

# Advanced Game Thoery

Prof. Dr. Clemens Puppe

Vorlesungsmitschrieb

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

# Contents

<b>1</b>	<b>Noncooperative Games</b>	<b>2</b>
1.1	Basic Elements of Noncooperative Games . . . . .	2
1.2	Rationalisable Strategies . . . . .	6
1.3	Nash Equilibrium . . . . .	9
1.4	Subgame Perfection in Dynamic Games . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Kooperative Spiele</b>	<b>14</b>
2.1	Der Kern . . . . .	17
2.2	Der Shapley-Wert . . . . .	18
2.3	Einfache Spiele . . . . .	21
2.4	Konvexe Spiele . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Evolutionäre Spieltheorie</b>	<b>23</b>
3.1	Spiele in Normalform . . . . .	23

# Chapter 1

## Noncooperative Games

### 1.1 Basic Elements of Noncooperative Games

**Definition:** A *game* is a formal representation of a situation in which a number of individuals interact in a setting of strategic interdependence.

- *The players: Who is involved?*
- *The rules: Who moves when? What do they know when they move? What can they do?*
- *The outcomes: For each possible set of actions by the players, what is the outcome of the game?*
- *The payoffs: What are the players' preferences over the possible outcomes?*

**Definition** (Information):

- a) **Information Set:** A player doesn't know which of the nodes in the information set she is actually at. Therefore, at any decision node in a player's information set, there must be the same possible actions. More formally, in the extensive form, an information set is a set of decision nodes such that:

- (i) Every node in the set belongs to one player.
- (ii) When play reaches the information set, the player with the move cannot differentiate between nodes within the information set, i.e. if the information set contains more than one node, the player to whom that set belongs does not know which node in the set has been reached.

Therefore, at any decision node in a player's information set, there must be the same possible actions.

- b) **Perfect Information:** A game is said to be of perfect information if each information set contains a single decision node. Otherwise, it is a game of **imperfect information**. In other words, perfect information persists, if each player, when making any decision, is perfectly informed of all the events that have previously occurred, including the early equipment.

**Definition (Extensive Form Game):** A game in **extensive form** consists of:

- (i) A finite set of nodes  $\mathcal{X}$ , a finite set of possible actions  $\mathcal{A}$ , and a finite set of players  $\{1, \dots, l\}$ .
- (ii) A function  $p: \mathcal{X} \rightarrow \{\mathcal{X} \cup \emptyset\}$  specifying a single immediate predecessor of each node  $x$ ;  $p(x) \in \mathcal{X}$  except for one element  $x_0$ , the **initial node**. The immediate **successor node** of  $x$  are  $s(x) = p^{-1}(x)$ .

To have a tree structure, a predecessor can never be a successor and vice versa. The set of **terminal nodes**  $T = \{x \in \mathcal{X} : s(x) = \emptyset\}$ . All other nodes  $X \setminus T$  are **decision nodes**.

(iii) A function  $\alpha: \mathcal{X} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathcal{A}$  giving the action that leads to any non-initial node  $x$  from its immediate predecessor  $p(x)$  with  $x', x'' \in s(x); x' \neq x'' \Rightarrow \alpha(x') \neq \alpha(x'')$ . The set of choices at decision node  $x$  is  $c(x) = \{a \in \mathcal{A}: a = \alpha(x') \text{ for some } x' \in s(x)\}$ .

(iv) A collection of information sets  $\mathcal{H}$ , and a function  $H: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}$  assigning each decision node  $x$  to an information set  $H(x) \in \mathcal{H}$  with  $c(x) = c(x')$  if  $H(x) = H(x')$ . The choices available at information set  $H$  can be written as

$$C(H) = \{a \in \mathcal{A}: a \in c(x) \text{ for } x \in H\}.$$

(v) A function  $\iota: \mathcal{H} \rightarrow \{0, 1, \dots, l\}$  assigning a player to each information set ( $i = 0$  'nature'). The collection of player  $i$ 's information set is denoted by

$$\mathcal{H}_i = \{H \in \mathcal{H}: i = \iota(H)\}.$$

(vi) A function  $\rho: \mathcal{H}_0 \times \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  assigning a probability to each action of nature with  $\rho(H, a) = 0$  if  $a \notin C(H)$  und  $\sum_{a \in C(H)} \rho(H, a) = 1$  for all  $H \in \mathcal{H}_0$ .

(vii) A collection of payoff function  $u = \{u_1(\cdot), \dots, u_l(\cdot)\}$ , where  $u_i: T \rightarrow \mathbb{R}$ .

**A game in extensive form:**  $\Gamma_E = \{\mathcal{X}, \mathcal{A}, I, p(\cdot), \alpha(\cdot), \mathcal{H}, H(\cdot), \iota(\cdot), \rho(\cdot), u\}$ .

**Comment:** Restrictions of this definition:

- a) Finite set of actions
- b) Finite number of moves
- c) Finite number of players

**Definition (Strategy):** Let  $\mathcal{H}_i$  denote the collection of player  $i$ 's information sets,  $\mathcal{A}$  the set of possible actions in the game, and  $C(H) \subset \mathcal{A}$  the set of actions possible at information set  $H$ . A **strategy** for player  $i$  is a function  $s_i: \mathcal{H}_i \Rightarrow \mathcal{A}$  such that  $s_i(H) \in C(H)$  for all  $H \in \mathcal{H}_i$ .

**Definition (Normal Form Representation):** For a game with  $I$  players, the **normal form representation**  $\Gamma_N$  specifies for each player  $i$  a set of strategies  $\mathcal{S}_i$  (with  $s_i \in \mathcal{S}_i$ ) and a payoff function  $u_i(s_1, \dots, s_l)$ , formally

$$\Gamma_N = [I, \{\mathcal{S}_i\}, \{u_i(\cdot)\}].$$

**Definition:**

- a)  $s_i: \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{A}$  describes deterministic choices at each  $H \in \mathcal{H}_i$  and is called a **pure strategy**
- b) a **mixed strategy** is a probability distribution over all pure strategies  $\sigma_i: \mathcal{S}_i \rightarrow [0, 1]$ , with  $\sigma_i(s_i) \geq 0$  and  $\sum_{s_i \in \mathcal{S}_i} \sigma_i(s_i) = 1$ .
- c) player  $i$ 's set of possible mixed strategies can be associated with the points of the simplex  $\Delta(\mathcal{S}_i)$ , called the **mixed extension** of  $\mathcal{S}_i$ .
- d) since we assume that individuals are expected utility maximisers, player  $i$ 's utility of a profile of mixed strategies  $\sigma = (\sigma_i, \dots, \sigma_l)$  is given by

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in \mathcal{S}} [\sigma_1(s_1) \cdot \sigma_2(s_2) \cdot \dots \cdot \sigma_l(s_l)] \cdot u_i(s),$$

where  $s = (s_1, \dots, s_l)$ .

**Definition** (Behaviour Strategy): *Given an extensive form game  $\Gamma_E$ , a **behaviour strategy** for player  $i$  specifies for every information set  $H \in \mathcal{H}_i$  and action  $a \in C(H)$ , a probability  $\lambda_i(a, H) \geq 0$ , with*

$$\sum_{a \in C(H)} \lambda_i(a, H) = 1 \text{ for all } H \in \mathcal{H}_i.$$

**Definition** (Perfect Recall): *A player has **perfect recall** if he doesn't "forget" what she once knew, including her own actions. That means, perfect recall refers to the assumption that, at every decision node, each Player remembers what he did in prior moves, and each player remembers everything that he knew before; effectively, the assumption is one that players never forget information once it is acquired.*

**Theorem 1.1:** *If  $\Gamma_E$  is an extensive form game with perfect recall, then for any mixed strategy there is an outcome equivalent behaviour strategy and vice versa.*

## 1.2 Rationalisable Strategies

Central question of Game Theory: What should we expect to observe in a game played by rational players? Or more precisely: What should we expect to observe in a game played by rational players who are fully knowledgeable about the structure of the game and each others' rationality?

We first address the above question for simultaneous-move games, which we study using their normal form representation. We use the following notation:

- $\Gamma_N = [I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$  if we consider pure strategies only,

$\Gamma_N = [I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$  if we allow for mixed strategies

- $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_l) \in \mathcal{S}_{-i}$  where  $\mathcal{S}_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_l$
- $s = (s_i, s_{-i})$

What should we expect to observe in the Prisoners' Dilemma?

**Definition** (Strictly Dominant Strategy): *A strategy  $s_i \in \mathcal{S}_i$  is **strictly dominant** for player  $i$  in game  $\Gamma_N = [I, \{\mathcal{S}_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$  if for all  $s'_i \neq s_i$ :*

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$$

*for all  $s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$ .*

Applied to Prisoner's Dilemma: Confess is a strictly dominant strategy for each player.

**Definition** (Strictly Dominated Strategy):  *$s_i \in \mathcal{S}_i$  is **strictly dominated** for player  $i$  in game  $\Gamma_N$  if there exists another strategy  $s'_i \in \mathcal{S}_i$  such that:*

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

*for all  $s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$ . In this case we say that  $s'_i$  strictly dominates  $s_i$ .*

**Definition** (Weakly Dominated Strategy):  *$s_i \in \mathcal{S}_i$  is **weakly dominated** for player  $i$  in game  $\Gamma_N$  if there exists another strategy  $s'_i \in \mathcal{S}_i$  such that:*

$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

*for all  $s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}$ , with strict inequality for at least one  $s_{-i}$ .*



In this game, the iterated elimination of strictly dominated strategies still leads to a unique prediction. In general, the order of elimination of strictly dominated strategies does not matter! How about iterated elimination of weakly dominated strategies?

**Definition:** A strategy  $\sigma_i \in \Delta(\mathcal{S}_i)$  is strictly dominated for  $i$  in game  $\Gamma_N = [I, \{\Delta(\mathcal{S}_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$  if there exists another strategy  $\sigma'_i \in \Delta(\mathcal{S}_i)$  such that for all  $\sigma_{-i} \in \Pi_{j \neq i} \Delta(\mathcal{S}_j)$ :

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

**Proposition 1.2:** Player  $i$ 's pure strategy  $s_i \in \mathcal{S}_i$  is strictly dominated in a game  $\Gamma_N = [I, \{\Delta(\mathcal{S}_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$  if and only if there exists another strategy  $\sigma'_i \in \Delta(\mathcal{S}_i)$  such that

$$u_i(\sigma'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \text{ for all } s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}.$$

*Proof:* This follows because we can write

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - u_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in \mathcal{S}_{-i}} [\Pi_{k \neq i} \sigma_k(s_k)] [u_i(\sigma'_i, s_{-i}) - u_i(s_i, s_{-i})].$$

And this expression is positive for all  $\sigma_{-i}$  if and only if  $u_i(\sigma'_i, s_{-i}) - u_i(s_i, s_{-i})$  is positive for all  $s_{-i}$ . □

**Definition (Best response):** The strategy  $\sigma_i$  is a **best response** for player  $i$  to her rivals' strategies  $\sigma_{-i}$  if:

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$$

for all  $\sigma'_i \in \Delta(\mathcal{S}_i)$ . Strategy  $\sigma_i$  is never a best response if there is no  $\sigma_{-i}$  for which  $\sigma_i$  is a best response.

**Definition (Rationalisable Strategies):** In game  $\Gamma_N = [I, \{\Delta(\mathcal{S}_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ , the strategies in  $\Delta(\mathcal{S}_i)$  that survive the iterated elimination of strategies that are never a best response are known as player  $i$ 's **rationalisable strategies**.

## 1.3 Nash Equilibrium

**Definition** (Nash Equilibrium): *A strategy profile  $s = (s_1, \dots, s_l)$  constitutes a Nash equilibrium (NE) of game  $\Gamma_N$  if for every  $i = 1, \dots, l$*

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \text{ for all } s'_i \in \mathcal{S}_i$$

*In the game on the previous slide, there is only one Nash equilibrium.*

Why should we care about Nash equilibria? Why should players' conjecture about each other's play be correct?

- a) If there is a unique predict outcome to a game, it must be a Nash-Equilibrium.
- b) Thus, a “focal point” (see example part 2) can be the unique predicted outcome to a game only if it is a Nash-Equilibrium.
- c) An agreement between players is self-enforcing if it is a Nash-Equilibrium.
- d) In a repeated game, a social convention to play the game might emerge. Only a Nash-Equilibrium can be maintained as a stable convention.

**Definition** (Mixed Strategy Nash Equilibrium): *A mixed strategy profile  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$  constitutes a Nash equilibrium of game  $\Gamma_N$  if for every  $i = 1, \dots, l$ ,*

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \text{ for all } \sigma'_i \in \Delta(\mathcal{S}_i).$$

**Proposition 1.3:** Let  $\mathcal{S}_i^+ \subset \mathcal{S}$  denote the set of pure strategies that player  $i$  plays with positive probability in mixed strategy profile  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ . Strategy profile  $\sigma$  is a Nash equilibrium in game  $\Gamma_N$  if and only if for all  $i = 1, \dots, l$ ,

- a)  $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i})$  for all  $s_i, s'_i \in \mathcal{S}_i^+$
  - b)  $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s'_i, \sigma_{-i})$  for all  $s_i \in \mathcal{S}_i^+$  and all  $s'_i \notin \mathcal{S}_i^+$ .
- In a Nash equilibrium each player's strategy is a best response to all other players' strategies.
  - Let  $b_i(s_{-i})$  denote the best response(s) of player  $i$  to the strategies  $s_{-i}$
  - Then  $b_i: \mathcal{S}_{-i} \rightarrow \mathcal{S}_i$  is a correspondence, called player  $i$ 's best response correspondence.
  - Define  $b: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  by  $(s_1, \dots, s_l) \mapsto b_1(s_{-1}) \times \dots \times b_l(s_{-l})$
  - A strategy profile  $s \in \mathcal{S}$  is a Nash equilibrium if and only if  $s \in b(s)$
  - Thus, to prove existence of Nash equilibria, we have to show that a fixed point of the correspondence  $b$  exists
  - To do so, we employ Kakutani's fixed-point theorem

**Lemma 1.4:** If  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_l$  are nonempty, compact and convex and  $u_i$  is continuous in  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_l$  and quasi-concave, then player  $i$ 's best response correspondence  $b_i(\cdot)$  is nonempty-valued, convex-valued and upper hemicontinuous.

**Definition (Quasi-Concave Function):** The function  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , defined on the convex set  $A \subset \mathbb{R}^N$ , is quasi-concave if its upper contour sets  $\{x \in A: f(x) \geq t\}$  are convex sets.

**Definition (Upper Hemicontinuous Correspondence):** Given  $A \subset \mathbb{R}^N$  and the closed set  $Y \subset \mathbb{R}^K$ , the correspondence  $f: A \rightarrow Y$  is upper hemicontinuous if it has a closed graph and the images of compact sets are bounded.

**Theorem 1.5** (Kakutani's Fixed Point Theorem): *Suppose that  $A \subset \mathbb{R}^N$  is a nonempty, compact, convex set, and that  $f: A \rightarrow A$  is a correspondence from  $A$  into itself that is nonempty-valued, convex-valued and upper hemicontinuous.*

*Then  $f(\cdot)$  has a fixed point; that is, there is an  $x \in A$  such that  $x \in f(x)$ .*

**Proposition 1.6:** A Nash equilibrium exists in game  $\gamma_N$  if for all  $i = 1, \dots, l$ ,

- a)  $\mathcal{S}_i$  is a nonempty, convex, and compact subset of some Euclidean space  $\mathbb{R}^M$
- b)  $u_i(s_1, \dots, s_l)$  is continuous in  $(s_1, \dots, s_l)$  and quasi-concave in  $s_i$ .

*Proof:* By the lemma about strategy sets,  $b(\cdot)$  is nonempty, convex-valued and upper hemicontinuous. By Kakutani's fixed point theorem there exists an  $s \in \mathcal{S}$  such that  $s \in b(s)$ . By the definition of  $b$ :  $s_i \in b_i(s_{-i})$  for all  $i = 1, \dots, l$ . Thus  $s$  is a Nash equilibrium. □

**Proposition 1.7:** Every Game  $\Gamma_N = [I, \{\Delta(\mathcal{S}_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$  in which the sets  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_l$  have a finite number of elements has a mixed strategy Nash equilibrium.

This follows from the previous proposition on the existence of Nash equilibria because the set of mixed strategies  $\Delta(\mathcal{S}_i)$  of a finite number of pure strategies is nonempty, convex, and compact.

## 1.4 Subgame Perfection in Dynamic Games

**Proposition 1.8** (Principle of sequential rationality): A strategy should specify optimal actions at every point in the game tree given the opponents' strategies.

**Proposition 1.9** (Backward induction): Backward induction is an iterative procedure to identify Nash equilibria that satisfy the principle of sequential rationality in dynamic games:

- Determine the optimal actions at the final decision nodes in the tree.
- Derive the reduced extensive form game by deleting the part of the game following these decision nodes and replacing them by the payoffs that result from the optimal play.
- Proceed to the next-to-last decision nodes and solve for the optimal actions to be taken there by players who correctly anticipate the actions that will follow at the final nodes.
- Continue in this way backwards through the game tree.

**Theorem 1.10** (Zermelo's Theorem): *Every finite game of perfect information  $\Gamma_E$  has a pure strategy Nash equilibrium that can be derived through backward induction. Moreover, if no player has the same payoffs at any two terminal nodes, then there is a unique Nash equilibrium that can be derived in this manner.*

**Definition** (Subgame): *A subgame of an extensive form game  $\Gamma_E$  is a subset of the game having the following properties:*

- a) *It begins with an information set containing a single decision node, contains all the decision nodes that are successors of this node, and contains only these nodes.*
- b) *If decision node  $x$  is in the subgame, then every  $x' \in H(x)$  is also, where  $H(x)$  is the information set that contains decision node  $x$ .*

**Definition** (Subgame Perfect Nash Equilibrium): *A profile of strategies  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$  in an  $l$ -player extensive form game  $\Gamma_E$  is a subgame perfect Nash equilibrium (SPNE) if it induces a Nash equilibrium in every subgame of  $\Gamma_E$ .*

**Proposition 1.11:** Consider an extensive form game  $\Gamma_E$  and some subgame  $G$  of  $\Gamma_E$ . Suppose that strategy profile  $\gamma^G$  is a SPNE in subgame  $G$ , and let  $\Gamma_E$  be the reduced game formed by replacing subgame  $G$  by a terminal node with payoffs equal to those arising from play of  $\sigma^G$ . Then:

- a) In any SPNE  $\sigma$  of  $\sigma_E$  in which  $\sigma^G$  is the play in subgame  $G$ , players' moves at information sets outside subgame  $G$  must constitute a SPNE of reduced game  $\Gamma'_E$ .
- b) If  $\sigma'$  is a SPNE of  $\Gamma'_E$ , then the strategy profile  $\sigma$  specifies the moves in  $\sigma^G$  information sets in subgame  $G$  and that specifies the moves in  $\sigma'$  at information sets not in  $G$  is a SPNE of  $\Gamma_E$ .

Now consider the bilateral bargaining gam with infinite horizon:

**Proposition 1.12** (Shaked & Sutton (1984)): The infinite horizon bargaining game has a unique SPNE in which the players reach an agreement in period 1 such that player 1 earns  $\frac{v}{1+\delta}$  and player 2  $\frac{\delta v}{1+\delta}$ .

# Chapter 2

## Kooperative Spiele

Im Kontrast zur nicht-kooperativen Spieltheorie, die sich mit Spielern die individuell Entscheidungen treffen und ihre individuelle Auszahlung ohne Absprache maximieren, beschäftigt, gibt es die kooperative Spieltheorie, mit der wir uns im folgenden beschäftigen. In der kooperativen Spieltheorie können sich die Spieler gemeinsam auf Ergebnis einigen, die dann auch verpflichtend sind. Man braucht dazu Kontrollinstanzen; Wir suchen nach Stabilität und Ergebnissen, die sich in solchen Situationen ergeben.

### Koalitionsspiele (Spiele in charakteristischer Form)

- Die Modellierung als Koalitionsspiel wird angewendet, wenn bindende Absprachen möglich sind.
- Im Fokus: Was kann eine Gruppe von Spielern (eine *Koalition*) gemeinsam erreichen?
- Es wird dabei nicht betrachtet, wie die Koalition dies erreicht, d.h. wie sie ihre gemeinsamen Aktionen abstimmt.
- Fragen: Wie wird sie dies aufteilen? Wie sollte sie dies aufteilen? Gibt es stabile Aufteilungen?

- *Lösung eines Koalitionsspiels*: (Menge an) Payoffvektoren mit bestimmten Eigenschaften.

Wir betrachten nur Koalitionsspiele mit transferierbarem Nutzen, also Spiele bei denen der Wert, den eine Koalition erreichen kann, beliebig unter den Mitgliedern aufgeteilt werden kann.

**Definition** (Koalitionsspiel mit transferierbarem Nutzen): *Ein Koalitionsspiel  $(N, v)$  mit transferierbarem Nutzen besteht aus*

- *einer endlichen Menge  $N = \{1, \dots, n\}$  an Spielern und*
- *einer charakteristischen Funktion  $v: \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ , die jeder Teilmenge  $S$  von  $N$  einen (Koalitions-) Wert  $v(S)$  zuweist.*

( $\mathcal{P}(N)$  ist die Potenzmenge von  $N$ .)

**Bemerkung:**

- Die charakteristische Funktion wird auch Koalitionsfunktion genannt.
- Wir treffen die Annahme, dass Aktionen von Spielern in  $N \setminus S$  den Wert  $v(S)$  nicht beeinflussen (vgl. “outside option”).
- Wir interpretieren  $v(S)$  als den Payoff, den sich die Koalition  $S$  aus eigener Kraft sichern kann.
- Es gelte  $v(\emptyset) = 0$ .
- Die Spieler in  $S$  entscheiden über mögliche Aufteilungen von  $v(S)$  auf die Spieler in  $S$  (da der Nutzen transferierbar ist).



Stille Annahme: Existenz einer übergeordneten Kontrollinstanz.

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden superadditive Spiele: Eine Koalition  $S \cup T$  kann immer mindestens das erreichen, was ihre disjunkten Teilkoalitionen  $S$  und  $T$  getrennt erreichen können.

**Definition** (Superadditive Spiele): *Ein Koalitionsspiel  $(N, v)$  ist superadditiv, wenn*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

*für alle Koalitionen  $S$  und  $T$  mit  $S \cap T = \emptyset$ .*

Bei der Analyse von Koalitionsspielen spielt der Payoff, den die einzelnen Spieler erhalten, eine Rolle.

- Ein Payoffvektor sei bezeichnet mit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .
- Der Gesamtpayoff, den die Spieler einer Gruppe  $S$  erhalten ist also  $\sum_{i \in S} x_i$ .
- Anmerkung: Hier betrachten wir einen Payoffvektor und berechnen, wie hoch der gemeinsame Payoff der Spieler in  $S$  ist. Dies hat nichts mit  $v(S)$  zu tun, dem Payoff, den die Koalition  $S$  aus eigener Kraft erreichen kann.

**Definition** (Zulässiger Payoffvektor): *In einem superadditiven Spiel ist ein Payoffvektor  $x$  zulässig, wenn*

$$\sum_{i \in N} x_i \leq v(N)$$

Wir werden zwei Lösungskonzepte kennen lernen:

- Ein Mengenkonzept, das eine Menge von Payoffvektoren als Lösung vorschlägt: der Kern.
- Ein Wertkonzept, das eine eindeutige Lösung des Spiels vorschlägt: der Shapley-Wert.

## 2.1 Der Kern

- Der Kern enthält alle “stabilen” Payoffvektoren.
- Idee: Ein Payoffvektor eines Koalitionsspiels ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, die aus eigener Kraft für jedes ihrer Mitglieder einen höheren Payoff erzielen könnte.
- Bei transferierbarem Nutzen: Ein Payoffvektor ist stabil, wenn es keine Koalition gibt, deren Wert höher ist als die Summe der Payoffs ihrer Mitglieder (im betrachteten Payoffvektor).
- Da wir nur superadditive Spiele betrachten, wird immer die große Koalition den Gesamtpayoff der Kernlösung (falls diese existiert) bestimmen.
- Der Kern kann aus mehreren Payoffvektoren bestehen, er kann eindeutig sein und er kann leer sein.

**Definition (Kern):** *Der Kern eines Koalitionsspiels mit transferierbarem Nutzen  $(N, v)$  ist die Menge zulässiger Payoffvektoren  $x$ , für die gilt*

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

*für alle  $S \subseteq N$ .*

### Eigenschaften:

- Das bedeutet, dass keine Koalition einen Payoffvektor im Kern blockieren kann:  
 $\exists! S \subseteq N$ , so dass  $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$ .
- Payoffvektoren im Kern sind individuell rational:  $x_i \geq v(i)$ .
- Da der Kern eine Menge an Payoffvektoren ist, welche Lösung eines Systems linearer Ungleichungen sind, ist er eine abgeschlossene und konvexe Menge.

### 2.1 Bedeutung des Kerns:

- a) Ein Payoffvektor, der nicht im Kern liegt, ist als Lösung instabil: Mindestens eine Koalition wird der Absprache nicht zustimmen.
- b) Wenn der Kern leer ist, gibt es keine Aufteilung des Gesamtwerts der großen Koalition (in superadditiven Spielen), welcher alle Gruppen zustimmen würden. Damit sind die Voraussetzungen für eine Aufteilung der Payoffs schlecht. Zum Beispiel kann dies bei der Gewinn- oder Kostenaufteilung in Unternehmen oder in Wertschöpfungsketten eine Rolle spielen.

## 2.2 Der Shapley-Wert

- Im Gegensatz zum Kern ist der Shapley-Wert ein Wertkonzept, d.h. eine Lösungsfunktion, die genau einen Payoffvektor als Lösung auswählt.
- Er schlägt eine Aufteilung des gemeinschaftlich erreichten Werts vor, die in gewissem Sinne “fair” ist. Er kann in vielen Spielen auch als Machtindex interpretiert werden.

- Die Idee hinter dem Shapley-Wert ist, dass jeder Spieler den Durchschnitt seiner marginalen Beiträge zum Wert aller möglichen Koalitionen bekommt.
- Der Shapley-Wert kann auch axiomatisch begründet werden.

**Definition** (Shapely-Wert): *Der Shapley-Wert  $\phi(N, v) = (\phi_1(N, v), \dots, \phi_n(N, v))$  im Koalitionsspiel  $(N, v)$  ist gegeben durch*

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi_N} (v(S_i(\pi) \cup \{i\}) - v(S_i(\pi)))$$

für alle  $i \in N$ .

- $\pi_N$  ist die Menge aller möglichen Spielerreihenfolgen. Es gibt  $n!$  Reihenfolgen.
- $S_i(\pi)$ : Menge an Spielern, die in der Reihenfolge  $\pi$  vor  $i$  kommen.
- Alternative Darstellung:

$$\phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n - |S| - 1)! (|S|)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

### Intuition

Wenn die Koalition durch sequentielles Eintreten der Spieler gebildet wird und jeder Spieler seinen Beitrag  $v(S \cup \{i\}) - v(S)$  zur bisherigen Koalition  $S$  als faire Entschädigung verlangt, dann entspricht  $\phi_i(N, V)$  diesem Wert, wenn man den Durchschnitt über alle möglichen Reihenfolgen betrachtet, gemäß derer die Koalition  $N$  sich bilden kann.

Es kann gezeigt werden, dass der Shapley-Wert  $\phi(N, v)$  der einzigen Lösung  $\varphi(N, v)$  entspricht, die folgenden vier Axiome für alle  $(N, v)$  erfüllt.

## 2.2 Axiomatische Begründung:

A1 Effizienz:  $\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N)$

*Dieses Axiom verlangt, dass keine möglichen Nutzen verloren gehen. Alles was die große Koalition erreicht, wird aufgeteilt.*

A2 Symmetrie: Wenn für zwei Spieler  $i$  und  $j$  gilt, dass

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(S \cup \{j\}) - v(S)$$

für alle  $S$  in denen  $i$  und  $j$  nicht enthalten sind, dann gilt  $\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v)$ .

*Dieses Axiom verlangt, dass eine Lösung nicht von der Bezeichnung der Spieler abhängt. Wenn Spieler austauschbar sind (da sie zu jeder Koalition dasselbe beitragen) dann soll auch ihr Wert der selbe sein.*

A3 Null-Spieler: Wenn für einen Spieler  $i$  gilt, dass

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$$

für alle  $S$ , dann gilt  $\varphi_i(N, v) = 0$ .

*Wenn ein Spieler zu keiner Koalition etwas beiträgt, soll er auch nichts erhalten.*

A4 Additivität: Ein Wert  $\varphi$  erfüllt Additivität, wenn für jedes Paar von Spielen  $(v, N)$  und  $(w, N)$  gilt

$$\varphi_i(v + w, N) = \varphi_i(v, N) + \varphi_i(w, N)$$

für alle  $i \in N$ , wobei  $(v + w, N)$  definiert sei durch  $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$  für alle  $S \subseteq N$ . *Wenn die Koalitionswerte zweier Spiele jeweils addiert ein anderes Spiel ergeben, dann soll auch der Wert jedes Spielers die Summe seiner Werte in den beiden Spielen sein.*

**Satz 2.3:** *Der Shapley-Wert  $\phi(N, v)$  ist der einzige wert, der A1-A4 erfüllt.*

Man kann den Shapley-Wert auch über andere Axiomensysteme charakterisieren.

## 2.3 Einfache Spiele

**Definition** (Einfaches Spiel): *Ein Koalitionsspiel  $(N, v)$  heißt einfach, wenn für jede Koalition  $S \subseteq N$  entweder  $v(S) = 0$  und  $v(S) = 1$  gilt.*

- Eine Koalition  $S$  für die  $v(S) = 1$  gilt heißt Gewinnerkoalition.
- Ein Spieler, der in jeder Gewinnerkoalition des Spiels ist, heißt Veto-Spieler.

**Satz 2.4:**

- *Wenn es in einem einfachen Spiel keinen Veto-Spieler gibt, ist der Kern leer.*
- *Wenn es in einem einfachen Spiel (einen oder mehrere) Veto-Spieler gibt, besteht der Kern aus allen nicht-negativen zulässigen Payoffvektoren, in denen die anderen (Nicht-Veto-)Spieler Null erhalten.*

## 2.4 Konvexe Spiele

Gibt es eine Charakterisierung von Spielen, für die der Shapley-Wert im Kern liegt?

**Definition** (Konvexes Spiel): *Ein Spiel heißt konvex, wenn für jeden Spieler  $i$  der marginale Beitrag von  $i$  größer ist wenn die Koalition wächst; genauer, wenn für alle  $S \subset T$  und  $i \in N \setminus T$  gilt, dass*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

**Satz 2.5:** *Der Shapley-Wert eines konvexen Spiels liegt im Kern.*

Aus diesem Satz folgt direkt, dass der Kern eines konvexen Spiels nicht leer ist.

# Chapter 3

## Evolutionäre Spieltheorie

### 3.1 Spiele in Normalform

Für symmetrische Spiele:

$$A = (a_{ij}) \quad i = 1, \dots, m_i, \quad j = 1, \dots, m_j$$

d.h.

	$\sigma_{21}$	$\dots$	$\sigma_{2m_2}$
$\sigma_{11}$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1m_2}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\sigma_{1m_1}$	$a_{m_11}$	$\dots$	$a_{m_1m_2}$

$N$ : Spielermenge  $|N| = n$

$\Sigma_i$ : Menge der reinen Strategien von  $i \in N$ ,  $|\Sigma_i| = m_i$ ,  $\sigma_i \in \mathcal{E}_i$ .

$S_i$ : Menge der gemischten Strategien von  $i \in N$

$$S_i = \left\{ s_i \in \mathbb{R}_i^m : \sum_{j=1}^{m_i} s_{ij} = 1, s_{ij} \geq 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, m_i \right\}.$$

$$s_{ij} = \mathbb{P}(\sigma_{ij}).$$



**Definition** (Trägermenge): Wir definieren die Trägermenge für jeden Spieler  $i \in N$ :

$$C(S_i) = \{\sigma_{ij} \in \Sigma_i : s_{ij} > 0\},$$

als die Menge der Strategien die mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt werden.

**Definition** (Beste-Antwort-Menge): Sei

$$B_i(s_{-i}) = \left\{ \sigma_j \in \Sigma_i : H(\sigma_{ij}, s_{-i}) = \max_{\sigma_{ik} \in \Sigma_i} H(\sigma_{ik}, s_{-i}) \right\}$$

$H$  bezeichne pay-off-Funktion

$$\hat{H}(s_{-i}) := \max_{\sigma_{ik} \in \Sigma_i} H(\sigma_{ik}, s_{-i})$$

Sei  $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$  ein Nash-Gleichgewicht. Mit  $s_i^* = (s_{i1}^*, \dots, s_{im_i}^*)$  gilt

$$C(s_i^*) \subseteq B_i(s_{-i}^*)$$

*Hinreichend? Ja! Proposition Slide 36 (AGT Teil 1).*

**3.1 Grundannahmen der evolutionären Spieltheorie:** a) große Population

b) Population ist monomorph

c) random matching

d) Wettstreit (Spiel) ist statisch und symmetrisch

$\Rightarrow$  symmetrisches Spiel in Normalform mit zwei Spielern.

e) Auszahlung entspricht der “biologischen Fitness” ( $\phi$  Anzahl Nachkommen)

- f) Reproduktion ist asexuell und die von den Eltern gewählte Strategie wird unverändert an die Nachkommen vererbt (nur Selektion, keine Mutation).

**3.2 Symmetrisches 2-Personenspiel in Normalform:** Spieler müssen nicht unterschieden werden  $\Rightarrow$  Strategieraum:

$$S = \{s \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m s_i = 1, s_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

**Definition** (Evolutionär stabile Strategie, ESS): *Eine Strategie  $p \in S$  heißt evolutionär stabil, wenn*

- a)  $H(p, p) \geq H(q, p)$  für alle  $q \in S$  (Gleichgewichtsbedingung)
- b) Für alle  $q \in S \setminus \{p\}$  mit  $H(q, p) = H(p, p)$  gilt:  $H(p, q) > H(q, q)$  (Stabilitätsbedingung)

**3.3 Eigenschaften von evolutionär stabilen Strategien:**

- Ist  $p \in S$  eine evolutionär stabile Strategie, dann bildet  $(p, p)$  ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht

- Jede  $2 \times 2$ -Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  mit  $H(p, p) = p'Ap$  sodass  $a_{11} \neq a_{21}$  und / oder  $a_{12} = a_{22}$ , besitzt eine ESS. Ist  $(p, p)$  ein striktes NGG, dann ist  $p$  eine ESS. Im strikten NGG  $(p, p)$  gilt  $C(p) = B(p)$ . Ein striktes NGG ist immer ein Gleichgewicht

in reinen Strategien. Beispiel:

3, 3	2, 0
0, 2	4, 4

- Im Normalformspielen mit  $m \times m$ -Matrizen  $a$  mit  $m \geq 3$  existieren entweder endlich viele ESS keine.

**3.4 Allgemein gilt:** Ist  $p$  ESS  $\Rightarrow \neg \exists \sigma \in C(p)$  mit  $\sigma \in C(S^*)$  für  $s^* \neq q$  ist Nash-Gleichgewicht

$\Rightarrow \# \text{ ESS} \leq |\Sigma|$  - Gleichheit nur, fall es kein ESS in gemischten Strategien gibt.

**Erinnerung:** Ist  $p$  ESS  $\Rightarrow \neg \exists \sigma \in C(p)$  mit  $\sigma \in C(S^*)$  für  $s^* \neq q$  ist Nash-Gleichgewicht.

$\Rightarrow \# \text{ ESS} \leq |\Sigma|$  - wobei Gleichheit nur gilt, fall es kein ESS in gemischten Strategien gibt.