

Simulación: Trebuchet MURLIN

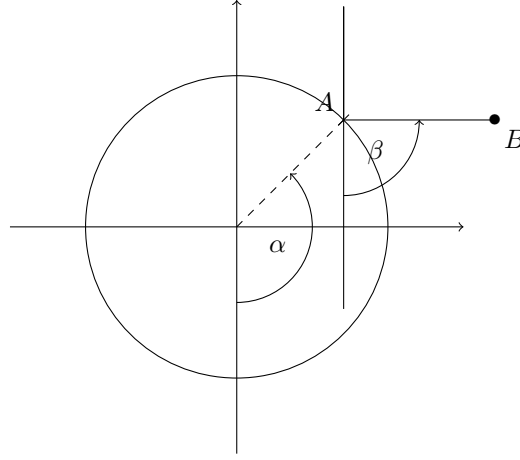
R. Seguel, J.P. Soto, P. Cuello y M. Bataille

Mayo y Junio 2016

1 Partícula amarrada a un disco

En esta sección estudiaremos el movimiento de una partícula amarrada a un disco por una cuerda. La situación esta representada en la siguiente figura. Tomaremos como condiciones iniciales, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\pi$.

Para resolver este problema vamos a estudiar el lagrangiano L y, utilizando la ecuación de Lagrange, encontraremos la ecuación diferencial que resume el movimiento de B . Luego, a partir de esta ecuación, determinaremos los valores de los ángulos para cada instante en un determinado intervalo.



Llamaremos ℓ_A el radio del disco, ℓ_B el largo de la cuerda y m_B la masa de la partícula B .

Primero determinamos las coordenadas de B ,

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + \ell_B \sin \beta \\&= \ell_A \sin \alpha + \ell_B \sin \beta \\y_B &= y_A - \ell_B \cos \beta \\&= -\ell_A \cos \alpha - \ell_B \cos \beta\end{aligned}$$

Derivando la posición de B en el tiempo encontramos la velocidad,

$$\begin{aligned}v_B(x) &= \dot{x} = \ell_A \dot{\alpha} \cos \alpha + \ell_B \dot{\beta} \cos \beta \\v_B(y) &= \dot{y} = \ell_A \dot{\alpha} \sin \alpha + \ell_B \dot{\beta} \sin \beta\end{aligned}$$

Deducimos la expresión de la energía cinética, y la energía potencial V :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}m_B \left(\ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2\ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 \\
V &= m_B g y_B \\
&= -m_B g (\ell_A \cos \alpha + \ell_B \cos \beta) \\
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}m_B \left(\ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2\ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 + m_B g (\ell_A \cos \alpha + \ell_B \cos \beta)
\end{aligned}$$

Derivamos el lagrangiano en cada grado de libertad.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= m_B \ell_A^2 \dot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + I\dot{\alpha} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I\ddot{\alpha} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= m_B \ell_B^2 \dot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) \\
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= -m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_A \sin \alpha \\
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_B \sin \beta
\end{aligned}$$

Aplicamos la ecuación de Lagrange,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) \\
-m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_A \sin \alpha &= m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I\ddot{\alpha} \\
-m_B g \ell_A \sin \alpha &= (I + m_B \ell_A^2) \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \\
\left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ddot{\alpha} + \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) &= -g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) \\
m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_B \sin \beta &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \\
-m_B g \ell_B \sin \beta &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) \\
\ell_B^2 \ddot{\beta} + \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) &= \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) - g \ell_B \sin \beta
\end{aligned} \tag{2}$$

Ahora que determinamos las ecuaciones diferenciales, nos queda implementarlas en un programa y resolverlas numéricamente. Para resolver estas ecuaciones diferenciales, tenemos que implementar una función tal que,

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Donde,

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix}$$

Pero, ya conocemos el valor de $\dot{\alpha}$ y $\dot{\beta}$ en función de x . Nos queda entonces determinar la expresión de $\ddot{\alpha}$ y $\ddot{\beta}$ en función de x .

Para determinar estos valores podemos visualizar las ecuaciones (1) y (2) como una multiplicación entre dos matrices

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

Donde,
$$\begin{aligned} A &= \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 & B &= \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & E &= -g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \\ C &= \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & D &= \ell_B^2 & F &= \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) - g \ell_B \sin \beta \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación calcularemos el determinante Δ de la matriz,

$$\begin{aligned} \Delta &= AD - BC \\ &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ell_B^2 - \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \times \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \\ &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 - \ell_A^2 \cos^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2 \\ &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \sin^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2 \end{aligned}$$

Podemos ver que $\Delta \neq 0$ (es más, $\Delta > 0$), por lo tanto la matriz se puede invertir. La solución es entonces,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \quad (3)$$