

# Carnet de Bord

R. Seguel, J.P. Soto, P. Cuello et M. Bataille

Avril, Mai et Juin 2016

## Contents

<b>1</b>	<b>Construction du trébuchet</b>	<b>2</b>
1.1	Réunion 1. 27/04 . . . . .	2
1.2	Réunion 2. 28/04 . . . . .	2
1.3	Vacances. . . . .	3
<b>2</b>	<b>Travail sur la simulation.</b>	<b>4</b>
2.1	Deux particules, une corde . . . . .	4
2.2	Particule attachée à un disque . . . . .	5
2.3	Détermination du moment d'inertie . . . . .	8
	2.3.1 Méthode calculatoire . . . . .	8
	2.3.2 Détermination par la simulation . . . . .	8
2.4	Disque attaché au contrepoids . . . . .	11
2.5	Lacher le projectile . . . . .	13

# 1 Construction du trébuchet

## 1.1 Réunion 1. 27/04

### Équations.

On a déterminé l'expression de l'équation horaire:

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \times t + z_0$$

Où  $v_0$  est la vitesse initiale,  $z_0$  est la hauteur initiale ( $h$ ) et  $\alpha$  est l'angle du lancer de la balle.

D'après cette expression, on a déduit l'équation de la hauteur en fonction de la distance horizontale\*\*:

$$t = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} y^2 + \tan \alpha \times y + h$$

### Plans

On a contacté un professeur aux E.U., Mr Lance, et ils nous a envoyé les plans de son trébuchet (MURLIN).

Problème: Mr. Lance nous a dit qu'il faut réguler la longueur du bras et de la corde puisqu'ils sont pensés pour un trébuchet de 3m de hauteur et pour un projectile 4 fois plus léger.

Potentielles solutions:

1. On peut faire un prototype pour ensuite réaliser des expériences et on déduit les longueurs du bras et de la corde optimales pour le trébuchet à échelle réelle (2m). Mais, on prend tu temps et de ressources sur le prototype.
2. On peut faire une simulation, mais elle nécessite des outils mathématiques complexes. Mais, il faut comprendre ces outils mathématiques et ensuite les implementer, ce qui prend tu temps, mais pas de ressources (monétaires).
3. On fait directement le trébuchet à échelle réelle et on régule directement les longueurs du bras et de la corde sur ce trébuchet.

## 1.2 Réunion 2. 28/04

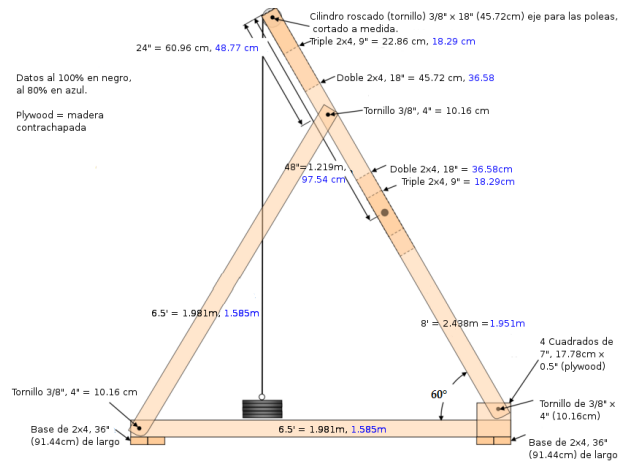
**Plans** On a calculé la plupart des mesures pour un raccourcissement de 67% comme Mr Lance nous le a indiqué.

Mais, lors de faire plusieurs calculs sur la hauteur avec un angle du lancer de  $\alpha = 71^\circ$ , on remarque qu'on peut faire un raccourcissement de 76%. C'est, malgré tout, une différence de 10% qui pourrait avoir un grand impact sur la distance parcourue par la balle. Il faut donc faire une meilleure estimation pour le taux de raccourcissement trébuchet. parcourue par la balle. D'ailleurs, si notre estimation de l'angle du lancer est erronée, et que l'angle vaut  $\alpha = 45^\circ$ , la hauteur, avec ce raccourcissement, serait de 1.68m alors qu'elle devrait être le plus proche de 2m possible.

En regardant la simulation faite par Mr. Lance, on observe que l'angle du lancer est de  $60^\circ$ . D'où le taux de raccourcissement serait de 80%.

### 1.3 Vacances.

Finalmente, on a décidé de faire un raccourcissement de 80% puisqu'il faudra raccourcir le bras et la corde de quelques centimètres du au poids du projectile. Les mesures calculées sont affichées sur la figure ci-dessous.

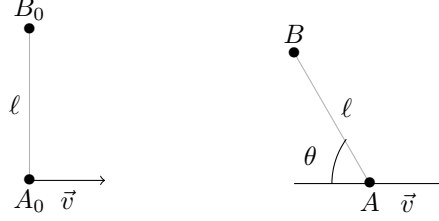


## 2 Travail sur la simulation.

Pour pouvoir étudier plus facilement les mécaniques du trébuchet, on commencera par diviser le problème en plusieurs parties, plus simples.

### 2.1 Deux particules, une corde

D'abord, on étudiera le mouvement d'une particule  $B$  attachée à une autre particule  $A$  par une corde de longueur  $\ell$  lorsque la particule  $A$  a une certaine vitesse  $\vec{v}$ . La configuration initiale est celle de la première figure.



Dans un premier temps on étudiera cette situation en prenant  $\vec{v}$  constant.

On utilisera des coordonnées cartésiennes telles que  $A_0 = (0;0)$  et  $B_0 = (0;2)$ . On a:

$$\begin{aligned} y_A &= 0 \\ x_B &= x_A - \ell \cos \theta \\ y_B &= \ell \sin \theta \end{aligned}$$

On détermine l'expression de l'énergie cinétique,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_A(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2}m_B(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) \\ &= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B(\dot{x}_A + \dot{\theta}\ell \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}m_B(\dot{\theta}\ell \cos \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \\ &= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

On détermine l'expression de l'énergie potentielle,

$$\begin{aligned} V &= m_B g y_B \\ &= m_B g \ell \sin \theta \end{aligned}$$

On en déduit le lagrangien,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_a^2 + m_B\dot{x}_a\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 - m_B g \ell \sin \theta \end{aligned}$$

D'où on déduit,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= m_B \dot{x}_A \ell \dot{\theta} \cos \theta - m_B g \ell \cos \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= m_B \ell^2 \dot{\theta} + m_B \dot{x}_A \ell \sin \theta \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m_B \ell^2 \ddot{\theta} + m_B \dot{x}_A \ell \dot{\theta} \cos \theta\end{aligned}$$

Or on sait que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) \\ m_B \dot{x}_A \ell \dot{\theta} \cos \theta - m_B g \ell \cos \theta &= m_B \ell^2 \ddot{\theta} + m_B \dot{x}_A \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{\ell} \cos \theta\end{aligned}$$

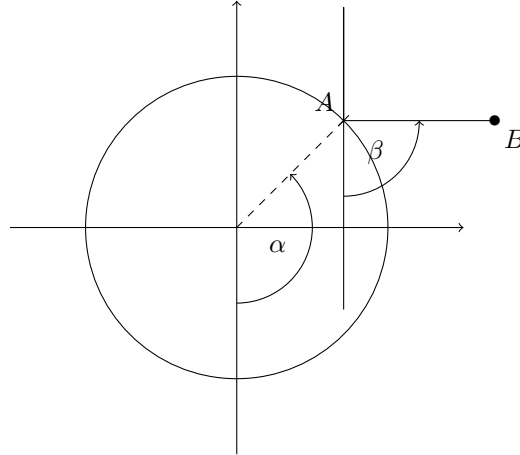
Pour les conditions initiales on a  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  d'où,

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_0 &= -\frac{g}{\ell} \cos \theta_0 \\ &= -\frac{g}{\ell} \cos \frac{\pi}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Mais, si  $\dot{\theta}_0 = 0$ , alors la vitesse angulaire ne changera pas (car  $\ddot{\theta}_0 = 0$ ) et donc, la particule  $B$  ne se déplacera pas par rapport à la particule  $A$ . On doit donc changer la configuration initiale, soit  $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$  (d'où  $\ddot{\theta}_0 \neq 0$ ), soit  $\dot{\theta}_0 \neq 0$ .

## 2.2 Particule attachée à un disque

Maintenant, on étudiera le mouvement d'une particule lorsqu'elle est attachée à un disque par une corde. La situation est celle de la figure ci-dessous. Pour conditions initiales, on prendra  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$  et  $\beta = \frac{1}{2}\pi$ . Pour les valeurs de  $\ell_A$  et  $\ell_B$  on prendra celles de la catapulte qu'on a construit.



On notera  $\ell_A$  le rayon du disque,  $\ell_B$  la longueur de la corde et  $m_B$  la masse de la particule  $B$ .

On détermine les coordonnées de la particule  $B$ :

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + \ell_B \sin \beta \\ &= \ell_A \sin \alpha + \ell_B \sin \beta \\ y_B &= y_A - \ell_B \cos \beta \\ &= -\ell_A \cos \alpha - \ell_B \cos \beta\end{aligned}$$

D'où on déduit la vitesse de  $B$ , c'est à dire, la dérivée de sa position par rapport au temps:

$$v_B(x) = \dot{x} = \ell_A \dot{\alpha} \cos \alpha + \ell_B \dot{\beta} \cos \beta \quad (1)$$

$$v_B(y) = \dot{y} = \ell_A \dot{\alpha} \sin \alpha + \ell_B \dot{\beta} \sin \beta \quad (2)$$

On utilisera l'équation de Lagrange. Pour ce faire, on calculera l'expression de l'énergie cinétique  $T^1$  et l'énergie potentielle  $V$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m_B \left( \ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2 \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 \\ V &= m_B g y_B \\ &= -m_B g (\ell_A \cos \alpha + \ell_B \cos \beta) \\ \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_B \left( \ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2 \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + m_B g (\ell_A \cos \alpha + \ell_B \cos \beta) \end{aligned}$$

On dérive le lagrangien pour chaque degré de liberté,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} &= m_B \ell_A^2 \dot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + I \dot{\alpha} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I \ddot{\alpha} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} &= m_B \ell_B^2 \dot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} &= -m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_A \sin \alpha \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} &= m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_B \sin \beta \end{aligned}$$

On en déduit les équations de Lagrange,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) \\ -m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_A \sin \alpha &= m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I \ddot{\alpha} \\ -m_B g \ell_A \sin \alpha &= (I + m_B \ell_A^2) \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \\ \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ddot{\alpha} + \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) &= -g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) \\ m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_B \sin \beta &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \\ -m_B g \ell_B \sin \beta &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) \\ \ell_B^2 \ddot{\beta} + \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) &= \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) - g \ell_B \sin \beta \end{aligned} \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Si on ne prend pas l'énergie cinétique rotationnelle du disque, au moment de déterminer les équations différentielles, on divise par  $\cos(\alpha - \beta)$  ce qui provoque des problèmes lorsque  $\alpha \approx \beta$  et, si on fait une simulation avec un logiciel, on n'obtient aucun résultat cohérent

Pour l'implémentation de la simulation, il faut créer une fonction telle que

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

On a ici,

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix}$$

Or, on connaît déjà l'expression de  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\beta}$  en fonction de  $x$ . Il faut donc déterminer l'expression de  $\ddot{\alpha}$  et  $\ddot{\beta}$  en fonction de  $x$ . D'après (3) et (4),

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec,} \quad \begin{aligned} A &= \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 & B &= \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & E &= -g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \\ C &= \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & D &= \ell_B^2 & F &= \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) - g \ell_B \sin \beta \end{aligned}$$

On calcule le déterminant  $\Delta$ ,

$$\begin{aligned} \Delta &= AD - BC \\ &= \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ell_B^2 - \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \times \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \\ &= \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 - \ell_A^2 \cos^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2 \\ &= \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \sin^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2 \end{aligned}$$

Or,  $\Delta > 0$ , la matrice est inversible, d'où on en déduit la solution,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \quad (5)$$

À partir de cette équation, on peut implémenter facilement un algorithme pour la résoudre numériquement. Cf annexe sur l'explication de la simulation.

On obtient des résultats intéressants:

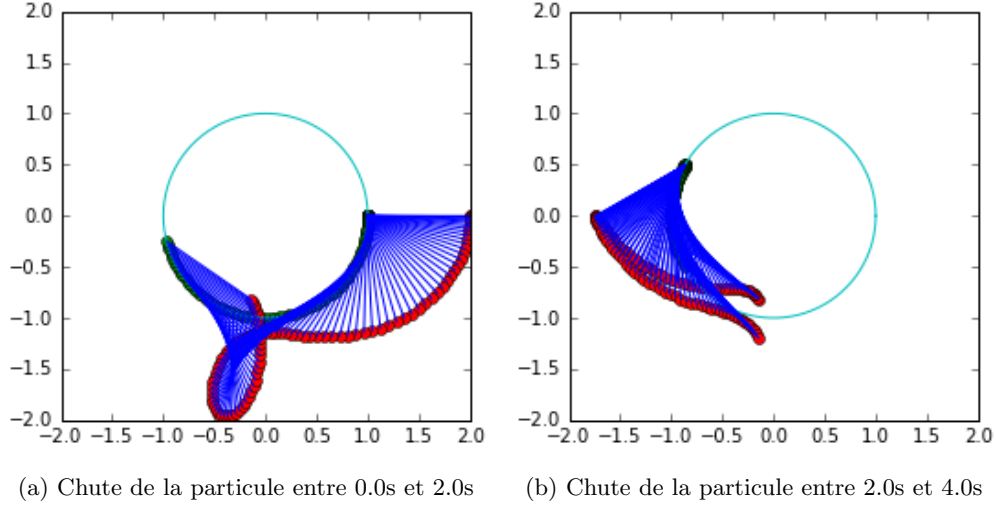


Fig. 1: Simulation de la chute de la particule entre 0.0s et 4.0s

## 2.3 Détermination du moment d'inertie

Un premier problème apparaît dans cette simulation, la valeur du moment d'inertie  $I$ . Dans notre catapulte, on a un objet de forme irrégulière qui tourne dans un axe, il est donc important de déterminer le moment d'inertie de cet objet afin d'obtenir une simulation plus précise. Dans cette section on abordera donc deux méthodes pour déterminer ou calculer le moment d'inertie de cet objet.

### 2.3.1 Méthode calculatoire

—

### 2.3.2 Détermination par la simulation

On peut également déterminer le moment d'inertie en utilisant nos calculs précédents dans le système de la particule attachée au disque, sans contrepoids. Prenons  $\ell_B = 0$ , dans ce cas, l'équation (4) disparaît et l'équation (3) devient,

$$\left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ddot{\alpha} + g\ell_A \sin \alpha = 0 \quad (6)$$

Sachant que la solution analytique de ce type d'équation différentielle est assez complexe, on peut soit faire une approximation:  $\sin \alpha \approx \alpha$  pour des petites valeurs de  $\alpha$  et, dans ce cas, la solution analytique sera beaucoup plus simple, soit on s'intéresse plutôt à la solution numérique.

**Solution analytique approximée** On prendra des valeurs de  $\alpha$  petites ( $\alpha \leq 25^\circ$ ).

D'où,

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g\ell_A}{\frac{I}{m_B} + \ell_A^2} \alpha$$

On a donc une équation du type

$$\ddot{\alpha} = -K^2 \alpha$$

où

$$K = \sqrt{\frac{g\ell_A}{\frac{I}{m_B} + \ell_A^2}}$$



D'où on déduit l'expression de  $\alpha$ ,

$$\alpha(t) = a \cos(Kt) + b \sin(Kt)$$

Où  $a$  et  $b$  sont deux réels qu'on détermine par les conditions initiales.

D'après cette expression, on peut déterminer la période d'oscillation,

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{K} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2 \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right)}{g\ell_A} \\ T^2 g\ell_A &= 4\pi^2 \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \\ m_B \left( \frac{T^2 g\ell_A}{4\pi^2} - \ell_A^2 \right) &= I \end{aligned}$$

**Solution numérique** Pour résoudre l'équation (6) on doit créer une fonction telle que,

$$f(x) = \frac{dx}{dt}$$

Où,

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

D'où, par l'équation (6),

$$f(x) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \frac{-g\ell_A \sin \alpha}{\frac{I}{m_B} + \ell_A^2} \end{pmatrix}$$

En utilisant un algorithme pour résoudre cette équation, on obtient les valeurs de  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$  pour chaque instant,

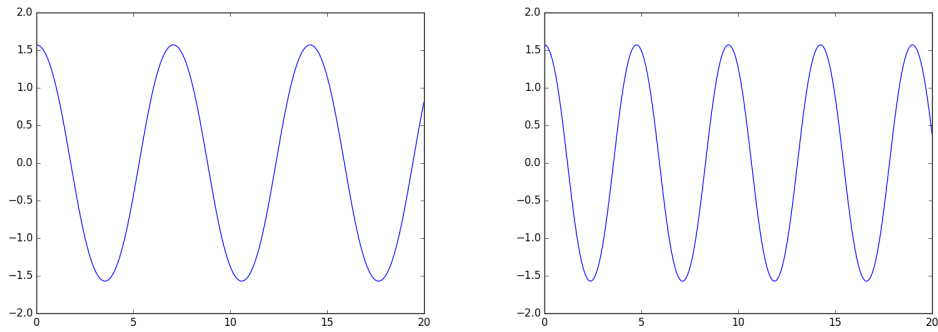


Fig. 2: Valeurs de  $\alpha$  en fonction du temps pour des moments d'inertie différents

On détermine la période d'oscillation  $T$  de l'objet en prenant les valeurs de  $\alpha$  dans le temps et en cherchant deux maxima consécutifs. Ainsi, la période  $T$  correspond à la différence entre les instants pour chaque maxima.

On fait varier le moment d'inertie dans un intervalle arbitraire afin de tracer un graphique de la période en fonction du moment d'inertie,

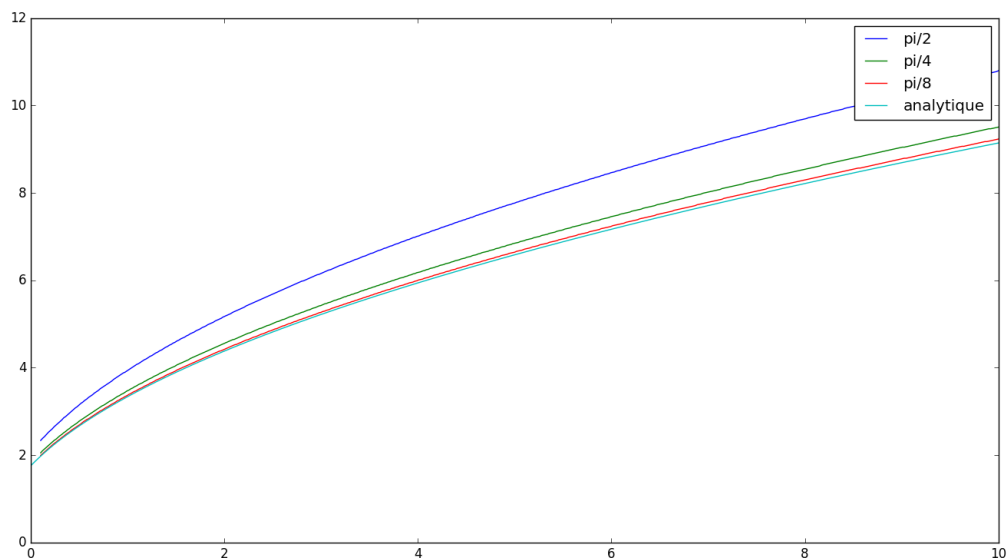


Fig. 3: Période en fonction du moment d'inertie pour différents valeurs de  $\alpha_0$

**Détermination de la période** On a placé un axe sur deux supports et on a fait osciller l'objet autour de cet axe avec un angle initial petit,  $\alpha \approx 20^\circ$ . On a filmé cette expérience pour ensuite reproduire la vidéo image par image et ainsi mesurer la période d'oscillation. On fait osciller l'objet une vingtaine de fois et on obtient

#### Table de valeurs.

On applique la loi de Student...

Enfin, on obtient une valeur de  $T = 1.91 \pm 0.02$  s. D'après la solution analytique (qui est donc approximée), on a  $I_{approx} = 0.068 \text{ kg.m}^2$

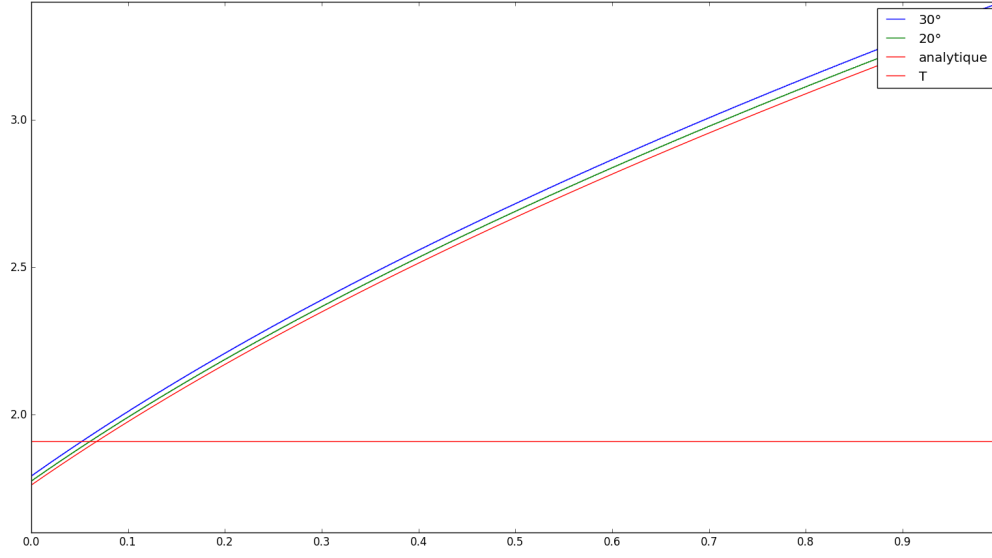
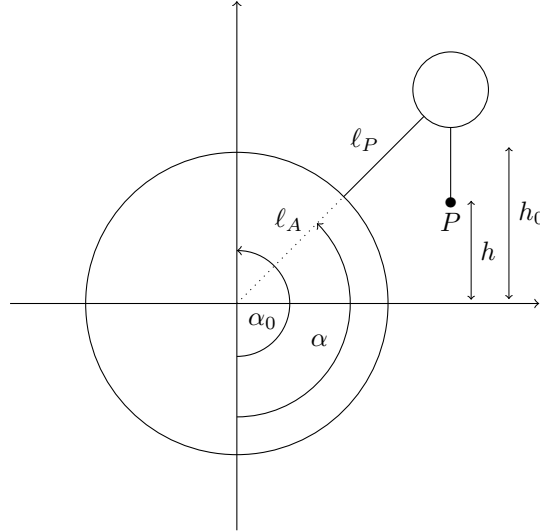


Fig. 4: Période en fonction du moment d'inertie

## 2.4 Disque attaché au contrepoids

Maintenant qu'on a réussi à modéliser le mouvement d'une particule attachée à un disque, il faudra étudier le mouvement du disque attaché au contrepoids. On dira que ce contrepoids ( $P$ ) est lâché à une hauteur initiale  $h_0$  sans vitesse initiale et que la corde qui attache le disque au contrepoids (et passe par une poulie) a une longueur  $\ell_P$ . On a donc,



D'où on déduit que,

$$\begin{aligned}\Delta h &= \ell_A(\alpha_0 - \alpha) \\ h_0 - h &= \ell_A(\alpha_0 - \alpha) \\ h &= h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$y = h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha) \quad (7)$$

D'où

$$\dot{y} = \ell_A \dot{\alpha}$$

Comme cette situation est superposé à la situation étudiée précédemment, l'énergie cinétique, potentielle et le lagrangien seront ressemblables. On a donc l'énergie cinétique de ce système,  $T = T_0 + T'$ ,  $T_0$  étant l'énergie cinétique dans le système étudié précédemment et  $T'$ , ce que l'on additionne à  $T_0$  pour retrouver l'énergie cinétique du système.

On a :

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} m_P v_P^2 \\ &= \frac{1}{2} m_P \ell_A^2 \dot{\alpha}^2 \\ V' &= m_P g (h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha)) \\ \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} m_P \ell_A^2 \dot{\alpha}^2 - m_P g (h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha)) \end{aligned}$$

On en déduit,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha} &= m_P g \ell_A \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\alpha}} &= m_P \ell_A^2 \dot{\alpha} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= m_P \ell_A^2 \ddot{\alpha} \end{aligned}$$

On introduit ces résultats dans l'équation (3),

$$\left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B} \ell_A^2 \right) \ddot{\alpha} + \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) = -\frac{m_P}{m_B} \ell_A (\ell_A \dot{\alpha} + g) - g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \quad (8)$$

En utilisant cette expression, on actualise les matrices, on a donc que

$$A = \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B} \ell_A^2 \quad E = -\frac{m_P}{m_B} \ell_A (\ell_A \dot{\alpha} + g) - g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)$$

On calcule le nouveau déterminant  $\Delta$ ,

$$\begin{aligned} \Delta &= \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B} \ell_A^2 \right) \ell_B^2 - \ell_A^2 \ell_B^2 \cos^2(\alpha - \beta) \\ &= \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \sin^2(\alpha - \beta) + \ell_A^2 \frac{m_P}{m_B} \right) \ell_B^2 \end{aligned}$$

À nouveau on observe que  $\Delta \neq 0$ .

Donc, on n'a qu'à changer la valeur de  $A$ , de  $E$  et du déterminant.

En utilisant l'expression de la vitesse du projectile en (1) et (2), on détermine la vitesse à chaque instant et on obtient,

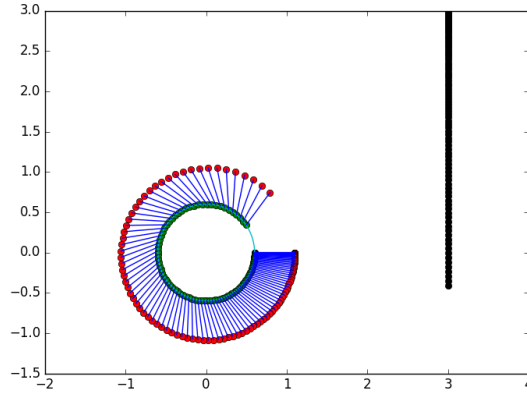


Fig. 5: Chute de la particule avec contrepoids

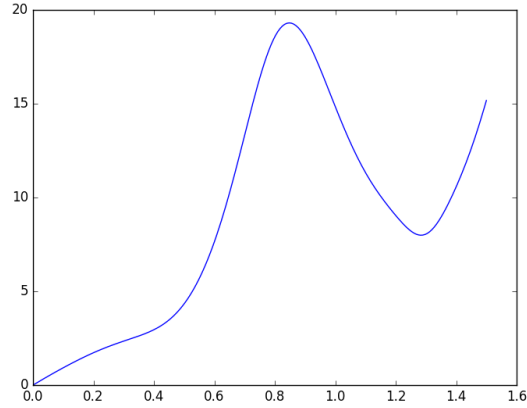


Fig. 6: Vitesse tangentielle de la particule en fonction du temps

Finalement, on n'a qu'à déterminer expérimentalement la période d'oscillation de notre objet irrégulier ayant attaché le projectile avec un angle initial petit ( $\leq 25^\circ$ ).

## 2.5 Lacher le projectile

On a arrivé à simuler correctement le mouvement du projectile lorsqu'il est attaché au disque mais on a encore à déterminer le moment idéal pour lacher le projectile. On pourrait d'abord penser qu'il faut le lacher à un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale. Or, dans cette catapulte, l'angle et la vitesse tangentielle du projectile sont liés. On pourrait donc lacher le projectile à un angle de  $45^\circ$  mais sa vitesse peut ne pas être maximale. Également, la vitesse peut être maximale lorsque le projectile est dirigé vers le sol. Il faut donc trouver un équilibre entre la vitesse et l'angle pour trouver ce moment idéal. Une fois qu'on connaît cet instant, on peut connaître l'angle initial et la vitesse initiale du projectile et ainsi retrouver sa trajectoire.