Evolutionäre Spieltheorie

Spiele in Normalform

Für symmetrische Spiele:

$$A = (a_{ij}) \quad i = 1, \ldots, m_i,\ j = 1, \ldots, m_j$$

d.h.

N: Spielermenge $|N| = n$

Σ_i: Menge der reinen Strategien von $i \in N$, $|\Sigma_i| = m_i$, $\sigma_i \in \mathcal{E}_i$.

S_i: Menge der gemischten Strategien von $i \in N$

$S_i = \{\}$.

$s_{ij} = \mathbb{P}(\sigma_{ij})$.

Definition (Trägermenge)**:** *Wir definieren die Trägermenge für jeden Spieler $i \in N$:*

$$C(S_i) = \{\sigma_{ij} \in \Sigma_i : s_{ij} > 0\},$$

als die Menge der Strategien die mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt werden.

Definition (Beste-Antwort-Menge)**:** *Sei*

$$B_i(s_{-i}) = \left\{\sigma_j \in \Sigma_i : H(\sigma_{ij}, s_{-i}) = \max_{\sigma_{ik} \in \Sigma_i} H(\sigma_{ik}, s_{-i})\right\}$$

H bezeichne pay-off-Funktion

$$\hat{H}(s_{-i}) \coloneqq \max_{\sigma_{il} \in \Sigma_i} H(\sigma_{ik}, s_{-i})$$

Beispiel: $\sigma_{ij} \in B_i(S_{-i})$ und $\sigma_{ik} \in B(S_{-i}) \Rightarrow$ alle $s_i \in S_i$ mit

$$C(S_i) = \{\sigma_{ij}, \sigma_{ik}\}$$

sind auch beste Antwort, denn

$$s_{ij}H(\sigma_j, s_{-i}) + s_{ik}H(\sigma_{ik}, s_{-i}) = (s_{ij} + s_{ik})\hat{H}(s_{-i}) = \hat{H}(s_{-i}).$$

Sei $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ ein Nash-Gleichgewicht. Mit $s_i^* = (s_{i1}^*, \dots s_{im_i}^*)$ gilt

$$C(s_i^*) \subseteq B_i(s_{-i}^*)$$

Hinreichend? Ja! Proposition Slide 36 (AGT Teil 1).

14.1 Grundannahmen der evolutionären Spieltheorie: a) große Population

b) Population ist monomorph

c) random matching

d) Wettstreit (Spiel) ist statisch und symmetrisch

$\rightarrow$ symmetrisches Spiel in Normalform mit zwei Spielern.

e) Auszahlung entspricht der „biologischen Fitness“ (ϕ Anzahl Nachkommen)

f) Reproduktion ist asexuell und die von den Eltern gewählt Strategie wird unverändert an die Nachkommen vererbt (nur Selektion, keine Mutation).

14.2 Symmetrisches 2-Personenspiel in Normalform: Spieler müssen nicht unterschieden werden $\Rightarrow$ Strategieraum:

$$S = \{s \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} s_i = 1, s_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

Definition (Evolutionär stabile Strategie, ESS)**:** *Eine Strategie $p \in S$ heißt evolutionär stabil, wenn*

a) $H(p,p) \geq H(q,p)$ für alle $q \in S$ (Gleichgewichtsbedingung)

b) Für alle $q \in S \setminus \{p\}$ mit $H(q,p) = H(p,p)$ gilt: $H(p,q) > H(q,q)$ (Stabilitätsbedingung)

14.3 Eigenschaften von evolutionär stabile Strategie:

- Ist $p \in S$ eine evolutionär stabile Strategie, dann bildet (p, p) ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht
- Jede 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit $H(p, p) = p'Ap$ sodass $a_{11} \neq a_{21}$ und / oder $a_{12} = a_{22}$, besitzt eine ESS Ist (p, p) ein striktes NGG, dann ist p eine ESS. Im strikten NGG (p, p) gilt $C(p) = B(p)$. Ein striktes NGG ist immer ein Gleichgewicht

  in reinen Strategien. Beispiel:

$3, 3$	$2, 0$
$0, 2$	$4, 4$

- Im Normalformspielen mit $m \times m$-Matrizen a mit $m \geq 3$ existieren entweder endlich viele ESS keine.

Aufgaben

2) b)

	σ_1	σ_2
σ_1	0, 0	0, 0
σ_2	0, 0	1, 1

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Gegenbeispiel)

$$\sigma^* = (\sigma_1, \sigma_1), \sigma^{**} = (\sigma_2, \sigma_2)$$

a) Angenommen $p \in S$ ist ESS und wird von $q \in S$ schwach dominiert

$$\Rightarrow H(q, z) \geq H(p, z) \quad \forall z \in S$$

$$\Rightarrow H(p,p) = H(q,p) \quad \text{Bedingung 1: ok}$$
$$\Rightarrow H(p,q) \leq H(q,q) \quad \text{Bedingung 2: verletzt}$$

b) s.o.

c) klar!

1) Hawp-Dove-Game / Falke-Taube-Spiel

	F	T
F	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$v, 0$
T	$v, 0$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

$A = \begin{pmatrix} \frac{v-c}{2} & v \\ 0 & \frac{v}{2} \end{pmatrix}$, $c > v > 0$

- es existiert keine dominante Strategie
- es existiert kein symmetrisch Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien
- (F,T), (T,F) sind strikte Nash-Gleichgewichte

Interpretation: Recource v, Tauben teilen friedlich, Falken vertielgt Zaube, Falken kämpfen $\rightarrow$ neg, outcome für beide.
$p = (p_F, p_T)$

$$H(F,p) \stackrel{!}{=} H(T,p) \stackrel{!}{=} H(p,p)$$

$$\left.\begin{aligned} H(F,p) &= p_F \tfrac{v-c}{2} + p_T v \\ H(T,p) &= p_F 0 + p_T \tfrac{v}{2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{p_F + p_T = 1} p_F = \frac{v}{c}, p_T = 1 - \frac{v}{c}$$

ist das einzige symmetrisch Nas-Gleichgewicht, kein triviales Spiel $\Rightarrow \exists ESS$

$$\Rightarrow \left(\frac{v}{2}, 1 - \frac{v}{2}\right) \text{ ist ESS}$$

oder man rechnet nach $H(F,p) = H(t,p) = H(p,p)$
$\Rightarrow z.z. H(p,F) > H(F,F)$, $H(p,T) > H(T,T)$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien:

$$(x, x),\ (x, y),\ (y, x),\ (y, z),\ (z, y),\ (z, z)$$

Trivial: $C(A) = \{A\}$, $A \in \{x, y, z\}$

$$B(x) = \{x, y\},\ B(y) = \{x, y, z\},\ B(z) = \{y, z\}$$

$$\Rightarrow C(\cdot) \underset{\neq}{\subset} B(\cdot)$$

Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien (nur sym.)

$$S^* = \{(s_x, s_y, 0) : s_x \in (0, 1), s_y = 1 - s_x\} \quad C(S^*) = \{x, y\}$$

$$S^{**} = \{(0, s_y, s_z) : s_y \in (0, 1), s_z = 1 - s_y\} \quad C(S^{**}) = \{y, z\}$$

$B(S^*) = \{x, y\}$, $B(S^{**}) = \{y, z\}$

b) Angenommen $p \in S$ mit $p_x \in [0, 1]$ und $p_y = 1 - p_x$ ist ein ESS

Bedingung 1: ✓

Bedingung 2: $H(x, p) = H(p, p) = 1$ mit $p_x < 1$

$$\Rightarrow H(p, x) > H(x, x) \text{ Widerspruch!}$$

analog in anderen Fällen $\Rightarrow$ ESS existiert nicht.

14.4 Allgemein gilt: Ist p ESS $\Rightarrow \neg\exists \sigma \in C(p)$ mit $\sigma \in C(S^*)$ für $s^* \neq q$ ist Nash-Gleichgewicht

$\Rightarrow$ # ESS $\leq |\Sigma|$ - Gleichheit nur, fall es kein ESS in gemischten Strategien gibt.