

Carnet de Bord

R. Seguel, J.P. Soto, P. Cuello et M. Bataille

Avril, Mai et Juin 2016

1 Réunion 1. 27/04

Équations.

On a déterminé l'expression de l'équation horaire:

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \times t + z_0$$

Où v_0 est la vitesse initiale, z_0 est la hauteur initiale (h) et α est l'angle du lancer de la balle.

D'après cette expression, on a déduit l'équation de la hauteur en fonction de la distance horizontale**:

$$t = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} y^2 + \tan \alpha \times y + h$$

Plans

On a contacté un professeur aux E.U., Mr Lance, et ils nous a envoyé les plans de son trébuchet (MURLIN).

Problème: Mr. Lance nous a dit qu'il faut réguler la longueur du bras et de la corde puisqu'ils sont pensés pour un trébuchet de 3m de hauteur et pour un projectile 4 fois plus léger.

Potentielles solutions:

1. On peut faire un prototype pour ensuite réaliser des expériences et on déduit les longueurs du bras et de la corde optimales pour le trébuchet à échelle réelle (2m). Mais, on prend du temps et des ressources sur le prototype.
2. On peut faire une simulation, mais elle nécessite des outils mathématiques complexes. Mais, il faut comprendre ces outils mathématiques et ensuite les implémenter, ce qui prend du temps, mais pas de ressources (monétaires).
3. On fait directement le trébuchet à échelle réelle et on régule directement les longueurs du bras et de la corde sur ce trébuchet.

2 Réunion 2. 28/04

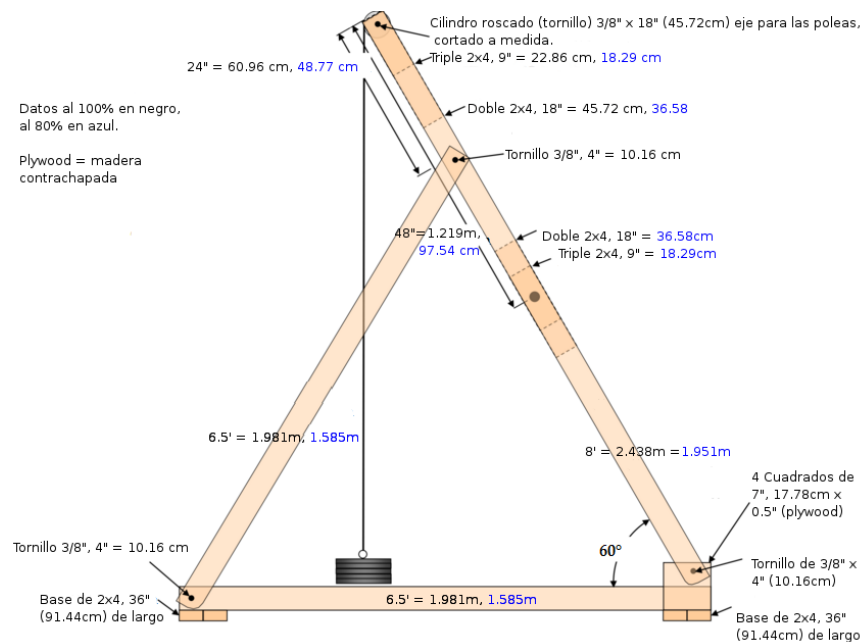
Plans On a calculé la plupart des mesures pour un raccourcissement de 67% comme Mr Lance nous le a indiqué.

Mais, lors de faire plusieurs calculs sur la hauteur avec un angle du lancer de $\alpha = 71^\circ$, on remarque qu'on peut faire un raccourcissement de 76%. C'est, malgré tout, une différence de 10% qui pourrait avoir un grand impact sur la distance parcourue par la balle. Il faut donc faire une meilleure estimation pour le taux de raccourcissement trébuchet. parcourue par la balle. D'ailleurs, si notre estimation de l'angle du lancer est erronée, et que l'angle vaut $\alpha = 45^\circ$, la hauteur, avec ce raccourcissement, serait de 1.68m alors qu'elle devrait être le plus proche de 2m possible.

En regardant la simulation faite par Mr. Lance, on observe que l'angle du lancer est de 60° . D'où le taux de raccourcissement serait de 80%.

3 Vacances.

Finalement, on a décidé de faire un raccourcissement de 80% puisqu'il faudra raccourcir le bras et la corde de quelques centimètres du au poids du projectile. Les mesures calculées sont affichées sur la figure ci-dessous.

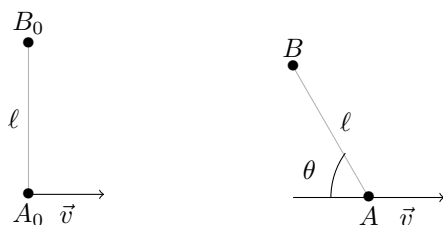


4 Travail sur la simulation.

Pour pouvoir étudier plus facilement les mécaniques du trébuchet, on commencera par diviser le problème en plusieurs parties, plus simples.

4.1 Deux particules, une corde

D'abord, on étudiera le mouvement d'une particule B attachée à une autre particule A par une corde de longueur ℓ lorsque la particule A a une certaine vitesse \vec{v} . La configuration initiale est celle de la première figure.



Dans un premier temps on étudiera cette situation en prenant \vec{v} constant.
On utilisera des coordonnées cartésiennes telles que $A_0 = (0; 0)$ et $B_0 = (0; 2)$. On a:

$$\begin{aligned}y_A &= 0 \\x_B &= x_A - \ell \cos \theta \\y_B &= \ell \sin \theta\end{aligned}$$

On détermine l'expression de l'énergie cinétique,

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m_A(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2}m_B(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B(\dot{x}_A + \dot{\theta}\ell \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}m_B(\dot{\theta}\ell \cos \theta)^2 \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

On détermine l'expression de l'énergie potentielle,

$$\begin{aligned}V &= m_B g y_B \\&= m_B g \ell \sin \theta\end{aligned}$$

On en déduit le lagrangien,

$$\begin{aligned}L &= T - V \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 - m_B g \ell \sin \theta\end{aligned}$$

D'où on déduit,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \cos \theta - m_B g \ell \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_B\ell^2\dot{\theta} + m_B\dot{x}_A\ell \sin \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m_B\ell^2\ddot{\theta} + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \cos \theta\end{aligned}$$

Or on sait que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) \\ m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \cos \theta - m_B g \ell \cos \theta &= m_B\ell^2\ddot{\theta} + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \cos \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{\ell} \cos \theta\end{aligned}$$

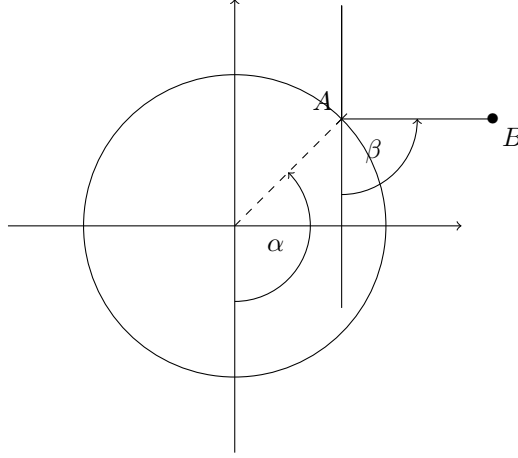
Pour les conditions initiales on a $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ d'où,

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_0 &= -\frac{g}{\ell} \cos \theta_0 \\ &= -\frac{g}{\ell} \cos \frac{\pi}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Mais, si $\dot{\theta}_0 = 0$, alors la vitesse angulaire ne changera pas (car $\ddot{\theta}_0 = 0$) et donc, la particule B ne se déplacera pas par rapport à la particule A . On doit donc changer la configuration initiale, soit $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ (d'où $\ddot{\theta}_0 \neq 0$), soit $\dot{\theta}_0 \neq 0$.

4.2 Un disque, une particule et une corde

Maintenant, on étudiera le mouvement d'une particule lorsqu'elle est attachée à un disque par une corde. La situation est celle de la figure ci-dessous. Pour conditions initiales, on prendra $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\pi$.



On notera ℓ_A le rayon du disque, ℓ_B la longueur de la corde et m_B la masse de la particule B .

On détermine les coordonnées de la particule B :

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + \ell_B \sin \beta \\ &= \ell_A \sin \alpha + \ell_B \sin \beta \\ y_B &= y_A - \ell_B \cos \beta \\ &= -\ell_A \cos \alpha - \ell_B \cos \beta \end{aligned}$$

D'où on déduit la vitesse de B , c'est à dire, la dérivée de sa position par rapport au temps:

$$v_B(x) = \dot{x} = \ell_A \dot{\alpha} \cos \alpha + \ell_B \dot{\beta} \cos \beta \quad (1)$$

$$v_B(y) = \dot{y} = \ell_A \dot{\alpha} \sin \alpha + \ell_B \dot{\beta} \sin \beta \quad (2)$$

On utilisera l'équation de Lagrange. Pour ce faire, on calculera l'expression de l'énergie cinétique T^1 et l'énergie potentielle V :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m_B \left(\ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2 \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 \\ V &= m_B g y_B \\ &= -m_B g (\ell_A \cos \alpha + \ell_B \cos \beta) \\ L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_B \left(\ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2 \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + m_B g (\ell_A \cos \alpha + \ell_B \cos \beta) \end{aligned}$$

¹Si on ne prend pas l'énergie cinétique rotationnelle du disque, au moment de déterminer les équations différentielles, on divise par $\cos(\alpha - \beta)$ ce qui provoque des problèmes lorsque $\alpha \approx \beta$ et, si on fait une simulation avec un logiciel, on n'obtient aucun résultat cohérent

On dérive le lagrangien pour chaque degré de liberté,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= m_B \ell_A^2 \dot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + I \dot{\alpha} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I \ddot{\alpha} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= m_B \ell_B^2 \dot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) \\
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= -m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_A \sin \alpha \\
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_B \sin \beta
\end{aligned}$$

On en déduit les équations de Lagrange,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) \\
-m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_A \sin \alpha &= m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I \ddot{\alpha} \\
-m_B g \ell_A \sin \alpha &= (I + m_B \ell_A^2) \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \\
\left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ddot{\alpha} + \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) &= -g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) \\
m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_B \sin \beta &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \\
-m_B g \ell_B \sin \beta &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) \\
\ell_B^2 \ddot{\beta} + \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) &= \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) - g \ell_B \sin \beta
\end{aligned} \tag{4}$$

Pour l'implémentation de la simulation, il faut créer une fonction telle que

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

On a ici,

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix}$$

Or, on connaît déjà l'expression de $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ en fonction de x . Il faut donc déterminer l'expression de $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\beta}$ en fonction de x . D'après (3) et (4),

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec, } \begin{aligned} A &= \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 & B &= \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & E &= -g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \\ C &= \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & D &= \ell_B^2 & F &= \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) - g \ell_B \sin \beta \end{aligned}$$

On calcule le déterminant Δ ,

$$\begin{aligned}
\Delta &= AD - BC \\
&= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ell_B^2 - \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \times \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \\
&= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 - \ell_A^2 \cos^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2 \\
&= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \sin^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2
\end{aligned}$$

Or, $\Delta > 0$, la matrice est inversible, d'où on en déduit la solution,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \quad (5)$$

À partir de cette équation, on peut implémenter facilement un algorithme pour la résoudre numériquement. Cf annexe sur l'explication de la simulation.

On obtient des résultats intéressants:

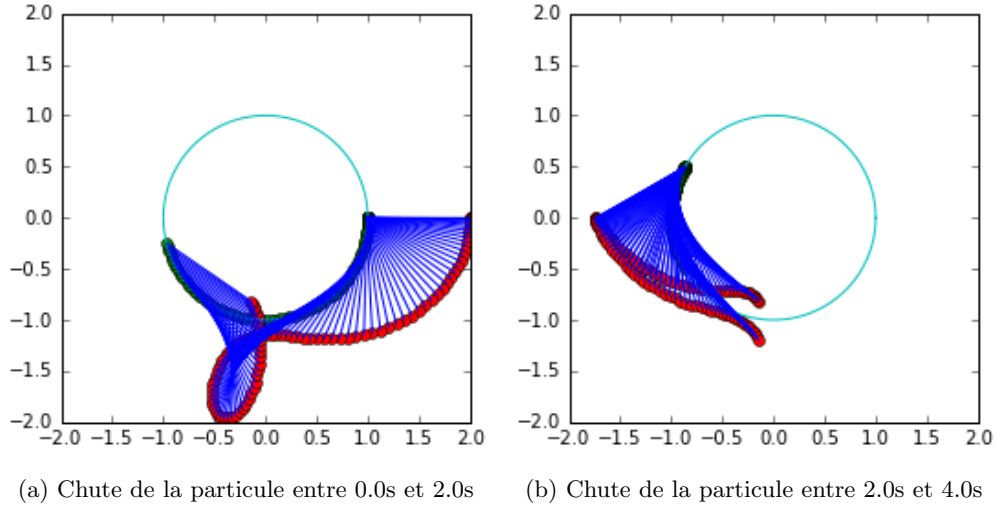
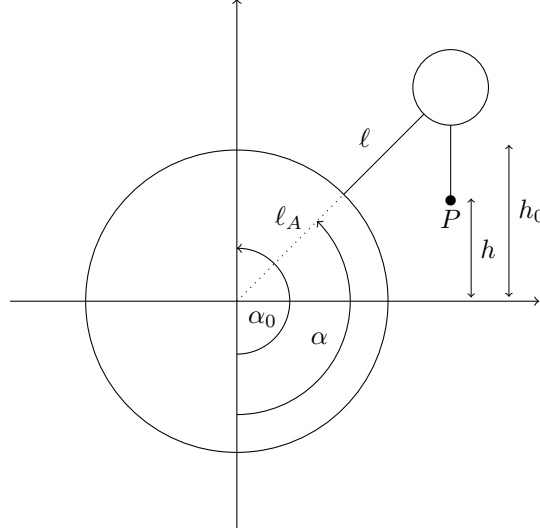


Figure 1: Simulation de la chute de la particule entre 0.0s et 4.0s

4.3 Disque attaché au contrepoids

Maintenant qu'on a réussi à modéliser le mouvement d'une particule attachée à un disque, il faudra étudier le mouvement du disque attaché au contrepoids. On dira que ce contrepoids (P) est lâché à une hauteur initiale h_0 sans vitesse initiale et que la corde qui attache le disque au contrepoids (et passe par une poulie) a une longueur ℓ_P . On a donc,



D'où on déduit que,

$$\begin{aligned}\Delta h &= \ell_A(\alpha_0 - \alpha) \\ h_0 - h &= \ell_A(\alpha_0 - \alpha) \\ h &= h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$y = h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha) \quad (6)$$

D'où

$$\dot{y} = \ell_A \dot{\alpha}$$

Comme cette situation est superposée à la situation étudiée précédemment, l'énergie cinétique, potentielle et le lagrangien seront ressemblables. On définit donc T' tel que l'énergie cinétique du système $T = T_0 + T'$ où T_0 est l'énergie cinétique dans la situation précédente et T' est l'énergie cinétique issue de P . De même pour V' et L' .

On a:

$$\begin{aligned}T' &= \frac{1}{2} m_P v_P^2 \\ &= \frac{1}{2} m_P \ell_A^2 \dot{\alpha}^2 \\ V' &= m_P g (h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha)) \\ L' &= \frac{1}{2} m_P \ell_A^2 \dot{\alpha}^2 - m_P g (h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha))\end{aligned}$$

On en déduit,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \alpha} &= m_P g \ell_A \\
\frac{\partial L'}{\partial \dot{\alpha}} &= m_P \ell_A^2 \dot{\alpha} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= m_P \ell_A^2 \ddot{\alpha}
\end{aligned}$$

On introduit ces résultats dans l'équation (3),

$$\left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B} \ell_A^2 \right) \ddot{\alpha} + \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) = -\frac{m_P}{m_B} \ell_A (\ell_A \dot{\alpha} + g) - g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \quad (7)$$

En utilisant cette expression, on actualise les matrices, on a donc que

$$A = \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B} \ell_A^2 \quad E = -\frac{m_P}{m_B} \ell_A (\ell_A \dot{\alpha} + g) - g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)$$

On calcule le nouveau déterminant Δ ,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B} \ell_A^2 \right) \ell_B^2 - \ell_A^2 \ell_B^2 \cos^2(\alpha - \beta) \\
&= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \sin^2(\alpha - \beta) + \ell_A^2 \frac{m_P}{m_B} \right) \ell_B^2
\end{aligned}$$

À nouveau on observe que $\Delta \neq 0$.

Donc, on n'a qu'à changer la valeur de A , de E et du déterminant.

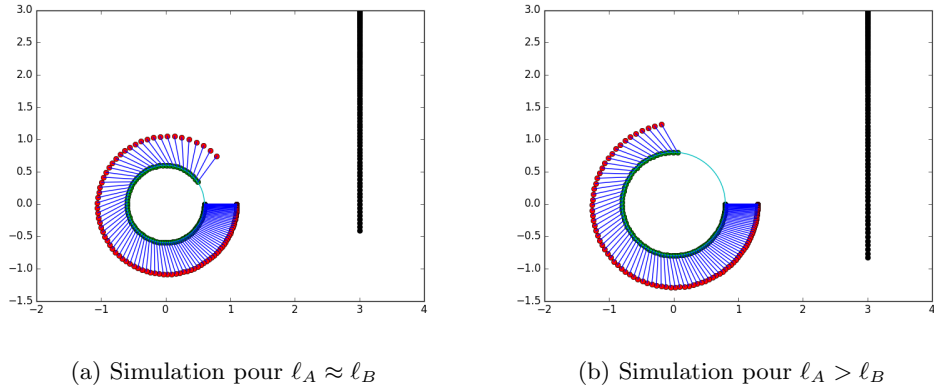


Figure 2: Simulation pour différentes valeurs de ℓ_A

En utilisant l'expression de la vitesse du projectile en (1) et (2), on détermine la vitesse à chaque instant et on obtient,

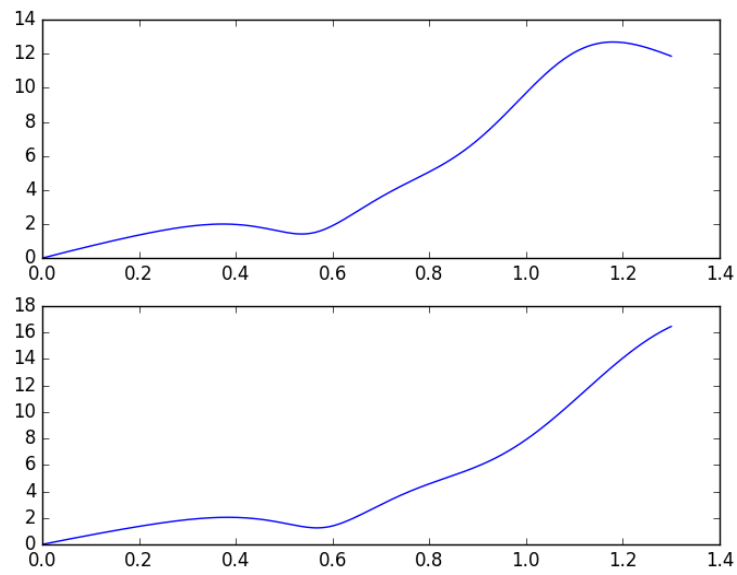


Figure 3: Vitesse pour $\ell_A \approx \ell_B$ et $\ell_A > \ell_B$, respectivement