# 北京邮电大学 2014—2015 学年第 2 学期

## 3 学时《概率论与随机过程》期末考试试题（A）答案

**考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效**

**一、填空题（45 分，每空 3 分）**

1. 设 $A,B,C$ 是随机事件，$A$ 与 $C$ 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$, $P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\bar{C})=$__________. $\dfrac{3}{4}$

2. 设随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2} & 0\le x<1\\ 1-e^{-x} & x\ge 1\end{cases}$, 则 $P(X=1)=$_______. $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$

3. 设 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, 0<x<y<1,\\ 0, \text{ otherwise},\end{cases}$ 则对任意给定的 $x(0<x<1)$，$f_X(x)=$_________. 1

4. 设随机变量 $X$ 的概率分布为 $P(X=k)=\dfrac{C}{k!}(k=0,1,2,\ldots)$，则 $D(X)=$______. 1

5. 设随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，则 $P(X>E(X))=$________. $e^{-1}$

6. 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6x & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$,
   则 $P(X+Y\le 1)=$_________. $\dfrac{1}{4}$

7. 设随机变量 $X,Y$ 相互独立，且 $X\sim N(3,4),\ Y\sim b(10,0.3)$，则 $E(X+Y)$=_________.
   6

8. 设 $X$ 和 $Y$ 相互独立，$X\sim N(1,2)$，$Y$ 的分布律为

| $Y$ | -1 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |

   则 $P\{X<1,Y\le 1\}=$_______. 0.4

9. 设二维随机变量 $(X,Y)$ 服从 $N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则 $E(XY^2)=$_______. $\mu(\mu^2+\sigma^2)$

10. 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为 $\rho=$ ________.
    -1

11. 已知随机过程 $X(t)=At+B, t\in(-\infty,+\infty)$，其中 $A,B$ 独立同分布，且 $A$~$N$(0，1)，则 $X(t)$的一维概

率密度 $f(x,t)=$____________.

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}e^{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}},-\infty<x<+\infty$$

12. 设 $\{W(t),t\geq 0\}$ 是参数为 $\sigma^2$（$\sigma>0$）的维纳过程，则 $W(2)$ 与 $W(1)$ 的相关系数为 ________. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. 设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是参数为 $\lambda>0$ 的泊松过程，则

$P\{N(2)=2,N(4)=3|N(1)=1\}=$__________. $2\lambda^2e^{-3\lambda}$

14. 设 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots$ 是齐次马氏链，$I=\{1,\ 2,\ 3\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0\end{pmatrix}$$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{11}(n)=$_________. $\frac{1}{3}$

15. 设平稳过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 的功率谱密度 $S_X(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$，则其自相关函数 $R_X(\tau)=$_______. $\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$

## 二、（15 分）

某保险公司多年的统计表明：在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 $X$ 表示在随机抽查的 100 个索赔户中，因被盗向保险公司索赔的户数。(1) 写出 $X$ 的概率分布；(2) 利用中心极限定理，求被盗索赔户不少于 14 户，且不多于 30 户的概率的近似值.

[附表]设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数

| $x$ | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x)$ | 0.692 | 0.841 | 0.933 | 0.977 | 0.994 |

解 (1) $X\sim b(100,0.2)$，即

$$P\{X=k\}=C_{100}^k(0.2)^k(0.8)^{100-k}\quad k=0,1,\cdots,1\,0\,($$ (5 分)

(2) $E(X)=20,\quad D(X)=16$， (4 分)

$$P\{14\leq X\leq 30\}=P\{\frac{14-20}{\sqrt{16}}\leq\frac{X-20}{\sqrt{16}}\leq\frac{30-20}{\sqrt{16}}\}$$ (6 分)

$$=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=\Phi(2.5)+\Phi(1.5)-1=0.927$$

## 三、（15 分）

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1)求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

(2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$.

(3)求条件概率 $P(Y\le 1|X\le 1)$.

解. (1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$ (5 分)

(2)

当 $x>0$，$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f(x)}=\begin{cases} e^{x-y}, & 0<y<x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，当 $x\le 0$，不存在。

当 $y>0$，$f_{X|Y}(x|y)==\dfrac{f(x,y)}{f(y)}=\begin{cases} 1/y, & 0<y<x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，当 $y\le 0$，不存在。(5 分)

（3）$P(X\le 1)=1-e^{-1}, P(X\le 1, Y\le 1)=1-2e^{-1}$,

所以 $P(Y\le 1|X\le 1)=\dfrac{P(X\le 1,Y\le 1)}{P(X\le 1)}=\dfrac{e-2}{e-1}$ (5 分)

## 四、（15 分）

独立地重复掷一颗骰子，以 $X_n$ 表示前 $n$ 次掷出的最小点数，则 $\{X_n, n\ge 1\}$ 是一齐次马尔可夫链，初始分布为 $P(X_1=i)=\dfrac{1}{6}, i=1,2,...,6,$ 一步转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

（1）求$P(X_1=3,X_2=3,X_3=3)$,

（2）求$X_2$的分布律.

解：（1）

$$
\begin{aligned}
&P(X_1=3,X_2=3,X_3=3)\\
&=P(X_1=3)P(X_2=3\mid X_1=3)P(X_3=3\mid X_2=3) \quad (4分)\\
&=\frac{1}{6}\times p_{33}\times p_{33}=\frac{4}{54} \qquad (3分)
\end{aligned}
$$

（2）记$X_2$的分布律为$\mathbf{q}(2)$，则

$$
\mathbf{q}(2)=\mathbf{q}(1)
$$

$$
=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36}\end{pmatrix}.
$$

(8 分)

解法二：根据全概率公式，有

$$
P(X_2=j)=\sum_{i=1}^{6}P(X_2=j\mid X_1=i)P(X_1=i), \qquad (4\text{ 分})
$$

再逐一计算。 (4 分)

## 五、（10 分）

设$X(t)$是平稳过程，定义$Y(t)=X(t)\cos(\omega t+\Theta)$，$X(t)$与$\Theta$相互独立，$\Theta\sim U(0,2\pi)$，$\omega$为常数。试证明$Y(t)$是平稳过程.

证明：设平稳过程$X(t)$的均值函数为$\mu_X(t)$，相关函数为$R_X(t)$。

$$\begin{aligned}\mu_Y(t) &= E(Y(t)) = E(X(t)\cos(\omega t+\Theta)) \\ &= E(X(t))\cdot E(\cos(\omega t+\Theta)) \\ &= \mu_X(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta = 0.\end{aligned}$$

(4 分)

$$\begin{aligned}R_Y(t,t+\tau) &= E(Y(t)Y(t+\tau)) \\ &= E(X(t)X(t+\tau))\cdot E(\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)) \\ &= R_X(\tau)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega(t+\tau)+\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= R_X(\tau)\cdot\frac{1}{2}\cos(\omega\tau).\end{aligned}$$

(5 分)

$Y(t)$的均值函数是常数，相关函数只与 τ 有关，故$Y(t)$是平稳过程。 (1 分)