Asset Pricing

Prof. Marliese Uhrig-Homburg

Sommersemester 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Contents

Chapter I

Einführung

Es werden verschiedene Preise bzw. Renditen an Wertpapiermärkten betrachtet, unter anderem:

- Aktienkurse
- Anleiherenditen
- Derivatenpreise

Warum stellen sich beobachtete Marktpreise bzw. Renditen ein? A priori bedeuten niedrige Price eine höhere Rendite. Man kann also die obige Frage auch umformulieren zu: warum einige Asset einen höheren erwarteten Return auszahlen als andere.

Asset Pricing Theorie

Es gibt zwei Aspekte die entscheidend in den Wert eines Assets einfließen. Einmal ist es die Verzögerung der Auszahlen, also wie lange man auf die Auszahlung des z.B. Wertpapiers warten muss und andererseits beeinflusst auch das zugrunde liegende Risiko den Wert des Assets. Auch wenn die Korrektur für die Verzögerung weniger problematisch ist, ist die Anpassung für das Risiko ein sehr viel wichtigerer Faktor für die Bewertung des Wertes eines Assets. Asset Pricing, wie viele anderer ökonomische Disziplinen, teilt den Zwiespalt in normativer zu deskriptiver Theorie. Asset Pricing liefert sowohl

- Bewertungstheorien zur Erklärung der Preisbildung. Damit ist es möglich zu verstehen, warum sich Preise oder Returns so eingestellt haben, wie sie sind; als auch
- Schlussfolgerungen, falls Vorhersagen der Theorie $\neq$ Beobachtung. Was ein Verständnis dafür gibt, warum und wo Bewertungen sich falsch eingestellt haben und ggf. diese Schwächen ausnutzen.

- Ist eine Anpassung der Theorie erforderlich, so greift der Teil der positive Theorie an

Gerade der letzte Aspekt ist ein Grund für die Beliebtheit und vielzähligen praktischen Anwendung von Asset-Pricing. Denn eine **Fehlbewertung am Markt** ermöglicht eine **Handelsstrategie** (Normative Theorie).

Diese auftretende Fehleinschätzung von Wertpapieren stammt unter anderem aus der oftmals vorherrschenden Asymmetrie von Informationen an einem Markt. Häufig sind keine Marktpreise für Ansprüche auf zukünftige Zahlungen vorhanden

- geplante Investitionsprojekte
- Neuemissionen von Wertpapieren
- Finanzinnovationen
- ...

Man findet demnach die Asset Pricing Theorie oft für zwei Grundlegende Aspekte:

- zur Begründung, wie hoch fairer Preis sein sollte, und
- als wichtige Entscheidungsgrundlage

Kernprinzipien der Finanzwirtschaft

Bewertung fußt auf den Kernprinzipien der Finanzwirtschaft:

- **Primat der Zahlungen**: für eine Entscheidung sind allein Zahlung (oder Zahlungsäquivalente) relevant; dies wird in der Literatur manchmal auch als *Dominance* bezeichnet.
- **Zeitwert des Geldes**: der Wert einer Zahlung hängt davon ab, wann sie erfolgt
- **Ertrag vs. Risiko**: bei vielen Entscheidungen ist eine Abwägung zwischen Ertrag und Risiko zu treffen.

- **Aggregation durch Märkte**: Wertpapiermärkte aggregieren Präferenzen und Informationen
- **Arbitragefreiheit**: Preise an kompetitiven Wertpapiermärkten zeichnen sich durch die Abwesenheit von Arbitrage aus

Relative vs. absolute Bewertung

Es gibt zwei teilweise gegenläufige Ansätze zur Bewertung von Assets

absolut: mit Bezug zu grundlegenden makroökonomischen Faktoren.

- Konsum-basierte oder allgemeine Gleichgewichtsmodelle
- Beispiel: capital Asset Pricing Model

relativ: zu gegebenen anderen Wertpapieren (Basiswertpapieren)

- Duplikation und Gesetz des einen Preises
- Beispiel: Optionspreistheorie nach Black/Scholes

Typische Anwendungen enthalten beide Aspekte und der Anteil zu welchem man den einen oder anderen Ansatz wählt, hängt für gewöhnlich vom betrachteten Asset und Grund für die Bewertung ab.

Bewertungsprinzip

Asset Pricing liegt eine einfach Grundidee zugrunde:

Preise entsprechen erwarteten diskontierten Zahlungen

Zahlungsstrom: Zukünftige unsichere Zahlungen müssen aufgrund deren Zeit- und Risikodimension bewertet werden. Unser Bewertungsprinzip berücksichtigt diese Dimensionen durch geeignete

- Diskontierung
- Erwartungsbildung

Chapter II

Stochastischer Diskont-Faktor Ansatz

"Asset pricing theory all stems from one simple concept, presented in the first page of the first chapter of this book: **price equals expected discounted payoff**. The rest is elaboration, special cases, and a closet full of tricks that make the central equation useful from one or another application."

Quelle: John H. Cochrane, Asset Pricing, S. xiii

Bei einem gegebenen Zahlungsstrom (z.B. Dividenden, Zinsen, Auszahlungen von Derivaten, Rückflüsse aus Investitionen, ...) ergeben sich für uns die folgenden Fragestellungen:

- Welchen Wert besitzt der Zahlungsstrom?
- Wie wirken sich Zeit und Risiko auf den Wert aus?
- Wie ändert sich Wert, wenn sich Ökonomie verändert? (Risikomanagement)

Wir betrachten dies in einem einfachen formaler Rahmen:

- gegeben: zukünftige (unsichere) Zahlung x_{t+1}
- gesucht: Heutiger Wert p_t

II.1 Präferenzen der Investoren

Zinsrate korrelieren mit dem erwarteten marginalen Nutzenwachstum, denn es macht Sinn z.B. bei hohen Zinsen möglichen Konsum auszusetzen und zu sparen, in Bonds zu investieren und den Konsum auf die Zukunft zu verschieben. Die Risikokorrektur des Wertes eines Assets sollte außerdem von der Kovarianz der Auszahlung mit den marginalen Nutzen bzw. Konsum zusammenhängen, denn ein Asset welches in ökonomisch schlechteren Zeiten mehr auszahlt wird besser bewertet, als eins welches auf ökonomisch gute Zeiten baut.

Hier ist marginaler Nutzen, und nicht Konsum, das grundlegende Maß für die Einstellung von Nutzern. Betrachtet man unter anderem das Konsumlevel eines Nutzers, so sieht man, dass dies niedrig sein kann, wenn der marginale Nutzen hoch ist. Also könnte man davon ausgehen, dass der Konsum als Indikator für den marginalen Nutzen verwendet werden kann. Das Konsumlevel ist auch niedrig, und in diesem fall der marginale Nutzen auch hoch, wenn die anderen Assets des Investors schlecht performen. Aus diesem Grund gehen wir davon aus, dass die Preise von Assets die eine positive Kovarianz mit einem Marktindex besitzen niedrig ist.

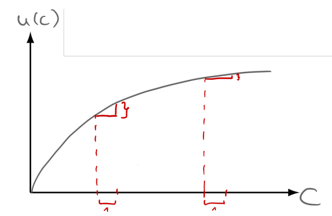
Also fangen wir mit der grundlegenden Idee an: der Investor trifft wirtschaftliche Entscheidungen mit dem Ziel, möglichst günstigen Konsumstrom zu erreichen. Formal erfolgt dies über die Nutzenfunktionen (additiv und separabel):

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta \cdot \mathbb{E}_t \left[u\left(c_{t+1}\right) \right],$$

wobei c_t = Konsum in t und c_{t+1} = Konsum in $t+1$ beschreibt. β stellt den subjektiven Diskontfaktor dar, denn im Allgemeinen ist es relevant, wann die Zahlung stattfindet; man kann sich dies auch als einen ungeduldigen Investor vorstellen. Der Erwartungswert muss gebildet werden, da der Konsum in $t+1$ unsicher und damit eine Zufallsvariable ist.

Plausible Annahmen bezüglich der Eigenschaften von solchen Nutzenfunktionen wären

- **positiver Grenznutzen** ($u' > 0$): Nutzen wächst, wenn Konsum in beliebigem Zeitpunkt wächst, d.h. “mehr ist besser als weniger” (nicht gesättigte Investoren)
- **abnehmender Grenznutzen** ($u'' < 0$): Je höher der Konsum in einem Zeitpunkt, desto geringer ist der durch zusätzliche Konsumeinheit erzeugte Nutzenzuwachs



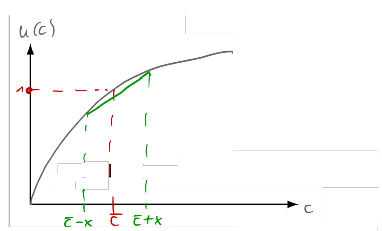
Die Nutzenfunktion bildet Ungeduld und Risikoaversion der Investoren ab:

- **Ungeduld**: $\beta < 1$ erfasst Präferenz für frühere Zahlungen subjektive Diskontierung
- **Risikoaversion**: zukünftiger Konsum c_{t+1} ist unsicher, daher muss bei dessen Nutzen der Erwartungswert $\mathbb{E}_t\Big[u(c_{t+1})\Big]$ betrachtet werden. Hierbei ist die Krümmung der Nutzenfunktion u zentral, wie im folgenden Beispiel verdeutlich wird.

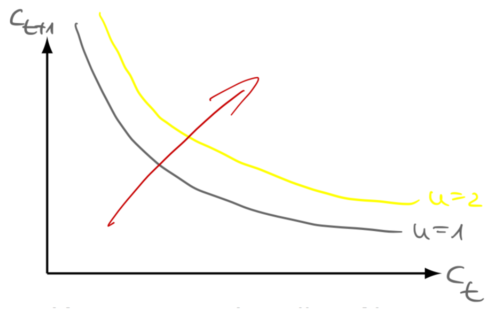
Beispiel (50/50 Wette)**:**
Für einen Nutzer sei mit Wahrscheinlichkeit 0.5 höher $\overline{c}+x$ oder niedriger $\overline{c}-x$ Konsum zu erwarten. Der Nutzen aus dieser unsicheren Situation ergibt sich damit zu

$$\mathbb{E}\Big[u(c)\Big] = 0.5 \cdot u(\overline{c}+x) + 0.5 \cdot u(\overline{c}-x).$$

Da die Nutzenfunktion u konkav ist, würde der Investor die Wette meiden, da $\mathbb{E}\left[u\left(c+X\right)\right] < u\left(\mathbb{E}\left[c+X\right]\right) = u\left(\overline{c}\right)$.



Der Gesamtnutzenfunktion $U(c_t, c_{t+1})$ ist am einfachsten über Nutzenindifferenzkurven darstellbar (streng konvex, da abnehmender Grenznutzen; linear, wenn keine Risikoaversion vorliegt):



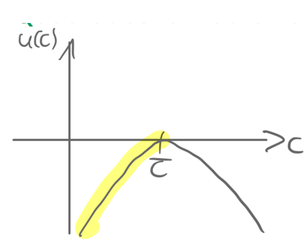
- Alle Punkte auf einer Kurve weisen denselben Nutzen auf.
- Je weiter entfernt vom Ursprung, desto höher der Nutzen → folgt aus positivem Grenznutzen
- Iso-Nutzenlinien verlaufen (streng) konvex. → folgt aus abnehmendem Grenznutzen
- Aversion gegen intertemporale Substitution

II.2 Beispiele für Nutzenfunktionen

Zwei zentrale Beispiele für Nutzenfunktionen, die die obigen Anforderungen erfüllen sind:

- **Power-Nutzenfunktion**
$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$
  Für diese Nutzenfunktion gilt:
  - die Ableitungen sind
$$u' = c^{-\gamma} > 0$$
$$u'' = -\gamma \cdot c^{-\gamma-1} < 0$$
  - somit ist
$$-c \cdot \frac{u''(c)}{u'(c)} = \gamma,$$
    d.h. es liegt eine konstante relative Risikoaversion vor.
  - sie streben für $\gamma \to 1$ gegen Log-Nutzenfunktion
$$u(c) = \ln(c)$$

- **Quadratische Nutzenfunktion**
$$u(c) = -\frac{1}{2}\left(\bar{c} - c\right)^2, \quad c < \bar{c}$$



II.3 Zentrale Bewertungsbeziehung

Ein Investor konsumiert in den zwei betrachteten Perioden c_t, c_{t+1} und kann einen beliebigen Anteil ξ der Zahlung x_{t+1} kaufen oder verkaufen. Seien e_t, e_{t+1} die Ausgangslevel an Konsum die der Investor ohne x kaufen würden, z.B. festes Einkommenslevel vor Investitionen. Das Kalkül des Investors lautet dann:

$$\max_{\xi} u(c_t) + \beta \mathbb{E}_t\Big[u(c_{t+1})\Big]$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} c_t &= e_t - p_t\xi \\ c_{t+1} &= e_{t+1} + x_{t+1}\xi \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Nebenbedingungen, liefert Bedingung erster Ordnung für ξ damit:

$$p_t u'(c_t) = \mathbb{E}_t\Big[\beta u'(c_{t+1})x_{t+1}\Big]$$

Diese Gleichung stellt die gewöhnliche marginale Bedingung für ein Optimum dar: $pu'(c_t)$ ist der Verlust des Nutzens den ein Investor trägt falls er eine weitere Einheit kauft; $\mathbb{E}_t\Big[\beta u'(c_{t+1})x_{t+1}\Big]$ ist der Zuwachs in diskontiertem, erwartetem Nutzen den der Investor von einem zusätzlichen Payoff in $t+1$ erhält. Die Bedingung erster Ordnung stellt also das Gleichgewicht dar, indem der Investor so lange kauft oder verkauft bis die Grenzkosten gleich dem erwarteten Grenzertrag gleicht.

Aus der first-order Bedingung folgt durch Umformung die zentrale Bewertungsgleichung

$$p_t = \mathbb{E}_t\Big[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}\Big],$$

welche in vielen Fällen hilfreich ist, obgleich sowohl **Preis** als auch **Konsum** endogene Größen sind.

II.4 Stochastischer Diskontfaktor

Wir teilen obige Gleichung des einfachen konsumbasierten Modells auf um folgende hilfreiche Separation zu erhalten:

- Mit stochastischem Diskontfaktor
$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$
- vereinfacht sich zentrale Bewertungsbeziehung zu
$$p_t = \mathbb{E}_t\Big[m_{t+1} x_{t+1}\Big]$$

Stochastische Diskontfaktor verallgemeinert übliches Verständnis von Diskontfaktoren:

- Bei einer sicheren Zahlung x_{t+1}, sei $R^f = 1 + r^f$ der risikolose Brutto-Zinssatz und so ergibt sich der Zusammenhang:
$$p_t = \frac{1}{R^f} x_{t+1} = \frac{1}{1 + r^f} x_{t+1}$$
- Risikobelastete Zahlungen können mit einer risikoadjustierte Diskontierung behandelt werden. Sei R^i der risiko-angepasste, asset-spezifische Diskontfaktor, so ergibt sich:
$$p_t = \frac{1}{\mathbb{E}\left[R^i\right]} \mathbb{E}_t\Big[x^i_{t+1}\Big]$$

Beachte dass aufgrund der Diskontierung und des Bildens des Erwartungswertes, dass in first-order Bedingung nur ein Diskontfaktor m vorkam, unabhängig vom möglichen Risiko oder betrachteten Asset, d.h. der stochastische Diskontfaktor m_{t+1}

- ist zufällig, was in der Literatur auch stochastisch genannt wird, und
- für alle Assets (bzw. Cash Flows x_{t+1}) identisch.

Wie passt das mit der üblichen Vorstellung zusammen, dass riskantere Titel eine höhere Diskontierung erfordern? Die Korrelation zwischen den zufälligen Teilen des Dikontfaktors m und asset-spezifischen Payoffs x^i korrigiert für das asset-spezifische Risiko. Neben bei, es gibt verschiedene Interpretationen und alternative Bezeichnungen für m_{t+1}, z.B.:

- Grenzrate der Substitution: $m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$
- Pricing Kernel, Dichte der Zustandspreise

II.5 Beispiele für Preise und Zahlungen

- **Aktieninvestment**: p_t: Preis in t, $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$: Zahlung in $t+1$ mit Dividendenzahlung d_{t+1} in $t+1$ (geschickter: Returns nehmen, statt stationär):

$$p_t = \mathbb{E}_t\Big[m(p_{t+1} + d_{t+1})\Big]$$

- **Brutto-Return**: Interpretiere $R_{t+1} = \frac{x_{t+1}}{p_t}$ als Payoff in $t+1$ mit Preis 1 dann gilt (mit m als stoch. Diskontfaktor)

$$1 = \mathbb{E}_t\Big[mR\Big]$$

- **Überschuss-Return**: als Zahlung $R^e_{t+1} = R^a_{t+1} - R^b_{t+1}$ in $t+1$ eines Portfolios ohne Kapitaleinsatz, d.h. $p_t = 0$ dann gilt (beachte: Arbitrage-Portfolio, da kein Kapitaleinsatz)

$$0 = \mathbb{E}_t\Big[mR^e\Big]$$

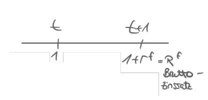
- **Einperiodige Anleihe**: p_t: Anleihepreis in t, Rückzahlung (risikolos) $x_{t+1} = 1$:

$$p_t = \mathbb{E}_t\Big[m\Big]$$

(d.h. Diskontfaktor (bei sicheren Zahlungen) $\hat{=}$ erwarteter stoch. Diskontfaktor)

- **Geldmarktkonto**: $p_t = 1$, Rückfluss in $t+1$: $R^f = (1 + r^f)$ dann gilt:

$$1 = \mathbb{E}_t\Big[mR^f\Big]$$



- **Kaufoption**: $p_t = C$, $x_{t+1} = \max(S_{t+1} - K, 0)$, dann gilt:

$$C = \mathbb{E}_t\Big[m\left(\max(S_{t+1} - K, 0)\right)\Big]$$

Chapter III

Klassische Theorien

Durch einfache Umformungen der zentralen Bewertungsbeziehung

$$p = \mathbb{E}[mx]$$

lassen sich viele finanzwirtschaftliche Theorien und Konzepte leicht ableiten, z.B.:

1. **Ökonomie der Zinsen**: Wann und warum sind Zinsen hoch oder niedrig?
2. **Risikoanpassung**: Wovon hängt die Risikoanpassung ab?
3. **Unsystematisches Risiko**: Warum wird unsystematisches Risiko nicht vergütet?
4. **Beta als Risikomaß**: Welche Beziehung besteht zwischen erwarteten Renditen und Beta?
5. **μ-σ-Rand**: Welche Rendite/Risiko-Kombinationen sind erreichbar?
6. **Equity Premium Puzzle**: Warum sind Risikoprämien von Aktien so hoch?

III.1 Ökonomie der Zinsen

Interpretation der risikolosen Verzinsung $R^f = 1 + r^f$.

- Aus der zentralen Bewertungsbeziehung folgt für das Geldmarktkonto:

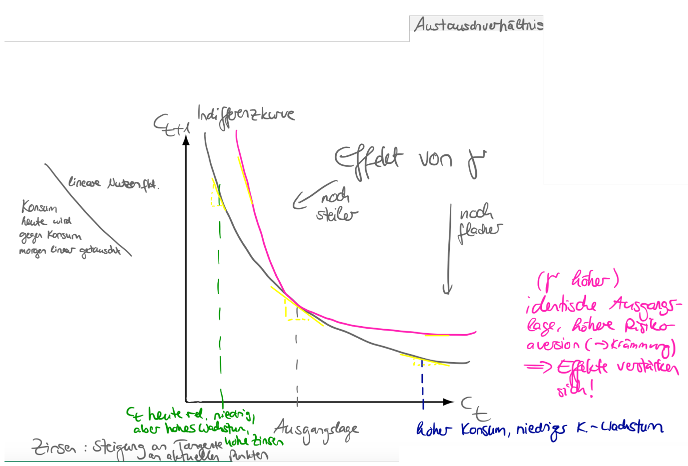
$$1 = \mathbb{E}\left[mR^f\right] \Rightarrow R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m]}$$

- Bei Sicherheit folgt für eine isoelastische Nutzenfunktion

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} : \ m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}$$

$$\Rightarrow R^f = \frac{1}{\beta} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma}$$

- Somit gilt:
  - Realzinsen sind hoch, wenn Investoren ungeduldig sind (niedriges β)
  - Realzinsen sind hoch, wenn das Konsumwachstum hoch ist.
  - Realzinsen reagieren sensitiver auf Änderungen des Konsumwachstums bei hoher Riskoaversion (hohes γ).



Unter Annahme von Unsicherheit:

- Mit $\beta = e^{-\delta}$ und $\Delta c_{t+1} = \ln\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)$ folgt

$$m_{t+1} = e^{-\delta} e^{-\gamma \Delta c_{t+1}} \approx 1 - \delta - \gamma \Delta c_{t+1}$$

- Somit

$$R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m_{t+1}]} \approx \frac{1}{1 - \delta - \gamma \mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}]} \approx 1 + \delta + \gamma \mathbb{E}[\Delta c_{t+1}]$$

- Grundsätzlich identische Implikationen wie im deterministischen Fall:

$$R^f \approx 1 + \delta + \gamma \mathbb{E}[\Delta c_{t+1}]$$

Wie schon zuvor sind Zinsen hoch

- bei sehr ungeduldigen Investoren (niedriges β bzw. hohes δ)
- bei hohem erwarteten Konsumwachstum $\mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}]$
  - wer weiß, dass er in Zukunft reicher sein wird, braucht hohe Zinsen, damit er bereit ist, heute auf Konsum zu verzichten und dafür zu sparen
  - Zinsen sind höher in Aufschwungphasen als in Rezessionen

Wie schon zuvor

- Sensitivität bzgl. Konsumwachstum nimmt mit Risikoaversion γ zu
  - Beachte: hohes $\mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}]$ (Aufschwung), hohes R^f;
    niedriges $\mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}]$ (Abschwung), niedriges R^f;
  - Stärke der Veränderung (ob positiv oder negativ) steigt mit γ

Nun zum Aspekt des Risikos. Betrachte hierzu Approximation zweiter Ordnung:

$$R^f \approx 1 + \delta + \gamma \mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}] - \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2(\Delta c_{t+1})$$

Höhere Volatilität des Konsumwachstums (hohes σ)

- führt zu niedrigeren Zinsen
  - in unsicheren Zeiten spart man lieber vorsorglich (precautionary savings)
  - hohe Sparnachfrage reduziert Zinsen

Umgekehrt

- ist Konsumwachstum hoch, falls Zinsen hoch sind (bei hohen Zinsen wird mehr gespart)
- ist Konsum weniger sensitiv bzgl. Zinsänderungen, wenn γ hoch ist (hohes $\gamma \Rightarrow$ starker Wunsch nach gleichmäßigem Konsumstrom)

Was determiniert wen?

- Konsum determiniert Zinsen (vgl. geschlossene Volkswirtschaft, Gesamtökonomie)
- Zinsen determinieren Konsum (siehe Analysten, Eizelpersonen)

Beachte, dass bei der Power-Nutzenfunktion gilt, dass der Krümmungsparameter γ gleichzeitig die folgenden Aspekte steuert:

- **intertemporale Substitution**: Aversion gegenüber zeitlich schwankenden Konsummöglichkeiten
- **Risikoaversion**: Aversion gegenüber Veränderungen der Konsummöglichkeiten durch unterschiedliche Zustände
- **vorsorgliche Ersparnis**: abhängig von der dritten Ableitung der Nutzenfunktion

Allgemeinere Nutzenfunktionen entkoppeln die drei Einflüsse. Beispiel: Rekursive Nutzenfunktion (Epstein-Zin Nutzenfunktion, siehe z.B. RRA (relative risk aversion), IES (intertemporal elasticity of substitution)).

III.2 Risikoanpassung

- Aus der Definition $\operatorname{cov}(m,x) = \mathbb{E}[mx] - \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[x]$ folgt

$$p = \mathbb{E}[mx] = \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[x] - \operatorname{cov}(m,x)$$

- Mit $R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m]}$ folgt

$$p = \frac{\mathbb{E}[x]}{R^f} + \operatorname{cov}(m,x)$$

d.h. je höher die Kovarianz desto höher ist der Preis; wir haben somit eine Risikokorrektur über die Kovarianz. Der Preis ergibt sich aus

- Diskontierung des erwarteten Payoffs mit risikolosem Zinssatz
  - Standardbarwert-Kalkül bei Sicherheit bzw. Risikoneutralität
  - Aspekt “Zeit”, beachte dass
    - unter Sicherheit die Kovarianz gleich 0 ist, da x unter Sicherheit eine Konstante ist, und
    - unter Risikoneutralität fällt die Kovarianz ebenfalls weg, da m konstant ist, da die Nutzenfunktionen linear sin, und somit die Steigung bzw. $u'(c_{t+1})$ konstant ist und somit der Nenner konstant ist.
- Risikokorrektur erfolgt über den Kovarianzterm
  - je stärker Kovarianz mit Diskontfaktor m, desto höher der Preis
  - Aspekt “Risiko”

Wirkungsweise der Risikoanpassung

Mit dem Diskontfaktor $m = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ folgt

$$p = \frac{\mathbb{E}[x]}{R^f} + \frac{\text{cov}(\beta u'(c_{t+1}), x_{t+1})}{u'(c_t)}$$

Risikoanpassung

- verringert Preis bei positiver Kovarianz mit Konsum ($u'(c)$ sinkt in c)
- erhöht Preis bei negativer Kovarianz mit Konsum

Warum?

Beispiel: Betrachte zwei Wertpapiere mit

	gute Zeiten (0.5)	schlechte Zeiten (0.5)
WP_1	100	0
WP_2	0	100

Für welches Wertpapier sind Sie bereit mehr zu bezahlen?

Ergebnis:

- Für Assets, die mehr zur Konsumglättung beitragen (hier WP2), werden höhere Preise bezahlt.
- Bei unsicherem Payoff mit gegebenem Erwartungswert $\mathbb{E}[x]$
  - wird Preis nach unten korrigiert, falls Payoff in schlechten Zeiten niedrig ist
  - wird Preis nach oben korrigiert, falls Payoff in schlechten Zeiten hoch ist (Versicherungsidee)

Rolle der Risikoaversion

- Betrachte wieder isoelastische Nutzenfunktion $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$
- Höheres $\gamma \Rightarrow$ stärkere Risikokorrektur

- Formal: Aus Approximation $m_{t+1} \approx 1 - \delta - \gamma \Delta c_{t+1}$ folgt

$$\operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \approx -\gamma \operatorname{cov}(\Delta, c_{t+1}, x_{t+1})$$

  und damit

$$p_t \approx \frac{\mathbb{E}_t[x_{t+1}]}{R^f} - \gamma \operatorname{cov}(\Delta c_{t+1}, x_{t+1})$$

Warum zählt die Kovarianz des Konsums und nicht Varianz der Zahlung?

Die eigentliche Frage ist nämlich, die Schwankung im resultierenden Nutzenstorms und nicht eines einzelnen Preises.

- Investor interessiert sich nicht für Volatilität eines einzelnen Wertpapiers sondern für resultierenden Konsum und ggf. dessen Varianz
- $\sigma^2(c + \xi x) = \sigma^2(c) + 2\xi \operatorname{cov}(cx) + \xi^2 \sigma^2(x)$
  Hier ist der mittlerer Term von erster Ordnung; da wird beim hinteren Term ξ^2 haben, können wir bei marginalen Betrachtungen diesen fallen lassen (fordert: ex-post Betrachtung), das Kalkül gilt hier also immer. Ex-ante können wir das analoge Argument aufbringen, falls man in marginale Beiträge (ξ) investieren kann und keine z.B. all-or-nothing Situation hat.
- Vorstellung: Portfolios und damit auch c und m bereits angepasst
- Welchen Beitrag hat letzte marginale Einheit (sehr kleines ξ) von x?

Betrachte nun Returns verschiedener Wertpapiere i, j

$$R^i = \frac{x^i_{t+1}}{p^i_t}, \; R^j = \frac{x^j_{t+1}}{p^j_t}$$

Dann gilt

$$1 = \mathbb{E}\left[mR^i\right] = \mathbb{E}\left[mR^j\right]$$

- Obgleich erwartete Returns i.d.R. verschieden sind, ist der erwartete diskontierte Return immer gleich 1!

- Weiter gilt $1 = \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[R^i] + \text{cov}(m, R^i)$

$$\iff R^f = \frac{1}{E(m)} = \mathbb{E}\left[R^i\right] + \frac{\text{cov}(m, R^i)}{\mathbb{E}(m)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[R^i] - R^f = -R^f \, \text{cov}(m, R^i)$$

- $m = \frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \iff R^f = \frac{u'(c_t)}{\beta \cdot \mathbb{E}[u'(c_{t+1})]}$ eingesetzt liefert

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] - R^f = -R^f \frac{\text{cov}(\beta u'(c_{t+1}), R^i)}{u'(c_t)} = -\frac{\text{cov}(u'(c_{t+1}), R^i)}{\frac{u'(c_t)}{R^f \beta}} = -\frac{\text{cov}(u'(c_{t+1}), R^i)}{\mathbb{E}[u'(c_{t+1})]}$$

Aus der Überrenditendarstellung

$$\mathbb{E}[R^i] - R^f = -\frac{\text{cov}(u'(c_{t+1}), R^i)}{\mathbb{E}[u'(c_{t+1})]}$$

folgt:

- die erwartete Rendite jedes Wertpapiers entspricht der risikolosen Verzinsung (d.h. wenn cov = 0) zuzüglich einer Risikokorrektur

- Wertpapiere, deren Returns positiv mit dem Konsum variieren (d.h. riskantere Instrumente), führen zu volatilerem Konsum und müssen daher höhere erwartete Returns liefern $\Rightarrow \mathbb{E}(R^i) > R^f$

- Umgekehrt können Wertpapiere, deren Returns negativ mit dem Konsum variieren und damit Konsum glätten (z.B. Versicherungen) niedrigere erwartete Returns bieten. $\mathbb{E}(R^i) < R^f$ (vgl. Wertpapiere von letzter Woche bei denen Preise von mehr als 50 gegeben wurden, vgl. Versicherungen $\Rightarrow$ niedrigere Verzinsung als risikoloses Instrument).

Beachte nochmals:

- Übliche Vorstellung

$$p^i = \frac{\mathbb{E}[x^i_{t+1}]}{\mathbb{E}\left[R^i\right]}$$

mit dem Diskontfaktor $\frac{1}{\mathbb{E}[R^i]}$ (etwa aus CAPM) der wertpapierspezifisch ist!

- Hier
$$p^i = \mathbb{E}[m x_{t+1}^i]$$
mit stochastischem Diskontfaktor M (innerhalb des Erwartungswertes!), der für alle Wertpapiere identisch ist!

- Wie passt das zusammen? Der Diskontfaktor ist auch wertpapierspezifisch. Dies sieht man, falls man den stochastischen Diskontfaktor aus dem Erwartungswert rausziehen, denn dann taucht die wertpapierspezifische Komponente durch die Kovarianz auf.

III.3 Unsystematisches Risiko

Aus

$$p = \mathbb{E}[mx] = \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[x] + \operatorname{cov}(m, x)$$

folgt unmittelbar

$$p = \frac{\mathbb{E}[x]}{R^f} \text{ für } \operatorname{cov}(m, x) = 0$$

- mit dem Diskontfaktor m unkorrelierte Zahlungen erfordern keine Risikokorrektur im Preis
- solches unsystematisches Risiko wird folglich nicht vergütet
- erwartete Rendite entspricht der risikolosen Rendite

Beachte: Ergebnis gilt unabhängig

- von $\sigma^2(x)$, d.h. wie volatil die Zahlung ist
- vom Ausmaß der Risikoaversion

Um das zu untersuchen, benutzen wir die einfache Idee, x in zwei Komponenten zu zerlegen:

- **systematische Komponente**: Mit dem Diskontfaktor perfekt korrelierte Komponente $\operatorname{proj}(x|m)$
- **unsystematische Komponente**: Zum Diskontfaktor orthogonale Komponente ϵ

Intuitiv:

- Lineare Regression ohne Konstante $x = bm + \epsilon$ führt auf mit m perfekt korrelierte Komponente bm und Restgröße ϵ mit $E[m\epsilon] = 0$

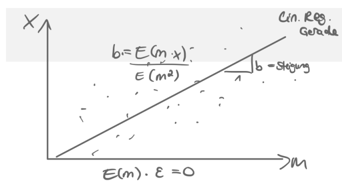
$$x = \operatorname{proj}(x|m) + \epsilon \Rightarrow b = \frac{\mathbb{E}(mx)}{\mathbb{E}(m^2)}$$

- Offensichtlich gilt
  - Preis von ϵ: $p(\epsilon) = \mathbb{E}[m\epsilon] = 0$

– Preis von $\text{proj}(x, m)$: $p\left(\text{proj}(x, m)\right) = \mathbb{E}[xm] = p(x)$

$$p(x) = p(\underbrace{bm}_{CF}) = \mathbb{E}[m \underbrace{bm}_{Zahlung}] = \mathbb{E}\left[\underbrace{\frac{\mathbb{E}(mx)}{\mathbb{E}[m^2]}}_{\substack{siehe\\oben}} m^2\right] = \mathbb{E}(mx)$$

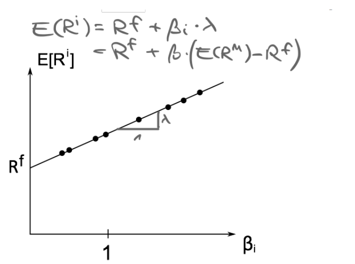
d.h. Preis von x (ursprünglicher CF) = Preis der Projektion).



III.4 Beta als Risikomaß

β_i: Sensitivität der Rendite von Wertpapier i gegenüber der Rendite des ganzen Marktes

- das klassische Risikomaß der Finanzwirtschaft
- typischerweise anhand des CAPM bestimmt
- Anwendung als Maß für systematisches Risiko



Wertpapiermarktlinie (gilt für alle Wertpapiere):

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] = R^f + \beta_i \cdot \lambda = R^f + \beta_i \cdot \left(\mathbb{E}\left[R^m\right] - R^f\right).$$

Formal: $\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R^i, R^M)}{\operatorname{var}(R^M)}$ mit R^M als Marktrendite.

Umformung der Return-Beziehung $\mathbb{E}[R^i] = R^f - R^f \operatorname{cov}(m, R^i)$ führt zu

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] = R^f + \underbrace{\left(\frac{\operatorname{cov}\left(m, R^i\right)}{\sigma\left(m\right)}\right)}_{=:\beta_{i,m}} \underbrace{\left(-\frac{\sigma\left(m\right)}{\mathbb{E}\left[m\right]}\right)}_{=:\lambda_m},$$

wobei $\beta_{i,m}$ = normierte Kovarianz (Risikomenge, WP-spezifisch), λ_m (nicht WP-spezifisch), mit

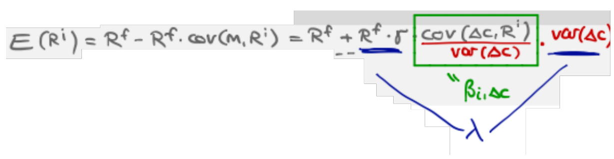
- $\beta_{i,m} = \frac{\operatorname{cov}\left(m, R^i\right)}{\sigma(m)}$ (Risikomenge)
- $\lambda_m = -\frac{\sigma(m)}{\mathbb{E}[m]}$ (Preis des Risikos)

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[R^i\right] = R^f + \beta_{i,m}\lambda_m$$

CAPM-ähnliche lineare Rendite/Risiko-Beziehung mit

- Risikomenge: Normierte Kovarianz mit Diskontfaktor (wertpapierspezifisch)
- Preis des Risikos (für alle Assets identisch) abhängig von Volatilität des Diskontfaktors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[R^i\right] &= R^f - R^f \cdot \operatorname{cov}\left(m, R^i\right) \\ &= R^f - R^f \cdot \operatorname{cov}\left(\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, R^i\right) \\ &= R^f - R^f \cdot \beta \cdot \sigma\left(\Delta c\right) \frac{\operatorname{cov}\left(\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, R^i\right)}{\sigma\left(\Delta c\right)}\end{aligned}$$



Betrachte wieder die Approximation für m aus dem Konsummodell (beachte: hier ist das Konsumwachstum Δc_{t+1} stochastisch)

$$m_{t+1} \approx 1 - \delta - \gamma \Delta c_{t+1} \Rightarrow \mathbb{E}\left[R^i\right] \approx R^f + \beta_{i,\Delta c} \lambda_c$$

Wieder CAPM-ähnliche lineare Rendite/Risiko-Beziehung mit

- Risikomenge: Normierte Kovarianz mit Konsumwachstum (wertpapierspezifisch)
- Preis des Risikos $\lambda_c = \frac{\gamma \sigma(\Delta c)}{\mathbb{E}[m]} = \gamma \sigma\left(\Delta c\right) R^f$ abhängig von Risikoaversion und Volatilität des Konsums

Erwartete Rendite muss umso höher sein,

- je riskanter die Zahlung gemessen durch β
- je risikoaverser Akteure sind (γ) und je riskanter Umfeld ($\sigma\left(\Delta c\right)$)

Je höher γ (risikoaverser), desto höher Steigung; je höher Konsumwachstum, desto höher Steigung.

Zusammenfassung

Die zentrale Bewertungsbeziehung

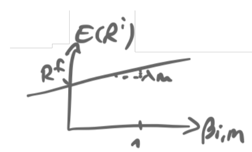
$$p^i = \mathbb{E}\left[m \cdot x^i\right],$$

für Returns angewendet bedeutet, dass

$$1 = \mathbb{E}\left[m \cdot R^i\right].$$

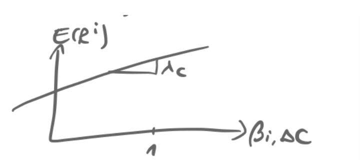
Dies liefert in wenigen Schritten die lineare Return/Beta-Beziehung bzgl. des Diskontfaktors m, mit $\beta_{i,m} = \frac{\mathrm{cov}\left(m, R^i\right)}{\sigma(m)}$

$$\mathbb{E}\left(R^i\right) = R^f + \beta_{i,m} \cdot \lambda_m$$



bzw. (über Approximation von m)

$$\mathbb{E}\left(R^i\right) = R^f + \beta_{i,\Delta c} \cdot \lambda_c$$



lineare Return/Beta-Beziehung bzgl des Konsumwachstums Δc, mit $\beta_{i,\Delta c} = \frac{\mathrm{cov}\left(\Delta c, R^i\right)}{\sigma(\Delta c)}$
keine Aussage über: was ist handelbar, Nutzenfunktion $\rightarrow$ hier ganz allgemeingültig. CAMP: welche WPs gibt es, Normalverteilung... (viele Annahmen), ABER: empirische Proxies für β_i und $m \rightarrow$ Anwendbarkeit!

III.5 Der μ-σ-Rand

Häufig betrachten wir

- Erwartungswerte μ (als Renditenmaß)
- Varianzen σ^2 (bzw. σ als Risikomaß)

der Renditen. Welche Rendite/Risiko-Kombinationen sind überhaupt erreichbar? Für die Rendite R^i und m gilt (ρ ist die Korrelation):

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}\left[mR^i\right] = \mathbb{E}[m]\mathbb{E}\left[R^i\right] + \operatorname{cov}(m, R^i) \\ &= \mathbb{E}[m]\mathbb{E}\left[R^i\right] + \rho_{m,R^i}\sigma(R^i)\sigma(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m]} &= \mathbb{E}\left[R^i\right] + \rho_{m,R^i}\sigma(R^i) \cdot \frac{\sigma(m)}{\mathbb{E}[m]} \\ \iff \mathbb{E}\left[R^i\right] &= R^f - \rho_{m,R^i} \cdot \sigma(R^i) \cdot \frac{\sigma(m)}{\mathbb{E}[m]} \end{aligned}$$

Da $\left|\rho_{m,R^i}\right| \leq 1$ folgt :

$$\left|\mathbb{E}\left[R^i\right] - R^f\right| \leq \sigma(R^i)\frac{\sigma(m)}{\mathbb{E}[m]}$$

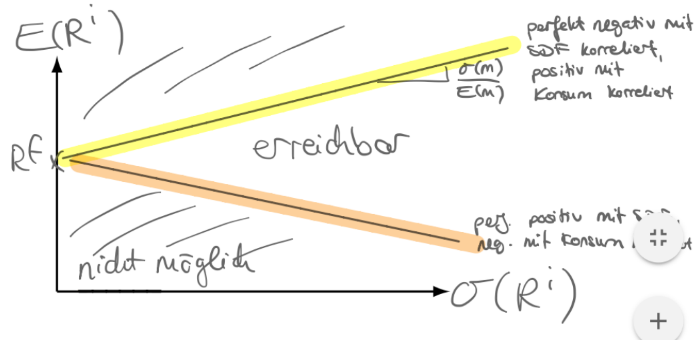
Für die Rendite R^i und Δc gilt (ρ ist die Korrelation):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[R^i\right] &= R^f + \underbrace{\frac{\operatorname{cov}(\Delta c, R^i)}{\sigma(\Delta c)}}_{=\beta_{\Delta c, R^i}} \cdot \underbrace{\gamma\sigma(\Delta c)}_{=\lambda_{\Delta c}} \\ &= R^f + \rho_{\Delta c, R^i} \cdot \sigma\left(R^i\right) \cdot \gamma \cdot \sigma(\Delta c) \end{aligned}$$

Da $\left|\rho_{\Delta c,R^i}\right| \leq 1$ folgt :

$$\left|\mathbb{E}\left[R^i\right] - R^f\right| \leq \sigma(R^i)\frac{\sigma(\Delta c)}{\gamma^{-1}} \approx \sigma(R^i)\frac{\sigma(m)}{\mathbb{E}[m]}$$

Mittelwert/Standardabweichung-Kombinationen liegen also in kegelförmigem Bereich :



Rand der Fläche: wieviel Return ist bei gegebener Volatilität im Mittel möglich? Alle Rand-Returns sind perfekt korreliert mit dem Diskontfaktor m

- oberer Rand $\rho_{m,R^i} = -1$ bzw. $\rho_{c,R^i} = +1 \Rightarrow$ maximal riskant, maximaler Ertrag
- unterer Rand. $\rho_{m,R^i} = +1$ bzw. $\rho_{c,R^i} = -1 \Rightarrow$ bestmögliche Versicherung gegen Konsumschwankungen

Alle Rand-Returns sind perfekt miteinander korreliert.

Betrachte nun beliebige Return R^i. Anstatt β-Repräsentation

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] = R^f + \left(\frac{\operatorname{cov}\left(m, R^i\right)}{\sigma(m)}\right)\left(-\frac{\sigma(m)}{\mathbb{E}[m]}\right) = R^f + \beta_{i,m}\lambda_m$$

bezogen auf stochastischen Diskontfaktor. Neue β-Repräsentation bezogen auf beliebigen (effizienten) Rand-Return R^{mv} ($\neq R^f$) möglich:

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] = R^f + \left(\frac{\operatorname{cov}\left(R^{mv}, R^i\right)}{\sigma\left(R^{mv}\right)}\right)\left(\mathbb{E}\left[R^{mv}\right] - R^f\right) = R^f + \beta_{i,mv}\lambda$$

(single-beta Darstellung bzgl. beliebigem effizienten Rand-Return).

Begründung:

Schritt 1: Selle stochastischen Diskontfaktor m aus risikolosem Return R^f und beliebigem effizienten Rand-Return R^{mv} dar (Beziehung von m und Rand-Return).

Schritt 2: Setze gefundene Beziehung in ursprüngliche β-Repräsentation ein und leite daraus neue Darstellung ab:

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] = R^f + \beta_{i,mv}\lambda$$

Ergebnis 1 (wichtig!): Jeder beliebige effiziente Rand-Return R^{mv} ($\neq R^f$) enthält die gesamt Information, die zur Bewertung notwendig ist (genau wie m!)

Mittelwert/Standardabweichungs-Kombinationen beliebiger Returns liegen innerhalb des gesamten kegelförmigen Bereichs. Mittelwert/beta-Kombinationen beliebiger Returns liegen auf einer Geraden.

Formale Ableitung (Schritt 1):
Betrachte zunächst die Zahlung $R^m = \frac{m}{\mathbb{E}[m^2]}$

- Was ist der Preis $p\left(R^m\right)$?

$$p = \mathbb{E}\left[m \cdot R^m\right] = \mathbb{E}\left[m \cdot \frac{m}{\mathbb{E}\left[m^2\right]}\right] = 1$$

- Wie lässt sich R^m interpretieren? R^m lässt sich als Return interpretieren $\hookrightarrow$ liegt im Kegel.

Konstruiere nun R^m aus risikolosem Return R^f und beliebigem effizienten Rand-Return R^{mv} (w: Gewicht):

$$R^m = wR^f + (1-w)R^{mv}$$
$$\Rightarrow w = \frac{\mathbb{E}\left[R^m\right] - \mathbb{E}\left[R^{mv}\right]}{R^f - \mathbb{E}\left[R^{mv}\right]},\ 1-w = \frac{R^f - \mathbb{E}\left[R^m\right]}{R^f - \mathbb{E}\left[R^{mv}\right]}$$

Formale Ableitung (Schritt 2):
Aus Schritt 1 folgt

$$\frac{m}{\mathbb{E}\left[m^2\right]} = wR^f + (1-w)\,R^{mv} \iff m = \mathbb{E}\left[m^2\right] wR^f + \mathbb{E}\left[m^2\right](1-w)\,R^{mv}$$

(was eine Beziehung zwischen m und R^{mv} darstellt). Einsetzen in

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] = R^f + \left(\frac{\operatorname{cov}\left(m, R^i\right)}{\sigma\left(m\right)}\right)\left(-\frac{\sigma(m)}{\mathbb{E}[m]}\right)$$

führt wegen

$$\mathrm{cov}\left(m, R^i\right) = \mathbb{E}\left[m^2\right](1-w)\,\mathrm{cov}\left(R^{mv}, R^i\right)$$
$$\sigma(m) = \left(\mathbb{E}\left[m^2\right](1-w)\right)^2 \sigma\left(R^{mv}\right)$$

auf

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] = R^f + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{cov}\left(R^{mv}, R^i\right)}{\sigma\left(R^{mv}\right)}\right)}_{=\beta_{i,mv}} \left(\mathbb{E}\left[R^{mv}\right] - R^f\right)$$

Erwartete Rendite besteht folglich aus zwei Komponenten

- risikolose Rendite R^f
- Risikoprämie $\beta_{i,mv}\lambda$ gemessen über
  - Risikomenge $\beta_{i,mv} = \left(\frac{\mathrm{cov}\left(R^{mv}, R^i\right)}{\sigma(R^{mv})}\right)$ (normierte Kovarianz zu einem effizienten Rand-Return (Faktor))
  - $\lambda = \mathbb{E}\left[R^{mv}\right] - R^f$ interpretierbar als Faktor-Risikoprämie

Vorteil gegenüber ursprünglicher β-Darstellung:

- lediglich R^{mv} notwendig
- Kunst besteht darin, effizienten Rand-Return zu finden!
- Klassisches CAPM: R^{mv} = Return des Marktportfolios

III.6 Equity Premium Puzzle

Welchen Zusatzertrag können wir pro Risikoeinheit (Standardabweichung) erzielen?

- Sharpe-Ration $\frac{\mathbb{E}[R^i] - R^f}{\sigma(R^i)}$
- Steigung des oberen μ-σ-Rands: maximal mögliches Sharpe-Ratio
- Betrachte Rand-Return R^{mv} ($R^f \approx 1$, $m \approx 1 - \delta - \gamma \cdot \Delta c$):

$$\left|\frac{\mathbb{E}[R^{mv}] - R^f}{\sigma(R^{mv})}\right| = \frac{\sigma(m)}{\mathbb{E}[m]} = \sigma(m) R^f \approx \gamma\sigma(\Delta c)$$

- Steigung und damit Vergütung pro Risikoeinheit ist höher wenn
  - makroökonomische Risiko höher ist (Konsum ist volatiler)
  - Investoren risikoaverser sind

Warum? Investoren sind vorsichtiger, Risiko zu übernehmen, wenn sie risikoaverser sind.

Passt das zu unseren Beobachtungen?

- Langfristige mittlere Überrendite von Aktien im Vergleich zum risikolosen Zinssatz
  - Historische Aktienüberrenditen ($\sim 8\%$)
  - zugehörige Volatilitäten ($15- \sim 20\% \rightarrow 16\%$)

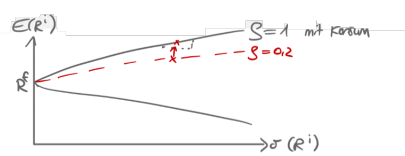
$$\Rightarrow \text{ Sharpe-Ratio: } \frac{8}{16} = 0.5$$

- Konsumschwankungen: $\sigma(\Delta c) \approx 1 - 2$ Prozent
- plausible Risikoeinstellung γ der Investoren?

$$\underbrace{\left| \frac{\mathbb{E}\left[R^{mv}\right] - R^f}{\sigma(R^{mv})} \right|}_{=\frac{8\%}{16\%}=0.5} \approx \gamma \underbrace{\sigma(\Delta c)}_{=0.01}$$

wobei $\gamma \approx \frac{0.5}{0.01} = 50$.

$$\frac{E(R^i) - R^f}{\sigma(R^i)} = \rho \cdot \gamma \cdot \sigma(\Delta c)$$



Beachte weiter:

- betrachtete Aktieninvestments liegen vermutlich innerhalb des Randes (Korrelation zu Konsum $= 1$, Größenordnung 0.2). Was folgt hieraus für γ?

$$\gamma = \frac{\textit{ursprünglicher Wert}}{\rho} = 50 \cdot 5 = 250 \quad \text{“Verschlimmerung”}$$

Als Ergebnis:

- Positive Korrelation des Aktieninvestments mit Konsumwachstum

  qualitativ: betrachtet mit positiver Risikoprämie vereinbar

  quantitativ: betrachtet ist Risikoprämie viel zu hoch gegeben beobachtete Konsumschwankung

Wo liegt der Fehler?

- Vielleicht waren die Aktienrenditen der letzten Jahre purere Zufall? Dies ist allerdings sehr unwahrscheinlich, d.h. vermutlich nein.

- Sind Investoren risikoaverser als bisher angenommen? Diese Annahme würde zu neuen Puzzles führen.

- Sind Teile des Modells grundlegend falsch? Dies ist Gegenstand der aktuellen Forschung im Bereich Asset-Pricing.

Risikoprämie bei "plausibler" Risikoeinstellung (γ zwischen 1 und 5)

Unterstelle

- Sharpe Ration ≈ 0.5

- Standardabeichung des Konsumwachstums $\approx 1\%$

- Was sollte ein Investor mit Log-Nutzenfunktionen tun (beachte $\gamma = 1$ möglich)? "Was kann ich als Überrendite erzielen?" $\Rightarrow$ ohne Ende in Aktienmarkt investieren (kreditfinanziert). Somit schwankt der Konsum mehr $\Rightarrow$ durch Aktivität wieder Gleichehit besser hinzukriegen (siehe Sectionsanfang).

- Wenn alle so agieren, was würde passieren? Preise steigen, Returns fallen, Risikoprämieren sind

$\Rightarrow$ Anpassung hervorrufen (Investor)

Vielleicht ist ein so hohes γ doch plausibel?

$$\Rightarrow \text{ Risk-Free Rate Puzzle.}$$

Unter Annahme eines Realzinssatzes von ungefährt 1% und einem erwarteteten Konsumwachstum um die 1% gilt wie zuvor (beachte δ indiv. Diskontaktor: $e^{-\delta} = \beta$):

$$R^f \approx 1 + \delta + \gamma \underbrace{\mathbb{E}_t \left[\Delta c_{t+1}\right]}_{=0.01}$$
$$1.01 \approx 1 + \delta + 50 \cdot 0.01$$

- Was, wenn $\gamma = 50$? $\delta = -0.49 \hat{=} \beta = 1.63$, d.h. Konsum heute ist viel wichtiger
- Was sollte mit dem Zinssatz passieren, wenn das Konsumwachstum 1% höher ist als sonst? Zinsen müssten um 0.5 steigen, d.h. $1.01 \hookrightarrow 1.51 \Rightarrow 51\%$ Realzinsen

Bemerkung

- Preis in Abhängigkeit des gesamten Zahlungsstroms $\{d_{t+j}\}$:
  Mit langfristiger Zielfunktion $\mathbb{E}_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j})\right]$ folgt:

$$p_t = \mathbb{E}_t \left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)} d_{t+j}\right] = \mathbb{E}_t \left[\sum_{j=1}^{\infty} m_{t,t+j} d_{t+j}\right]$$

- Zentrale Beziehung $p_t = \mathbb{E}_t \left[m_{t+1} x_{t+1}\right]$ benötigt weder
  - vollständige Märkte ($\rightarrow$ Kapitel 4)
  - repräsentativen Investor
  - normalverteilte Renditen
  - unabhängige Renditen über die Zeit
  - quadratische Nutzenfunktion (allerdings haben wir additiv-separable NF unterstellt $\rightarrow$ Problem?), noch
  - wird Humankapital der Arbeitseinkommen ignoriert nicht benötitg, da nur Return angenommen)

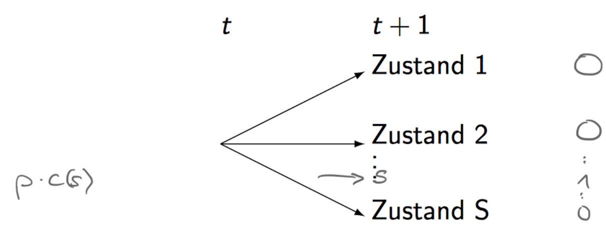
  $\Rightarrow$ sehr allgemeine Theorie

- Wichtig: Investor muss beliebig kleinen Anteil des Zahlungsstroms kaufen bzw. verkaufen können.

Chapter IV

Contigent Claims

Unsicherheit: Im folgenden durch S Zustände charakterisiert:



Contingent claim: (Arrow-Debreu Wertpapier, bedingter Anspruch) Wertpapier das genau in einem Zustand s eine Einheit auszahlt. $pc(s)$: Heutiger Preis
Vollständiger Markt: Jeder bedingte Anspruch kann erworben werden $\Rightarrow$ jedes Arrow-Debreu Wertpapier ist handelbar.

Beispiel: Welche Märkte sind vollständig?

- Zwei Zustände ($S = 2$), zwei gehandelte Wertpapiere
  - WP1: $x_1 = (4, 1)$
  - WP2: $x_2 = (1, 1) \to$ risikolos

  $\Rightarrow$ vollständig, alle anderen WP lassen sich erzeugen.

- Drei Zustände ($S = 3$), zwei gehandelte Wertpapiere
  - WP1: $x_1 = (4, 1, 0)$
  - WP2: $x_2 = (1, 1, 1) \to$ risikolos

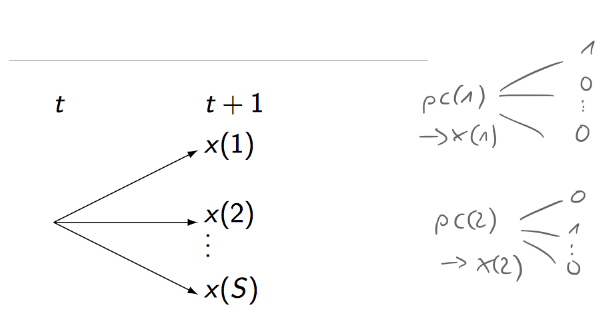
  $\Rightarrow$ nicht vollständig, 2 WPs gegeben, aber 3 Zustände $\to$ nicht alle Arrow-Debreu-WPs lassen sich erzeugen.

- Drei Zustände ($S = 3$), drei gehandelte Wertpapiere
  - WP1: $x_1 = (4, 1, 0)$
  - WP2: $x_2 = (1, 1, 1) \to$ risikolos
  - WP3: $x_3 = (3, 0, -1) \to$ linear abhängig von 1 und 2

  $\Rightarrow$ nicht vollständig, z.B. (1, 0, 0) lässt sich nicht erzeugen.

IV.1 Diskontfaktor im vollständigen Markt

Betrachte Anspruch auf zukünftige Zahlungen



heutiger Preis $p(x)$ setzt sich aus Wert der einzelnen contingent claims zusammen:

$$p(x) = \sum_s pc(s)x(s)$$

Diskontfaktor und Zustandspreise

Mit Eintrittswahrscheinlichkeit $\pi(s)$ für Zustand s folgt

$$p(x) = \sum_s pc(s)x(s) = \sum_s \pi(s) \underbrace{\frac{pc(s)}{\pi(s)}}_{=m(s)} x(s)$$

Definiere Diskontfaktor m als Verhältnis $m(s) = \frac{pc(s)}{x(s)}$, dann gilt

$$p(x) = \sum_s \pi(s)m(s)x(s) = \mathbb{E}[mx]$$

wobei

- $p(x) = \mathbb{E}[mx]$ erwarteter diskontierte Preis
- $\pi(s)m(s)$ Zustandspreisdichte

Zentrales Ergebnis: Stochastischer Diskontfaktor im vollständigen Markt: mit jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeiten skalierte Arrow-Debreu Preise.

IV.2 Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

Definiere

$$\pi^*(s) := \frac{m(s)}{\mathbb{E}[m]}\pi(s) = R^f pc(s),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m]}$ und $pc(s) = m(s)\pi(s)$. Damit folgt

$$\sum_s \pi^* = R^f \cdot pc(s) = 1$$

- $\pi^*(s)$ lassen sich als Wahrscheinlichkeiten interpretieren
- Obige Bewertungsformel ergibt sich dann zu

  $$p(x) = \sum_s pc(s)x(s) = \frac{1}{R^f}\sum_s \pi^*(s)x(s) = \frac{\mathbb{E}^*[x]}{R^f},$$

  was die erwartete Zahlungen risikolos diskontiert darstellt. Beachte: $\frac{\mathbb{E}[x]}{R^f}$ wäre das Standardkalkül bei risikoneutralen Investoren.
- Bewertung erfolgt als wären Akteure risikoneutral
  - mit risikolosem Zinssatz diskontierte erwartete Zahlung
  - aber Erwartungswertbildung mit risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten π^* anstatt mit realen Wahrscheinlichkeiten π

Wie hoch sind risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten?
Zustände mit überdurchschnittlich hohem Grenznutzen werden stärker gewichtet

$$\pi^*(s) := \frac{m(s)}{\mathbb{E}[m]}\pi(s) \text{ mit } m(s) = \beta\frac{u'(c(s))}{u'(c)}$$

bei Risikoaversion: "schlechte" Zustände werden stärker gewichtet. Intuition: Für Entscheidung besonders wichtig

- Zustände mit hoher realer Eintrittswahrscheinlichkeit (hohes π)
- Zustände mit desaströsen Folgen (relativ hohem m) / hohe Grenznutzen

Häufige Anwendung: Derivatebewertung

- $p = \mathbb{E}[mx] = \frac{\mathbb{E}^*[x]}{R^f}$ gilt für alle Wertpapiere
- Unterstelle Verteilung für Underlying und bestimme im aktuellen Underlying-Preis impliziert risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten
- Verwende dies um Derivat zu bewerten

Einfachstes Beispiel:

- Gegeben risikolser Zinssatz R^f und Aktie mit heutigem Preis S_t und morgigen Werten $S_{t+1}(u)$ bzw. $S_{t+1}(d)$
- Gesucht: Wert eines europäischen Calls auf Aktie mit Basispreis K (beachte: $S_{t+1}(d) < K < S_{t+1}(u)$) und Fälligkeit in $t+1$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & S(u)-K \\ ? \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & 0 \end{tikzcd}$$

Anstatt Calls über $C_t = \mathbb{E}\left[m \max\left(S - K, 0\right)\right]$ direkt zu bewerten

- bestimme $\pi^*(u)$, $\pi^*(d) = 1 - \pi^*(u)$ über ($\pi^*(u)$ ist hier unbekannt)

$$S_t = \frac{\mathbb{E}^*[S_{t+1}]}{R^f} = \frac{\pi^*(u)S_{t+1}(u) + (1 - \pi^*(u))S_{t+1}(d)}{R^f}$$

- Bewerte mit diesen risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten den Call

$$C_t = \frac{\pi^*(u)\left(S_{t+1}(u) - K\right)}{R^f}$$

  zahlt nur im up-Zustand, $+(1 - \pi^*) \cdot 0$ fällt weg

- Idee problemlos auf mehrere Zeitschritte und Zustände und damit auf komplexere Derivate erweiterbar

Warum funktioniert das so einfach (vgl. im vollständigen Markt wissen wir, wie SDF auszusehen hat)?

- In vollständigen Märkten lassen sich
  - Arrow-Debreu Preis $pc(s)$ und damit
  - der stochastische Diskontfaktor $m(s9 = \frac{pc(s)}{\pi(s)}$ oder
  - risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten $\pi^*(s) = \frac{m(s)}{\mathbb{E}[m]}\pi(s)$

  leicht ermitteln
- Gemäß Duplikationsidee lassen sich alle weiteren Instrumente problemlos bewerten.

Zusammenhang zu Nutzenfunktionen und ursprünglichem konsum-basierten Modell?

IV.3 Kalkül in Contingent Claim Märkten

Betrachte Investor in Contingent Claim Markt

- Anfangsausstattung: mit Anfangsvermögen y sowie Ansprüchen auf zustandsabhängige (künftige) Zahlungen $y(s)$
- der weitere Contingent Claims kaufen/verkaufen kann
- Kalkül des Investors

$$\max_{c,c(s)} \underbrace{u(c)}_{heute} + \sum_s \underbrace{\pi(s)\beta u[c(s)]}_{\beta \cdot \mathbb{E}[u(c_{t+1})]}$$

$$\text{u.d.N. } c + \sum_s pc(s)c(s) = y + \sum_s pc(s)y(s)$$

- Lösung über Lagrange-Ansatz:

$$\max_{c,c(s),\lambda} u(c) + \sum_s \pi(s)\beta u[c(s)] - \lambda \underbrace{\left(c + \sum_s pc(s)c(s) - y - \sum_s pc(s)y(s)\right)}_{NB}$$

Aus first order Bedingungen

$$u'(c) = \lambda$$

und S Nebenbedingungen, für jeden einzelnen Zustand:

$$\pi(s)\beta u'[c(s)] = \lambda pc(s)$$

folgt (Eintrittswahrscheinlichkeit π):

$$pc(s) = \pi(s)\beta\frac{u'[c(s)]}{u'(c)}$$

im Ergebnis genau ursprüngliches Konsummodell $p = \mathbb{E}[mx]$ mit $m = \beta\frac{u'[c(s)]}{u'(c)}$.

Diskontfaktor und Grenzrate der Substitution

- intertemporal $m(s) = \beta\frac{u'[c(s)]}{u'(c)}$. Grenznutzen des Konsum $\frac{morgen}{heute}$
- zwischen zustandsabhängigen Zahlungen

$$\frac{m(s_1)}{m(s_2)} = \frac{u'[c(s_1)]}{u'[c(s_s)]}$$

Grenzrate der Substitution: Bereitschaft zu Tauschen (Konsum heute vs. morgen) $\hat{=}$ SDF.

Bemerkungen

- Einstrikt positiver Diskontfaktor $m > 0$ existiert genau dann, wenn es keine Arbitragemöglichkeiten (i.S. eines geschenkten Lotterieloses) gibt und das Gesetz des einen Preises erfüllt ist.
- In vollständigen Märkten ist dieser auch eindeutig

Chapter V

Faktormodelle

Konsumbasiertes Modell ($m = f(Daten, Parameter)$) $p_t = \mathbb{E}_t\left[m_{t+1}x_{t+1}\right]$ mit stochastischem Diskontfaktor

$$m_{t+1} = \beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

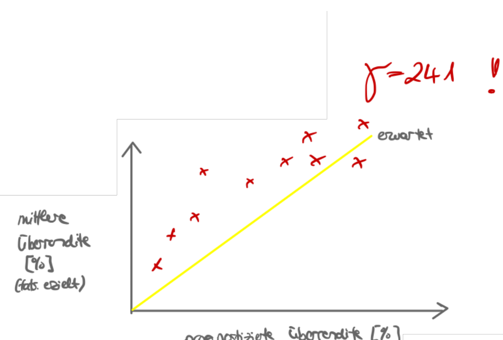
- liefert zwar allgemeingültige Bewertungsbeziehung und
- daraus ableitbar vielfältige Strukturaussagen

Wie gut ist das Modell in der praktischen Anwendung?

- Bestimmung von m über klassische Nutzenfunktionen, aggregierte Konsumdaten...
- empirisch i.d.R. wenig überzeugend

Was nun?

- strukturelle ↗ passt es
- γ dramatisch hoch
- Fehler ~ Differenz zwischen zwei Portfolios
  ↳ beliebiges anderes Portfolio wäre ähnlich gewesen



Praktische Anwendung konsumbasierter Ansätze

Mögliche Lösungswege

- Anstatt klassische Nutzenfunktion alternative Spezifaktionen $\rightarrow$ nicht-Separierbarkeit einfügen
  - alternative funktionale Form
  - alternative Inputgrößen in Nutzenfunktion, z.B. Konsum relativ zu anderen Konsum in anderen Zuständen
- Allgemeine Gleichgewichtsmodelle- Effekte von regulatorischen Änderungen? $\rightarrow$ möglicherweise sind aggregierte Konsumdaten fehlerbehaftete Inputs $\Rightarrow$ Konsum an andere Faktorenknüpfen (z.B. Einkommen, Investitionen)
- **Faktor Modelle**
- No-Arbitrage Bewertung

Keine neuen Theorien sondern jeweils Spezialfälle des allgemeinen Konsummodelles:

$$p_t = \mathbb{E}_t \left[m_{t+1} x_{t+1} \right], \; m_{t+1} = f(Daten, Parameter)$$

V.1 Grundidee der Faktormodelle

Ersetze konsumbasierten Ausdruck für Grenznutzen durch lineares Faktormodell

$$m_{t+1} = a + b' + f_{t+1}$$

mit freien Parametern a und $b = (b_1, \dots, b_k)^T$, $f = (f_1, \dots, f_k)^T$.

Zentrale Frage: welche Faktoren f_{t+1} sollen gewählt werden? z.B. Arbeitslosenquote, Inflationsrate, BIP-Wachstum, Einkommen(sveränderung), Leitzins, Wechselkurse, Entwicklung an Aktienmarkt.

Grundsätzlich Faktoren, die gute Näherung für gesuchte Grenzraten des Konsumwachstums liefern, d.h.

$$\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \approx a + b' f_{t+1}$$

und somit letztlich "gute" und "schlechte" Zustände anzeigen können.

Welche Faktoren könnten das sein?

- Arbeitslosenzahlen, Industrieproduktion
- Inflationsraten, Zinsen, Kreditspreads
- Wachstum des BIP
- Return von großen Portfolios, Indizes (Dax, S&P 500)

Niveau versus Veränderung? besser: Variablen reinstecken, die nicht hochgradig prognostizierbar (Niveau ist vorhersehrbar). Faktoren sollten nicht hochgradig vorhersehrbar sein.

Ableitung eines Faktormodells

- liefert konkrete Liste an Faktoren, die gewünschte Approximation leisten
- zeigt, dass lineare Beziehung gilt

V.2 Capital Asset Pricing Modell

Beispiel:

Das CAPM ist ein berühmtes, weitverbreitetes Gleichgewichtsmodell. Der Diskontfaktor wird an Return des Marktportfolios geknüpft

$$m_{t+1} = a + bR^M_{t+1}$$

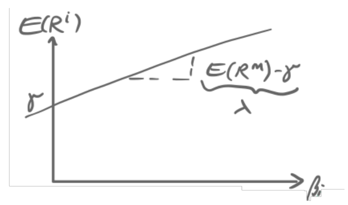
mit freien Parametern a, b. Hoher Return $\rightarrow$ sollen gute Zustände anzeigen $\rightarrow$ $m =$ Grenznutzen des Konsums u'. Schlechter Zustand $\hat{=}$ hohes $m \Rightarrow b < 0, b$ negativ. a und b sind beispielsweise durch zwei Wertpapiere bestimmbar:

- risikoloses Instrument: $1 = \mathbb{E}[mR^f] \Rightarrow 1 = R^f a + R^f b\mathbb{E}(R^m)$
- Return des Marktportfolios: $1 = \mathbb{E}[mR^M] \Rightarrow 1 = a\mathbb{E}[R^m] + b\mathbb{E}[R^{m2}]$

$$\Rightarrow b = -\frac{\mathbb{E}[R^m] - R^f}{\sigma(R^m) \cdot R^f} < 0$$

CAPM anstatt in obiger Diskontfaktor-Repräsentation überlicherweise in (äquivalenter) Return/Beta Darstellung:

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] = \gamma + \beta_{i,R^M}\left(\mathbb{E}\left[R^M\right] - \gamma\right)$$



Verschiedene klassische Ableitungen des CAPM, z.B. über:

a) **Zwei-Perioden Modell, quadratische Nutzenfunktion** oder

b) Zwei-Perioden Modell, exponentielle Nutzenfunktion und normalverteilte Returns oder

c) Unendlichen Horizont, quadratische Nutzenfunktion und iid (independent identically distributed) returns oder

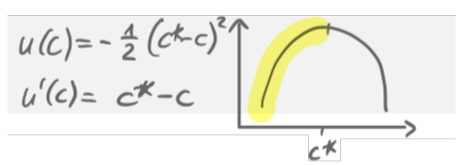
d) log-Nutzenfunktion

woraus jeweils

- Faktor R^M als relevanter Faktor und
- lineare Beziehung

folgt.

Exemplarische Ableitung über das zwei-Perioden Modell, quadratische Nutzenfunktion



- Zwei-Perioden Investoren mit quadratischer Nutzenfunktion

$$U(c_t, c_{t+1}) = -\frac{1}{2}\left(c^* - c_t\right)^2 - \frac{1}{2}\beta\mathbb{E}\left[\left(c^* - c_{t+1}\right)^2\right]$$

- Mit obiger Nutzenfunktion ergibt sich Grenzrate der Substitution

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \beta \frac{c^* - c_{t+1}}{c^* - c_t}$$

  $\Rightarrow$ Grenznutzen (SDF) linear im Konsum

- Investoren
  - besitzen Anfangsvermögen W_t und beziehen kein Arbeitseinkommen
  - können in N Wertpapiere mit Preisen p_t^i und Zahlungen x_{t+1}^i zw. Returns R_{t+1}^i investieren

- Was sollen sie konsumieren (c_t, c_{t+1})? Wie sollen sie investieren (Portfoliogewichte (w^i))?

Für gegebene Ausgangssituation folgt unmittelbar:

- in Periode 2 wird alles konsumiert $c_{t+1} = W_{t+1}$

- Vermögen in $t+1$ ergibt sich aus Return R_{t+1} des in t investierten Vermögens

$$W_{t+1} = R_{t+1}^M (W_t - c_t)$$

- wobei für den Return und die Portfoliogewichte gilt

$$R_{t+1}^M = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{t+1}^i \text{ mit } \sum_{i=1}^{N} w_i = 1,$$

  d.h. eine gewichtete Summe der Einzelreturns.

- Ersetzt man c_{t+1} durch W_{t+1} folgt unmittelbar

$$m_{t+1} = \beta \frac{c^* - c_{t+1}}{c^* - c_t} = \beta \frac{c^* - W_{t+1}}{c^* - c_t} = \beta \frac{c^* - R_{t+1}^M (W_t - c_t)}{c^* - c_t} = \underbrace{\beta \frac{c^*}{c^* - c_t}}_{\substack{\text{alles ohne} \\ \text{Return} \to \text{Konstanten} \\ \text{in } t \Rightarrow a_t}} - \underbrace{\beta \frac{W_t - c_t}{c^* - c_t}}_{\substack{\text{Kostante} \\ in \quad t}} R_{t+1}^M$$

  damit gilt

$$m_{t+1} = a_t + b_t R_{t+1}^M.$$

  Gezeigt:

  a) einziger relevanter Faktor: Return

  b) lineare Beziehung

V.3 Arbitrage Pricing Theorie

Beispiel (Ross (1976)): Die APT

- Idee: Asset Returns enthalten gemeinsame Komponente ($\tilde{f} = f - \mathbb{E}[f]$)

$$R^i = \mathbb{E}[R^i] + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \tilde{f}^k + \epsilon^i$$

  mit $\mathbb{E}[\epsilon^i] = \mathbb{E}[\epsilon^i \tilde{f}^k] = \mathbb{E}[\epsilon^i \epsilon^j] = 0$. ϵ^i ist hier diversifierzierbar $\Rightarrow$ nicht bewertungsrelevant.

- Faktorstruktur: Einschränkung der Kovarianzmatrix der Payoffs

- Unter gewissen Bedingung lässt sich zeige (hier ohne Beweis):

$$m_{t+1} = a + b_1 f_{t+1}^1 + b_2 f_{t+1}^2 + \ldots + b_K f_{t+1}^K = a + b' f_{t+1}$$

- Intuition:
  - Idiosynkratisches Risiko ϵ^i nicht bewertungsrelevant (da diversifierzierbar)
  - Bewertungsrelevant: Kovarianz zu Faktoren

V.4 Faktormodelle und Diskontfaktoren

Das lineare Faktormodell für den stochastischen Diskontfaktor

$$m = a + b_1 f^1 + b_2 f^2 + \ldots + b_K f^K = a + b' f \text{ mit } 1 = \mathbb{E}[mR^i]$$

und das Return/Beta-Modell

$$\mathbb{E}[R^i] = \gamma + \lambda_1 \beta_{i,1} + \lambda_2 \beta_{i,2} + \ldots + \lambda_K \beta_{i,K} = \gamma + \lambda' \beta_i$$

sind äquivalente Darstellungen. Empirische Studien starten typischerweise mit der Return/Beta-Darstellung als Ausgangspunkt.

Nachweis der Äquivalenz ($\mathbb{E}\left[f^i\right] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left[mf^i\right] = \mathbb{E}\left[m\right] \underbrace{\mathbb{E}\left[f^i\right]}_{=0} + \mathrm{cov}(m, f^i)$):

a) Starte mit linearem Faktormodell für stochastischen Diskontfaktor und finde γ und λ, so dass Return/Beta-Modell gilt.

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\left[m \cdot R\right] \text{ mit } m \text{ eingesetzt} \\
1 &= a \cdot \mathbb{E}\left[R\right] + b_1 \mathbb{E}\left[f^1 \cdot R\right] + \ldots + b_k \mathbb{E}\left[f^k \cdot R\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iff \mathbb{E}\left[R\right] &= \frac{1}{a} - \frac{b_1}{a}\mathbb{E}\left[f^1 \cdot R\right] + \ldots + \frac{b_K}{a}\mathbb{E}\left[f^k \cdot R\right] \\
&= \gamma - \underbrace{\frac{b_1}{a}\sigma(f^1)}_{\lambda} \tilde{} \underbrace{\frac{\operatorname{cov}(f^1, R)}{\sigma(f^1)}}_{\beta_1} - \ldots - \underbrace{\frac{b_K}{a}\sigma(f^K)}_{\lambda} \tilde{} \underbrace{\frac{\operatorname{cov}(f^K, R)}{\sigma(f^K)}}_{\beta_K}
\end{aligned}
$$

b) Starte mit Return/Beta-Modell und finde a und b, so dass lineares Faktormodell für stochastischen Diskontfaktor gilt.

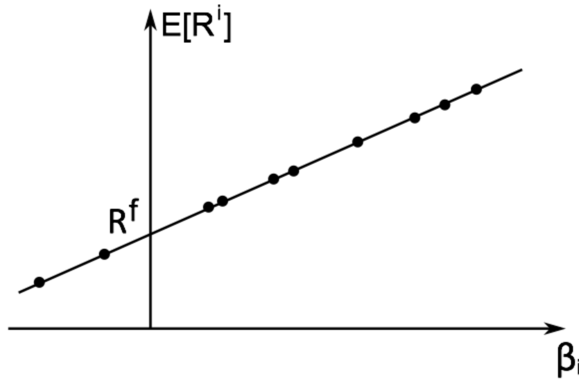
V.5 Faktormodelle und empirische Evidenz

Return/Beta-Modell als Ausgangspunkt empirischer Studien. Empirische Umsetzung (2-stufiges Verfahren):

- Schritt 1: Zeitreihenregression um Exposition gegenüber Risikofaktoren ($\beta_{i,k}$) zu bestimmen:
$$R_t^i = a_i + \beta_{i,1} f_t^1 + \beta_{i,2} f_t^2 + \ldots + \epsilon_t^i$$
- Schritt 2: Gemäß Return/Beta-Modell sollten mittlere Returns linear in $\beta_{i,k}$ sein $\Rightarrow$ bestimme Risikoprämien (λ_k) mittels Querschnittregression:
$$\mathbb{E}[R^i] = \gamma + \beta_{i,1}\lambda_1 + \beta_{i,2}\lambda_2 + \ldots$$

Beachte: $\beta_{i,k}$ ist in Schritt 2 die abhängige (erklärende) Variable. Je nach Spezifikation ist zusätzlich γ (Achsenabschnitt) zu schätzen.

Theoretische Implikation: Alle Asset-Returns sollen auf der Geraden liegen (hier bei nur einem Faktor):
Anwendungsbeispiel: CAPM
Verwende Überschussrendite (hier als Renditedifferenz zu risikolosem Instrument) für



jedes Wertpapier: $R_t^{e,i} = R_t^i - R^f$
Risikofaktor: Marktüberschussrendite $R_t^{e,M} = R_t^M - R^f$

- Schritt 1: bestimme Abhängigkeit zwischen jedem $R_t^{e,i}$ und $R_t^{e,M}$ mittels Zeitreihenregression:
$$R_t^{e,i} = a_i + \beta_i R_t^{e,M} + \epsilon_t^i$$
a_i bezeichnet hierbei den wertpapierspezifischen Achsenabschnitt.

- Schritt 2;: Schätz die Marktrisikoprämie λ_M mittels Querschnittregression über alle pro Firma gemittelten Aktienrenditen:
$$\mathbb{E}[R^{e,i}] = \beta_i \lambda_M + \gamma$$
  - γ sollte in der Regel sehr kleine Werte annehmen
  - Da Faktor in diesem Fall selbst eine Überschussrendite mit einem β_i von 1 ist folgt:
  $$\mathbb{E}\left[R^{M,e}\right] = \mathbb{E}\left[R^M\right] - R^f = \lambda_M$$
  (Schritt 2 entfällt somit).

Empirische Evidenz zu CAPM:

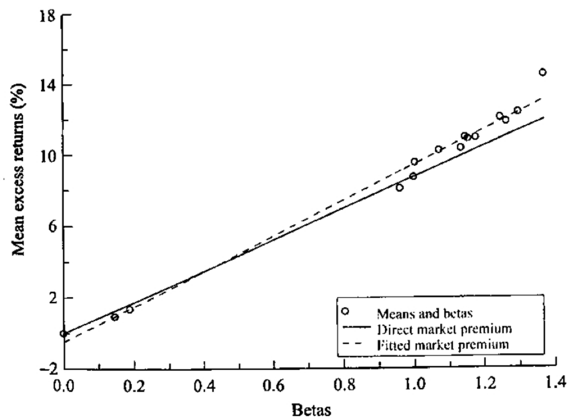
- Auf Einzelaktienebene wenig überzeugend (hohe Streuung und zu niedrige Steigung der Wertpapiermarktlinie)

- Üblicherweise Verwendung auf Portfolioebene

- genauere Messung der Betas durch Mittelwertbildung über einzelne Wertpapiere und über die Zeit
- genauere Messung der historischen Überrenditen durch geringere Varianz

$\Rightarrow$ hoher Erklärungsgehalt von historisch realisierten Renditen

Mittlere Überschussrenditen vs. β_i für verschiedene Wertpapierportfolios von 1974-1996 (nach Cochrane (2005)):



Farma-French-Modell:

- Aber: kleine Firmen und Firmen mit hohem Verhältnis vom Buchwert zu Marktwert der Aktiva zeigen ungewöhnlich hohe durchschnittliche Renditen, die nicht mit dem CAPM erklärbar sind.
  $\Rightarrow$ Motivation für die Berücksichtigung weiterer Faktoren

$$\mathbb{E}\left[R^i\right] = \gamma + \beta_{i,R^M}\left(\mathbb{E}\left[R^M\right] - \gamma\right) + \beta_{i,h}\mathbb{E}\left[HML\right] + \beta_{i,s}\mathbb{E}\left[SMB\right]$$

  - HML ("High minus Low"): Renditedifferenz von Aktien mit hohem und niedrigem Buchwert-zu-Marktwert-Verhältnis der Aktiva.
  - SMB ("Small minus Big"): Renditedifferenz von Aktien mit geringem und hohem Marktwert des Eigenkapitals.

- Achtung: Grund für die ungewöhnlich hohen Renditen kann nicht idiosynkratischer Natur sein (z.B. Größe der Firma).

Chapter VI

Anhang

Übungen

Aufgabe 7

a) Es gilt (vgl. letzte Übung): $m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$.

- Im schlechten Zustand nimmt der stochastische Diskontfaktor relativ große Werte an (Grenzwert des Konsums ist hoch).
- Im guten Zustand relativ geringe Werte.

Damit ist:

$$m_{t+1} = 0.97\text{: ungünstiger Zustand}$$
$$m_{t+1} = 0.85\text{: günstiger Zustand}$$

Beachte: "Im schlechten Zustand" bezieht sich eigentlich relativ auf den Vergleich zu vorhergehenden Periode.

b) Eine Power-Nutzenfunktion hat bei uns die allgemeine Form:

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

Daraus folgt $u'(c) = c^{-\gamma}$ und damit:

$$m_{t+1} = \beta \frac{c_{t+1}^{\gamma}}{c_t^{-\gamma}} = \beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\gamma}$$

Ist $\gamma > 0 \Rightarrow$ je größer der Konsum in einem Zustand in $t+1$ ist, desto kleiner m_{t+1} und umgekehrt

c) $p_A > p_B$ da Wertpapier A im ökonomisch schlechteren Zustand mehr auszahlt und der Erwartungswert der Auszahlung beider Wertpapiere gleich ist.

d) Es ist

$$p_t^A = \mathbb{E}(m_{t+1}x_{t+1}^A) = 0.5 \cdot 0.85 \cdot 5 + 0.5 \cdot 0.97 \cdot 8 = 6.01$$
$$p_t^B = analog = 5.83$$

$\mathbb{E}[R_{t+1}^B] > \mathbb{E}[R_{t+1}^A]$, $p_A > p_B$

e) Es ist

$$\begin{aligned} p_t &= \mathbb{E}[m_{t+1}X_{t+1}] \\ &= \mathbb{E}[m_{t+1}] \cdot \mathbb{E}[x_{t+1}] + \operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \\ &= \frac{\mathbb{E}[x_{t+1}]}{R^t} + \operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(x_{t+1}\hat{\text{A}}) = \mathbb{E}(x_{t+1}^B) = 6.5$

$$R^f = \frac{1}{\mathbb{E}(m_{t+1})} = \frac{1}{0.91} = 1.10$$

$\Rightarrow \frac{\mathbb{E}(x_{t+1}^A)}{R^f} = \frac{\mathbb{E}(x_{t+1}^B)}{R^f} = 5.91$

$$\operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) = 0.5\,(0.85 - 0.91)\,(5 - 6.5) + 0.5\,(0.97 - 0.91)\,(8 - 6.5) = 0.09$$
$$\operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}^B) = analog = -0.09$$

wobei $\operatorname{cov}(a, b) = \mathbb{E}[(a - \overline{a})(b - \overline{b})]$, mit $\overline{x} = \mathbb{E}[x]$,

$$\Rightarrow p^A > p^B$$

f) Da die $\operatorname{cov}(\cdot,\cdot)$ negative sowie positive Werte annehmen kann, ergibt sich bei geeigneten Werten für $\mathbb{E}(x_{t+1})$ und R^f für manche Wertpapiere auch bei $\mathbb{E}(x_{t+1}) < 0$ ein positiven Preis. Beispiel: Versicherung

Aufgabe 8 (Der μ-σ-Rand)

Betrachten Sie ein Ökonomie mit zwei Zeitpunkten (t und $t+1$) und einem risikolosen Zinssatz von 10%.

a) Unterstellen Sie für den SDF, das $m_{t+1} = a + bR^{mv}$, wobei a und b Parameterwerte und R^{mv} die Rendite eines Wertpapiers darstellt.

(i) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit dieser Zusammenhang gelten kann? Welche Implikation für die Bewertung von Wertpapieren enthält diese Annahme.

Proof: Damit der Zusammenhang $m_{t+1} = a + bR^{mv}$ gilt, muss die Rendite des Wertpapiers, R^{mv} perfekt mit m_{t+1} korreliert sein.
Das impliziert, dass in R^{mv} alle bewertungsrelevanten Informationen enthalten sein müssen. □

(ii) Maximale Sharpratio und

Proof: $p_{t+1} = \mathbb{E}(m_{t+1}x_{t+1}) \iff 1 = \mathbb{E}(m_{t+1}R_{t+1})$

$$\begin{aligned}
&\iff 1 = \mathbb{E}(m_{t+1})\mathbb{E}(R_{t+1}) + \operatorname{cov}(m_{t+1}, R_{t+1}) \\
&\iff \mathbb{E}(R_{t+1}) = R^f - \frac{\operatorname{cov}(m_{t+1}, R_{t+1})}{\mathbb{E}(m_{t+1})} \\
&\iff \mathbb{E}(R_{t+1}) - R^f = -\rho_{m_{t+1},R_{t+1}}\sigma_{R_{t+1}}\frac{\sigma_{m_{t+1}}}{\mathbb{E}(m_{t+1})} \\
&\iff \frac{\mathbb{E}(R_{t+1}) - R^f}{\sigma_{R_{t+1}}} = -\rho_{m_{t+1},R_{t+1}}\frac{\sigma_{m_{t+1}}}{\mathbb{E}(m_{t+1})}
\end{aligned}$$

Mit $|\rho| \leq 1$ gilt:

$$\left|\frac{\mathbb{E}(R_{t+1}) - R^f}{\sigma_{R_{t+1}}}\right| \leq \frac{\sigma_{m_{t+1}}}{\mathbb{E}(m_{t+1})}$$

Aus $m_{t+1} = a + b \cdot R^{mv}_{t+1}$ folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{var}(m_{t+1}) &= b^2 \operatorname{var}(R^{mv}_{t+1}) \\
\sigma_{m_{t+1}} &= \sqrt{b^2 \operatorname{var}(R^{mv}_{t+1})} = \sqrt{2} \\
\tfrac{1}{\mathbb{E}(m_{t+1})} &= R^f = 1.1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sigma_{m_{t+1}}}{\mathbb{E}(m_{t+1})} = 1.55$$

□

Aufgabe 9 (Der μ-σ-Rand und die Beta-Darstellung)

Gegeben ist eine Ökonomie mit zwei Zeitpunkten (t und $t+1$) mit einem risikolosen Zinssatz in Höhe von R^f, sowie ein effizienter Rand-Return R^{mv}. Nehmen Sie an

a) Es gilt $m_{t+1} = a + b \cdot R^{mv}$

$$\begin{aligned} p_t = \mathbb{E}(m_{t+1}x_{t+1}) &= \mathbb{E}(m_{t+1})\mathbb{E}(x_{t+1}) + \operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \\ \iff \; p_t &= \frac{\mathbb{E}(x_{t+1})}{R^f} + \operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \\ \iff \; p_t &= \frac{\mathbb{E}(x_{t+1})}{R^f} + \operatorname{cov}(a + bR^{mv}, x_{t+1}) \\ \iff \; p_t &= \frac{\mathbb{E}(x_{t+1})}{R^f} + b\operatorname{cov}(R^{mv}, x_{t+1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ falls b bekannt können mit Hilfe von R^{mv} alle Wertpapiere bewertet werden.

b) Gilt für alle Wertpapiere auf dem μ-σ-Rand außer dem risikolosen Instrument.

c) Es gilt die folgenden Möglichkeiten

- 1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}(m_{t+1}R^{mv}) = \mathbb{E}\left((a + bR^{mv})R^{mv}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(aR^{mv} + b\left(R^{mv}\right)^2\right) \qquad (*) \\ 1 &= \mathbb{E}(m_{t+1}R^f) = \mathbb{E}\left((a + bR^{mv})R^f\right) \\ &= \mathbb{E}\left(aR^f + bR^{mv}R^f\right) \qquad (**) \end{aligned}$$

Aus $(*)$: $\Rightarrow 1 = a \cdot \mathbb{E}(R^{mv}) + b\mathbb{E}\left((R^{mv})^2\right)$
Aus $(**)$: $\Rightarrow 1 = a \cdot \mathbb{E}(R^f) + b\mathbb{E}\left(\left(R^f\right)^2\right)$

$$\Rightarrow$$

- 2. Möglichkeit: aus $|\rho| = 1$ folgt $(\mathbb{E}(m_{t+1}) = a + b\mathbb{E}(R^{mv}))$

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= \mathbb{E}(m_{t+1}) + b\left(R^{mv} - \mathbb{E}(R^{mv})\right) \qquad (+) \\ \iff \; m_{t+1} &= \frac{1}{R^f} + b\left(R^{mv} - \mathbb{E}(R^{mv})\right) \qquad (***) \end{aligned}$$

Außerdem: $1 = \mathbb{E}(m_{t+1}E^{mv}$. Daraus folgt indem wir $(***)$ einsetzen:

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{R^f} + b\left(R^{mv} - \mathbb{E}_t\left(R^{mv}\right)\right)\right) R^{mv}\right] \\
\iff 1 &= \frac{1}{R^f}\mathbb{E}(R^{mv}) + b\mathbb{E}\left(((R^{mv})^2\right) - b\mathbb{E}\left(R^{mv}\right)^2 \\
\iff 1 &= \frac{1}{R^f}\mathbb{E}(R^{mv}) + b\,\mathrm{var}(R^{mv}) \\
\iff b &= -\frac{\mathbb{E}(R^{mv}) - R^f}{R^f\,\mathrm{var}(R^{mv})}
\end{aligned}$$

In $(+)$ einsetzen:

$$\begin{aligned}
m_{t+1} &= \mathbb{E}(m_{t+1}) + \left(-\frac{\mathbb{E}(R^{mv}) - R^f}{R^f\,\mathrm{var}(R^{mv})}\right)(R^{mv} - \mathbb{E}(R^{mv}) \\
\iff m_{t+1} &= \underbrace{\frac{1}{R^f} + \mathbb{E}(R^{mv})\frac{\mathbb{E}(R^{mv} - R^f}{R^f\,\mathrm{var}(R^{mv})}}_{=:a}\underbrace{-\frac{\mathbb{E}(R^{mv}) - R^f}{R^f\,\mathrm{var}(R^{mv})}}_{=:b} R^{mv} \qquad (++) \\
\iff m_{t+1} &= a + bR^{mv}
\end{aligned}$$

d) Beta Darstellung

$$p_t = \mathbb{E}(m_{t+1}x_{t+1}) \iff 1 = \mathbb{E}(m_{t+1})\mathbb{E}(R^i_{t+1}) + \mathrm{cov}(m_{t+1}, R^i_{t+1})$$

$$\mathbb{E}(R^i_{t+1}) = R^f - \frac{\mathrm{cov}(m_{t+1}, R^i_{t+1})}{\mathbb{E}(m_{t+1})}$$

Aus $(++)$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R^i_{t+1}) &= R^f + \frac{\mathbb{E}(R^{mv} - R^f)}{R^f\,\mathrm{var}(R^{mv})}\,\mathrm{cov}(R^{mv}, R^i_{t+1})\frac{1}{\mathbb{E}(m_{t+1})} \\
\iff \mathbb{E}(R^i_{t+1}) &= \mathbb{R}^f + \frac{\mathbb{E}(R^{mv} - R^f}{\mathrm{var}(R^{mv}}\,\mathrm{cov}(R^{mv}, R^i) \\
\iff \mathbb{E}(R^i_{t+1}) &= R^f + \underbrace{\frac{\mathrm{cov}(R^{mv}, R^i_{t+1})}{\mathrm{var}(R^{mv})}}_{=:\beta_{i,mv}}\underbrace{\left(\mathbb{E}(R^{mv} - R^f\right)}_{=:\lambda_{mv}} \\
\iff \mathbb{E}(R^i_{t+1}) &= R^f + \beta_{i,mv}\lambda_{mv}
\end{aligned}$$

e) Welche Annahme trifft man oft in der praktischen Umsetzung dieser Bewertungsbeziehung

Proof: R^{mv} = Rendite des Marktportfolios (z.B. Dax 30) □

Sonderübung

Aufgabe 1

Nehmen Sie Stellung zu folgenden Aussagen:

a) Wertpapiere, deren Auszahlung positiv mit dem stochastischem Diskontfaktor korrelieren, besitzen im Gleichgewicht höhere erwartete Renditen, die für das höhere Risiko solcher Wertpapiere kompensieren.

   Proof: Die Aussage ist falsch. Wertpapiere deren erwarteten. Renditen positiv mit dem stoch. Diskontfaktor korrelieren, zahlen in Zuständen mit hohem stoch. Diskontfaktor wenig und in Zuständen mit niedrigem stoch. Disktontfaktor viel (es ist ja: SDF hoch = schlechter Zustand und vice versa). Solch ein Wertpapier besitzt einen Versicherungscharakter. Wichtig ist, dass die Renditen-Preisbeziehung invers ist. Im Gleichgewicht beizten sie also niedrige erwartete Renditen, da sie ein geringeres Risiko besitzen. □

b) Wertpapiere, die nicht auf dem μ-σ-Rand liegen, sind nicht effizient und werden deshalb von den Investoren nicht nachgefragt.

   Proof: Die Aussage ist falsch. Diese Wertpapiere sind nicht effizient, allerdings sind sie auch nicht perfekt mit stochastischen Diskontfaktor korreliert und weisen unsystematisches Risiko auf. Damit können diese Wertpapiere nachgefragt werden, jedoch nicht alleine. □

c) Das CAPM kann nicht stimmen, da tatsächlich die Korrelation von zukünftigen Zahlung mit dem Konsumwachstum entscheidend für den Preis eines Wertpapiers ist nachgefragt.

   Proof: Diese Aussage ist falsch. CAMP ist ein Spezialfall des konsumbasierten Asset Pricing Modells. Als Faktormodell nutzt das CAMP eine Approximation des aggregieren Nutzenwachstums

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = a + b' f_{t+1}.$$

Das CAMP-Modell approximiert also diesen Faktor linear und stellt damit (vereinfacht) die Korrelation dar. □

d) Existiert in einer Ökonomie mindestens für jeden Zustand ein Wertpapier, das 24 im entsprechenden Zustand und 0 in allen anderen Zuständen auszahlt, so ist auch die Verteilung des stochastischen Diskontfaktors bekannt und alle anderen Wertpapiere können basierend darauf bewertet werden.

Proof: Diese Aussage ist falsch. Obwohl die Auszahlungsmatrix linear unabhängig ist, reicht diese nicht zur Bestimmung der Verteilung des stoch. Diskontfaktors aus und somit können nicht nicht alle weiteren Wertpapiere darauf bewertet werden. Vgl.

$$p(x) = \sum_{s \in S} \pi(s) m(s) x(s)$$

Somit ist der Preis und Eintrittswahrscheinlichkeit müssen gegeben sein. □

e) Da die Zentralbank den Zinssatz festlegt, muss bei der empirischen Anwendung des konsumbasierten Ansatzes stets davon ausgegangen werden, dass der Preis des risikolosen Instruments exogen festgelegt wird. Die Diskussion inwiefern sich die Zinsen z.B. in Folge von geänderter Risikoaversion der Investoren ändern, ist deshalb lediglich exemplarischer Natur und nicht mit der Empirie vereinbar.

Proof: Nur teilweise richtig. Wechselwirkung zwischen Konsum % Zinsen

$$\Rightarrow \text{ Makro-Sicht } \Rightarrow \text{ Perspektive einer Einzelperson}$$

Zentralbank setzt zwar Leitzins fest und kauft Anleihen, allerdings gibt es noch andere Einflüsse.
⇒ Preis für risikoloses Instrument kann empirisch nicht als exogen gegeben angenommen werden. □

Aufgabe 2

Gehen Sie von einer Ökonomie mit den Zeitpunkten $t = 0$, $t = 1$ und $t = 2$ (t in Jahren) aus. Die Zustandsübergänge und die Entwicklung des Konsums des repräsentativen Investors sind gemäß dem Baumdiagramm in der Aufgabe zu entnehmen. Der Nutzen des repräsentativen Investors zum jeweiligen Zeitpunkt t lässt sich mit Hilfe der folgenden Powernutzenfunktion mit $\gamma = 1.5$ quantifizieren:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Nehmen Sie für die zeitliche Diskontierung $\beta = 0.95$ an.

a) Für die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten gilt zunächst $p_1 = p_{21} = p_{22} = 0.5$. Bestimmen Sie die beiden fairen risikolosen Zinssätze (annualisiert) für die Zeiträume $t = 0$ bis $t = 1$ und $t = 0$ bis $t = 2$. Berechnen Sie außerdem den erwarteten Gesamtnutzen des repräsentativen Investors zum Zeitpunkt $t = 0$.

Proof: Es ist $u'(c_t) = c_t^{-\gamma}$ und damit (vgl. Cochrane, S. 24f)

$$R_{t+1}^f = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right]} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[\beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^\gamma\right]}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} R_{t+1}^f &= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^\gamma\right]} \\ &= \frac{1}{0.5 \cdot 0.95 \left(\frac{20}{25}\right)^{1.5} + 0.5 \cdot 0.95 \left(\frac{20}{21}\right)^{1.5}} \\ &= 1.2798 \mathrel{\hat{=}} 27.98\% \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R^f_{t+2} &= \frac{1}{\mathbb{E}[m_{0,2}]} = \frac{1}{\mathbb{E}[m_{0,1} \cdot m_{1,2}]} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\beta \cdot \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} \cdot \beta \cdot \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)}\right]} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\left[\beta^2 \left(\frac{c_t}{c_{t+2}}\right)^{\gamma}\right]} \\
&= \frac{1}{0.25 \cdot 0.95^2 \left(\left(\frac{20}{30}\right)^{1.5} + \left(\frac{20}{26}\right)^{1.5} + \left(\frac{20}{26}\right)^{1.5} + \left(\frac{20}{22}\right)^{1.5}\right)} \\
&= 1.6056 \mathrel{\hat{=}} 60.56\%
\end{aligned}
$$

Damit liegt das Annulalisierte bei $r^f = \sqrt{R^f_{t+2}} = \sqrt{60.56} = 26.61\%$. Der erwartete Nutzen ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
U_t(c_t, c_{t+1}, c_{t+2}) &= u(c_t) + \beta \mathbb{E}[u(c_{t+1})] + \beta^2 \mathbb{E}_t\left[u(c_{t+2})\right] \\
&= -2\left(\frac{1}{\sqrt{20}} + 0.95\left(0.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{25}} + 0.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{21}}\right)\right) \\
&\quad - 2\left(0.95^2\left(0.25 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} + 0.25 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} + 0.25 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} + 0.25 \cdot \frac{1}{\sqrt{22}}\right)\right) \\
&= -1.2001
\end{aligned}
$$

□

b) Nehmen Sie nun an, dass für die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten $p_1 = 0.5$, $p_{21} = 0.7$ und $p_{22} = 0.3$ gilt. Würde der repräsentative Investor diese Situation der Situation aus Aufgabenteil a) vorziehen? Antworten Sie sowohl mit einer ökonomischen Argumentation als auch mit einer Rechnung.

Proof: Vergleiche den Gesamtnutzen des Investors zwischen a) und b)

$$
\begin{aligned}
U_t(c_t, c_{t+1}, c_{t+2}) &= u(c_t) + \beta \mathbb{E}[u(c_{t+1})] + \beta^2 \mathbb{E}_t\left[u(c_{t+2})\right] \\
&= -2\left(\frac{1}{\sqrt{20}} + 0.95\left(0.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{25}} + 0.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{21}}\right)\right) \\
&\quad - 2\left(0.95^2\left(0.5 \cdot 0.7 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} + 0.5 \cdot 0.3 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} + 0.5 \cdot 0.3 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} + 0.5 \cdot 0.7 \cdot \frac{1}{\sqrt{22}}\right)\right) \\
&= -1.2007 < -1.2001
\end{aligned}
$$

Nutzen in $t = 2$ ist volatiler (den Wahrscheinlichkeit bei 30 und 22 zu Lasten). Investoren bevorzugen allerdings einen konstanten Konsum

$$\gamma = 1.4 \Rightarrow \text{ risikoavers}$$

$\Rightarrow$ ziehe a) vor. □

c) Welche Auswirkung hätte eine Veränderung der Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten gemäß Aufgabenteil b) (im Vgl. zu Aufgabenteil a)) auf den risikolosen Zinssatz von t = 0 bis t = 2? Antworten Sie ohne Rechnung und gehen Sie insbesondere darauf ein, über welchen Kanal (erwarteter Konsumwachstum vs. Volatilität des Konsumwachstums) sich die veränderten Übergangswahrscheinlichkeiten auf den Zinssatz in diesem Fall auswirken.

Proof: Durch die Änderung der Wahrscheinlichkeiten in b) ändert sich der Erwartungswert des Konsums und damit Erwartungswert von Δc_2 nicht. Was sich geändert hat, ist die Volatilität des Konsumwachstums. Der zukünftige Zustand ist nun unsicher, wodurch man vorzüglich spart (precautionary savings). Durch diese Tatsache erhöht sich die Nachfrage und im Zuge dessen reduzieren sich die Zinsen. □

d) Können die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten in der gegebenen Ökonomie berechnet werden? Gehen Sie bei der Beantwortung der Frage darauf ein, wie sich die gegebene Situation im Vergleich zu den Standardsituationen, im Rahmen derer risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten in Vorlesung und Übung bestimmt wurden, unterscheidet.

Proof: Rein theoretisch könnten die risikoneutralen Wahrscheinlichkeit für beide Stufen anhand der Formel berechnet werden.

$$\pi^*(s) = \frac{m(s)}{\mathbb{E}[m]} \cdot \pi(s) = R^f \cdot pc(s) = R^f \cdot m(s) \cdot \pi(s)$$

wobei $R^f = R^f_{01}/R^f_{02,}$ und $m(s) = \beta \cdot \frac{u'(c(s))}{u'(c_0)}$ bzw. $m(s) = \beta^2 \cdot \frac{u'(c(s))}{u'(c_0)}$.
Unterschiede:

- Es liegt ein zweistufiges Modell vor
- In der vorliegenden Situation liegen keinerlei Informationen über Wertpapiere vor (Preis, Auszahlungsprofil, ...).
  Lediglich die Konsumniveaus sind bekannt.
  Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit Derivatenbewertung

Bemerkung: würde man hier risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten berechnen? Nein, da hier einfach Erwartungsnutzen ausgerechnet werden kann $\Rightarrow$ Vorteil risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten $\Rightarrow$ keine Aussage über Nutzenfunktion notwendig (diese ist in Aufgabe 2 atypischerweise gegeben). $\square$

e) Beschreiben Sie rein qualitativ wie sich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten p_1^*, p_{21}^* und p_{22}^* im Vergleich zu ihren physischen Äquivalenten verhalten. Gehen Sie darauf ein wie die Unterschiede zwischen physischen und risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden können.

Proof: Es gilt:

$$\pi^*(s) = \frac{m(s)}{\mathbb{E}[m]} \cdot m(s)$$

Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten sind dann besonders hoch, wenn der Zustand schlecht ist ($m(s)$ ist groß) oder sehr wahrscheinlich ist, d.h. $\pi(s)$ ist groß. $\square$