Kooperative Spieltheorie: Koalitionsspiele

Spieltheorie (ST)

Nicht-kooperative ST

Spieler treffen Entscheidungen;
jeder für sich (ohne Absprache)
-> max. der individuellen Auszahlung

Kooperative ST

Spieler können sich gemeinsam auf Erg. einigen, die dann auch verpflichten ist
-> man braucht Kontrollinstanz;
suche nach Stabilität

Koalitionsspiele (Spiele in charakteristischer Form)

- Die Modellierung als Koalitionsspiel wird angewendet, wenn *bindende Absprachen* möglich sind.
- Im Fokus: Was kann eine Gruppe von Spielern (eine *Koalition*) gemeinsam erreichen?
- Es wird dabei nicht betrachtet, wie die Koalition dies erreicht, d.h. wie sie ihre gemeinsamen Aktionen abstimmt.
- Fragen: Wie wird sie dies aufteilen? Wie sollte sie dies aufteilen? Gibt es stabile Aufteilungen?
- *Lösung eines Koalitionsspiels*: (Menge an) Payoffvektoren mit bestimmten Eigenschaften.

Koalitionsspiel

Wir betrachten nur Koalitionsspiele mit *transferierbarem Nutzen*, also Spiele bei denen der Wert, den eine Koalition erreichen kann, beliebig unter den Mitgliedern aufgeteilt werden kann.

Definition (Koalitionsspiel mit transferierbarem Nutzen)

Ein Koalitionsspiel (N, v) mit transferierbarem Nutzen besteht aus

- einer endlichen Menge $N = \{1, \ldots, n\}$ an Spielern und
- einer *charakteristischen Funktion* $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$, die jeder Teilmenge S von N einen (Koalitions-) Wert $v(S)$ zuweist.

($\mathcal{P}(N)$ ist die Potenzmenge von N.)

- Die charakteristische Funktion wird auch Koalitionsfunktion genannt.
- Wir treffen die Annahme, dass Aktionen von Spielern in $N \setminus S$ den Wert $v(S)$ nicht beeinflussen. (vgl. outside option)
- Wir interpretieren $v(S)$ als den Payoff, den sich die Koalition S aus eigener Kraft sichern kann.
- Es gelte $v(\emptyset) = 0$.
- Die Spieler in S entscheiden über mögliche Aufteilungen von $v(S)$ auf die Spieler in S (da der Nutzen transferierbar ist).

Stille Annahme: Übergeordnete Kontrollinstanz

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden *superadditive* Spiele: Eine Koalition $S \cup T$ kann immer mindestens das erreichen, was ihre disjunkten Teilkoalitionen S und T getrennt erreichen können.

Definition (Superadditive Spiele)

Ein Koalitionsspiel (N, v) ist superadditiv, wenn

$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ für alle Koalitionen S und T mit $S \cap T = \emptyset$.

Bei der Analyse von Koalitionsspielen spielt der Payoff, den die einzelnen Spieler erhalten, eine Rolle.

- Ein Payoffvektor sei bezeichnet mit $x = (x_1, \dots, x_n)$.
- Der Gesamtpayoff, den die Spieler einer Gruppe S erhalten ist also $\sum_{i \in S} x_i$.
- Anmerkung: Hier betrachten wir einen Payoffvektor und berechnen, wie hoch der gemeinsame Payoff der Spieler in S ist. Dies hat nichts mit $v(S)$ zu tun, dem Payoff, den die Koalition S aus eigener Kraft erreichen kann.

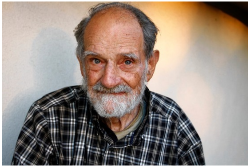
Definition (Zulässiger Payoffvektor)

In einem superadditiven Spiel ist ein Payoffvektor x zulässig, wenn

$$\sum_{i \in N} x_i \leq v(N).$$

Wir werden zwei Lösungskonzepte kennen lernen:

- Ein Mengenkonzept, das eine Menge von Payoffvektoren als Lösung vorschlägt: der Kern.
- Ein Wertkonzept, das eine eindeutige Lösung des Spiels vorschlägt: der Shapley-Wert.



Der Kern

- Der Kern enthält alle „*stabilen*“ Payoffvektoren.
- Idee: Ein Payoffvektor eines Koalitionsspiels ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, die aus eigener Kraft für jedes ihrer Mitglieder einen höheren Payoff erzielen könnte.
- Bei transferierbarem Nutzen: Ein Payoffvektor ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, deren Wert höher ist als die Summe der Payoffs ihrer Mitglieder (im betrachteten Payoffvektor).
- Da wir nur superadditive Spiele betrachten, wird immer die große Koalition den Gesamtpayoff der Kernlösung (falls diese existiert) bestimmen.
- Der Kern kann aus mehreren Payoffvektoren bestehen, er kann eindeutig sein und er kann leer sein.

Der Kern

- Der Kern enthält alle „*stabilen*“ Payoffvektoren.
- Idee: Ein Payoffvektor eines Koalitionsspiels ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, die aus eigener Kraft für jedes ihrer Mitglieder einen höheren Payoff erzielen könnte.
- Bei transferierbarem Nutzen: Ein Payoffvektor ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, deren Wert höher ist als die Summe der Payoffs ihrer Mitglieder (im betrachteten Payoffvektor).
- Da wir nur superadditive Spiele betrachten, wird immer die große Koalition den Gesamtpayoff der Kernlösung (falls diese existiert) bestimmen.
- Der Kern kann aus mehreren Payoffvektoren bestehen, er kann eindeutig sein und er kann leer sein.

Der Kern

- Der Kern enthält alle „*stabilen*“ Payoffvektoren.
- Idee: Ein Payoffvektor eines Koalitionsspiels ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, die aus eigener Kraft für jedes ihrer Mitglieder einen höheren Payoff erzielen könnte.
- Bei transferierbarem Nutzen: Ein Payoffvektor ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, deren Wert höher ist als die Summe der Payoffs ihrer Mitglieder (im betrachteten Payoffvektor).
- Da wir nur superadditive Spiele betrachten, wird immer die große Koalition den Gesamtpayoff der Kernlösung (falls diese existiert) bestimmen.
- Der Kern kann aus mehreren Payoffvektoren bestehen, er kann eindeutig sein und er kann leer sein.

Der Kern

- Der Kern enthält alle „*stabilen*“ Payoffvektoren.
- Idee: Ein Payoffvektor eines Koalitionsspiels ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, die aus eigener Kraft für jedes ihrer Mitglieder einen höheren Payoff erzielen könnte.
- Bei transferierbarem Nutzen: Ein Payoffvektor ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, deren Wert höher ist als die Summe der Payoffs ihrer Mitglieder (im betrachteten Payoffvektor).
- Da wir nur superadditive Spiele betrachten, wird immer die große Koalition den Gesamtpayoff der Kernlösung (falls diese existiert) bestimmen.
- Der Kern kann aus mehreren Payoffvektoren bestehen, er kann eindeutig sein und er kann leer sein.

Definition (Kern)

Der Kern eines Koalitionsspiels mit transferierbarem Nutzen (N, v) ist die Menge zulässiger Payoffvektoren x, für die gilt

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ für alle } S \subseteq N.$$

- Das bedeutet, dass keine Koalition einen Payoffvektor im Kern blockieren kann: $\nexists\ S \subseteq N$, so dass $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$.
- Payoffvektoren im Kern sind individuell rational: $x_i \geq v(i)$.
- Da der Kern eine Menge an Payoffvektoren ist, welche Lösung eines Systems linearer Ungleichungen sind, ist er eine abgeschlossene und konvexe Menge.

Bedeutung des Kerns

- Ein Payoffvektor, der nicht im Kern liegt, ist als Lösung instabil: Mindestens eine Koalition wird der Absprache nicht zustimmen.
- Wenn der Kern leer ist, gibt es keine Aufteilung des Gesamtwerts der großen Koalition (in superadditiven Spielen), welcher alle Gruppen zustimmen würden. Damit sind die Voraussetzungen für eine Aufteilung der Payoffs schlecht. Zum Beispiel kann dies bei der Gewinn- oder Kostenaufteilung in Unternehmen oder in Wertschöpfungsketten eine Rolle spielen.

Beispiel: Abstimmungsspiel 1

- Drei Spieler wollen ein homogenes Gut mit Wert Eins aufteilen.
- Abstimmungsregel: Die Mehrheit muss der vorgeschlagenen Aufteilung zustimmen.

Welche Aufteilungen liegen im Kern?

Formalisierung des Abstimmungsspiels 1

- Menge der Spieler: $\{1, 2, 3\}$.[1]
- Charakteristische Funktion: Was kann sich eine Koalition aus eigener Kraft sichern?
  Wenn die Koalition aus der Mehrheit der Spieler besteht, kann sie die Abstimmung in ihrem Sinne entscheiden. Wenn sie aus der Minderheit besteht, kann sie gegen den Willen der anderen nichts erreichen.
  - $v(S) = 1$ für alle S mit $|S| \geq 2$
  - $v(S) = 0$ für alle S mit $|S| < 2$

[1] Im Folgenden werden Spielermengen vereinfacht ohne Klammer dargestellt.

Kern

Der Kern ist die Menge der Lösungen des folgenden Systems linearer Ungleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\ x_1 + x_2 &\geq v(12) = 1 \\ x_1 + x_3 &\geq v(13) = 1 \\ x_2 + x_3 &\geq v(23) = 1 \\ x_1 &\geq v(1) = 0 \\ x_2 &\geq v(2) = 0 \\ x_3 &\geq v(3) = 0 \end{aligned}$$

Kern

Der Kern ist die Menge der Lösungen des folgenden Systems linearer Ungleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\ x_1 + x_2 &\geq v(12) = 1 \\ x_1 + x_3 &\geq v(13) = 1 \\ x_2 + x_3 &\geq v(23) = 1 \\ x_1 &\geq v(1) = 0 \\ x_2 &\geq v(2) = 0 \\ x_3 &\geq v(3) = 0 \end{aligned}$$

- Der Kern ist leer:
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_1 + x_2 \geq 1$ und $x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 = 0$
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_1 + x_3 \geq 1$ und $x_3 \geq 0 \Rightarrow x_2 = 0$
  - $\Rightarrow x_2 + x_3 = 0$, ein Widerspruch zu $x_2 + x_3 \geq 1$

Beispiel: Abstimmungsspiel 2

- Drei Spieler wollen ein homogenes Gut mit Wert Eins aufteilen.
- Abstimmungsregel: Alle müssen der vorgeschlagenen Aufteilung zustimmen.

Welche Aufteilungen liegen im Kern?

Kern

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\
x_1 + x_2 &\geq v(12) = 0 \\
x_1 + x_3 &\geq v(13) = 0 \\
x_2 + x_3 &\geq v(23) = 0 \\
x_1 &\geq v(1) = 0 \\
x_2 &\geq v(2) = 0 \\
x_3 &\geq v(3) = 0
\end{aligned}
$$

Kern

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\
x_1 + x_2 &\geq v(12) = 0 \\
x_1 + x_3 &\geq v(13) = 0 \\
x_2 + x_3 &\geq v(23) = 0 \\
x_1 &\geq v(1) = 0 \\
x_2 &\geq v(2) = 0 \\
x_3 &\geq v(3) = 0
\end{aligned}
$$

- Kern: Alle (x_1, x_2, x_3) mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Beispiel: Abstimmungsspiel 3

- Drei Spieler wollen ein homogenes Gut mit Wert Eins aufteilen.
- Abstimmungsregel: Mindestens 50% Stimmgewicht muss zustimmen.
- Stimmengewicht der drei Spieler: 60%, 20%, 20%

Welche Aufteilungen liegen im Kern?

Kern

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\
x_1 + x_2 &\geq v(12) = 1 \\
x_1 + x_3 &\geq v(13) = 1 \\
x_2 + x_3 &\geq v(23) = 0 \\
x_1 &\geq v(1) = 1 \\
x_2 &\geq v(2) = 0 \\
x_3 &\geq v(3) = 0
\end{aligned}
$$

Kern

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\
x_1 + x_2 &\geq v(12) = 1 \\
x_1 + x_3 &\geq v(13) = 1 \\
x_2 + x_3 &\geq v(23) = 0 \\
x_1 &\geq v(1) = 1 \\
x_2 &\geq v(2) = 0 \\
x_3 &\geq v(3) = 0
\end{aligned}
$$

- Der Kern ist eindeutig: $(1, 0, 0)$.

Shapley-Wert

- Im Gegensatz zum Kern ist der Shapley-Wert ein Wertkonzept, d.h. eine Lösungsfunktion, die genau einen Payoffvektor als Lösung auswählt.
- Er schlägt eine Aufteilung des gemeinschaftlich erreichten Werts vor, die in gewissem Sinne „fair“ ist. Er kann in vielen Spielen auch als Machtindex interpretiert werden.
- Die Idee hinter dem Shapley-Wert ist, dass jeder Spieler den Durchschnitt seiner marginalen Beiträge zum Wert aller möglichen Koalitionen bekommt.
- Der Shapley-Wert kann auch axiomatisch begründet werden.

Definition (Shapley-Wert)

Der Shapley-Wert $\phi(N, v) = (\phi_1(N, v), \ldots, \phi_n(N, v))$ im Koalitionsspiel (N, v) ist gegeben durch

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi_N} (v(S_i(\pi) \cup \{i\}) - v(S_i(\pi))) \text{ für alle } i \in N.$$

- π_N ist die Menge aller möglichen Spielerreihenfolgen. Es gibt $n!$ Reihenfolgen.
- $S_i(\pi)$: Menge an Spielern, die in der Reihenfolge π vor i kommen.
- Alternative Darstellung:

$$\phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n - |S| - 1)!(|S|)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right).$$

Intuition

Wenn die Koalition durch sequentielles Eintreten der Spieler gebildet wird und jeder Spieler seinen Beitrag $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ zur bisherigen Koalition S als faire Entschädigung verlangt, dann entspricht $\phi_i(N, v)$ diesem Wert, wenn man den Durchschnitt über alle möglichen Reihenfolgen betrachtet, gemäß derer die Koalition N sich bilden kann.

Axiomatische Begründung

Es kann gezeigt werden, dass der Shapley-Wert $\phi(N, v)$ der einzigen Lösung $\varphi(N, v)$ entspricht, die folgende vier Axiome für alle (N, v) erfüllt.

A1: Effizienz

$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N)$

Dieses Axiom verlangt, dass keine möglichen Nutzen verloren gehen. Alles was die große Koalition erreicht, wird aufgeteilt.

A2: Symmetrie

Wenn für zwei Spieler i und j gilt, dass $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(S \cup \{j\}) - v(S)$ für alle S in denen i und j nicht enthalten sind, dann gilt $\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v)$.

Dieses Axiom verlangt, dass eine Lösung nicht von der Bezeichnung der Spieler abhängt. Wenn Spieler austauschbar sind (da sie zu jeder Koalition dasselbe beitragen) dann soll auch ihr Wert der selbe sein.

A3: Null-Spieler

Wenn für einen Spieler i gilt, dass $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$ für alle S, dann gilt $\varphi_i(N, v) = 0$.

Wenn ein Spieler zu keiner Koalition etwas beiträgt, soll er auch nichts erhalten.

A4: Additivität

Ein Wert φ erfüllt Additivität, wenn für jedes Paar von Spielen (v, N) und (w, N) gilt

$$\varphi_i(v + w, N) = \varphi_i(v, N) + \varphi_i(w, N) \text{ für alle } i \in N,$$

wobei $(v + w, N)$ definiert sei durch $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ für alle $S \subseteq N$.

Wenn die Koalitionswerte zweier Spiele jeweils addiert ein anderes Spiel ergeben, dann soll auch der Wert jedes Spielers die Summe seiner Werte in den beiden Spielen sein.

Satz

Der Shapley-Wert $\phi(N, v)$ ist der einzige Wert, der A1–A4 erfüllt.

Man kann den Shapley-Wert auch über andere Axiomensysteme charakterisieren.

Beispiel: Abstimmungsspiel 1

- Drei Spieler wollen ein homogenes Gut mit Wert Eins aufteilen.
- Abstimmungsregel: Die Mehrheit muss der vorgeschlagenen Aufteilung zustimmen.

Welche Aufteilungen liegen im Kern? Welche Aufteilung schlägt der Shapley-Wert als Lösung vor?

Kern

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\
x_1 + x_2 &\geq v(12) = 1 \\
x_1 + x_3 &\geq v(13) = 1 \\
x_2 + x_3 &\geq v(23) = 1 \\
x_1 &\geq v(1) = 0 \\
x_2 &\geq v(2) = 0 \\
x_3 &\geq v(3) = 0
\end{aligned}
$$

- Kern ist leer:
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_1 + x_2 \geq 1 \Rightarrow x_3 = 0$
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_1 + x_3 \geq 1 \Rightarrow x_2 = 0$
  - $\Rightarrow x_2 + x_3 = 0$, ein Widerspruch zu $x_2 + x_3 \geq 1$

Shapley-Wert

Reihenfolge	marginaler Beitrag Spieler 1/2/3
123	0/1/0
132	0/0/1
213	1/0/0
231	0/0/1
312	1/0/0
321	0/1/0

- Shapley-Wert: $(1/3, 1/3, 1/3)$
  (z.B. ist der durchschnittliche marginale Beitrag von Spieler 1
  $\phi_1(N, v) = (0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0)/6 = 1/3$.)

Der Shapley-Wert ist $(1/3, 1/3, 1/3)$ und der Kern ist leer.

Beispiel: Abstimmungsspiel 2

- Drei Spieler wollen ein homogenes Gut mit Wert Eins aufteilen.
- Abstimmungsregel: Alle müssen der vorgeschlagenen Aufteilung zustimmen.

Welche Aufteilungen liegen im Kern? Welche Aufteilung schlägt der Shapley-Wert als Lösung vor?

Kern

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\
x_1 + x_2 &\geq v(12) = 0 \\
x_1 + x_3 &\geq v(13) = 0 \\
x_2 + x_3 &\geq v(23) = 0 \\
x_1 &\geq v(1) = 0 \\
x_2 &\geq v(2) = 0 \\
x_3 &\geq v(3) = 0
\end{aligned}
$$

- Kern: Alle (x_1, x_2, x_3) mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Shapley-Wert

Reihenfolge	marginaler Beitrag Spieler 1/2/3
123	0/0/1
132	0/1/0
213	0/0/1
231	1/0/0
312	0/1/0
321	1/0/0

- Shapley-Wert: $(1/3, 1/3, 1/3)$
  (z.B. ist der durchschnittliche marginale Beitrag von Spieler 1
  $\phi_1(N, v) = (0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1)/6 = 1/3$.)

Der Shapley-Wert schlägt eine gleichmäßige Aufteilung vor, die im Kern liegt.

Beispiel: Abstimmungsspiel 3

- Drei Spieler wollen ein homogenes Gut mit Wert Eins aufteilen.
- Abstimmungsregel: Mindestens 50% Stimmgewicht muss zustimmen.
- Stimmengewicht der drei Spieler: 60%, 20%, 20%

Welche Aufteilungen liegen im Kern? Welche Aufteilung schlägt der Shapley-Wert als Lösung vor?

Kern

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\
x_1 + x_2 &\geq v(12) = 1 \\
x_1 + x_3 &\geq v(13) = 1 \\
x_2 + x_3 &\geq v(23) = 0 \\
x_1 &\geq v(1) = 1 \\
x_2 &\geq v(2) = 0 \\
x_3 &\geq v(3) = 0
\end{aligned}
$$

- Der Kern ist eindeutig: $(1, 0, 0)$.

Shapley-Wert

Reihenfolge	marginaler Beitrag Spieler 1/2/3
123	1/0/0
132	1/0/0
213	1/0/0
231	1/0/0
312	1/0/0
321	1/0/0

- Shapley-Wert: $(1, 0, 0)$
  (z.B. ist der durchschnittliche marginale Beitrag von Spieler 1
  $\phi_1(N, v) = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)/6 = 1$.)

Der Shapley-Wert stimmt mit der eindeutigen Kern-Lösung überein.

Beispiel: Abstimmungsspiel 4

- Drei Spieler wollen ein homogenes Gut mit Wert Eins aufteilen.
- Abstimmungsregel: Mindestens 75% Stimmgewicht muss zustimmen.
- Stimmengewicht der drei Spieler: 60%, 20%, 20%

Welche Aufteilungen liegen im Kern? Welche Aufteilung schlägt der Shapley-Wert als Lösung vor?

Kern

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= v(123) = 1 \\
x_1 + x_2 &\geq v(12) = 1 \\
x_1 + x_3 &\geq v(13) = 1 \\
x_2 + x_3 &\geq v(23) = 0 \\
x_1 &\geq v(1) = 0 \\
x_2 &\geq v(2) = 0 \\
x_3 &\geq v(3) = 0
\end{aligned}
$$

- Kern: $(1, 0, 0)$
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_1 + x_2 \geq 1 \Rightarrow x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 1$
  - $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_1 + x_3 \geq 1 \Rightarrow x_2 = 0$
  - $x_1 + x_2 = 1$ und $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

Shapley-Wert

Reihenfolge	marginaler Beitrag Spieler 1/2/3
123	0/1/0
132	0/0/1
213	1/0/0
231	1/0/0
312	1/0/0
321	1/0/0

- Shapley-Wert: $(2/3, 1/6, 1/6)$
  (z.B. ist der durchschnittliche marginale Beitrag von Spieler 1
  $\phi_1(N, v) = (0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1)/6 = 2/3$.)

Der Shapley-Wert schlägt die Aufteilung $(2/3, 1/6, 1/6)$ vor und die eindeutige Kern-Lösung ist $(1, 0, 0)$.

Einfache Spiele

Definition (Einfaches Spiel)

Ein Koalitionsspiel (N, v) heißt einfach, wenn für jede Koalition $S \subseteq N$ entweder $v(S) = 0$ oder $v(S) = 1$ gilt.

- Eine Koalition S für die $v(S) = 1$ gilt heißt Gewinnerkoalition.
- Ein Spieler, der in jeder Gewinnerkoalition des Spiels ist, heißt Veto-Spieler.

Satz

- *Wenn es in einem einfachen Spiel keinen Veto-Spieler gibt, ist der Kern leer.*
- *Wenn es in einem einfachen Spiel (einen oder mehrere) Veto-Spieler gibt, besteht der Kern aus allen nicht-negativen zulässigen Payoffvektoren, in denen die anderen (Nicht-Veto-) Spieler Null erhalten.*

Konvexe Spiele

Gibt es eine Charakterisierung von Spielen, für die der Shapley-Wert im Kern liegt?

Definition (Konvexes Spiel)

Ein Spiel heißt konvex, wenn für jeden Spieler i der marginale Beitrag von i größer ist wenn die Koalition wächst; genauer, wenn für alle $S \subset T$ und $i \in N \setminus T$ gilt, dass

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Satz

Der Shapley-Wert eines konvexen Spiels liegt im Kern.

Aus diesem Satz folgt direkt, dass der Kern eines konvexen Spiels nicht leer ist.