Auktionstheorie

Prof. Dr. Karl-Martin Ehrhart

(inoffizielles Skript)

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Der Begriff **Auktion** kommt vermutlich vom lateinischen „augere“ was so viel wie vergrößern oder vermehren bedeutet

Definition: *Eine Auktion ist ein* ***Marktmechanismus*** *(Marktinstitution) mit dem innerhalb von* ***fest vorgegebenen Regeln*** *auf der Basis von* ***Geboten der Bieter*** *einerseits* ***Güter*** *und andererseits* ***Zahlungen*** *von, oder an die Bieter festgelegt werden.*

Eine Auktion ist insbesondere dann in Erwägung zu ziehen wenn dem Auktionator wichtige Informationen über relevante Größen fehlen, wie zum Beispiel Reservations- oder Marktpreise. Das Auktionsdesign ist das durch den Auktionator festgelegte Regelwerk. Zusätzlich nehmen wir an, dass es keine Intermediäre gibt, d.h. jeder Bieter ersteigert das Gut für sich selbst.

Definition: *Eine Auktion heißt* ***zulässig*** *genau dann, wenn das „beste“ oder höchste Gebot die Auktion gewinnt.*

Akteure in Aktionen:

- Auktionator/Versteigerer
  - Legt das Auktionsdesign fest (wird in dieser Vorlesung thematisiert)
  - Bekanntgabe des Auktionsdesigns
- Bieter

  - Akzeptanz des Auktionsdesigns (bei Teilnahme an Auktion)
  - Festlegung einer Bietstrategie (wird in dieser Vorlesung thematisiert)

Kategorisierung von Auktionen:

- Richtung des Güter- und Geldstroms
  - Einkaufsauktionen (z.B. Ausschreibung ...)
  - Verkaufsauktion (was auch das Hauptgebiet dieser Vorlesung ausmachen wird, allerdings lassen sich die Ergebnisse durch Vorzeichenwechsel im Grunde übertragen)

  Hauptunterschied: Bei Einkaufsauktionen bieten meist viele Teilnehmer mit unterschiedlichen Gütern um die Gunst des Auktionators. Bei Verkaufsauktionen bieten viele Teilnehmer um ein und das gleiche Gut (bzw. ein Angebot).

- Anzahl der Güter
  - Eingutauktion
  - Mehrgüterauktion
- Rollenverteilung
  - Einseitige Auktion
  - Zweiseitige Auktion (z.B. Börse)

Notwendige Kriterien:

- Wettbewerb
- Güter ohne (sichtbaren) Marktpreis

- Informationsasymmetrie (Auktionator kennt nicht alle Zahlungsbereitschaften der Bieter, denn sonst würde er einfach zu dem einen Bieter mit der höchsten Zahlungsbereitschaft gehen).

Ziele des Auktionators:

a) Minimierung der Einkaufsausgaben / **Maximierung des Verkaufserlöses**

b) **Effizienz** (= wenn der Bieter mit der höchsten Zahlungsbereitschaft den Zuschlag bekommen)

c) **Informationsgewinn**

d) Markträumung (z.B. Blumen- oder Fischhandel)

e) Signalgenerierung (z.B. Mindestpreis vorgeben)

f) Innovationsanreize

g) Qualitäts- und Versorgungssicherheit

Informationsverteilung/Unsicherheiten:

a) Unabhängige individuelle Wertschätzungen (**IPV** = independent private value)

   - Jeder Bieter besitzt eine ihm bekannte, individuelle monetäre Wertschätzung für das Gut v_i.
   - Die v_i's können sich unterscheiden.
   - Die v_i's sind private Informationen

b) allgemeiner Wert (**CV** = common value)

- Der Wert des Gutes ist für jeden Bieter gleich, aber zum Zeitpunkt der Auktion unbekannt $\Rightarrow$ Unsicherheit.

c) Abhängiger, individueller Wert (**IV** = individual value)

- Mischung aus IPV und CV. Individuelle Werte mit Unsicherheit

Eingutauktionen im IPV-Kontext:
Wir setzen voraus, dass die Bieter eine private, ihnen bekannte Wertschätzung für das Gut haben. Die Wertschätzung entspricht der maximalen Zahlungsbereitschaft für das Gut, bei diesem Preis ist der Bieter indifferent zwischen Erwerb und Nichterwerb.

a) Simultane Erstpreisauktion (First Price Sealed Bid Auction, FA)

- Jeder Bieter gibt verdeckt ein Gebot ab. Auktion endet nach fest vorgegebener Zeit
- Zuschlagsregel: höchstes Gebot gewinnt
- Preisregel: Zuschlagspreis ist höchstes Gebot (Pay as bid)

b) Simultane Zweitpreisauktion (Second Price Sealed Bid Auction, SA)

- Wie in der FA, allerdings entspricht der Preis dem zweithöchsten Gebot

c) Englische Auktion (English Auction, EA) [Saalversion]

- Bieter überbieten sich, bis kein Gebot mehr eingeht
- Preisregel: Zuschlagspreis ist gleich dem letzten Gebot

d) Englische Auktion (English Auction, EA) [Clock-Version]

- Bieter können Konkurrenz besser abschätzen aufgrund einer Aktivitätsregel

  $\Rightarrow$ Auktionator kennt die Nachfrage auch besser

- Bietregel: Preis steigt kontinuierlich, Bieter müssen Preis ablehnen oder zustimmen. Nur wer zustimmt bleibt drin.
- Durchführung: Auktion endet wenn höchstens 1 Bieter zustimmt.
- Preis: Vorletzter Preis ist Kaufpreis.

e) Holländische Auktion (Dutch Auction, DA)

- Uhr läuft Rückwärts und der erste Bieter der zustimmt, erhält den Zuschlag zu dem Preis zu dem er zugestimmt hat.
- Beispiel: Blumenverkauf aufgrund der Notwendigkeit von Markträumung

Es kann sich lohnen, unter der wahren Zahlungsbereitschaft zu bieten, also beim Gebot einen Abschlag von der Zahlungsbereitschaft zu tätigen, da sich dadurch der Gewinn erhöht.

Definition: *In Auktionen bezeichnet* ***bid shading*** *das Abgeben eines Gebot das geringer als die eigene Wertschätzung ist.*

Vergleichen wir nun die vier eingeführten Auktionsformen, so lässt sich zeigen:

Satz 1.1:

a) Die Holländische und Simultane Erstpreisauktion sind von der Bietstrategie äquivalent, allerdings existiert keine dominante Strategie.

b) Die Englische Clock Version und Simultane Zweitpreisauktionen sind insofern äquivalent, dass die Bieter dieselbe dominante Strategie spielen sollten. Der Bietpreis entspricht in diesem Fall der Zahlungsbereitschaft.

Bemerkung: Informationsgewinnung des Auktionators:

$$SA > EA > FA > DA$$

Kapitel 2

Theoretische Modellierung

- Spielermenge: Bieter $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$

  Auktionator $(i = 0)$

- Signal (von Spieler i): $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in N$ (Information über den Wert des Gutes für Spieler i. Kann genau der Wert sein (vgl. IPV-Modell) oder nur eine Schätzung)

- Bietstrategie: vollständiger Verhaltensplan für die Auktion (vgl. Spieltheorie)

- Darstellung der Bietstrategie:

$$\beta^{FA} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\beta^{SA} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\beta^{DA} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  Der dynamische Charakter spielt keine Rolle. Die Strategy wird vor der Auktion in Abhängigkeit von den Wertschätzungen festgelegt.

  Bei der Englischen Auktion (EA) muss man unterscheiden, ob die Signale unsicher oder sicher sind! Denn bei Unsicherheit kann während der Auktion noch dazugelernt werden (Informationsmenge vergrößert sich).

Bemerkung: Unter der Einschränkung eines maximalen Gebots für die FA sind die FA und DA spieltheoretisch äquivalent.

2.1 Modellierung der individuellen Wert:

- Vektor der Signale: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_{-i} \coloneqq (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$
- Unbeobachtbare Signale: $s = (s_0, s_1, \dots, s_m)$ (den Bietern unbekannt
  - s_0 stellt die Kenntnis des Auktionators über das Gut dar
  - $s_1, \dots, s_m$ Zukunftsinformationen (Wertentwicklung, etc.) für die n Bieter
- Wert des Spielers i: $v_i(x_i, x_{-i}, s)$, $v_i \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$

Beispiele: Betrachten wir zwei der Grundmodelle, so gilt für alle $i \in N$:

a) CV-Modell: $v_i = v(s_1)$

b) IPV-Modell: $v_i = v_i(x_i) = x_i$

2.2 Modellierung der Unsicherheiten über Zufallsvariablen:

Wir müssen zuerst zwischen verschiedenen Sichtweisen unterscheiden.

- Externe Sicht: $X_1, \dots, X_n, S_0, S_1, \dots, S_m$
- Sicht des Auktionators: $X_1, \dots, X_n, s_0, S_n, \dots, S_m$
- Sicht des Bieters i: $X_1, \dots, X_{i-1}, x_i, X_{i+1}, \dots, X_n, S_0, S_n, \dots, S_m$

Grundannahme: Alle Bieter haben den gleichen Informationsstand (bis auf die eigene, private Wertschätzung).

2.3 Ziele der Bieter: Maximierung der Bieterrente:

$$\pi_i = \begin{cases} v_i - p, & \text{Bieter } i \text{ erhält Zuschlag} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei die Risikoneigung über Risikonutzenfunktion modelliert wird (vgl. Entscheidungstheorie):

$$u_i(x_i) = \begin{cases} u_i(v_i - p), & \text{Bieter } i \text{ erhält Zuschlag} \\ u_i(0), & \text{sonst} \end{cases}$$

Kapitel 3

Eingutauktionen

3.1 IPV-Modell

Wir nehmen zuerst **Bewertungssymmetrie** an, d.h.

$$v_i = v(x_i) = x_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Die Wertschätzung des Gutes leitet sich also für alle Bieter gleichermaßen aus dem Signal ab und ist für das IPV-Modell gleich dem Signal.

Weiterhin gehen wir von einer **Informationssymmetrie** aus, d.h.

$$X_1, \ldots, X_n \text{ wird modelliert durch eine Zufallsvariable } X \sim F$$

$x_1, \ldots, x_n$ sind alles Realisierungen von X.

Definition: *Eine Auktion heißt **symmetrisch** genau dann, wenn ein externer Beobachter die Bieter nicht unterscheiden kann.*

Definition: *Wir modellieren die geordnete Stichprobe mit Umfang n durch:*

$$X_{(1)} > X_{(2)} > \ldots > X_{(n)},$$

*und nennen $X_{(k)}$ die k-te **Ordnungsstatistik** bzw. $X_{(k,n)}$ wenn der Stichprobenumfang nicht klar ist.*

Der Erwartungswert für das größte Gebot unter der Annahme der Gleichverteilung auf $[0,1]$ steigt hier mit der Anzahl der Bieter:

$$\mathbb{E}[X_{(1,n)}] = \frac{n}{n+1}$$

Definition: *Unter der Annahme von risiko-neutralen Bietern heißt eine Kombination von Bietstrategien β^** ***Bayes-Nash-Gleichgewicht*** *(BNE) des IPV-Modells, wenn für jeden Bieter $i \in N$, für alle seine möglichen Signale (Wertschätzungen für das Gut) und für alle β_i gilt:*

$$\mathbb{E}\left[u_i\left(\pi_i\left(\beta^*(X), X_i\right)\right)\middle|X_i = x_i\right] \geq \mathbb{E}\left[u_i\left(\pi_i\left(\beta^*_{-i}(X_{-i}), \beta_i(X_i), X_i\right)\right)\middle|X_i = x_i\right]$$

Satz 3.1: *Im IPV-Modell (siehe A2 unten) der EA und SA besitzt jeder Bieter $i \in N$ die dominante Strategie seine Bietgrenze (EA) bzw. sein Gebot (SA) gleich seinem Signal (individuelle Wertschätzung zu setzen.*

$$\beta_i^{EA}(x_i) = \beta_i^{SA}(x_i) = x_i \coloneqq v_i$$

Satz 3.2: *In der EA und der SA bildet die Kombination der dominanten Strategien $\left(\beta_1^k(x_1), \ldots, \beta_n^k(x_n)\right)$ mit $\beta_i^k(x_i) = x_i$ für alle $i \in N$ und $k \in \{EA, SA\}$ ein Bayes-Nash-Gleichgewicht im IPV-Modell (also unter der nachfolgenden Annahme A2)*

Bemerkung: Bei schwach dominanten Strategien (in Auktionstheorie vorherrschend) kann es mehrere solche BNE's geben. Bei dominanten Strategien ist das BNE eindeutig.

3.3 IPV-Grundmodell:

A1: Die Bieter sind risikoneutral, $u_i(\pi_i) = \pi$

A2: IPV-Ansatz: Die Signale der Bieter x_i; $i \in N$; sind unabhängig und private Information. Die Wertschätzungen der Bieter entsprechen ihren Signalen, d. h. $v_i = x_i$ für alle $i \in N$.

A3: Die Bieter sind (a priori) symmetrisch, d.h.

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X \text{ bzw. } F_i = F \quad \forall i \in N$$

A4: Der Zuschlagspreis wird ausschließlich über die Gebote determiniert.

Die Annahme A3 ist sinnvoll, denn man kann in den seltensten Fällen die Bieter schon im Vorhinein klassifizieren; ein Gegenbeispiel wären allerdings die Telekommunikationsauktionen.

Vereinbarung: Die folgenden Aussagen werden für EA und SA mit $A2$, $A3$, $A4$ getroffen!

Wir definieren

- $p =$ der Zuschlagspreis der Auktion
- $\rho =$ die Zahlung der Bieter an den Auktionator

$\beta^k = \left(\beta_1^k, \ldots, \beta_n^k\right)$ mit $\beta_i^k(x_i) = x_i \ \forall i \in N$ die dominanten Strategien der n Bieter für $k \in \{EA, SA\}$.

Der erwartete Zuschlagspreis (erwartete Auktionserlös):

$$\mathbb{E}\left[p\left(\beta^k(X)\right)\right] = \mathbb{E}[X_{(2,n)}]$$

Erwartete Zahlung von Bieter i:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\rho\left(\beta^k(X)\right)\Big|X_i = x_i\right] &= \mathbb{E}\left[X_{(2,n)}\Big|X_{(1,n)} = x_i\right] \cdot \mathbb{P}\left(\max_{j\neq i} X_j \leq x_i\right) \\ &= \mathbb{E}\left[X_{(1,n-1)}\Big|X_{(1,n-1)} \leq x_i\right] \cdot \mathbb{P}\left(X_{(1,n-1)} \leq x_i\right)\end{aligned}$$

Erwartete Rente von Bieter i:

$$\mathbb{E}\left[\pi\left(\beta^k(X)\right)\Big|X_i = x_i\right] = \left(x_i - \mathbb{E}\left[X_{(1,n-1)}\Big|X_{(1,n-1)} \leq x_i\right] \cdot \mathbb{P}\left(X_{(1,n-1)} \leq x_i\right)\right)$$

Vereinbarung: Die folgenden Aussagen werden für FA und DA mit $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ getroffen!

Der Gebotsvektor der Konkurrenten besteht aus Zufallsvariablen:

$$B_{-i} \coloneqq (B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n)$$

Betrachten wir nun den erwarteten Gewinn von Bieter i:

$$\mathbb{E}[\pi\,(x_i, b_i, B_{-i})] = (x_i - b_i) \cdot \mathbb{P}\,(\max B_{-i} < b_i) \longrightarrow \max_{b_i}$$

G sei die Verteilung der Zufallsvariable des höchsten Gebots der anderen (beachte: G ist nicht gleich $X_{(1,n-1)}$, da nicht jeder sein Signal bietet).

$$\mathbb{E}[\pi\,(x_i, b_i, B_{-i})] = (x_i - b_i) \cdot G(b_i) \longrightarrow \max_{b_i}$$

FOC: $\frac{\partial}{\partial b_i}\mathbb{E}\,[\pi(x_i, b_i)]$ (Voraussetzung: G differenzierbar)

$$\iff \quad -G(b_i) + (x_i - b_i) \cdot g(b_i) \overset{!}{=} 0$$

$$\iff \quad b_i^* = x_i - \frac{G(b_i^*)}{g(b_i)} < x_i$$

Was zeigt, dass das optimale Gebot bid shading enthält! Zeigt aber auch, dass diejenigen Bieter, die sich als besonders stark einschätzen auch mehr bid shading betreiben und umgekehrt. -

Wir wollen jetzt das Bayes-Nash-Gleichgewicht über einen spieltheoretischen Ansatz finden.

Ableitung eines $\underbrace{\text{symmetrischen}}_{\iff \beta_1 = \ldots = \beta_n =: \beta}$ Bietgleichgewichts (BNE), $\beta_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b_i = \beta_i(x_i)$

Annahme: β ist monoton in x, in dem Sinne, dass $\beta(x) > \beta(y)$ für $x > y$.

Nach vorherigen Untersuchungen muss damit gelten:

$$(\beta(x_i) - x_i) \cdot g(\beta(x_i)) + G(\beta(x_i)) = 0 \quad \forall i \in N$$

Beachten wir, dass $F_{(1,n-1)}(x_i) = G(\beta(x_i))$, so erhalten wir durch partielles Differenzieren

$$\frac{\partial F_{(1,n-1)}(x_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial G(\beta(x_i))}{\partial x_i} = g(\beta_i(x_i)) \cdot \beta'(x_i) \iff g(\beta(x_i)) = \frac{f_{(1,n-1)}(x_i)}{\beta'(x_i)}$$

Setzen wir diesen Zusammenhang in die Gleichgewichtsbedingung des Bayes-Nash-Gleichgewichts ein, so erhalten wir:

$$(\beta(x_i) - x_i)\frac{\tilde{f}(x_i)}{\beta'(x_i)} + F_{(1,n-1)}(x_i) \stackrel{!}{=} 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass $\beta'(x_i) \neq 0$ gilt damit:

$$F_{(1,n-1)}(x_i)\beta'(x_i) + \tilde{f}(x_i)\beta(x_i) - f_{(1,n-1)}(x_i)x_i \stackrel{!}{=} 0.$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, betrachten wir den Zusammenhang:

$$\frac{dF_{(1,n-1)}(x_i)\beta(x_i)}{dx_i} = \tilde{f}(x_i)\beta(x_i) + F_{(1,n-1)}(x_i)\beta'(x_i).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\frac{d}{dx_i}F_{(1,n-1)}(x_i) \cdot \beta(x_i) = f_{(1,n-1)}(x_i)x_i,$$

mit der Randbedingung $\beta(0) = 0$. Dies ist durch einfache Integration lösbar:

$$F_{(1,n-1)}(x_i)\beta(x_i) = \int_0^{x_i} \frac{d}{ds}F_{(1,n-1)}(s) \cdot \beta(s) = \int_0^{x_i} f_{(1,n-1)}(s)sds.$$

Das Gleichgewicht, bestehend aus Bietstrategien, erhalten wir durch Umstellen nach β:

$$\begin{aligned}
\beta(x_i) &= \frac{1}{F_{(1,n-1)}(x_i)} \int_0^{x_i} f_{(1,n-1)}(s)sds \\
&= \frac{1}{F_{(1,n-1)}(x_i)} \left(\Big[sF_{(1,n-1)(s)} \Big]_{s=0}^{s=x_i} - \int_0^{x_i} F_{(1,n-1)}(s)ds \right) \\
&= x_i - \frac{\int_0^{x_i} F_{(1,n-1)}(s)ds}{F_{(1,n-1)}(x_i)} \\
&= x_i - \frac{\int_0^{x_i} F^{n-1}(s)ds}{F^{n-1}(x_i)}
\end{aligned}$$

Damit lautet das sym. Bayes-Nash-Gleichgewicht: $(\beta_1^k, \ldots, \beta_n^k)$ für $k \in \{FA, DA\}$, wobei

$$\beta(x_i) = x_i - \frac{\int_0^{x_i} F^{n-1}(s)ds}{F^{n-1}(x_i)}$$

Folgerung 3.4:

- Es wird bid-shading betrieben, da $\beta(x_i) < x_i$,
- und die Bietfunktion ist monoton, da $\beta(x_i) > \beta(x_j)$ für $x_i > x_j$.

Satz 3.5: *Im symmetrischen BNE der FA/DA folgen die Bieter der Regel, dass:*

„Biete den Erwartungswert des höchsten Signals der anderen, unter der Annahme (Bedingung), dass dieses Signal nicht größer als das eigene Signal ist.“

Folgerung 3.6 (revenue equivalence theorem (RET))**:**
Im IPV-Grundmodell führen die symmetrischen Bayes-Nash-Gleichgewichte β^k aller vier Auktionstypen $k \in \{EA, DA, FA, SA\}$ zum gleichen erwarteten Auktionserlös, d.h. zur gleichen erwartete Zahlung an den Auktionator.

3.7 Limitpreis: (Reservationspreis, Mindestpreis, ...)

$v_0 = x_0 \geq 0$ sei die Wertschätzung des Auktionators.

$r \geq 0$ sei der Reservationspreis.

Wir nehmen (realistischer Weise) an, dass: $r \geq v_0$

Betrachten wir einen Reservationspreis r in der FA:

$$\mathbb{E}\left[\pi\left(v_i, v_{-i}, r\right)\right] = (v_i - b_i) \cdot \mathbb{P}\left(\max\{B_{-i}^r\} \leq b_i\right) \longrightarrow \max_{b_i}$$

wobei $B^r_{-i} \subseteq B_{-i}$, sodass $\forall b_j \in B^r_{-i} : b_j \geq r$. Das heißt, wir nehmen an, dass die Bieter mit $v_j < r$ nicht an der Auktion teilnehmen und damit B^r_{-i} die Menge der Gebote der trotz Reservationspreis teilnehmenden Bieter bezeichnet. Somit gilt für das Optimierungsproblem

$$\mathbb{E}\left[\pi\left(v_i, v_{-i}, r\right)\right] \leq v_i - r.$$

Betrachten wir wie oben das Optimierungskalkühl, so ergibt sich:

$$\frac{d}{dx} F^{n-1}(x)\beta(x) = x \cdot f_{(1,n-1)}(x),$$

unter der Nebenbedingung $\beta(r) = r$. Integration mit unterer Grenze r ergibt:

$$F^{n-1}(x)\beta(x)\Big|_r^v = \int_r^v x f_{(1,n-1)}(x)dx \iff \beta^r(v) = \frac{F^{n-1}(r)r + \int_r^v x f_{(1,n-1)}(x)dx}{F^{n-1}(v)}$$

$$\beta^r(v) = v - \frac{\int_r^v F^{n-1}(x)dx}{F^{n-1}(v)}$$

Für den Fall, dass der Auktionator einen höheren Reservationspreis wählt, als seine eigene Wertschätzung, ist das Ergebnis der Auktion mit positiver Wahrscheinlichkeit ineffizient. Außerdem gilt:

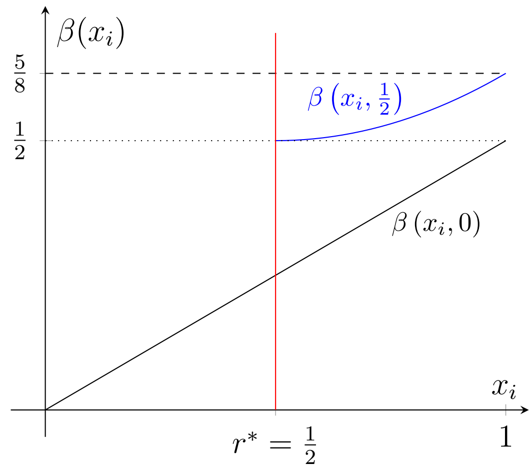
$$\beta_{r=0}(v) < \beta_{r>0} \leq v$$

und Gleichheit gilt nur für die Wertschätzung $v = r$.

Beispiel 3.8: Betrachtet sei eine FA mit $n = 2$ risikoneutralen und symmetrischen Bietern mit unabhängigen Wertschätzungen $X_i \sim U(0, 1)$; mit $v_0 = x_0 = 0$.

$$r^* = x_0 + \frac{1 - F(r^*)}{f(r^*)} \stackrel{x_0=0}{=} \frac{1 - r^*}{1} \Rightarrow r^* = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\beta^{FA} &= x_i - \int_r^{x_i} \frac{F^{n-1}(s)}{F^{n-1}(x_i)} ds \stackrel{n=2}{=} x_i - \int_r^{x_i} \frac{s}{x_i} ds \\ &= \frac{x_i^2 + r^2}{2x_i} = \frac{x_i}{2} + \frac{r^2}{2x_i}\end{aligned}$$



Um so näher das Signal am Reservationspreis ist, desto höher wird das Bid-Shading auf das normale Gebot ohne Reservation.

Bemerkung: RAT gilt trotz der Einführung eines Reservationspreises - *müssen wir hier nicht annehmen, dass der Reservationspreis unter dem (erwarteten) gebid-shadetem Gebot des stärksten Bieters liegt?*

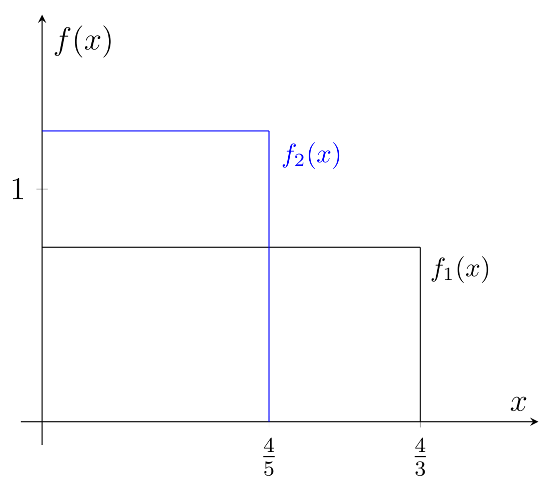
Definition: *Gegeben zwei Verteilungen F_I, F_{II}, so sagen wir F_{II}* ***dominiert*** *F_I* ***stochastisch 1. Ordnung****, falls $F_I(x) < F_{II}(x)$ gilt $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Beispiel 3.9 (Fall von asymmetrischen Bietern)**:**
Gegeben seien 2 Klassen von Bietern mit jeweils unterschiedlichen Verteilungen F_I und F_{II}, $F_I \neq F_{II}$. Betrachten wir die Strategien der Bieter unter stochastische Dominanz 1. Ordnung, so ergibt sich:

- Für Auktionen mit dominanten Strategien (wie in EA und SA) ändert sich logischerweise nichts!

- Für EA und DA gibt es keine allgemeine Theorie mehr für optimale Strategie und Gleichgewichte → Einzelfallunterscheidung. *Im Skript steht: Existenz von asymmetrischen Gleichgewichten, die innerhalb der Verteilungsklassen symmetrisch sind - relevant?*

Beispiel 3.10 (FA/DA)**:** Sei $n = 2$, $X_1 \sim U\left[0, \frac{4}{3}\right]$, $X_2 \sim U\left[0, \frac{4}{5}\right]$

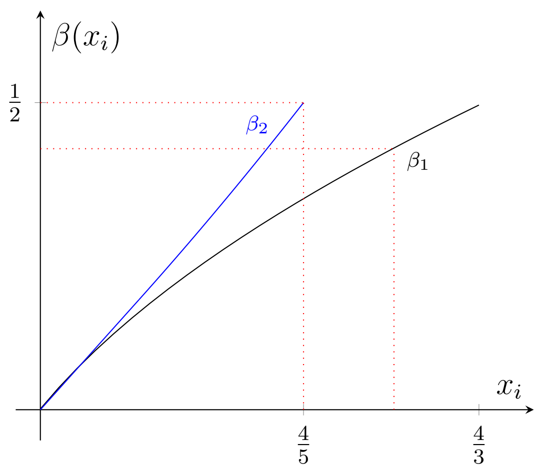


Im Skript 44 wird das Gleichgewicht für die stärkeren bzw. schwächeren Bieter auf Seite bestimmt, hier nur das Ergebnis:

$$\beta_1(x_1) = -\frac{1}{x_1}\left(1 - \sqrt{1 + x_1^2}\right), \ x_1 \neq 0$$
$$\beta_2(x_2) = \frac{1}{x_2}\left(1 - \sqrt{1 - x_2^2}\right), \ x_2 \neq 0$$

Wir haben hier unterschiedliche Bietfunktionen, also ein **asymmetrisches Gleichgewicht**.

Bemerkung: Zusätzlich in obigem Beispiel liegt hier keine Effizienz mehr vor, denn β_2 ist an den markierten Stellen trotz niedrigerem Signal höher! ⇒ RAT gilt nicht mehr.



Definition: *Eine Kombination von Bietstrategien $\beta^*\ast = (\beta_1^{**}, \ldots, \beta_n^{**})$ heißt **ex-post-Gleichgewicht**, genau dann wenn für alle möglichen Kombinationen von Signalen $(x_1, \ldots, x_n)$ und für alle Bieter gilt:*

$$\pi\left(\beta^{**}(x), x_i\right) \geq \pi\left(\left(\beta_{-i}^{**}(x_{-i}), \beta(x_i)\right), x_i\right)$$

für alle β_i.

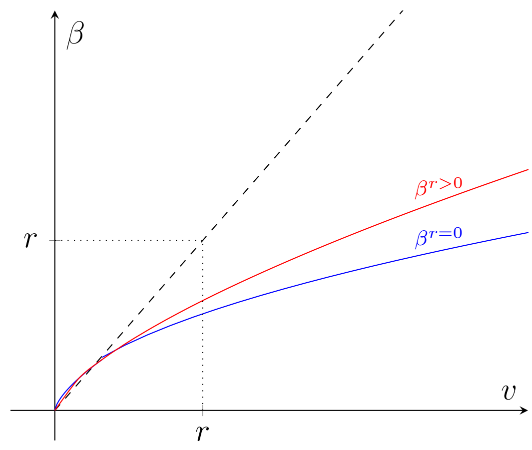
Erinnerung: Demnach ist jedes ex-post-Gleichgewicht ein Bayes-Nash-Gleichgewicht.

Bemerkung: Das Bayes-Nash-Gleichgewicht der SA und EA bildet auch ein ex-post Gleichgewicht (aufgrund der Eigenschaft der dominanten Strategie). Für FA und DA gilt das nicht. Gegenbeispiel: $x = (0, \ldots, 0, 1)$, denn erhält der letzte Bieter zwar den Zuschlag, allerdings könnte er sich im Nachhinein besser stellen durch eine Verringerung seines Gebots.

3.11 Reservationspreis r in SA:

$$\beta^{r,SA}(v) = \begin{cases} v, & v \geq r \\ \text{keine Teilnahme}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es entstehen 3 disjunkte Fälle:



a) $r > X_{(1,n)}$: $\mathbb{P}\left(X_{(1,n)} < r\right) = F^n(r)$

b) $X_{(1,n)} \geq r \geq X_{(2,n)}$:

$$\mathbb{P}\left(X_{(1,n)} \geq r \geq X_{(2,n)}\right) = n \cdot (1 - F(r)) \cdot F^{n-1}(r) \Rightarrow \text{Verkauf zu } r$$

c) $X_{(2,n)} > r$: (Normalfall)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{(2,n)} > r\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(X_{(1,n)} \geq r \geq X_{(2,n)}\right) - \mathbb{P}\left(X_{(1,n)} < r\right) \\ &= 1 - F^n(r) - n \cdot (1 - F(r)) \cdot F^{n-1}(r)\end{aligned}$$

Nur die ersten beiden Fälle sind für den Auktionator relevant, da sich nur diese zum Normalfall der Zweitpreisauktion ohne Reservationspreis unterscheiden.

Bestimmung von r^* als optimaler Reservationspreis der den erwarteten Erlös maximiert:

Tatsächlich ist das RET ziemlich praxisrelevant $\Rightarrow$ Form der Auktion ist nicht so entscheidend, aber man muss für guten Wettbewerb sorgen.

Was ändert eine nicht neutrale Risikoeinstellung?

Für risikoneutrale Bieter gilt:

$$\mathbb{E}\left[p\left(\beta^{FA/DA}(X)\right)\right] = \mathbb{E}\left[p\left(\beta^{SA}(X)\right)\right] = \mathbb{E}\left[p\left(\beta^{EA}(X)\right)\right] = \mathbb{E}\left[X_{(2,n)}\right]$$

Für risikoaverse Bieter gilt:

$$\left.\beta_{rn}^{FA/DA}(x_i) < \beta_{ra}^{FA/DA}(x_i) < x_i\right\} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{E}\left[p\left(\beta^{SA/EA}(X)\right)\right]}_{=\mathbb{E}\left[X_{(2,n)}\right]} < \underbrace{\mathbb{E}\left[p\left(\beta^{FA/DA}(X)\right)\right]}_{<\mathbb{E}\left[X_{(1,n)}\right]}$$

Nur bei risikofreudigen Bietern kommt man unter $\mathbb{E}\left[X_{(2,n)}\right]$

Bemerkung: Gelten (A1) - (A4), gewinnt der Auktionator falls er die höchste Wertschätzung besitzt und falls kein Bieter sonstige Kosten zu tragen hat, so gilt auch bei bestehendem Reservationspreis und bei unbestimmter Anzahl von Bietern bei allen vier Auktionsformen das RET.

Folgerung (Notwendiges Kriterium für Anreizkompatibilität)**:** Ein notwendiges Kriterium für Anreizkompatibilität ist, dass das eigene Gebot im Falle des Zuschlags nicht die Zahlung bestimmt, sondern nur die Gewinnwahrscheinlichkeit. Allerdings ist diese Bedingung nicht hinreichend, Gegenbeispiel wäre dafür z.B.: 3. Preisauktion, denn da hat ein Bieter den Anreiz seine Wertschätzung zu überbietet; man bietet nämlich die erwartete höchste Wertschätzung unter der Annahme, dass man selbst die 2. höchste hat.

$$r^* = x_0 + \frac{1}{\lambda(r^*)},\ \lambda(r^*) = \frac{f(r^*)}{1 - F(r^*)}$$

Interessanterweise ist dies nicht von der Zahl der Bieter abhängig.

Das gilt für FA und SA! Das heißt man nimmt in Kauf, dass die Auktion ineffizient ist.

Folgerung 3.12 (optimal auction)**:**
Maximaler Erlös und Effizienz sind nicht gleichzeitig erreichbar.

3.13 Modell der interdependenten Wertschätzungen:

- Bieter sind unsicher bezüglich des Wertes des Guts für sie. Somit modellieren wir den Wert des Gutes durch eine Zufallsvariable V_i
- Das Signal des Bieters (private Information) x_i ist die Information des Bieters bezüglich V_i

V_i hängt nicht nur von x_i ab, sondern auch von x_j, allerdings ist deren Einfluss schwächer.

Definition: *Seien $x = (1,5,4)^T$, $y = (2,3,2)^T$.*

- $x \wedge y$ ***komponentenweise Minimum***
- $x \vee y$ ***komponentenweise Maximum***

damit gilt: $x \wedge y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x \vee y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Definition (Affiliation)**:** *Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine n-dimensionale Zufallsvariable mit der Dichte f. X heißt* ***affiliert*** *genau dann, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$f(x \wedge y) \cdot f(x \vee y) \geq f(x)f(y)$$

Vereinbarung: Sei X eine n-dimensionale affilierte Zufallsvariable mit Verteilung F und Dichte f. Die bedingte Dichte und Verteilung der i-ten Komponente X_i unter der Bedingung $X_k = x_k$ werden als

$$f_{i|k}(x_i|x_k) \ \text{ bzw. } \ F_{i|k}(x_i|x_k)$$

bezeichnet.

Satz 3.14: *Sei X eine n-dimensionale affilierte Zufallsvariable mit Verteilung F und Dichte f. Ferner sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann gilt für alle x_i', xi'', x_k', x_k'' mit $x_i' \geq x_i''$, $x_k' \geq x_k''$:*

a) Wir können eine Aussage über das Verhältnis der Dichten treffen, nämlich:

$$\frac{f_{i|k}(x_i'|x_k')}{f_{i|k}(x_i''|x_k')} \geq \frac{f_{i|k}(x_i'|x_k'')}{f_{i|k}(x_i''|x_k'')}$$

b) Für die Verteilungen können wir sagen, dass

$$F_{i|k}(x_i|x_k'') \geq F_{i|k}(x_i|x_k')$$

Aus den Verteilungen können wir für die bedingten Erwartungswerte herleiten, dass

$$\mathbb{E}\left[X_i \middle| X_k = x_k'\right] \geq \mathbb{E}\left[X_i \middle| X_k = x_k''\right]$$

und dafür auch für die Rangstatistiken

$$\mathbb{E}\left[X_{(i,n)} \middle| X_k = x_k'\right] \geq \mathbb{E}\left[X_{(i,n)} \middle| X_k = x_k''\right].$$

c) Für eine monoton wachsende Funktion folgt damit

$$\mathbb{E}\left[h\left(X_{(i,n)}\right) \middle| X_k = x_k'\right] \geq \mathbb{E}\left[h\left(X_{(i,n)}\right) \middle| X_k = x_k''\right]$$

3.2 IV-Modell (Interdependent Value)

Wir definieren für das Kapitel

X_i: Zufallsvariable des privaten Signals von Bieter i,

$X_i = x_i$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ ist affiliert (Die Signale der Bieter sind affiliert)

$F(x), f(x), x = (x_1, \dots, x_n)$, $X_{(j,n)}$ Zufallsvariable der j-ten Rangstatistik

$G(y)$, $g(y)$: Verteilung und Dichter der Zufallsvariable Y, die das höchste Signal der $n-1$ Konkurrenten aus Sicht von Biter i darstellt

Definition: *Wir definieren*

$$v_i(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{E}\left[V_i \;\middle|\; X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right]$$

als die am genauesten mögliche Schätzung für den Wert des Gutes, da $s_0, s_1, \ldots, s_n$ unbekannt bleiben.

Erinnerung:

a) IPV: $V_i = v_i(X_1, \ldots, X_n) = X_i \Rightarrow v_i = x_i$

b) CV: $V_1 = \ldots = V_n = V$

$$v_1(X_1, \ldots, X_n) = v_2(X_1, \ldots, X_n) = \ldots = v_n(X_1, \ldots, X_n) = v(X_1, \ldots, X_n)$$

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{E}\left[V \middle| \, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right]$$

Satz 3.15: *Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ affiliert, $i \in N$, h eine monoton wachsende Funktion und x', x'' mit $x' > x''$.*

Für Bieter i hat die erste Ordnungsstatistik Y von X_{-i} die folgende Eigenschaft:

a) Die Zufallsvariablen X_i und Y sind affiliert.

b) Für die bedingte Verteilung von Y gegeben eine Realisierung von X_i gilt

$$\frac{g(y|x')}{G(y|x')} \geq \frac{g(y|x'')}{G(y|x'')}, \text{ wobei } G(\,\cdot\mid x) = G(\,\cdot\mid X_i = x)$$

c) Für den bedingten Erwartungswert Y gegeben eine Realisierung von X_i gilt

$$\mathbb{E}\left[h(Y) \middle| \, X_i = x'\right] \geq \mathbb{E}\left[h(Y) \middle| \, X_i = x''\right]$$

3.2.1 Das symmetrische Modell

a) Zwei Aspekte der (a priori) Symmetrie

1. Symmetrie der Signale: die gemeinsame Verteilung $F(x)$ und Dichte $f(x)$ der Signale ist in den Argumenten symmetrisch; d.h. für alle $x = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt $F(\rho(x)) = F(x)$ und $f(\rho(x)) = f(x)$ für alle Permutationen $\rho(x)$, d.h. alle Bieter teilen sich eine gemeinsame Verteilung $F(x)$ bzw. Dichte $f(x)$.
2. Symmetrie der Bewertung: Die Wertfunktion ist für alle Bieter gleich, d.h. es existiert eine Funktion $v\colon [0, \overline{x}]^n \to \mathbb{R}$, so dass für alle $i \in N$ und alle $x \in [0, \overline{x}]$ gilt $v(x) = v_i(x)$. Diese Wertfunktion ist in den Argumenten 2 bis n (Signale der anderen Bieter) symmetrisch, d.h. für alle x_i und alle x_{-i} gilt

   $$v\left(x_i, \rho(x_{-i})\right) = v\left(x_i, x_{-i}\right)$$

   für alle Permutationen $\rho(x_{-i})$. Demnach ist die Wertfunktion unabhängig von der Identität der anderen Bieter.

   Außerdem gilt:

   $$\frac{\partial v_i(\cdot)}{\partial x_i} > 0,\ \frac{\partial v_i(\cdot)}{\partial x_j} \geq 0$$

Beispiel 3.16: Sei

$$v_i(x_i, x_{-i}) = \frac{x_i}{2} + \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} x_j}{2}$$

Dann gilt: $\frac{\partial v_i(\cdot)}{\partial x_i} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial v_i(\cdot)}{\partial x_j} = \frac{1}{2(n-1)}$

Im common value-Modell muss gelten: $v_i(x_i, x_{-i}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$, wobei w die Wertefunktion nur abhängig vom eigenen Signal und vom höchsten Signal der restlichen $n-1$ Bieter.

Der beste Informationsstand den Bieter i haben kann am Anfang einer symmetrischen Auktion ist:

$$v_i = v(x_i, x_{-i}) = \mathbb{E}\left[V_i \middle| X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right].$$

Symmetrisches Modell bedeute allerdings nicht, dass alle dem Gut den gleichen Wert zuweisen; jeder könnte dem eigenen Signal mehr Gewicht geben, z.B.:

$$v(x_i, x_{-i}) = \frac{x_i}{2} + \frac{\frac{1}{n+1}\sum_{j\neq i} x_j}{2}$$

$\Rightarrow v(x_i, x_{-i}) \geq v(x_j, x_{-j}) \iff x_i > x_j$.

Bemerkung: Beim CV-Modell müsste bei obigen Beispiel jedes Signal gleich gewichtet werden.

Definition: *Wir definieren die Funktion* $w\colon [0, \overline{x}]^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$w(x, y) = \mathbb{E}\left[V_i \middle| X_i = x_i, Y = y\right]$$

wobei Y *die erste (und dadurch höchste) Rangstatistik der anderen* $n-1$ *Bieter.*

Es gilt:

$$\mathbb{E}[w(X_i, Y)] = \mathbb{E}[v(X_i, X_{-i})]$$
$$\mathbb{E}[w(w_i, Y)] = \mathbb{E}[v(w_i, X_{-i})]$$

d.h. in Erwartung werden beide Funktionen die gleiche Bewertung geben
Es sei gesagt: zum Zeitpunkt der Auktion betrachtet der Bieter $\mathbb{E}\left[w(x_i, Y)\right]$.

Die Verhaltenssymmetrie unterstellt zwei Bedingungen, nämlich

a) Informationssymmetrie: alle wissen über die Verteilungen gleich viel.

b) Bewertungssymmetrie: alle bewerten das Gut über die Gleiche Funktion bzw. Bietstrategie

damit gilt dann:

$$\text{Verhaltenssymmetrie} \;\Rightarrow\; \text{Sym. Bayes-Gleichgewichte } \beta\colon [0, \overline{x}] \to \mathbb{R}$$

Wir erhalten ein solches symmetrisches Bayes-Gleichgewicht, indem wir für einen Bieter i annehmen, dass alle anderen dieselbe optimale Strategie spielen, von der wir nur wissen, dass sie monoton ist und suchen nach der besten Antwort für den Bieter i.

Zweitpreisauktion

$$\mathbb{E}\left[\pi(b,X)\Big|X_i = x_i\right] = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (w(x,y) - \beta(y))\, g\,(y|x)\, dy \qquad (*)$$

Beachte: im IPV-Modell würde gelten, dass $w(x,y) = x_i$ und $g\,(y|x) = g\,(y)$. Die obere Integrationsgrenze zeigt das höchste $\overline{y}$ bei dem man das Gut gewinnt, also irgendeine Rente erzielt und damit in den Erwartungswert einfließt.

Die Wahrscheinlichkeit dass man die Auktion gewinnt ist damit

$$G\,(\overline{y}|x) = \int_0^{y} g\,(y|x)\, dy \longrightarrow \max_b$$

und wird maximiert bei $y = x$, denn der vordere Teil im Integrant ist positiv für $y < x$ und negativ für $y > x$.
Maximieren von $(*)$ liefert

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathbb{E}\left[\pi(\cdot)\right] = \left(w(x,\beta^{-1}(b))\right) - \beta\left(\beta^{-1}(b)\right) g\left(\beta^{-1}(b)|x\right) \frac{d\beta^{-1}(b)}{db} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow b = w\left(x,\beta^{-1}(b)\right),\ b = \beta(x) \ \Rightarrow\ \beta^{SA}(x) = w(x,x)$$

d.h. ich nehme an, dass der höchste Bieter der restlichen $n-1$ Bieter das gleiche Signal bekommt wie man selbst. Bei zwei Bietern bietet man dadurch das eigene Signal, bei drei sinkt das Signal und je mehr Bieter dazukommen desto stärker sinkt das eigene Gebot, um dem Winners-Curse entgegenzuwirken.

Bemerkung: Im IV-Modell gibt es keine dominante Strategie, nicht einmal im Zwei-Bieter-Fall und die obige Strategie stellt ein ex-post Gleichgewicht dar..

Englische Auktion

Die Bietfunktion in der Englischen Auktion sieht wie folgt aus:

$$\beta^{EA} = \left(\beta_n^{EA}, \beta_{n-1}^{EA}, \dots, \beta_2^{EA}\right)$$

mit $\beta_k^{EA} \colon [0, \overline{x}] \times \mathbb{R}_+^{n-k} \to \mathbb{R}_+$ für alle $2 \leq k \leq n$. Es gilt

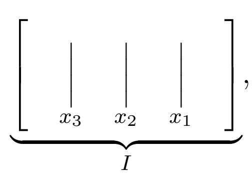
$$\begin{aligned}
\beta_n^{EA}(x) &= v(x, \dots, x) \\
\beta_{n-1}^{EA}(x) &= v(x, \dots, x, x_{(n,n)}), \\
&\qquad\qquad p_{n-1} = v(x_{(n,n)}, \dots, x_{(n,n)}) \to v(n,n) \\
\beta_{n-2}^{EA}(x) &= v(x, \dots, x_{(n-1,n)}, x_{(n,n)}), \\
&\vdots \qquad p_{n-2} = v(x_{(n-1,n)}, \dots, x_{(n-1,n)}, x_{(n,n)}) \to v(n,n) \\
&\vdots \\
\beta_2^{EA}(x) &= v(x, x, x_{(3,n)}, \dots, x_{(n,n)}),
\end{aligned}$$

wobei v jeweils eine Funktion von n Variablen ist und p_k den k-ten Ausstiegspreis darstellt. Wir wissen auch, dass $\beta_l^{EA}(x) \leq \beta_m^{EA}(x)$ für $l < m$.

Vergleicht man die Bietfunktion bei der Zweitpreisauktion und der Englischen Auktion, so sieht man bei zwei Bietern sind die Funktionen identisch, bei mehr als zwei in EA kennen die ersten beiden Bieter die $n-2$ anderen Bieter und bei der Zweitpreisauktion muss er diese schätzen.

Erwarteter Auktionserlös der SA und EA

Mit $x_k = \mathbb{E}\left[X_{(k,3)}\right],\ k = 1, 2, 3,;\ v = x_1 + x_2 + x_3$ gilt:



- SA: $b_2 = x_2 + \underbrace{y_{(1,2)}}_{=x_2} + \mathbb{E}\left[Y_{(2,2)} \middle| Y_{(1,2)} = x_2\right] = 2x_2 + \mathbb{E}\left[Y_{(2,2)} \middle| Y_{(1,2)} = x_2\right]$:

$$\left[\qquad \underset{\mathbb{E}\left[Y_{(2,2)} \middle| Y_{(1,2)}=x_2\right]}{\Big|} \qquad \underset{y_{(1,2)}=x_2}{\Big|} \qquad\qquad \right]$$

  Beachte, dass das Intervall hier größer ist als I, man kennt die Realisierungen nicht.

- EA: $b_2 = x_2 + y_{(1,2)} + x_3 = 2x_2 + x_3 \geq b^{SA}$

$$\underset{x_3}{\Big|} \qquad \underset{y_{(1,2)}=x_2}{\Big|}$$

Im symmetrischen Modell mit interdependenten Wertschätzungen und affiliierten Signalen gilt für die erwarteten Erlöse in den symmetrischen Bietgleichgewichten der EA, FA (DA) und SA die folgende Beziehung:

$$\mathbb{E}\left[p^{EA}\right] \geq \mathbb{E}\left[p^{SA}\right] \geq \mathbb{E}\left[p^{FA}\right]$$

Gleichheit gilt bei Unabhängigkeit der Signale, - dieses Ranking ist eine Folge der Affiliiertheit - und die Ungleichheit ist eine Folge der Gefahr des Fluch des Gewinners.

In diesem Modellrahmen, tritt der Fluch des Gewinners im Erwartungswert nicht auf. Allerdings kann auch im Einzelfall kann der Fluch des Gewinners in der EA nie auftreten. Hingegen in der SA ist in der ex-post-Betrachtung dieser Effekt allerdings möglich.

Kapitel 4

Mehrgüterauktionen

Der Fluch des Gewinners bleibt erhalten und analog viele der Analysen die wir bislang gemacht haben. Ein Vorteil der Englischen Auktion liegt darin, dass jeder Bieter selbst bestimmen kann, ob er das Gut ersteigert oder nicht.

Wertabhängigkeiten

Wir betrachten 2 Güter X und Y und unterscheiden Güter nach

- Substitute : $\iff v_i(X+y) \leq v_i(X) + v_i(Y)$ (man nennt die Güter bei „=“ auch neutrale Güter)
- Komplemente : $\iff v_i(X+y) > v_i(X) + v_i(Y)$ - hier treten Synergien auf.

Sequentielle Auktion

Wir betrachten 2 homogene Güter, in einer sequentiellen Auktion in der zuerst Gut 1, dann Gut 2 versteigert wird und nehmen vorerst an, dass jeder Bieter nur ein Gut ersteigern will. Im IPV Kontext betrachten wir n Bieter mit jeweils $v_i = x_i$.

- In der Zweitpreisauktion ist in der 2. Auktion wie üblich die dominante Strategie seine Wertschätzung zu bieten.
- In der Erstpreisauktion ist in der 2. Auktion die Gleiche Bietstrategie zu wählen wie bei der Eingutauktion, allerdings wird jeder Bieter mehr bid-shading betreiben, da bereits einer der n Bieter das 1. Gut ersteigert hat und somit nur noch $n-1$ Bieter um das 2. Gut konkurrieren.

Da allerdings in der Zweitpreisauktion, falls jeder auch in der ersten Runde seine Wertschätzung bietet, die erste Runde teurer ist als die zweite, geht die Anreizkompatibilität verloren. Die Bieter haben hier dadurch einen Anreiz ihre Wertschätzung zu unterbieten.

Ein Gleichgewicht in der Zweitpreisauktion müsste dadurch in beiden Runden den gleichen Zuschlagspreis haben. Da wir oben bereits ausgerechnet haben, dass in der zweiten Runde die Wertschätzung des 3. (Knappheitspreis) geboten wird, ist das auch der Preis in der 1. Runde. Analoges gilt für die Erstpreisauktion.

Bemerkung: Allgemein gilt, dass der Knappheitspreis bei Mehrgüterauktionen mit homogenen Gütern der Knappheitspreis ein erster Indikator auf den Erlös ist.

Die Gleichgewichts-Bietstrategien lauten damit

- Erstpreisauktion: unter der Annahme man habe das höchste Gebot bietet man das 3. höchste Gebot
- Zweitpreisauktion: unter der Annahme man habe das höchste Gebot bietet man das 2. höchste Gebot.

In der Praxis gibt es allerdings Beobachtungen, dass Preise fallend, wenn ein und das selbe Gut mehrfach verkauft wird.

4.1 Simultane Mehrgüterauktion

Das Angebot bestehe aus 16 homogenen Gütern.

- Bieter A (24 Euro, 4 EH), (22 Euro, 3 EH), (21 Euro, 5 EH)
- Bieter B (25 Euro, 3 EH), (24 Euro, 2 EH), (22 Euro, 3 EH)
- Bieter C (23 Euro, 5 EH), (22.50 Euro, 2 EH), (20 Euro, 2 EH)

Hier kommt ein abnehmender Grenznutzen ins Spiel, Bieter A ist bereit für die ersten 4 Einheiten zwar pro Einheit 24 Euro zu zahlen, für die nächsten 3 Einheiten allerdings nur noch 22 Euro, etc.

Verkauft werden an die 16 Einheiten mit höchsten Gebotspreisen:

Bieter	EH
B	3
A	4
B	2
C	5
C	2
Σ 16	

Es gibt verschiedene mögliche Preisregeln bzw. Bepreisungsregeln für diese Auktionsform:

- Preisdiskriminierende Auktion (Pay-as-bid, Gebotspreisauktion):
  - * Im obigen Beispiel bedeutet das:

    Bieter A: $4 \cdot 24 = 96$

    Bieter B: $3 \cdot 24 + 2 \cdot 24 = 123$

    Bieter C: $5 \cdot 23 + 2 \cdot 22,50 = 160$

    Der Gesamterlös beträgt 379.

Hier entsteht ein Anreiz für hohe Gebote ein großes bid-shading zu betreiben und wenig für kleine Gebote.

- Einheitspreisauktion (Pay-as-cleared, Uniform pricing)
  - LAB (lowest accepted bid): preisbestimmend ist das niedrigste bezuschlagte Gebot. Im obigen Beispiel: 22.50 Euro. Diese Form ist in der Praxis häufiger zu finden.
    * Im obigen Beispiel bedeutet das:

      Bieter A: $4 \cdot 22,50 = 90$

      Bieter B: $5 \cdot 22,50 = 112,50$

      Bieter C: $7 \cdot 22,50 = 157,50$

      Der Gesamterlös beträgt 360.
  - HRB (highest rejected bid): preisbestimmend ist das höchste nicht bezuschlagte Gebot. Im obigen Beispiel: 22 Euro. Diese Form ist theoretisch interessanter und wünschenswerter. Im obigen Beispiel bedeutet das:
    * Im obigen Beispiel bedeutet das:

      Bieter A: $4 \cdot 22 = 88$

      Bieter B: $5 \cdot 22 = 110$

      Bieter C: $7 \cdot 22 = 154$

      Der Gesamterlös beträgt 352.

  Beide Einheitspreis-Auktionsformen sind nicht anreizkompatibel.

- Vickrey-Auktion
  Falls Bieter A weg fällt, so würde anstatt seiner 3 Zuschläge von Bieter B zum Preis von 22 und 1 Zuschlag von Bieter C zum Preis 20 dazu kommen, damit ist der

Zuschlagspreis von A bestimmt durch:

$$A: \quad 3 \cdot 22 + 1 \cdot 20 = 86$$

Analog für B und C:

$$\begin{aligned} B: &\quad 3 \cdot 22 + 2 \cdot 21 = 108 \\ C: &\quad 6 \cdot 22 + 1 \cdot 21 = 153 \\ &\text{Insgesamt:} \qquad \overline{347} \end{aligned}$$

Dieses Verfahren ist Anreizkompatibel. Hier bestimmen die eigenen Gebote nicht den Zuschlagspreis, aber das ist lediglich notwenig und nicht hinreichend.

Bemerkung: Falls alle Bieter jeweils nur an einem Gut interessiert sind, so gilt für die Pay-as-Bid und die beiden Uniform pricing Auktionsformen das RET und der Zuschlagspreis ist der Knappheitspreis, also das $k+1$-höchste Gebot.

Folgerung: Ist ein Verfahren anreizkompatibel, so müssen die eigenen Gebote nicht den Zuschlagspreis bestimmen, sondern lediglich die Zuschlagswahrscheinlichkeit.

4.1.1 Verallgemeinerte Vickrey Auktion (GVA)

Diese kommt auf jeden Fall in der Klausur dran!
Sei n die Anzahl der Bieter und es gebe $k \geq 2$ homogene oder heterogene Güter, $K = \{1, \ldots, k\}$, und sei mit $\mathcal{P}(K)$ die Potenzmenge von K bezeichnet.

Somit lässt sich das Gesamtgebot von Bieter $i \in N$ durch den Gebotsvektor

$$b_i = (b_i(y))$$

für $y \in P(K) \setminus \{\backslash\}$; somit ist die Anzahl der Gebote von Bieter i gleich $|\mathcal{P}(K)| - 1$.

Bestimmung der Gewinnergebote:

Für die Bestimmung der Gewinnergebote sind zunächst die zulässigen Allokationen der Güter (Aufteilung der Güter auf die Bieter) zu definieren. Diese sind gegeben durch die Menge

$$Z = \left\{ x \in \mathcal{P}(K)^n \text{ mit } \bigcup_{i=1}^{n} x_i = K \text{ und } x_i \cap x_j = \emptyset \text{ für alle } i, j \in N, i \neq j \right\}$$

wobei $x = (x_i, \ldots, x_n)$. Die optimale Allokation ist gegeben durch:

$$x^* = \arg\max_{x \in Z} \sum_{i=1}^{n} b_i(x_i)$$

Preisregel:

Für $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, wobei $x_i^* \in \mathcal{P}(J)$, sei

$$B^*(N) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x_i^*)$$

die **maximale Gebotssumme** und mit

$$B_{-i}^*(N) = \sum_{j \neq i} b_j(x_j^*) = B^*(N) - b_i(x_i^*)$$

die Gebotssumme ohne das Gebot von Bieter i. Die Zahlung von Bieter i für x_i^* lautet dann:

$$\rho_i = B^*\left(N \setminus \{i\}\right) - B_{-i}^*(N)$$

und das stellt die Opportunitätskosten seiner Teilnahme dar (da die Auktion anreizkompatibel ist und damit B die wahre Zahlungsbereitschaft darstellt). Diese Opportunitätskosten können nicht auf die Güter bzw. die Güteranzahl herunter gebrochen werden, sonder weist der Menge an Gütern den Wert zu.

Bider	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
B_1	8	5	4	12	10	11	21
B_2	6	3	5	15	9	12	19
B_3	7	4	10	12	10	18	22

Sei $n = 3$, $k = 3$, $\{A, B, C\}$
Wir sehen für Bieter 1 zu Beispiel, dass Gut A und B komplementäre Eigenschaften haben, da $b(AB) = 12 < 8 + 5 = b(A) + b(B)$, und analog für Gut A und C. Bei allen drei Gütern entstehen Synergie-Effekte, da $b(ABC) = 21 > 8 + 5 + 4 = b(A) + b(B) + b(C)$ (Klausuraufgabe)

Um den Gewinn zu maximieren, müssen die Güter wie folgt verteilt werden:

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\{A\}, \emptyset, \{B, C\}) \ \longrightarrow \ b_1(x_1^*) = 8,\ b_3(x_3^*) = 18$$

damit ist der Auktionserlös $B^* = 36$.

Da jeder Bieter maximal nur ein Gebot bezuschlagt bekommt, so brauchen wir für den Preis den die Bieter bei dieser verallgemeinerte Vickrey Auktion zu zahlen haben zwei Komponenten:

- Falls Bieter 1 nicht teilnimmt, ist $(x_2^*, x_3^*) = (\{A, B\}, \{C\})$ und der Auktionserlös wäre damit gleich 25. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= B^* \left(N \setminus \{1\} \right) - B_{-1}^* \\ &= 25 - 18 = 7 \end{aligned}$$

- Bieter 2 erhält kein Gut, somit ist $\rho_2 = 0$.

- Falls Bieter 3 nicht teilnimmt, ist $(x_1^*, x_1^*) = (\{A, B, C\}, \emptyset)$ und der Auktionserlös wäre damit gleich 21. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \rho_3 &= B^*\left(N \setminus \{3\}\right) - B^*_{-3} \\ &= 21 - 8 = 13 \end{aligned}$$

Erinnerung: Diese Gebotsform ist schwach Anreizkompatibel, d.h. jeder Bieter hat einen Anreiz seine eigene Wertschätzung zu bieten.

Probleme der GVA:

- Aufwendiges Verfahren (bei k Güter sind $2^k - 1$ Gebote nötig).
- Komplex, NP-vollständiges Problem
- Auktionserlös kann sehr niedrig sein
- Verfahren ist nicht „nachverhandlungsstabil“.

Typische Klausuraufgabe:

	A	B	AB
B_1	0	0	2
B_2	2	0	2
B_3	0	2	2

a) Welche Charakteristik haben die Güter für die Bieter?

- Bieter 1: Güter sind perfekte Komplemente, mit nur einem der Güter ist der Wert gleich 0
- Bieter 2: Gut B hat keinen Nutzen für den Bieter, dementsprechend ist er indifferent zwischen nur A oder AB
- Bieter 3: Gut A hat keinen Nutzen für den Bieter, dementsprechend ist er indifferent zwischen nur B oder AB

b) Wie werden die Güter optimal aufgeteilt und was müssen die Bieter zahlen?

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\emptyset, A, B) \rightarrow B^* = 4$$

- Bieter 1: erhält kein Gut, demnach: $\rho_1 = 0$
- Bieter 2: ohne Bieter 2 ist der Auktionserlös gleich 2, d.h. $\rho_2 = 2 - 2 = 0$
- Bieter 3: ohne Bieter 3 ist der Auktionserlös gleich 2, d.h. $\rho_3 = 2 - 2 = 0$

c) Ist die Auktion effizient?

Ja, die Auktion ist effizient, da die Auktion anreizkompatibel ist, d.h. jeder Bietet seine echte Wertschätzung. Der Zuschlag wird über die Maximierung des Auktionserlös ermittelt, damit muss sie effizient sein.

d) Ist diese Auktion verhandlungsstabil? Nein, denn das ist das erste Verfahren, welches wir kennen gelernt haben, bei dem die Zuschlagspreise der Bieter unter dem Gebot von nicht-bezuschlagten Bieter liegen können.

Ein weiteres Beispiel:

	A	B	AB
B_1	0	0	2
B_2	0.5	0.5	1

Der optimale Auktionserlös wird erzieht durch:

$$(x_1^*, x_2^*) = (\{A, B\}, \emptyset)$$

Damit muss Bieter 1 folgendes zahlen: $\rho_1 = 1 - 0 = 1$.

Hier ist allerdings ein Anreiz, dass sich Bieter 2 aufteilt wie in obigen Beispiel. Damit erhält er die Güter A und B ohne etwas zahlen zu müssen. Voraussetzung dafür ist allerdings, dass er die Zahlungsbereitschaft von Bieter 1 kennt.

4.1.2 Simultane Mehrrundenauktion

Bemerkung: Warum CCV in Praxis nicht positiv bewertet wird: Wertschätzung für Gut hängt davon ab was die Konkurrenz bekommt und das wird in dieser Form überhaupt nicht abgebildet.

Seien A, B, C Güter, es gebe eine Anzahl an Bietrechten für jeder Bieter, r_A, r_B, r_C stellen die Reservationspreise für und b_A^i, b_B^i, b_C^i die Gebote

$$\rightarrow p_A^1, p_B^1, p_C^1 \text{ aktuelle Höchstgebote nach Runde 1}$$

Die Anzahl der Bietrechte bestimmt sich immer aus der Anzahl der stehenden Höchstgebote und aktiver neuer Gebote. Bei geringerer Gebotsanzahl verringert sich die Anzahl der

Bietrechte und die Auktion endet, sobald keine Gebote mehr eingehen.

Es gibt nach jeder Runde ein Inkrement auf die Höchstgebote der letzten Runde und das wird als Mindestgebot festgelegt. Dadurch entstehen neue Reservationspreise r_A^2, r_B^2, r_C^2

- Vorteil dieser Auktion: man sieht jede Runde wer für welchen Preis das Höchstgebot hält, also alle Informationen sind offen und man kann auf Situationen reagieren.
- Nachteil dieser Auktion: keine kombinatorische Gebote, damit ist dieses Verfahren schwer für starke Synergien oder Komplemente umzusetzen.

Bemerkung: Es ist keine dominante Strategie auf das eigene präferierte Gut zu bieten, auch wenn es nur eins davon gibt, z.B. durch komplementäre Eigenschaften bei den anderen Bietern.

Beispiel 4.1: Sei $r_A = 0, r_b = 0$ Für Bieter 2 ist die Menge der Güter relevant. Beide

	A	B	AB
B_1	7	7	7
B_2	9	9	18

Güter sind gleich viel wert und beide zusammen sind doppelt so viel Wert. Für Bieter 1 sind ads perfekte Substitute, denn Gut A und Gut B sind gleich viel Wert, aber beide zusammen haben keinen Mehrnutzen.

In einer Auktion: wird Bieter 1 nur auf ein Gut bieten und Bieter 2 wird auf beide bieten, d.h. es sind nur 3 Bietrechte aktiv. Der Zuschlag wird bei 7 sein für beide Güter und Bieter 2 erhält beide, d.h. Zuschlagspreis wird gleich dem Knappheitspreis sein.

Die Rente von Bieter 2 liegt bei $\pi_2 = 18 - 14 = 4$, falls die Bieter sich allerdings richtig einschätzen, würde es sich lohnen aber gleich ein Bietrecht aufzugeben und damit die Rente auf 9 zu erhöhen.

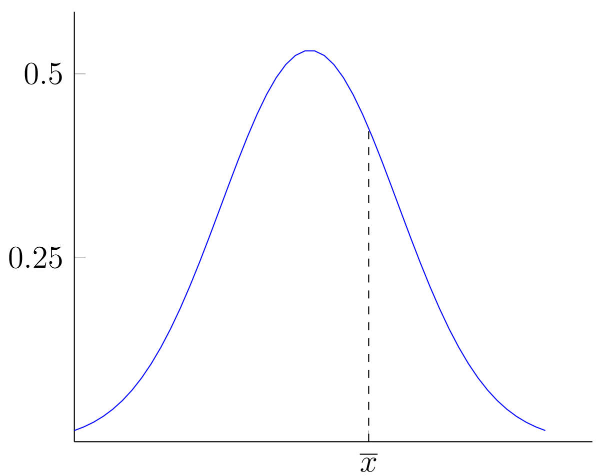
Das Problem aus obigem Beispiel ist eines der Hauptrisiken dieser Auktionsform, denn implizit kollusives Verhalten, also Verhalten dass durch Reaktion auf das Verhalten anderen kollusiv wird, kann dazu führen, dass der Zuschlagspreis zu Ungunsten des Auktionators gedrückt wird.

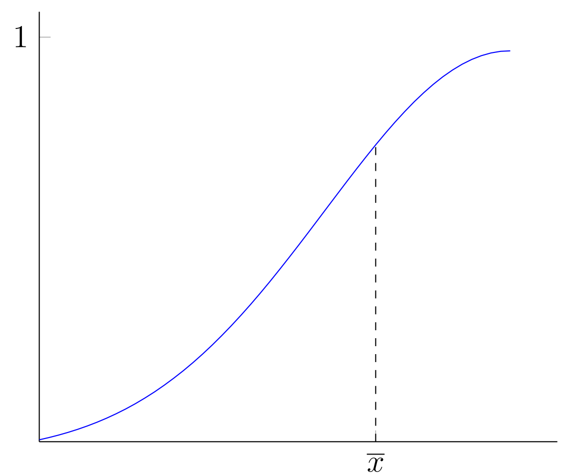
Übungen

1. Übung

Statistische Grundlagen

- Zufallsvariablen sind die unbekannten Wertschätzung der Bieter X
- $\mathbb{R}(X = x) =$ Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert x annimmt
- Dichte- und Verteilungsfunktion (einer Zufallsvariable X)

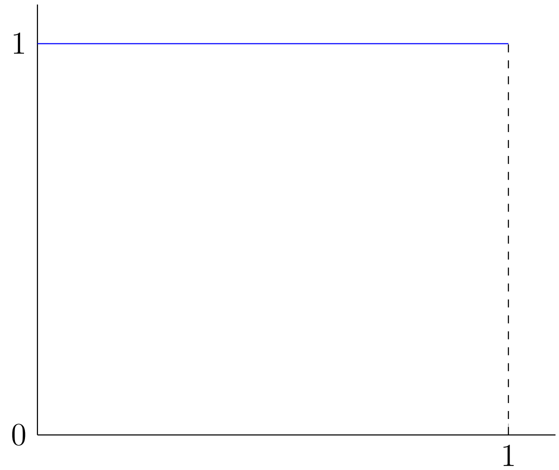


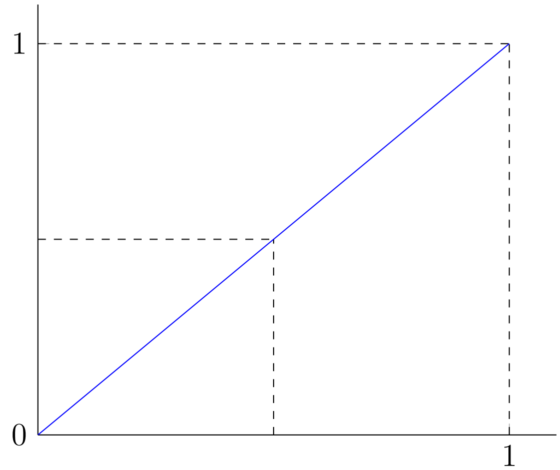


Eigenschaften

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$
- $F(\overline{x}) = \int_{-\infty}^{\overline{x}} f(t)dt = \mathbb{P}(X \leq \overline{x})$

Beispiel: Gleichverteilung auf $[0,1]$: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$





Definition (Erwartungswert)**:** $\mathbb{E}[X] \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot 1dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Definition (Ordnungsstatistiken)**:**

- *Für auktionstheoretische Betrachtung interessant:*
  - *höchste Wertschätzung?*
  - *höchstes/zweithöchstes Gebot?*
- *n unabhängige Realisierungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einer stetigen Zufallsvariable X*
- *geordnete Liste der Realisierungen $x_{(1,n)} \geq x_{(2,n)} \geq \ldots \geq x_{(n,n)}$*
- *Gibt es eine Zufallsvariable, die sich im höchsten der n Werte realisiert?*

$$\underbrace{X_{(1,n)}}_{\substack{\text{erste} \\ \text{Ordnungsstatistik}}} \geq X_{(2,n)} \geq \ldots \geq X_{(n,n)}$$

- *Verteilungsfunktion der ersten Ordnungsstatistik $X_{(1,n)}$:*

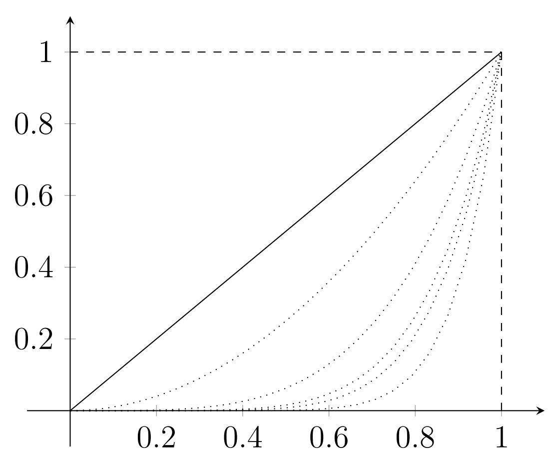
$$\begin{aligned} F_{(1,n)}(x) &= \mathbb{P}(X_{(1,n)} \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_{(1,n)} \leq x, X_{(2,n)} \leq x, \ldots, X_{(n,n)} \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x)^n \\ &= F(x)^{(n)} \end{aligned}$$

wobei X die gemeinsame ... Zufallsvariable der Ordnugnsstatistik mit $F(x)$ und $f(x)$ sei.

- $f_{(1,n)}(x) = n \cdot F(x)^{n-1} \cdot f(x)$

Beispiel: Gleichverteilung $[0,1]$:

  - $F_{(1,n)}(x) = F(x)^n = x^n$, $x \in [0,1]$
  - $f_{(1,n)}(x) = nF(x)^{n-1}f(x) = nx^{n-1} \cdot 1 = nx^{n-1}$



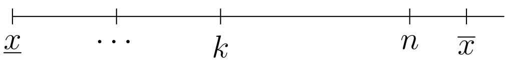
- *Verteilungsfunktion der zweiten Ordnungsstatistik $X_{(2,n)}$:*

  - $F_{(2,n)}(x) = \mathbb{P}\left(X_{(2,n)} \leq x\right)$

  $\rightarrow$ *2 Möglichkeiten:*

- $* \ X_{(1,n)} \leq x \Rightarrow F(x)^n$
- $* \ X_{(1,n)} > x \Rightarrow F(x)^{n-1} \cdot (1 - F(x))$

$\rightarrow \ F_{(2,n)} = F(x)^n + n \cdot F(x)^{n-1} \cdot (1 - F(x))$

- *Verteilungsfunktion von* $X_{(k,n)}$*:* 

  – $F_{(k,n)}(x) = \mathbb{P}(X_{(k,n)} \leq x)$

$$
\begin{aligned}
&= F(x)^n + n \cdot F(x)^{n-1} \cdot (1 - F(x)) \\
&\quad + \binom{n}{2} \cdot F(x)^{n-2} \cdot (1 - F(x))^2 \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \binom{n}{n-1} \cdot F(x)^{n-(k-1)} \cdot (1 - F(x))^{k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \cdot F(x)^{n-j} \cdot (1 - F(x))^j
\end{aligned}
$$

- *Erwartungswert von* $X_{(1,n)}$*:*

$$\mathbb{E}[X_{(1,n)}] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{(1,n)}(x) dx$$

$\Rightarrow$ *Für die Gleichverteilung auf* $[0, 1]$ *gilt:*

$$\mathbb{E}[X_{(1,n)}] = \int_0^1 x \cdot f_{(1,n)}(x) dx = n \int_0^1 x \cdot x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1} \left[x^{n-1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

2. Übung

Aufgabe 1

Sei $F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{100}, & 0 \leq x \leq 100 \\ 1, & x > 100 \end{cases}$

a) Die Dichtefunktion lautet somit:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{100}, & x \in [0, 100] \\ 0, & x > 100 \end{cases}$$

Den Erwartungswert der dazugehörigen Zufallsvariable erhalten wir nun über:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx \\ &= \int_0^{100} \frac{x}{100} dx = 50 \end{aligned}$$

b) Das Gebot ist definiert durch: $B = \frac{2}{3}X$. Somit ist das erwartete Gebot:

$$\mathbb{E}[B] = \frac{2}{3}\mathbb{E}[X] = 33,\overline{3}$$

d) g sei die Gebotsdichte, G die Gebotsverteilung

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}\left(B \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{2}{3}X \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{3}{2}x\right) = F\left(\frac{3}{2}x\right) \end{aligned}$$

Damit sind Verteilung und Dichte gegeben durch:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3x}{200}, & x \in \left[0, \frac{200}{3}\right] \\ 1, x > \frac{200}{3} \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{200}, & x \in \left[0, \frac{200}{3}\right] \\ 0, & x > \frac{200}{3} \end{cases}$$

c) $\mathbb{P}(X \leq 30) = G(30) = \frac{3 \cdot 30}{200} = 0,45 \mathrel{\hat{=}} 45\%$

Aufgabe 2

Sei $n = 3$, $x_1 = 60$. IPV-Ansatz. $X_i \sim [0, 100]$, $i = 2, 3$. $B_2 = \frac{2}{3}X_2$, $B_3 = \frac{2}{3}X_3$.

$$\mathbb{E}\left[\pi_1(b_1)\right] = (x_1 - b_1) \cdot \mathbb{P}\left(b_1 \geq \max\{b_2, b_3\}\right) \to \max_{b_1 \in \mathbb{R}_+}$$

Wir definieren $B_{(1,2)} = \max\{B_2, B_3\}$, $G_{(1,2)}(b) = G(b) \cdot G(b) = G^2(b)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}\left[\pi_1(b_1)\right] &= (x_1 - b_1) \cdot G^2(b_1) \\ &= (x_1 - b_1) \cdot \frac{9b_1^2}{40000} \\ &= (60 - b_1) \cdot \frac{9b_1^2}{40000} \\ &= \left(540b_1^2 - 9b_1^3\right) \cdot \frac{1}{40000} \to \max_{b_1} \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbb{E}[\pi_1]}{db_1} = \left(1080b_1 - 27b_1^2\right) \cdot \frac{1}{40000} \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow b_{1,1} = 0$, $b_{1,2} = 40$. Hinreichendes Kriterium führt zu:

- $b_{1,1}$ ist Minimum
- $b_{1,2}$ ist Maximum

Also $b_1^* = 40 = \frac{2}{3}x_1$. Die Wahrscheinlichkeit dass man mit diesem Gebot den Zuschlag erhält ist:

$$\mathbb{P}\Big(40 \geq \max\{B_1, B_2\}\Big) = \mathbb{P}\left(40 \geq B_{(1,2)}\right) \approx 30\%$$

Aufgabe 3

a) $X_1, \dots, X_n$: Private Signale der Bieter

Schaut man sich alle Signale aus der Sicher von Bieter i an, schreibt man:

$$X_{-i} = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} S_0 &\text{ privates Signal des Auktionators} \\ S_1, \dots, S_m &\text{ unbeobachtbare Signale} \end{aligned}$$

Sei nun

$$v_i(x_1, \dots, x_n, s_0, s_1, \dots, s_m)$$

mit $v_i \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ die Wertschätzung für das Gut von Bieter i und $x_1, \dots, x_n, s_0, s_1, \dots, s_m$ jeweils Realisierung der Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n, S_0, S_1, \dots, S_m$.

Der Informationsstand von Bieter $i \in N$ ist:

$$(X_1, \dots, X_{i-1}, x_i, X_{i+1}, \dots, X_n, S_0, S_1, \dots, S_m)$$

Betrachten wir nun die verschiedenen Arten der Gutwertschätzung, so vereinfacht sich die Wertschätzung auf:

- private value: $v_i(x_i, x_{-i}, s) = x_i$
- common value: $v_i(x_i, x_{-i}, s) = v_j(x_j, x_{-j}, s)$
- interdependent value: $v_i(x_i, x_{-i}, s) \neq v_j(x_j, x_{-j}, s)$

b) 1) PV

2) CV

3) CV

4) CV

5) IV, $x_i > x_j \Rightarrow v_i(x_i, x_{-i}, s) > v_j(x_j, x_{-j}, s)$

Aufgabe 4

Ausführliche Lösung im Skript Abschnitt 2.2.2

Aufgabe 5

Es gebe n risikoneutrale Bieter die (a priori) symmetrisch seien.

$$X_i \overset{uiv}{\sim} U[0,1], \quad v_i = x_i$$

a) **A1** Bieter sind risikoneutral

A2 Wertschätzungen sind unabhängige, private Informationen $v_i = x_i$

A3 Bieter sind symmetrisch

A4 Zuschlagspreis hängt nur von den Geboten ab

b) $[E]\left[u_i\left(\pi\left(x_i, b_i, B_{-i}\right)\right)\right] \longrightarrow \max_{b_i}, \quad u_i(\cdot) = id(\cdot)$

$$\pi = \begin{cases} x_i - b_i, & b_i > \max B_{-i} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}[\pi] &= (x_i - b_i)\mathbb{P}\left(\max B_{-i} < b_i\right) \\
&= (x_i - b_i)\mathbb{P}\left(X_{(1,n-1)} < x_i\right) \\
&= (x_i - b_i)F_{(1,n-1)}(x_i)
\end{aligned}
$$

c) $\beta^{SA}(x_i) = x_i - \frac{\int_0^{x_i} F^{n-1}(x)dx}{F^{n-1}(x_i)} \leq x_i$

Demnach betreibt ein Bieter, der sich seiner Stärke bewusst ist, höheres bid-shading.

$$
\begin{aligned}
\beta^{FA}(x_i) &= \mathbb{E}\left[X_{(2,n)}\middle| X_{(1,n)} = x_i\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{(1,n-1)}\middle| X_{(1,n-1)} \leq x_i\right]
\end{aligned}
$$

Im Speziellen gilt für $X \sim U[0,1]$:

$$
\beta^{FA}(x_i) = x_i - \frac{\frac{1}{n}x_i^n}{x_i^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i,
$$

also ist β^{FA} wachsend in n.

d) Behauptung: $\mathbb{E}\left[\beta^{FA}(X_{1,n})\right] = \mathbb{E}\left[X_{(2,n)}\right]$

Beweis:

$$
\mathbb{E}\left[X_{(2,n)}\right] = \frac{n-2+1}{n-1} = \frac{n-1}{n+1}
$$

$$
\mathbb{E}\left[\beta^{FA}(X_{1,n})\right] = \mathbb{E}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_{1,n}\right] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}
$$

$\square$

e) $\mathbb{E}[\pi_0] = \mathbb{E}\left[p\left(\beta^{FA}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\beta^{FA}\left(X_{1,n}\right)\right] \overset{s.o.}{=} \frac{n-1}{n+1}$

f) $\mathbb{E}[\pi_i] = \left(x_i - \beta^{FA}(x_i)\right)F_{(1,n-1)}(x_i) = \left(x_i - \frac{n-1}{n}x_i\right)x_i^{n-1} = \frac{1}{n}x_i^n$

Die Auktion ist effizient

$\iff$ Bieter mit höchster Wertschätzung bekommt den Zuschlag

Beachte dass die Effizienz erst einmal nichts damit zu tun hat, wer das höchste Gebot hat (abgesehen natürlich vom Zuschlag). Die Effizient ist in diesem Beispiel gesichert durch die monotone Bietfunktion.

g) Entscheidungskalkül (b):

$$\mathbb{E}\left[x_i - \max B_{-i} \middle| \max B_{-i} < b_i\right] \mathbb{P}\left(b_i > \max B_{-i}\right) \longrightarrow \max_{b_i}$$

Gleichgewichtsstrategie (c):

$$\beta_i^{SA}(x_i) = x_i$$

Verkaufserlös (e):

$$\mathbb{E}[\pi_0] = \mathbb{E}\left[p\left(\beta^{SA}\right)\right] = \mathbb{E}[X_{2,n}] = \mathbb{E}\left[p\left(\beta^{FA}\right)\right]$$

Erwartete Rente (f):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_i^{SA}] &= x_i - \mathbb{E}\left[X_{(2,n)} \middle| X_{(1,n)} = x_i\right] F_{(1,n-1)}(x_i) \\
&= x_i - x_i\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_i^{n-1} \\
&= \frac{1}{n} x_i^n
\end{aligned}$$

Standardaufgabe für Klausur!

3. Übung

Aufgabe 6

In Klausur sind 15 - 20 von 60 Punkten Multiple-Choice

a) Falsch. Gilt nur falls alle Signale gleich wären.

b) Falsch. Gilt nur in EA und SA.

c) Falsch. Gilt nur für den erwarteten Auktionserlös.

d) Wahr, da die Streuung der zweiten Ordnungsstatistik größer ist, als die der ersten.

e) Wahr aufgrund von Monotonie der Bietfunktion.

f) Der optimale Limitpreis in der FA steigt mit der Anzahl der an der Auktion teilnehmenden Bieter

   Beweis: Falsch, der optimale Limitpreis ist unabhängig von der Anzahl der Bieter. □

g) Wahr

h) Bei symmetrischen und risikoneutralen Bietern ist der optimale Limitpreis von der Auktionsform EA, DA, FA oder SA unabhängig.

   Beweis: Wahr; im einfachen IPV-Modell ist das für alle Auktionsformen identisch. □

i) Bei symmetrischen und risikoneutralen Bietern ist der optimale Limitpreis von der Anzahl der Bieter unabhängig.

Beweis: Wahr (Neuformulierung der anderen Frage). □

j) Bei symmetrischen und risikoneutralen Bietern ist der optimale Limitpreis von der Wertschätzung des Auktionators für das Gut unabhängig.

Beweis: Falsch; x_0 taucht in der Formel des optimalen Reservationspreises auf. □

k) Bei symmetrischen und risikoneutralen Bietern erzielt der Auktionator in jeder der vier Auktionsformen durch Setzen des optimalen Limitpreises einen Erlös, der nicht niedriger als in der unlimitierten Auktion ist.

Beweis: Falsch, wir betrachten nur den Erwarteten Erlös, der tatsächliche realisierte Preis kann in einzelnen Beobachtungen niedriger sein. □

l) Selbst bei symmetrischen und risikoneutralen Bietern kann das Setzen des optimalen Limitpreises in jeder der vier Auktionsformen zu einem ineffizienten Ergebnis führen.

Beweis: Wahr; wenn wegen $r^* - x_0$ das Gut nicht verkauft wird, also wegen dem Zuschlag des Reservationspreises, ergibt sich ein ineffizientes Ergebnis. □

m) Falsch.

n) Wahr.

o) Falsch. Symmetrie: gleiche Wertfunktion und gleiche Verteilung der Signale.

p) Das Revenue-Equivalence-Theorem (in Bezug auf ie vier Auktionsformen ohne Limitpreis) gilt auch im Falle von symmetrischen und risikoaversen Bietern.

Beweis: Falsch; □

q) Sind die Bieter risikoavers und symmetrisch (was dieselbe Nutzenfunktion für alle Bieter beinhaltet), dann stellt sich im symmetrischen Bayes-Gleichgewicht einer jeder der vier Auktionsformen ohne Limitpreis ein effizientes Ergebnis ein.

   Beweis: Wahr. In SA, EA ist weiterhin schwach-dominant, also ist die Frage ob bei DA, FA das auch gilt. Aber bei gleicher Risikoaversion, betreibt jeder gleichviel Bid-Shading, d.h. die Höchste Wertschätzung bietet immer noch am meisten - natürlich falls die Risikoaversion unterschiedlich ist, gilt das nicht mehr. □

r) Sind die Bieter risikofreudig und symmetrisch, dann kann der Auktionator in der FA ohne Limitpreis einen höheren Auktionserlös als in der SA ohne Limitpreis erwarten.

   Beweis: Falsch; □

s) Im IVP-Modell mit asymmetrischen Bietern stellt das Bayes-Nashgleichgewicht einer FA ein effizientes Auktionsergebnis sicher. (asymmetrische Bieter = unterschiedliche Verteilungen liegen zugrunde)

   Beweis: Falsch; □

Aufgabe 7

Ein Auktionator beabsichtigt ein Gut mittels einer Simultanen Zweitpreisauktion (SA) zu verkaufen, in der er einen Limitpreis $r > 0$ setzt. An der Auktion nehmen zwei risikoneutrale Bieter teil, für die der IPV-Ansatz gilt. Die Signale der Bieter entstammen aus der Gleichverteilung über dem Intervall $[0, 1]$, sind private Information und stimmen mit der Wertschätzung der Bieter für das Gut überein.

a) Welche Gefahr setzt sich der Versteigerer durch das Setzen einen positiven Limitpreis $r > 0$ aus?

Beweis: Unter Umständen wird der Auktionator das Gut nicht versteigern, nämlich im Fall dass der Reservationspreis über den beiden Wertschätzungen liegt. Dies passiert mit der Wahrscheinlichkeit (W'keit):

$$P(X_{(1,2)} \leq r) = F^2(r).$$

$\square$

b) Formulieren Sie den Optimierungsansatz zur Bestimmung des Limitpreis r^*, der den erwarteten Erlös des Versteigerers maximiert. Berechnen Sie r^* unter der Annahme, dass der Versteigerer dem Gut keinen Wert beimisst, d.h. $v_0 = 0$.

Beweis: Bei einer SA haben die Bieter eine schwach-dominante Strategie, nämlich ihre Wertschätzung zu bieten, falls $v_i > r$.

Fall	W'keit	Erwarteter Erlös
$x_{(1,2)} < r$	r^2	0
$x_{(1,2)} > r > x_{(2,2)}$	$2 \cdot r(1-r)$	$r - v_0$
$x_{(2,2)} > r$	$(1-r)^2$	$\mathbb{E}[X_{(2,2)} - v_0 \vert X_{(2,2)} > r] =$ [1] $r + \frac{1}{3}(1-r) = \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}$

Für unsere Aufgabe also für $v_0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\pi_0(\beta^{SA}(X), x_0, r)] &= r\,(2r(1-r)) + (1-r)^2 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + 3r^2 - 4r^2\right) \longrightarrow \max_r\end{aligned}$$

Aus der FOC folgt demnach:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[\pi_0]}{\partial r} = 2r - 4r^2 = 2r(1-2r) \overset{!}{=\!=} 0 \implies r_1 = 0, r_2 = \frac{1}{2}$$

[1] Wir wissen nämlich aus der 2. übung: $\mathbb{E}[X_{(k,n)}] = \frac{n-k+1}{n+1} \xRightarrow[n=2]{k=2} \mathbb{E}[X_{(2,2)}] = \frac{1}{3}$

Um aus diesen Extremwertstellen das Maximum zu finden, benutzten wir die SOC:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}[\pi_0]}{\partial r^2} = 2 - 8r \implies r^* = \frac{1}{2}$$

Nun wissen wir aus der Vorlesung:

$$r^* = x_0 + \underbrace{\frac{1}{\lambda(r^*)}}_{\lambda(r^*)=\frac{f(r^*)}{1-F(r^*)}} = x_0 + \frac{1-F(r^*)}{f(r^*)} \overset{A7)}{\Longrightarrow} r^* - \frac{1-r}{1} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow r^* = \frac{1}{2}$$

□

c) Bestimmen Sie den erwarteten Erlös des Versteigerers für den Fall, dass er einem Limitpreis in Höhe von r^* setzt. Zeigen Sie, dass dies zu einem höheren erwarteten Erlös des Versteigerers führt als als die klassische Zweitpreisauktion ohne Limitpreis.

Beweis: Wenn wir die beiden erwarteten Erlöse (mit und ohne Reservationspreis) vergleichen, erhalten wir:

- $\mathbb{E}[\pi_0(\beta^{SA}(X), x_0 = 0, r^* = \frac{1}{2}] = \ldots = \frac{5}{12}$ und
- $\mathbb{E}[\pi_0(\beta^{SA}(X), x_0 = 0, r^* = 0] = E[X_{(2,1)}] = \frac{1}{3}$,

da aber $\frac{1}{3} < \frac{5}{12}$, hat sich der Reservationspreis für den Auktionator gelohnt. □

Aufgabe 8

Ein Auktionator beabsichtigt ein Gut mittels einer Simultanen Erstpreisauktion (FA) zu verkaufen, in der er keinen Limitpreis setzt (r = 0). An der Auktion nehmen n risikoaverse Bieter teil, die alle dieselbe Nutzenfunktion besitzen. Für die Wertschätzungen der Bieter für das Gut gilt der IPV-Ansatz, wobei die Signale der Bieter aus der Gleichverteilung über dem Intervall $[0, 1]$ stammen und mit den Wertschätzungen übereinstimmen.

a) Worin besteht das Risiko eines Bieters in einer FA und auf welche Weise kann er dieses Risiko vermindern? Macht Ihre Argumentation für die FA auch für die Simultane Zweitpreisauktion (SA) Sinn?

Beweis: Das Risiko eines Bieters in der FA besteht darin, den Zuschlag nicht zu erhalten, obwohl das Zuschlagsgebot unter seiner Wertschätzung liegt. Reduktion dieses Risikos durch Erhöhung des Gebots im Vergleich zu einem risikoneutralen Bieter (= Risikoprämie).

In der SA besitzt jeder Bieter eine schwach dominante Strategie seine Wertschätzung zu bieten, d.h. die Argumentation macht hier keinen Sinn. □

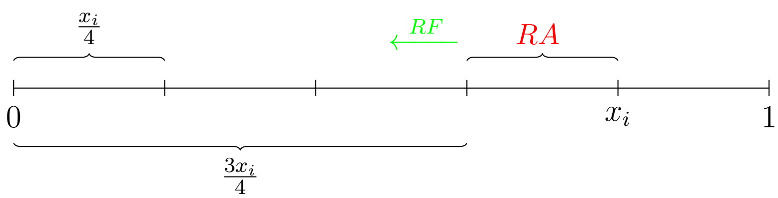
b) In welchem Intervall liegt das Gebot eines Bieters im symmetrischen Bayes-Gleichgewicht der FA?

Beweis:

- risikoneutraler Bieter:

$$\beta_{RN}^{FA}(x_i) = \frac{n-1}{n} \cdot x_i$$

Beispiel (für $n = 4$):



und es gilt:

$$\frac{n-1}{n} \cdot x_i = \beta_{RN}^{FA} < \beta_{RA}^{FA} < x_i$$

□

c) In welchem Intervall liegt der erwartete Verkaufserlös des Versteigerers im symmetrischen Bayes-Gleichgewicht der FA mit risikoaversen Bietern? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem entsprechenden erwarteten Verkaufserlös in einer SA.

Beweis:

$$\mathbb{E}\left[p\left(\beta_{RA}^{FA}\right)\right] \in \left(\frac{n-1}{n} \cdot \mathbb{E}\left[X_{(1,n)}\right], \mathbb{E}\left[x_{(1,n)}\right]\right)$$
$$\mathbb{E}\left[p(\beta_{RN,RA,RF}^{SA}\right] = \mathbb{E}\left[X_{(2,n)}\right],$$

d.h. mit risikoaversen Nutzern lohnt es sich die Erstpreisauktion durchzuführen, da der erwartete Erlös höher ist. □

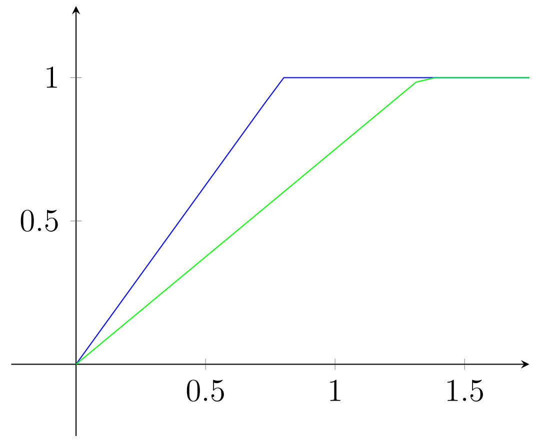
Aufgabe 9

An einer simultanen Erstpreisauktion (FA) nehmen zwei asymmetrische Bieter teil, wobei für die Verteilungen der Signale der beiden Bieter $X_i \sim U[0, \frac{4}{3}]$ bzw. $x_2 \sim U[0, \frac{4}{5}]$ gelte. Ansonsten gelten die Annahmen des IPV-Grundmodells.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Strategienkombination ein Bayes-Nash-Gleichgewicht dieser FA konstituiert *(detaillierte Lösung dieser Aufgabe ist im Skript auf Seite 44 & 45, Fabian hat sich hier kurz gehalten).*

$$\beta_1(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{x_1}\left(\sqrt{1+x_1^2}-1\right) & x_1 \neq 0 \\ 0 & x_1 = 0 \end{cases}$$
$$\beta_2(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_2}\left(1-\sqrt{1-x_2^2}\right) & x_2 \neq 0 \\ 0 & x_2 = 0 \end{cases}$$

Beweis: Wir wollen also überprüfen, ob das die gegenseitig beste Antwort ist.



$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{3}{8}4x, & x \in [0, \frac{4}{3}] \\ 1, & x > \frac{4}{3} \end{cases}, \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{5}{4}x, & x \in [0, \frac{4}{5}] \\ 1, & x > \frac{4}{5} \end{cases},$$

Damit gilt (Zeichnung der Bietfunktionen ist im Skript auf Seite 45):

- $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$
- $\beta(\frac{4}{3}) = \ldots = \frac{1}{2}$
- $\beta_2(\frac{4}{5}) = \ldots = \frac{1}{2}$

Nachrechnen: $\beta_1(\cdot), \beta_2(\cdot)$ sind streng monoton steigend, d.h. $\beta_1'(\cdot) > 0, \beta_2'(\cdot) > 0$.

$$\Rightarrow \beta_1^{-1}(b), \beta_2^{-1}(b) \text{ existieren und es gilt:}$$

$\beta_1^{-1}(b) = \frac{2b}{1-b^2}$, $\beta_2^{-1}(b) = \frac{2b}{1+b^2}$.

Wir wollen nun das Bayes-Nash-Gleichgewicht untersuchen:

Annahme: Bieter 2 wählt $\beta_2(\cdot) \longrightarrow$ Wie sollte Bieter 1 antworten?

Bieter 1:

$x_1 = 0 \Longrightarrow \beta_1(x_1) = 0$

$$\begin{aligned}
x_1 \neq 0\text{: } \max\nolimits_{b_1} \mathbb{E}\left[\pi_1\left(x_1, b_1, \beta_2(X_2)\right)\right] &= \max\nolimits_{b_1} \left(x_1 - b_1\right) \cdot \mathbb{P}\left(b_1 \geq \beta_2\left(x_2\right)\right) \\
&= \max_{b_1} \left(x_1 - b_1\right) \mathbb{P}\left(\beta_2^{-1}\left(\beta_1\right) \geq X_2\right) \\
&= \max_{b_1} \left(x_1 - b_1\right) F_2\left(\beta^{-1}\left(b_1\right)\right) \\
&= \max_{b_1} \left(x_1 - b_1\right) \frac{5}{4} \beta_2^{-1}\left(b_1\right) \\
&= \max_{b_1} \frac{5}{4} \cdot \frac{2b_1}{1+b_1^2} \cdot \left(x_1 - b_1\right) \\
&= \max_{b_1} \left(x_1 - b_1\right) \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{b_1}{1+b_1^2}
\end{aligned}$$

FOC: $\frac{\partial \mathbb{E}[\pi_1]}{\partial b_1} = \ldots \overset{!}{=} 0$

$$\Longrightarrow b_1 = \left\{ \frac{1+\sqrt{1+x_1^2}}{-x_1}, \frac{\sqrt{1+x_1^2}}{x_1} \right\}, \quad \Longrightarrow b_1 = \frac{\sqrt{1+x_1^2}-1}{x_1}$$

$\square$

b) Zeigen Sie, dass das obige Gleichgewicht ineffiziente Auktionsergebnisse ermöglicht.

Beweis: Wir zeigen an einem Beispiel, dass das Auktionsergebnis durchaus ineffizient sein kann:

Wir wollen also überprüfen, ob die Funktion die in der Aufgabe gegeben ist, die gegenseitig beste Antwort ist. Für eine Zeichnung siehe Abbildung 2.4 auf Seite 45 im Skript.

Wir haben $\beta_1(1) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$ und $\beta_2(\frac{4}{3}) = \frac{1}{2}$ und damit ist das Ergebnis ineffizient, da obwohl Bieter 1 hatte die höhere Wertschätzung Bieter 2 allerdings das höhere Gebot und damit den Zuschlag $\square$

4. & 5. Übung

Aufgabe 10

a) Im CV-Modell hat das Gut für alle Bieter den gleichen (ex-ante) unbekannten Wert. Modelltechnische Umsetzung im Skript.

b) Effizienz bedeutet, dass der Bieter mit der höchsten Wertschätzung das Gut erhält. Da aber im CV-Modell der Wert des Gutes für alle Bieter gleich ist, ist jedes

Auktionsergebnis effizient (außer wenn alle Bieter eine niedriges Gebot abgeben, als die Wertschätzung des Gutes)

c) Der Fluch des Gewinners ist ein Phänomen, das häufig bei Gütern mit hoher CV-Komponente zu beobachten ist, bei dem der Gewinner der Auktion mehr für das Gut zahlt, als es wert ist. Grund ist, dass in der Regel der Bieter den Zuschlag erhält, der den Wert des Gutes am meisten überschätzt hat.
Rationale Bieter berücksichtigen genau dies bei ihrem Gebot.

Aufgabe 11

Die Rahmenbedingungen: SA, $n = 2$, Signale x_1, x_2, CV-Gut: $v = x_1 + x_2$, F mit f - wobei $x_i \in [0, 100]$ für $i \in \{1, 2\}$. Annahme: die Bietfunktion sind monoton.

a) Symmetrisches Bayes-Nash-Gleichgewicht:

$$\mathbb{E}[\pi_1 (x_1, X_2, b_1, \beta_2(X_2))] \longrightarrow \max_{b_1}$$

$$= \int_0^{\beta_2^{-1}(b_1)} ((x_1 + X_2) - \beta (X_2)) f(X_2) dx_2$$

mit FOC folgt: $\beta^{SA}(x_i) = w(x_i, x_i i)v(x_i, x_i) = 2x_i$.

b) Gegenbeispiel: $x_1 = 0 \to b_1 = 70$, $x_2 = 50 \to \beta^{SA}(x_2) = 2x_2 = 100$.

$$\Rightarrow v = 50$$

$\Rightarrow p = 70 \Rightarrow \pi_2 = 50 - 70 = -20 \Rightarrow$ keine dominante Strategie, durch verringern des Gebots unter 70 wird der Verlust verringert.

c)
- ex-ante: kein Winner's Curse, da $b_i = 2x_i$
- ex-post:

– $n = 2$: $v = x_{(1)} + x_{(2)}$ (höheres + niedrigeres Signal)

$$\left.\begin{aligned} b_{(1)} &= \beta^{SA}(x_{(1)}) = 2x_{(1)} \\ b_{(2)} &= \beta^{SA}(x_{(2)}) = 2x_{(1)} \end{aligned}\right\} p = 2x_{(2)} < v$$

– $n \geq 3$: $v = x_{(1)} + x_{(2)} + x_{(3)}$

$$p = b_{(2)} = w\left(x_{(2)}, x_{(2)}\right) = 2x_{(2)} = 2x_{(2)} + \mathbb{E}\left[X_{(3)} \middle| X_{(2)} = x_{(2)}\right] > V$$

Aufgabe 12

$n = 4$, Signale x_i, $x_1 = 30000$,$v = v_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

$$\beta^{EA}(x) : \left(\underbrace{\beta_4^{EA}(x)}_{\text{falls noch 4 Bieter}}, \beta_2^{EA}(x), \underbrace{\beta_2^{EA}(x)}_{\text{falls nur noch 2 Bieter}} \right)$$

$p_{(4)}$ - erster Ausstiegszeitpunkt

$p_{(3)}$ - zweiter Ausstiegszeitpunkt

$p_{(2)}$ - dritter Ausstiegszeitpunkt

Wenn man die erwartete Rente maximiert erhält man für alle Bieter die gleiche Bietstrategie:

$$\beta_4^{EA}(x_i) = v_i(x_i, x_i, x_i, x_i) = 4x_i$$

$p_{(4)} = \beta_4(x_{(4)}) = 4x_{(4)}$. Wir wissen damit: $x_{(4)} = \frac{p_{(4)}}{4}$. Damit gilt:

$$\beta_4^{EA}(x_i) = v_i(x_i, x_i, x_i, x_{(4)}) = 3x_i + x_{(4)} < 4x_i$$

$p_{(3)} = \beta_3(x_{(3)}) = 3x_3 + x_4 \Rightarrow x_{(3)} = \frac{p_{(3)} - x_{(4)}}{3}$

$$\beta_2^{EA}(x) = v(x_i, x_i, x_{(3)}, x_{(4)}) = 2x_i + x_{(3)} + x_{(4)}$$

$p = 2x_{(2)} + x_{(3)} + x_{(4)}$.

$$\beta_1^{EA}(x_i) = \left(120000, 90000 + x_{(4)}, 60000 + x_{(3)} + x_{(4)}\right)$$

6. Übung

Aufgabe 13

a) (i) Um welche Art von Gut hinsichtlich der Wertschätzungen der Bieter handelt es sich hierbei?

Beweis: Es handelt sich um ein IV-Gut. Es ist kein CV-Gut, da die Wertschätzung der Bieter unterschiedlich sein könnte, z.B. $x_{(1)} > x_{(2)} > x_{(3)} \Rightarrow v_{(1)} > v_{(2)} > v_{(3)}$ □

(ii) Sind die Bieter (a priori) symmetrisch?

Beweis: Die Bieter sind a priori symmetrisch:

- gleiche Verteilung für Signale
- gleiche Wertfunktion

□

(iii) Geben Sie den erwarteten Wert des Gutes für einen repräsentativen Bieter i mit dem Signal $x_i \in [0, 1]$ an.

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[V_i \middle| X_i\right] &= x_i + \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[X_j\right] + \mathbb{E}\left[X_k\right]\right) \\ &= x_i + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

b) Die Auktion wird als Zweitpreisauktion (SA) ohne Limitpreis durchgeführt. Geben Sie die Bietfunktion eines repräsentativen Bieters im symmetrischen Gleichgewicht explizit an, und bestimmen Sie den erwarteten Auktionserlös, der sich im

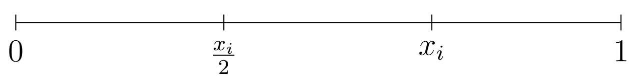
Gleichgewicht ergibt.

überprüfen Sie, ob der Fluch des Gewinners ex post auftreten kann. Begründen Sie Ihre Antwort!

Beweis: (i) SA:

$$\beta^{SA}(x_i) = w(x_i, x_i) = x_i + \frac{1}{2}\Big(x_i + \mathbb{E}\Big[X_{(4)}\Big| \underbrace{X_{(2)} = x_i}_{\substack{\textit{preisbestimmendes}\\ \textit{Signal}}}\Big]\Big)$$

$$X_{(2)} = x_i$$

Grafisch: 

;

Damit folgt:

$$\beta^{SA}(x_i) = x_i + \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{x_i}{2}\right) = \frac{7}{4}x_i$$

(ii) $\mathbb{E}\left[p^{SA}\right] = \mathbb{E}\left[\beta^{SA}\left(X_{(2,3)}\right)\right] = \frac{7}{4} \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(X_{(2,3)}\right)\right]}_{\substack{\text{mit}\\ \mathbb{E}\left[X_{(k,n)}\right] = \frac{n-k+1}{n+1}}} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

(iii) Als Beispiel für den Winners-Curse: $x_1 = 0.9$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 0$

$$\Rightarrow v_1 = 0.9 + \frac{1}{2}(0.8 + 0) = 1.3$$

Allerdings ist das zu zahlende Gebot, das Gebot von $i = 2$ und das lautet:

$$b_2 = \beta^{SA}(x_2) = 0.8 + \frac{1}{2}(0.8 + 0.4) = 1.4,$$

und damit ist $v_1 < p$ also der winners-curse tritt auf.

□

c) (i) EA: $\beta^{EA}(x_i) = \left(\beta_3^{EA}(x_i), \beta_2^{EA}(x_i)\right)$

$$x_{(1)} > x_{(2)} > x_{(3)}$$

- $\beta_3^{EA}(x_i) = v(x_i, x_i, x_i) = x_i + \frac{1}{2}(x_i + x_i) = 2x_i$

$$\Rightarrow \text{Ausstiegszeitpunkt von} x_{(3)}: \; p_3 = 2 \cdot x_{(3)} \Rightarrow x_{(3)} = \frac{p_3}{2}$$

- $\beta_2^{EA}(x_i) = v_i\left(x_i, x_i, x_{(3)}\right) \frac{3}{2}x_i + \frac{1}{2}x_{(3)} < 2x_i$
- Zuschlagspreis: $p = \frac{3}{2}x_{(2)} + \frac{1}{2}x_{(3)} = \beta_{(2)}^{EA}(x_i)$

$\Rightarrow \beta^{EA}(x_i) = \left(2x_i, \frac{3}{2}x_i + \frac{1}{4}p_3\right)$

(ii) $\mathbb{E}\left[p^{EA}\right] = \mathbb{E}\left[\beta_2\left(X_{(2,3)}\right)\right] = \frac{3}{2}\underbrace{[E]\left[X_{(2,3)}\right]}_{=\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\underbrace{[E]\left[X_{(3,3)}\right]}_{=\frac{1}{4}} = \frac{7}{8}$

(iii) Bieter (1) gewinnt die Auktion

$$\begin{aligned}\pi_{(1)} &= v_{(1)} - p \\ &= x_{(1)} + \frac{1}{2}\left(x_{(2)} + x_{(3)}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{2}\left(x_{(2)} + x_{(3)}\right)\right) \\ &= x_{(1)} - x_{(2)} \geq 0\end{aligned}$$

d) Sind die Gleichgewichte aus den Teilaufgaben b) und c) Gleichgewichte in dominanten Strategien? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen formalen Beweis führen oder ein geeignetes Gegenbeispiel angeben.

Beweis: • SA: da der winners-curse ex-post auftreten kann, kann die ermittelte Strategie keine dominante Strategie sein.

- EA: $x_1 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 \in (0, 1)$. Wir wissen:

$$v_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_1.$$

falls Bieter 3 sein Signal mit x_3' übertreibt, wobei $x_3 < x_3' < x_2$. Wir wissen, dass der Zuschlagspreis lautet:

$$v_1 < p \iff 1 + \frac{1}{2}x_2 < \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3' \iff 1 < x_2 + \frac{1}{2}x_3'$$

Wobei $x_2 = \frac{5}{6}$, $x'_3 = \frac{2}{3}$ diese Ungleichung erfüllen und daraus folgt $p = \frac{19}{12}$ und $v_1 = \frac{17}{12}$.

$\square$

Aufgabe 14

Es gebe n Bieter und $X_i \overset{iid}{\sim} [4, 7]$.

a) IV-Gut

b)

- Bieter: $\mathbb{E}[V_i \big| X_i = x_i] = 2x_i + (n-1)x_i = (n+1)x_i$
- Außenstehenden: $\mathbb{E}[V_i] = v(X_i, x_{-i}) = 2 \cdot 5.5 + (n-1) \cdot 5.5 = (n+1) \cdot 5.5$

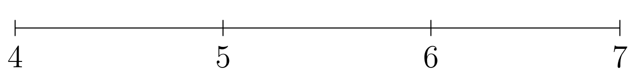
c)

- SA: $\beta^{SA}(x_i) = w(x_i, x_i)$ Für $n = 2$:

$$\beta^{SA}(x_i) = 2x_i + x_i = 3x_i$$

Den erwarteten Auktionserlös erhalten wir dann wieder über

$$\mathbb{E}\left[p^{SA}\right] = \mathbb{E}\left[\beta^{SA}(X_{(2,2)})\right] = 3\mathbb{E}\left[X_{(2,2)}\right] = 3 \cdot 5 = 15$$



$$\frac{n-k+1}{n+1} \cdot \text{ Breite } + \text{ untere Intervallgrenze}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_{(1)}] &= \mathbb{E}[v_{(1)} - p] \\
&= \mathbb{E}[v_{(1)}] - \mathbb{E}[p] \\
&= \mathbb{E}[2 \cdot X_{(1,2)} + X_{(2,2)}] - 3 \cdot \mathbb{E}[X_{(2,)}] \\
&\ \ \vdots \\
&= 2 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 2
\end{aligned}
$$

- Ex-post winners-curse?

$$\pi_{(1)} = v_{(1)} - b_{(2)} = \left[2x_{(1)} + x_{(2)}\right] - 3x_{(2)} > 0$$

d) EA, $n = 4$

$$x_1 = 4 = x_{(3)},\ x_2 = 6 = x_{(2)},\ x_{(3)} = 7 = x_{(1)},\ x_4 = 4 = x_{(4)}$$

Damit folgt für $\beta^{EA}(x_i)$:

$$\beta_4^{EA}(x_i) = 2x_i + 3x_i = 5x_i \begin{cases} \beta^{EA}(x_1) = 5 \cdot 5 = 25 \\ \beta^{EA}(x_2) = 5 \cdot 6 = 30 \\ \beta^{EA}(x_3) = 5 \cdot 7 = 35 \\ \beta^{EA}(x_4) = 5 \cdot 4 = 20 \end{cases}$$

$p_4 = (n+1)x_{(4)} \Rightarrow x_{(4)} = 4.$

$$\beta_3^{EA}(x_i) = 2x_i + 2x_i + x_{(4)}$$

$p_3 = 4 \cdot x_{(3)} + x_{(4)} \Rightarrow x_{(3)} = 5$

$$\beta_2^{EA}(x_i) = 2x_i + x_i + x_{(3)} + x_{(4)}$$

$p = \underbrace{3x_{(2)}}_{=3 \cdot 6} + \underbrace{x_{(3)}}_{=5} + \underbrace{x_{(4)}}_{=4} = 27 = p$

$$v_{(1)} = 29, \quad \pi_{(1)} = 28 - 27 = 2$$

7. Übung

Aufgabe 15

a) Welcher zusätzlicher Faktor spielt in Mehrgüterauktionen für die Bewertung der Güter durch die Bieter eine entscheidende Rolle?

Beweis: Die Wertschätzung eines Bieters hängt davon ab, welche und wie viele Güter der Bieter bekommt. □

b) Erklären Sie die Begriffspaare *homogen - heterogen* und *komplementär - substitutiv*, mit denen Güter in Mehrgutauktionen klassifiziert werden, und geben Sie für jede Kombination ein Beispiel aus der Praxis an.

Beweis:

- homogen - heterogen: bedeutet gleichartige und unterschiedliche Güter
- substitutive - komplementär: **bezieht sich auf die Wertschätzung und nicht die Güter an sich!**

$$v(A \wedge B) > v(A) + v(B) \text{ komplementär / superadditiv}$$
$$v(A \wedge B) \leq v(A) + v(B) \text{ substitutiv / subadditiv}$$

- Beispiele:

	homogen	heterogen
substitutiv	Schuhpaare	linke und rechte Schuhe oder Handys
komplementär	Aktien	Start- und Landeberechtigung für versch. Flughäfen

□

c) Erklären Sie intuitiv aus Sicht der Bieter die Problematik des Bietens auf Komplemente bzw. Substitute.

Beweis:

- Komplemente: man weiß nicht, ob man alle benötigten Güter bekommt ⇒ **Exposure**-Problem
- Substitute: vielmehr ein Problem für den Auktionator (strategische Mengenreduktion, vgl. Vorlesung: verringere Nachfrage um Preise zu reduzieren)

□

Aufgabe 16

a) Erläutern und klassifizieren Sie die in der Vorlesung vorgestellten Auktionsformen für Mehrgüterauktionen.

Beweis:

- sequentielle Auktion - d.h. hintereinander veranstaltete Eingutauktionen
- Simultane Mehrgüterauktionen - davon kennen wir drei Typen:
  - Vickrey-Auktion
  - Pay-As-Bid oder Preisdiskriminierende Auktion
  - Einheitspreisauktion (Uniform Pricing, pay-as-clear)
    - LAB
    - HRB
- GVA
- Simultane Mehrrundenauktion

□

b) Welche Auktionsformen aus Teilaufgabe a) sind für heterogene bzw. homogene Güter geeignet?

Beweis:

- sequentielle Auktion: für beide Arten, also heterogene und homogene Güter
- Simultane Mehrgüterauktionen: nur für homogene Güter
  - Vickrey-Auktion
  - Pay-As-Bid oder Preisdiskriminierende Auktion
  - Einheitspreisauktion (Uniform Pricing, pay-as-clear)
    - LAB
    - HRB
- GVA: für beide Arten, also heterogene und homogene Güter
- Simultane Mehrrundenauktion: für beide Arten, heterogene u. homogene Güter

□

Aufgabe 17

Drei Bieter nehmen an einer simultanen Mehrgüterauktion teil, in der fünf homogene Güter versteigert werden. Die Gebotsvektoren der Bieter lauten:

$$
\begin{aligned}
b^1 &= (22, 16, 15, 11, 11)\,,\\
b^2 &= (32, 28, 19, 10, 9)\,,\\
b^3 &= (31, 12, 8, 8, 8)\,,
\end{aligned}
$$

Geben Sie für die preisdiskriminierende Auktion, die Vickrey-Auktion sowie die Einheitspreisauktion (beide gebräuchlichen Preisregeln) an, wie die Güter unter den Bietern verteilt werden und welche Zuschlagspreise sich dabei einstellen.

Beweis: Angebot: 5 EH. Zuschläge: Bieter 1: 1EH, Bieter 2: 3 EH, Bieter 3: 1 EH

	Preisdiskriminierend	Erstpreisauktion LAB $(p = 19)$	Erstpreisauktion HRB $(p = 16)$	Vickrey
B_1	22	19	16	12
B_2	$32 + 28 + 19 = 79$	$3 \cdot 19$	$3 \cdot 16$	$16 + 15 + 12 = 43$
B_3	31	19	16	16
Auktionserlös	132	95	80	71

Allgemein kann man diesen fallenden Preiserlös nicht feststellen. Allgemein würden Bieter bei einer preisdiskriminierenden Auktion mehr bid-shading betrieben. □

Aufgabe 18

Es gilt: n Bieter mit „single-unit-demand“, k Güter mit $n > k$.

a) Wie lautetet das Ergebnis der sequentiellen Auktion, wenn sich die Bieter bei der Versteigerung einer jeden Flasche an die Gleichgewichtsstrategie der Englischen Eingutauktion halten? (Inkremente können dabei vernachlässigt werden).

   Beweis: Es ist $\beta^{EA}(x_i) = x_i$, d.h. „mitbieten bis zur eigenen Wertschätzung“ - was eine schwach dominante Strategie darstellt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \beta^{EA}\left(X_{(2,n)}\right) = X_{(2,n)} \\
p_2 &= \beta^{EA}\left(X_{(3,n)}\right) = X_{(3,n)} \left(= X_{(2,n-1)}\right) \\
&\vdots \\
p_k &= \beta^{EA}\left(X_{(k+1,n)}\right) = X_{(k+2,n)}
\end{aligned}$$

wobei gilt $X_{(2,n)} > \ldots > X_{(k+2,n)}$. □

b) Ist das Ergebnis aus Teilaufgabe a) effizient?

Beweis: Ja! □

c) überprüfen Sie, ob das Bietverhalten aus Teilaufgabe a) dominante Strategie in der sequentiellen Auktion ist und ob es mit Annahme rationaler Bieter vereinbar ist.

Beweis:

- „Bis man eine Flasche Wein hat, bietet man seine wahre Wertschätzung“ ist keine dominante Strategie!
- Bietstrategie induziert zudem kein symmetrisches Gleichgewicht mehr!

□

Bei dieser Auktionsform könnten die ersten Bieter realisieren, dass sie auch den Erwartungswert von $X_{(k+2,n)}$ bieten würden.

Index