北京邮电大学《概率论与随机过程》

2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷 答案 P43

一、简答(每小题 4 分，共 40 分)

1．$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求$P(A\cup B)$

2．连续进行独立的贝努利试验直到出现一次成功为止，设每次成功的概率为$p\in(0,1)$，失败的概率为$q=1-p$，以X表示所需试验次数，求在$X>10$的条件下，$X>12$的概率。

3．设随机变量X服从$(0,1)$上的均匀分布，a为一实数，求X落在区间$(a,a+0.5)$的概率。

4. 已知三个随机变量 X，Y，Z 满足，$E(X)=E(Y)=1$，$E(Z)=-1$，$D(X)=D(Y)=D(Z)=1$，$\rho_{XY}=0$，$\rho_{XZ}=\frac{1}{2}$，$\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$，设 $W=X+Y+Z$，求 $D(W)$.

5. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，且关于 y 的二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{3}$，求 μ(用标准正态分布函数的反函数表示)。

6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi\\ 0, & 其他\end{cases}$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

7. 一个复杂系统，由 100 个互相独立起作用的部件所组成。在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10。为了整个系统正常工作至少必需有 85 个部件工作。利用中心极限定理求整个系统正常工作的概率（用标准正态分布函数Φ表示）。

8. 设$\{W(t),\ t\geq 0\}$是参数为 2 的维纳过程。定义$X(t)=W(2t)$，求自相关函数$R_X(2,7)$。

9. 设平稳过程$\{X(t),\ t\geq 0\}$的功率谱密度$S_X=\dfrac{2}{1+\omega^2}$，求其平均功率。

10. 设齐次马氏链$\{X_n,\ n\geq 0\}$的状态空间$E=\{1,2\}$，转移矩阵为$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$，其中$a,b\in(0,1)$，

求$\lim\limits_{n\to\infty}(p_{01}(n)+p_{10}(n))$。

二、(10分)

炮战中，若在距目标250米，200米，150米处射击的概率分别为0.1，0.7，0.2，而在250米，200米，150米处射击的概率分别为0.05，0.1，0.2，现在已知目标被击毁，求击毁目标的炮弹是由距离目标250米处射出的概率。

三、(10分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1,\ 0<y<+\infty \\ 0\quad, & 其它 \end{cases}$

求(1)试确定常数b；

(2)求边缘概率密度$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(3)求随机变量$U=\max\{X,\ Y\}$的分布函数。

四、(10分)

设随机变量X，Y独立同分布，且服从正态分布$N(\mu，\sigma^2)$。

(1) 试求$Z_1=\alpha X+\beta Y$，$Z_2=\alpha X-\beta Y$，的相关系数，其中α，β是不全为零的常数；

(2) 如果Z_1，Z_2相互独立，且$\alpha=1$，求β。

五、(10分)

设齐次马氏链$\{X_n，n\geq 0\}$的状态空间$I=\{0，1，2\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

初始分布为$p_i(0)=\frac{1}{3}$，$i=1，2，3$，

求(1)$P\{X_0=0，X_2=1\}$；

(2)$P\{X_2=1\}$；

(3)平稳分布。

六、(10分)

设$X(t)$，$Y(t)$，$t\geqslant 0$是相互独立的平稳过程，验证$Z(t)=X(t)+Y(t)+a$是否是平稳过程，其中$a\neq 0$为一非零常数。

七、(10分)

设$N(t)$为参数为$\lambda>0$的泊松过程，$t\geqslant 0$，(1)叙述泊松过程$N(t)$的定义；(2)对于任意的自然数n，以及任意的正数$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，求联合分布

$$P\{N(t_1)=k_1,\ N(t_2)=k_3,\ \cdots\cdots N(t_n)=k_n\},$$

其中k_1，k_2，…，k_n为非负整数，满足$k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_n$。

2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、简答

1.【学解】$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$，$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\Rightarrow$

$P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\dfrac{1}{6}$，因此$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$.

【考点延伸】《考试宝典》第一章【知识清单】 1.4、概率的基本公式 1.5、条件概率

2.【学解】设第 k 次试验成功则有：$P\{X=k\}=(1-p)^k p$，则

$$P\{X>12|X>10\}=\frac{P\{X>12,\ X>10\}}{P\{X>10\}}=\frac{P\{X>12\}}{P\{X>10\}}=\frac{(1-p)^{12}p}{(1-p)^{10}p}=(1-p)^2$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章【知识清单】 1.4、概率的基本公式 1.5、条件概率

3.【学解】当$a\leqslant-0.5$和$a\geqslant1$时，两区间均没有交集，因此此时$P=0$，当$-0.5<a<1$时，

当$-0.5<a<0$时，交集为$(0,\ a+0.5)$，则$P=a+0.5$，当$0\leqslant a\leqslant0.5$时，交集为

$(a,\ a+0.5)$，则$P=0.5$，当$0.5<a<1$时，交集为$(a,\ 1)$，则$P=1-a$，综上所述

$$P=\begin{cases}0, & a\leqslant-0.5\text{和}a\geqslant1\\ a+0.5, & -0.5<a<0\\ 0.5, & 0\leqslant a\leqslant0.5\\ 1-a, & 0.5<a<1\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章【知识清单】 1.4、概率的基本公式 1.5、条件概率

4.【学解】$D(W)=D(X+Y)+DZ+2Cov(X+Y,\ Z)=D(X+Y)+DZ+2Cov(X,\ Z)$

$+2Cov(Y,\ Z)$，$Cov(X,\ Z)=\rho_{XZ}\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DZ}=\dfrac{1}{2}$，$Cov(Y,\ Z)=\rho_{YZ}\cdot\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DZ}=-\dfrac{1}{2}$，

由于$\rho_{XY}=0$，则X和Y独立，因此$D(X+Y)=DX+DY$，所以

$D(W)=1+1+1+2\cdot\dfrac{1}{2}-2\cdot\dfrac{1}{2}=3$.

【考点延伸】《考试宝典》第四章【知识清单】4.1、数学期望 4.2、方差

5.【学解】$\Delta=16-4X<0\Rightarrow X>4$，即有$P\{X>4\}=1-P\{X\leqslant 4\}=\frac{1}{3}\Rightarrow P\{X\leqslant 4\}=\frac{2}{3}$，则

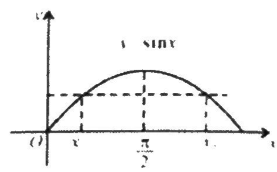
$$P\{X\leqslant 4\}=\int_{-\infty}^{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{4-\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(4-\mu)=\frac{2}{3}，则\mu=4-\Phi^{-1}\left(\frac{2}{3}\right).$$

【考点延伸】《考试宝典》第四章【知识清单】【重要题型】 题型 5：正态分布的数字特征

6.【学解】X的取值范围$(0，\pi)$，Y的可能取值范围为$(0，1)$，当$y\leqslant 0$时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$，

$f(y)=F_Y'(y)=0$，当$y\geqslant 1$时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$，$f(y)=F_Y'(y)=0$，当$0<y<1$时，

一个y对应两个x值，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\sin X\leqslant y\}$



$=P\{0\leqslant X\leqslant \arcsin y\}+P\{\pi-\arcsin\leqslant X\leqslant \pi\}$

$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx$，此时

$$f(y)=F_Y'(y)=\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{-2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi-\arcsin y}{-\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

因此$f(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}，&0<y<1\\0，&其他\end{cases}$.

【考点延伸】《考试宝典》第二章【知识清单】 【重要题型】题型 4：随机变量的函数的分布

7.【学解】设任意一个部件为$X_i(i=1, 2, \cdots, 100)$，那么有$\sum\limits_{i=1}^{100} X_i \sim B(100, 0.9)$，则

$E\left(\sum\limits_{i=1}^{100} X_i\right)=90$，$D\left(\sum\limits_{i=1}^{100} X_i\right)=9$，于是

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \geqslant 85\right\}=P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i-90}{3} \geqslant \frac{85-90}{3}\right\}=P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i-90}{3} \geqslant -\frac{5}{3}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i-90}{3}<-\frac{5}{3}\right\}=1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right).$$

【考点延伸】《考试宝典》第五章【知识清单】5.3、中心极限定理

8.【学解】$R_W(s, t)=\sigma^2\min\{s, t\}$，$\sigma^2=2$，$X(2)=W(4)$，$X(7)=W(14)$，则

$$R_X(2, 7)=R_W(4, 14)=4\sigma^2=8.$$

【考点延伸】布朗运动与维纳过程

9.【学解】对于平稳的随机过程$X(t)$，其平均功率$E(w)=E[X^2(t)]=R_X(0)$，由于

$F^{-1}\left[\frac{2a}{\omega^2+a^2}\right]=e^{-a|\tau|}$，因此$R(\tau)=F^{-1}[S_X(\omega)]=F^{-1}\left[\frac{2}{1+\omega^2}\right]=e^{-|\tau|}$，故$E(w)=R_X(0)=1$.

【考点延伸】平稳过程的谱分析

10.【学解】$(x_1, x_2)=(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b\end{pmatrix}$，$x_1+x_2=1$得到$x_1=\frac{1-b}{2-a-b}$，$x_2=\frac{1-a}{2-a-b}$，

因此$\lim\limits_{n\to\infty}(p_{01}(n)+p_{10}(n))=1$.

【考点延伸】平稳分布

二、【学解】在250米击中的概率：$P_1=0.1\times0.05=0.005$；

在200米击中的概率：$P_2=0.7\times0.1=0.07$；在150米击中的概率：$P_3=0.2\times0.2=0.04$，

因此击中的概率为$P=P_1+P_2+P_3=0.005+0.07+0.04=0.115$，因此求击毁目标的炮弹是

由距离目标 250 米处射出的概率$P_4=\dfrac{P_1}{P}=\dfrac{0.005}{0.115}=\dfrac{1}{23}$.

【考点延伸】《考试宝典》第一章【知识清单】1.4、概率的基本公式

三、【学解】(1) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dy=b\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-y}dy=b(1-e^{-1})=1$

$\Rightarrow b=\dfrac{e}{e-1}$;

(2)当$x\leqslant 0$和$x\geqslant 1$时，有$f_X(x)=0$，当$0<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{e}{e-1}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy=\frac{e^{1-x}}{e-1}$$

因此$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1-x}}{e-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$;

当$y\leqslant 0$时，$f_Y(y)=0$，当$y>0$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\frac{e}{e-1}\int_0^1 e^{-(x+y)}dx=e^{-y}$$

因此$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$.

(3)由于$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，因此$X$和$Y$相互独立，则有

$$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{X\leqslant u, Y\leqslant u\}=P\{X\leqslant u\}P\{Y\leqslant u\}$$

当$u\leqslant 0$时，$F_X(u)=P\{X\leqslant u\}=0$；当$u\geqslant 1$时，$F_X(u)=P\{X\leqslant u\}=1$；当$0<u<1$时，

$F_X(u)=P\{X\leqslant u\}=\int_0^u \dfrac{e^{1-x}}{e-1}dx=\dfrac{e-e^{1-u}}{e-1}$；当$u\leqslant 0$时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant u\}=0$，

当$u>0$时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant u\}=\int_0^u e^{-y}dy=1-e^{-u}$，因此

当$u\leqslant 0$时，$F_U(u)=P\{X\leqslant u\}P\{Y\leqslant u\}=0$

当$0<u<1$时，$F_U(u)=P\{X\leqslant u\}P\{Y\leqslant u\}=\dfrac{e(1-e^{-u})^2}{e-1}$，

当$u\geqslant 1$时，$F_U(u)=P\{X\leqslant u\}P\{Y\leqslant u\}=1-e^{-u}$

综上所述，$U=\max\{X，Y\}$的分布函数为

$$F_U(u)=\begin{cases}0 & ，u>0\\ \dfrac{e(1-e^{-u})^2}{e-1}, & 0<u<1\\ 1-e^{-u} & ，u\geqslant 1\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》第三章【知识清单】 3.1、二维随机变量的联合分布与边缘分布

《考试宝典》第三章【重要题型】题型 3：二维随机变量的函数分布

四、【学解】(1)由于量X，Y独立同分布，则$EZ_1=\alpha EX+\beta EY=(\alpha+\beta)\mu$，$EZ_2=\alpha EX-\beta EY$

$=(\alpha-\beta)\mu$，$DZ_1=DZ_2=\alpha^2DX+\beta^2DY=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$，$Cov(X，Y)=0$，

$Cov(Z_1，Z_2)=Cov(\alpha X+\beta Y，\alpha X-\beta Y)=Cov(\alpha X，\alpha X-\beta Y)+Cov(\beta Y，\alpha X-\beta Y)$

$=Cov(\alpha X，\alpha X)+Cov(\beta Y，-\beta Y)=\alpha^2DX-\beta^2DY=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$，

因此$\rho_{Z_1Z_2}=\dfrac{Cov(Z_1，Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\cdot\sqrt{DZ_2}}=\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

(2)由于Z_1，Z_2相互独立，因此$\rho_{Z_1Z_2}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=0$，即有$\beta^2=\alpha^2=1\Rightarrow\beta=\pm 1$.

【考点延伸】《考试宝典》第四章【知识清单】 4.4、协方差与相关系数

五、【学解】(1)先求两步转移概率矩阵

$$P^2=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ 0&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\frac{5}{8}&\frac{5}{16}&\frac{1}{16}\\ \frac{5}{16}&\frac{1}{2}&\frac{3}{16}\\ \frac{3}{16}&\frac{9}{16}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

于是$P\{X_0=0, X_2=1\}=P\{X_0=0\}P\{X_2=1|X_0=0\}=q_0(0)p_{01}^{(2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{16}=\frac{5}{48}$;

(2)$q_1(2)=P\{X_2=1\}=\sum_{i=0}^{2}q_i(0)p_{i1}^{(2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{2}+\frac{9}{16}\right)=\frac{11}{24}$;

(3)解方程组$\begin{cases}\frac{3}{4}x_1+\frac{1}{4}x_2=x_1\\ \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{4}x_3=x_2\\ \frac{1}{4}x_2+\frac{1}{4}x_3=x_3\\ x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$，解得$x_1=x_2=\frac{3}{7}$，$x_3=\frac{1}{7}$，因此平稳分布为

$\left(\frac{3}{7}\ \ \frac{3}{7}\ \ \frac{1}{7}\right)$.

【考点延伸】马尔科夫链

六、【学解】由于$X(t)$，$Y(t)$是相互独立的平稳过程，设$m_X=E[X(t)]$，$m_Y=E[Y(t)]$，

$R_X(\tau)=E[X(t+\tau)X(t)]$，$R_Y(\tau)=E[Y(t+\tau)Y(t)]$，从而有

$m_Z(t)=E[Z(t)]=E[X(t)+Y(t)+a]=E[X(t)]+E[Y(t)]+a=m_X+m_Y+a$，常数;

$R_Z(t+\tau, \tau)=E[Z(t+\tau)Z(\tau)]=E[(X(t+\tau)+Y(t+\tau)+a)(X(t)+Y(t)+a)]$

$=E[X(t+\tau)X(t)+X(t+\tau)Y(t)+aX(t+\tau)+Y(t+\tau)X(t)+Y(t+\tau)Y(t)+$

$aY(t+\tau)+aX(t)+aY(t)+a^2]=R_Z(\tau)$，因此$Z(t)$是平稳过程.

【考点延伸】平稳随机过程

七、【学解】(1)①若计数过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$满足：1.$N(0)=0$；2.具有独立增量性；3.在任一长度为t的区间中发生事件的个数服从均值为λt的泊松分布，即对一切$s, t\geqslant 0$

$$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, n=0, 1, 2, \cdots$$

称$\{N(t), t\geqslant 0\}$是参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松过程.

②若计数过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$满足：1.$N(0)=0$；2.具有独立增量性；

3.$P\{N(h)=1\}=\lambda h+o(h)$；4.$P\{N(h)\geqslant 2\}=o(h)$，称$\{N(t), t\geqslant 0\}$是参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松过程.

(2)$P\{N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2, \dots, N(t_n)=k_n\}$

$$=P\{N(t_1)=k_1\}P\{N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1\}\cdots P\{N(t_n)-N(t_{n-1})=k_n-k_{n-1}\}$$

$$=\frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda t_1}\cdot\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot\dots\cdot\frac{[\lambda(t_n-t_{n-1})]^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n-k_{n-1})!}e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}$$

$$=\lambda^{k_n}e^{-\lambda t_n}t_1^{k_1}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{(t_{i+1}-t_i)^{k_{i+1}-k_i}}{(k_{i+1}-k_i)!}.$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章【知识清单】2.4 常见的一维随机变量及分布

2016-2017 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、简答

1.【答案】0.9

【学解】$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{0.2}=0.5$，得到$P(B)=0.2$，

$P(AB)=0.1$，$P\left(A\cup\bar{B}\right)=P(A)+P\left(\bar{B}\right)-P\left(A\bar{B}\right)=0.2+0.8-P(A)+P(AB)=0.9$.

【考点延伸】《考试宝典》第一章【知识清单】1.5、条件概率

2.【答案】$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2(b-a)}, & 2a+5<y<2b+5\\ 0\quad, & \text{其他}\end{cases}$

【学解】$F_Y(y)=P\{y\leqslant Y=2X+5\}=P\left\{\frac{y-5}{2}\leqslant X\right\}$，①当$\frac{y-5}{2}\leqslant a\Rightarrow y\leqslant 2a+5$，$F_Y(y)=0$，

②当$a\leqslant\frac{y-5}{2}\leqslant b\Rightarrow 2a+5\leqslant y\leqslant 2b+5$时，$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\frac{y-5}{2}}\frac{1}{b-a}dx=\int_a^{\frac{y-5}{2}}\frac{1}{b-a}dx$