北京邮电大学 2015—2016 学年第 2 学期

3 学时《概率论与随机过程》期末考试试题（B）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题（45 分，每空 3 分）

1. 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球, 今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是______________. 2/5

2. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A)$=______________. 1/3

3. 若随机变量 ξ 在（0, 5）上服从均匀分布, 则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是_____________. 3/5

4. 设 X 是连续型随机变量，其分布函数 $F(x)$严格单调，则随机变量 $Y=2F(X)$的分布函数$F_Y(y)$=___. $\begin{cases} 0, & y<0, \\ y/2, & 0\le y<2, \\ 1, & y\ge 2 \end{cases}$

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且$X\sim N(1,4), Y\sim N(3,5)$，则 2X-3Y+1 的分布服从__________，$P(-8<X-Y<4)$=__________. N(-6,61), 0.9544

   (其中$\Phi(1)=0.8413$和$\Phi(2)=0.9772$).

6. 设相互独立的两个随机变量 X,Y 具有同一分布律, 且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

   则随机变量$Z=\max\{X,Y\}$的分布律为__________. $P(Z=0)=\frac{1}{4}, P(Z=1)=\frac{3}{4}$

7. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.5，X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

$Y\sim B(18,\frac{1}{3})$. 则 $E(XY)$=____. 14

8. 设随机变量序列 $X_1,X_2,\dots,X_{50}$ 独立同参数($\lambda=0.02$)的泊松分布，记 $Y=\sum_{i=1}^{50}X_i$，利用中心极限定理近似计算 $P(Y\ge 2)=$___. 0.1587

9. 设 $X\sim U(0,4)$，$Y\sim B(2,0.5)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $P\{X+Y\ge 3\}=$ 0.5

10. 设 $X(t)=U\sin t+V\cos t,(-\infty<t<+\infty)$,其中 U,V 是互不相关，且都是服从标准正态分布的随机变量，则 $\{X(t)\}$ 的一维概率密度为 $f(x;t)=$___. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

11. 设 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，$W(0)=0$。定义 $X(t)=aW\left(\frac{t}{a}\right)$，$a>0$，则自协方差函数 $C_X(s,t)=$____________ $\alpha\sigma^2\min\{s,t\}$

12. 设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 服从强度为 λ 的泊松过程，则 $P\{N(7)=9|N(3)=4\}=$ $(4\lambda)^5e^{-4\lambda}/5!$

13. 设离散时间离散状态齐次马尔可夫链 $\{X_n\}$ 的状态空间是{1,2,4},平稳分布为 $\pi=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right\}$，若 $P(X_0=1)=\frac{2}{3},P(X_0=2)=\frac{1}{6},P(X_0=4)=\frac{1}{6}$，则方差 $D(X_n)$=______________11/9

14. 设 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 为平稳随机过程，功率谱密度为 $S_X(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$，则其平均功率为____________________ 1

二、（15 分）

设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$

(1)求 X 的数学期望 $E(X)$和方差 $D(X)$ （5 分）

(2)求 X 与$|X|$的协方差,并问 X 与$|X|$是否相关? （5 分）

(3)问 X 与$|X|$是否相互独立?为什么? （5 分）

解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0$ （2 分）

方差$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-0=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$ （5 分）

(2)$Cov(X,|X|)=E(X,|X|)-E(X)E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)dx-0=0$

所以 X 与|X|不相关 （10 分）

(3) 对给定 $0<a<+\infty$，显然$\{|X|<a\}\subset\{X<a\}$，所以$P\{X<a,|X|<a\}=P\{|X|<a\}$。又有 $P\{X<a\}<1$，$P\{|X|<a\}>0$，所以$P\{X<a\}\cdot P\{|X|<a\}<P\{|X|<a\}$，因此 $P\{X<a,|X|<a\}\neq P\{X<a\}\cdot P\{|X|<a\}$，所以 X 与|X|不独立 （15 分）

三、（15 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为$P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，Y 的概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}a & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，记 Z=X+Y,

(1) 求常数 a 的值　　（3 分）

(2) 求$P\{Z\le\frac{1}{2}|X=0\}$.　　（5 分）

(3) 求 Z 的概率密度.　　（7 分）

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)dy=\int_0^1 ady=1$，解得：$a$=1　　（3 分）

(2) $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}=P\left\{X+Y\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}=P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$

$=P\{Y\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}$　　（8 分）

(3)$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$

$=P\{X+Y\le z,X=-1\}+P\{X+Y\le z,X=0\}+P\{X+Y\le z,X=1\}$

$=P\{Y\le z+1,X=-1\}+P\{Y\le z,X=0\}+P\{Y\le z-1,X=1\}$

$=P\{Y\le z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\le z\}P\{X=0\}+P\{Y\le z-1\}P\{X=1\}$

$=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)]$　　（11 分）

$f_Z(z)=F_Z'(z)$　　（12 分）

$=\frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le z\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$　　（15 分）

四、（15 分）

设齐次马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的状态空间为$E=\{1,2,3\}$，状态转移概率矩阵为

$$P=\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{matrix}$$ 初始分布 $P\{X_0=1\}=1,\ \ P\{X_0=i\}=0,\ \ i=2, 3$

（1）证明马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$具有遍历性，并求其极限分布　　（8 分）

（2）求$P\{X(1)=1, X(3)=3\}$；　　　（7 分）

解（1）$P^2=\begin{matrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{3}{16} & \frac{35}{48} \end{matrix}$　　　（3 分）

因为 P^2 中所有元素均为正数，且马氏链的状态是有限个，所以遍历。

极限分布π满足如下方程组：$\begin{cases} \pi_1=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_3=\frac{2}{3}\pi_2+\frac{3}{4}\pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$　　　（6 分）

解得：$\pi_1=\frac{2}{13}$，$\pi_2=\frac{3}{13}$，$\pi_3=\frac{8}{13}$　　　（8 分）

（2）$P\{X(1)=1, X(3)=3\}$

$=P\{X(3)=3|X(1)=1\}P\{X(1)=1\}$

$=P_{13}(2)P\{X(1)=1\}$　　　（11 分）

$P_1=P_0P=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，　　　（14 分）

上式$=\frac{1}{3}*\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$　　　（15 分）

五、（10 分）

设$X(n) = \sin(Un)$，$n \in N$，这里U为$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量。

证明：$X(n)$是宽平稳随机过程

解：$E[X(n)] = \int_0^{2\pi} \sin(tn)\frac{1}{2\pi}dt = 0$ （4 分）

自相关函数$\mathrm{R_X(n, n+\tau) = E[X(n)X(n+\tau)]}$

$=\int_0^{2\pi} \sin(tn)\sin[(n+\tau)t]\frac{1}{2\pi}dt$

$=\int_0^{2\pi}\{\cos(\tau t) + \cos[(2n+\tau)t]\}\frac{1}{2\pi}dt$

$=\int_0^{2\pi} \cos(\tau t)\frac{1}{2\pi}dt=\sin(2\pi\tau)/2\pi\tau$ （9 分）

均值函数为常数，自相关函数只与τ有关，所以是平稳随机过程

（10 分）