



Guía MCU

Martin Bataille





Cuando nos subimos a un montaña rusa y pasamos por un tramo circular, sentimos una "fuerza" que nos empuja al suelo, la famosa *fuerza centrífuga*. Algunos podrían afirmar que es dicha fuerza la que evita que la Luna caiga a la Tierra y que permite que la Tierra siga su órbita en torno al Sol... Spoiler alert: ¡Esa fuerza no existe! Todo esto y mucho más lo explicaremos al estudiar este nuevo tipo de movimiento, el *Movimiento Circular Uniforme* o *MCU* para los amigos.

¿Qué es el MCU?

Definición 1: Se dice que una partícula describe un movimiento circular uniforme cuando su trayectoria es circular y el módulo de la velocidad (la rapidez) es constante. Sin embargo, la velocidad como vector no es constante pues su sentido y dirección cambian en cada instante.

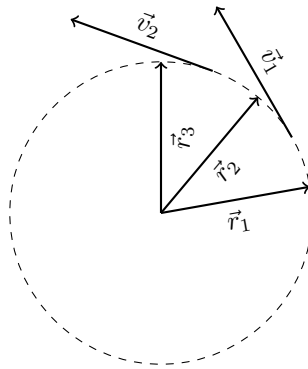


Figura 1: Vectores posición y velocidad de una partícula en MCU.

En la figura anterior, podemos ver la posición de una partícula representada como un vector (\vec{r}) en 3 instantes distintos. Como ya sabemos,

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Aplicando esta definición al caso anterior obtenemos dos vectores velocidad, \vec{v}_1 entre los instantes 1 y 2, y \vec{v}_2 entre los instantes 2 y 3. Podemos ver que el vector velocidad es perpendicular o *tangencial* a la circunferencia, al menos en este caso. Esto siempre es cierto en todo movimiento circular (incluso si no es uniforme), el lector puede convencerse probando con distintos ángulos.

Propiedad 1: En un movimiento circular el vector velocidad es siempre tangencial a la circunferencia que describe la partícula.

Problema. Nuestra amiga Camila está con su hermano menor Daniel en el Fantasilandia y se suben a una montaña rusa que termina en un tramo con forma de U, como en la figura. Justo antes de entrar a este último tramo, Camila ve que Daniel está muerto de miedo y le asegura que solo tendrá que aguantar 2 segundos más. ¿Es cierto lo que le dijo Camila? Asume que Camila y Daniel, representados por el punto en la figura, describen un MCU.

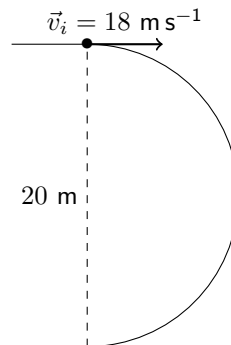


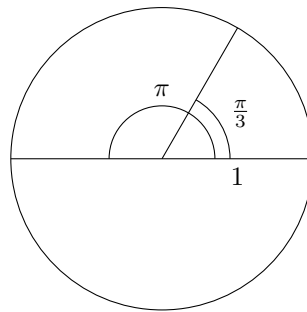
Figura 2: Diagrama del último tramo de la montaña rusa.

¿Cómo se describe un MCU?

Para describir un MCU necesitaremos usar una nueva unidad de ángulo, el radian (rad).

Definición 2: Se dice que un ángulo vale θ radianes cuando abarca un arco de círculo unitario de largo θ .

Para visualizar un radian se puede dibujar un círculo de radio 1, también llamado círculo unitario. Un ángulo de 360° abarca toda la circunferencia por lo tanto, el arco abarcado vale 2π ya que el radio del círculo es uno. Entonces, por definición de radian, un ángulo de 360° equivale a un ángulo de 2π rad, así un ángulo de 180° equivale a π rad. Digamos que queremos encontrar cuanto vale un ángulo de 60° en radianes.



Basta con recordar que $60^\circ = \frac{180^\circ}{3} = \frac{\pi}{3}$ rad. Es recomendable que el lector intente convertir los ángulos típicos (30° , 45° , 90°) en radianes.



Podemos ahora definir unos cuantos conceptos que nos ayudarán a describir un MCU.

Definición 3: La rapidez angular ω , en radianes por segundo (rad s^{-1}) de acuerdo al *Système International d'Unités* (SI), representa el cambio del ángulo en el tiempo, es decir,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

También es importante saber que existe la velocidad angular como vector, $\vec{\omega}$, el sentido y la dirección de la velocidad angular se determinan con la regla de la mano derecha: la dirección es siempre perpendicular al plano y, si el movimiento es en el sentido antihorario en el plano, el vector sale del plano, y en caso contrario, el vector entra al plano.

Definición 4: El periodo T , en segundos de acuerdo al SI, representa el tiempo que le toma a la partícula en dar una vuelta completa a la circunferencia. Si una partícula describe un MCU a una velocidad de $\omega \text{ rad s}^{-1}$. Sabemos que en recorrer un ángulo de $2\pi \text{ rad}$ se demora T segundos, es decir, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En otras palabras,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Es importante notar que si se demora T segundos en recorrer una distancia de $2\pi r$, entonces

$$|\vec{v}| = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot r = \omega r$$

De aquí podemos deducir una de las propiedades más importantes del MCU,

Propiedad 2: La velocidad tangencial y la velocidad angular están íntimamente relacionadas:

$$|\vec{v}| = \omega r$$

Definición 5: La frecuencia f , en hertz ($\text{Hz} = \text{s}^{-1}$) de acuerdo al SI, representa la cantidad de vueltas que da la partícula en un segundo. Si una partícula se demora T segundos en hacer una vuelta, entonces en un segundo hace $\frac{1}{T}$ vueltas, o sea,

$$f = \frac{1}{T}$$

Ejemplo. Si una partícula describe un MCU con una velocidad angular de $4\pi \text{ rad s}^{-1}$ entonces da dos vueltas en un segundo. El periodo es entonces $T = \frac{2\pi}{4\pi} = 0,5 \text{ s}$ y la frecuencia es $f = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hz}$

Volviendo al problema de Camila y Daniel sabemos que $\omega = \frac{|\vec{v}|}{r} = 1,8 \text{ rad s}^{-1}$. Por lo tanto, en recorrer medio círculo o $\pi \text{ rad}$ Camila se demora $t = \frac{\pi}{1,8} \approx \frac{3,14}{1,8} < 2$. ¡Camila tenía razón!



Momento de acelerar las cosas

En un movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad es constante, por lo tanto no hay aceleración. Sin embargo, en un movimiento circular uniforme, a pesar de que la rapidez es constante, existe una aceleración.

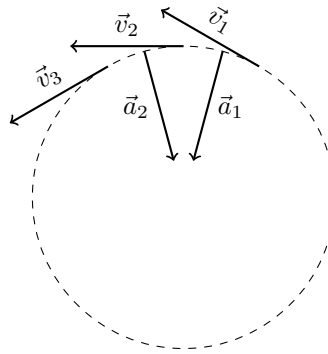


Figura 3: Vectores velocidad y aceleración en un MCU.

En la figura anterior, podemos ver los vectores velocidad en 3 instantes para un MCU, como ya sabemos,

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Aplicando esta definición obtenemos dos vectores aceleración que, curiosamente, apuntan hacia el centro de círculo. Si la aceleración no fuera perpendicular a la velocidad, entonces la magnitud de la velocidad cambiaría, por lo tanto, no sería un MCU. Es por esto que la aceleración es *siempre* perpendicular a la velocidad y apunta hacia el centro de la circunferencia, uno habla entonces de aceleración centrípeta. Además, sabemos que,

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{\omega} \times \vec{r})}{\Delta t} = \vec{\omega} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

En particular como el vector velocidad angular (que sale del plano de movimiento) es perpendicular al vector velocidad,

$$|\vec{a}| = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v = \omega(\omega r) = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Propiedad 3: En todo MCU existe una aceleración hacia el centro de la circunferencia descrita por la partícula, se le llama aceleración centrípeta, se escribe a_c y su magnitud está dada por,

$$|\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}|^2}{r} = \omega^2 r$$

Correas de Transmisión

Una simple aplicación de un MCU que aparece en nuestra vida cotidiana son las correas de transmisión. Las bicicletas, por ejemplo, funcionan con este sistema que permite transmitir el movimiento del pedal a la rueda trasera, como lo muestra la figura.

El empujar el pedal con el pie, se mueve el plato del pedal, representado como un círculo de radio r_2 , al moverse el plato del pedal, se mueve el piñón de la rueda trasera, representado como un círculo de radio r_1 , que provoca que la rueda trasera se mueva. Cuando el plato del pedal da una vuelta completa (2π rad), la cadena de la bicicleta se mueve $2\pi r_2$

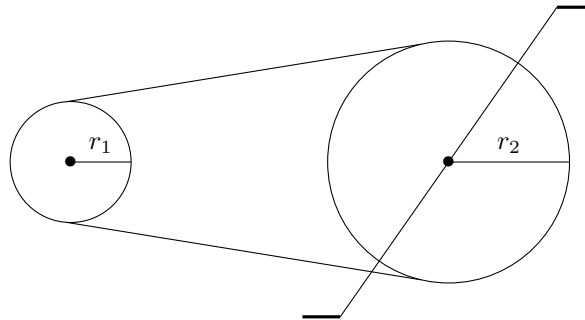


Figura 4: Diagrama simplificado del funcionamiento de una bicicleta.

provocando que el piñón de la rueda trasera se mueva un ángulo de $2\pi \frac{r_2}{r_1}$ rad. Si r_2 es mucho mayor que r_1 , digamos que r_2 es 5 veces más grande que r_1 , entonces cuando el plato del pedal da una vuelta completa... ¡La rueda trasera da 5 vueltas!

Propiedad 4: Sean \vec{v}_1, \vec{v}_2 y ω_1, ω_2 las velocidades tangenciales y angulares, respectivamente, de dos ruedas de radios r_1, r_2 respectivamente, unidas por una correa de transmisión, se tiene que

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|, \quad \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad \frac{\omega_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{r_1}$$

Ejemplo. Volviendo al funcionamiento de la bicicleta, al aplicar la propiedad anterior se tiene que la velocidad angular del piñón de la rueda trasera está dada por

$$\frac{\omega_{\text{piñon}}}{r_{\text{pedal}}} = \frac{\omega_{\text{pedal}}}{r_{\text{piñon}}}, \quad \omega_{\text{piñon}} = \omega_{\text{pedal}} \frac{r_{\text{pedal}}}{r_{\text{piñon}}}$$

De manera que si el radio del pedal es 5 veces el del piñón, entonces la velocidad angular del piñón es 5 veces la de la rueda y como el piñón está pegado a la rueda trasera, la velocidad angular del piñón es la misma que la de la rueda, por lo tanto, la velocidad angular de la rueda es 5 veces la del pedal.

Problema. Nuestro amigo Daniel luego de salir del Fantasilandia, se propuso hacerle una carrera a su hermana, Camila. Claro que como Camila es más grande y rápida que Daniel, él agarró su bici y partió a toda velocidad, pedaleando a una velocidad angular $\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$, mientras que Camila salió detrás de él corriendo a toda velocidad. ¿Quién ganará la carrera? Asuma que Camila puede correr uniformemente a 15 km h^{-1} y que la bici de Daniel es tal que el radio del plato de los pedales es 12 cm, el radio del piñón es 6 cm y que el radio de la rueda de la bici es de 30 cm.

Ejercicios

1. Un ciclista se mueve en una pista circular de radio 50 metros con rapidez lineal constante de 20 m s^{-1} . ¿Cuál es el valor de su rapidez angular?

- A) $\frac{10}{\pi} \text{ rad s}^{-1}$
- B) $\frac{10}{25} \text{ rad s}^{-1}$
- C) $\frac{\pi}{10} \text{ rad s}^{-1}$
- D) $\frac{25}{10} \text{ rad s}^{-1}$
- E) $2\pi \text{ rad s}^{-1}$



2. Un disco gira horizontalmente con movimiento circunferencial uniforme realizando 15 vueltas en 1 minuto. Respecto de un punto situado sobre el disco a 10 cm del centro de giro es posible afirmar que sus rapidez angular y lineal, medidas respectivamente en rad s^{-1} y m s^{-1} son:
- A) 15π $\frac{15\pi}{60}$
B) 60π $\frac{60\pi}{15}$
C) $\frac{30\pi}{60}$ $\frac{3\pi}{60}$
D) 45π $\frac{4,5\pi}{60}$
E) $\frac{20\pi}{60}$ $\frac{2\pi}{60}$
3. Un móvil se mueve con MCU entonces ¿cuál de las siguientes magnitudes es constante?
- A) Velocidad tangencial
B) Aceleración centrípeta
C) Momentum lineal
D) Velocidad angular
E) Impulso
4. Una piedra atada a una cuerda de 4 metros, gira realizando un MCU de frecuencia $\frac{5}{\pi}$ Hz. De acuerdo a esta información, la aceleración centrípeta de la piedra, medida en m s^{-2} es:
- A) $10\pi^2$
B) 400
C) 10
D) $400\pi^2$
E) $\frac{\pi^2}{2}$
5. Un neumático de auto, de radio 0,5 m, rueda con velocidad lineal de 40 m s^{-1} . ¿Cuál es la frecuencia de giro en Hz de dicho neumático?
- A) $\frac{\pi}{40}$
B) 2π
C) $\frac{\pi}{20}$
D) $\frac{40}{\pi}$
E) $\frac{80}{\pi}$

Problemas

1. Se está construyendo una nueva montaña rusa en Fantasilandia y hay una sección de la montaña rusa que se desea que sea en forma de *loop*, ver figura siguiente. El equipo de diseño de montañas rusas de Fantasilandia quiere que la aceleración que siente el pasajero en el *loop* sea $4g$ (ignorando la aceleración debido a la fuerza de gravedad) y que el carro tome 2,5 s en recorrer el *loop*. Tu trabajo como experto en el tema es determinar la velocidad inicial del carro y el radio del *loop*.

Nota: Puedes considerar que la rapidez del carro se mantiene constante en todo el *loop*.

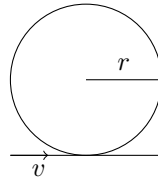


Figura 5: Esquema del loop

2. En *El juego de Ender*, una de las obras más importantes de ciencia ficción, Ender, el protagonista se encuentra en una nave espacial que presenta una cámara giratoria, ver imagen siguiente. A medida que recorre la nave, Ender se da cuenta que la cámara giratoria tiene distintos niveles y a medida que sube a niveles más altos siente que su movimiento se hace más difícil y lento. Así deduce que los niveles más altos están más lejos del centro de rotación provocando así que la aceleración centrípeta en los niveles más altos sea mayor. Ender, al subir al último nivel, siente que el movimiento se vuelve muy parecido al de la Tierra, por lo que considera que la aceleración centrípeta es casi igual a g , la aceleración de gravedad. Además, Ender, viendo por la ventana de la nave, determina que la nave da una vuelta completa cada 10 s. Ayuda a Ender a encontrar a qué distancia se encuentra el último nivel de la nave al eje de rotación.



Figura 6: Representación de la nave espacial en *El juego de Ender*