

Funkcije

Martin Bakač

13. ožujka 2020.

Sažetak srednjoškolskog gradiva o funkcijama.

Mentor: Nikola Lepen ♡, prof.

Sadržaj

1	Definicije	3
1.1	Domena i kodomena funkcije	3
1.2	Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os	3
1.3	Parnost i neparnost	4
1.4	Periodičnost	5
1.5	Monotonost	5
1.6	Omeđenost	6
1.7	Injektivnost i surjektivnost	6
1.8	Inverz funkcije	7
2	Funkcije	8
2.1	Linearna funkcija	8
2.1.1	Domena i kodomena linearne funkcije	8
2.1.2	Graf linearne funkcije	8
2.1.3	Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os linearne funkcije	8
2.1.4	Parnost i neparnost linearne funkcije	9
2.1.5	Periodičnost linearne funkcije	10
2.1.6	Monotonost linearne funkcije	10
2.1.7	Omeđenost linearne funkcije	10
2.1.8	Injektivnost i surjektivnost linearne funkcije	10
2.1.9	Inverz linearne funkcije	10
2.2	Kvadratna funkcija	11
2.2.1	Domena i kodomena kvadratne funkcije	11
2.2.2	Graf kvadratne funkcije	11
2.2.3	Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os kvadratne funkcije	11
2.2.4	Parnost i neparnost kvadratne funkcije	12
2.2.5	Periodičnost kvadratne funkcije	12
2.2.6	Monotonost kvadratne funkcije	12
2.2.7	Omeđenost kvadratne funkcije	13
2.2.8	Injektivnost i surjektivnost kvadratne funkcije	13
2.2.9	Inverz kvadratne funkcije	13
2.3	Funkcija apsolutne vrijednosti	13
2.3.1	Domena i kodomena funkcije apsolutne vrijednosti	13
2.3.2	Graf funkcije apsolutne vrijednosti	14
2.3.3	Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os funkcije apsolutne vrijednosti	14
2.3.4	Parnost i neparnost funkcije apsolutne vrijednosti	14
2.3.5	Periodičnost funkcije apsolutne vrijednosti	14

2.3.6	Monotonost funkcije apsolutne vrijednosti	14
2.3.7	Omeđenost funkcije apsolutne vrijednosti	14
2.3.8	Injektivnost i surjektivnost funkcije apsolutne vrijednosti	14
2.3.9	Inverz funkcije apsolutne vrijednosti	15
2.4	Eksponecijalna funkcija	15
2.4.1	Domena i kodomena eksponencijalne funkcije	15
2.4.2	Graf eksponencijalne funkcije	15
2.4.3	Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os eksponencijalne funkcije	16
2.4.4	Parnost i neparnost eksponencijalne funkcije	16
2.4.5	Periodičnost eksponencijalne funkcije	16
2.4.6	Monotonost eksponencijalne funkcije	16
2.4.7	Omeđenost eksponencijalne funkcije	16
2.4.8	Injektivnost i surjektivnost eksponencijalne funkcije	16
2.4.9	Inverz eksponencijalne funkcije	16
2.5	Logaritamska funkcija	17
2.5.1	Domena i kodomena logaritamske funkcije	17
2.5.2	Graf logaritamske funkcije	17
2.5.3	Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os logaritamske funkcije	17
2.5.4	Parnost i neparnost logaritamske funkcije	17
2.5.5	Periodičnost logaritamske funkcije	17
2.5.6	Monotonost logaritamske funkcije	17
2.5.7	Omeđenost logaritamske funkcije	17
2.5.8	Injektivnost i surjektivnost logaritamske funkcije	17
2.5.9	Inverz logaritamske funkcije	17
2.6	Trigonometrijske funkcije	18
2.6.1	Domena i kodomena trigonometrijskih funkcija	18
2.6.2	Graf trigonometrijskih funkcija	18
2.6.3	Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os trigonometrijskih funkcija	18
2.6.4	Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija	18
2.6.5	Periodičnost trigonometrijskih funkcija	18
2.6.6	Monotonost trigonometrijskih funkcija	18
2.6.7	Omeđenost trigonometrijskih funkcija	18
2.6.8	Injektivnost i surjektivnost trigonometrijskih funkcija	18
2.6.9	Inverz trigonometrijskih funkcija	18

1. Definicije

Funkcija je relacija kod koje se svakom elementu prvog skupa pridružuje točno jedan element drugog skupa. Funkcija nekom argumentu iz domene pravilom pridruživanja određuje vrijednost iz kodomene. Postoje razne vrste funkcija poput linearne, logaritamske i drugih i razna svojstva funkcija. Funkcije označavamo ovako:

$$f: D_f \rightarrow K_f$$
$$x \mapsto f(x)$$

Ovaj zapis nam govori da funkcija f preslikava vrijednost iz domene D_f u kodomenu K_f i da pravilo pridruživanja argumentu x pridružuje vrijednost $f(x)$ tj. da se x mapira u $f(x)$. Češće se s funkcijama susrećemo u obliku funkcijske notacije koju je prvi koristio Euler. Funkcijska notacija sastoji se od ukošog latiničnog slova koje slijede zagrade unutar koji se nalazi argument.

$$y = f(x)$$

Graf funkcije je skup uređenih parova argumeneta i vrijednosti neke funkcije:

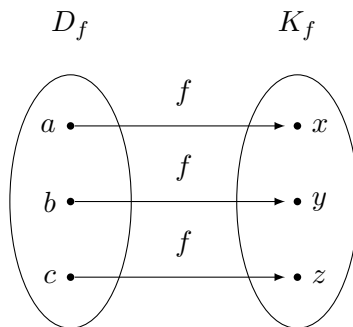
$$\Gamma_f = \{(x, y): x \in D_f, y = f(x)\}$$

Graf funkcije najčešće crtamo u Kartezijevom koordinatnom sustavu radi lakše predodžbe funkcije. Funkcije se najčešće koriste kako bi prikazali ovisnost jedne vrijednosti o drugoj. Funkcijama se modeliraju prirodne pojave.

1.1. Domena i kodomena funkcije

Domena ili područje definicije funkcije je skup argumenata za koje je funkcija definirana. Da je funkcija definirana za neki argument znači da vraća vrijednost za taj argument. Domena se grafički prikazuje kao x-os Kartezijevog koordinatnog sustava.

Prirodna domena je maksimalna domena neke funkcije, dakle najveći skup vrijednosti za koje zadani zakon pridruživanja ima smisla. Kodomena funkcije je skup na koji su njezine funkcijske vrijdnosti ograničene.



Slika 1: Grafički prikaz preslikavanja vrijednosti a, b, c iz domene D_f u x, y, z iz kodomene K_f

Slika funkcija je skup svih funkcijskih vrijdnosti funkcije tj. najmanja kodomena. Označavamo je $Im(f)$.

1.2. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os

Nultočke funkcije su točke u kojima graf funkcije siječe x-os, odnosno uređeni parovi argumenta i vrijenosti 0. Pošto je x-os zadana funkcijom:

$$f_x(x) = 0$$

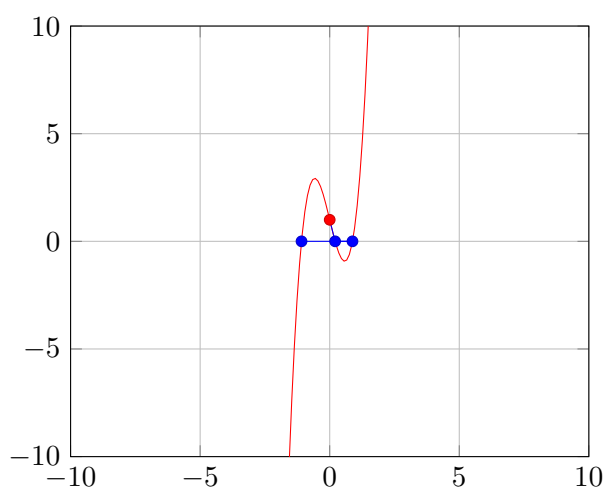
nultočke se nalaze na x-osi pa zadovoljavaju funkciju gore, možemo ih definirati kao sljedeći skup:

$$\{(x, f_x(x)): x \in D_f \mid f(x) = f_x(x)\} = \{(x, 0): x \in D_f \mid f(x) = 0\}$$

Točka u kojoj graf sječe y-os je definirana uređenim parom gdje je argument jednak nuli.

$$(0, f(0))$$

Za razliku od nultočaka takva je točka samo jedna zbog toga što funkcija svakom argumentu pridružuje samo jednu vrijednost.



Slika 2: Graf kubne funkcije s označenim nultočkama i sjecištem u y-osi

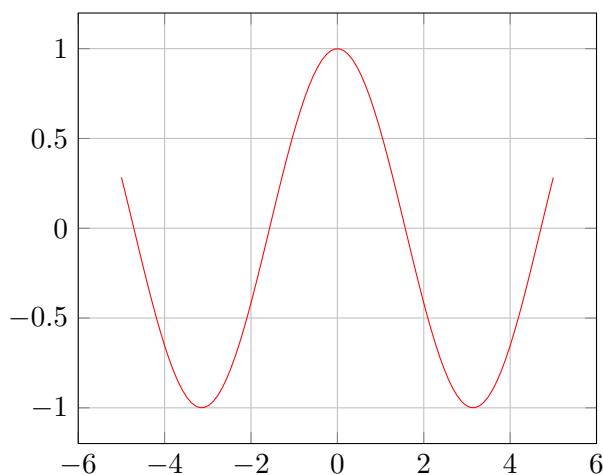
Osnovni teorem algebre nam veli da polinomska funkcija n -tog stupnja ima n nultočaka (valja imati na umu da te nultočke nisu nužno realne).

1.3. Parnost i neparnost

Parne i neparne funkcije su funkcije čiji su grafovi simetrične na određen način. Grafovi parnih funkcija su osno simetrični s obzirom na y-os pa vrijedi:

$$f(x) = f(-x)$$

Primjer parne funkcije je kosinus.

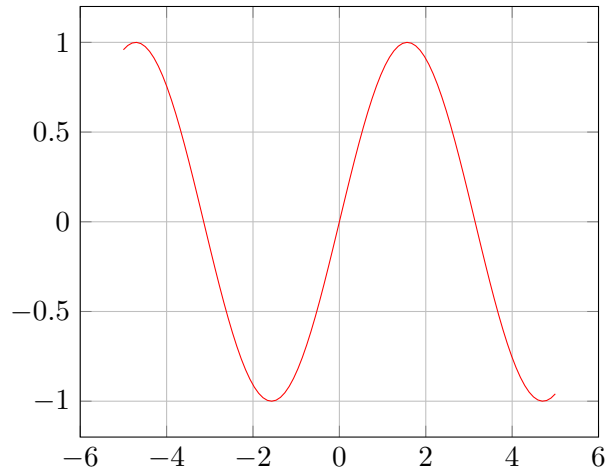


Slika 3: Graf funkcije $f(x) = \cos(x)$

Grafovi neparnih funkcije su centralno simetrične s obzirom na ishodište koordinatnog sustava i za njih vrijedi:

$$-f(x) = f(-x)$$

Primjer parne funkcije je kosinus.



Slika 4: Graf funkcije $f(x) = \sin(x)$

Parnost i neparnost nisu isključiva svojstva (primjer: $f(x) = 0$). Polinomske funkcije parnog stupnja su parne, a polinomske funkcije neparnog stupnja neparne.

1.4. Periodičnost

Periodične funkcije su funkcije čije se vrijednosti ponavljaju u pravilnim razmacima. Funkcija je periodična ako vrijedi:

$$f(x + P) = f(x), P \neq 0$$

P zovemo period funkcije, a najmanji P za koji tvrdnja vrijedi je temeljni period funkcije. Translatiramo li graf periodične funkcije za bilo koji višekratnik nekog njezinog perioda P , graf će ostati isti. Primjer periodične funkcije je sinus, a period joj je 2π . (njezin graf vidljiv je na slici 4)

1.5. Monotonost

Funkcija je monotona ako predznak izraza

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

jednak za svake x i y . Funkcija zovemo monotonom ako i samo ako joj se vrijednosti u cijelosti ne povećavaju ili ne padaju. Funkcija je rascijepa ako joj vrijednosti ne padaju i padajuća ako joj vrijednosti ne rastu. Funkcija je *strogo* rastuća ako joj vrijednosti isključivo rastu i *strogo* padajuća ako joj vrijednosti isključivo padaju. Funkcija je rastuća ako vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_f$$

Funkcija je strogo rastuća ako vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_f$$

Funkcija je padajuća ako vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_f$$

Funkcija je strogo padajuća ako vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D_f$$

Funkcija mogu imati ova svojstva samo na nekom intervalu, u tom slučaju pravila moraju vrijediti samo na tom intervalu.

1.6. Omeđenost

Funkcija je omeđena ako postoje brojevi m i M za koje vrijedi:

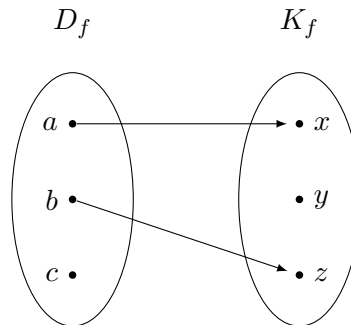
$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in D_f$$

Ako vrijedi samo prva nejednakost kažemo da je funkcija omeđena odozdo, a ako vrijedi samo druga nejednakost kažemo da je funkcija omeđena odozgo.

1.7. Injektivnost i surjektivnost

Injektivnost je svojstvo koja funkcija ima kad se njezine vrijednosti mapiraju u obliku jedan u više. Kod funkcija koje su injektorje jednakost funkcijskih vrijednosti implicira jednakost argumenata. Injektivne funkcije zadovoljavaju dakle sljedeći izraz:

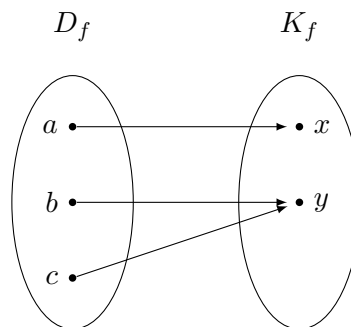
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$



Slika 5: Grafički prikaz injektivne funkcije

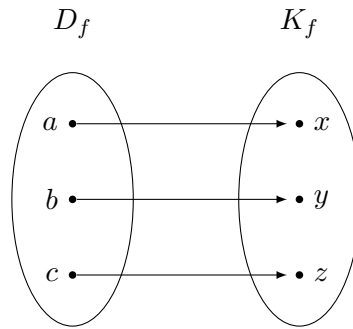
Surjektivnost je svojstvo koja funkcija ima kad se njezine vrijednosti mapiraju u obliku više u jedan. Kod surjektivnih funkcija za svaku vrijednost u kodomeni postoji barem jedan argument u domeni koji po pravilu pridruživanja daje tu vrijednost. Surjektivne funkcije zadovoljavaju dakle sljedeći izraz:

$$\forall y \in K_f, \exists x \in D_f, y = f(x),$$



Slika 6: Grafički prikaz surjektivne funkcije

Bijekcije su funkcije koje su injektorje i surjekcije.



Slika 7: Grafički prikaz bijekcije

1.8. Inverz funkcije

Funkcija f^{-1} inverzna je funkciji f ako vrijedi:

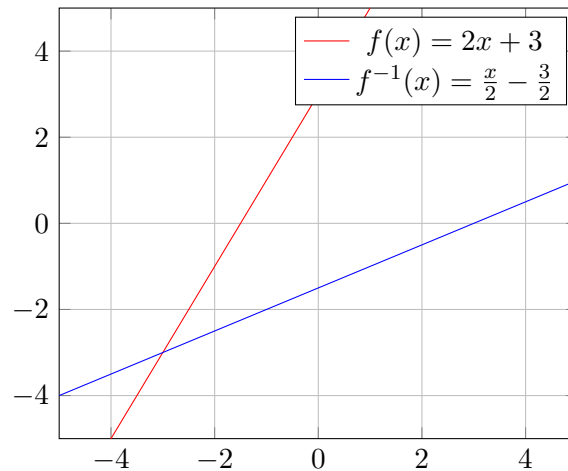
$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D_f$$

$$f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \in D_{f^{-1}}$$

Kako bi funkcija imala inverz ona nesmije biti surjekcija jer bi se u tom slučaju pravilo pridruživanja moralo moći dvije iste vrijednosti preslikati u dvije različite vrijednosti što ne može.

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Da surjekcija nema inverz je očito jer ako ju zrcalimo po $x = y$, vidimo da ne zadovoljava vertikalni test. Grafovi međusobno inverznih funkcija su simetrični po pravcu $y = x$.



Slika 8: Grafovi funkcije i njenog inverza

2. Funkcije

2.1. Linearna funkcija

Linearna funkcija je polinomna funkcija prvog ili nultog stupnja. Najčešće ju srećemo u sljedećem obliku:

$$f(x) = ax + b$$

x je argument funkcije, a zovemo linearni koeficijent, a b slobodni koeficijent. Derivacija linearne funkcija ista je u svim točkama.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{f(ax + \Delta x) + b - f(ax + b)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{a\Delta x}{\Delta x} \\ f'(x) &= a \end{aligned}$$

2.1.1. Domena i kodomena linearne funkcije

Domena i kodomena linearne funkcije su skup \mathbb{R} .

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

2.1.2. Graf linearne funkcije

Graf linearne funkcije je pravac. Jednadžbu pravca nalazimo u implicitnom:

$$Ax + By + C = 0,$$

eksplicitnom:

$$y = ax + b$$

i segmentnom obliku:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Pravac se može opisati bilo kojim od ovih oblika. Ako pogledamo eksplicitni oblik pravca vidimo da osim o argumentu funkcije x , graf ovisi i o koeficijentima a i b . Mijenjajući a mijenjamo nagib grafa funkcije, a mijenjajući b mijenjamo odsjek na y -osi.

2.1.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y -os linearne funkcije

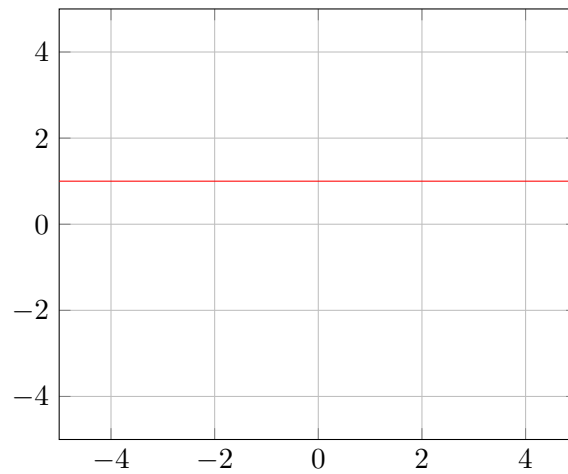
Nultočke linearne funkcije možemo dobiti sljedećim izrazom:

$$f(x) = ax + b = 0$$

Iz toga sledi da linearna funkcija poprima vrijednost 0 za:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Vidimo da je nultočka jedinstvena. (proizlazi iz tvrdnje u 1.2.)



Slika 9: Graf funkcije $f(x) = 0 \cdot x + 1$

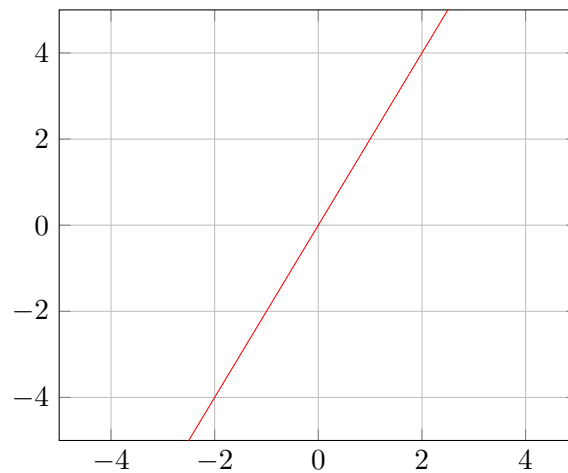
2.1.4. Parnost i neparnost linearne funkcije

Linearna funkcija je parna za $a = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ ax + b &= -ax + b \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Linearna funkcija je neparna za $b = 0$:

$$\begin{aligned} -f(x) &= f(-x) \\ -ax - b &= -ax + b \\ b &= 0 \end{aligned}$$



Slika 10: Graf funkcije $f(x) = 2 \cdot x + 0$

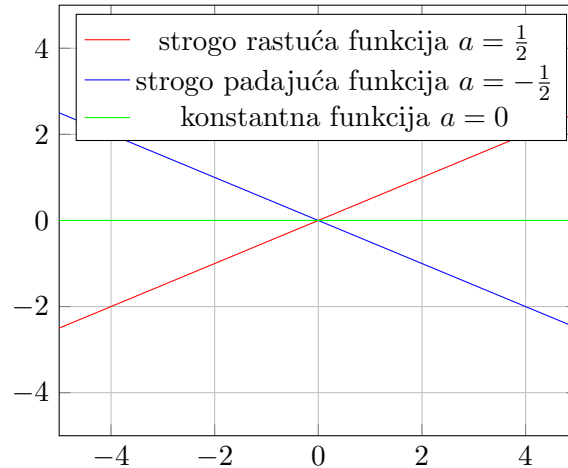
2.1.5. Periodičnost linearne funkcije

Linearna funkcija je periodična za sve periode P , $P \neq 0$ samo kada je $a = 0$.

$$\begin{aligned}f(x + P) &= f(x) \\a(x + P) + b &= ax + b \\0 \cdot (x + P) + b &= 0 \cdot x + b \\b &= b\end{aligned}$$

2.1.6. Monotonost linearne funkcije

Linearna funkcija je strogo rastuća, strogo padajuća ili konstantna ovisno o nagibu a . Konstantna funkcija je rastuća i padajuća jer zadovoljava uvjete navedene u 1.5.



Slika 11: Primjer monotonosti linearnih funkcija

2.1.7. Omeđenost linearne funkcije

Linearna funkcija je omeđena samo kad je konstantna.

$$m = M = f(x)$$

2.1.8. Injektivnost i surjektivnost linearne funkcije

Linearna funkcija je bijekcija za $a \neq 0$. Injekcija je jer vrijedi:

$$\begin{aligned}f(x_1) &= f(x_2) \\ax_1 + b &= ax_2 + b \\x_1 &= x_2\end{aligned}$$

Surjektivna je jer vrijedi:

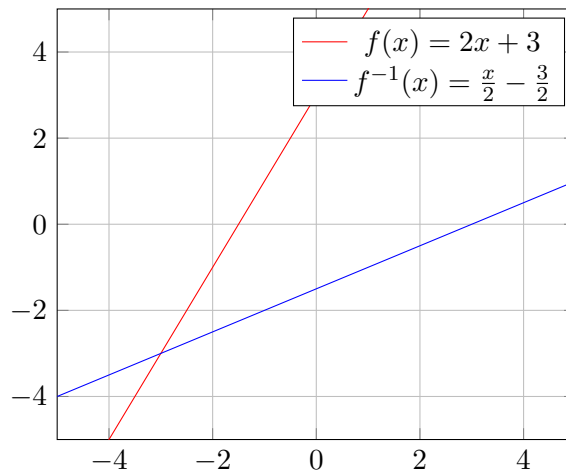
$$\forall y \in K_f, \exists x \in D_f, y = f(x),$$

a domena i kodomena linearna je skup \mathbb{R} . Bijekcija je jer je injektivna i surjektivna. Ako je $a = 0$ funkcija je surjektivna, vrijedi izraz gore.

2.1.9. Inverz linearne funkcije

Inverzna funkcija linearnoj je također linearna funkcija:

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$



Slika 12: Grafovi funkcije i njeninog inverzna

2.2. Kvadratna funkcija

2.2.1. Domena i kodomena kvadratne funkcije

Kvadratna funkcije je polinomna funkcija drugog stupnja. Najčešće ju srecemo u sljedećem obliku:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

x je argument funkcije, a zovemo kvadratni koeficijent, b zovemo linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent. Možemo ju naći i u faktoriziranom obliku:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2.2.2. Graf kvadratne funkcije

Graf kvadratne funkcija zove se parabola. Ako je $a > 0$ otvor je prema gore, a ako je $a < 0$ otvor je prema dolje. Apsolutna vrijednost a određuje stupanj otvorenosti parabole tako da je parabola za manji a "uža". Tjeme je određeno koeficijentima a, b i c :

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

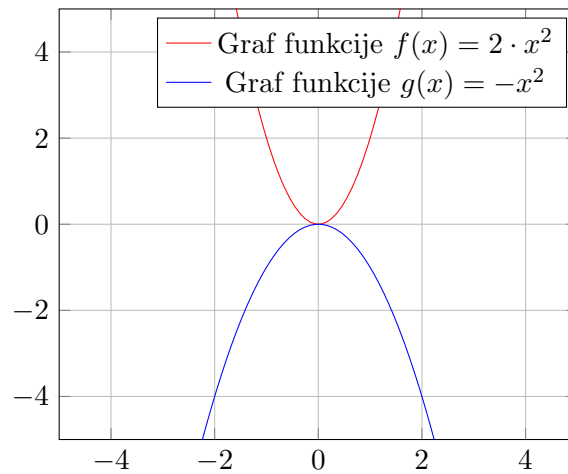
Slobodni koeficijent c određuje odsječak na y-osi.

2.2.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os kvadratne funkcije

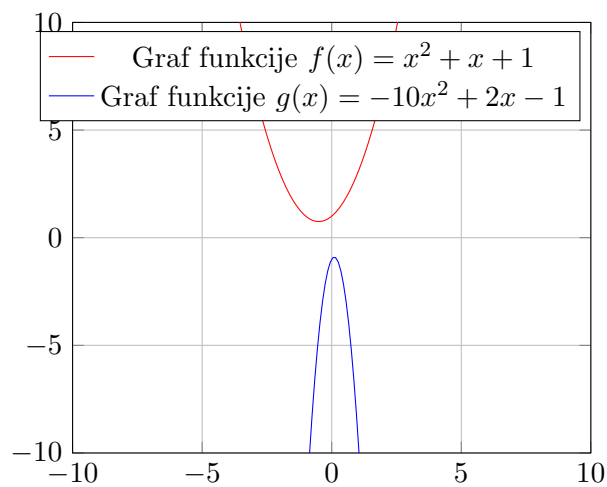
Nultočke kvadratne funkcije pronalazimo formulom:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nultočaka je 0, 1 ili 2 ovisno o diskriminanti $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Parabola y-os sječe u jednoj točki.



Slika 13: Grafovi kvadratnih funkcija s različitim predznakom kvadratnim koeficijentom (vidi otvor i veličinu otvora)



Slika 14: Grafovi kvadratnih funkcija s različitim tjemenima

2.2.4. Parnost i neparnost kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija je parnog stupnja pa je parna za $b = 0$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(-x) \\
 ax^2 + bx + c &= a(-x)^2 - bx + c \\
 ax^2 + bx + c &= ax^2 - bx + c \\
 bx &= -bx \\
 b &= 0
 \end{aligned}$$

Kvadratna funkcija nije neparna jer je parna a nije $f(x) = 0$.

2.2.5. Periodičnost kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija nije periodična, ne postoji P za koji vrijedi $f(x + P) = f(x)$, $P \neq 0$.

2.2.6. Monotonost kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija nije monotona. Za $a > 0$ do tjemena strogo pada, a od njega strogo raste, a za $a < 0$ do tjemena strogo raste, a od njega strogo pada.

2.2.7. Omeđenost kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija je omeđena tijemenom.

2.2.8. Injektivnost i surjektivnost kvadratne funkcije

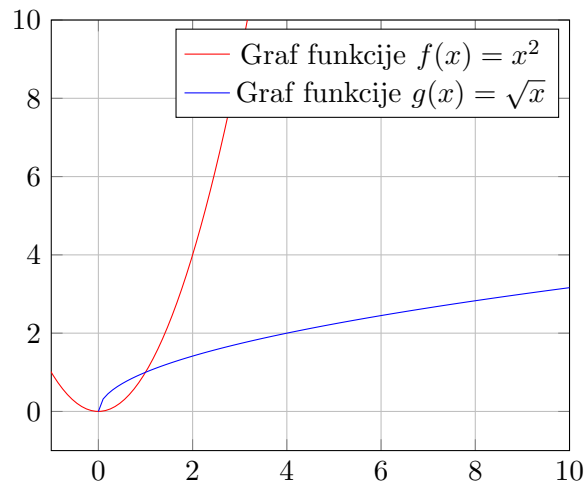
Kvadratna funkcija nije injekcija:

$$\begin{aligned}x_1 = 2, x_2 = -2, f(x) &= x^2 \\f(2) &= f(-2) \\4a &= 4a \\0 &= 0\end{aligned}$$

Različiti argumenti nisu implicirali različite rezultate što je proturiječno s tvrdnjom u 1.7. Kvadratna funkcija je surjektivnost jer vrijedi tvrdnja u 1.7.

2.2.9. Inverz kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija nema inverz jer je surjekcija (1.7). Korijen je inverz kvadratne funkcije, ali samo na intervalu intervalu \mathbb{R}^+ .



Slika 15: Graf kvadratne funkcije i korijena na intervalu \mathbb{R}^+

2.3. Funkcija apsolutne vrijednosti

Funkcija apsolutne vrijednosti argumentu pridružuje njegovu udaljenost od nule. Dakle ako je argument negativan, množimo ga s -1 , a ako je pozitivan ga prepisemo.

$$\begin{aligned}f(x) &= |x| \\ \text{ako je } x &\geq 0, f(x) = x \\ \text{ako je } x &< 0, f(x) = -x\end{aligned}$$

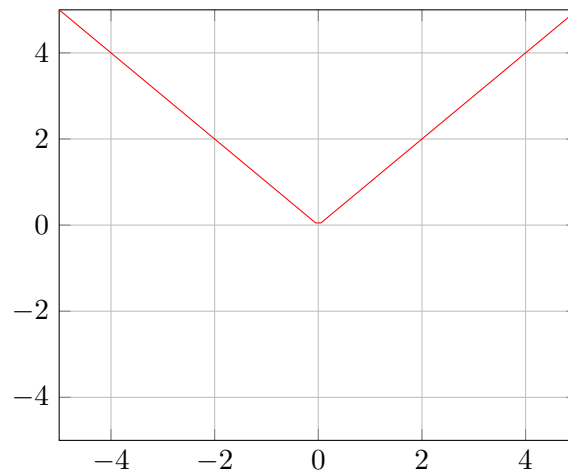
Napominjem da sam kod nekih svojstva pretpostavio da gledamo apsolutnu vrijednost neke druge funkcije ili složenijeg izraza jer takve slučajeve često vidamo.

2.3.1. Domena i kodomena funkcije apsolutne vrijednosti

Domena kvadratne funkcije je \mathbb{R} , a kodomena \mathbb{R}^+ .

2.3.2. Graf funkcije apsolutne vrijednosti

Graf funkcije apsolutne vrijednosti jednak je grafu funkcije unutar apsolutne vrijednosti za $x \geq 0$, a simetričan s obzirom na y-os za $x < 0$.



Slika 16: Graf funkcije $f(x) = |x|$

2.3.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os funkcije apsolutne vrijednosti

Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os određujemo prema definiciji u 1.2. Ovisi o funkciji s kojom je kojom je kvadratna funkcija u kompoziciji.

2.3.4. Parnost i neparnost funkcije apsolutne vrijednosti

Funkcija apsolutne vrijednosti je parna:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(-x) \\|x| &= |-x| \\x &= x\end{aligned}$$

Jednadžba je točna za $x \geq 0$, ali je analogna za $x < 0$. Funkcija apsolutne vrijednosti nije neparna jer je parna a nije $f(x) = 0$.

2.3.5. Periodičnost funkcije apsolutne vrijednosti

Funkcija apsolutne vrijednosti može biti periodična, no to ovisi o funkciji s kojom je komponirana. Na primjer funkcija $f(x) = |x^2|$ nije periodična, a funkcija $f(x) = |\sin(x)|$.

2.3.6. Monotonost funkcije apsolutne vrijednosti

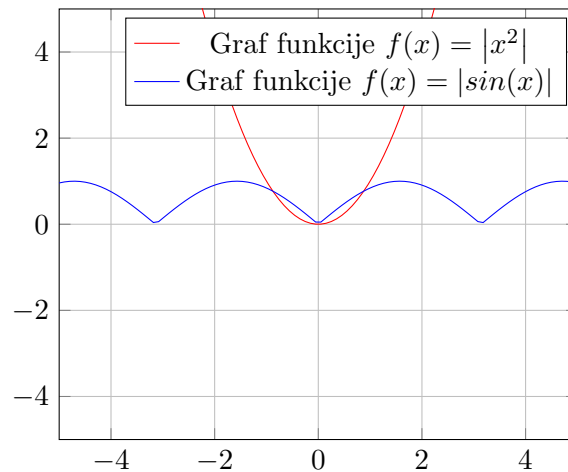
Funkcija apsolutne vrijednosti nije monotona jer je parna. Monotona je na intervalima ovisno o funkciji s kojom je u kompoziciji.

2.3.7. Omeđenost funkcije apsolutne vrijednosti

Kvadratna funkcija je po definiciji omeđena odozdo, a donja međa joj je nula.

2.3.8. Injektivnost i surjektivnost funkcije apsolutne vrijednosti

Kvadratna funkcija je surjektivna. Po definiciji iz 1.7.



Slika 17: Grafovi funkcija apsolutnih vrijdnosti komponiranih s periodničnom i neperiodičnom funkcijom

2.3.9. Inverz funkcije apsolutne vrijdnosti

Kvadratna funkcija nema inverz jer je surjekcija.

2.4. Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija je funkcija oblika:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

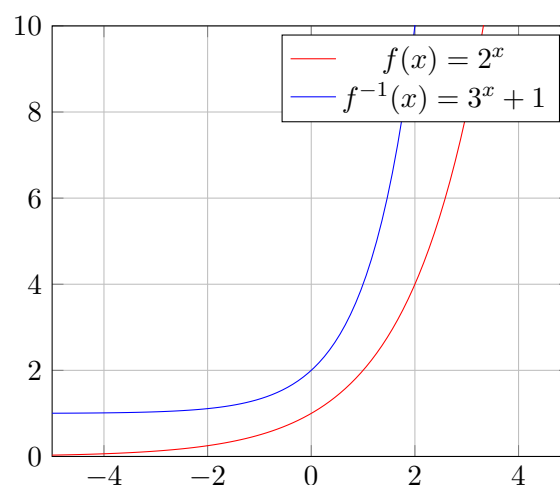
Derivacija eksponencijalne funkcije je eksponencijalna funkcija.

2.4.1. Domena i kodomena eksponencijalne funkcije

Domena eksponencijalne funkcije je skup \mathbb{R} . Kodomena eksponencijalne funkcije je skup \mathbb{R}^+ jer je pozitivan realni broj na neku potenciju je pozitivan realni broj.

2.4.2. Graf eksponencijalne funkcije

Specifičnost grafa eksponencijalne funkcije je da uvijek prolazi kroz točku $(0, 1)$. Mijenjamo li bazu a , mijenja se *brzina* rasta. Dodavanjem slobodnog koeficijenta mjenjanmo odsječak na y-osi.



Slika 18: Grafovi eksponencijalne funkcije s različitim parametrima

2.4.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os eksponencijalne funkcije

Eksponencijalna funkcija nema nultočke. Eksponencijalna funkcija uvijek sječe y-os u točki $(0, 1)$:

$$f(0) = a^0 = 1$$

2.4.4. Parnost i neparnost eksponencijalne funkcije

Funkcija nije ni parna ni neparna jer ne zadovoljava definicije u 1.3.

2.4.5. Periodičnost eksponencijalne funkcije

Funkcija nije periodična.

2.4.6. Monotonost eksponencijalne funkcije

Funkcija je strogo rastuća.

2.4.7. Omeđenost eksponencijalne funkcije

Funkcija je omeđena odozdo nulom.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

2.4.8. Injektivnost i surjektivnost eksponencijalne funkcije

Eksponencijalna funkcija je bijekcija. Injekcija je jer vrijedi:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

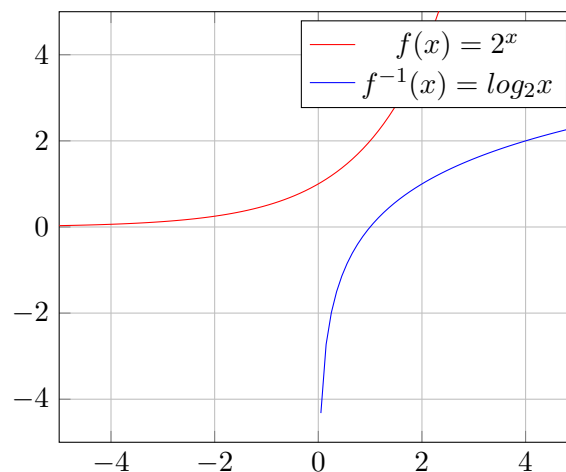
$$a^{x_1} = a^{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

Surjektivna je po definiciju, dakle bijekcija je.

2.4.9. Inverz eksponencijalne funkcije

Inverz eksponencijalne funkcije je logaritamska funkcija.



Slika 19: Grafovi funkcije i njenog inverza

2.5. Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija uzima broj i vraća potenciju na koju moramo staviti bazu logaritamske funkcije kako bi dobili argument. Pronalazimo je u obliku:

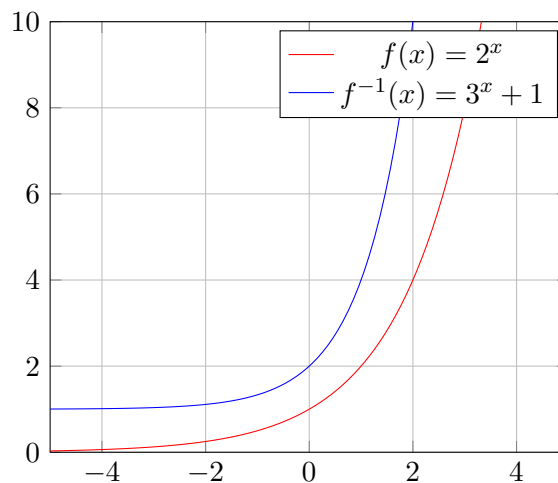
$$f(x) = \log_a x \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

2.5.1. Domena i kodomena logaritamske funkcije

Domena eksponencijalne funkcije je po definiciji skup \mathbb{R}^+ . To je intuitivno jasno jer ne možemo naći potenciju negativnog broja. Kodomena eksponencijalne funkcije skup \mathbb{R} .

2.5.2. Graf logaritamske funkcije

Specifičnost grafa eksponencijalne funkcije je da uvijek prolazi kroz točku $(0, 1)$. Mijenjamo li bazu a , mijenja se *brzina* rasta. Dodavanjem slobodnog koeficijenta mjenjanmo odsječak na y-osi.



Slika 20: Grafovi eksponencijalne funkcije s različitim parametrima

2.5.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os logaritamske funkcije

2.5.4. Parnost i neparnost logaritamske funkcije

2.5.5. Periodičnost logaritamske funkcije

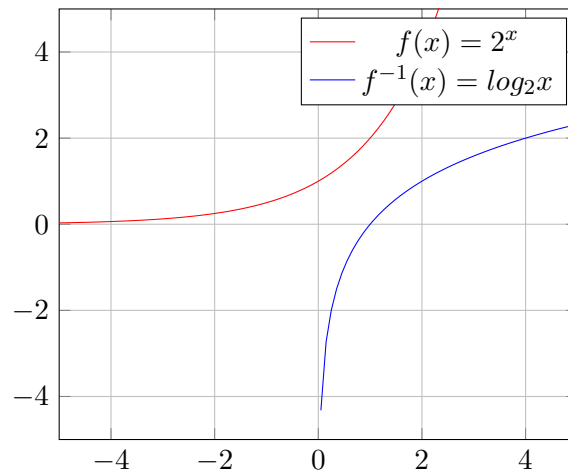
2.5.6. Monotonost logaritamske funkcije

2.5.7. Omeđenost logaritamske funkcije

2.5.8. Injektivnost i surjektivnost logaritamske funkcije

2.5.9. Inverz logaritamske funkcije

Inverz eksponencijalne funkcije je logaritamska funkcija.



Slika 21: Grafovi funkcije i njeninog inverzna

2.6. Trigonometrijske funkcije

2.6.1. Domena i kodomena trigonometrijskih funkcija

2.6.2. Graf trigonometrijskih funkcija

2.6.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os trigonometrijskih funkcija

2.6.4. Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija

2.6.5. Periodičnost trigonometrijskih funkcija

2.6.6. Monotonost trigonometrijskih funkcija

2.6.7. Omeđenost trigonometrijskih funkcija

2.6.8. Injektivnost i surjektivnost trigonometrijskih funkcija

2.6.9. Inverz trigonometrijskih funkcija