北京邮电大学 2016——2017 学年第 2 学期

3 学时《概率论与随机过程》期末考试 (A)

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一. 填空题（45 分，每空 3 分）

1. 设 A, B 为两个随机事件，$P(A)=0.2$，$P(A|B)=P(B|A)=0.5$，则 $P(A\cup \overline{}$ ____.

0.9

2. 设 $X\sim U(a,b)$，则 $Y=2X+5$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=$________.

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(b-a)}, & 2a+5<y<2b+5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3. 设 X 的密度函数为 $f(x)=ae^{-(x-1)^2}\ (-\infty<x<+\infty)$，则 $a=$______, $E(X)=$_______,

$D(X)=$________. $1/\sqrt{\pi}$，1，1/2

4. 设随机变量 X,Y 独立，均服从参数为 1 的指数分布，则 $Z=\min(X,Y)$ 的密度函数 $f_Z(z)=$_________. $f_Z(z)=2e^{-2z},\ z>0$

5. 设随机变量 X,Y 独立，$X\sim N(18,\frac{9}{2})$, $Y\sim N(2,2)$，则

$P\left(\dfrac{1}{3}X-\dfrac{1}{2}Y<6\right)=$ _________. $\left(\Phi(1)=0.8143,\ \Phi(2)=0.9772\right)$ 0.8143

6. 设 X,Y 相互独立，分别服从参数为 1 和 2 的泊松分布，则 $X+Y$ 的分布律为_____.

$$P(X+Y=k)=\frac{3^k}{k!}e^{-3},k=0,1,2,...$$

7. 设 $X\sim b(1,0.5)$，Y 服从期望为 $\dfrac{1}{3}$ 的指数分布，$\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X\text{-}3Y\text{+}2)=$_____.

0.85

8. 计算器的舍入误差是$(-0.5,0.5)$上的均匀分布，若将 120 个误差数值相加，则总误差的绝对值超过 10 的概率近似为________. $\left(\Phi(1)=0.8143,\ \Phi(2)=0.9772\right)$ 0.3714

9. 设$X(t)=U\sin\omega t+V\cos\omega t$, 其中$\omega$为常数，$(U,V)\sim N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$， 则$\{X(t)\}$的一维概率密度函数$f(x;t)=$____________. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu\sin\omega t-\mu\cos\omega t)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty$

10. 设$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为 2 的维纳过程，定义$X(t)=W(3t)$， 则相关函数$R_X(2,7)=$____________. 12

11. 设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为 1 的泊松过程，则$N(3)$与$N(5)$的相关系数为_________，$P(N(1)=1,N(2)=3)=$______________. $\sqrt{15}/5$, $\frac{1}{2}e^{-2}$

12. 设齐次马氏链$\{X_n,n\geq 0\}$的状态空间$E=\{1,2\}$, 一步概率转移矩阵为$\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=2)=$______________. 8/13

二．(12 分)

设随机变量X和Y独立，$Z=X+Y$，$X\sim U(0,1)$，即(0,1)区间上的均匀分布，Y为离散型随机变量，分布律为$P(Y=1)=0.4, P(Y=2)=0.6$，求解下列问题：

(1) $E(Z), D(Z)$；

(2) 随机变量Z的分布函数$F_Z(z)$和密度函数$f_Z(z)$.

解：（1）

$E(Z)=$ 2.1 （2分）

$D(Z)=$ 97/300（2分）

（2）

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=P(X+1\le z)P(Y=1)+P(X+2\le z)P(Y=2)$$
$$=0.4P(X\le z-1)+0.6P(X\le z-2)$$

（2 分）

故 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1;\\ 0.4z-0.4, & 1\le z<2;\\ 0.6z-0.8, & 2\le z<3;\\ 1, & z\ge 3.\end{cases}$ （2 分）

（3）

$f_Z(z)=F'_Z(z)$ （2 分）

故 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1\text{或}z>3;\\ 0.4, & 1\le z<2;\\ 0.6, & 2\le z<3.\end{cases}$ （2 分）

三．(15 分)

设二维随机变量(X,Y)的分布为单位圆上的均匀分布，求解下列问题：

(1) 边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$；

(2) 判断X,Y是否相互独立，是否不相关，并给出理由；

(3) 条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

解：（1） 当$-1<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi},$$

故$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (2分)

当$-1<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi},$$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (2分)

（2）

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以X和Y不独立. （3分）

因为 $Cov(X,Y)=EXY-EXEY$

$=\iint xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=0$

故 X和Y的相关系数为0, 不相关. （3分）

（3）当$-1<x<1$时，

$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}},-\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}$.(3分)

故 $f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (2分)

四.（15 分）

设齐次马氏链$\{X_n,\ n\geq 0\}$的状态空间为$E=\{a,b,c\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 3/4 & 1/4\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}，\text{初始分布为}P(X_0=a)=1.$$

(1) 求$P(X_2=b)$；

(2) 求$P(X_1=b,X_3=c,X_4=a)$, $P(X_4=a,X_5=b\,|\,X_2=c)$；

(3) 证明马氏链$\{X_n,\ n\geq 0\}$具有遍历性，并求其极限分布.

解：（1）

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 11/24 & 1/12 & 11/24 \\ 1/6 & 13/24 & 7/24 \\ 5/18 & 13/36 & 13/36 \end{pmatrix} \quad (3分)$$

$$P(X_2=b)=\sum_{i=a,b,c} P(X_2=b \mid X_0=i)P(X_0=i)=P(X_0=a)p_{ab}(2)=1/12. \quad (2分)$$

（2）

$$P(X_1=b,X_3=c,X_4=a)=P(X_1=b)P(X_3=c \mid X_1=b)P(X_4=a \mid X_3=c)$$

$$=p_{ab}p_{bc}(2)p_{ca}=\frac{3}{4}*\frac{7}{24}*\frac{1}{4}=\frac{7}{128}. \quad (3分)$$

$$P(X_4=a,X_5=b \mid X_2=c)=P(X_4=a \mid X_2=c)P(X_5=b \mid X_4=a)$$

$$=p_{ca}(2)p_{ab}=\frac{5}{18}*\frac{3}{4}=\frac{5}{24}. \quad (2分)$$

（3）

因为马氏链的状态有限，且P^2没有零元素，故该马氏链遍历.（2分）

极限分布满足方程$\begin{cases} \pi=\pi P \\ \sum\limits_{i=a,b,c}\pi_i=1 \end{cases}$ (2分)

解得$\pi=\left(\frac{12}{41}\frac{14}{41}\frac{15}{41}\right)$. (1分)

五.（13 分）

设平稳随机过程 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 相互独立，且 $\mu_{X_1}(t)=0$.

(1) 证明随机过程 $X(t)=X_1(t)+X_2(t)$ 是平稳过程；

(2) 设 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 功率谱密度为 $S_1(\omega)=S_2(\omega)=\dfrac{4}{\omega^2+4}$，求随机过程 $X(t)$ 的平均功率.

(1) 证明：$\mu_X(t)=E(X(t))=\mu_{X_2}(t)$, 因为$X_2(t)$是平稳过程，
所以$\mu_{X_2}(t)$是常数，故$\mu_X(t)$是常数.（4分）

$R_X(t,t+\tau)=E(X(t)X(t+\tau))=R_{X_1}(t,t+\tau)+R_{X_2}(t,t+\tau)$,

因为$X_1(t)$和$X_2(t)$是平稳过程，所以$R_X(t,t+\tau)$只与τ有关.（4分）

故$X(t)$是平稳过程.

(2) 解：

因为$R_{X_1}(\tau)=R_{X_2}(\tau)=\mathrm{e}^{-2|\tau|}$，故$R_X(\tau)=2\mathrm{e}^{-2|\tau|}$.　(3分)

故平均功率$=E(X^2(t))=R_X(0)=2$.（2分)