2019-2020 学年第二学期

3 学时《概率论与随机过程》期末考试(A)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一. 简答（40 分，每题 4 分）

1. $P(A)=\dfrac{1}{4},\ P(B|A)=\dfrac{1}{3},\ P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$。

2. 连续进行独立的贝努利试验直到出现一次成功为止，设每次成功的概率为 $p\in(0,1)$，失败的概率为 $q=1-p$，以 X 表示所需试验次数，求在 $X>10$ 的条件下，$X>12$ 的概率。

3. 设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，a 为一实数，求 X 落在区间 $(a,a+0.5)$ 的概率。

4. 已知三个随机变量 X,Y,Z 满足，$E(X)=E(Y)=1, E(Z)=-1, D(X)=D(Y)=D(Z)=1,$ $\rho_{XY}=0, \rho_{XZ}=\dfrac{1}{2}, \rho_{YZ}=-\dfrac{1}{2}$。设 $W=X+Y+Z$，求 $D(W)$。

5. 已知随机变量X服从正态分布$N(\mu,1)$，且关于y的二次方程$y^2+4y+X=0$无实根的概率为 1/3，求 μ (用标准正态分布函数的反函数表示)。

6. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

7. 一个复杂系统，由 100 个互相独立起作用的部件所组成。在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10。为了整个系统正常工作至少必需有 85 个部件工作。利用中心极限定理求整个系统正常工作的概率（用标准正态分布函数 Φ 表示）。

8. 设 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是参数为2的维纳过程。定义 $X(t)=W(2t)$，求自相关函数 $R_X(2,7)$。

9. 设平稳过程 $\{X(t),t\ge 0\}$ 的功率谱密度 $S_X(\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$，求其平均功率。

10. 设齐次马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的状态空间 $E=\{1,2\}$，转移矩阵为 $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$，其中 $a,b\in(0,1)$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(p_{01}(n)+p_{10}(n))$。

二．（10 分）

炮战中，若在距目标 250 米，200 米，150 米处射击的概率分别为 0.1，0.7，0.2，而在 250 米，200 米，150 米处射击的概率分别为 0.05，0.1，0.2，现在已知目标被击毁，求击毁目标的炮弹是由距离目标 250 米处射出的概率。

三．（１０分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<+\infty, \\ 0 \quad, & \text{其它}, \end{cases}$$

求（1）试确定常数 b；

（2）求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

（3）求随机变量 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数。

四．（10 分）

设随机变量 X，Y 独立同分布，且服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。

（1）试求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_1=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数，其中 α,β 是不全为零的常数;

（2）如果 Z_1, Z_2 相互独立，且 $\alpha=1$，求 β 。

五．(14 分)

设齐次马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的状态空间为 $I=\{0,1,2\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

初始分布为 $p_i(0)=\frac{1}{3}, i=0,1,2$，求(1) $P\{X_0=0, X_2=1\}$；(2) $P\{X_2=1\}$；(3)平稳分布。

六. (10 分)

设 $X(t), Y(t), t\geq 0$ 是相互独立的平稳过程, 验证 $Z(t)=X(t)+Y(t)+a$ 是否是平稳过程，其中 $a\neq 0$ 为一非零常数。

七. (6 分)

设 $N(t)$ 为参数为 $\lambda>0$ 的泊松过程，$t\geq 0$，（1）叙述泊松过程 $N(t)$ 的定义；（2）对于任意的自然数 n，以及任意的正数 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，求联合分布

$$P\{N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2, \ldots, N(t_n)=k_n\},$$

其中 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 为非负整数，满足 $k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_n$。