

3 学时《概率论与随机过程》试题参考

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一. 简答（40 分，每题 4 分）

1. 设 A, B 为相互独立的随机事件, $P(A) = 0.2, P(B) = 0.6$, 求 $P(A \cup B)$.
2. 设 $X \sim B(1, 0.5), Y \sim B(1, 0.5)$, 且 X 与 Y 相互独立, 求 $P\{X + Y = 2\}$.
3. 已知随机变量 X 的分布率为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.1	0.5	0.2

设 $Y = 3X^2$, 求 $P\{Y = 3\}$.

4. 设随机变量 ξ, η 和 X, Y 满足 $\xi = -2X + 1, \eta = -3Y + 2$, 已知 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY} = 0.5$, 求 ξ 与 η 的相关系数为 $\rho_{\xi\eta}$.

5. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 $1/2$, 求 μ .

6. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 求随机变量 $Y = X^2 + 1$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$

7. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_{100} 是相互独立的服从均值为 10 的指数分布, 记 $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, 利用中心极限定理近似计算 $P(Y \geq 1000)$

8. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程,

求 $P(N(2) = 2, N(3) = 3 | N(1) = 1) = \underline{\hspace{2cm}}$. 在此处键入公式。

9. 设平稳过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的功率谱密度 $S_X(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$, 求其平均功率.

10. 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1\}$, 转移矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}(n)$

二. (15 分)

一个系统中有三个相互独立的元件, 元件损坏的概率都是 0.2. 当一个元件损坏时, 系统发生故障的概率为 0.25; 当两个元件损坏时, 系统发生故障的概率为 0.6; 当三个元件损坏时, 系统发生故障的概率为 0.95; 当三个元件都不损坏时, 系统不发生故障. 求系统发生故障的概率.

三. (15 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 在 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, Y 的密度函数为 $f_Y(y) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- (1) 求 X 和 Y 的联合分布密度函数;
- (2) 设关于 a 的二次方程为 $a^2 + 2aX + Y = 0$, 试求此方程有实根的概率 (用标准正态分布的分布函数表出结果)。

四. (10 分)

设连续型随机变量的概率密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$

- (1) 求 $E(X)$ 、 $D(X)$,
- (2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 且判定二者是否不相关,
- (3) 判断 X 与 $|X|$ 是否相互独立。

五. (10 分)

已知齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 状态空间为 $I=\{0,1,2\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{初始分布为 } P_0(0) = \frac{1}{3}, P_1(0) = \frac{1}{3}, P_2(0) = \frac{1}{3},$$

(1) 求 X_2 的分布律, (2) 求该马氏链的平稳分布。

六. (10 分)

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为随机过程, $X(t) = 3Y \cos t + 3Z \sin t$, 其中, Y, Z 独立, 且均服从标准正态分布。(1) 试求出均值函数 $\mu_X(t)$ 及自相关函数 $R_X(t, s)$, 并判断平稳性。(2) 求概率 $P\{X(t_1) < 0\}$.