

# Carnet de Bord

R. Seguel, J.P. Soto, P. Cuello et M. Bataille

Avril, Mai et Juin 2016

## 1 Réunion 1. 27/04

### Équations.

On a déterminé l'expression de l'équation horaire:

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \times t + z_0$$

Où  $v_0$  est la vitesse initiale,  $z_0$  est la hauteur initiale ( $h$ ) et  $\alpha$  est l'angle du lancer de la balle.

D'après cette expression, on a déduit l'équation de la hauteur en fonction de la distance horizontale\*\*:

$$t = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} y^2 + \tan \alpha \times y + h$$

### Plans

On a contacté un professeur aux E.U., Mr Lance, et ils nous a envoyé les plans de son trébuchet (MURLIN).

Problème: Mr. Lance nous a dit qu'il faut réguler la longueur du bras et de la corde puisqu'ils sont pensés pour un trébuchet de 3m de hauteur et pour un projectile 4 fois plus léger.

Potentielles solutions:

1. On peut faire un prototype pour ensuite réaliser des expériences et on déduit les longueurs du bras et de la corde optimales pour le trébuchet à échelle réelle (2m). Mais, on prend du temps et des ressources sur le prototype.
2. On peut faire une simulation, mais elle nécessite des outils mathématiques complexes. Mais, il faut comprendre ces outils mathématiques et ensuite les implémenter, ce qui prend du temps, mais pas de ressources (monétaires).
3. On fait directement le trébuchet à échelle réelle et on régule directement les longueurs du bras et de la corde sur ce trébuchet.

## 2 Réunion 2. 28/04

**Plans** On a calculé la plupart des mesures pour un raccourcissement de 67% comme Mr Lance nous le a indiqué.

Mais, lors de faire plusieurs calculs sur la hauteur avec un angle du lancer de  $\alpha = 71^\circ$ , on remarque qu'on peut faire un raccourcissement de 76%. C'est, malgré tout, une différence de 10% qui pourrait avoir un grand impact sur la distance parcourue par la balle. Il faut donc faire une meilleure estimation pour le taux de raccourcissement trébuchet. parcourue par la balle. D'ailleurs, si notre estimation de l'angle du lancer est erronée, et que l'angle vaut  $\alpha = 45^\circ$ , la hauteur, avec ce raccourcissement, serait de 1.68m alors qu'elle devrait être le plus proche de 2m possible.

### 3 Vacances.

Diagrama de un triángulo de madera con especificaciones de materiales y medidas:

- Material:** Plywood = madera contrachapada.
- Medidas y Materiales:**
  - 24" = 60.96 cm, 48.77 cm
  - Cilindro roscado (tornillo) 3/8" x 18" (45.72cm) eje para las poleas, cortado a medida.
  - Triples 2x4, 9" = 22.86 cm, 18.29 cm
  - Doble 2x4, 18" = 45.72 cm, 36.58
  - Tornillo 3/8", 4" = 10.16 cm
  - 48" = 1.219m, 97.54 cm
  - Doble 2x4, 18" = 36.58cm
  - Triples 2x4, 9" = 18.29cm
  - 6.5' = 1.981m, 1.585m
  - 8" = 2.438m = 1.951m
  - 4 Cuadrados de 7", 17.78cm x 0.5" (plywood)
  - Tornillo de 3/8" x 4" (10.16cm)
  - Base de 2x4, 36" (91.44cm) de largo
  - 6.5' = 1.981m, 1.585m
  - Base de 2x4, 36" (91.44cm) de largo
- Ángulo:** 60°

## 4 Travail sur la simulation.

### 4.1 Deux particules, une corde

Dans un premier temps on étudiera cette situation en prenant  $\vec{v}$  constant.  
On utilisera des coordonnées cartésiennes telles que  $A_0 = (0; 0)$  et  $B_0 = (0; 2)$ . On a:

$$\begin{aligned}y_A &= 0 \\x_B &= x_A - \ell \cos \theta \\y_B &= \ell \sin \theta\end{aligned}$$

On détermine l'expression de l'énergie cinétique,

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m_A(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2}m_B(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B(\dot{x}_A + \dot{\theta}\ell \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}m_B(\dot{\theta}\ell \cos \theta)^2 \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

On détermine l'expression de l'énergie potentielle,

$$\begin{aligned}V &= m_B g y_B \\&= m_B g \ell \sin \theta\end{aligned}$$

On en déduit le lagrangien,

$$\begin{aligned}L &= T - V \\&= \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \sin \theta + \frac{1}{2}m_B\ell^2\dot{\theta}^2 - m_B g \ell \sin \theta\end{aligned}$$

D'où on déduit,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \cos \theta - m_B g \ell \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_B\ell^2\dot{\theta} + m_B\dot{x}_A\ell \sin \theta \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m_B\ell^2\ddot{\theta} + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \cos \theta\end{aligned}$$

Or on sait que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) \\ m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \cos \theta - m_B g \ell \cos \theta &= m_B\ell^2\ddot{\theta} + m_B\dot{x}_A\dot{\theta}\ell \cos \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{\ell} \cos \theta\end{aligned}$$

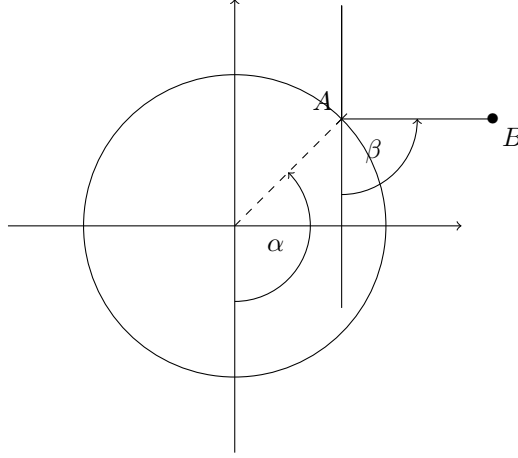
Pour les conditions initiales on a  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  d'où,

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_0 &= -\frac{g}{\ell} \cos \theta_0 \\ &= -\frac{g}{\ell} \cos \frac{\pi}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Mais, si  $\dot{\theta}_0 = 0$ , alors la vitesse angulaire ne changera pas (car  $\ddot{\theta}_0 = 0$ ) et donc, la particule  $B$  ne se déplacera pas par rapport à la particule  $A$ . On doit donc changer la configuration initiale, soit  $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$  (d'où  $\ddot{\theta}_0 \neq 0$ ), soit  $\dot{\theta}_0 \neq 0$ .

## 4.2 Un disque, une particule et une corde

Maintenant, on étudiera le mouvement d'une particule lorsqu'elle est attachée à un disque par une corde. La situation est celle de la figure ci-dessous. Pour conditions initiales, on prendra  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\pi$ .



On notera  $\ell_A$  le rayon du disque,  $\ell_B$  la longueur de la corde et  $m_B$  la masse de la particule  $B$ .

On détermine les coordonnées de la particule  $B$ :

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + \ell_B \sin \beta \\&= \ell_A \sin \alpha + \ell_B \sin \beta \\y_B &= y_A + \ell_B \cos \beta \\&= \ell_A \cos \alpha + \ell_B \cos \beta\end{aligned}$$

D'où on déduit la vitesse de  $B$ , c'est à dire, la dérivée de sa position par rapport au temps:

$$\begin{aligned}v_B(x) &= \dot{x} = \ell_A \dot{\alpha} \cos \alpha + \ell_B \dot{\beta} \cos \beta \\v_B(y) &= \dot{y} = -(\ell_A \dot{\alpha} \sin \alpha + \ell_B \dot{\beta} \sin \beta)\end{aligned}$$

On utilisera l'équation de Lagrange. Pour ce faire, on calculera l'expression de l'énergie cinétique  $T^1$  et l'énergie potentielle  $V$ :

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\&= \frac{1}{2} m_B \left( \ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2 \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 \\V &= m_B g y_B \\&= m_B g (\ell_A \cos \alpha + \ell_B \cos \beta) \\L &= T - V \\&= \frac{1}{2} m_B \left( \ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2 \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 - m_B g (\ell_A \cos \alpha + \ell_B \cos \beta)\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Si on ne prend pas l'énergie cinétique rotationnelle du disque, au moment de déterminer les équations différentielles, on divise par  $\cos(\alpha - \beta)$  ce qui provoque des problèmes lorsque  $\alpha \approx \beta$  et, si on fait une simulation avec un logiciel, on n'obtient aucun résultat cohérent

On dérive le lagrangien pour chaque degré de liberté,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= m_B \ell_A^2 \dot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + I \dot{\alpha} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I \ddot{\alpha} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= m_B \ell_B^2 \dot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) \\
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= -m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) + m_B g \ell_A \sin \alpha \\
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) + m_B g \ell_B \sin \beta
\end{aligned}$$

On en déduit les équations de Lagrange,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) \\
-m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) + m_B g \ell_A \sin \alpha &= m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I \ddot{\alpha} \\
m_B g \ell_A \sin \alpha &= (I + m_B \ell_A^2) \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \\
\left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ddot{\alpha} + \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) &= g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) \\
m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) + m_B g \ell_B \sin \beta &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \\
m_B g \ell_B \sin \beta &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) \\
\ell_B^2 \ddot{\beta} + \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) &= \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) + g \ell_B \sin \beta
\end{aligned} \tag{2}$$

Pour l'implémentation de la simulation, il faut créer une fonction telle que

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

On a ici,

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix}$$

Or, on connaît déjà l'expression de  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\beta}$  en fonction de  $x$ . Il faut donc déterminer l'expression de  $\ddot{\alpha}$  et  $\ddot{\beta}$  en fonction de  $x$ . D'après (1) et (2),

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec, } \begin{aligned} A &= \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 & B &= \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & E &= g \ell_A \sin \alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \\ C &= \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & D &= \ell_B^2 & F &= \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) + g \ell_B \sin \beta \end{aligned}$$

On calcule le déterminant  $\Delta$ ,

$$\begin{aligned}
\Delta &= AD - BC \\
&= \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ell_B^2 - \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \times \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \\
&= \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 - \ell_A^2 \cos^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2 \\
&= \left( \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \sin^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2
\end{aligned}$$

Or,  $\Delta > 0$ , la matrice est inversible, d'où on en déduit la solution,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \quad (3)$$