北京邮电大学 2012——2013 学年第 1 学期

《概率论与随机过程》期末考试试题答案

考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的班号和选课单上的学号，班内序号！

一. 单项选择题和填空题：（每空 3 分，共 30 分）

1. 设$\mathcal{A}$是定义在非空集合Ω上的集代数，则下面正确的是_____.A

（A）若 $A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{A}$，则 $A-B\in\mathcal{A}$；

（B）若 $A\in\mathcal{A}, B\subset A$，则 $B\in\mathcal{A}$；

（C）若 $A_n\in\mathcal{A}, n=1,2,\ldots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$；

（D）若 $A_n\in\mathcal{A}, n=1,2,\ldots$，且 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$.

2. 设$(\Omega,\mathcal{F})$为一可测空间，P为定义在其上的有限可加测度，则下面正确的是_____.c

（A）若 $A\in\mathcal{F}, B\in\mathcal{F}$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

（B）若 $A_n\in\mathcal{F}, n=1,2,\ldots$，且 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$，则 $P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$；

（C）若 $A\in\mathcal{F}, B\in\mathcal{F}, C\in\mathcal{F}$，则 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$；

（D）若 $A_n\in\mathcal{F}, n=1,2,\ldots$，且 $A_iA_j=\varnothing,\forall i\neq j$，$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

3. 设 f 为从概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$到 Borel 可测空间$(R,\mathcal{B})$上的实可测函数，表达式为 $f(\omega)=\sum_{k=0}^{100}kI_{A_k}$，其中 $A_iA_j=\varnothing,\forall i\neq j,\bigcup_{n=0}^{100}A_n=\Omega$，则 $\int_\Omega fdP=$_____；

若已知 $P(A_k)=\dfrac{100!}{k!(100-k)!}\dfrac{1}{2^{100}}$， 则 $\int_\Omega f^2 dP=$______.

$\sum_{k=0}^{100} kP(A_k), 25+50^2=2525$

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $E[E[X\mid Y]]=$______.2/3

5. 设随机过程 $\{X(t)=X\cos\omega t, -\infty<t<+\infty\}$，其中随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布， $\omega\in(0,\pi/2)$ 为常数，则（1） $X(1)$ 的概率密度 $f(x;1)=$______;

（2） $E(\int_0^{\frac{\pi}{2}} X(t)dt)=$______.

$$f(x;1)=\begin{cases}\dfrac{1}{cos\omega}e^{-\frac{x}{cos\omega}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \quad E(\int_0^{\frac{\pi}{2}} X(t)dt)=\frac{1}{\omega}$$

6. 设 $\{W(t), t\ge 0\}$ 是参数为 $\sigma^2(\sigma>0)$ 的维纳过程，令 $X(t)=W(\frac{1}{t})$，则相关函数 $R_X(1,2)=\dfrac{\sigma^2}{2}$______.

7. 设齐次马氏链的状态空间为 $E=\{1,2,3\}$,一步转移概率为

$$P=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 0\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$$

则（1） $\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)}=$______;（2） $\sum_{n=0}^{\infty} p_{33}^{(n)}=$______. 1/2,2

二. 概率题（共 30 分）

1.（10 分） 设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}},$$

令 $U=X^2+Y^2, V=Y$，（1）求 (U,V) 的概率密度 $g(u,v)$；（2）求 U 的边缘概率密度 $g_U(u)$.

解解.（1） 解方程 $\begin{cases} u=x^2+y^2, \\ v=y, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{u^2-v^2}, \\ y=v, \end{cases} |v|\le u,$

所以雅可比行列式 $J=\begin{vmatrix} \pm\dfrac{u}{2\sqrt{u^2-v^2}} & \mp\dfrac{v}{2\sqrt{u^2-v^2}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\pm\dfrac{u}{2\sqrt{u^2-v^2}}$,

故

$$g(u,v)=f(x,y)|J|=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\dfrac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}, & |v|\le u, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$ ……5 分

（2）对 $u>0$，

$$g_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}g(u,v)dv=\int_{-u}^{u}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}dv$$

$$=\frac{u}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\int_{-u}^{u}\frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}}dv=\frac{u}{2\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}},$$

故 $g_U(u)=\begin{cases} \dfrac{u}{2\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}, & u>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ ……10 分

2.（10 分）设 (U,V) 的概率密度

$$g(u,v)=\begin{cases} e^{-u}, & u-v>0, v>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

（1）求 $E(I_{\{V>1\}}|U=10)$，其中 $I_{\{V>1\}}(\omega)=\begin{cases} 1, & \omega\in\{V>1\}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$（2）$D(V|U)$.

解 U 的边缘概率密度为

$$g_U(u)=\int_0^u g(u,v)dv=\begin{cases}\int_0^u e^{-u}dv, & u>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}=\begin{cases}ue^{-u}, & u>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

所以条件概率密度

$$g_{V|U}(v\,|\,u)=\frac{g(u,v)}{g_U(u)}=\begin{cases}\dfrac{1}{u}, & 0<v<u,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ ……4 分

（1）

$$E(I_{\{V>1\}}\,|\,U=10)=P(V>1\,|\,U=10)=\int_1^{10} g_{V|U}(v\,|\,u=10)dv=\int_1^{10}\frac{1}{10}dv=\frac{1}{2}.$$

……7 分

（2）因为 $D(V\,|\,U=u)=\dfrac{u^2}{12}$，所以 $D(V\,|\,U)=\dfrac{U^2}{12}$。 ……10 分

3.（10 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，均服从两点分布，即 $P\{X_1=0\}=p,P\{X_1=1\}=1\text{-}p,(0<p<1)$，令 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$，（1）求 Y 的特征函数；（2）求 $E(Y^3)$.

解：（1）因为 Y 服从二项分布 $B(n,q)$，所以 Y 的特征函数

$$\phi(t)=(p+qe^{it})^n$$ ……5 分

（2）$E(Y^3)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)^n$

$$=\sum_{i=1}^{n}EX_i^3+\sum_{i,j=1,j\neq i}^{n}E(X_i^2X_j)+\sum_{i,j,k=1,互不相等}^{n}E(X_iX_jX_k)$$

$$=nq+n(n-1)q^2+n(n-1)(n-2)q^3$$ ……10 分

三. 随机过程题（共 40 分）

1. （10 分）设 $X_1(t)(t\geq 0)$ 是参数为 $\lambda(>0)$ 的泊松过程，即满足：

（1）$X_1(0)=0;$

(2) $X_1(t)$为独立增量过程;

(3) 对 $\forall s,t\geq 0,$有 $P\{X(s+t)-X(s)=k\}=\dfrac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},k=0,1,\cdots.$

$X_2(t)(t\geq 0)$ 也是参数为 $\lambda(>0)$ 的泊松过程，且与 $X_1(t)$ 独立，令 $Y(t)=X_1(t)+X_2(t)$，（1）求 $\mu_Y(t)$和$R_Y(s,t)$；（2）求 $P\{Y(1)=1\}$.

解：因为 $Y(t)=X_1(t)+X_2(t)$ 是参数为 2λ 的泊松过程，所以

（1）$\mu_Y(t)=2\lambda, R_Y(s,t)=2\lambda\min\{s,t\}+4\lambda^2 st$ ……5 分

（2）$P\{Y(1)=1\}=2\lambda e^{-2\lambda}$ ……10 分

2.（10 分） 设 $\{X(t),-\infty<t<\infty\}$ 是平稳过程，$f(\lambda)$ 是其谱密度函数，（1）证明：对于任意的 $h>0$，$Y(t)=X(t+h)-X(t)$ 是平稳过程；（2）求 $Y(t)$ 的谱密度.

解 （1） $E[Y(t)]=E[X(t+h)-X(t)]=\mu-\mu=0$,

$$E[Y(t+\tau)Y(t)]=E[X(t+\tau+h)-X(t+\tau)][X(t+h)-X(t)]$$

$$=2R_X(\tau)-R_X(h+\tau)-R_X(\tau-h)$$

与 t 无关，则 $Y(t)=X(t+h)-X(t)$ 是平稳过程。 ……5 分

（2） $f_\eta(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\tau}[2R_X(\tau)-R_X(h+\tau)-R_X(\tau-h)]d\tau$

$$=2f(\lambda)-e^{ih\lambda}f(\lambda)-e^{-ih\lambda}f(\lambda)$$

$=2f(\lambda)(1-\cos h\lambda)$. ……10 分

3. （10 分）设齐次马氏链 $\{X_n, n \ge 0\}$ 的状态空间为 $E=\{0,1,2\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

初始分布为 $P\{X_0=0\}=P\{X_0=1\}=P\{X_0=2\}=\dfrac{1}{3}$，求

(1) $P\{X_1=1, X_2=1, X_4=2\}$ 和 $P\{X_1=1, X_2=1, X_4=2|X_0=0\}$；

(2) X_2 的分布律.

解 (1) $P^2=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 3/8 & 1/8 \\ 1/2 & 1/8 & 3/8 \end{bmatrix}$

$$P\{X_1=1, X_2=1, X_4=2\}=\sum_i P\{X_0=i\} p_{i1}^{(1)} p_{11}^{(1)} p_{12}^{(2)}=0$$

$P\{X_1=1, X_2=1, X_4=2|X_0=0\}=p_{01}p_{11}p_{12}(2)=0$ ……6 分

(2) $p(2)=p(0)P^2=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 3/8 & 1/8 \\ 1/2 & 1/8 & 3/8 \end{bmatrix}=\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ ……10 分

4.（10 分）齐次马氏链 $\{X_n, n \ge 0\}$ 的状态空间为 $\{1,2,3,\cdots\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

确定该链的空间分解，状态分类，各状态的周期，并求平稳分布.

解.（1)链可分, $\{1,3\}\{4\}$是不可分闭集, 状态空间 $E=\{1,4\}\cup\{3\}\cup\{2,5,6,7,\cdots\}$

……2 分

（2） 周期

$d(i)=1, i=1,2,\ldots.$ ……4 分

（3） 设平稳分布为 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots)$,则

$$\begin{cases} \pi=\pi P, \\ \sum_i \pi_i=1 \\ \pi_i \geq 1, i=1,2,\ldots \end{cases}$$

解之得 $\pi=(p,0,q,p,0,0,\cdots)$,其中 $p\geq 0, q\geq 0, 2p+q=1$. ……7 分

（4） 所以 1,3,4 正返态,其余都不是常返态，又因为

$f_{22}=\frac{1}{2}<1, f_{44}=\frac{1}{4}<1, f_{ii}=\frac{1}{3}<1, i=6,7,\ldots$， 所以 $2,4,6,7,\ldots$ 都为非常返态。

……10 分