Funkcije

Martin Bakač

13. ožujka 2020.

Sažetak srednjoškolskog gradiva o funkcijama.
Mentor: Nikola Lepen ♡, prof.

Sadržaj

1. Definicije

Funkcija je relacija kod koje se svakom elementu prvog skupa pridružuje točno jedan element drugog skupa. Funkcija nekom argumentu iz domene pravilom pridruživanja odrešuje vrijednost iz kodomene. Postoje razne vrste funkcija poput linearne, logaritamske i drugih i razna svojstva funkcija. Funkcije označavamo ovako:

$$f\colon D_f \to K_f$$
$$x \mapsto f(x)$$

Ovaj zapis nam govori da funkcija f preslikava vrijednost iz domene D_f u kodomenu K_f i da pravilo pridruživanja argumentu x pridružuje vrijednost $f(x)$ tj. da se x mapira u $f(x)$. Češće se s funkcija susrećemo u obliku funkcijske notacije koju je prvi koristio Euler. Funkcijska notacija sastoji se od ukošog latiničnog slova koje slijede zagrade unutar koji se nalazi argument.

$$y = f(x)$$

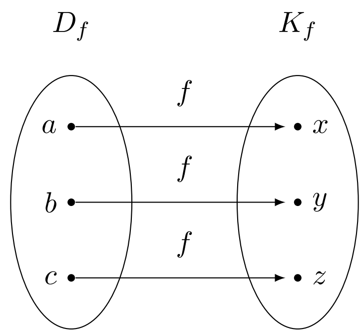
Graf funkcije je skup uređenih parova argumeneta i vrijednosti neke funkcije:

$$\Gamma_f = \{(x, y)\colon x \in D_f, y = f(x)\}$$

Graf funkcije najčešće crtamo u Kartezijevom koordinatnom sustavu radi lakše predodžbe funkcije. Dodamo li argumentu funkcije neki parameta, pomaknut ćemo graf po x-osi za taj parametar. Dodamo li funkciji neki parameta, pomaknut ćemo graf po y-osi za taj parametar. Funkcije se najčešće koriste kako bi prikazali ovisnost jedne vrijednosti o drugoj. Funkcijama se modeliraju prirodne pojave.

1.1. Domena i kodomena funkcije

Domena ili područje definicije funkcije je skup argumenata za koje je funkcija definirana. Da je funkcija definirana za neki argument znači da vraća vrijednost za taj argument. Domena se grafički prikazuje kao x-os Kartezijevog koordinatnog sustava.
Prirodna domena je maksimalna domena neke funkcije, dakle najveći skup vrijednosti za koje zadani zakon pridruživanja ima smisla. Kodomena funkcije je skup na koji su njezine funkcijske vrijdnosti ograničene.



Slika 1: Grafički prikaz preslikavanja vrijednosti a, b, c iz domene D_f u x, y, z iz kodomene K_f

Slika funkcija je skup svih funkcijskih vrijdnosti funkcije tj. najmanja kodomena. Označavamo je $Im(f)$.

1.2. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os

Nultočke funkcije su točke u kojima graf funkcije siječe x-os, odnosno uređeni parovi argumenta i vrijenosti 0. Pošto je x-os zadana funkcijom:

$$f_x(x) = 0$$

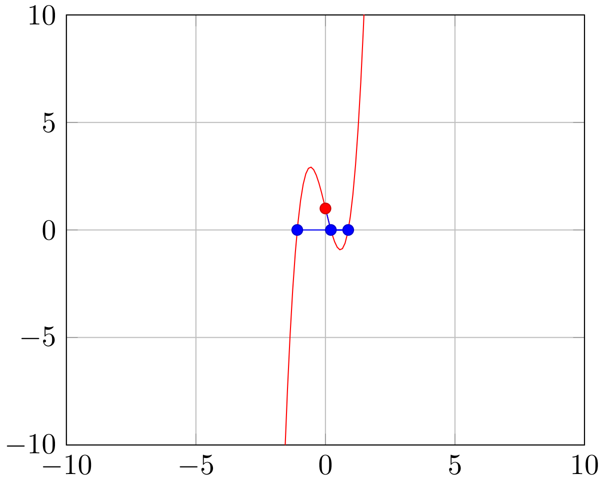
nultočke se nalaze na x-osi pa zadovoljavaju funkciju gore, možemo ih definirati kao sljedeći skup:

$$\{(x, f_x(x))\colon x \in D_f \mid f(x) = f_x(x)\} = \{(x, 0)\colon x \in D_f \mid f(x) = 0\}$$

Točka u kojoj graf sječe y-os je definirana uređenim parom gdje je argument jednak nuli.

$$(0, f(0))$$

Za razliku od nultočaka takva je točka samo jedna zbog toga što funkcija svakom argumentu pridružuje samo jednu vrijednost.



Slika 2: Graf kubne funkcije s označenim nultočkama i sjecištem u y-osi

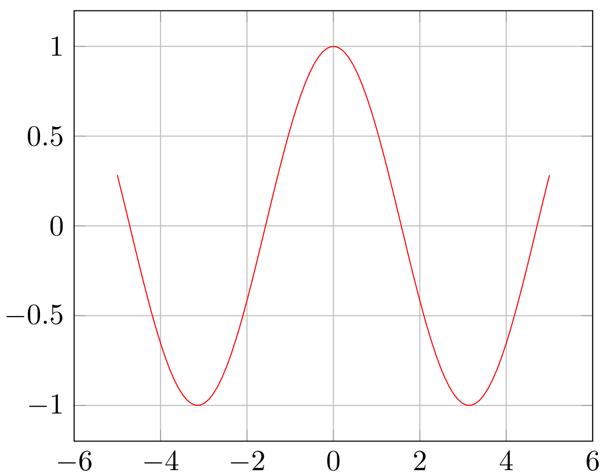
Osnovni teorem algebre nam veli da polinomska funkcija n-tog stupnja ima n nultočaka (valja imati na umu da te nultočke nisu nužno realne).

1.3. Parnost i neparnost

Parne i neparne funkcije su funkcije čiji su grafovi simetrične na određen način. Grafovi parnih funkcija su osno simetrični s obzirom na y-os pa vrijedi:

$$f(x) = f(-x)$$

Primjer parne funkcije je kosinus.

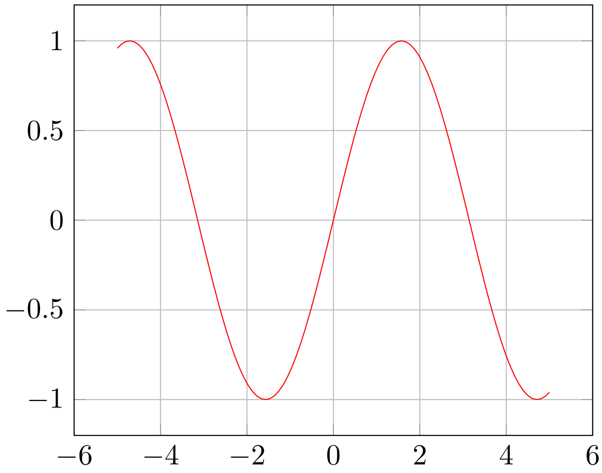


Slika 3: Graf funkcije $f(x) = cos(x)$

Grafovi neparnih funkcije su centralno simentrične s obzirom na ishodište koordinatnog sustava i za njih vrijedi:

$$-f(x) = f(-x)$$

Primjer parne funkcije je kosinus.



Slika 4: Graf funkcije $f(x) = sin(x)$

Parnost i neparnost nisu isključiva svojstva (primjer: $f(x) = 0$). Polinomske funkcije parnog stupnja su parne, a polinomske funkcije neparnog stupnja neparne.

1.4. Periodičnost

Periodnične funkcije su funkcije čije se vrijednosti ponavljaju u pravilnim razmacima. Funkcija je periodična ako vrijedi:

$$f(x + P) = f(x), P \neq 0$$

P zovemo period funkcije, a najmanji P za koji tvrdnaj vrije di je temeljni period funkcije. Translatiramo li graf periodične funkcije za bilo koji višekratnik nekog njezinog perioda P, graf će ostati isti. Primjer periodične funkcije je sinus, a period joj je 2π. (njezin graf vidljiv je na slici 4)

1.5. Monotonost

Funkcija je monotona ako predznak izraza

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

jednak za svake x i y. Funkcija zovemo monotonom ako i samo ako joj se vrijdnosti u cijelosti ne povećavaju ili ne padaju. Funkcija je rasuća ako joj vrijdnosti ne padaju i padajuća ako joj vrijednosti ne rastu. Funkcija je *strogo* rastuća ako joj vrijednosti isključivo rastu i *strogo* padajuća ako joj vrijednosti isključivo padaju. Funkcija je rastuća ako vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in D_f$$

Funkcija je strogo rastuća ako vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in D_f$$

Funkcija je padajuća ako vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in D_f$$

Funkcija je strogo padajuća ako vrijedi:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in D_f$$

Funkcija mogu imati ova svojstva samo na nekom intervalu, u tom slučaju pravila moraju vrijediti samo na tom intervalu.

1.6. Omeđenost

Funkcija je omeđena ako postoje brojevi m i M za koje vrijedi:

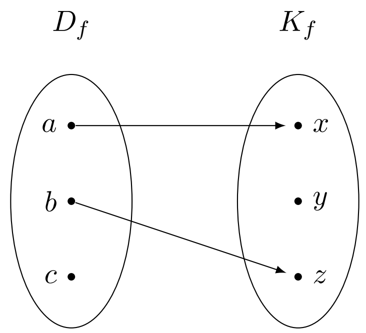
$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in D_f$$

Ako vrijedi samo prva nejednakost kažemo da je funkcija omeđena odozdo, a ako vrijedi samo druga nejednakost kažemo da je funkcija omeđena odozgo.

1.7. Injektivnost i surjektivnost

Injektivnost je svojstvo koja funkcija ima kad se njezine vrijednosti mapiraju u obliku jedan u više. Kod funkcija koje su injekcije jednakost funkcijskih vrijednosti implicira jednakost argumenata. Injektivne funkcije zadovoljavau dakle sljedeći izraz:

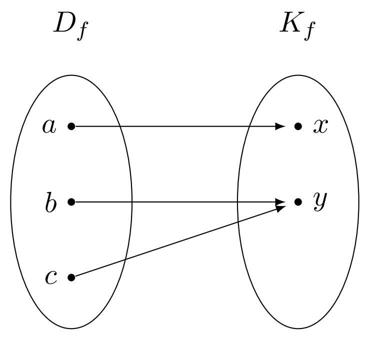
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$



Slika 5: Grafički prikaz injektivne funkcije

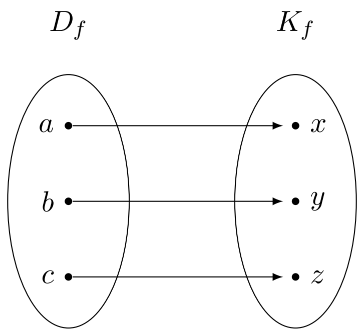
Surjektivnost je svojstvo koja funkcija ima kad se njezine vrijednosti mapiraju u obliku više u jedan. Kod surjektivnih funkcija za svaku vrijdnost u kodomeni postoji barem jedan argument u domeni koji po pravilu pridruživanja daje tu vrijdnost. Surjektivne funkcije zadovoljavau dakle sljedeći izraz:

$$\forall y \in K_f, \exists x \in D_f, y = f(x),$$



Slika 6: Grafički prikaz surjektivne funkcije

Bijekcije su funkcije koje su injekcije i surjekcije.



Slika 7: Grafički prikaz bijekcije

1.8. Inverz funkcije

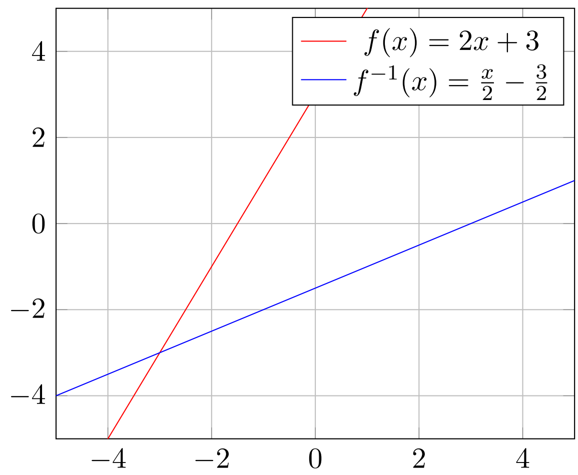
Funkcija f^{-1} inverzna je funkciji f ako vrijedi:

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x \in D_f$$
$$f(f^{-1}(x)) = x,\ \forall x \in D_{f^{-1}}$$

Kako bi funkcija imama inverz ono nesmije biti surjekcija jer bi se u tom slućaju pravilo pridruživanja moralo moći dvije iste vrijdnosti preslikati u dvije različite vrijdnost što ne može.

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Da surjekcija nema inverz je očito jer ako ju zrcalimo po $x = y$, vidimo da ne zadovoljava vertikalni test. Grafovi međusogno inverznih funkcija su simetrični po pravcu $y = x$.



Slika 8: Grafovi funkcije i njenzinog inverzna

2. Funkcije

2.1. Linearna funkcija

Linearna funkcija je polinomna funkcija prvog ili nultog stupnja. Najčešće ju srećemo u sljedećem obliku:

$$f(x) = ax + b$$

x je argument funkcije, a zovemo linearni koeficjient, a b slobodni koeficjient. Derivacija linearne funkcija ista je u svim točkama.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(a(x+\Delta x)+b) - f(ax+b)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{a\Delta x}{\Delta x} \\
f'(x) &= a
\end{aligned}$$

2.1.1. Domena i kodomena linearne funkcije

Domena i kodomena linearne funkcije su skup $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

2.1.2. Graf linearne funkcije

Graf linearne funkcije je pravac. Jednadžbu pravca nalazimo u implicitnom:

$$Ax + By + C = 0,$$

eksplicitnom:

$$y = ax + b$$

i segmentnom obliku:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Pravac se može opisati bili kojim od ovih oblika. Ako pogeldamo eksplicitni oblik pravca vidimo da osim o argumentu funkcije x, graf ovisi i o koeficjientima a i b. Mijenjajući a mjenjamo nagib grafa funkcije, a mijenjajući b mjenjamo odsjek na y-osi.

2.1.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os linearne funkcije

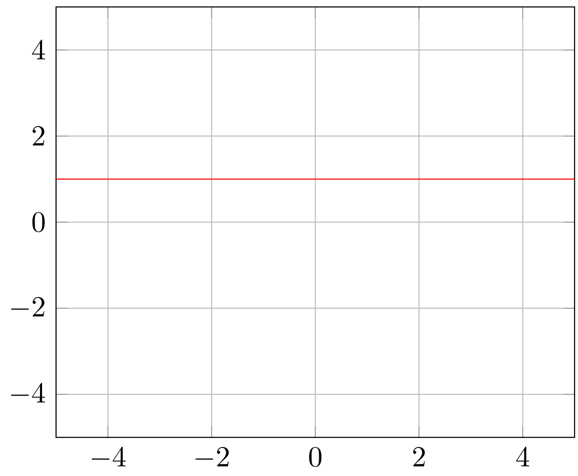
Nultočke linearne funkcije možemo dobiti sljedećim izraom:

$$f(x) = ax + b = 0$$

Iz toga sljedi da linearna funkcija poprima vrijdnost 0 za:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Vidimo da je nultočka jednistvena. (proizlazi iz tvrdnje u 1.2.)



Slika 9: Graf funkcije $f(x) = 0 \cdot x + 1$

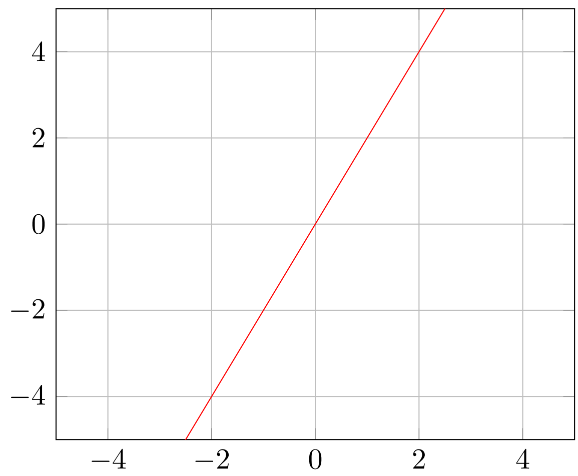
2.1.4. Parnost i neparnost linearne funkcije

Linearna funkcija je parna za $a = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(-x) \\
ax + b &= -ax + b \\
a &= 0
\end{aligned}
$$

Linearna funkcija je neparna za $b = 0$:

$$
\begin{aligned}
-f(x) &= f(-x) \\
-ax - b &= -ax + b \\
b &= 0
\end{aligned}
$$



Slika 10: Graf funkcije $f(x) = 2 \cdot x + 0$

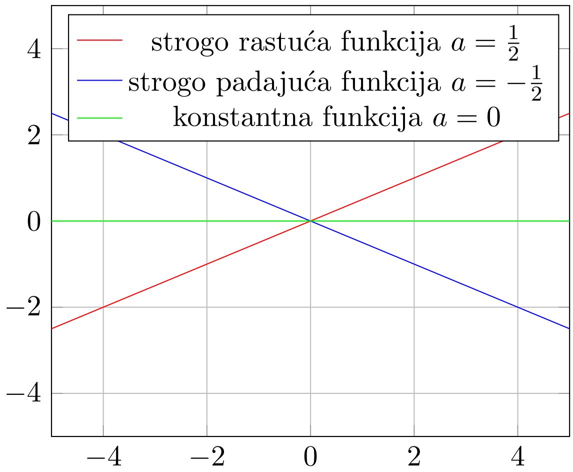
2.1.5. Periodičnost linearne funkcije

Linearna funkcija je periodična za sve periode P, $P \neq 0$ samo kada je $a = 0$.

$$
\begin{aligned}
f(x+P) &= f(x) \\
a(x+P)+b &= ax+b \\
0 \cdot (x+P)+b &= 0 \cdot x+b \\
b &= b
\end{aligned}
$$

2.1.6. Monotonost linearne funkcije

Linearna funkcija je strogo rastuća, strogo padajuća ili konstantna ovisno o nagibu a. Konstantna funkcija je rastuća i padajuća jer zadovoljava uvjete navedene u 1.5.



Slika 11: Primjer monotonosti linearnih funkcija

2.1.7. Omeđenost linearne funkcije

Linearna funkcija je omeđena samo kad je konstantna.

$$m = M = f(x)$$

2.1.8. Injektivnost i surjektivnost linearne funkcije

Linearna funkcija je bijekcija za $a \neq 0$. Injekcija je jer vrijedi:

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
ax_1+b &= ax_2+b \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

Surjekcija je jer vrijedi:

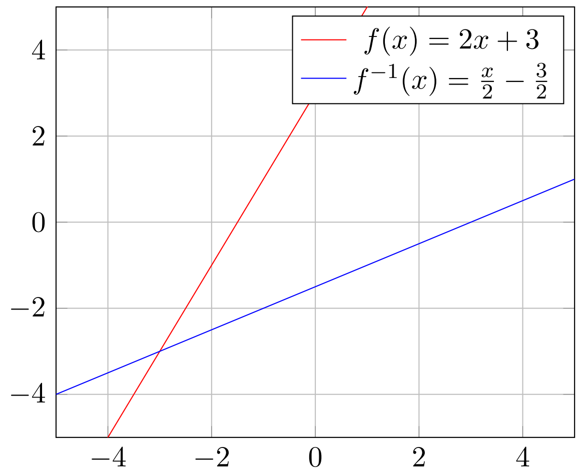
$$\forall y \in K_f, \exists x \in D_f, y = f(x),$$

a domena i kodomena linearna je skup $\mathbb{R}$. Bijekcija je jer je injekcija i surjekcija. Ako je $a = 0$ funkcija je surjekcija, vrijedi izraz gore.

2.1.9. Inverz linearne funkcije

Inverzna funkcija linearnoj je također linearna funkcija:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$



Slika 12: Grafovi funkcije i njenzinog inverzna

2.2. Kvadratna funkcija

2.2.1. Domena i kodomena kvadratne funkcije

Kvadratna funkcije je polinomna funkcija drugog stupnja. Najčešće ju srecemo u sljedećem obliku:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$$

x je argument funkcije, a zovemo kvadratni koeficijent, b zovemo linearni koeficjent, a c slobodni koeficjent. Možemo ju naći i u faktoriziranom obliku:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2.2.2. Graf kvadratne funkcije

Graf kvadratne funkcija zove se parabola. Ako je $a > 0$ otvor je prema gore, a ako je $a < 0$ otvor je prema dolje. Apsoultna vrijednost a određuje stupanj otvorenosti parabole tako da je parabola za manji a *"uža"*. Tjeme je određeno koeficijentima a, b i c:

$$T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$$

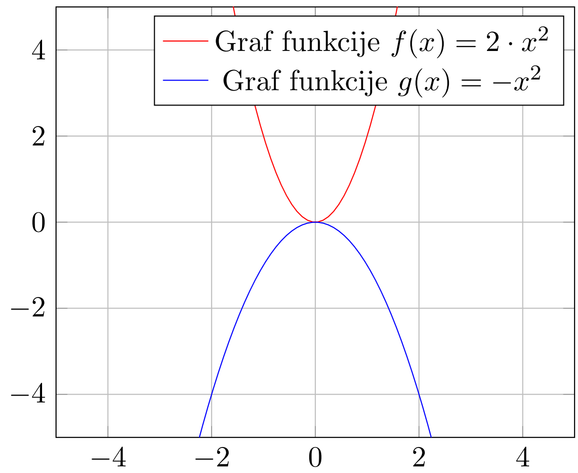
Slobodni koeficijent c određuje odsječak na y-osi.

2.2.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os kvadratne funkcije

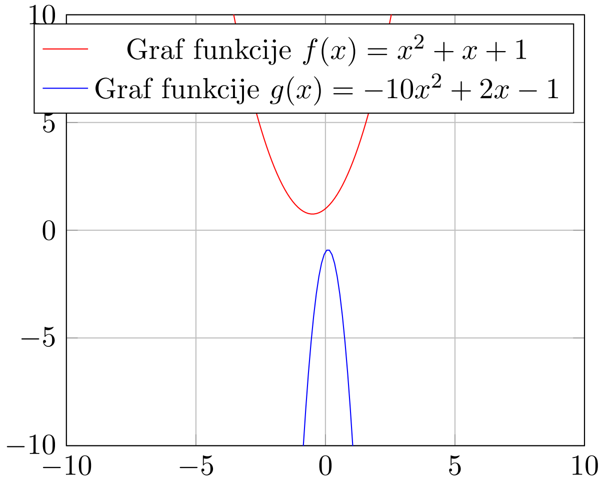
Nultočke kvadratne funkcije pronalazimo formulom:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nultočaka je 0, 1 ili 2 ovisno o diskriminanti $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Parabola y-os sječe u jednoj točki.



Slika 13: Grafovi kvadratnih funkcija s različitim predznakom kvadratnim koeficijentom (vidi otvor i veličinu otvora)



Slika 14: Grafovi kvadratnih funkcija s različitim tjemenima

2.2.4. Parnost i neparnost kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija je parnog stupnja pa je parna za $b = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ ax^2 + bx + c &= a(-x)^2 - bx + c \\ ax^2 + bx + c &= ax^2 - bx + c \\ bx &= -bx \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Kvadratna funkcija nije neparna jer je parna a nije $f(x) = 0$.

2.2.5. Periodičnost kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija nije periodična, ne postoji P za koji vrijedi $f(x + P) = f(x),\ P \neq 0$.

2.2.6. Monotonost kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija nije monotona. Za $a > 0$ do tjemena strogo pada, a od njega strogo raste, a za $a < 0$ do tjemena strogo raste, a od njega strogo pada.

2.2.7. Omeđenost kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija je omeđena tijemenom.

2.2.8. Injektivnost i surjektivnost kvadratne funkcije

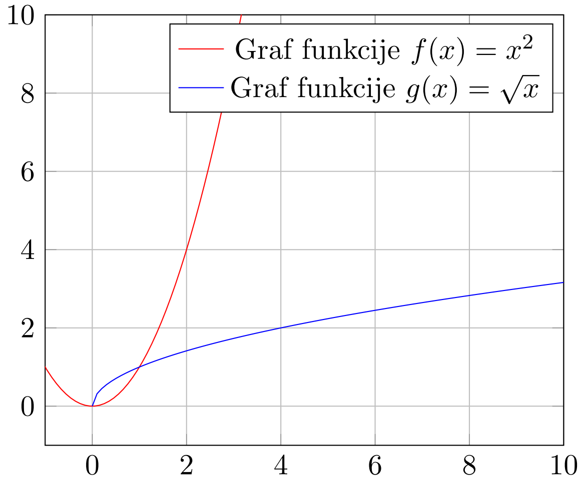
Kvadratna funkcija nije injekcija:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ f(x) = x^2$$
$$f(2) = f(-2)$$
$$4a = 4a$$
$$0 = 0$$

Različiti argumenti nisu implicirali različite rezultate što je proturiječno s tvrdnjom u 1.7. Kvadratna funkcija je surjektivnost jer vrijedi tvrdnja u 1.7.

2.2.9. Inverz kvadratne funkcije

Kvadratna funkcija nema inverz jer je surjekcija (1.7). Korijen je inverz kvadratne funkcije, ali samo na intervalu intervalu $\mathbb{R}^+$.



Slika 15: Graf kvadratne funkcije i korijena na intervalu $\mathbb{R}^+$

2.3. Funkcija apsolutne vrijednosti

Funkcija apsolutne vrijdnosti argumentu pridružuje njegovu udaljenost od nule. Dakle ako je argument negativan, množimo ga s -1, a ako je pozitivan ga prepišemo.

$$f(x) = |x|$$
$$ako\ je\ x \geq 0,\ f(x) = x$$
$$ako\ je\ x < 0,\ f(x) = -x$$

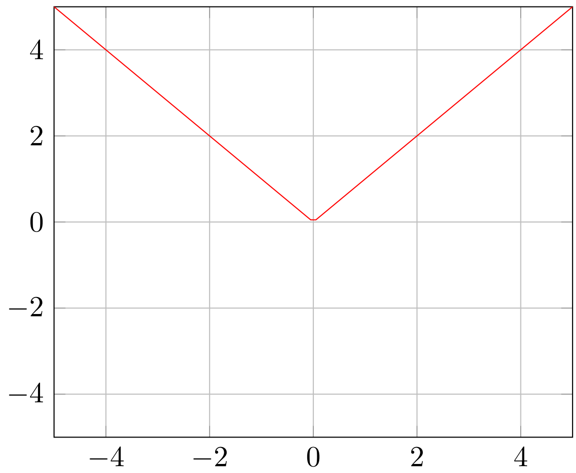
Napominjem da sam kod nekih svojstva pretpostavio da geldamo apsolutnu vridnost neke druge funkcije ili složenijeg izraza jer takve slučajeve često viđamo.

2.3.1. Domena i kodomena funkcije apsolutne vrijednosti

Domena kvadratne funkcije je $\mathbb{R}$, a kodomena $\mathbb{R}^+$.

2.3.2. Graf funkcije apsolutne vrijednosti

Graf funkcije apsolune vrijdnosti jedak je grafu funkcije unutar apsolutne vrijednosti za $x \geq 0$, a simetričan s obzirom na y-os za $x < 0$.



Slika 16: Graf funkcije $f(x) = |x|$

2.3.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os funkcije apsolutne vrijednosti

Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os određujemo prema definiciji u 1.2. Ovise o funkciji s kojom je kojom je kvadratna funkcija u kompoziciji.

2.3.4. Parnost i neparnost funkcije apsolutne vrijednosti

Funkcija apsolutne vrijednosti je parna:

$$f(x) = f(-x)$$
$$|x| = |-x|$$
$$x = x$$

Jednadžba je točna za $x \geq 0$, ali je analogna za $x < 0$. Funkcija apsolutne vrijdnosti nije neparna jer je parna a nije $f(x) = 0$.

2.3.5. Periodičnost funkcije apsolutne vrijednosti

Funkcija apsolutne vrijednosti može biti periodnična, no to ovisi o funkciji s kojom je komponirana. Na primjer funkcija $f(x) = \left|x^2\right|$ nije periodnična, a funkcija $f(x) = |sin(x)|$.

2.3.6. Monotonost funkcije apsolutne vrijednosti

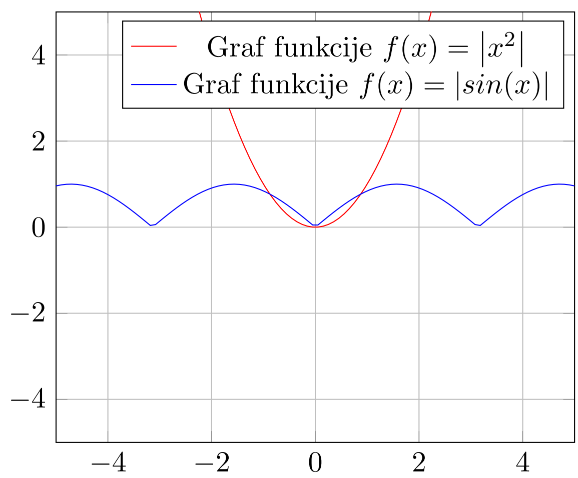
Funkcija apsolutne vrijdnosti nije monotona jer je parna. Monotona je na intervalima ovisno o funkcija s kojom je u kompoziciji.

2.3.7. Omeđenost funkcije apsolutne vrijednosti

Kvadratna funkcija je po definiciji omeđena odozdo, a donja međa joj je nula.

2.3.8. Injektivnost i surjektivnost funkcije apsolutne vrijednosti

Kvadratna funkcija je surjekcija. Po definiciji iz 1.7.



Slika 17: Grafovi funkcija apsolunih vrijdnosti komponiranih s periodničnom i neperiodičnom funkcijom

2.3.9. Inverz funkcije apsolutne vrijednosti

Kvadratna funkcija nema inverz jer je surjekcija.

2.4. Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija je funkcija oblika:

$$f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$$

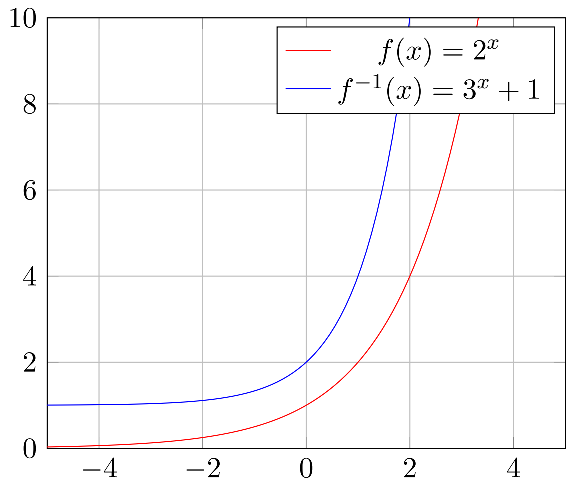
Derivacija eksponencijalne funkcije je eksponencijalna funkcija.

2.4.1. Domena i kodomena eksponencijalne funkcije

Domena eksponencijalne funkcija je skup $\mathbb{R}$. Kodomena eksponencijalne funkcije je skup $\mathbb{R}^+$ jer je pozitivan realni broj na neku potenciju je pozitivan realni broj.

2.4.2. Graf eksponencijalne funkcije

Specifičnost grafa eksponencijalne funkcije je da uvijek prolazi kroz točku $(0, 1)$. Mijenjamo li bazu a, mijenja se *brzina* rasta. Dodavanjem slobodnog koeficijnta mjenjanmo odsječak na y-osi.



Slika 18: Grafovi eksponencijalne funkcije s različitim parametrima

2.4.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os eksponencijalne funkcije

Eksponencijalna funkcija nema nultočke. Eksponencijalna funkcija uvijek sječe y-os u točki $(0,1)$:

$$f(0) = a^0 = 1$$

2.4.4. Parnost i neparnost eksponencijalne funkcije

Funkcija nije ni parna ni neparna jer ne zadovoljava definicije u 1.3.

2.4.5. Periodičnost eksponencijalne funkcije

Funkcija nije periodična.

2.4.6. Monotonost eksponencijalne funkcije

Funkcija je strogo rastuća.

2.4.7. Omeđenost eksponencijalne funkcije

Funkcija nije omeđena.

2.4.8. Injektivnost i surjektivnost eksponencijalne funkcije

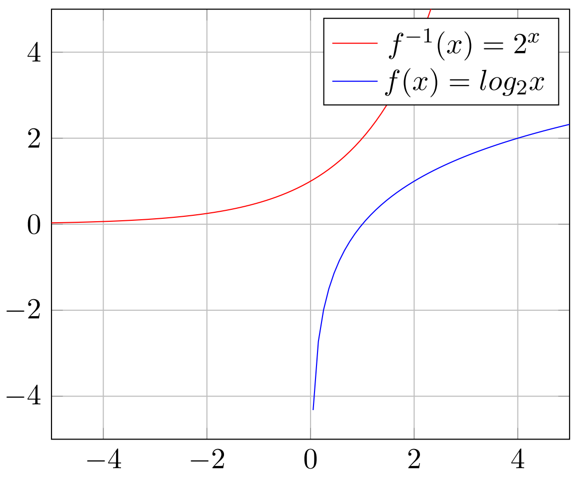
Eksponencijalna funkcija je bijekcija. Injekcija je jer vrijedi:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ a^{x_1} &= a^{x_2} \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Surjektivna je po definiciju, dakle bijekcija je.

2.4.9. Inverz eksponencijalne funkcije

Inverz logaritamske funkcije je eksponencijalna funkcija.



Slika 19: Grafovi funkcije i njenzinog inverzna

2.5. Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija uzima broj i vraća potenciju na koju moramo staviti bazu logaritamske funkcije kako bi dobili argument. Pronalazimo je u obliku:

$$f(x) = log_a x \; a > 0, \; a \neq 1$$

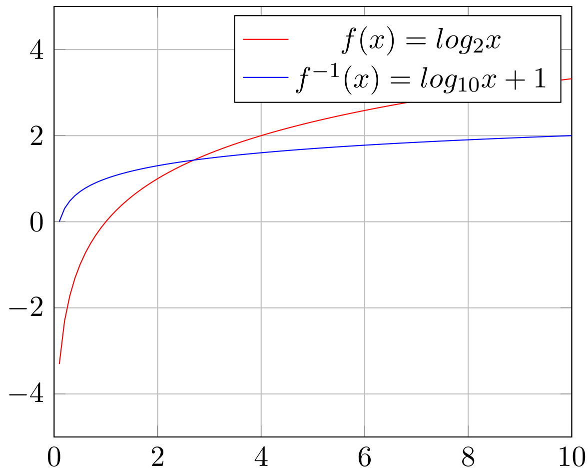
Logaritam s bazom e zovemo prirodni logaritam i označavamo ga $\ln x$.

2.5.1. Domena i kodomena logaritamske funkcije

Domena eksponencijalne funkcija je po definiciji skup $\mathbb{R}^+$. To je intuitivno jasno jer ne možemo naći potenciju negativnog broja. Kodomena eksponencijalne funkcije skup $\mathbb{R}$.

2.5.2. Graf logaritamske funkcije

Specifičnost grafa eksponencijalne funkcije je da uvijek prolazi kroz točku $(0, 1)$. Mijenjamo li parametar a, mijenja se *"brzina"* rasta funkcije. Dodavanjem slobodnog koeficijnta mjenjanmo odsječak na y-osi.



Slika 20: Grafovi eksponencijalne funkcije s različitim parametrima

2.5.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os logaritamske funkcije

Nultočka logaritamske funkcije uvijek je (1, 0):

$$0 = log_a x$$
$$x = 1$$

Njen graf ne sječe y-os.

2.5.4. Parnost i neparnost logaritamske funkcije

Funkcija nije ni parna ni neparna jer ne zadovoljava definicije u 1.3.

2.5.5. Periodičnost logaritamske funkcije

Funkcija nije periodična.

2.5.6. Monotonost logaritamske funkcije

Funkcija je strogo rastuća.

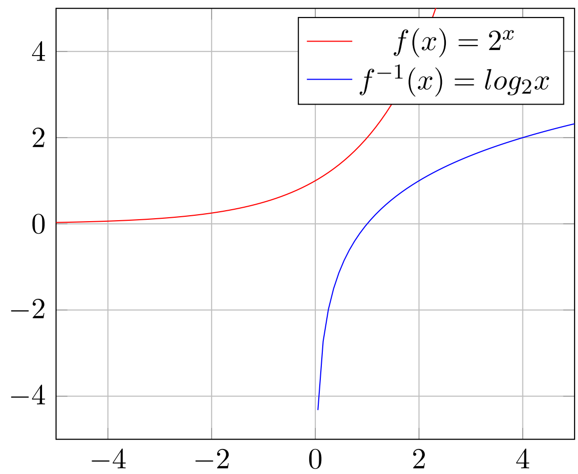
2.5.7. Omeđenost logaritamske funkcije

Funkcij

2.5.8. Injektivnost i surjektivnost logaritamske funkcije

2.5.9. Inverz logaritamske funkcije

Inverz eksponencijalne funkcije je logaritamska funkcija.



Slika 21: Grafovi funkcije i njenzinog inverzna

2.6. Trigonometrijske funkcije

Osnovne trigonometrijske funkcije su sinus, kosinus, tanges i kotangens. Funkcija kosinus ekvivalenta je funkciji sinus uz fazni pomak of $\frac{\pi}{2}$, a kotangens je tangens na potenciju minus jedan. Iz tog razloga ću se usredotočiti na funkcije sinus i tanges. Sinus nalazimo u obliku:

$$f(x) = sin(x),$$

a tangens:

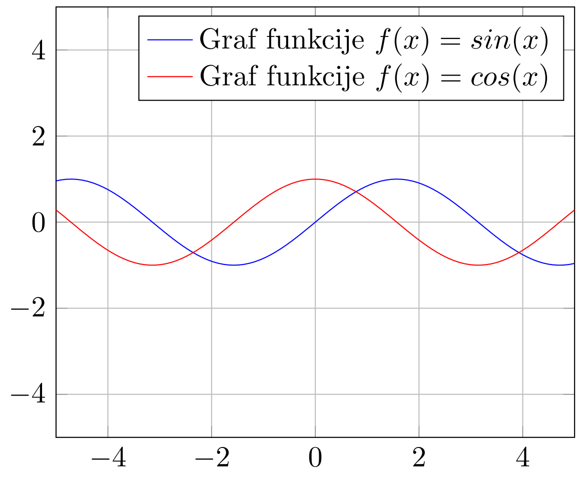
$$f(x) = tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)},\ x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.6.1. Domena i kodomena trigonometrijskih funkcija

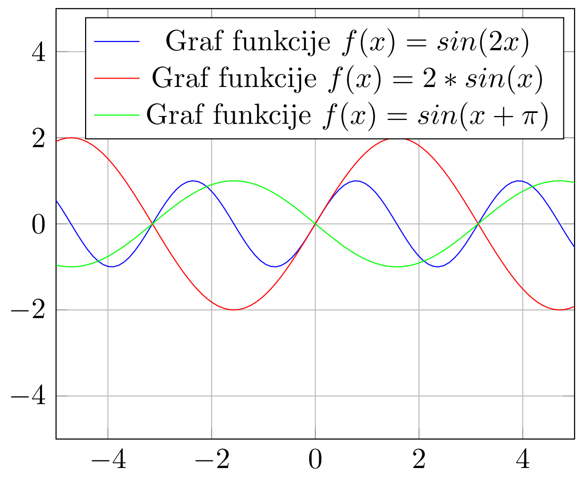
Domena funkcije sinus je skup realnih brojeva, a kodomena mu je otvoren skup of jedan do minus jedan. Domena funlcije tangens je skup realnih brojeva osim višekratnika broja π, a kodomena mu je skup realnih brojeva. Koeficijent isprek trigonometrijske funkcije zovemo *amplituda*, ona nam određuje krajnje vrijednosti funkcije. Parametar koji dodajemo argumentu kod trigonometrijskih funkcija zovemo *fazni pomak*. Množimo li argument nekim Koeficijentom, povećat ćemo, ili smanjit period funkcije.

2.6.2. Graf trigonometrijskih funkcija

Graf funkcija sinus i kosinus zovemo sinusoida.



Slika 22: Grafovi funkcija sinus i kosinus



Slika 23: Grafovi funkcije sinus s raznim parametrima

2.6.3. Nultočke i točke u kojima graf sječe y-os trigonometrijskih funkcija

Pošto su trigonometrijske funkcije periodične imaju mnogo nultočaka. Funkcija kosunus ima dvije nultočke na svakom periodu:

$$sin(x) = 0$$
$$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Funkcija tangens ima nultočku na svakom periodu.

$$tg(x) = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

2.6.4. Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija

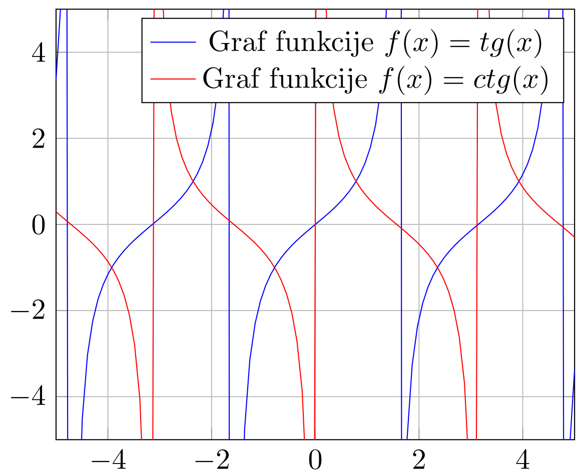
Sinus je neparna funkcija, kosinus parna, tangens parna, a kotanges neparna.

2.6.5. Periodičnost trigonometrijskih funkcija

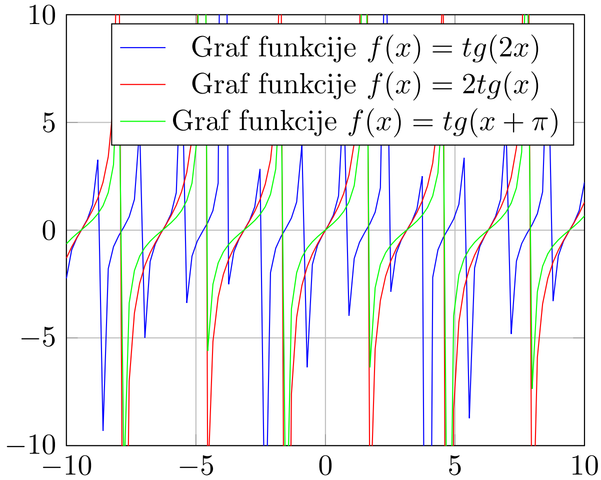
Sve trigonometrijske funkcije su periodične. Za sve vrijedi:

$$f(x + P) = f(x), P \neq 0$$

Temeljni period funkcije sinus je 2π, a funkcije tanges je π.



Slika 24: Grafovi funkcija tangens i kotangens



Slika 25: Grafovi funkcija tangens i kotangens s raznim parametrima

2.6.6. Monotonost trigonometrijskih funkcija

Trigonometrijske funkcije su monotone samo na određenim intervalima.

2.6.7. Omeđenost trigonometrijskih funkcija

Funkcija sinus je omeđena odozdo i odozgo s $|1|$. Funkcije tanges i kotangens nisu omeđene.

2.6.8. Injektivnost i surjektivnost trigonometrijskih funkcija

Trigonometrijske funkcije su surjekcije jer su periodične.

2.6.9. Inverz trigonometrijskih funkcija

Trigonometrijske funkcije imaju inverze samo na intervalima od nula uključivo do njihovog temeljnog perioda.