## Aufgabe 11

An einer Zweitpreisauktion nehmen zwei (a priori) symmetrische und risikoneutrale Bieter teil. Versteigert wird der Geldbetrag, der sich als Summe des Bargelds in den beiden Geldbeuteln der Bieter ergibt, wobei aber jeder Bieter nur den Inhalt des eigenen Geldbeutels kennt. Jedoch sei allgemein bekannt, dass beide Geldbeutel einen Geldbetrag zwischen 0 und 100 Euro enthalten.

a) Bestimmen Sie das symmetrische Bayes-Nash-Gleichgewicht der obigen Auktion.

   *Beweis:* Unter der Annahme von Monotonie der Bietfunktion gilt für den erwarteten Erlös:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\pi_i] &= \mathbb{E}\Big[\,(x_i + X_j) - \beta(X_j)\Big]\\ &= \int_0^{x_i} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(s)ds\\ &= \int_0^{\beta^{-1}(b_i)} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(s)ds,\end{aligned}$$

   wobei wir davon ausgehen, dass sowohl Spieler $i$ als auch $j$ dieselbe Bietfunktion $\beta$ aufgrund der Symmetriebedingung verwenden. Außerdem ist die obere Intergralgrenze durch $\beta^{-1}(b_i)$ gegeben, da darüber hinaus die Rente identisch 0 ist.

   Im Bayes-Nash-Gleichgewicht darf das Abweichen von der Bietstrategie den Spieler nicht besser stellen, d.h. die erwartete Rente muss unter $\beta$ maximal sein. Die F.O.C.

lautet daher:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta}\mathbb{E}[\pi_i] &= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\int_0^{\beta^{-1}(b_i)} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(s) ds\right) \\
&\overset{Leibnitz}{\underset{Regel}{=}} \frac{\partial}{\partial \beta}\Bigg( \Big(\Big(\Big(x_i + \beta^{-1}(b_i)\Big) - \beta(\beta^{-1}(b_i))\Big) \cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\Big) \\
&\qquad - \Big(\Big(\Big(x_i + \beta^{-1}(0)\Big) - \beta(\beta^{-1}(0))\Big) \cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(0))\Big) \Bigg) \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}\Bigg( \Big(\Big(\Big(x_i + \beta^{-1}(b_i)\Big) - b_i\Big) \cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\Big) - \Big(\Big(\Big(x_i + 0\Big) - 0\Big) \cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(0))\Big) \Bigg) \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}\Bigg( \Big(\Big(x_i + \beta^{-1}(b_i)\Big) - b_i\Big) \cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i)) - x_i \cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(0))\Bigg) \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}\Bigg( (2 \cdot x_i - b_i) \cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i)) - x_i \cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(0))\Bigg) \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}\Bigg( (2 \cdot x_i - b_i) \cdot f_{X_j}\Big(\beta^{-1}(b_i)\Big)\Bigg) \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}\Bigg(2 \cdot x_i - \beta(x_i)\Bigg) \cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i)) \overset{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die optimale Bietstrategie mit:

$$\beta(x_i) = b_i = \beta^{-1}(b_i) = 2x_i$$

*Das ist zwar das richtige Ergebnis, allerdings ist oben ein Logikfehler drin, also stimmt die Rechnung noch nicht!* □