Simulación: Trebuchet MURLIN

R. Seguel, J.P. Soto, P. Cuello y M. Bataille

Mayo y Junio 2016

1 Partícula amarrada a un disco

En esta sección estudiaremos el movimiento de una partícula amarrada a un disco por una cuerda. La situación esta represantada en la siguiente figura. Tomaremos como condiciones iniciales, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\pi$.

Para resolver este problema vamos a estudiar el lagrangiano L y, utilizando la ecuación de Lagrange, encontraremos la ecuación diferencial que resume el movimiento de B. Luego, a partir de esta ecuación, determinaremos los valores de los ángulos para cada instante en un determinado intervalo. Llamaremos ℓ_A

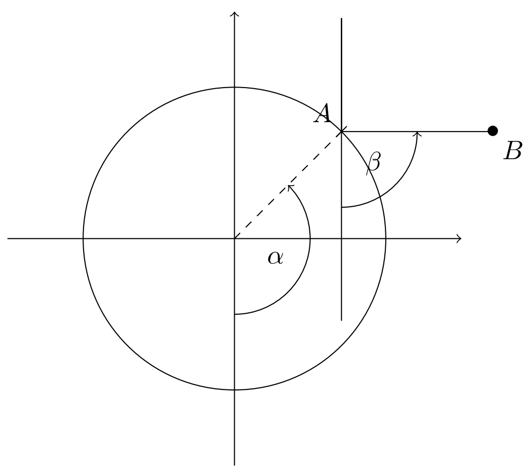


Fig. 1: Representación de la situación

el radio del disco, ℓ_B el largo de la cuerda y m_B la masa de la partícula B.

Primero determinamos las coordenadas de B,

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + \ell_B \sin\beta \\ &= \ell_A \sin\alpha + \ell_B \sin\beta \\ y_B &= y_A - \ell_B \cos\beta \\ &= -\ell_A \cos\alpha - \ell_B \cos\beta \end{aligned}$$

Derivando la posición de B en el tiempo encontramos la velocidad,

$$\begin{aligned} v_B(x) = \dot{x} = \ell_A \dot{\alpha} \cos\alpha + \ell_B \dot{\beta} \cos\beta \\ v_B(y) = \dot{y} = \ell_A \dot{\alpha} \sin\alpha + \ell_B \dot{\beta} \sin\beta \end{aligned}$$

Deducimos la expresión de la energía cinética, y la energía potencial V:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}m_B\left(\ell_A^2\dot\alpha^2 + \ell_B^2\dot\beta^2 + 2\ell_A\ell_B\dot\alpha\dot\beta\cos(\alpha-\beta)\right) + \frac{1}{2}I\dot\alpha^2 \\
V &= m_B g y_B \\
&= -m_B g\left(\ell_A\cos\alpha + \ell_B\cos\beta\right) \\
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}m_B\left(\ell_A^2\dot\alpha^2 + \ell_B^2\dot\beta^2 + 2\ell_A\ell_B\dot\alpha\dot\beta\cos(\alpha-\beta)\right) + \frac{1}{2}I\dot\alpha^2 + m_B g\left(\ell_A\cos\alpha + \ell_B\cos\beta\right)
\end{aligned}
$$

Derivamos el lagrangiano en cada grado de libertad.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot\alpha} &= m_B\ell_A^2\dot\alpha + m_B\ell_A\ell_B\dot\beta\cos(\alpha-\beta) + I\dot\alpha \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\alpha}\right) &= m_B\ell_A^2\ddot\alpha + m_B\ell_a\ell_B(\ddot\beta\cos(\alpha-\beta) - \dot\beta\sin(\alpha-\beta)(\dot\alpha-\dot\beta)) + I\ddot\alpha \\
\frac{\partial L}{\partial\dot\beta} &= m_B\ell_B^2\dot\beta + m_B\ell_A\ell_B\dot\alpha\cos(\alpha-\beta) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\beta}\right) &= m_B\ell_B^2\ddot\beta + m_B\ell_A\ell_B(\ddot\alpha\cos(\alpha-\beta) - \dot\alpha\sin(\alpha-\beta)(\dot\alpha-\dot\beta)) \\
\frac{\partial L}{\partial\alpha} &= -m_B\ell_A\ell_B\dot\alpha\dot\beta\sin(\alpha-\beta) - m_B g\ell_A\sin\alpha \\
\frac{\partial L}{\partial\beta} &= m_B\ell_A\ell_B\dot\alpha\dot\beta\sin(\alpha-\beta) - m_B g\ell_B\sin\beta
\end{aligned}
$$

Aplicamos la ecuación de Lagrange,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\alpha} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\alpha}\right) \\
-m_B\ell_A\ell_B\dot\alpha\dot\beta\sin(\alpha-\beta) - m_B g\ell_A\sin\alpha &= m_B\ell_A^2\ddot\alpha + m_B\ell_A\ell_B(\ddot\beta\cos(\alpha-\beta) - \dot\beta\sin(\alpha-\beta)(\dot\alpha-\dot\beta)) + I\ddot\alpha \\
-m_B g\ell_A\sin\alpha &= (I + m_b\ell_A^2)\ddot\alpha + m_B\ell_A\ell_B\ddot\beta\cos(\alpha-\beta) + m_B\ell_A\ell_B\dot\beta^2\sin(\alpha-\beta) \\
(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2)\ddot\alpha + \ell_A\ell_B\ddot\beta\cos(\alpha-\beta) &= -g\ell_A\sin\alpha - \ell_A\ell_B\dot\beta^2\sin(\alpha-\beta) \qquad (1) \\
\frac{\partial L}{\partial\beta} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\beta}\right) \\
m_B\ell_A\ell_B\dot\alpha\dot\beta\sin(\alpha-\beta) - m_B g\ell_A\sin(\beta) &= m_B\ell_B\ddot\beta + m_B\ell_A\ell_B\ddot\alpha\cos(\alpha-\beta) - m_B\ell_A\ell_B\dot\alpha\sin(\alpha-\beta)(\dot\alpha-\dot\beta) \\
-m_B g\ell_B\sin\beta &= m_B\ell_B^2\ddot\beta + m_B\ell_A\ell_B\ddot\alpha\cos(\alpha-\beta) - m_B\ell_A\ell_B\dot\alpha^2\sin(\alpha-\beta) \\
\ell_B^2\ddot\beta + \ell_A\ell_B\ddot\alpha\cos(\alpha-\beta) &= \ell_A\ell_B\dot\alpha^2\sin(\alpha-\beta) - g\ell_B\sin\beta \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Ahora que determinamos las ecuaciones diferenciales, nos queda implementarlas en un programa y resolverlas numéricamente. Para resolver estas ecuaciones diferenciales, tenemos que implementar una función tal que,

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Donde,

$$x = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \dot\alpha\\ \dot\beta\end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\\ \ddot\alpha\\ \ddot\beta\end{pmatrix}$$

Pero, ya conocemos el valor de $\dot{\alpha}$ y $\dot{\beta}$ en función de x. Nos queda entonces determinar la expresión de $\ddot{\alpha}$ y $\ddot{\beta}$ en función de x.

Para determinar estos valores podemos visualizar las ecuaciones (1) y (2) como un producto entre dos matrices

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

Donde, $A = \frac{I}{m_B} + \ell_A^2$ $\quad B = \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta)$ $\quad E = -g\ell_A \sin\alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)$

$C = \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta)$ $\quad D = \ell_B^2$ $\quad F = \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) - g\ell_B \sin\beta$

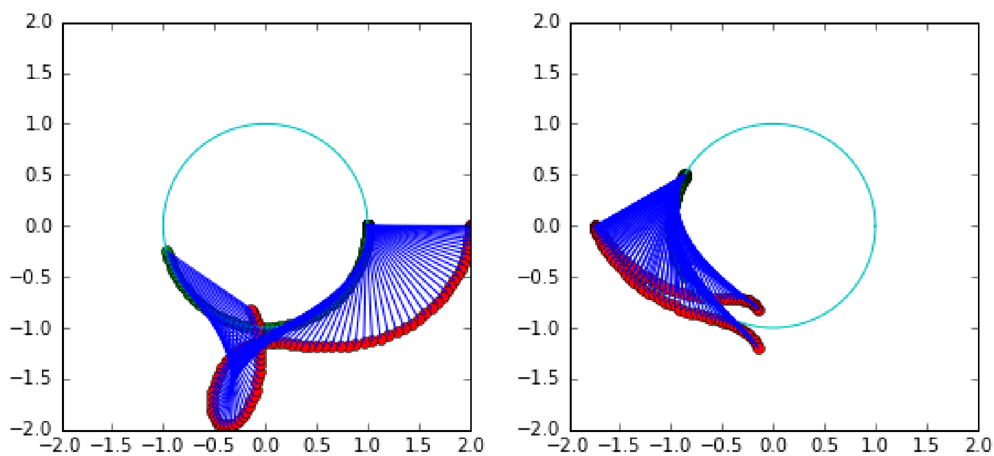
Para resolver esta ecuación calcularemos el determinante Δ de la matriz,

$$\begin{aligned} \Delta &= AD - BC \\ &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2\right) \ell_B^2 - \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \times \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \\ &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 - \ell_A^2 \cos^2(\alpha - \beta)\right) \ell_B^2 \\ &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \sin^2(\alpha - \beta)\right) \ell_B^2 \end{aligned}$$

Podemos ver que $\Delta \neq 0$ (es más, $\Delta > 0$), por lo tanto la matriz se puede invertir. La solución es entonces,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \tag{3}$$

Fácilmente podemos resolver numéricamente esta ecuación con un algoritmo. Así obtenemos resultados interesantes,



(a) Caida de la partícula entre 0s y 2s

(b) Caida de la partícula entre 2s y 4s

Fig. 2: Simulación de la caida libre de la particula

2 Implementación del contrapeso

Hasta ahora hemos logrado modelar el movimiento de una partícula amarrada a un disco. Para acercarnos más a la situación real, tendremos que agregar el peso que provoca que el disco comience a rotar. Diremos entonces que este peso P se deja caer a una altura inicial h_0 sin velocidad inicial. La cuerda que une el contrapeso al disco (pasando por una polea) tendrá un largo ℓ_P. Tenemos entonces la situación siguiente,

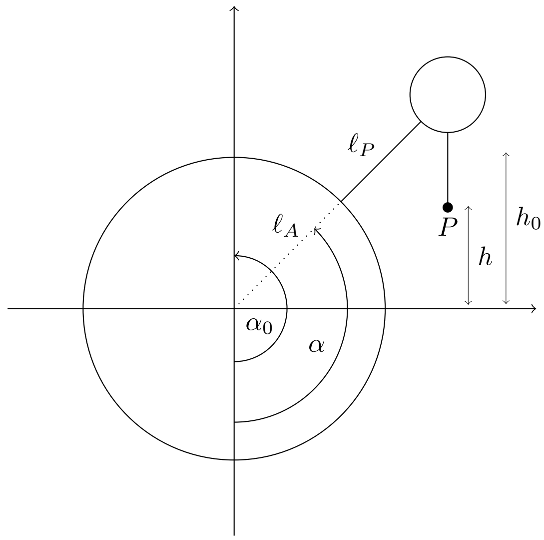


Fig. 3: Representación de la situación

[h]
A partir de la figura podemos deducir que,

$$\begin{aligned}\Delta_h &= \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\\ h_0 - h &= \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\\ h &= h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\end{aligned}$$

O, escrito de otra manera,

$$y = h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha) \tag{4}$$

A partir de esta expresión, podemos deducir,

$$\dot{y} = \ell_A\dot{\alpha}$$

Este sistema está superpuesto al sistema estudiado en la sección anterior. Por lo tanto, la expresión de la energía cinética así como la energía potencial y el lagrangiano, seran similares. Entonces, definiremos T' de manera que la energía cinética total del sistema corresponde a $T = T_0 + T'$ donde T_0 es la energía cinética del sistema anterior. Lo mismo para V' y L'.

Tenemos entonces,

$$\begin{aligned}T' &= \frac{1}{2}m_P v_P^2\\ &= \frac{1}{2}m_P\ell_A^2\dot{\alpha}^2\\ V' &= m_p g(h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha))\\ L' &= \frac{1}{2}m_P\ell_A^2\dot{\alpha}^2 - m_P g(h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\end{aligned}$$

Determinamos las derivadas correspondientes,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \alpha} &= m_P g \ell_A \\
\frac{\partial L'}{\partial \dot{\alpha}} &= m_P \ell_A^2 \dot{\alpha} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\dot{\alpha}}\right) &= m_P \ell_A^2 \ddot{\alpha}
\end{aligned}
$$

Introducimos estos resultados en la ecuación (1),

$$
\left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B}\ell_A^2\right)\ddot{\alpha} + \ell_A \ell_B \ddot{\beta}\cos(\alpha - \beta) = -\frac{m_P}{m_B}\ell_A\left(\ell_A\dot{\alpha} + g\right) - g\ell_A \sin\alpha - \ell_A\ell_B\dot{\beta}^2\sin(\alpha-\beta) \tag{5}
$$

A partir de esto, actualizamos los valores en la matriz,

$$
A = \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B}\ell_A^2 \qquad\qquad E = -\frac{m_P}{m_B}\ell_A\left(\ell_A\dot{\alpha} + g\right) - g\ell_A \sin\alpha - \ell_A\ell_B\dot{\beta}^2\sin(\alpha-\beta)
$$

Calculamos el determinante,

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B}\ell_A^2\right)\ell_B^2 - \ell_A^2\ell_B^2\cos^2(\alpha-\beta) \\
&= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2\sin^2(\alpha-\beta) + \ell_A^2\frac{m_P}{m_B}\right)\ell_B^2
\end{aligned}
$$

De nuevo, podemos ver que $\Delta \neq 0$. Así, solo tenemos que cambiar los valores de A, E y Δ para obtener la solución numérica para este sistema.