Maximiser les Rendements Agricoles avec l'Optimisation Mathématique

Georges

March 31, 2024

1 Introduction

Dans le monde complexe de l'agriculture moderne, les agriculteurs font face à de nombreux défis, de la gestion des cultures à la maximisation des rendements tout en minimisant les coûts. Pour relever ces défis, de nombreuses fermes se tournent vers l'optimisation mathématique, une approche qui utilise des modèles mathématiques pour prendre des décisions éclairées sur la gestion des cultures et des ressources.

2 Le Défi de la Gestion Agricole

La gestion d'une ferme agricole implique la prise en compte de divers facteurs, tels que les conditions météorologiques, les coûts des intrants agricoles, la demande du marché pour les produits cultivés, et bien d'autres. Pour maximiser les profits et optimiser les rendements, les agriculteurs doivent prendre des décisions éclairées sur la manière d'allouer leurs ressources limitées, telles que la terre, l'eau et la main-d'œuvre.

3 Mise en situation : Cas de *Birge & Louveaux, Introduction to Stochastic Programming, Springer, 1997*

Un agriculteur européen se spécialise dans la culture du blé, du maïs et de la betterave sucrière sur ses 500 acres de terre. Au cours de l'hiver, il souhaite décider de la superficie à consacrer à chaque culture. Il faut au moins 200 t de blé et 240 t de maïs pour nourrir son bétail. Ces quantités peuvent être produites sur la ferme ou achetées auprès d'un négociant. Toute production excédentaire (par rapport aux besoins alimentaires) serait vendue (pour la production d'éthanol). Les prix de vente sont respectivement de 170 et 150 dollars par tonne de blé et de maïs. Les prix d'achat sont supérieurs de 40% (au prix de vente). Une autre culture pour la production d'éthanol est la betterave sucrière, qui se vend à 36 \$/t. Cependant, la Commission européenne impose un quota sur la production de betteraves sucrières. Toute quantité dépassant le quota ne peut être vendue qu'à 10 \$/t. Le quota de l'agriculteur pour l'année prochaine est de 6 000 t. Le coût de plantation (par acre) est de 150 \$ pour le blé, 230 \$ pour le maïs et 260 \$ pour la betterave sucrière. Sur la base de son expérience passée, l'agriculteur sait que le rendement moyen de ses terres est d'environ 2,5 t, 3 t et 20 t par acre pour le blé, le maïs et les betteraves sucrières, respectivement. Proposer un modèle mathématique pour aider cet agriculteur.

4 Modèle Mathématique pour la Gestion Agricole : Étape 1 - Approche déterministe

Soit notre agriculteur européen qui cultive du blé, du maïs et de la betterave sucrière sur ses 500 acres de terre. Son objectif est de décider de la superficie à consacrer à chaque culture afin de maximiser ses profits. Pour cela, il doit tenir compte des besoins alimentaires de son bétail, des prix de vente et d'achat des différentes cultures, ainsi que des quotas imposés par les autorités.

Un modèle mathématique peut aider les agriculteurs à prendre ces décisions en formulant le problème de gestion agricole comme un problème d'optimisation.

4.1 Variables de décisions :

- $\mathcal{I} = \{\text{Blé}, \text{Maïs}, \text{Betterave}\}$
- $\mathcal{J} = \mathcal{I} - \{\text{Betterave}\}$
- $i \in \mathcal{I}$: les différentes cultures plantées par l'agriculteur
- X_i : les superficies allouées pour les différentes cultures ($i \in \mathcal{I}$)

5 Modèle Mathématique pour la Gestion Agricole : Étape 3 - Décision selon une probabilité d'apparition des états/scénarios (Modèle stochastique)

5.1 Variables de conséquence :

- S_i : Quantités vendues pour les différents produits i (Sales) – ou $Ecarts_i$ – ($\forall i \in \mathcal{I}$)
- P_i : Quantités cultivées pour les différents produits i (Production) ($\forall i \in \mathcal{I}$)
- TS_i : Total des ventes pour les différents produits i (Total sales) ($\forall i \in \mathcal{I}$)

- QS_i : Quantités disponibles des différents produits i (Quantity in stock) $(\forall i \in \mathcal{I})$
- K_1 et K_2 : Quantités de betterave produite, respectivement la quantité en dessous du quota et celle au-dessus.

5.2 Paramètres :

- r_i : Rendements de production pour les différents produits i $(\forall i \in \mathcal{I})$
- PS_i : Prix de vente pour les différents produits i (Price of sale) $(\forall i \in \mathcal{I})$
- PB_j : Prix d'achat pour les différents produits j (Price of buy) $(\forall j \in \mathcal{J})$
- C_i : Coûts de production des différents produits i par acre (Cost of production) $(\forall i \in \mathcal{I})$
- N_i : Besoins de la ferme en produits j (Needs of products) $(\forall j \in \mathcal{J})$
- $Quota$: Quota défini par la Commission Européenne sur le produit Betterave

À partir des informations recueillies, nous écrivons les équations qui décrivent le problème. Cela inclut les contraintes d'équilibre des superficies cultivées, les contraintes de vente, d'achat et de production, ainsi que les contraintes spécifiques à la culture de la betterave. Nous formulons également la fonction objectif pour maximiser les profits. Voici les équations de contraintes de base qui définissent ce modèle :

1. **Équilibre de la Superficie Cultivée** :

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} X_i = \text{Superficie Totale Disponible} \leq 500 \text{ Acres}$$

2. **Contraintes de Vente-Achat-Production de Produits** :

   - Contrainte 1 : Productions

$$P_i = r_i \cdot X_i \quad (\forall i \in \mathcal{I})$$

   - Contrainte 2 : Ventes

$$S_i = P_i + B_i - N_i \quad (\forall i \in \mathcal{I})$$

   - Contrainte 3 : Total des ventes

$$TS_i = PS_i \cdot S_i \quad (\forall i \in \mathcal{I})$$

   et

$$TS_{\text{betterave}} = 36K_1 + 10K_2$$

- Contrainte 4 : Total de produits disponibles

$$QS_i = P_i + B_i \quad (\forall i \in \mathcal{I})$$

3. **Satisfaction de la Demande Minimale** :

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (r_j \cdot X_j + B_j) \geq N_j$$

4. **Contraintes Spécifiques à la Culture de la Betterave** :

- Contrainte 1 :

$$r_{\text{betterave}} \cdot X_{\text{betterave}} = K_1 + K_2 = P_{\text{betterave}}$$

- Contrainte 2 :

$$0 \leq K_1 \leq Quota \quad \text{et} \quad 0 \leq K_2 \leq M$$

ou plus simplement :

$$36 r_{\text{betterave}} \cdot X_{\text{betterave}} \leq 36 K_1 + 10 K_2 \quad \text{et} \quad 0 \leq K_1 \leq Quota$$

- Contrainte 3 :

$$N_{\text{Betterave}} = 0$$

L'objectif ici étant de maximiser le **profit**, on écrit la fonction objectif suivante :

Objectif de Maximisation des Profits :

$$\text{Maximiser} \;\; \textbf{Profit = Ventes - Coût}$$

Le modèle final s'écrit donc :

$$\text{Maximiser Profit} = \sum_{i \in \mathcal{I}} TS_i - \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} C_i \cdot X_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} PB_j \cdot B_j \right)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} X_i \leq 500$$

$$P_i = r_i \cdot X_i \quad (\forall i \in \mathcal{I})$$

$$S_i = P_i + B_i - N_i \quad (\forall i \in \mathcal{I})$$

$$TS_i = PS_i \cdot S_i \quad (\forall i \in \mathcal{I})$$

$$QS_i = P_i + B_i \quad (\forall i \in \mathcal{I})$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (r_j \cdot X_j + B_j) \geq N_j$$

$$TS_{\text{betterave}} = 36K_1 + 10K_2$$

$$P_{\text{betterave}} = K_1 + K_2$$

$$0 \leq K_1 \leq \text{Quota}$$

$$X_i, B_i, K_1, K_2 \geq 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathcal{I}$$

	Ble	Maïs	Betterave	Variable associée
Surface	120	80	300	X_i
Qte Achat	0	0	0	B_i
Rendement	2.5	3	20	r_i
Total ventes	$17,000	-	-	TS_i
Achat (40% de plus du Prix vente)	$238	$210	-	B_i
Production	300	240	6000	P_i
Écart P-D	100	0	6000	S_i
Quantité disponible	300	240	6000	QS_i

Table 1: Résumé des données du modèle

6 Modèle Mathématique pour la Gestion Agricole : Étape 2 - Décision sous incertitude (Concept de Matrice des gains, Prise de décision - Minimax, Maximax, ... Equivalent certain)

On introduit maintenant une incertitude sur la **météo** (le temps qu'il fait) qui a pour conséquence majeure le rendement des parcelles de culture. On fera l'hypothèse qu'aucun changement n'est fait sur le marché (prix d'achat et de vente).

On a donc potentiellement un climat **Mauvais**, **Moyen** (le cas déterministe étudié précédemment), une météo **Bonne**. Pour chaque temps, qu'il fait on associe une variation sur le rendement habituel observé (le rendement moyen ou le **Moyen** qui est celui donné par le modèle déterministe de base précédemment étudié). Ainsi, en temps **Mauvais**, les rendements vont **diminuer** de 20 % : soit **80 %** du rendement moyen généralement observé ; en temps **Bon** ou favorable, les rendements vont **augmenter** de 20 % : soit **120 %** du rendement moyen généralement observé.

Dès lors, on peut donc calculer les nouveaux rendements dans chaque cas en notant toutefois, que aucune information n'est disponible sur le temps qu'il fera ; on s'adaptera selon l'intuition du fermier (selon l'aversion au risque du décideur) ou au jour le jour.

Scenario	Blé	Maïs	Betterave	Rendements
Mauvais	2.00	2.40	16.00	80%
Moyenne	2.50	3.00	20.00	100%
Bonne	3.00	3.60	24.00	120%

Table 2: Nouveaux rendements en fonction des scénarios météorologiques

Avant de poursuivre, je tiens à préciser 02 concepts qui seront observés par la suite.

Stratégie caractérise souvent des **Choix** (un ensemble de valeurs défini par le décideur pour les différentes variables de décision, des portefeuilles d'actions ou de projets sur lesquels investir... Note : il faut noter qu'à la fin, *une seule décision sera prise*) : Ensemble de décisions prises par un décideur pour atteindre un objectif donné dans un environnement incertain. Cette stratégie peut viser à maximiser les bénéfices, minimiser les coûts, ou atteindre tout autre objectif défini par le problème.

Scénario souvent appelé **États** dans lequel l'environnement du décideur évolue : Représente une configuration ou une réalisation possible de l'incertitude dans le modèle d'optimisation. Il peut y avoir plusieurs scénarios possibles, chacun étant associé à une probabilité ou à une pondération spécifique. Ces scénarios reflètent généralement des variations dans les données d'entrée telles que les conditions météorologiques, les demandes du marché, les coûts des ressources, etc.

L'objectif de l'optimisation sous incertitude est souvent de déterminer la meilleure stratégie à adopter, en tenant compte de tous les scénarios possibles et de leurs probabilités associées, afin de maximiser ou de minimiser une fonction objectif donnée.

6.1 Résolution de chaque scénario

Afin de résoudre ce problème sous-incertitude, on va résoudre le **problème déterministe associé à chaque scénario**, pris individuellement.

Scenario	**Mauvais**	**Moyenne**	**Bonne**
Rendement	80%	100%	120%
	Stratégie	**Stratégie**	**Stratégie**
	Pessimiste	Equilibre	Optimiste
L1	100	120	183.333
L2	25	80	66.667
L3	375	300	250
Profit	$59,950.00	$118,600.00	$167,666.67

Table 3: Résultats des scénarios pour chaque stratégie

6.2 Conception de la matrice des gains

On peut dès lors concevoir (définir) les stratégies associées à ce problème (3 états ou scénarios possibles) comme suit :

	Blé	**Maïs**	**Betterave**	**Scénarios**
Pessimiste	100 acres	25 acres	375 acres	Mauvaise
Équilibré	120 acres	80 acres	300 acres	Moyenne
Optimiste	183.3 acres	66.7 acres	250 acres	Bonne

Table 4: Stratégies associées à chaque scénario

À partir de là, on construit la matrice de gain comme suit :

Step 1 : Le remplacement de la matrice de gain commence par la diagonale qui correspond aux profits optimaux obtenus pour chaque scénario.

Step 2 : On cherche à remplir le tableau de la matrice de gain avec les valeurs fixes de : 1) les valeurs des coefficients de rendement, 2) les valeurs des superficies définies par chaque stratégie ; la seule variable de décision dans ce cas devient la quantité à acheter B_j (la quantité de j à acheter).

6.3 Prise de décision

Plusieurs approches existent pour la prise de décision une fois que l'on a défini la matrice de gain. On présentera les plus populaires et leurs avantages mais aussi leurs limites. Pour une application en finance que j'ai vraiment aimée, je vous recommande ce blog.

Approche 1 : Laplace Bayes - La moyenne

Ici, le produit ou la stratégie qui retiendra notre attention est celle qui sera le plus proche ou égal à la moyenne. L'inconvénient est que :

- Il peut souvent être difficile d'avoir un produit dont le gain est strictement égal à la moyenne : on parle d'un risque de représentation fausse de la réalité.

Dans notre cas, illustrons ce qui est énoncé ci-dessus :

Approche 2 : Wald - Maximin

Ici, le produit ou la stratégie qui retiendra notre attention sera celle qui aura le meilleur résultat dans le pire scénario possible. L'inconvénient est que :

- Il occulte parfois les opportunités possibles parce qu'il ne se focalise que sur les pertes probables : la conséquence de cette approche en économie serait de freiner l'innovation afin de garantir une stabilité certaine (comportement systématiquement pessimiste).

Dans notre cas, illustrons ce qui est énoncé ci-dessus :

Approche 3 : Maximax

Ici, le produit ou la stratégie qui retiendra notre attention sera celle qui aura le meilleur résultat dans le meilleur scénario possible. L'inconvénient est que :

- Il surestime l'opportunité ce qui expose le décideur à un très grand risque : risque élevé en cas de mauvaise prédiction.

Dans notre cas, illustrons ce qui est énoncé ci-dessus :

Approche 4 : Minimax Regret - Leonard Savage (1954), von Neumann (1926) et Landsheere, Gilbert (1979)

Ici, le produit ou la stratégie qui retiendra notre attention sera celle qui aura le meilleur (le plus petit) regret parmi les regrets extrêmes. Dans un premier temps, on va calculer les regrets max de chaque gain $i-j$.

Il s'agit de la différence entre un gain et la plus grande valeur possible de gain associée à l'état j de ce gain :

$$\text{Regret}_{i,j} = \text{Max } \{G_{i,j}\} - G_{i,j} \ (\forall \ i \in \mathcal{I})$$

Ici, on calcule pour chaque stratégie le regret maximal :

$$\text{Regret Max}_i = \text{Max } \{\text{Regret}_{i,j} \ (\forall \ i \in \mathcal{I})\}$$

Ensuite, la stratégie ayant la plus grande valeur minimale du regret maximal est la stratégie **Optimiste** avec une valeur de Regret max = \$ 12 250 (la plus petite). Elle est très appréciée en théorie de la décision.

Approche 5 : Hurwicz - Appréciation du décideur

Cette approche se base sur l'expertise + ou - biaisée du décideur, de par son aversion au risque ou pas.

Après avoir identifié les Max et et les Min de chaque stratégie, on trouve la somme pondérée de ceux-ci à partir de la préférence du décideur :

$$\text{Profit pour une Décision} = a \cdot \text{Min}_i + (a-1) \cdot \text{Max}_i$$

- $a = 0.8$: Averse au risque
- $a = 0.3$: Aime le risque

7 Modèle Mathématique pour la Gestion Agricole : Étape 3 - Décision selon une probabilité d'apparition des états/scénarios (Modèle stochastique)

Nous terminons ce projet en introduisant le concept de modèle stochastique à proprement parler. Toutefois, il est important de montrer le caractère impératif de suivre la démarche suivie tout au long de ce projet :

1. Modéliser et résoudre le problème selon une approche déterministe s'il y a lieu.
2. Identifier les différents scénarios, les résoudre et concevoir la matrice de gains.

3. Proposer le modèle stochastique final global et le résoudre.

4. Identifier la VEIP (Valeur Espérée d'une Information Parfaite) qui permet d'apprécier une offre extérieure (consultant, logiciel prestataire, ...).

Afin de mener à bien l'étape 3 et 4, il est vital de rappeler le contexte de la prise de décision stochastique :

- Un choix (ou ensemble de choix) préalable a été fait par le décideur sans être affecté par l'incertitude : en occurrence, la superficie de culture pour chaque céréale.

- Selon l'état observé au cours du temps, le décideur peut s'ajuster (variables de recours : quantité à vendre et quantité à acheter par produit).

Pour des raisons de simplification, nous écrivons un modèle stochastique allégé (identique) de celui présenté jusqu'ici (suppression des variables de conséquence) :

$$\text{Maximiser Profit} = \frac{1}{3}\left(\sum_{i\in\mathcal{I}} PS_i \cdot S_{i,k} - \sum_{j\in\mathcal{J}} PB_j \cdot B_{j,k}\right) - \sum_{i\in\mathcal{I}} C_i \cdot X_i$$
$$\sum_{i\in\mathcal{I}} X_i \leq 500$$
$$S_{i,k} = r_{i,k} \cdot X_i + B_{i,k} - N_i \quad (\forall i \in \mathcal{I})$$
$$\sum_{i\in\mathcal{I}} (r_{i,k} \cdot X_j + B_{i,k}) \geq N_j$$
$$36 \cdot S_{\text{betterave}} \leq 36K_1 + 10K_2$$
$$S_{\text{betterave}} = K_1 + K_2$$
$$0 \leq K_1 \leq Quota$$
$$X_i, B_i, K_1, K_2 \geq 0 \text{ pour tout } i \in \mathcal{I}$$

On peut ainsi modifier notre matrice de gain en rajoutant une nouvelle colonne : **Equivalent Certain** qui représente la valeur espérée pour chaque stratégie. On écrit les équations associées :

$$\text{Eq. Certain}_1 = EC_{Pes} = Prob_{Ma} \cdot \text{Gain}_{Pes,Ma} + Prob_{Mo} \cdot \text{Gain}_{Pes,Mo} + Prob_{Bon} \cdot \text{Gain}_{Pes,Bon}$$
$$\text{Eq. Certain}_2 = EC_{Equ} = Prob_{Equ} \cdot \text{Gain}_{Equ,Ma} + Prob_{Mo} \cdot \text{Gain}_{Equ,Mo} + Prob_{Bon} \cdot \text{Gain}_{Equ,Bon}$$
$$\text{Eq. Certain}_3 = EC_{Opt} = Prob_{Ma} \cdot \text{Gain}_{Opt,Ma} + Prob_{Mo} \cdot \text{Gain}_{Opt,Mo} + Prob_{Bon} \cdot \text{Gain}_{Opt,Bon}$$

Les profits espérés pour chaque stratégie correspondent à :

$$EC_{Pessimiste} = \frac{1}{3}(\$\ 59,950 + \$\ 86,600 + \$\ 113,250) = \$\ 86,600$$
$$EC_{Equilibre} = \frac{1}{3}(\$\ 55,120 + \$\ 118,600 + \$\ 148,000) = \$\ 107,240$$
$$EC_{Optimiste} = \frac{1}{3}(\$\ 47,700 + \$\ 107,683 + \$\ 167,666.67) = \$\ 107,683.33$$

On peut décider de faire le choix plutôt sur la base du profit général espéré (la solution du modèle stochastique) :

On obtient le profit espéré :

$$Profit(E) = \$\ 108,390$$

A partir de ça, on peut trouver le profit espéré pour chaque état (scénario) :

$$Profit(E) = \frac{1}{3} \cdot \$\ 108,390 = \$\ 36,130$$

On obtient toujours le même résultat peu importe le scénario (état) parce que les états sont équi-probables. Tandis que le **profit sous information parfaite** est le profit que le décideur obtiendrait s'il maîtrisait l'état en avance multiplié par la probabilité d'occurrence du scénario ; ce qui reviendrait à prendre la meilleure décision pour un scénario donné. On écrit donc :

$$\text{Profit sous information parfaite} = \frac{1}{3} \cdot \$\ 59,950 + \frac{1}{3} \cdot \$\ 118,600 + \frac{1}{3} \cdot \$\ 167,666.67 = \$\ 115,405.56$$

On calcule donc le **VEIP** :

$$\text{VEIP} = \$\ 115,405.56 - \$\ 108,390 = \$\ 7,015.56$$

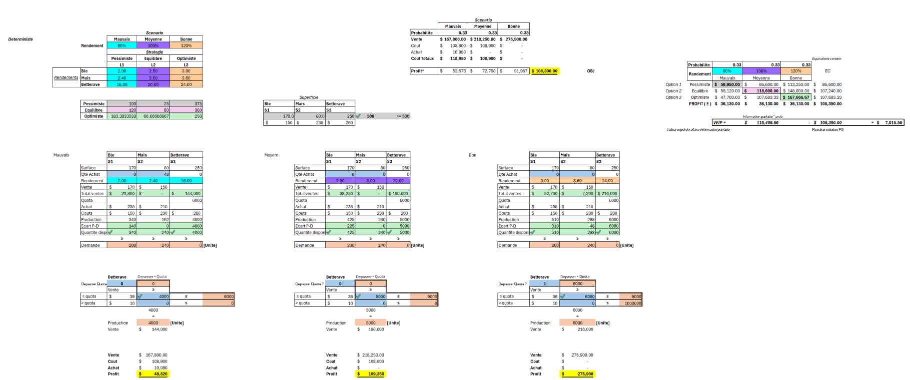

Figure 1: Modèle Résolu sous Excel

8 Résultats et Commentaires

Une fois les modèles déterministes et stochastiques résolus, les résultats peuvent être analysés. Ils fournissent à l'agriculteur des informations précieuses sur les décisions optimales à prendre dans différentes situations. Il peut ainsi planifier sa plantation de manière plus efficace, en tenant compte des risques et des incertitudes inhérents à son activité.

9 Conclusion

L'utilisation de l'optimisation mathématique dans la gestion agricole offre de nombreux avantages aux agriculteurs modernes. En utilisant des modèles mathématiques sophistiqués, ils peuvent prendre des décisions plus éclairées et optimiser l'allocation de leurs ressources limitées. Cela leur permet non seulement de maximiser leurs rendements et leurs profits, mais aussi de réduire les risques et de faire face aux défis croissants de l'agriculture contemporaine.

Cette étude démontre l'importance croissante de l'analyse quantitative dans le secteur agricole et souligne le potentiel de l'optimisation mathématique pour transformer la manière dont les fermes sont gérées et exploitées. À mesure que la technologie et les techniques d'optimisation continuent de progresser, il est probable que l'utilisation de telles approches deviendra de plus en plus répandue, ouvrant ainsi la voie à une agriculture plus efficace, durable et rentable à l'échelle mondiale.