



ENONCE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2000

Niveau 1



Durée 4h

EXERCICE 1

Déterminer toutes les isométries du plan qui laissent invariant l'ensemble **F** des points de coordonnées $(n, 0)$, $n \in \mathbf{Z}$, dans un repère orthonormé $(0, i, j)$.

EXERCICE 2

I- On pose $\Phi(a, b) = (1/a - b) \ln(b/a)$ et $\Psi(a, b) = (1/a - b) \ln(b^2/a^2)$, avec a et b réels.

1°) A tout couple (a, b) , on associe le point M de coordonnées a et b dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Représenter les ensembles suivants, en hachurant à chaque fois soigneusement leur complémentaire :

E_1 , ensemble des points M tels que $\Phi(a, b)$ est défini ;

E_2 , ensemble des points M tels que $\Psi(a, b)$ est défini ;

E'_1 ensemble des points M tels que $\Phi(a, b) \geq 0$;

E'_2 ensemble des points M tels que $\Psi(a, b) \geq 0$;

2°) Quelle est la limite de $(\ln(1+x))/x$ lorsque $x \rightarrow 0$? Justifiez votre réponse. Calculer alors la limite de $\Phi(a, b)$ lorsque $b \rightarrow a$, puis la limite $\Phi(a, b)$ de lorsque $a \rightarrow e$ et $b \rightarrow e$.

II- 1°) Résoudre chacune des équations suivantes, où l'inconnue est x :

$$ae^{ax} = be^{bx} \quad \text{et} \quad ae^{ax} = be^{bx}.$$

2°) Soit $f_{(a, b)}$ la fonction de \mathbf{R} vers \mathbf{R} , telle que $f_{(a, b)}(t) = e^{at} - e^{bt}$. Comparer les représentations dans un repère orthonormé, de $f_{(a, b)}$, $f_{(b, a)}$ et $f_{(-b, -a)}$

3°) Représenter graphiquement les fonctions $f_{(a, 0)}$ et $f_{(0, b)}$

4°) Dans le cas, où $0 < b < a$, étudier et représenter graphiquement la fonction $f_{(a, b)}$

EXERCICE 3

P désigne le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(0, i, j)$.

I- Soit f la fonction définie par $f(x) = x + (1 - e^x)/(1 + e^x)$.

1°) Montrer que f est impairs, étudier ses variations et construire, dans P sa courbe représentative, notée C

2°) Vérifier, pour tout x réel, la relation $2f(x) - 1 = (f(x) - x^2)$.

3°) Déterminer les primitives de la fonction $h : x \rightarrow 1/(1 + e^x)$ (on pourra remarquer que $1/(1 + e^x) = e^{-x}/(e^{-x} + 1)$). Si λ est un réel positif, calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe

C et les droites d'équations respectives $y = x-1$, $x = 0$ et $x = \lambda$. Quelle est la limite de $A(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$?

II- Pour tout réel a , on définit les applications S_a et T_a de P vers P comme suit : à un point M de coordonnées (x, y) on associe les points $S_a(M)$ de coordonnées $(-x + 2a, -y+2a)$ et $T_a(M)$ de coordonnées $(x+a, y+a)$. On note G l'ensemble des applications S_a et T_a , pour tout a réel.

1°) Déterminer la nature géométrique des applications S_a et T_a

2°) Montrer que pour tout couple (a, b) de réels, les applications composées $S_a \circ S_b$, $T_a \circ T_b$, $S_a \circ T_b$, et $T_a \circ S_b$ appartiennent à G et que G est un sous-groupe du groupe des bijections affines de P . Est-il commutatif ?

3°) Montrer que pour tout réel a , on a la relation suivante $S_a = T_a \circ S_0 \circ T_a^{-1}$ (1)

4°) Si C est la courbe construite dans la partie I, on note $C_a = T_a(C)$. Montrer, à l'aide de la relation (1), que le point I de coordonnées (a, a) est centre de symétrie de C_a .

5°) Montrer qu'il existe une fonction f_a telle que l'équation de C_a soit $y = f_a(x)$