Advanced Game Theory - Exercise 4

4.1 Aufgabe

Gegeben sei ein Drei-Personen-Abstimmungsspiel $\Gamma_C = [N, v]$ mit $N = \{1, 2, 3\}$, in dem jeder Spieler genau eine Stimme hat und in dem anhand der Einfachen-Mehrheit-Regel über die Aufteilung x eines Kuchens auf die drei Personen entschieden werden soll, wobei $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x_i \neq 0$ für alle $i \in N$ und $\sum_i x_i \leq i$. Der individuelle Nutzen eines jeden Spielers ist gleich dem Anteil am Kuchen, den er erhält, d.h. $u_i(x_i) = x_i$ für $i \in N$.

a) Bestimmen Sie die charakteristischen Funktionswerte v(K) aller Koaliationen $K \subseteq N$.

Proof:

$$v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0, \quad v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

$$v(\{1, 2\}) = 1, \quad v(\{2, 3\}) = 1, \quad v(\{1, 3\}) = 1$$

□

b) Bestimmen Sie den Kern $C(\Gamma_C)$ und den Shapley-Wer $\Phi(\Gamma_C)$.

Proof: Den Kern $C(\Gamma_C)$ erhält man, indem man einer Aufteilung x_1, x_2, x_3 das folgende Gleichungssystem als Randbedingungen mitgibt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 = v(\{1, 2, 3\}) \\ x_1 + x_3 &\geq 1 = v(\{1, 3\}) \\ x_2 + x_3 &\geq 1 = v(\{2, 3\}) \\ x_1 + x_2 &\geq 1 = v(\{1, 2\}) \\ x_3 &\geq 0 = v(\{3\}) \\ x_2 &\geq 0 = v(\{2\}) \\ x_1 &\geq 0 = v(\{1\}) \end{aligned}$$

Setzen wir die Gleichungen 2 - 4 ineinander ein, so erhalten wir:

$$x_1 \geq 1 - x_2, \quad x_3 \geq 1 - x_2$$

$$1 - x_2 + 1 - x_2 \geq 1 \iff x_2 \geq \frac{1}{2}$$

Aus Symmetrie (oder einfach Wiederholung der obigen Schritte für x_1 und x_2) erhalten wir:

$$x_1, x_2, x_3 \geq \frac{1}{2}.$$

Allerdings bedeutet dies:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq x_1 + x_2 + x_3 = 1, \qquad ↯$$

d.h. $C(\Gamma_C) = \emptyset$. Für den Shapley-Wert betrachten wir folgendes:

Reihenfolge/Marg. Beitrag	Sp. 1	Sp. 2	Sp. 3
$1, 2, 3$	0	1	0
$1, 3, 2$	0	0	1
$2, 1, 3$	1	0	0
$2, 3, 1$	0	0	1
$3, 1, 2$	1	0	0
$3, 2, 1$	0	1	0
$\phi_i(\Sigma_C) = \Sigma$	2	2	2

d.h. $\Phi(\Sigma_C) = \left(\frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right)$. □

c) Lösen Sie die Teilaufgaben a) und b) unter der Bedingung, dass Koalitionen, die sowohl Spieler 2 als auch Spieler 3 enthalten, nicht gebildet werden.

Proof: Die Randbedingung ändern sich wie folgender Maßen:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 = v(\{1, 2, 3\}) \\
x_1 + x_3 &\geq 1 = v(\{1, 3\}) \\
x_2 + x_3 &\geq 0 = v(\{2, 3\}) \\
x_1 + x_2 &\geq 1 = v(\{1, 2\}) \\
x_3 &\geq 0 = v(\{3\}) \\
x_2 &\geq 0 = v(\{2\}) \\
x_1 &\geq 0 = v(\{1\})
\end{aligned}$$

d.h. die eine/zwei Randbedingungen werden trivial. Der Kern besteht also aus

$$x_3 \geq 1 - x_1, \quad x_2 \geq 1 - x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

D.h. $C(\Gamma_C) = \{(1,0,0)\}$. Der Shapely-Wert lässt sich wieder über folgendes bestimmen

Reihenfolge/Marg. Beitrag	Sp. 1	Sp. 2	Sp. 3
1, 2, ~~3~~	0	1	0
1, 3, ~~2~~	0	0	1
2, 1, ~~3~~	1	0	0
2, ~~3, 1~~	0	0	0
3, 1, ~~2~~	1	0	0
3, ~~2, 1~~	0	0	0
$\phi_i(\Sigma_C) = \Sigma$	2	1	1

d.h. $\Phi(\Sigma_C) = \left(\frac{2}{c}, \frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right)$; die Frage bleibt aber, welchen Wert c annehmen muss. Mein Tipp wäre $\frac{v(N)}{\sum \phi_i(\Sigma_C)}$[1]. Laut Musterlösung gilt $c = 4$ was konsistent mit meiner Vermutung wäre. □

d) Lösen Sie die Teilaufgaben a) und b) für das Drei-Personen-Abstimmungsspiel $\Gamma_C = [N, v]$ mit $N = \{1,2,3\}$ in dem Spieler 1 ein Stimmengewicht von 60% und Spieler 2 und 3 von jeweils 20% besitzen und Entscheidungen anhand der Zweidrittel-Mehrheit-Regel (qualifizierte Mehrheit) getroffen werden.

Proof:

(i) Bestimmen Sie die charakteristischen Funktionswerte v(K) aller Koaliationen $K \subseteq N$.

$$v(\{1\}) = 0, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = 0, \quad v(\{1,2,3\}) = 1$$

$$v(\{1,2\}) = 1, \quad v(\{1,3\}) = 1, \quad v(\{2,3\}) = 0$$

[1] Scheint mir nicht ganz konsistent mit der Vorlesung ($1/n!$) zu sein

(ii) Bestimmen Sie den Kern $C(\Gamma_C)$ und den Shapley-Wer $\Phi(\Gamma_C)$.

Den Kern $C(\Gamma_C)$ erhält man, indem man einer Aufteilung x_1, x_2, x_3 das folgende Gleichungssystem als Randbedingungen mitgibt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 1 &= v(\{1,2,3\}) \\ x_1 + x_3 \geq 1 &= v(\{1,3\}) \\ x_1 + x_2 \geq 1 &= v(\{1,2\}) \\ x_2 + x_3 \geq 0 &= v(\{2,3\}) \\ x_3 \geq 0 &= v(\{3\}) \\ x_2 \geq 0 &= v(\{2\}) \\ x_1 \geq 0 &= v(\{1\}) \end{aligned}$$

d.h. $x_3 \geq 1 - x_1$, $x_2 \geq 1 - x_1$.

$$1 \geq 1 - x_3 + x_2 + x_3 \iff x_2 = 0$$

$$1 \geq 1 + x_3 + x_2 - x_2 \iff x_3 = 0$$

d.h. $\Phi(\Sigma_C) = (1, 0, 0)$. Schneller geht das auch, durch das Theorem, dass bei einem Veto-Spieler alle anderen die Auszahlung 0 erhalten müssen. Für den Shapley-Wert betrachten wir:

Reihenfolge/Marg. Beitrag	Sp. 1	Sp. 2	Sp. 3
$1,2,3$	0	1	0
$1,3,2$	0	0	1
$2,1,3$	1	0	0
$2,3,1$	1	0	0
$3,1,2$	1	0	0
$3,2,1$	1	0	0
$\phi_i(\Sigma_C) = \Sigma$	4	1	1

d.h. $\Phi(\Sigma_C) = \left(\frac{4}{c}, \frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right)$, $c = 4(?)$.

$\square$

4.2 Aufgabe

Gegeben sei folgende Auszahlungstabelle eines Zwei-Personen-Spiels in Normalform

	s_{21}	s_{22}
s_{11}	$3, 3$	$0, \alpha$
s_{12}	$\alpha, 0$	$1, 1$

Beschreiben Sie jeweils für $\alpha = 5$ und $\alpha = 7$ das korrespondierende Koalitionsspiel $\Gamma_C = [N, v]$ und bestimmen Sie den Kern $C(\Gamma_C)$.

Proof: Wir haben das Spiel gegeben durch $N = \{1, 2\}$ und $v\colon P(N) \to \mathbb{R}$.
Angenommen v ist superadditiv, und da wir wissen, dass dieses Spile symmetrisch ist, gilt:

a) $\alpha = 5$

$$v(N) = \max_{i,j,k,j \in N} u(s_{ij}, s_{kj}) = \max_{i,j,k,j \in N} (u_1(s_{ij}, s_{kj}) + u_2(s_{ij}, s_{kj})) = 3 + 3 = 6,$$
$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = \min_{i,j,k,j \in N} u_{1/2}(s_{ij}, s_{kj}) = 1$$

Um den Kern zu bestimmen, betrachte:

$$x_1 + x_2 = 6 = v(\{1, 2, 3\})$$
$$x_2 \geq 1 = v(\{2\})$$
$$x_1 \geq 1 = v(\{1\})$$

$$\Rightarrow C(\Gamma_C) = \{x_1, x_2 \colon x_1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 = 6\} \neq \emptyset$$

b) $\alpha = 6$

$$v(N) = \max_{i,j,k,j \in N} u(s_{ij}, s_{kj}) = \max_{i,j,k,j \in N} (u_1(s_{ij}, s_{kj}) + u_2(s_{ij}, s_{kj})) = 7 + 0 = 0 + 7 = 7,$$
$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = \min_{i,j,k,j \in N} u_{1/2}(s_{ij}, s_{kj}) = 1$$

Um den Kern zu bestimmen, betrachte:

$$x_1 + x_2 = 7 = v(\{1,2,3\})$$
$$x_2 \geq 1 = v(\{2\})$$
$$x_1 \geq 1 = v(\{1\})$$

$$\Rightarrow C(\Gamma_C) = \{x_1, x_2 \colon x_1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 = 7\} \neq \emptyset$$

$\square$

4.3 Aufgabe

Ein Kleintierzüchterverein hat sieben Mitglieder: zwei Meerschweinchenzüchter M_1 und M_2, zwei Taubenzüchter T_1 und T_2 und drei Hasenzüchter H_1, H_2 und H_3. Entscheidungen werden mit einfacher Mehrheit gefällt.

a) Beschreiben Sie unter der Bedingung, dass die Mitglieder einer Zuchtgruppe stets einheitlich abstimmen, das Koalitionsspiel $\Gamma_C = [N, v]$ für die drei unabhängingen Spieler in Form der drei Zuchtgruppen $M = \{M_1, M_2\}$, $T = \{T_1, T_2\}$ und $H = \{H_1, H_2, H_3\}$, also $N = \{M, T, H\}$, und berechnen Sie die Shapley-Werte für M, T und H.

Proof: Es gilt $\Gamma_C = [N, v]$, wobei $N = \{M, T, H\}$ und $v\colon P(N) \to \mathbb{N}$ mit:

$$v(N) = 1,\ v(\{M, T\}) = 1,\ v(\{T, H\}) = 1,\ v(\{M, H\}) = 1,$$

$$v(\{M\}) = v(\{T\}) = v(\{H\}) = 0.$$

Für den Shapley-Wert betrachten wir:

Reihenfolge/Marg. Beitrag	M	T	H
M, T, H	0	1	0
T, H, M	0	0	1
T, M, H	1	0	0
H, T, M	0	1	0
H, M, T	1	0	0
M, H, T	0	0	1
$\phi_i(\Sigma_C) = \Sigma$	2	2	2

d.h. $\Phi(\Sigma_C) = \left(\frac{2}{c}, \frac{2}{c}, \frac{2}{c}\right)$, $c = 6(?)$. □

b) Eines Tages zerstreiten sich die drei Hasenzüchter, was dazu führt, dass sie die Hasenkoalition auflösen und in Abstimmungen einzeln auftreten. Die Meerschweinchenzüchter und Taubenzüchter stimmen weiterhin einheitlich ab. Wie lauten die Ergebnisse von Teilaufgabe a) für die fünf unabhängingen Spieler M, T, H_1, H_2 und H_3. Vergleichen Sie die Shapley-Werte mit denen von Teilaufgabe a). Was fällt auf?

Proof: Es gilt $\Gamma_C = [N, v]$, wobei $N = \{M, T, H_1, H_2, H_3\}$ und $v\colon P(N) \to \mathbb{N}$ mit:

$$v(\{T, H_1, H_2, H_3\}) = 1,\ v(\{M, H_1, H_2, H_3\}) = 1,\ v(\{T, H_i, H_j\}) = 1,\ v(\{M, H_i, H_j\}) = 1,$$

$$v(\{M\}) = v(\{T\}) = v(\{H_i\}) = v(\{H_i, H_j\}) = v(\{H_1, H_2, H_3\}) = 0.$$

$$v(N) = 1,\ v(\{M, T\}) = 1,\ v(\{T, H_i\}) = 0,\ v(\{M, H_i\}) = 0$$

Aus Symmetrie-Gründen können wir den Shapley-Wert für z.B. T berechnen über:

Reihenfolge	Marg. Beitrag von T
$M, T, \pi(H_1, H_2, H_3)$	6
$M, H_i, T, \pi(H_j, H_k)$	$3 \cdot 2 = 6$
$H_i, M, T, \pi(H_j, H_k)$	$3 \cdot 2 = 6$
$\pi(H_i, H_j), T, M, H_k$	$3 \cdot 2 = 6$
$\pi(H_i, H_j), T, H_k, M$	$3 \cdot 2 = 6$
$\pi(H_1, H_2, H_3), M, T$	6
$\phi_T(\Sigma_C) = \Sigma$	36

d.h. $\Phi_T(\Sigma_C) = \frac{36}{n!} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$. Eben aus Symmetrie-Gründen gilt: $\Phi_T(\Sigma_C) = \Phi_M(\Sigma_C)$.
Schließlich gilt wieder aus Symmetriegründen:

$$\Phi_{H_i}(\Sigma_C) = \frac{1 - \Phi_T(\Sigma_C) - \Phi_M(\Sigma_C)}{3} = \frac{1 - 0,\overline{3} - 0,\overline{3}}{3} = 0,1\overline{3}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Es fällt auf, dass in der Summe die Shapley Werte der Hasen höher ist, als in der a). Dies ist der Kritikpunkt am Shapley-Wert. □