

Introduction à la théorie des **GRAPHES**

Méthode PERT

09.2017

Un petit dessin vaut mieux qu'un grand discours,
Napoléon

Menu

1. Introduction
2. Construction du graphe PERT
3. Détermination des dates et des marges
4. Exercice d'application

1. Introduction

La méthode PERT permet d'évaluer la durée de réalisation d'un projet complexe et de détecter les parties de ce projet ne supportant aucun retard. Elle résout des problèmes appelés problèmes d'ordonnancement.

Le projet sera subdivisé en tâches. En général, elles ne pourront toutes être réalisées simultanément, certaines tâches devront être achevées avant que d'autres ne puissent débiter.

1. Introduction

On résumera l'information sur le projet sous la forme d'un tableau, appelé échéancier, où seront indiquées les tâches, leur durée, et les contraintes d'antériorité à respecter.

Exemple :

TACHES	Tâches antérieures	Durée
A	--	6
B	--	5
C	A	4
D	B	6
E	C	5
F	A,D	6
G	E,F	4

2. Construction du graphe PERT

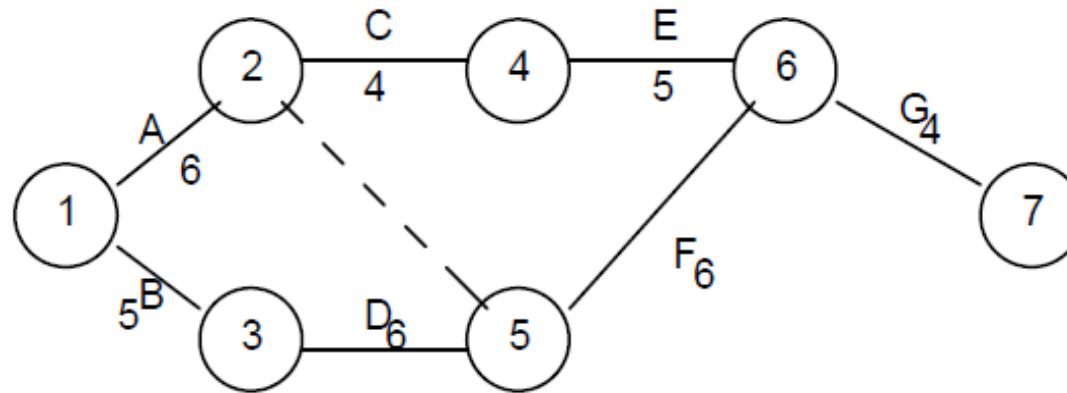
La méthode commence par la construction d'un graphe, appelé graphe PERT, à partir de l'échéancier. Ce graphe sera un graphe valué dont les arcs seront les tâches, les valeurs des arcs étant leur durée et les sommets représenteront des états d'avancement du projet, numérotés de 1 à n .

Le graphe devra respecter deux contraintes :

- a) en un sommet, toutes les tâches se trouvant sur un chemin y menant, doivent être achevées
- b) il n'y a pas d'arc de i vers j avec i est supérieur à j

2. Construction du graphe PERT

Exemple :



On a été obligé d'ajouter un arc allant de 2 à 5 pour tenir compte du fait que A devait être terminée pour que F commence, cette tâche sera appelée tâche fictive et sera de durée nulle.

2. Construction du graphe PERT

Généralisation

Pour construire un graphe PERT dans le cas général, on procèdera de la manière suivante :

1) Détermination des niveaux des tâches :

On attribuera le **niveau 0** aux tâches qui n'ont **pas de tâche antérieure**.

On attribuera le niveau 1 aux tâches dont les tâches antérieures sont de niveau 0.

On déterminera ainsi le niveau de chaque tâche : les tâches de niveau **k+1** seront les tâches dont les tâches antérieures sont de niveau inférieur **avec au moins une tâche de niveau k parmi elles**.

On construira le graphe en traçant les tâches par ordre de niveau croissant.

2. Construction du graphe PERT

Généralisation

2) Tâches commençantes, finissantes, convergentes :

Avant de se lancer dans la construction du graphe, il sera souvent utile de détecter les tâches dites commençantes, finissantes ou convergentes .

Les tâches **commençantes** sont les tâches sans tâche antérieure, elles **partent du sommet 1** du graphe (appelé entrée du graphe).

Les tâches **finissantes** sont les tâches qui ne sont pas tâche antérieure, elles **arrivent au sommet terminal du graphe** (appelé sortie).

Les tâches **convergentes** sont des tâches que l'on **rencontre toujours ensemble** (i.e. jamais l'une sans l'autre) dans la colonne "tâches antérieures"; dans le graphe, elles auront le même sommet terminal.

3. Détermination des dates et des marges

Une fois le graphe construit, on va déterminer les dates au plus tôt et au plus tard pour les différents sommets et les marges libres et totales pour les tâches.

a) Dates au plus tôt :

Pour un sommet, la date au plus tôt (notée : t) représente concrètement le temps minimum nécessaire pour atteindre ce sommet (on ne peut pas faire mieux).

Elle se déterminera de proche en proche, par ordre de sommet croissant, à partir de l'entrée du graphe, grâce à l'algorithme de Ford de recherche du chemin le plus long. Ainsi :

$t_1 = 0$ et $t_j = \text{Max} (t_i + d_{ij})$ sur tous les i précédant j avec d_{ij} = durée de la tâche ij

Dans l'exemple, $t_1 = 0$, $t_2 = 0+6 = 6$, $t_3 = 0+5 = 5$, $t_4 = 6+4 = 10$, $t_5 = \max (6+0 , 5+6) = 11$, $t_6 = \max (11+6 , 10+5) = 17$, $t_7 = 17+4 = 21$.

3. Détermination des dates et des marges

Dans l'exemple, $t_1 = 0$, $t_2 = 0+6 = 6$, $t_3 = 0+5 = 5$, $t_4 = 6+4 = 10$, $t_5 = \max (6+0 , 5+6) = 11$, $t_6 = \max (11+6 , 10+5) = 17$, $t_7 = 17+4 = 21$.

La date au plus tôt de la sortie du graphe représente la durée minimale réalisable pour l'ensemble du projet (dans l'exemple, $t_7 = 21$, le projet durera donc au mieux 21 jours)

3. Détermination des dates et des marges

b) Dates au plus tard :

Pour un sommet, la date au plus tard (notée : T) représente concrètement la date à laquelle cet état doit obligatoirement être atteint si l'on ne veut pas augmenter la durée totale du projet (il ne faut pas faire pire).

Elle se déterminera de manière analogue à t , mais par ordre de sommet décroissant, depuis la sortie du graphe :

$T_n = t_n =$ Durée du projet et $T_i = \text{Min} (T_j - d_{ij})$ sur tous les j suivant i

Dans l'exemple, $T_7 = 21$, $T_6 = 21 - 4 = 17$, $T_5 = 17 - 6 = 11$, $T_4 = 17 - 5 = 12$, $T_3 = 11 - 6 = 5$, $T_2 = \min (11 - 0, 12 - 4) = 8$, $T_1 = \min (8 - 6, 5 - 5) = 0$

On aura toujours $t_1 = T_1 = 0$ et t inférieur ou égal à T pour tout sommet. On appelle $T-t$ la marge de flottement du sommet.

3. Détermination des dates et des marges

c) Marges des tâches :

La **marge libre** d'une tâche représentera concrètement le retard maximal qu' on pourra prendre dans la réalisation d'une tâche sans retarder le début des tâches suivantes, on la notera **ML**.

La **marge totale** d'une tâche représentera concrètement le retard maximal qu' on pourra prendre dans la réalisation d'une tâche sans retarder l'ensemble du projet, on la notera **MT**.

Si on note ij la tâche allant du sommet i au sommet j :

$$ML_{ij} = t_j - t_i - d_{ij} \text{ et } MT_{ij} = T_j - t_i - d_{ij}$$

Compte tenu du mode calcul, les marges seront toujours positives ou nulles et la marge libre d'une tâche sera toujours inférieure ou égale à sa marge totale.

3. Détermination des dates et des marges

On qualifiera de **critique**, **une tâche dont la marge totale est nulle**, c'est en quelque sorte une tâche "urgente", une tâche sur laquelle il ne faut pas prendre de retard si l'on ne veut pas augmenter la durée totale du projet.

Si la durée d'une tâche augmente, une partie de cette augmentation sera absorbée par la marge de la tâche, seul le surplus se répercutera sur la durée du projet.

Exemple:

Tâches	A	B	C	D	E	F	G
ML	0	0	0	0	2	0	0
MT	2	0	2	0	2	0	0

Ainsi , dans l'exemple, si la durée de la tâche E augmente de 7 jours, le projet durera 26 jours, soit 5 jours de plus (2 jours seront absorbés par la marge de la tâche E)

4. Exercice d'application

Déterminer la durée minimale du projet et les marges libres et totales des tâches

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
T. antérieures	IP	ACH	G		IP	A		IP		AG	MNO	AFK	DE	IP	DE	G
Durée	3	5	2	4	8	1	7	5	5	6	3	4	7	1	2	6