
Introduction à la correction d'algorithmes

1. Description générale

- **Niveau** : Première NSI
- **Rubrique** : Algorithmique
- **Pré-requis** : Constructions élémentaires (Boucle , conditionnelle)
- **Motivation** : L'activité proposée ici est motivée par l'idée d'introduire, au lycée dans une classe de première en NSI, la notion d'**invariant** (et éventuellement de variant). L'idée est de solliciter la mémoire tactile, associée de plus à la notion de jeux. Cette activité consiste à étudier la correction partielle d'un algorithme de distribution de cartes.
- **Matériel** : Des paquets de cartes à jouer. (Activité débranchée.)
- **Durée** : 1 heure.

2. Lien avec le programme officiel

2.1. Texte au BO

Algorithmique

Il est nécessaire de montrer l'intérêt de prouver la **correction** d'un algorithme pour lequel on dispose d'une spécification précise, notamment en mobilisant la notion d'**invariant** sur des exemples simples. La nécessité de prouver la **terminaison** d'un programme est mise en évidence dès qu'on utilise une boucle non bornée (ou, en terminale, des fonctions récursives) grâce à la mobilisation de la notion de **variant** sur des exemples simples.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Tris par insertion, par sélection	Décrire un invariant de boucle qui prouve la correction [...]	La terminaison de ces algorithmes est à justifier.
Recherche dichotomique dans un tableau trié	Montrer la terminaison [...] à l'aide d'un variant de boucle.	La preuve de la correction peut être présentée par le professeur.

Spécification

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Prototyper une fonction.	Décrire les préconditions sur les arguments. Décrire des postconditions sur les résultats.	Des assertions peuvent être utilisées pour garantir des préconditions ou des postconditions.

2.2. Analyse

Les notions de variant et d'invariant permettant la correction d'algorithmes sont pointées, dans le programme officiel, sur les algorithmes de tri et de recherche dichotomique. Ces algorithmes

ayant, pour les élèves, des difficultés intrinsèques, il nous semble qu'introduire les notions de variant et d'invariant doit se faire au préalable, « sur des exemples simples ».

D'autre part, ces algorithmes de tri et de recherche, sont souvent introduits à l'aide d'activités de manipulations, en particulier avec des cartes à jouer.

L'idée de l'activité présentée ici est donc d'utiliser ce support (les cartes à jouer), et d'introduire ces notions (variant et invariant) à travers un algorithme simple (la distribution des cartes).

Enfin, le choix a été fait de ne pas mélanger les deux notions. Cette activité est donc centrée sur la correction partielle (mais permet également très simplement d'engager le travail sur la terminaison).

3. Découpage de l'activité

Étape	Activité enseignant	Activité Élève
Mise en place	Présente l'activité et fournit les paquets de cartes.	Répartition en groupes.
① Première distribution	Lance une distribution. Conduit aux post-conditions, formalise un algorithme de distribution.	Un donneur par groupe distribue l'ensemble des cartes. Participe à définir : « bonne donne », et à un algorithme de distribution.
② Seconde distribution : interrompue	Lance et interrompt une distribution. « Peut-on savoir si, jusqu'ici, il y a bonne donne ? » (vers un invariant)	Un (autre) donneur distribue une partie des cartes (fini un tour entamer). Détermine un procédé de vérification et l'effectue (comptage d cartes).
③ Seconde distribution : suite	Supervise les changements de tables. Lance un tour de distribution. « Peut-on savoir s'il, jusqu'ici, il y a bonne donne ? » Introduit le vocabulaire : « invariant ». Propose de suivre l'état des variables pour justifier de l'invariant sur une itération.	Les groupes permutent en laissant les cartes sur place. Un donneur réalise un tour de distribution. Propose une argumentation sans re-comptage. Complète le tableau proposé.
④ Seconde distribution : fin	Force une mauvaise donne sans invalider l'invariant. « Y-a-t-il eu bonne donne ? » Précise les post-conditions Prouve la correction partielle	Retourne à sa place et finit la distribution. Précise sa compréhension

4. Mise en œuvre et analyse

Cette partie est le fruit de différentes mises en œuvres dans différentes classes de première, différentes années et par différents enseignants.

En *italique* sont mentionnées des expériences de classe, pour lesquelles « *je* » représente l'enseignant.

4.1. Mise en place

Il faut décider du nombre d'élèves et de cartes par groupe.

Comme l'étape ① est une formalisation de la « bonne donne », il est plus simple, pour engager cette discussions que le nombre de cartes ne soit pas un multiple du nombre d'élèves par groupe. Avec des jeux de 32 ou 52 cartes on cherche à faire des groupes de 3 ou 5 élèves. Avec des groupes de 4 élèves, on pourra ne pas donner des paquets entier ou y laisser les jokers.

4.2. Étape ① : première distribution

Objectif : Écrire un algorithme simple et sa spécification (en particulier ses post-conditions).

On demande, sans autre explication, à un élève par groupe de distribuer les cartes à son groupe.

« *Comment peut-on être certain qu'il n'y a pas maldonne ?* »

Certains élèves n'ont jamais vraiment joué à un jeu de carte, et d'autres, qu'à certains jeux pour lesquels la notion de maldonne n'est pas réellement présente.

Un élève qui a surtout joué au « président », jeu pour lequel le gagnant est le premier qui se débarrasse de toutes ses cartes, demande à quel jeu on joue. Comme la distribution a apporté plus de cartes à certains qu'à d'autres il avait un problème d'équité. Je lui propose de me dire s'il connaît d'autres jeux et les conséquences de ce genre de distribution. On cite le fait que certains jeux (belote par exemple) demandent un nombre précis de joueurs, et que dans d'autres (tarot par exemple) la distribution met de côté un chien. D'autres jeux ne distribuent tout simplement pas toutes les cartes.

À un moment de la discussion avec les élèves sur le sujet, on doit aider à trancher, pour ce que sera une « bonne donne ». Cette décision est importante, car elle peut induire des raisonnements plus ou moins compliqués pour la correction partielle. On peut donner deux exemples :

Au tableau

- Il y a « bonne donne » si
- ★ chacun a obtenu autant de cartes
- ★ et il n'en reste plus à distribuer.

Au tableau

- Il y a « bonne donne » si
- ★ chacun a obtenu autant de cartes
- ★ et reste $<$ nombre de joueurs.

À la question de la maldonne, la plupart des élèves comptent leurs cartes, mais, même pour ceux qui ont laissés de côté les cartes en surnombre, personne ne pense à compter ces cartes pour vérifier que la distribution est finie, ni de faire la somme pour vérifier le nombre total de carte, sans parler de l'intégrité du paquet de départ.

Des élèves ont tout de suite parlé de division euclidienne, j'ai donc écrit $2 \times 6 + 8 = 20$, et

j'ai demandé si c'était bien la division euclidienne de 20 par 6 ? La condition sur le reste est arrivée tout de suite.

Il manque « l'ensemble des cartes est inchangé » au tableau, mais il n'est pas pertinent de l'imposer de force ici. On pourra la mettre en évidence dans la distribution suivante.

La première possibilité suppose la mise en place d'un pré-traitement, pour que le nombre de cartes soit un multiple du nombre de joueurs. La correction en est simplifiée, mais permet moins de visibilité sur les points que l'on veut aborder.

On (re)précise le vocabulaire lié à la spécification, en particulier les **post-conditions** et on termine cette partie en demandant un algorithme de distribution de cartes, que l'on peut, dans un premier temps, écrire sous la dictée d'un élève :

Au tableau

Tant qu'il reste plus de cartes que de joueurs,
| on distribue.

Encore une fois, ce n'est pas complet, mais la suite de l'activité permettra préciser les choses en vue, justement, d'une démonstration.

4.3. Étape ② : seconde distribution interrompue

Objectif : Conduire vers un invariant de boucle.

On demande à un autre élève par groupe de distribuer les cartes. On interrompt la distribution avant la fin, et on demande de ne finir que le tour de distribution en cours.

« Peut-on savoir si, pour l'instant, la distribution est bonne, ou s'il y a maldonne ? »

Une réponse vient facilement : chacun compte ses cartes pour savoir s'il en a autant que les autres. Encore une fois, il est difficile d'obtenir spontanément toute autre vérification.

Au tableau

Vérification :

★ chacun a obtenu autant de cartes

On fait remarquer que c'est bien l'égalité des comptes et pas le nombre de cartes qui valide la réponse. Chaque groupe n'en est pas au même tour de distribution, mais peut conclure de la même façon. Cette proposition est un **invariant**.

Au tableau, c'est l'occasion s'esquisser un premier tableau de suivi de la situation :

Au tableau

Nombre de cartes du	Joueur1	Joueur2	Joueur3	Reste
entre deux tours de distribution	n	n	n	r

Selon comment les choses ont été menées en classe on peut avoir déjà obtenu un second invariant : le nombre total de cartes (plus précisément l'ensemble des carte). Sinon, c'est l'occasion de le mettre en valeur.

4.4. Étape ③ : seconde distribution suite

Objectif : Préciser la notion d'invariant de boucle et aller vers la correction partielle.

On demande alors aux élèves de laisser leurs cartes à leur place et de changer de table de jeu.

Au profit des hésitations et des déplacements, au moment du changement de table, on subtilise discrètement quelques cartes d'un paquet (du reste à distribuer). On peut également remplacer une des cartes par un joker, ou simplement l'y ajouter...

Une fois chacun à sa nouvelle place, on demande aux nouveaux donneur de faire un tour de distribution seulement et aux autres d'observer sans toucher à rien. On demande alors :

« *Peut-on savoir si la distribution est toujours bonne, sans toucher aux cartes ?* »

Il manque un retour d'expérience ici je pense

La mise en situation est suffisamment claire pour en tirer rapidement le raisonnement : Comme chacun avait autant de carte et en a obtenu une de plus alors chacun en a toujours autant.

On demande alors (si besoin) de préciser l'algorithme au tableau pour qu'il suive ce raisonnement.

Au tableau

Tant qu'il reste plus de cartes que de joueurs,
| on distribue **une carte à chacun**.

Une proposition moins précise d'un élève « on distribue autant de cartes à chacun » est discutée. Si on distribue les cartes deux par deux, est-t-on sûr que ce sera toujours possible ? Pas s'il ne reste qu'une carte par joueur au dernier tour. Si d'autre part on s'autorise à distribuer un nombre différent à chaque tour, on perd trop de contrôle sur la situation pour espérer démontrer facilement qu'elle est valide.

Pour préciser le travail sur l'invariant, on demande :

« *Peut-on dire qu'à tout moment dans la distribution, chaque joueur a autant de cartes ?* »

La réponse est « non » physiquement, car les cartes ne sont pas distribuées simultanément à chaque joueur. Pour aider les élèves à décomposer toutes les étapes d'un tour de distribution on leur propose de remplir le tableau suivant :

Au tableau

Nombre de cartes du	Joueur1	Joueur2	Joueur3	Reste	Autant chacun ?
Début d'une itération	n	n	n	r	oui
Une carte pour Joueur1					
Une carte pour Joueur2					
Une carte pour Joueur3					

Fin de d'itération

Pas de difficulté particulière ici, on obtient $n+1$ cartes pour chaque joueur à la fin de l'itération.

On précise alors le vocabulaire : une proposition qui est vraie au début d'une itération de boucle, dont on peut démontrer qu'elle est de nouveau vérifiée à la fin de l'itération, est dite « **invariante** » pour la boucle. On fait également remarquer deux choses :

- L'invariant n'a évidemment pas besoin de rester vrai à tout moment dans la boucle.
- L'invariant est un prédicat (une proposition booléenne) sur des valeurs qui, elles, peuvent varier.

« En admettant que le donneur respecte bien cet algorithme (au tableau), ce que l'on vient d'écrire suffit-il à démontrer que chacun aura finalement autant de cartes ? »

Cette question est plus difficile. On peut guider la réponse en indiquant que, pour construire notre raisonnement, on a, à un moment, dû compter les cartes. Peut-on s'en passer ? On peut alors remonter le raisonnement à son origine pour constater qu'à l'initialisation, si aucun joueur n'a de carte, on peut démarrer le raisonnement sans avoir besoin de compter.

Au tableau

Invariant : Tous les joueurs ont le même nombre de cartes.					
Avant	0	0	0	N	vrai
Nombre de cartes du	Joueur1	Joueur2	Joueur3	Reste	invariant
Début d'une itération	n	n	n	r	supposé
Une carte pour Joueur1	$n + 1$	n	n	$r - 1$	faux
Une carte pour Joueur2	$n + 1$	$n + 1$	n	$r - 2$	faux
Une carte pour Joueur3	$n + 1$	$n + 1$	$n + 1$	$r - 3$	vrai
Après	?	?	?	?	Donc vrai

On ne cherche volontairement pas à compléter la dernière ligne : c'est le raisonnement en lui-même qui prouve que l'invariant est vrai à la fin et non le calcul des valeurs.

C'est le moment de formaliser, en donnant une définition.

Un **invariant de boucle** est une proposition,

- vraie avant la première itération de la boucle,
- qui reste vraie à la fin d'une itération si elle l'était au début.

Un invariant est donc automatiquement vrai quand la boucle se termine.

On fait alors remarquer que cela démontre une partie de la post-condition proposée. On introduit le vocabulaire : **correction partielle**. On précise qu'elle est partielle car si on démontre que la post-condition est vérifiée quand la boucle termine, il reste à démontrer qu'elle termine effectivement.

4.5. Étape ④ : seconde distribution fin

Objectif : Déterminer les invariants pour compléter la correction partielle.

L'idée est que les manipulations de paquet faites pendant les changements de place provoque de fausses donnes tout en respectant l'invariant précédemment démontré. On demande donc à chacun de retourner à sa place et de finir la donne.

« *Les jeux de cartes ont-ils tous été bien distribués, ou y a-t-il eu maldonne ?* »

On conclue assez facilement que la donne a été faussée. Cependant, on remet les élèves face à leur énoncé de la post-condition : « *chaque joueur a-t-il obtenu autant de cartes ?* », et « *reste-t-il plus de cartes à distribuer que de joueurs ?* ». Ces questions ne suffisent pas à détecter la fausse donne. Que manque-t-il alors à la post-condition ?

Au tableau

Le jeu est « bien distribué » si

- ★ chaque joueur a obtenu autant de cartes
- ★ il en reste à distribuer strictement moins que de joueurs
- ★ et l'ensemble des cartes est inchangé.

« *Comment démontrer cette troisième condition ?* »

Le but est de réécrire le raisonnement précédent sur une condition simple. L'invariant étant la proposition elle-même. L'ensemble des cartes étant constitué de celles de chaque joueur et de celles encore à distribuer :

- Avant la boucle, l'ensemble des cartes n'a pas changé (pas de pré-traitement à examiner).
- S'il n'a pas changé au début d'une itération, le fait de retirer une carte de celles à distribuer pour la donner à un joueur ne le change pas, donc il reste inchangé à la fin de l'itération.

« *Pour terminer la correction partielle, comment prouver la dernière post-condition ?* »

Cette question est facilement confondue par les élèves avec une preuve de terminaison. Pour eux, comme « *il y a un nombre fini de cartes* », au bout d'un moment, il n'y en aura plus à distribuer. On fait alors remarquer que cela signifie que la distribution se termine : c'est l'autre partie de la preuve de correction. Pour la correction partielle, il ne s'agit pas de savoir ici si ça se termine, mais si ça termine bien.

En admettant que l'algorithme termine, alors la condition de la boucle, à la fin de la dernière itération, est fausse, ce qui donne directement le résultat.

On peut alors proposer un schéma de preuve plus formel. Pour un invariant I :

Pré-traitement

Démontrer que I est vrai avec les préconditions et le pré-traitement.

tant que condition faire

 # Au début d'une itération, I et *condition* sont vrais.
 corps de la boucle

 # **Démontrer** que I est toujours vrai en fin d'itération.

fin tq

Alors I est vrai et *condition* est faux.

Post-traitement

Démontrer que I , la *condition* fausse et le post-traitement valident les post-conditions.

vlined

5. Poursuivre le travail

- Dans cette version, au final, le nombre de cartes distribuées à chaque joueur et le nombre restant de cartes sont exactement le quotient et le reste dans la division euclidienne de la taille du paquet de départ par le nombre de joueur. On peut demander aux élèves d'ajouter cette proposition aux post-conditions et de la démontrer (au moins de trouver un invariant pour le démontrer).
- Assez rapidement après cette activité et les exercices qui doivent suivre pour asseoir la notion, il semble important de travailler la terminaison en commençant par finir la correction de l'algorithme présenté ici.