Asset Pricing

Prof. Marliese Uhrig-Homburg

Sommersemester 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Contents

Chapter I

Einführung

Betrachte Preise bzw. Renditen an Wertpapiermärkten

- Aktienkurse
- Anleiherenditen
- Derivatenpreise

Warum stellen sich beobachtete Marktpreise bzw. Renditen ein?

Asset Pricing Theorie

- Bewertungstheorie zur Erklärung der Preisbildung
- Schlussfolgerungen, falls Vorhersagen der Theorie $\neq$ Beobachtung

Anpassung der Theorie erforderlich: Positive Theorie
Fehlbewertung am Markt $\Rightarrow$ Handelsstrategie: Normative Theorie

Häufig keine Marktpreise für Ansprüche auf zukünftige Zahlungen vorhanden

- geplante Investitionsprojekte
- Neuemissionen von Wertpapieren
- Finanzinnovationen
- ...

Asset Pricing Theorie

- zur Begründung, wie hoch fairer Preis sein sollte
- als wichtige Entscheidungsgrundlage

I.1 Kernprinzipien der Finanzwirtschaft

Bewertung fußt auf Kernprinzipien der Finanzwirtschaft:

1. **Primat der Zahlungen** Für eine Entscheidung sind allein Zahlung (oder Zahlungsäquivalente) relevant.
2. **Zeitwert des Geldes** Der Wert einer Zahlung hängt davon ab, wann sie erfolgt
3. **Ertrag vs. Risiko** Bei vielen Entscheidungen ist eine Abwägung zwischen Ertrag und Risiko zu treffen.
4. **Aggregation durch Märkte** Wertpapiermärkte aggregieren Präferenzen und Informationen
5. **Arbitragefreiheit** Preise an kompetitiven Wertpapiermärkten zeichnen sich durch die Abwesenheit von Arbitrage aus

I.2 Relative vs. absolute Bewertung

Bewertung

absolut mit Bezug zu grundlegenden makroökonomischen Faktoren

- Konsum-basierte oder allgemeine Gleichgewichtsmodelle
- Beispiel: capital Asset Pricing Model

relativ zu gegebenen anderen Wertpapieren (Basiswertpapieren)

- Duplikatopn und Gesetz des einen Preises
- Beispiel: Optionspreistheorie nach Black/Scholes

Typische Anwendungen enthalten beide Aspekte

I.3 Bewertungsprinzip

Einfach Grundidee:

Preise entsprechen erwarteten diskontierten Zahlungen

Zahlungsstrom: Zukünftige unsichere Zahlungen

- Zeit- und Risikodimension

Bewertungsprinzip berücksichtigt Dimension durch geeignete

- Diskontierung
- Erwartungsbildung

Chapter II

Stochastischer Diskont-Faktor Ansatz

“Asset pricing theory all stems from one simple concept, presented in the first page of the first chapter of this book: **price equals expected dicounted payoff**. The rest is elaboration, special cases, and a closet full of tricks that make the central equation useful from one or another application.”

Quelle: John H. Cochrane, Asset Pricing, S. xiii

Fragestellung: Gegebener Zahlungsstrom (z.B. Dividenden, Zinsen, Auszahlungen von Derivaten, Rückflüsse aus Investitionen, . . .)

- Welchen Wert besitzt der Zahlungsstrom?
- Wie wirken Zeit und Risiko
- Wie ändert sich Wert, wenn sich Ökonomie verändert? (Risikomanagement)

Einfacher formaler Rahmen:

- zukünftige (unsichere) Zahlung x_{t+1}
- gesucht: Heutiger Wert p_t

II.1 Präferenzen der Investoren

Idee: Investor trifft wirtschaftliche Entscheidungen mit dem Ziel, möglichst günstigen Konsumstrom zu erreichen.

Formal über Nutzenfunktionen:

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta \cdot \mathbb{E}_t\Big[u\left(c_{t+1}\right)\Big]$$

c_t = Konsum in t

c_{t+1} = Konsum in $t+1$

Plausible Annahmen bezüglich Eigenschaften von Nutzenfunktionen

positiver Grenznutzen: Nutzen wächst, wenn Konsum in beliebigem Zeitpunkt wächst, d.h. "mehr ist besser als weniger" (nicht gesättigte Investoren)

abnehmender Grenznutzen: Je höher der Konsum in einem Zeitpunkt, desto geringer ist der durch zusätzliche Konsumeinheit erzeugte Nutzenzuwachs

Nutzenfunktion bildet Ungeduld und Risikoaversion der Investoren ab:

Ungeduld: $\beta < 1$ erfasst Präferenz für frühere Zahlungen subjektive Diskontierung

Risikoaversion: zukünftiger Konsum c_{t+1} unsicher, daher $\mathbb{E}_t\Big[u(c_{t+1})\Big]$. Krümmung der Nutzenfunktion u zentral.
Beispiel: 50/50 Wetter

$$\mathbb{E}\Big[u(c)\Big] = 0.5 \cdot u(\bar{c} + x) + 0.5 \cdot u(\bar{c} - x)$$

u konkav $\Rightarrow$ Wette vermeiden

Gesamtnutzenfunktion $U(c_t, c_{t+1})$ am einfachsten über Nutzenindifferenzkurven darstellbar:

- Alle Punkte auf einer Kurve weisen denselben Nutzen auf.
- Je weiter entfernt vom Ursprung, desto höher der Nutzen $\rightarrow$ folgt aus positivem Grenznutzen
- Iso-Nutzenlinien verlaufen (streng) konvex. $\rightarrow$ folgt aus abnehmendem Grenznutzen
- Aversion gegen intertemporale Substitution

II.2 Beispiele für Nutzenfunktionen

Power-Nutzenfunktion

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

- $-c\frac{u''(c)}{u'(c)} = \gamma$: Konstante relative Risikoaversion
- strebt für $\gamma \to 1$ gegen Log-Nutzenfunktion

$$u(c) = \ln(c)$$

Quadratische Nutzenfunktion

$$u(c) = -\frac{1}{2}\left(\bar{c} - c\right)^2, \quad c < \bar{c}$$

II.3 Zentrale Bewertungsbeziegung

- Investor konsumiert c_t, c_{t+1} und kann beliebigen Anteil ξ der Zahlung x_{t+1} kaufen oder verkaufen
- Kalkül des Investors:

$$\max_{\xi} u(c_t) + \beta \mathbb{E}_t\Big[u(c_{t+1})\Big] \text{ u.d.N.}$$

$$\begin{aligned} c_t &= e_t - p_t\xi \\ c_{t+1} &= e_{t+1} + x_{t+1}\xi \end{aligned}$$

- Bedingung erster Ordnung:

$$p_t u'(c_t) = \mathbb{E}_t\Big[\beta u'(c_{t+1}) x_{t+1}\Big]$$

- Investor kauft/verkauft solange bis Grenzosten = Grenzertrag

Aus der first-order Bedingung folgt

- zentrale Bewertungsgleichung

$$p_t = \mathbb{E}_t\Big[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}\Big]$$

- in vielen Fällen hilfreich, obgleich sowohl
  Preis als auch **Konsum** endogene Größen!

II.4 Stochastischer Diskontfaktor

Hilfreiche Separation:

- Mit stochastischem Diskontfaktor

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

- vereinfacht sich zentrale Bewertungsbeziehung zu

$$p_t = \mathbb{E}_t\Big[m_{t+1} x_{t+1}\Big]$$

Stochastische Diskontfaktor verallgemeinert übliches Verständnis von Diskontfaktoren:

- Sichere Zahlung x_{t+1}: $p_t = \frac{1}{R^f} x_{t+1} = \frac{1}{1+r^f} x_{t+1}$
- Risikoadjustierte Diskontierung: $p_t = \frac{1}{ER^i}\mathbb{E}_t\Big[x_{t+1}\Big]$

Beachte

- stochastischer Diskontfaktor m_{t+1}
  - ist zufällig
  - für alle Assets (bzw. Cash Flows x_{t+1}) identisch
- Wie passt das mit der üblichen Vorstellung zusammen, dass riskantere Titel eine höhere Diskontierung erfordern?

Interpretationen und alternative Bezeichnungen von m_{t+1}

- Grenzrate der Substitution: $m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$
- Pricing Kernel, Dichte der Zustandspreise

II.5 Beispiele für Preise und Zahlungen

1. **Aktieninvestment**: p_t: Preis in t, $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$: Zahlung in $t+1$ mit Dividendenzahlung d_{t+1} in $t+1$; dann gilt $p_t = \mathbb{E}_t\Big[m(p_{t+1} + d_{t+1})\Big]$

2. **Brutto-Return**: Interpretiere $R_{t+1} = \frac{x_{t+1}}{p_t}$ als Payoff in $t+1$ mit Preis 1 dann gilt $1 = \mathbb{E}_t\Big[mR\Big]$

3. **Überschuss-Return**: als Zahlung $R^e_{t+1} = R^a_{t+1} - R^b_{t+1}$ in $t+1$ eines Portfolios ohne Kapitaleinsatz, d.h. $p_t = 0$ dann gilt $0 = \mathbb{E}_t\Big[mR^e\Big]$

4. **Einperiodige Anleihe**: p_t: Anleihepreis in t, Rückzahlung $x_{t+1} = 1$, dann gilt $p_t = \mathbb{E}_t\Big[m\Big]$

5. **Geldmarktkonto**: $p_t = 1$, Rückfluss in $t+1$: $R^f = (1+r^f)$ dann gilt $1 = \mathbb{E}_t\Big[mR^f\Big]$

6. **Kaufoption**: $p_t = C$, $x_{t+1} = \max(S_{t+1}-K, 0)$, dann gilt $C = \mathbb{E}_t\Big[m\left(\max(S_{t+1} - K, 0)\right)\Big]$

Chapter III

Klassische Theorien

Durch einfache Umformungen der zentralen Bewertungsbeziehung

$$p = \mathbb{E}[mx]$$

lassen sich viele finanzwirtschaftliche Theorien und Konzepte leicht ableiten:

1. **Ökonomie der Zinsen**: Wann und warum sind Zinsen hoch oder niedrig?
2. **Risikoanpassung**: Wovon hängt die Risikoanpassung ab?
3. **Unsystematisches Risiko**: Warum wird unsystematisches Risiko nicht vergütet?
4. **Beta als Risikomaß**: Welche Beziehung besteht zwischen erwarteten Renditen und Beta?
5. **μ-σ-Rand**: Welche Rendite/Risiko-Kombinationen sind erreichbar?
6. **Equity Premium Puzzle**: Warum sind Risikoprämien von Aktien so hoch?

III.1 Ökonomie der Zinsen

Interpretation der risikolosen Verzinsung $R^f = 1 + r^f$.

- Aus zentraler Bewertungsbeziehung folgt für das Geldmarktkonto:

$$1 = \mathbb{E}\left[mR^f\right] \Rightarrow R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m]}$$

- Bei Sicherheit folgt für eine isoelastische Nutzenfunktion

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} : m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}$$

$$\Rightarrow R^f = \frac{1}{\beta} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\gamma}$$

- Somit gilt:
  - Realzinsen sind hoch, wenn Investoren ungeduldig sind (niedriges β)
  - Realzinsen sind hoch, wenn das Konsumwachstum hoch ist.
  - Realzinsen reagieren sensitiver auf Änderungen des Konsumwachstums bei hoher Riskoaversion (hohes γ).

Unter Annahme von Unsicherheit:

- Mit $\beta = e^{-\delta}$ und $\Delta c_{t+1} = \ln\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)$ folgt

$$m_{t+1} = e^{-\delta} e^{-\gamma \Delta c_{t+1}} \approx 1 - \delta - \gamma \Delta c_{t+1}$$

- Somit

$$R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m_{t+1}]} \approx \frac{1}{1 - \delta - \gamma \mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}]} \approx 1 + \delta + \gamma \mathbb{E}[\Delta c_{t+1}]$$

- Grundsätzlich identische Implikationen wie im deterministischen Fall:

$$R^f \approx 1 + \delta + \gamma \mathbb{E}[\Delta c_{t+1}]$$

Wie schon zuvor sind Zinsen hoch

- bei sehr ungeduldigen Investoren (niedriges β bzw. hohes δ)
- bei hohem erwarteten Konsumwachstum $\mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}]$
  - wer weiß, dass er in Zukunft reicher sein wird, braucht hohe Zinsen, damit er bereit ist, heute auf Konsum zu verzichten und dafür zu sparen
  - Zinsen sind höher in Aufschwungphasen als in Rezessionen

Wie schon zuvor

- Sensitivität bzgl. Konsumwachstum nimmt mit Risikoaversion γ zu
  - Beachte: Hohes $\mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}]$ (Aufschwung), hohes R^f;
    niedriges $\mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}]$ (Abschwung), niedriges R^f;
  - Stärke der Veränderung (ob positiv oder negativ) steigt mit γ

Nun zu Aspekt des Risikos.
Betrachte hierzu Approximation zweiter Ordnung:

$$R^f \approx 1 + \delta + \gamma \mathbb{E}_t[\Delta c_{t+1}] - \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2(\Delta c_{t+1})$$

Höhere Volatilität des Konsumwachstums (hohes σ)

- führt zu niedrigeren Zinsen
  - in unsicheren Zeiten spart man lieber vorsorglich
  - hohe Sparnachfrage reduziert Zinsen

Umgekehrt

- ist Konsumwachstum hoch, falls Zinsen hoch sind (bei hohen Zinsen wird mehr gespart)
- ist Konsum weniger sensitiv bzgl. Zinsänderungen, wenn γ hoch ist (hohes $\gamma \Rightarrow$ starker Wunsch nach gleichmäßigem Konsumstrom)

Was determiniert wen?

- Konsum determiniert Zinsen
- Zinsen determinieren Konsum

Beachte:
Bei der Power-Nutzenfunktion gilt: Krümmungsparameter γ steuert gleichzeitig

- intertemporale Substitution: Aversion gegenüber zeitlich schwankenden Konsummöglichkeiten
- Risikoaversion: Aversion gegenüber Veränderungen der Konsummöglichkeiten durch unterschiedliche Zustände
- vorsorgliche Ersparnis: abhängig von der dritten Ableitung der Nutzenfunktion

Allgemeinere Nutzenfunktionen entkoppeln die drei Einflüsse. Beispiel: Rekursive Nutzenfunktion (Epstein-Zin Nutzenfunktion)

III.2 Risikoanpassung

- Aus der Definition $\text{cov}(m, x) = \mathbb{E}[mx] - \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[x]$ folgt

$$p = \mathbb{E}[mx] = \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[x] - \text{cov}(m, x)$$

- Mit $R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m]}$ folgt

$$p = \frac{\mathbb{E}[x]}{R^f} + \text{cov}(m, x)$$

Preis ergibt sich aus

- Diskontierung des erwarteten Payoffs mit risikolosem Zinssatz
  - Standardbarwert-Kalkül bei Sicherheit bzw. Risikoneutralität
  - Aspekt "Zeit"
- Risikokorrektur über Kovarianzterm
  - je stärker Kovarianz mit Diskontfaktor m, desto höher der Preis
  - Aspekt "Risiko"

Wirkungsweise der Risikoanpassung

Mit $m = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ folgt

$$p = \frac{\mathbb{E}[x]}{R^f} + \frac{\text{cov}(\beta u'(c_{t+1}), x_{t+1})}{u'(c_t)}$$

Risikoanpassung

- verringert Preis bei positiver Kovarianz mit Konsum ($u'(c)$ sinkt in c)
- erhöht Preis bei negativer Kovarianz mit Konsum

Warum?

Beispiel: Betrachte zwei Wertpapiere mit
Für welches Wertpapier sind Sie bereit mehr zu bezahlen?

Ergebnis:

	gute Zeiten (0.5)	schlechte Zeiten (0.5)
WP_1	100	0
WP_2	0	100

- Für Assets, die mehr zur Konsumglättung beitrag, werden höhere Preise bezahlt.
- Bei unsicherem Payoff mit gegebenem Erwartungswert $\mathbb{E}[x]$
  - wird Preis nach unten korrigiert, falls Payoff in schlechten Zeiten niedrig ist
  - wird Preis nach oben korrigiert, falls Payoff in schlechten Zeiten hoch ist (Versicherungsidee)

Rolle der Risikoaversion

- Betrachte wieder isoelastische Nutzenfunktion $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$
- Höheres $\gamma \Rightarrow$ stärkere Risikokorrektur
- Formal: Aus Approximation $m_{t+1} \approx 1 - \delta - \gamma \Delta c_{t+1}$ folgt

$$\operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \approx -\gamma \operatorname{cov}(\Delta c_{t+1}, x_{t+1})$$

und damit

$$p_t \approx \frac{\mathbb{E}_t[x_{t+1}]}{R^f} - \gamma \operatorname{cov}(\Delta c_{t+1}, x_{t+1})$$

Warum zählt die Kovarianz und nicht Varianz der Zahlung?

Die eigentliche Frage ist nämlich, die Schwankung im resultierenden Nutzenstorms und nicht eines einzelnen Preises.

- Investor interessiert sich nicht für Volatilität eines einzelnen Wertpapiers sondern für resultierenden Konsum und ggf. dessen Varianz
- $\sigma^2(c + \xi x) = \sigma^2(c) + 2\xi \operatorname{cov}(cx) + \xi^2 \sigma^2(x)$
  Hier ist der mittlerer Term von erster Ordnung; da wird beim hinteren Term ξ^2 haben, können wir bei marginalen Betrachtungen diesen Fallen lassen (fordert: ex-post Betrachtung), das Kalkül gilt hier also immer!. Ex-ante können wir das analoge Argument aufbringen, falls man in marginale Beiträge (ξ) investieren kann und keine z.B. all-or-nothing Situation hat.

- Vorstellung: Portfolios und damit auch c und m bereits angepasst
- Welchen Beitrag hat letzte marginale Einheit (sehr kleines ξ) von x?

Betrachte nun Returns verschiedener Wertpapiere i, j

$$R^i = \frac{x^i_{t+1}}{p^i_t}, \; R^j = \frac{x^j_{t+1}}{p^j_t}$$

Dann gilt

$$1 = \mathbb{E}\left[mR^i\right] = \mathbb{E}\left[mR^j\right]$$

- Obgleich erwartete Returns i.d.R. verschieden, sind erwartete diskontierte Returns immer 1!
- Weiter gilt $1 = \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[R^i] + \operatorname{cov}(m, R^i)$

$$\iff R^f = \frac{1}{E(m)} = \mathbb{E}(R^i) + \frac{\operatorname{cov}(m, R^i)}{\mathbb{E}(m)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[R^i] - R^f = -R^f \operatorname{cov}(m, R^i)$$

- $m = \beta u'(c_{t+1})/u'(c_t)$ eingesetzt liefert

$$\mathbb{E}[R^i] - R^f = -\frac{\operatorname{cov}(u'(c_{t+1}), R^i)}{\mathbb{E}[u'(c_{t+1}]}$$

Aus Überrenditendarstellung

$$\mathbb{E}[R^i] - R^f = -\frac{\operatorname{cov}(u'(c_{t+1}), R^i)}{\mathbb{E}[u'(c_{t+1}]}$$

folgt:

- die erwartete Rendite jedes Wertpapiers entspricht der risikolosen Verzinsung zuzüglich einer Risikokorrektur
- Wertpapiere, deren Returns positiv mit Konsum variieren führen zu volatilerem Konsum und müssen daher höhere erwartete Returns liefern. $\Rightarrow \mathbb{E}(R^i) > R^f$

- Umgekehrt können Wertpapiere, deren Returns negativ mit dem Konsum variieren und damit Konsum glätten (z.B. Versicherungen) niedrigere erwartete Returns bieten. $\mathbb{E}(R^i) < R^F$ (vgl. Wertpapiere von letzter Woche denen Preise höher als 50 gegeben wurden).

Beachte nochmal

- Übliche Vorstellung
$$p^i = \frac{\mathbb{E}[x^i_{t+1}]}{ER^i}$$
mit Diskontfaktor $\frac{1}{ER^i}$ etwa aus CAPM, der wertpapierspezifisch ist!

- Hier
$$p^i = \mathbb{E}[mx^i_{t+1}]$$
mit stochastischemm Diskontfaktor M (innerhalb des Erwartungswertes!), der für alle Wertpapiere identisch ist!

- Wie passt das zusammen? Der Dikontfaktor ist auch wertpapierspezifisch. Dies sieht man, falls man den stochastischen Diskontfaktor aus dem Erwartungswert rausziehen, denn dann taucht dieser in der Kovarianz auf.

III.3 Unsystematisches Risiko

Aus
$$p = \mathbb{E}[mx] = \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[x] + \mathrm{cov}(m, x)$$
foolgt unmittelbar
$$p = \frac{\mathbb{E}[x]}{R^f} \text{ für } \mathrm{cov}(m, x) = 0$$

- mit dem Diskontfaktor m unkorrelierte Zahlungen erfordern keine Risikokorrektur im Preis

- solches unsystematisches Risiko wird folglich nicht vergütet

- erwartete Rendite entspricht der riskolosen Rendite

Beachte: Ergebnis gilt unabhängig

- von $\sigma^2(x)$, d.h. wie volatil die Zahlung ist
- vom Ausmaß der Risikoaversion

Idee: Zerlege x in

systematische komponente: Mit Diskontfaktor m perfekt korrelierte Komponente proj$(x|m)$

unsystematiscehe Komponente: Zu Diskontfaktor orthogonale Komponente ϵe

$$x = \text{proj}(x|m) + \epsilon \Rightarrow b = \frac{\mathbb{E}(mx)}{\mathbb{E}(m^2)}$$

Intuitiv:

- Lineare Regression ohne Konstante $x = bm + \epsilon$ führt auf mit m perfekt korrelierte Komponente bm und Restgröße ϵ mit $E[m\epsilon] = 0$
- Opffensichtlich gilt
  - Preis von ϵ: $p(\epsilon) = \mathbb{E}[m\epsilon] = 0$
  - Preis von proj(x, m): $p(\text{proj}(x, m)) = \mathbb{E}[xm] = p(x)$

$$= p(bm) = \mathbb{E}[mbm] = \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}(mx)}{\mathbb{E}[m^2]} m^2\right] = \mathbb{E}(mx)$$

III.4 Beta als Risikomaß

β_i: Sensitivität der Rendite von Wertpapier i gegenüber der Rendite des ganzen Marktes

- das klassische Risikomaß der Finanzwirtschaft
- typischerweise anhand des CAPM bestimmt
- Anwendung als Maß für systematisches Risiko

formal: $\beta_i = \frac{\text{cov}(R^i, R^M)}{\text{var}(R^M)}$ mit R^M als Marktrendite.

Umformung der Return-Beziehung $\mathbb{E}[R^i])R^f - R^f \,\text{cov}(m, R^i)$ führt zu

Appendix A

Übungen

Aufgabe 7

a) Es gilt (vgl. letzte Übung): $m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$.

- Im schlechten Zustand nimmt der stochastische Diskontfaktor relativ große Werte an (Grenzwert des Konsums ist hoch).
- Im guten Zustand relativ geringe Werte.

Damit ist:

$$m_{t+1} = 0.97\text{: ungünstiger Zustand}$$
$$m_{t+1} = 0.85\text{: günstiger Zustand}$$

Beachte: "Im schlechten Zustand" bezieht sich eigentlich relativ auf den Vergleich zu vorhergehenden Periode.

b) Eine Power-Nutzenfunktion hat bei uns die allgemeine Form:

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

Daraus folgt $u'(c) = c^{-\gamma}$ und damit:

$$m_{t+1} = \beta \frac{c_{t+1}^{\gamma}}{c_t^{-\gamma}} = \beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\gamma}$$

Ist $\gamma > 0 \Rightarrow$ je größer der Konsum in einem Zustand in $t+1$ ist, desto kleiner m_{t+1} und umgekehrt

c) $p_A > p_B$ da Wertpapier A im ökonomisch schlechteren Zustand mehr auszahlt und der Erwartungswert der Auszahlung beider Wertpapiere gleich ist.

d) Es ist

$$p_t^A = \mathbb{E}(m_{t+1}x_{t+1}^A) = 0.5 \cdot 0.85 \cdot 5 + 0.5 \cdot 0.97 \cdot 8 = 6.01$$
$$p_t^B = analog = 5.83$$

$\mathbb{E}[R_{t+1}^B] > \mathbb{E}[R_{t+1}^A]$, $p_A > p_B$

e) Es ist

$$\begin{aligned} p_t &= \mathbb{E}[m_{t+1}X_{t+1}] \\ &= \mathbb{E}[m_{t+1}] \cdot \mathbb{E}[x_{t+1}] + \operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \\ &= \frac{\mathbb{E}[x_{t+1}]}{R^t} + \operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(x_{t+1}\hat{\text{A}}) = \mathbb{E}(x_{t+1}^B) = 6.5$

$$R^f = \frac{1}{\mathbb{E}(m_{t+1})} = \frac{1}{0.91} = 1.10$$

$\Rightarrow \frac{\mathbb{E}(x_{t+1}^A)}{R^f} = \frac{\mathbb{E}(x_{t+1}^B)}{R^f} = 5.91$

$$\operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) = 0.5\,(0.85 - 0.91)\,(5 - 6.5) + 0.5\,(0.97 - 0.91)\,(8 - 6.5) = 0.09$$
$$\operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}^B) = analog = -0.09$$

wobei $\operatorname{cov}(a, b) = \mathbb{E}[(a - \overline{a})(b - \overline{b})]$, mit $\overline{x} = \mathbb{E}[x]$,

$$\Rightarrow p^A > p^B$$

f) Da die $\operatorname{cov}(\cdot, \cdot)$ negative sowie positive Werte annehmen kann, ergibt sich bei geeigneten Werten für $\mathbb{E}(x_{t+1})$ und R^f für manche Wertpapiere auch bei $\mathbb{E}(x_{t+1}) < 0$ ein positiven Preis. Beispiel: Versicherung

Aufgabe 8 (Der μ-σ-Rand)

Betrachten Sie ein Ökonomie mit zwei Zeitpunkten (t und $t+1$) und einem risikolosen Zinssatz von 10%.

a) Unterstellen Sie für den SDF, das $m_{t+1} = a + bR^{mv}$, wobei a und b Parameterwerte und R^{mv} die Rendite eines Wertpapiers darstellt.

(i) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit dieser Zusammenhang gelten kann? Welche Implikation für die Bewertung von Wertpapieren enthält diese Annahme.

Proof: Damit der Zusammenhang $m_{t+1} = a + bR^{mv}$ gilt, muss die Rendite des Wertpapiers, R^{mv} perfekt mit m_{t+1} korreliert sein.
Das impliziert, dass in R^{mv} alle bewertungsrelevanten Informationen enthalten sein müssen. □

(ii) Maximale Sharpratio und

Proof: $p_{t+1} = \mathbb{E}(m_{t+1}x_{t+1}) \iff 1 = \mathbb{E}(m_{t+1}R_{t+1})$

$$\begin{aligned}
&\iff 1 = \mathbb{E}(m_{t+1})\mathbb{E}(R_{t+1}) + \operatorname{cov}(m_{t+1}, R_{t+1})\\
&\iff \mathbb{E}(R_{t+1}) = R^f - \frac{\operatorname{cov}(m_{t+1}, R_{t+1})}{\mathbb{E}(m_{t+1})}\\
&\iff \mathbb{E}(R_{t+1}) - R^f = -\rho_{m_{t+1},R_{t+1}}\sigma_{R_{t+1}}\frac{\sigma_{m_{t+1}}}{\mathbb{E}(m_{t+1})}\\
&\iff \frac{\mathbb{E}(R_{t+1}) - R^f}{\sigma_{R_{t+1}}} = -\rho_{m_{t+1},R_{t+1}}\frac{\sigma_{m_{t+1}}}{\mathbb{E}(m_{t+1})}
\end{aligned}$$

Mit $|\rho| \leq 1$ gilt:

$$\left|\frac{\mathbb{E}(R_{t+1}) - R^f}{\sigma_{R_{t+1}}}\right| \leq \frac{\sigma_{m_{t+1}}}{\mathbb{E}(m_{t+1})}$$

Aus $m_{t+1} = a + b \cdot R^{mv}_{t+1}$ folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{var}(m_{t+1}) &= b^2 \operatorname{var}(R^{mv}_{t+1})\\
\sigma_{m_{t+1}} &= \sqrt{b^2 \operatorname{var}(R^{mv}_{t+1})} = \sqrt{2}\\
\tfrac{1}{\mathbb{E}(m_{t+1})} &= R^f = 1.1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sigma_{m_{t+1}}}{\mathbb{E}(m_{t+1})} = 1.55$$

□

Aufgabe 9 (Der μ-σ-Rand und die Beta-Darstellung)

Gegeben ist eine Ökonomie mit zwei Zeitpunkten (t und $t+1$) mit einem risikolosen Zinssatz in Höhe von R^f, sowie ein effizienter Rand-Return R^{mv}. Nehmen Sie an

a) Es gilt $m_{t+1} = a + b \cdot R^{mv}$

$$\begin{aligned} p_t = \mathbb{E}(m_{t+1}x_{t+1}) &= \mathbb{E}(m_{t+1})\mathbb{E}(x_{t+1}) + \operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \\ \iff p_t &= \frac{\mathbb{E}(x_{t+1})}{R^f} + \operatorname{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \\ \iff p_t &= \frac{\mathbb{E}(x_{t+1})}{R^f} + \operatorname{cov}(a + bR^{mv}, x_{t+1}) \\ \iff p_t &= \frac{\mathbb{E}(x_{t+1})}{R^f} + b\operatorname{cov}(R^{mv}, x_{t+1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ falls b bekannt können mit Hilfe von R^{mv} alle Wertpapiere bewertet werden.

b) Gilt für alle Wertpapiere auf dem μ-σ-Rand außer dem risikolosen Instrument.

c) Es gilt die folgenden Möglichkeiten

- 1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}(m_{t+1}R^{mv}) = \mathbb{E}\left((a + bR^{mv})R^{mv}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(aR^{mv} + b\left(R^{mv}\right)^2\right) && (*) \\ 1 &= \mathbb{E}(m_{t+1}R^f) = \mathbb{E}\left((a + bR^{mv})R^f\right) \\ &= \mathbb{E}\left(aR^f + bR^{mv}R^f\right) && (**) \end{aligned}$$

Aus $(*)$: $\Rightarrow 1 = a \cdot \mathbb{E}(R^{mv}) + b\mathbb{E}\left((R^{mv})^2\right)$
Aus $(**)$: $\Rightarrow 1 = a \cdot \mathbb{E}(R^f) + b\mathbb{E}\left(\left(R^f\right)^2\right)$

$$\Rightarrow$$

- 2. Möglichkeit: aus $|\rho| = 1$ folgt $(\mathbb{E}(m_{t+1}) = a + b\mathbb{E}(R^{mv}))$

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= \mathbb{E}(m_{t+1}) + b\left(R^{mv} - \mathbb{E}(R^{mv})\right) && (+) \\ \iff m_{t+1} &= \frac{1}{R^f} + b\left(R^{mv} - \mathbb{E}(R^{mv})\right) && (***) \end{aligned}$$

Außerdem: $1 = \mathbb{E}(m_{t+1}E^{mv}$. Daraus folgt indem wir $(***)$ einsetzen:

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{R^f} + b\left(R^{mv} - \mathbb{E}_t\left(R^{mv}\right)\right)\right) R^{mv}\right] \\
\iff 1 &= \frac{1}{R^f}\mathbb{E}(R^{mv}) + b\mathbb{E}\left(((R^{mv})^2\right) - b\mathbb{E}\left(R^{mv}\right)^2 \\
\iff 1 &= \frac{1}{R^f}\mathbb{E}(R^{mv}) + b\operatorname{var}(R^{mv}) \\
\iff b &= -\frac{\mathbb{E}(R^{mv}) - R^f}{R^f\operatorname{var}(R^{mv})}
\end{aligned}
$$

In $(+)$ einsetzen:

$$
\begin{aligned}
m_{t+1} &= \mathbb{E}(m_{t+1}) + \left(-\frac{\mathbb{E}(R^{mv}) - R^f}{R^f\operatorname{var}(R^{mv})}\right)(R^{mv} - \mathbb{E}(R^{mv}) \\
\iff m_{t+1} &= \underbrace{\frac{1}{R^f} + \mathbb{E}(R^{mv})\frac{\mathbb{E}(R^{mv} - R^f}{R^f\operatorname{var}(R^{mv})}}_{=:a} \underbrace{-\frac{\mathbb{E}(R^{mv}) - R^f}{R^f\operatorname{var}(R^{mv})}}_{=:b} R^{mv} \qquad (++) \\
\iff m_{t+1} &= a + bR^{mv}
\end{aligned}
$$

d) Beta Darstellung

$$
p_t = \mathbb{E}(m_{t+1}x_{t+1}) \iff 1 = \mathbb{E}(m_{t+1})\mathbb{E}(R^i_{t+1}) + \operatorname{cov}(m_{t+1}, R^i_{t+1})
$$

$$
\mathbb{E}(R^i_{t+1}) = R^f - \frac{\operatorname{cov}(m_{t+1}, R^i_{t+1})}{\mathbb{E}(m_{t+1})}
$$

Aus $(++)$ folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(R^i_{t+1}) &= R^f + \frac{\mathbb{E}(R^{mv} - R^f)}{R^f\operatorname{var}(R^{mv})}\operatorname{cov}(R^{mv}, R^i_{t+1})\frac{1}{\mathbb{E}(m_{t+1})} \\
\iff \mathbb{E}(R^i_{t+1}) &= \mathbb{R}^f + \frac{\mathbb{E}(R^{mv} - R^f}{\operatorname{var}(R^{mv}}\operatorname{cov}(R^{mv}, R^i) \\
\iff \mathbb{E}(R^i_{t+1}) &= R^f + \underbrace{\frac{\operatorname{cov}(R^{mv}, R^i_{t+1})}{\operatorname{var}(R^{mv})}}_{=:\beta_{i,mv}} \underbrace{\left(\mathbb{E}(R^{mv} - R^f\right)}_{=:\lambda_{mv}} \\
\iff \mathbb{E}(R^i_{t+1}) &= R^f + \beta_{i,mv}\lambda_{mv}
\end{aligned}
$$

e) Welche Annahme trift man oft in der parktischen Umsetzung dieser Bewertungsbeziehung

Proof: R^{mv} = Rendite des Marktportfolios (z.B. Dax 30) □