北京邮电大学 2009——2010 学年第 2 学期

3《概率论与随机过程》期末考试答案（B）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效。

一. 填空题（45 分，每空 3 分）

1. 设两两独立的事件 A,B,C 满足 $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)<1/2$，且 $P(A\cup B\cup C)=9/16$，求 $P(A)=$ <u>1/4</u>

2. 袋中有 5 个球，其中 1 个红球，每次从中任取 1 个球，取出后不放回，问前 3 次取到红球的概率为 <u>3/5</u>

3. 设平面区域 D 由 $x=1, y=0, y=x$ 围成，平面区域 D_1 由 $y=x^2, y=x$ 围成。现向 D 内依次随机投掷质点，问第 3 次投掷的质点恰好第二次落在 D_1 内的概率是 <u>4/27</u>

4. 设随机变量 X 的概率分布函数为 $F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$，问 $B=$ <u>-1</u>

5. 随机变量 k 在 $(-5,5)$ 上服从均匀分布，即 $k\sim U(-5,5)$，则方程 $4x^2+4kx+k+2=0$ 有实根的概率为 <u>7/10</u>

6. 设随机变量序列 $\{X_n, n=1,2,\ldots\}$ 独立同分布于 $(-3,3)$ 上的均匀分布，即 $U(-3,3)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i<0\right\}=$ <u>1/2</u>

7. 已知随机变量 $X\sim N(0,1)$，定义函数 $g(x)=\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$，求 $Y=g(X)$ 的密度函数 $f_Y(y)=$ ____ $f_Y(y)=\begin{cases} 1/\sqrt{2\pi}, & y\in(0,\sqrt{2\pi}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

8. 设随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$ 上的均匀分布，求

$D(X+Y)=$ ____1/6

9. 设 $X\sim N(3,4)$ 满足 $P\{X>C\}=P\{X\le C\}$，则 $C=$ ___3

10. 设一灯管的使用寿命 X 服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布，现已知该灯管用了 10 小时还没有坏，该灯管恰好还能再用 10 小时的概率为 0_____

11. 设电话总机在 $(0,t]$ 内接受到电话呼叫次数 $N(t)$ 是强度（每分钟）为 $\lambda>0$ 的泊松过程，$N(0)=0$， 则 2 分钟收到 3 次呼叫的概率______$\frac{4}{3}\lambda^3e^{-2\lambda}$

12. 设高斯过程 $\{X(t),0\le t<+\infty\}$ 是平稳过程，均值为 0，相关函数 $R_X(\tau)=\frac{1}{9}e^{-2|\tau|},-\infty<\tau<+\infty$，对于任意的 t，求 $X(t)$ 的密度函数 $f(x)=$ $\frac{3}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9x^2}{2}}$

13. 设随机过程 $X(t)=tY,t\ge 0$，其中 Y 服从正态分布，即 $Y\sim N(1,4)$，求 $E\left(\int_0^1 3tX(t)dt\right)=$ ______1

14. 设 $\{W(t),0\le t<+\infty\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，令 $Y(t)=cW\left(\frac{t}{c^2}\right)$，求自协方差函数 $C_Y(s,t)=$ ______$\sigma^2\min(s,t)$

15. 设平稳过程 $\{X(t),0\le t\le+\infty\}$ 的功率谱密度为 $S_X(\omega)=\frac{1}{\omega^4+13\omega^2+36}$，则其平均功率为______1/60

二.（10 分）

设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B\mid A)=\frac{1}{3},P(A\mid B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{B发生},\\ 0, & \text{B不发生}.\end{cases}$$

求(1) 二维随机变量 (X,Y) 的分布律， (2) X,Y 的相关系数, (3) $Z=X^2+Y^2$ 的分布律。

解. (1) $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=1/12, P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A\mid B)}=1/6,$

$$\text{则}\begin{cases}P(X=1,Y=1)=P(AB)=1/12,\\ P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})=1/6,\\ P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)=1/12,\\ P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=2/3,\end{cases}$$

即

X \ Y	0	1
0	**2/3**	1/12
1	1/6	1/12

（3 分）

（2） $E(X)=P(A)=1/4, E(Y)=P(B)=1/6, E(XY)=1/12$

$$\text{所以，}\begin{cases}\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=1/24,\\ EX^2=P(A)=1/4, EY^2=P(B)=1/6,\\ DX=EX^2-(EX)^2=3/16,\\ DY=EY^2-(EY)^2=5/36,\end{cases}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=1/\sqrt{15}$$ （3 分）

（3） $Z=X^2+Y^2$ 的取值为 0,1,2。

$$\begin{cases}P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=2/3,\\ P(Z=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=1/4,\\ P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=1/12\end{cases}$$

故 Z 的分布率为

Z	0	1	2
p_k	2/3	1/4	1/12

（4 分）

三．（15分）

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(1)求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$，(2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$，$f_{X|Y}(x\mid y)$，(3)求条件概率 $P(X\le 1\mid Y\le 1)$.

解. (1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases} \qquad (5分)$$

(2)

当 $y>0$，$f_{X|Y}(x\mid y)==\dfrac{f(x,y)}{f(y)}=\begin{cases} e^{y-x}, & 0<y<x \\ 0, & 其他 \end{cases}$，当 $y\le 0$，不存在。(5分)

（3）$P(Y\le 1)=1-e^{-1}, P(X\le 1, Y\le 1)=1-2e^{-1}$,

所以 $P(X\le 1\mid Y\le 1)=\dfrac{P(X\le 1, Y\le 1)}{P(Y\le 1)}=\dfrac{e-2}{e-1}$ (5分)

四．（15分）

设质点在1,2,3,4上做随机游动，假设只能在时刻n=1,2,…移动，且只能停留在1,2,3,4点上。当质点转移到2,3点时，它以1/3的概率向左，向右移动一个格或停留在原处，当质点移动到1点时，以概率1向右移动一个格，当质点移动到4点时，以概率1向左移动一个格。以 X_n 表示时刻 n 质点所处的位置，X_0 表示初始时刻0质点所处位置。

（1）证明 $\{X_n, n=0,1,\ldots\}$ 为齐次马氏链，并写出一步转移概率矩阵,

（2）若初始时刻质点位于点 1，求概率 $P(X_2=3,X_4=2,X_5=1)$，

（3）证明 $\{X_n,n=0,1,\ldots\}$ 具有遍历性，并求其极限分布，

（4）若以极限分布为初始分布，求 EX_n。

解：（1）证明：对于任意整数 $n>0$，及任意 $i_0,i_1\cdots i_{n-1},i,j\in\{1,2,3,4\}$

总有

$$P\{X_{n+1}=j\mid X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}$$

$$=\begin{cases}1, & i=1,j=2\\ 1, & i=4,j=3\\ 1/3, & i=2,j=1,2,3\\ 1/3, & i=3,j=2,3,4,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}$$

以上条件概率与 n 无关，故 $\{X_n,n=0,1,\ldots\}$ 为齐次马氏链.

一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1/3&1/3&1/3&0\\0&1/3&1/3&1/3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$ （ 3 分）

（2）由题意，初始时刻质点位于点 1，,故有初始分布为

$$P\{X_0=1\}=1,P\{X_0=i\}=0,\ i=2,3,4$$

$$\text{又}\,P(2)=P^2=\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3&0\\1/9&5/9&2/9&1/9\\1/9&2/9&5/9&1/9\\0&1/3&1/3&1/3\end{pmatrix},$$

$$P(X_2=3,X_4=2,X_5=1)=p_1(0)p_{13}(2)p_{32}(2)p_{21}(1)=1\frac{1}{3}\frac{2}{9}\frac{1}{3}=\frac{2}{81}$$ （4 分）

（3）$P(4)=P(2)^2=\left(p_{ij}(4)\right)$,可以算得$p_{ij}(4)>0$,对于任意的$i,j$.

故马氏链$\{X_n,n=0,1,...\}$具有遍历性，

设平稳分布$\pi=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}$

解方程组 $\begin{cases} \pi=\pi P \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1 \\ \pi_i\ge 0, i=1,2,3,4. \end{cases}$

得 $\pi_1=\pi_4=\dfrac{1}{8},\pi_2=\pi_3=\dfrac{3}{8}$

所以极限分布为$(\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{8},\dfrac{1}{8})$ （4分）

（4）由于初始分布时极限分布，所以$p(n)=\pi P(n)=\pi=(\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{8},\dfrac{1}{8})$，

所以$EX_n=5/2$. （4分）

五.（15分）

设一平稳过程$X(t)$先通过一个微分器，其输出过程为$Y(t)=\dfrac{d}{dt}X(t)$,然后过程$Y(t)$再输入到另一脉冲响应函数为$h(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$的线性系统, 输出过程记为$Z(t)$.若测得$Z(t)$的功率谱密度为$S_Z(\omega)=\dfrac{4\omega^2}{\omega^4+5\omega^2+4}$,试求$X(t),Y(t)和Z(t)$的自相关函数.

（注：若$f(t)$的傅里叶变换为$F(\omega)$，则$\dfrac{df(t)}{dt}$的傅里叶变换为$i\omega F(\omega)$）

解：(1) $S_Z(\omega)=\dfrac{4\omega^2}{\omega^4+5\omega^2+4}=\dfrac{4\omega^2}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}=\dfrac{4}{\omega^2+4}-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{\omega^2+1}-\dfrac{1}{\omega^2+4}\right)$

$$=\frac{16/3}{\omega^2+4}-\frac{4/3}{\omega^2+1}$$

$R_Z(\tau)=\dfrac{4}{3}e^{-2|\tau|}-\dfrac{2}{3}e^{-|\tau|}$ （5分）

(2) $h(t)\leftrightarrow H_2(\omega)=\dfrac{1}{1+i\omega}\Rightarrow|H_2(\omega)|^2=\dfrac{1}{1+\omega^2}$

$$S_z(\omega)=|H_2(\omega)|^2 S_Y(\omega) \Rightarrow S_Y(\omega)=\frac{4\omega^2}{\omega^2+4}=4-\frac{16}{\omega^2+4}$$

$$R_Y(\tau)=4\delta(\tau)-4e^{-2|\tau|}$$ (5 分)

(3) 输入,输出的关系为

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

作傅里叶变换得

$$Y(\omega)=i\omega X(\omega)$$

所以,系统的传输函数为

$$H_1(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=i\omega \Rightarrow |H_1(\omega)|^2=\omega^2$$

$$S_Y(\omega)=|H_1(\omega)|^2 S_X(\omega) \Rightarrow S_X(\omega)=\frac{4}{\omega^2+4}$$

$$R_Z(\tau)=e^{-2|\tau|}$$ (5 分)