Laboratorio 4 per Fondamenti di Automatica – Ingegneria Fisica

Tracce di possibili soluzioni

Esercizio 1: Diagrammi di Bode e teorema della risposta in frequenza

a) Per tracciare il diagramma di Bode reale è sufficiente utilizzare la funzione Matlab *bode* (help bode); la chiamata base richiede soltanto la definizione del sistema dinamico di cui si vuole tracciare il diagramma.
Per prima cosa definiamo il sistema

```
% Definizione del sistema
num = 10;
den = poly([-1 -1 -1]);
sistema = tf(num,den)
```

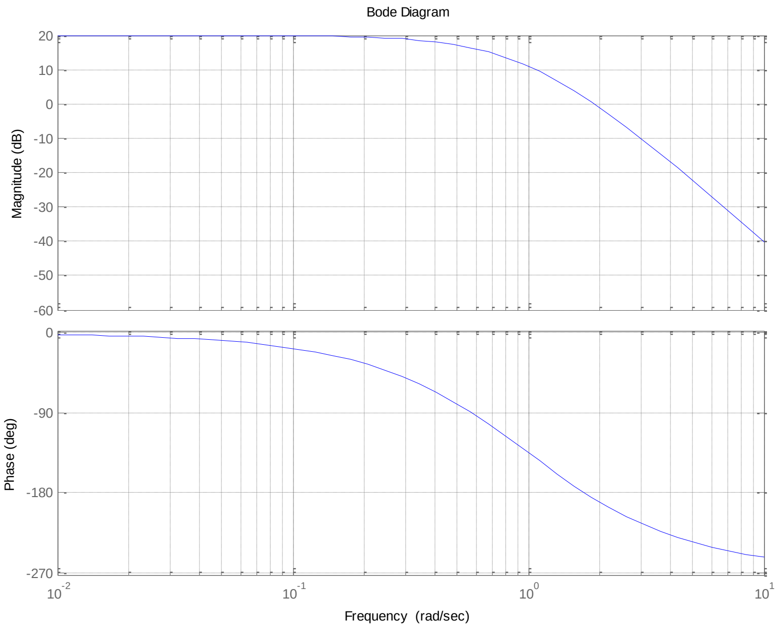
Da notare come per definire il denominatore sia stata usata la funzione *poly*: questa funzione restituisce in un vettore i coefficienti ordinati per potenze decrescenti che definiscono il polinomio e le cui radici sono quelle fornite in ingresso alla funzione. In questo caso è immediato riconoscere come le radici del denominatore siano 3, tutte pari a -1. Un metodo alternativo prevede l'utilizzo della funzione *conv* che restituisce i coefficienti del polinomio prodotto di due polinomi in ingresso. Nel caso in esame vi sono 3 polinomi da moltiplicare, perciò sarà opportuno usare la funzione 2 volte come segue:

```
den = conv(conv([1 1],[1 1]),[1 1])
```

A questo punto è possibile utilizzare la funzione bode per il tracciamento del relativo diagramma.

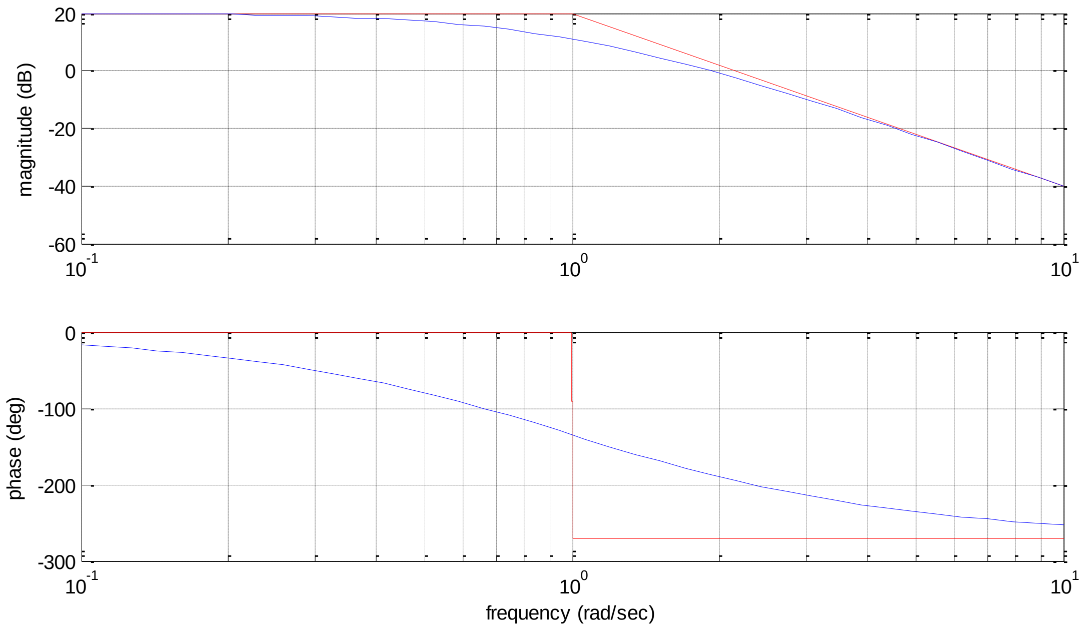
```
% Visualizzazione diagrammi con la funzione bode
figure;
wmin=0.1; wmax=10; bode(sistema,{wmin,wmax})
grid on
```

dove il secondo ingresso corrisponde alle pulsazioni in rad/s in cui si vuole visualizzare il grafico.
Il risultato è riportato in figura. Notare il guadagno pari a 20db (10!) e le frequenze di visualizzazione del grafico,come richieste nella chiamata.



Sovrapponiamo ora il diagramma approssimato con il comando bodeasin (NOTA: il comando non fa parte della comune libreria Control System Toolbox ma è stato sviluppato in modo autonomo; help bodeasin per il suo uso)

```
% Sovrapposizione diagrammi approssimati con la funzione bodeasin
>> [omega,bms,omegasf,bfsf]=bodeasin(num,den,wmin,wmax);
>> [ampiezza,fase,puls]=bode(sistema,{wmin,wmax});
>> figure;
>> subplot(2,1,1); semilogx(omega,bms,'r');
>> subplot(2,1,2); semilogx(omegasf,bfsf,'r');
>> subplot(2,1,1); hold on; semilogx(puls,20*log10(ampiezza(1,:)')); grid on;
>> subplot(2,1,2); hold on; semilogx(puls,fase(1,:)'); grid on;
```



L'errore massimo si trova in corrispondenza della pulsazione 1 (il sistema ha tre poli in −1); dato che in ogni singolarità l'errore è pari a circa 3 dB, l'errore massimo è pari a circa 3*3 dB = 9 dB (in grandezza naturale 9 dB sono pari a $10^{9/20}$ = 2.8184).
Numericamente (in dB):

```
>> [ampiezza1,fase1]=bode(sistema,1);
>> erroremax=20-20*log10(ampiezza1)
erroremax =
    9.0309
```

b) Per il teorema della risposta in frequenza, l'uscita a transitorio esaurito del sistema è pari a:

$$y(t) = |G(j\omega)|U\sin(\omega t + arg(G(j\omega)))$$

dove $|G(j\omega)|$è il modulo e $arg(G(j\omega))$ è la fase della funzione di trasferimento, valutata in $s = j\omega$ (ω = pulsazione e U = ampiezza della sinusoide in ingresso)
Pertanto per rispondere al quesito è necessario valutare la funzione di trasferimento in $s = j\omega$, e calcolarne modulo e fase. Per fare ciò viene in aiuto ancora il comando bode, che restituisce le grandezze desiderate. Oppure grazie alle funzioni *abs* e *phase* si possono calcolare modulo e fase del numero complesso ricavato sostituendo $s = j\omega$. Da notare che essendo un sistema lineare, vale la sovrapposizione degli effetti e dunque si calcoleranno separatamente le risposte all'ingresso sinusoidale a frequenza 0.5 e a frequenza 0 (una costante è un coseno a frequenza 0!): l'uscita totale sarà la somma delle rispettive uscite. Il codice matlab è il seguente:

```
% Calcolo della risposta in frequenza nel punto desiderato
```

```
[G0modulo,G0fase] = bode(sistema,0)              % Per l'ingresso costante
[G05modulo,G05fase] = bode(sistema,0.5)          % Per l'ingresso a 0.5 rad/s

% Controllo con metodo alternativo per omega = 0.5
G05 = 10/(0.5j + 1)^3                      % Valutazione di G(s) in s = j*omega
G05ma = abs(G05)                                    % Calcolo del modulo
G05fa = phase(G05)*180/pi                           % Calcolo della fase
```

Il risultato è il seguente:

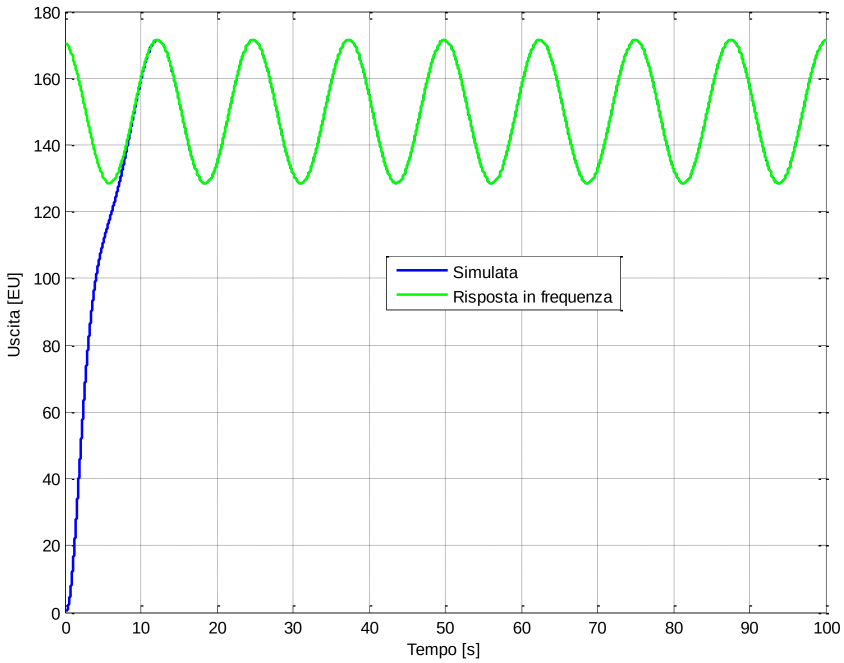
```
G05modulo =                               G05ma =
    7.1554                                7.1554
G05fase =                                 G05fa =
  -79.6952                                -79.6952
```

Ovviamente i risultati sono identici. Concludendo, l'uscita a transitorio esaurito sarà calcolabile grazie al teorema della risposta in frequenza:

```
% Uscita secondo teorema di risposta in frequenza
t = 0:0.001:100;             % Definizione del vettore tempo
y_rf = 15*G0modulo - 3*G05modulo*sin(0.5*t + G05fase*pi/180);   % Uscita

% grafici
u = 15 - 3*sin(0.5*t);        % Definizione ingresso
y_sim = lsim(sistema,u,t);    % Simulazione uscita da condizione iniziale nulla
figure                        % Grafico dei risultati
plot(t,y_sim,t,y_rf,'g','LineWidth',2)
grid on
legend('Simulata','Risposta in frequenza')
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Uscita')
```

Il risultato è la seguente figura:



Come si può notare le due uscite sono equivalenti A REGIME, ovvero quando il transitorio iniziale si è esaurito (tempo di risposta pari a 5).

Esercizio 2: Diagrammi di Bode – analisi sistema del secondo ordine
La funzione di trasferimento del sistema meccanico è data da

$$G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{h}{m}s + \frac{k}{m}}$$

I poli sono in $\frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4mk}}{2m}$ e sono complessi coniugati se $h^2 - 4km < 0$.
Tale condizione è verificata per i valori proposti nel testo dell'esercizio, così che la funzione di trasferimento è del tipo

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

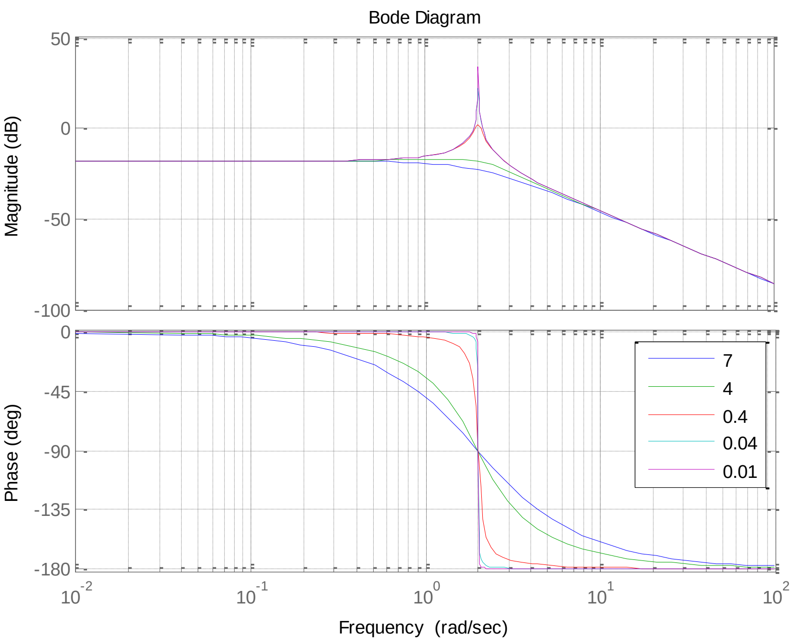
con $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\xi = \frac{h}{2\sqrt{km}}$ e $\mu = \frac{1}{k}$.
Sostituendo i valori per m e k si ha $\omega_n = 2$, $\xi = \frac{h}{8}$, $\mu = \frac{1}{8}$ e

$$G(s) = \frac{1}{2s^2 + hs + 8}$$

Tracciamo ora i diagrammi di Bode per h= $[7; 4; 0.4; 0.04; 0.01]$ che corrispondono a valori di smorzamento pari a $\xi = [0.875; 0.5; 0.05; 0.005; 0.00125]$;

```
% Definizione di sistemi
num = 1;
den1 = [2 7 8];
G1 = tf(num,den1);
den2 = [2 4 8];
G2 = tf(num,den2);
den3 = [2 0.4 8];
G3 = tf(num,den3);
den4 = [2 0.04 8];
G4 = tf(num,den4);
den5 = [2 0.01 8];
G5 = tf(num,den5);

% Diagrammi di Bode
bode(G1,G2,G3,G4,G5)
legend('7','4','0.4','0.04','0.01')
```



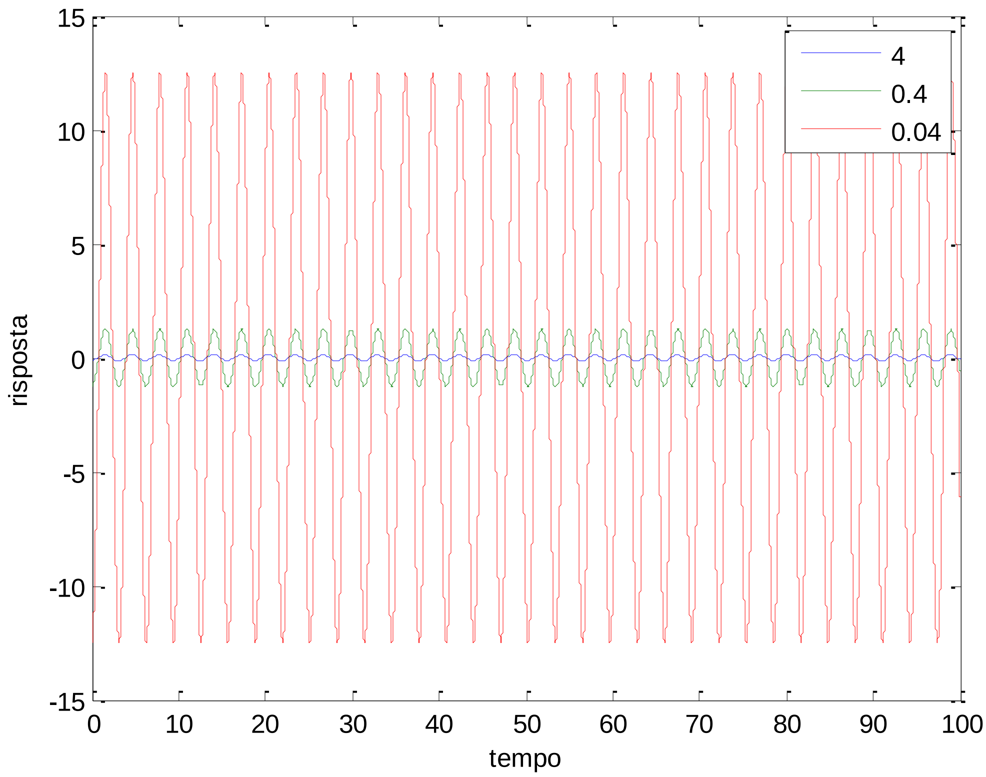
Si può notare come, al diminuire dello smorzamento, cresca l'ampiezza del picco di risonanza e cresca la derivata della fase in corrispondenza della pulsazione di risonanza che è pari ad 2 rad/s.

Per simulare la risposta a ingresso sinusoidale di ampiezza unitaria e pulsazione 2 utilizziamo i seguenti comandi

```
% risposte a ingresso sinusoidale
[G2modulo,G2fase] = bode(G2,2);
[G3modulo,G3fase] = bode(G3,2);
[G4modulo,G4fase] = bode(G4,2);

% Uscita secondo teorema di risposta in frequenza
t = 0:0.001:100;              % Definizione del vettore tempo
y_rf_2 = G2modulo*sin(2*t + G2fase*pi/180);
y_rf_3 = G3modulo*sin(2*t + G3fase*pi/180);
y_rf_4 = G4modulo*sin(2*t + G4fase*pi/180);

figure;
plot(t,y_rf_2,t,y_rf_3,t,y_rf_4);
legend('4','0.4','0.04')
xlabel('tempo'); ylabel('risposta');
```



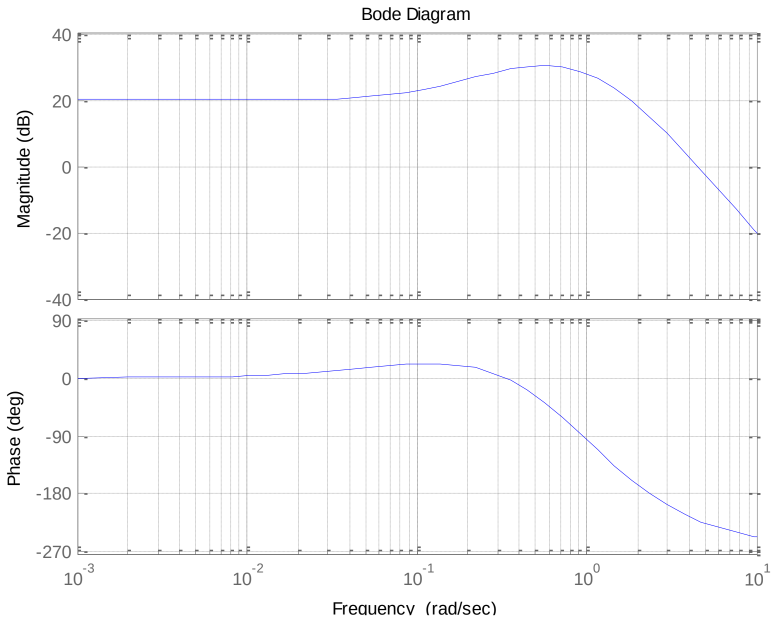
Al diminuire dello smorzamento si nota come le oscillazioni aumentino in ampiezza. Tale comportamento si spiega con la presenza del picco di risonanza nella pulsazione 2.

Esercizio 3: Sistemi di controllo – Analisi di stabilità

a) La funzione d'anello $L = 10\frac{(10s+1)}{(s+1)^4}$ rispetta i criteri per l'applicazione del criterio di Bode per l'analisi di stabilità del sistema di controllo dato (L non ha poli a parte reale positiva e il diagramma di Bode del modulo di $L(s)$ interseca una e una sola volta l'asse a 0 dB).

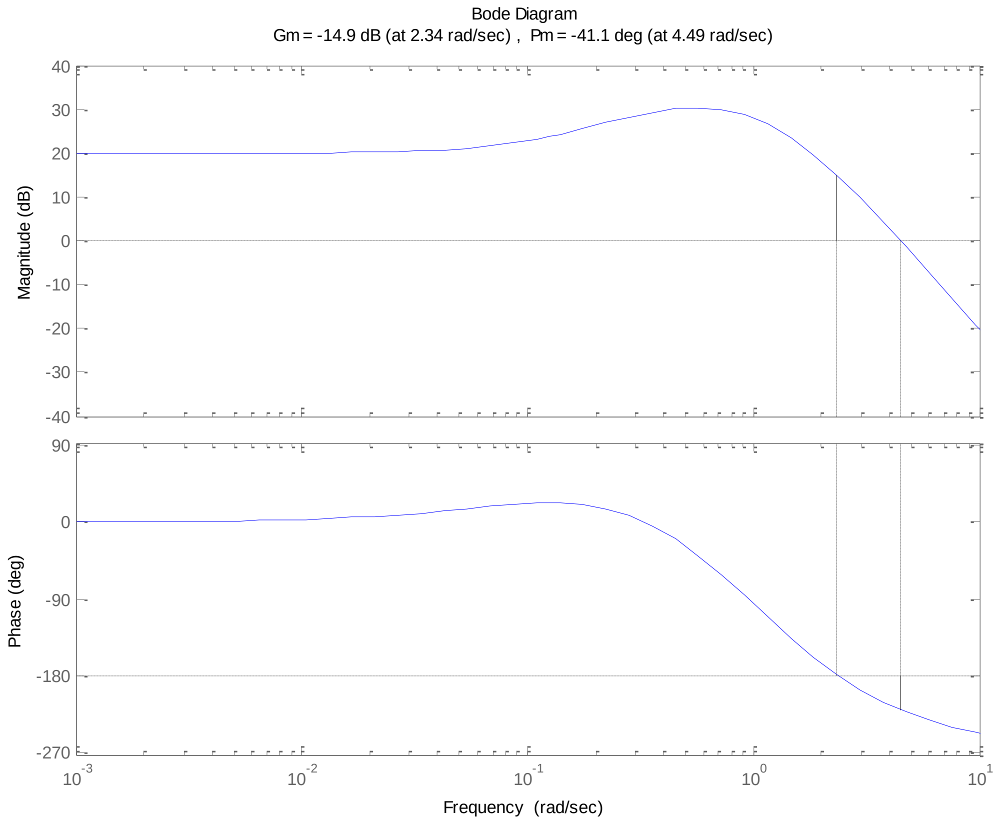
```
% Definizione L
num = 10*[10 1];
den = poly([-1 -1 -1 -1]);
```

```
L = tf(num,den);
bode(L); grid;
```



Grazie al comando *margin* è possibile valutare il margine di fase di $L(s)$ (valore Pm in figura).

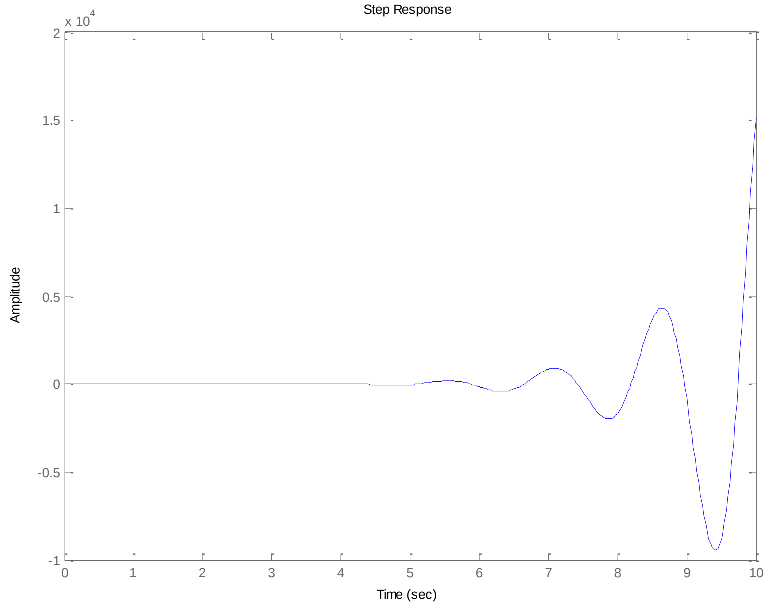
```
figure
margin(L)
```



Pertanto, nonostante il guadagno sia positivo, essendo il margine di fase negativo (Pm = - 41.1), il sistema in anello chiuso è instabile.

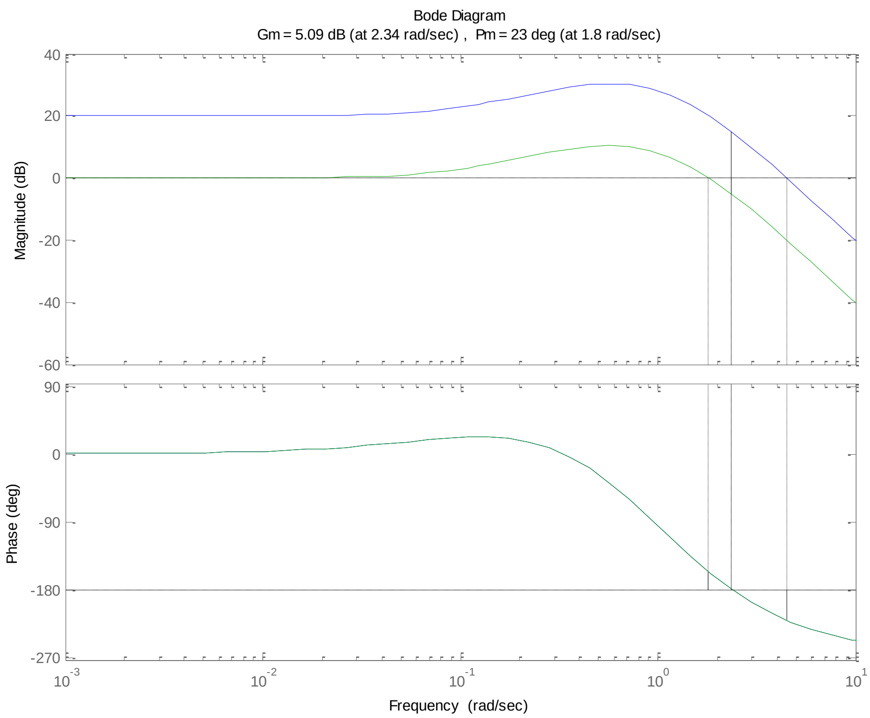
La risposta a gradino conferma l'instabilità del sistema:

```
% Simulazione al gradino del sistema sotto controllo
step(feedback(L,1),10)
```



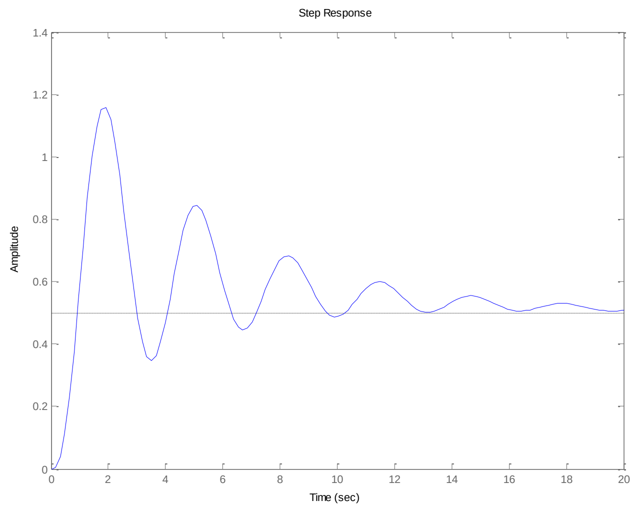
b) Modificare il guadagno di L(s)=$\mu\frac{(10s+1)}{(s+1)^4}$ significa traslare il modulo della $L(s)$ valutata al punto precedente verso l'alto (μ>10) o verso il basso (μ<10). E'intuitivo che, abbassando opportunamente il guadagno, l'attraversamento dell'asse a 0dB possa avvenire in corrispondenza di una pulsazione per cui il margine di fase sia positivo e il sistema risulti dunque stabile. Modificando il guadagno del sistema, ad esempio ponendo $\mu = 1$ si ottiene il diagramma di bode di L in verde

```
num = 1*[10 1];
den = poly([-1 -1 -1 -1]);
L1 = tf(num,den);
figure; margin(L); hold on; margin(L1);
```



Si può notare come l'attraversamento dell'asse a 0dB avvenga a frequenze inferiori e il margine di fase risulta essere positivo. Il sistema sotto controllo è dunque stabile, come mostra la risposta allo scalino:

```
% Simulazione al gradino del sistema sotto controllo con mu=1
figure; step(feedback(L1,1),10)
```



Osservazione: Il sistema risulta stabile, ma il margine di fase ridotto fa sì che le oscillazioni si esauriscano in un tempo elevato.

c) Le considerazioni sono identiche a quelle presentate nel primo esercizio. L'unica accortezza è ricavare le corrette funzioni di trasferimento (relazioni ingresso-uscita) per w e d. In particolare, la funzione di trasferimento tra w e y è la funzione d'anello chiuso:

$$F(s) = \frac{L}{1+L}$$

Mentre la funzione di trasferimento tra d e y è detta funzione di sensitività ed è così definita:

$$S(s) = \frac{1}{1+L}$$

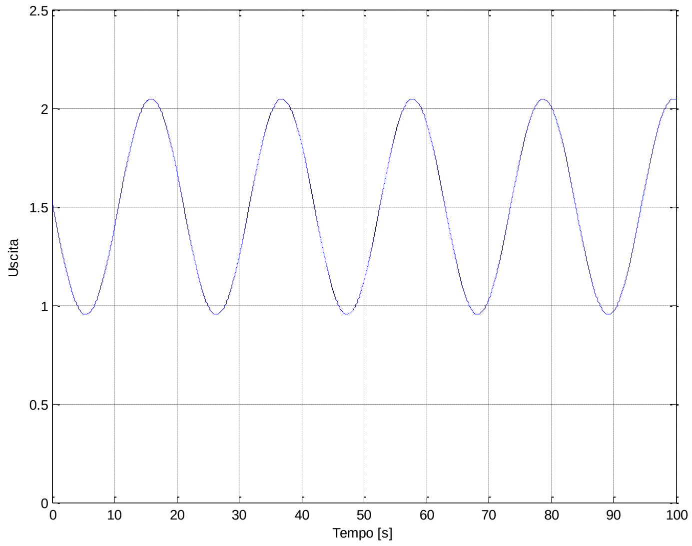
Anche in questo caso vale la sovrapposizione degli effetti. Seguono i comandi matlab per la risoluzione del punto in questione:

```
% Calcolo dell'uscita a fronte di ingresso costante w
[Ywm,Ywf] = bode(L1/(1+L1),0);
t = 0:0.001:100;              % Definizione del vettore tempo
w = 3*ones(size(t));
y_w = Ywm*w;


% Calcolo dell'uscita a fronte di disturbo d a pulsazione 0.3
[Ydm,Ydf] = bode(1/(1+L1),0.3);
y_d = -Ydm*2*sin(0.3*t + Ydf*pi/180);


% Grafico dell'uscita
figure
plot(t,y_w+y_d)
grid on
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Uscita')
```

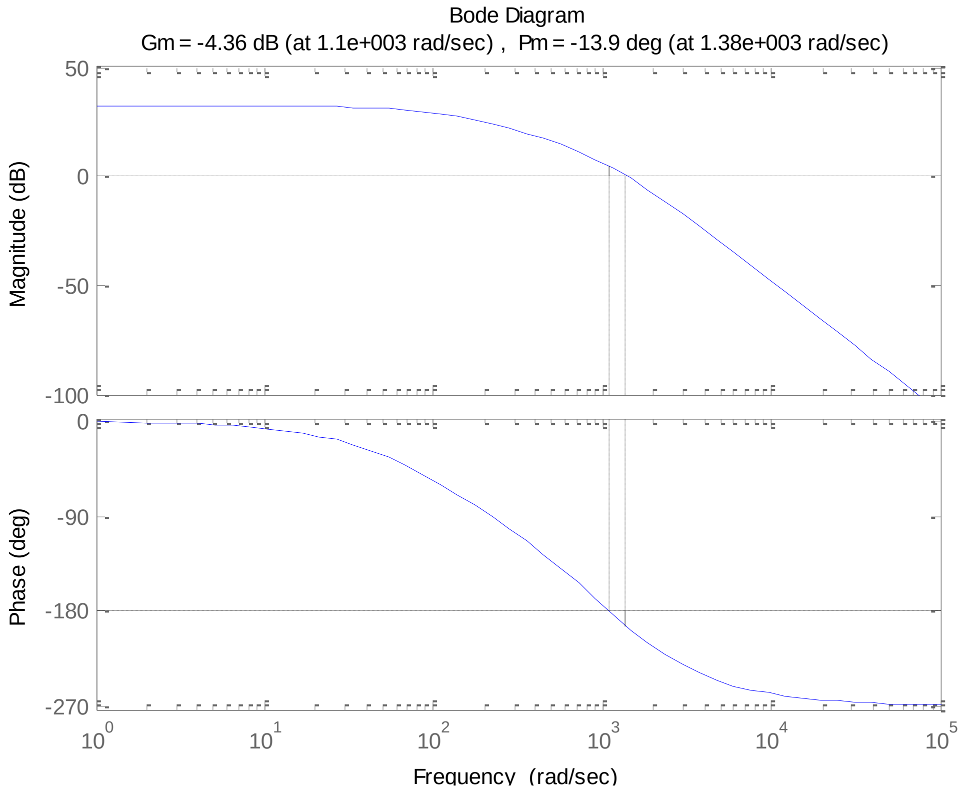
```
axis([0 100 0 2.5])
```



Esercizio 4: Sistemi di controllo –Esempio di progetto di un regolatore

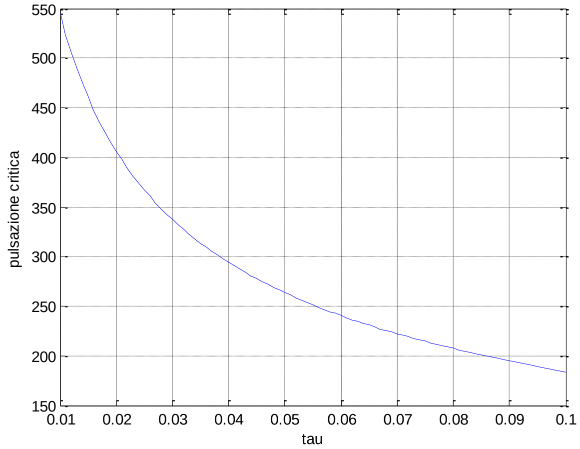
Verifichiamo dapprima che la sola G(s) in anello chiuso genera un sistema instabile (il margine di fase è negativo)

```
% solo G è instabile
num=40;
den=conv([0.01 1],conv([0.001 1],[0.001 1]));
L = tf(num,den);
margin(L)
```



Fissiamo il polo del controllore in modo che la pulsazione critica sia superiore a 300 rad/sec. Metteremo poi lo zero del controllore oltre la pulsazione critica così da non influenzare il diagramma del modulo e in posizione tale da garantire un margine di fase superiore a 20°.

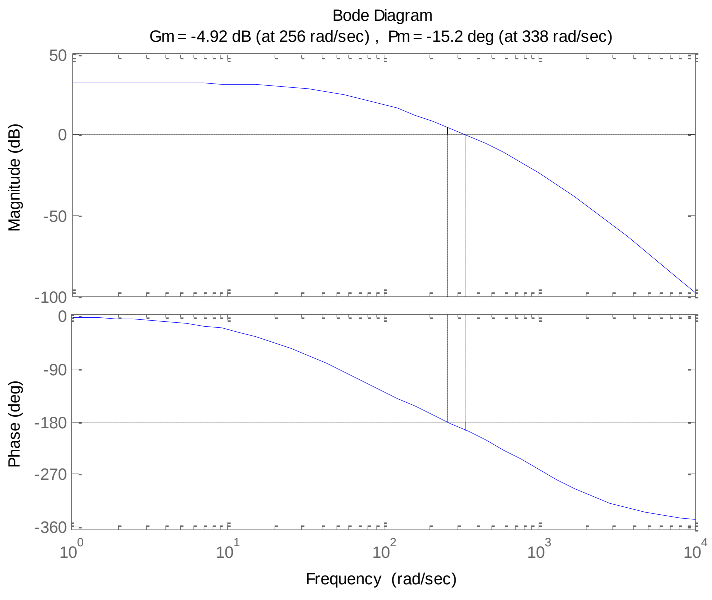
```
%  Scelta del polo
num=40;
tauvett=[]; wcritvett=[];
for tau=0.01:0.001:0.1,
    den=conv([tau 1],conv([0.01 1],conv([0.001 1],[0.001 1])));
    [mod,fase,puls]=bode(num,den);
    [alfa,margfase,beta,wcritica]=margin(mod,fase,puls);
    if wcritica>0,
        tauvett=[tauvett;tau];
        wcritvett=[wcritvett,wcritica];
    end;
end;
plot(tauvett,wcritvett); xlabel('tau'); ylabel('pulsazione critica'); grid;
```



La pulsazione critica è dunque superiore a 300 rad/sec per $\tau < 0.038$.

Scegliamo per esempio $\tau = 0.03$.

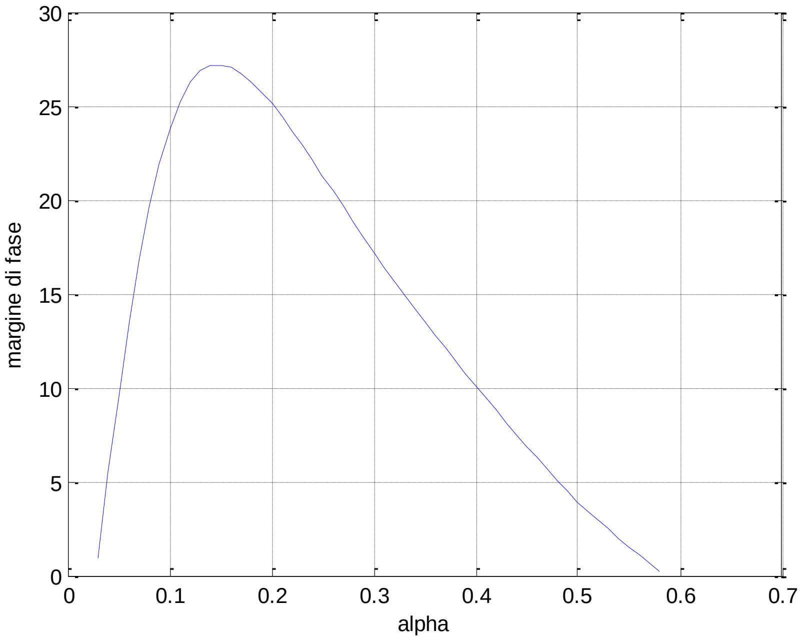
```
% tau=0.03
tau=0.03;
den= conv([tau 1],conv([0.01 1],conv([0.001 1],[0.001 1])));
L = tf(num,den);
margin(L)
```



La pulsazione critica è a posto (338 > 300) ma si ha ancora l'instabilità (margine di fase negativo; Pm = - 15.2).

Posizioniamo quindi lo zero del controllore in modo da soddisfare la specifica richiesta (lo zero deve essere posizionato sufficientemente lontano dalla pulsazione critica in modo da non alterare il diagramma del modulo in prossimità di tale valore → α piccoli).

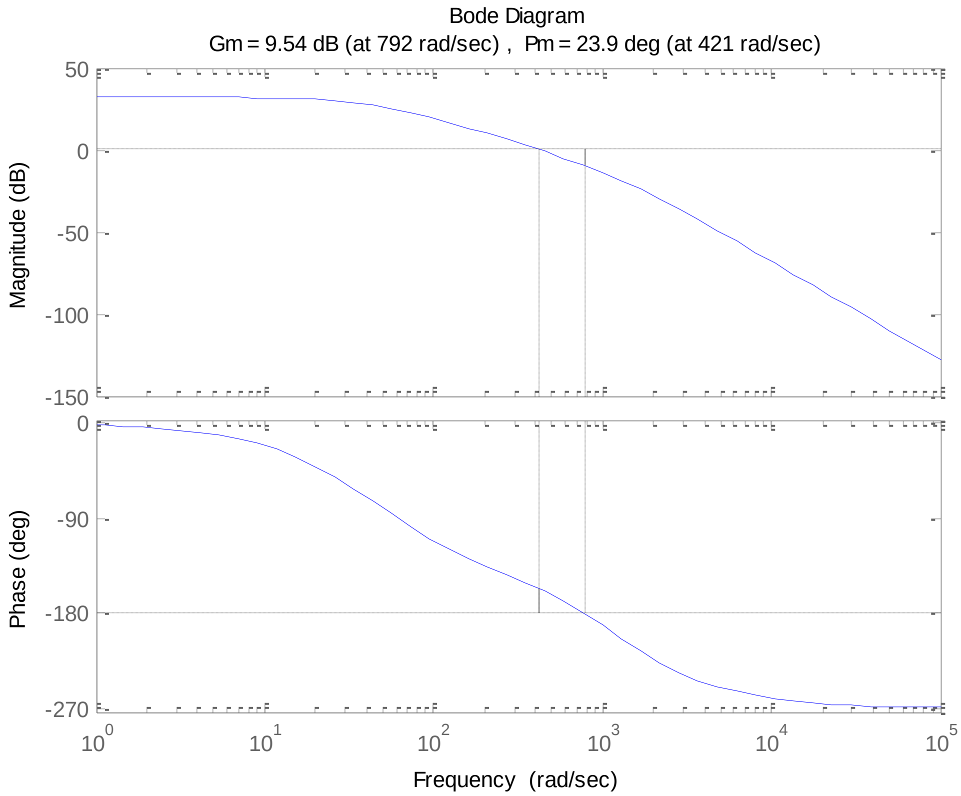
```
%  Scelta dello zero
tau=0.03;
den= conv([tau 1],conv([0.01 1],conv([0.001 1],[0.001 1])));
alphavett=[]; mfvett=[];
for alpha=0.01:0.01:1,
    num=[alpha*tau 1]*40;
    [mod,fase,puls]=bode(num,den);
    [alfa,margfase,beta,wcritica]=margin(mod,fase,puls);
    if margfase>0,
        alphavett=[alphavett;alpha];
        mfvett=[mfvett;margfase];
    end;
end;
plot(alphavett,mfvett); xlabel('alpha'); ylabel('margine di fase'); grid;
```



Il margine di fase è dunque superiore a 20° per 0.08 < α < 0.27. Dovendo scegliere α piccolo, fissiamolo a 0.1.

Verifichiamo ora che porre τ = 0.03 e α = 0.1 soddisfa le specifiche richieste per la sintesi del sistema di controllo.

```
% verifica per tau=0.03 e alfa=0.1
clear all; close all;
tau=0.03;
alpha=0.1;
num=[alpha*tau 1]*40;
den= conv([tau 1],conv([0.01 1],conv([0.001 1],[0.001 1])));
margin(num,den);
```



Pulsazione critica e margine di fase soddisfano le specifiche richieste.