北京邮电大学 2016——2017 学年第 2 学期

4 学时《概率论与随机过程》期末考试（A）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一． 填空题（45 分，每空 3 分）

1． 设 A，B 为两个随机事件，$P(A)=0.2$，$P(A|B)=P(B|A)=0.5$，则 $P(A\cup\overline{B})=$____.

2． 设 $X\sim U(a,b)$，则 $Y=2X+5$ 的概率密度是________.

3． 设 X 的密度函数为 $f(x)=ae^{-(x-1)^2}(-\infty<x<+\infty)$，则 $a=$________，

$E(X)=$________，$D(X)=$_________.

4． 设 $X\sim N(18,\frac{9}{2})$，$Y\sim N(2,2)$，且 X 和 Y 相互独立，则 $P(\frac{1}{3}X-\frac{1}{2}Y>5)=$_____.

5． 设 X,Y 相互独立，均服从泊松分布，参数分别为 1，2，则 $X+Y$ 的分布律为__________.

6． 设 $X\sim b(1,0.5)$，Y 服从期望为 $\frac{1}{3}$ 的指数分布．X,Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=0.4$，则 X 的特征函数为__________，$D(X-3Y+2)=$__________.

7． 设 $X_n\sim b(n,p), n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n-np\le 0)=$__________.

8． 设 $X(t)=U\sin\omega_0 t+V\cos\omega_0 t, t\ge 0$，其中 ω_0 为常数，U,V 是相互独立的正态随机变量，且 $E(U)=E(V)=0$，$E(U^2)=E(V^2)=\sigma^2$，则 $\{X(t)\}$ 的一维概率密度 $f(x;t)=$__________，该过程关于均值__________(是，否)有均方遍历性.

9． 设 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是参数为 2 的维纳过程。定义 $X(t)=W(3t)$，则自相关函数 $R_X(2,7)=$__________.

10． 设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是参数为 1 的泊松过程，则 $P(N(1)=1,N(2)=3)=$___________.

11. 设齐次马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间$E=\{1,2\}$, 一步转移矩阵为$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则

$\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=2)=$____________.

二．(5 分)

设离散型随机变量X的分布律满足$P(X=k)=\sqrt{P(X=k-1)P(X=k+1)}, k\geq 1$，求$X$的分布律.

三．(15 分)

设(X,Y)在区域$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\right\}$上服从均匀分布，求

(1) 边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$，并问X,Y是否相互独立，并给出理由； (2) X,Y是否不相关，并给出理由； (3) 条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

四．（10 分）

设齐次马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间为$E=\{a,b,c,d\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

初始分布为$P(X_0=a)=P(X_0=b)=P(X_0=c)=\frac{1}{5}$，$P(X_0=d)=\frac{2}{5}$，求

(1) $P(X_2=a)$； (2) $P(X_2=a, X_4=b, X_5=b\,|\,X_1=d)$； (3) $P(X_2=a, X_4=b, X_5=b)$.

五．（13 分）

设平稳随机过程 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 相互独立，且 $E(X_1(t))=0$. $X_1(t)$, $X_2(t)$ 功率谱密度分别为 $S_1(\omega)=\dfrac{4}{\omega^2+4}$ 和 $S_2(\omega)=\dfrac{\omega^2}{\omega^2+4}$.

(1) 证明随机过程 $X(t)=X_1(t)+X_2(t)$ 是平稳过程，并求 $X_1(t)$ 与 $X(t)$ 的互谱密度 $S_{X_1X}(\omega)$;

(2) 将 $X(t)$ 加到脉冲响应函数为 $h(t)=2e^{-2t}u(t)$ 的线性滤波器，求输出 $Y(t)$ 的自相关函数 $R_Y(\tau)$ ，输出的平均功率，输入与输出的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$.

六．（12 分）

设齐次马氏链的状态空间为 $E=\{1,2,3\cdots\}$,其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \cdots \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \cdots \\ & \cdots & & \cdots & & \end{pmatrix} .$$

(1) 画出状态转移图; (2) 讨论状态分类，各状态的周期; (3) 求平稳分布.