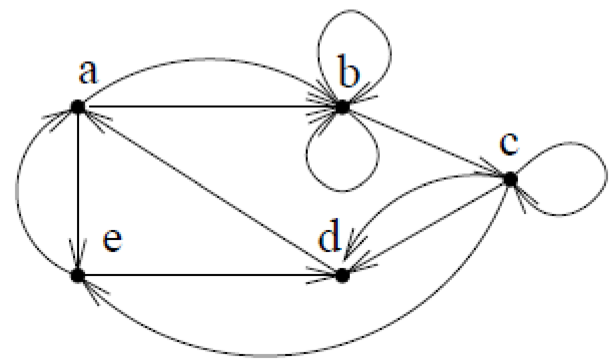
1.1- Graphes orientés

Définition I.3. Un **multi-ensemble** est un ensemble au sein duquel **un même élément peut être répété plus d'une fois**. Ainsi, on s'intéresse non seulement à savoir si un élément appartient ou non à un multi-ensemble donné, mais également à sa multiplicité.

Par exemple, {1, 1, 2, 3}, {1, 2, 3} et {1, 2, 2, 3} sont des multi-ensembles distincts. Pour **distinguer les copies** d'un même élément x, il est commode de **les indicer**. Par exemple, on considère le multi-ensemble $\{1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 3\}$. Cette manière de procéder nous permettra de définir facilement des fonctions définies sur un multi-ensemble.

1.1- Graphes orientés

Un **multi-graphe** G = (V,E) est un graphe pour lequel **l'ensemble E des arcs est un multi-ensemble**. Autrement dit, il **peut exister plus d'un arc reliant deux sommets donnés**. Un exemple de représentation d'un multigraphe est donné à la figure suivante.



Un multi-graphe $G = (V, E)$ est fini si V et E sont finis. (En effet, dans le cas des multi-graphes, supposer V fini n'implique pas que E soit fini.)

Soit $p \geq 1$. Un $\boldsymbol{p-graphe}$ est un multi-graphe $G = (V, E)$ pour lequel tout arc de E est répété au plus p fois. En particulier, un 1-graphe est un graphe.

1.1- Graphes orientés

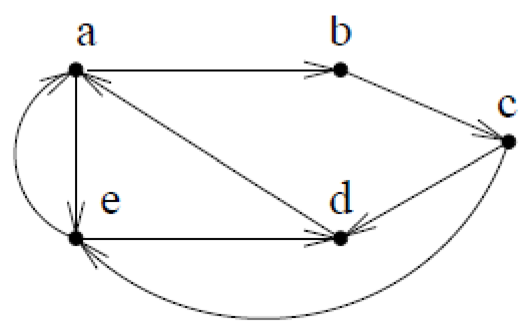
Remarque I.2. On peut observer que la remarque I.1, la définition I.2 et la « handshaking formula » s'appliquent également au cas des multigraphes.

Il est laissé au lecteur le soin d'adapter les définitions de $\omega^+(v)$, $d^+(v)$, succ(v) et $\omega^-(v)$, $d^-(v)$, pred(v). En particulier, $\omega^+(v)$ et $\omega^-(v)$ sont en général des multi-ensembles.

1.1- Graphes orientés

Définition I.4. Un **graphe** $G = (V, E)$ est dit **simple** (ou strict) s'il ne s'agit pas d'un multi-graphe et si E est irréflexif, c'est-à-dire que quel que soit $v \in V$, $(v, v) \notin E$ (i.e., G ne contient pas de boucle).

Un exemple de graphe simple est donné à la figure suivante.



1.2- Graphes non orientés

Les graphes non orientés sont en fait un cas particulier de graphes (orientés).

Définition 2.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe (resp. un multi-graphe). Si $\boldsymbol{E}$ **est une relation symétrique sur** $\boldsymbol{V}$, on dira que G est un graphe (resp. un multi-graphe) non dirigé ou **non orienté**. Autrement dit, G est non dirigé si

$$\forall v1, v2 \in V : (v1, v2) \in E \Rightarrow (v2, v1) \in E.$$

Dans ce cas, on simplifie la représentation sagittale de G en traçant simplement un segment entre v_1 et v_2. Pour alléger l'écriture, on identifiera les arcs (v_i, v_j) et (v_i, v_j) avec une unique « arête non orientée » donnée par la paire $\{v_i, v_j\}$. Dans le cas dirigé (resp. non dirigé), nous nous efforcerons de parler d'arcs (resp. d'arêtes). Si par contre, on désire insister sur le caractère non symétrique de E, on parlera de graphe dirigé ou, par abus de langage, digraphe (directed graph).

Les définitions rencontrées précédemment s'adaptent aisément au cas non orienté.

1.2- Graphes non orientés

Définition 2.2. Soient $G = (V, E)$, un multi-graphe non orienté et $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j}\}$ une de ses arêtes. On dit que **a est incident aux sommets $\boldsymbol{v_i}$ et $\boldsymbol{v_j}$**. Le nombre d'arêtes incidentes à v_i est le degré de v_i, noté $\deg(v_i)$. On suppose en outre que les boucles apportent une double contribution au degré d'un sommet. L'ensemble des arêtes incidentes à v_i se note $\omega(v_i)$. Il est clair que, dans un graphe simple, $\deg(v_i) = \#(\omega(v_i))$.

Ces notations sont bien évidemment compatibles avec celles données dans le cas orienté. Deux arêtes sont adjacentes si elles ont au moins une extrémité en commun.

Deux sommets v_i, $v_j \in V$ sont adjacents si l'arête $\{v_i, v_j\}$ appartient à E. On dit aussi qu'ils sont voisins. L'ensemble des voisins de v se note $\mathcal{v}(v)$.

Enfin, la définition d'un p-graphe est analogue à celle donnée dans le cas orienté.

1.2- Graphes non orientés

Remarque 2.1. (Handshaking lemma). Si G = (V,E) est un multigraphe non orienté, alors

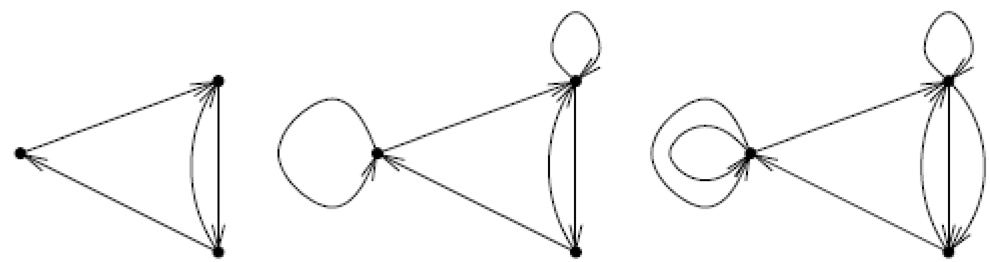
$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2\#E$$

C'est immédiat. (Et on comprend mieux la double contribution des boucles pour le degré d'un sommet…)

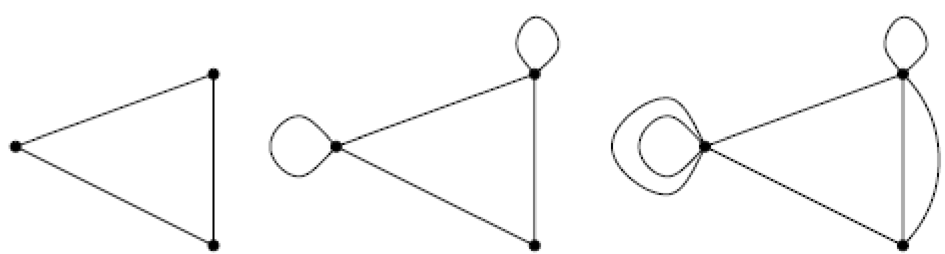
L'exemple suivant illustre les différentes classes de graphes rencontrées jusqu'à présent. Bien sûr, tout graphe simple est un graphe et tout graphe est un multi-graphe.

1.2- Graphes non orientés

Cas dirigé, un graphe simple, un graphe, et un multi-graphe.



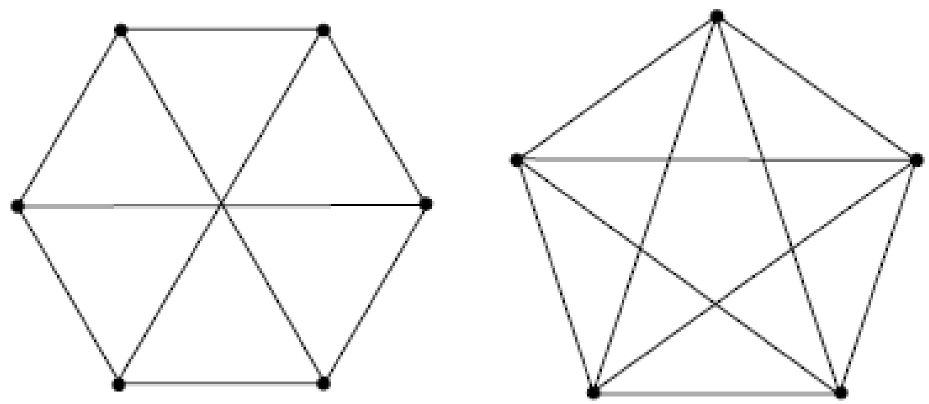
Les mêmes éléments dans le cas non orienté



1.2- Graphes non orientés

Définition 2.3. Soit k ≥ 1. Un multi-graphe orienté (resp. non orienté) $G = (V, E)$ est k-régulier si pour tout $v \in V$, $d^+(v) = k$ (resp. $\deg(v) = k$).

Le graphe de gauche (resp. de droite) est 3-régulier (resp. 4-régulier). Le graphe de droite est en particulier simple et complet.



1.2- Graphes non orientés

Un **graphe** $G = (V, E)$ est **complet si** $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$, plus exactement, on suppose souvent que

$$E = V \times V \{(v, v) \mid v \in V\}$$

(autrement dit, on ne tient pas compte des boucles). En particulier, un graphe complet est symétrique. On note K_n le graphe simple non orienté complet à n sommets. Ainsi, la figure précédente représente le graphe K_5.

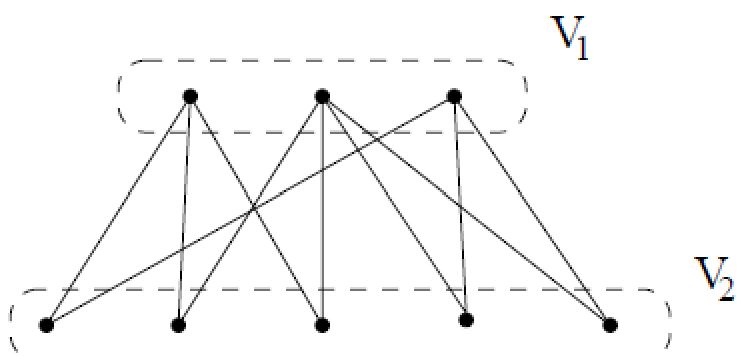
Dans ce cours, lorsqu'on parlera de graphes complets, il sera sous-entendu qu'il s'agit de graphes simples et non orientés.

1.2- Graphes non orientés

Définition 2.4. Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si V peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 de manière telle que $E \subseteq V_1 \times V_2$.

Si $\#V_1 = m$, $\#V_2 = n$ et $E = V_1 \times V_2$, alors on parle du graphe biparti complet et il est noté $K_{m,n}$. On peut généraliser cette notion et définir des graphes n-partis, pour $n \geq 2$. Pour ce faire, V doit être partitionné en n sous-ensembles $V_1, \ldots, V_n$ de manière telle que

$$E \subseteq \bigcup_{i \neq j} V_i \times V_j$$



1.2- Graphes non orientés

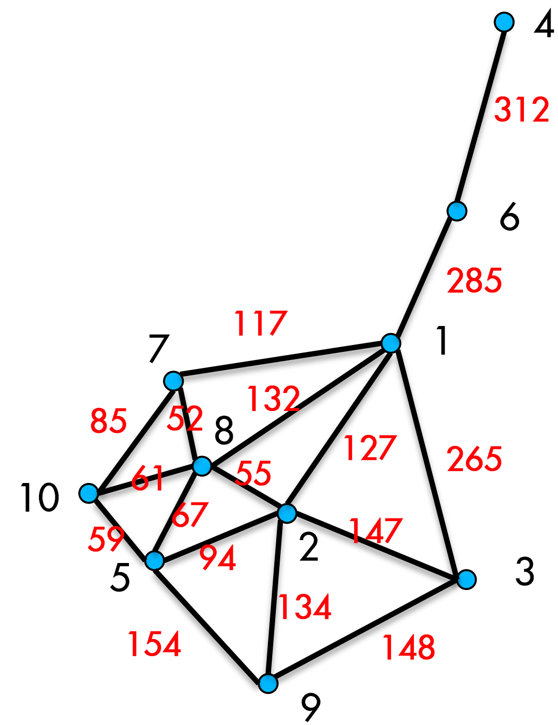
Définition 2.5. Un multi-graphe $G = (V, E)$ (orienté ou non) est étiqueté (par f) s'il existe une fonction

$$f : E \to \Sigma$$

Où Σ est un ensemble quelconque. Si $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, on parle souvent de multi-graphe pondéré et on dit que f est une fonction de poids. Un étiquetage peut par exemple servir à préciser des coûts (coût de transport, des distances, des couleurs, etc…). Si a est un arc, $f(a)$ est l'étiquette, le label ou encore le poids de a. On peut de la même manière définir un étiquetage des sommets au moyen d'une fonction $g : V \to \Sigma$.

1.2- Graphes non orientés

Le graphe ci-dessous représente quelques villes camerounaises connectées par un réseau autoroutier après l'émergence en 2035 ☺. L'étiquette de chaque arête représente la distance, par autoroute, entre les deux extrémités de celle-ci. Nous avons choisi un graphe non orienté car les autoroutes camerounaises vont toujours dans les deux sens.



1.3- Exemples

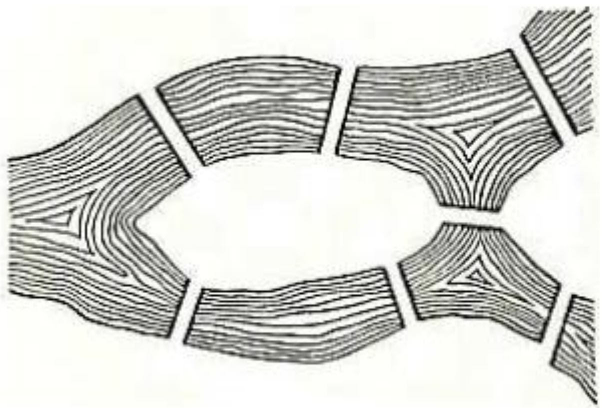
Nous allons présenter dans cette courte section quelques exemples de graphes permettant la modélisation de divers problèmes. Puisqu'il ne s'agit que d'exemples, certaines définitions sont volontairement omises. Elles seront précisées en temps utiles. Nous espérons que la variété des exemples présentés servira de motivation profonde à l'étude théorique réalisée dans les sections et chapitres suivants. Pour des raisons évidentes de présentation, nous ne donnons que des exemples de « petite taille » qui peuvent souvent être résolus sans véritable méthode. Dans des problèmes réels, il faut imaginer des graphes pouvant avoir plus de 10^6 sommets. Dans ce cas, la solution paraît nettement moins évidente !

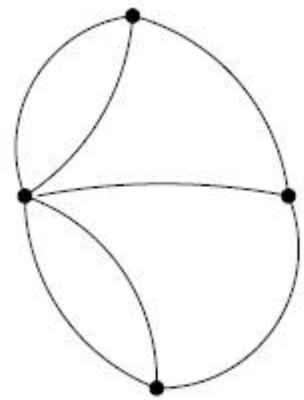
1.3- Exemples

Exemple I.3.1 (Circuit eulérien). Les ouvrages de théorie des graphes reprennent toujours le célèbre exemple des ponts de Königsberg. Nous ne dérogerons pas à cette règle. Au XVII-ième siècle, les habitants de Königsberg (actuel Kaliningrad, ville de Russie proche de la Lituanie et de la Pologne où coule la rivière Pregel) désiraient se promener le dimanche en passant une et une seule fois par chacun des sept ponts de la ville. Les ponts étaient disposés comme à la figure ci-dessous. Une modélisation du problème revient à considérer un graphe ayant comme sommets, les deux rives et les deux îles et comme arêtes, les sept ponts. Puisqu'il n'y a aucune contrainte sur le sens de parcours des ponts, nous avons choisi un multi-graphe non orienté.

1.3- Exemples

Exemple I.3.1 (Circuit eulérien).





La question générale sous-jacente est donc de déterminer pour un multigraphe donné (éventuellement orienté) s'il existe un circuit, i.e., un chemin fermé, passant une et une seule fois par chaque arête.

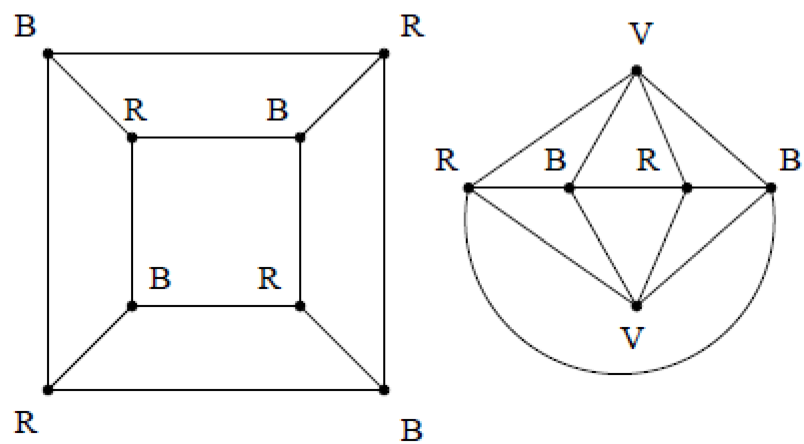
1.3- Exemples

Exemple I.3.2 (Circuit hamiltonien - TSP). Le problème du voyageur de commerce (Travel Salesman Problem) est en quelque sorte un « problème dual » de l'exemple précédent (on s'intéresse ici à trouver un circuit passant une et une seule fois par chaque sommet et non par chaque arête). On cherche un circuit permettant non seulement de relier n villes en passant une et une seule fois par chacune d'entre elles, mais de plus, ce circuit doit minimiser la distance totale parcourue. Dans certains cas, on a recours à un graphe orienté plutôt qu'à un graphe non orienté. Cela a pour avantage de permettre la modélisation de coûts différents pour aller d'un sommet A à un sommet B plutôt que de B à A (ceci permet, par exemple, de prendre en compte des sens uniques, des payages, des temps de transports différents suivant la direction choisie, etc. . .).

Applications: tournées, de circuits de distribution, etc…

1.3- Exemples

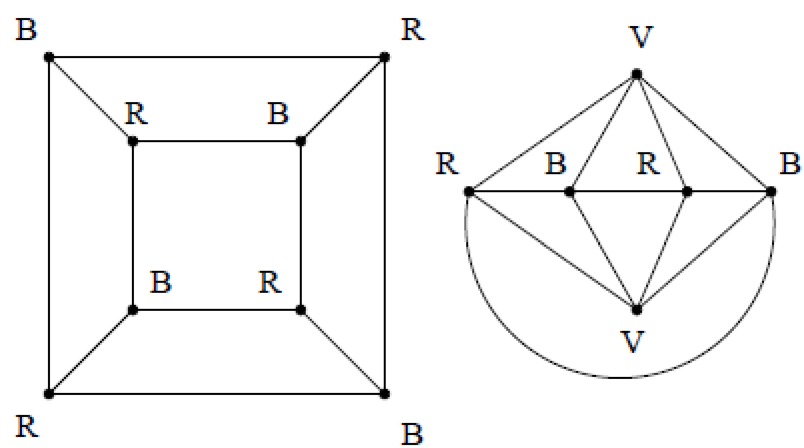
Exemple I.3.3 (Coloriage). Considérons un cube. Si chaque sommet (resp. chaque arête) d'un graphe représente un sommet (resp. une arête) du cube, on obtient le graphe de gauche de la figure I.13, on parle du squelette du cube. Par contre, si on représente les faces du cube par les sommets d'un graphe et si les sommets du graphe correspondant à des faces du cube ayant une arête commune sont adjacents, on obtient celui de droite. On peut alors



1.3- Exemples

Exemple I.3.3 (Coloriage).

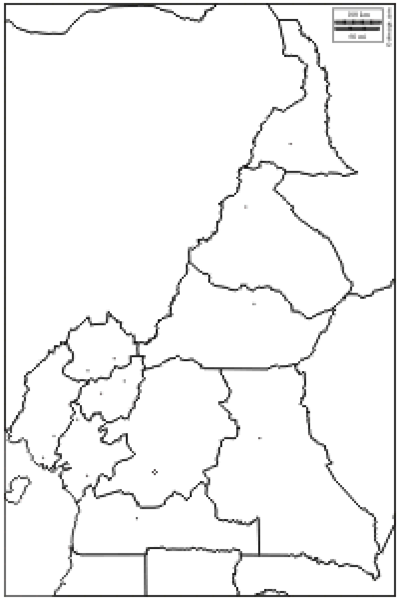
On peut alors poser la question générale de déterminer le nombre de couleurs nécessaire et suffisant pour colorier les sommets d'un multi-graphe donné, de manière telle que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Si on répond à cette question dans le cas de notre exemple initial, on s'aperçoit que pour colorier les sommets (resp. les faces d'un cube), deux (resp. trois) couleurs sont suffisantes.



1.3- Exemples

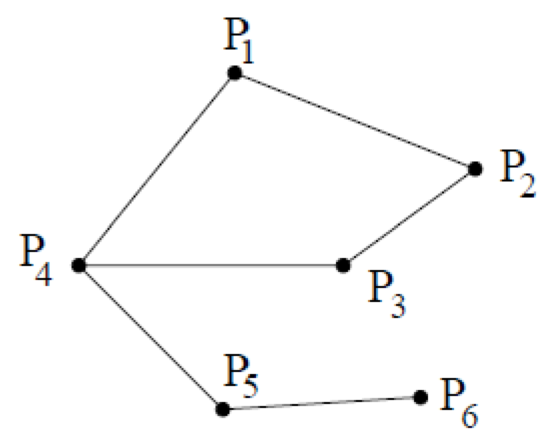
Exemple I.3.4 (Cartographie).

Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les régions d'un pays sur une carte géographique de manière telle que des couleurs distinctes soient attribuées à des régions voisines ? Ce problème se ramène au précédent. On considère un graphe ayant pour sommet les différents pays de la carte. Deux sommets sont adjacents si et seulement si ils partagent une frontière.



1.3- Exemples

Exemple I.3.5 (Graphe d'incompatibilité). Pour le transport de produits chimiques par rail, certains de ces produits ne peuvent être transportés dans un même wagon (des produits co-combustibles sont placés dans des wagons distincts). La figure ci-dessous représente le graphe d'incompatibilité de transport (deux sommets adjacents ne peuvent être placés dans le même wagon). On demande de minimiser le nombre de wagons nécessaires au transport. Ce problème se ramène donc à un problème de coloriage. Deux sommets adjacents doivent avoir des couleurs distinctes, une couleur correspondant à un wagon.



1.3- Exemples

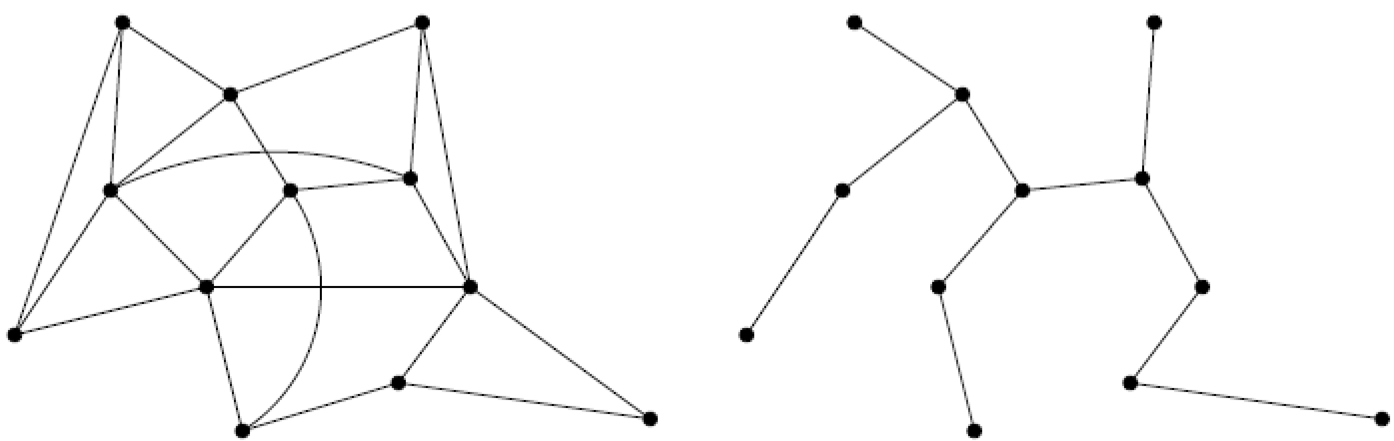
Exemple I.3.6 (Coloriage d'arêtes). Au lieu de vouloir colorier les sommets d'un multi-graphe, on peut aussi s'intéresser au problème suivant.

Déterminer le nombre de couleurs nécessaires et suffisantes pour colorier les arêtes d'un multi-graphe donné, de manière telle que deux arêtes adjacentes ne reçoivent pas la même couleur.

1.3- Exemples

Exemple I.3.7 (Arbre couvrant). NEXTTEL souhaite câbler entièrement, au moyen de nouvelles fibres optiques, la ville de Ndéré en minimisant le nombre de connexions à réaliser. Le nouveau câblage s'appuie sur le réseau électrique déjà existant et bien évidemment, tous les points de la ville doivent être desservis. La figure ci-dessous représente le réseau actuel de la ville et ses connexions.

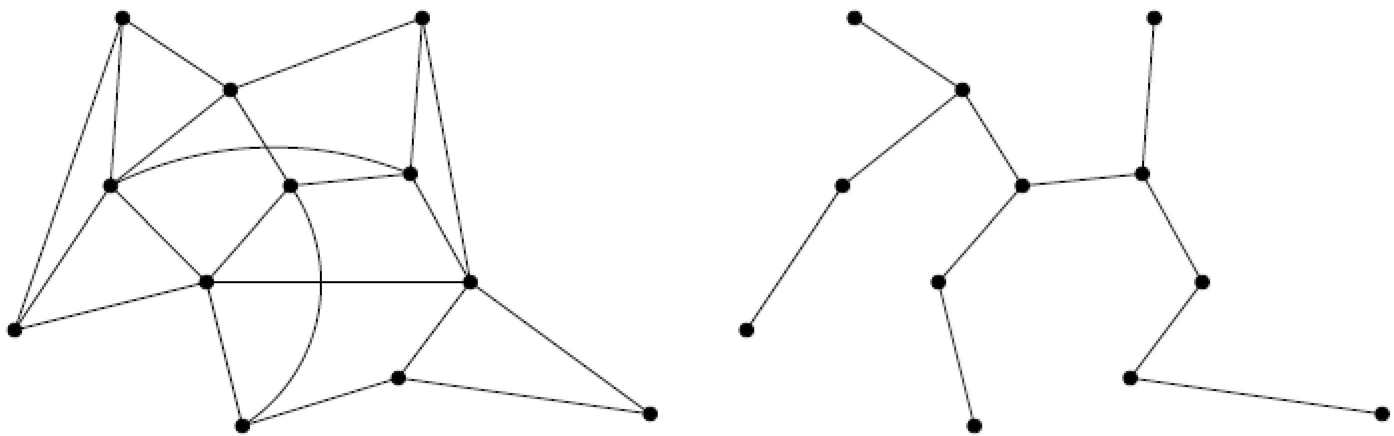
A droite, se trouve les sélections envisagées. La question générale



1.3- Exemples

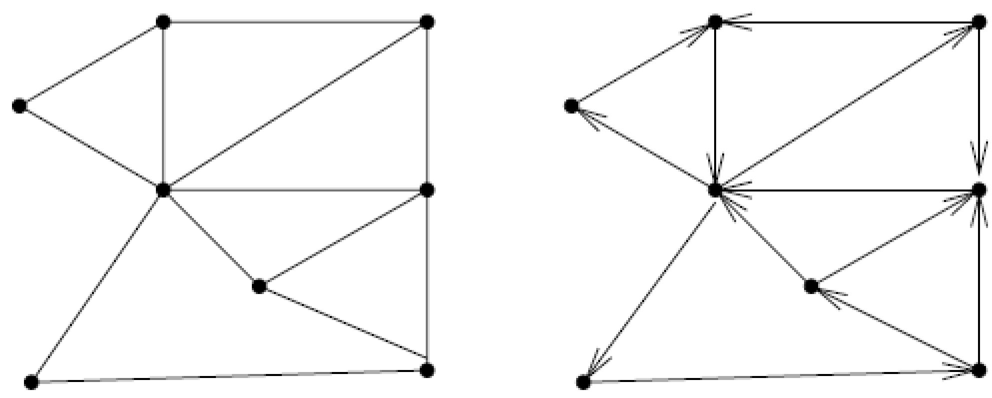
Exemple I.3.7 (Arbre couvrant).

A droite, se trouve les sélections envisagées. La question générale qui est posée est de rechercher un sous-graphe (ou un sous-arbre) couvrant dans un graphe donné. On peut aussi envisager une version pondérée dans laquelle chaque arc aurait un coût et on rechercherait un sous-graphe (ou un sous-arbre) couvrant de poids minimal.



1.3- Exemples

Exemple I.3.8 (Forte connexité). Suite à divers problèmes de circulation, des responsables communaux désirent placer les rues d'un quartier à sens unique. Si un graphe modélise les rues et leurs croisements, la question qui se pose est donc d'orienter les arcs d'un graphe non orienté de manière telle qu'il existe un chemin orienté entre toute paire de sommets. Un tel exemple est donné à la figure ci-dessous



1.3- Exemples

Exemple I.3.9 (Distance). Considérons le problème de routage de paquets de données devant transiter sur un réseau (du type internet). Si un utilisateur désire accéder au contenu d'une page web présente sur un serveur, une connexion entre ce serveur et la machine doit être établie. Cette connexion n'est en général pas directe mais doit passer par une série de machines relais. Pour préserver la bande passante, pour accélérer le transfert ou encore pour minimiser les coûts, on essaie de minimiser le nombre de « hops » (i.e., le nombre de machines relais utilisées). Si chaque ordinateur, routeur, passerelle ou serveur présents sur l'internet représente un sommet d'un graphe dont les arcs représentent les connexions entre ceux-ci, il s'agit d'un problème délicat! Voici un exemple de « route » suivie par un paquet de données :

1.3- Exemples

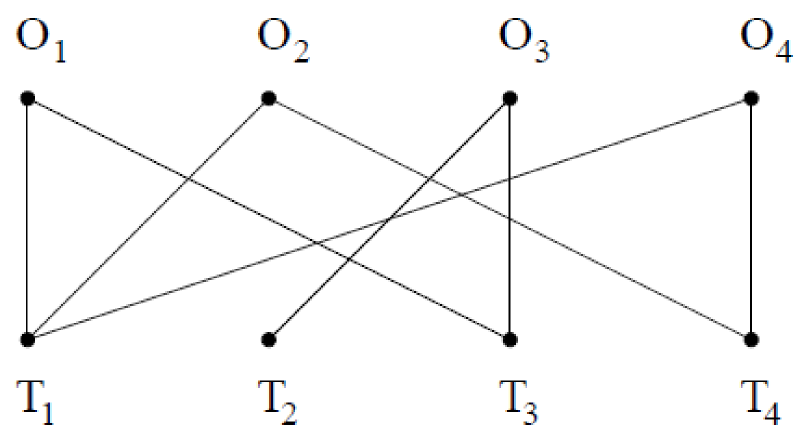
Exemple I.3.9 (Distance).

```
> traceroute www.google.be
traceroute to www.google.be (66.249.85.99), 30 hops max, 40 byte packets
 1  mont3-0014.gw.ulg.ac.be (139.165.159.1)  0.177 ms   0.177 ms   0.163 ms
 2  segi3-0813-mont3.gw.ulg.ac.be (193.190.228.125)  0.221 ms   0.179 ms   0.184 ms
 3  inet3-3031.gw.ulg.ac.be (139.165.192.49)  0.734 ms   0.612 ms   0.597 ms
 4  fe.m20.access.liege.belnet.net (193.191.10.17)  0.791 ms   0.707 ms   0.713 ms
 5  oc48.m160.core.science.belnet.net (193.191.1.185)  2.266 ms   2.239 ms   16.679 ms
 6  oc192.m160.ext.science.belnet.net (193.191.1.2)  2.252 ms   2.260 ms   2.235 ms
 7  216.239.43.88  7.954 ms   7.922 ms   7.731 ms
 8  64.233.175.249  14.932 ms   14.906 ms   14.911 ms
 9  216.239.46.49  14.628 ms   14.431 ms   14.407 ms
10  66.249.85.99  14.409 ms   14.722 ms   14.624 ms
```

Le problème général sous-jacent est donc de déterminer, dans un graphe donné, le chemin le plus court permettant de relier deux sommets quelconques d'un graphe. On pourra envisager des variantes pondérées ou orientées. Dans la version pondérée, on recherchera le chemin de poids minimal.

1.3- Exemples

Exemple I.3.10 (Problème d'affectation). Soient $O_1,\ldots,O_k$ des ouvriers et $T_1,\ldots, T_t$ des postes de travail. Chaque ouvrier Oi poss`ede certaines qualifications lui permettant de travailler sur certains postes $T_{i,1}, \ldots, T_{i,di}$.
Comment répartir les ouvriers pour que chaque poste de travail soit occupé par au moins un ouvrier ? Pour modéliser ce problème, on utilise un graphe biparti dont les sommets représentent les ouvriers et les postes. On trace un arc entre O_i et T_j si O_i possède la qualification pour travailler au poste T_j .



1.3- Exemples

Exemple I.3.11 (Tournoi). On imagine un ensemble d'équipes ou de joueurs et une compétition où chaque joueur affronte tout autre joueur exactement une fois. Le seul résultat possible est la victoire ou la défaite. On peut alors considérer un graphe dont les sommets sont les joueurs et un arc relie le joueur i au joueur j si i a battu j lors de leur confrontation directe. La question naturelle qui se pose est alors d'essayer de déterminer un vainqueur pour la compétition.