Simulación: Trebuchet MURLIN

M. Bataille, P. Cuello, R. Seguel y J.P. Soto

Mayo a Agosto 2016

1 Partícula amarrada a un disco

En esta sección estudiaremos el movimiento de una partícula amarrada a un disco por una cuerda. La situación esta representada en la siguiente figura. Tomaremos como condiciones iniciales, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\pi$.

Para resolver este problema vamos a estudiar el lagrangiano L y, utilizando la ecuación de Lagrange, encontraremos la ecuación diferencial que resume el movimiento de B. Luego, a partir de esta ecuación, determinaremos los valores de los ángulos para cada instante en un determinado intervalo.

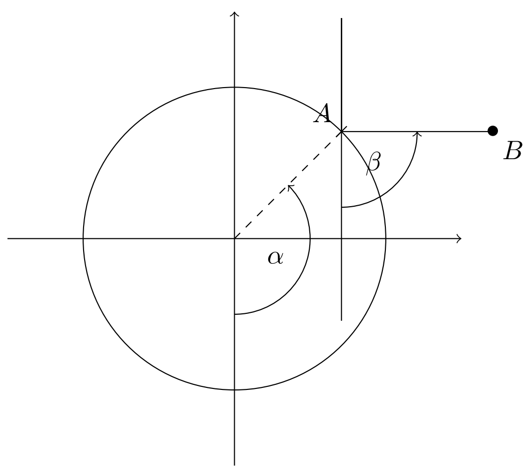


Fig. 1: Representación de la situación

Llamaremos ℓ_A el radio del disco, ℓ_B el largo de la cuerda y m_B la masa de la partícula B.

Primero determinamos las coordenadas de B,

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + \ell_B \sin\beta \\ &= \ell_A \sin\alpha + \ell_B \sin\beta \\ y_B &= y_A - \ell_B \cos\beta \\ &= -\ell_A \cos\alpha - \ell_B \cos\beta \end{aligned}$$

Derivando la posición de B en el tiempo encontramos la velocidad,

$$\begin{aligned} v_B(x) = \dot{x} = \ell_A \dot{\alpha} \cos\alpha + \ell_B \dot{\beta} \cos\beta \\ v_B(y) = \dot{y} = \ell_A \dot{\alpha} \sin\alpha + \ell_B \dot{\beta} \sin\beta \end{aligned}$$

Deducimos la expresión de la energía cinética, y la energía potencial V:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} m_B \left(\ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2\ell_A \ell_B \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 \\
V &= m_B g y_B \\
&= -m_B g \left(\ell_A \cos\alpha + \ell_B \cos\beta \right) \\
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2} m_B \left(\ell_A^2 \dot{\alpha}^2 + \ell_B^2 \dot{\beta}^2 + 2\ell_A \ell_B \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \right) + \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + m_B g \left(\ell_A \cos\alpha + \ell_B \cos\beta \right)
\end{aligned}$$

Derivamos el lagrangiano en cada grado de libertad.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= m_B \ell_A^2 \dot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + I \dot{\alpha} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_a \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I \ddot{\alpha} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= m_B \ell_B^2 \dot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) &= m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) \\
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= -m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_A \sin\alpha \\
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_B \sin\beta
\end{aligned}$$

Aplicamos la ecuación de Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right)$$

$$-m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_A \sin\alpha = m_B \ell_A^2 \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B (\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\beta} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})) + I \ddot{\alpha}$$

$$-m_B g \ell_A \sin\alpha = (I + m_b \ell_A^2) \ddot{\alpha} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + m_B \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)$$

$$(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2) \ddot{\alpha} + \ell_A \ell_B \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) = -g \ell_A \sin\alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right)$$

$$m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha}\dot{\beta} \sin(\alpha - \beta) - m_B g \ell_A \sin(\beta) = m_B \ell_B \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta)(\dot{\alpha} - \dot{\beta})$$

$$-m_B g \ell_B \sin\beta = m_B \ell_B^2 \ddot{\beta} + m_B \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - m_B \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)$$

$$\ell_B^2 \ddot{\beta} + \ell_A \ell_B \ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) = \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) - g \ell_B \sin\beta \tag{2}$$

Ahora que determinamos las ecuaciones diferenciales, nos queda implementarlas en un programa y resolverlas numéricamente. Para resolver estas ecuaciones diferenciales, tenemos que implementar una función tal que,

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Donde,

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix}$$

Pero, ya conocemos el valor de $\dot{\alpha}$ y $\dot{\beta}$ en función de x. Nos queda entonces determinar la expresión de $\ddot{\alpha}$ y $\ddot{\beta}$ en función de x.

Para determinar estos valores podemos visualizar las ecuaciones (1) y (2) como un producto entre dos matrices

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

Donde,
$$\begin{array}{lll} A = \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 & B = \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & E = -g\ell_A \sin\alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \\ C = \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) & D = \ell_B^2 & F = \ell_A \ell_B \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) - g\ell_B \sin\beta \end{array}$$

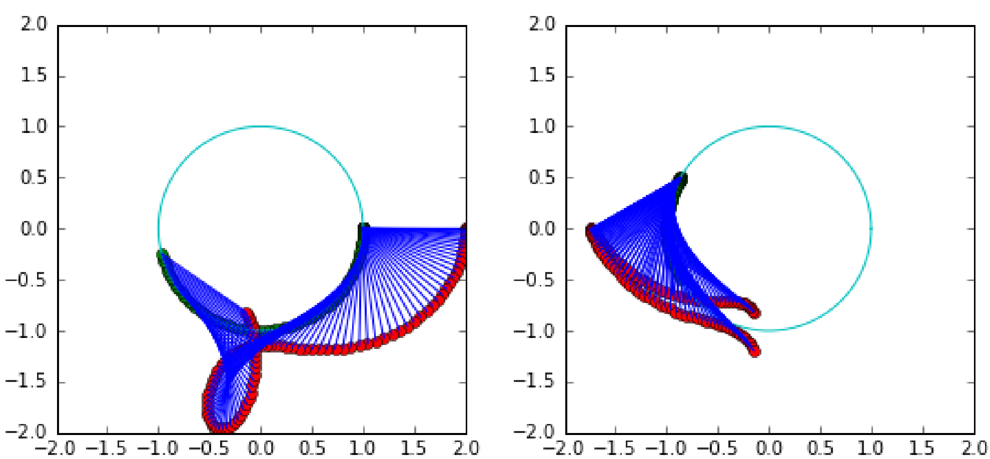
Para resolver esta ecuación calcularemos el determinante Δ de la matriz,

$$\begin{aligned} \Delta &= AD - BC \\ &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \right) \ell_B^2 - \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \times \ell_A \ell_B \cos(\alpha - \beta) \\ &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 - \ell_A^2 \cos^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2 \\ &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \sin^2(\alpha - \beta) \right) \ell_B^2 \end{aligned}$$

Podemos ver que $\Delta \neq 0$ (es más, $\Delta > 0$), por lo tanto la matriz se puede invertir. La solución es entonces,

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \tag{3}$$

Fácilmente podemos resolver numéricamente esta ecuación con un algoritmo. Así obtenemos resultados interesantes,



(a) Caida de la partícula entre 0s y 2s

(b) Caida de la partícula entre 2s y 4s

Fig. 2: Simulación de la caida libre de la particula

2 Implementación del contrapeso

Hasta ahora hemos logrado modelar el movimiento de una partícula amarrada a un disco. Para acercarnos más a la situación real, tendremos que agregar el peso que provoca que el disco comience a rotar. Diremos entonces que este peso P se deja caer a una altura inicial h_0 sin velocidad inicial. La cuerda que une el contrapeso al disco (pasando por una polea) tendrá un largo ℓ_P. Tenemos entonces la situación siguiente,

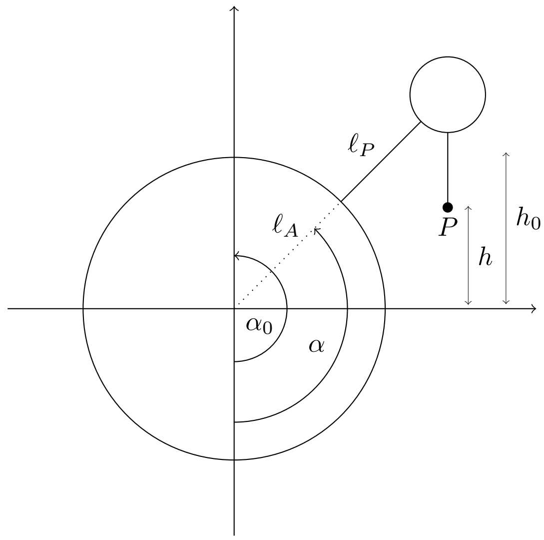


Fig. 3: Representación de la situación

A partir de la figura podemos deducir que,

$$\begin{aligned}\Delta_h &= \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\\ h_0 - h &= \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\\ h &= h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\end{aligned}$$

O, escrito de otra manera,

$$y = h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha) \tag{4}$$

A partir de esta expresión, podemos deducir,

$$\dot{y} = \ell_A\dot{\alpha}$$

Este sistema está superpuesto al sistema estudiado en la sección anterior. Por lo tanto, la expresión de la energía cinética así como la energía potencial y el lagrangiano, seran similares. Entonces, definiremos T' de manera que la energía cinética total del sistema corresponde a $T = T_0 + T'$ donde T_0 es la energía cinética del sistema anterior. Lo mismo para V' y L'.

Tenemos entonces,

$$\begin{aligned}T' &= \frac{1}{2}m_P v_P^2\\ &= \frac{1}{2}m_P\ell_A^2\dot{\alpha}^2\\ V' &= m_p g(h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha))\\ L' &= \frac{1}{2}m_P\ell_A^2\dot{\alpha}^2 - m_P g(h_0 - \ell_A(\alpha_0 - \alpha)\end{aligned}$$

Determinamos las derivadas correspondientes,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial \alpha} &= m_P g \ell_A \\
\frac{\partial L'}{\partial \dot{\alpha}} &= m_P \ell_A^2 \dot{\alpha} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\dot{\alpha}}\right) &= m_P \ell_A^2 \ddot{\alpha}
\end{aligned}
$$

Introducimos estos resultados en la ecuación (1),

$$
\left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B}\ell_A^2\right)\ddot{\alpha} + \ell_A \ell_B \ddot{\beta}\cos(\alpha - \beta) = -\frac{m_P}{m_B}\ell_A\left(\ell_A \dot{\alpha} + g\right) - g\ell_A \sin\alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta) \tag{5}
$$

A partir de esto, actualizamos los valores en la matriz,

$$
A = \frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B}\ell_A^2 \qquad E = -\frac{m_P}{m_B}\ell_A\left(\ell_A \dot{\alpha} + g\right) - g\ell_A \sin\alpha - \ell_A \ell_B \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)
$$

Calculamos el determinante,

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 + \frac{m_P}{m_B}\ell_A^2\right)\ell_B^2 - \ell_A^2 \ell_B^2 \cos^2(\alpha - \beta) \\
&= \left(\frac{I}{m_B} + \ell_A^2 \sin^2(\alpha - \beta) + \ell_A^2 \frac{m_P}{m_B}\right)\ell_B^2
\end{aligned}
$$

De nuevo, podemos ver que $\Delta \neq 0$. Así, solo tenemos que cambiar los valores de A, E y Δ para obtener la solución numérica para este sistema.