Aufgabe 11

An einer Zweitpreisauktion nehmen zwei (a priori) symmetrische und risikoneutrale Bieter teil. Versteigert wird der Geldbetrag, der sich als Summe des Bargelds in den beiden Geldbeuteln der Bieter ergibt, wobei aber jeder Bieter nur den Inhalt des eigenen Geldbeutels kennt. Jedoch sei allgemein bekannt, dass beide Geldbeutel einen Geldbetrag zwischen 0 und 100 Euro enthalten.

a) Bestimmen Sie das symmetrische Bayes-Nash-Gleichgewicht der obigen Auktion.

Beweis: Unter der Annahme von Monotonie der Bietfunktion gilt für den erwarteten Erlös:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\pi_i] &= \mathbb{E}\Big[\,(x_i + X_j) - \beta(X_j)\Big] \cdot \mathbb{1}_{x_i > x_j} \\ &= \int_0^{x_i} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(s)ds \\ &= \int_0^{\beta^{-1}(b_i)} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(s)ds,\end{aligned}$$

wobei wir davon ausgehen, dass sowohl Spieler i als auch j dieselbe Bietfunktion β aufgrund der Symmetriebedingung verwenden. Außerdem ist die obere Integralgrenze durch $\beta^{-1}(b_i)$ gegeben, für $X_j > x_i$ Bieter j den Zuschlag bekommt und damit für i die Rente identisch 0 ist.

Im Bayes-Nash-Gleichgewicht darf das Abweichen von der Bietstrategie den Spieler nicht besser stellen, d.h. die erwartete Rente muss unter β maximal sein. Die F.O.C.

lautet daher:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbb{E}[\pi_i] &= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\int_0^{\beta^{-1}(b_i)} ((x_i+s)-\beta(s))\cdot f_{X_j}(s)ds\right)\\
&\overset{Leibnitz}{\underset{Regel}{=}} \frac{\partial}{\partial\beta}\Bigg(\bigg(\Big(\Big(x_i+\beta^{-1}(b_i)\Big)-\beta(\beta^{-1}(b_i))\Big)\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\bigg)\\
&\qquad\qquad -\bigg(\Big(\Big(x_i+\beta^{-1}(0)\Big)-\beta(\beta^{-1}(0))\Big)\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(0))\bigg)\Bigg)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\Bigg(\bigg(\Big(\Big(x_i+\beta^{-1}(b_i)\Big)-b_i\Big)\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\bigg)-\bigg(\Big(\Big(x_i+0\Big)-0\Big)\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(0))\bigg)\Bigg)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg(\Big(\Big(x_i+\beta^{-1}(b_i)\Big)-b_i\Big)\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))-x_i\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(0))\bigg)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg((2\cdot x_i-b_i)\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))-x_i\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(0))\bigg)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg((2\cdot x_i-b_i)\cdot f_{X_j}\Big(\beta^{-1}(b_i)\Big)\bigg)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg(\Big(2\cdot x_i-\beta(x_i)\Big)\cdot f_{X_j}\Big(\beta^{-1}(b_i)\Big)\bigg)\overset{!}{=}0
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die mögliche optimale Bietstrategie zwei Möglichkeiten:

- $\beta(x_i)=2\cdot x_i$. Für die S.O.C, um zwischen einem Maximum oder Minimum zu unterscheiden, ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\mathbb{E}[\pi_i] &= \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg(\Big(2\cdot x_i-\beta(x_i)\Big)\cdot f'_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\Big(\beta^{-1}(b_i)\Big)'-f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\bigg)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg(\Big(2\cdot x_i-\beta(x_i)\Big)\cdot f'_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\frac{1}{x_i}\bigg)-f'_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\frac{1}{x_i}\\
&= \bigg(\underbrace{\Big(2\cdot x_i-\beta(x_i)\Big)}_{=0}\cdot f''_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\frac{1}{x_i^2}\bigg)-2\cdot f'_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\frac{1}{x_i}\\
&= -\frac{2}{x_i}\cdot f'_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))\ <\ 0
\end{aligned}
$$

Demnach liefert $\beta(x_i)=2\cdot x_i$ ein (lokales) Maximum im erwarteten Gewinn und ist damit die optimale Bietstrategie.

- oder die Lösung der F.O.C.:

$$\begin{aligned} f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i)) &= \Big(2 \cdot x_i - \beta(x_i)\Big) \cdot f'_{X_j}(\beta^{-1}(b_i)) \left(\beta^{-1}(b_i)\right)' \\ \iff f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i)) \cdot x_i &= \Big(2 \cdot x_i - \beta(x_i)\Big) \cdot f'_{X_j}(\beta^{-1}(b_i)) \\ \iff \beta(x_i) &= 2 \cdot x_i - \frac{f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i)) \cdot x_i}{f'_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))} \end{aligned}$$

  Müsste man nicht bei dieser Lösung überprüfen, ob es sich um ein Maximum handelt und falls ja, ob die erwartete Rente höher ist als bei $\beta(x_i) = 2 \cdot x_i$?

□

b) Ist dieses Gleichgewicht ein Gleichgewicht in dominanten Strategien?

Beweis: Nein, denn ist $x_j > x_i$, und bietet j zum Beispiel $2x_i$, so lohnt es sich für i sein Gebot um maximal $x_j - x_i$ zu erhöhen, um den Zuschlag zu erhalten und damit seinen Gewinn zu erhöhen. □

c) Analysieren Sie, ob der Fluch des Gewinners im Gleichgewicht (ex ante und ex post) auftreten kann.

Beweis: Ex ante kann der Fluch des Gewinners nicht auftreten, da β gewählt mit der Antizipation des Fluch des Gewinners. Ex post kann dieser Effekt allerdings im Gleichgewicht auch nicht auftreten, denn

$$\beta(x_i) > \beta(x_j) \iff x_i > x_j.$$

Für den zu ersteigernden Geldbetrag gilt damit:

$$x_i + x_j > 2 \cdot x_j = \beta(x_j) = \rho(X_i).$$

$\Rightarrow \pi = x_i + x_j - rho(X_i) > 0$. Argumentativ: Zuschlag erhält derjenige mit dem höheren Anteil im Geldtopf den Zuschlag und zahlt nur zwei mal den kleineren Betrag, falls ein Bieter also den Zuschlag erhält, wird er immer Gewinn einstreichen.

$\square$

Aufgabe 12

Stellen Sie sich vor, Sie möchten einen Waldbesitz erwerben, der im Rahmen einer Auktion versteigert wird. An der Auktion nehmen insgesamt vier Bieter teil. Der Wert des Waldes ist durch den Holzbestand des Waldes genau gegeben. Dabei ist Ihnen, ebenso wie den anderen Bietern, der genaue Wert zunächst nicht bekannt. Der Wert kann jedoch durch eine Erhebung des Baumbestandes (Anzahl, Größe, Alter, usw.) exakt bestimmt werden. Der tatsächliche Wert ist außerdem für alle Bieter gleich.

Im Vorfeld der Auktion ermitteln Sie nun den exakten Wert von genau einem Viertel der Waldfläche. Auch die anderen Bieter ermitteln jeweils den Wert eines Viertels des Waldes. Dabei gibt es keine Überschneidungen der untersuchten Waldflächen. Außerdem können die einzelnen Erhebungen als unabhängige Wertsignale aufgefasst werden. Die von Ihnen untersuchte Waldfläche hat einen Wert von 30.000,- Euro. Zur Auktion versammelt der Auktionator alle Bieter in einem Raum und die Auktion beginnt mit einem Startpreis on 0 Euro, der kontinuierlich erhöht und für alle Bieter sichtbar im Raum angezeigt wird. Will ein Bieter aus der Auktion aussteigen, verlässt er den Raum, was von allen anderen Bietern beobachtet werden kann. Die Auktion endet, wenn der vorletzte Bieter den Raum verlässt. Der letzte verbleibende Bieter erhält dann den Zuschlag zum aktuell angezeigten Preis.

Geben Sie Ihre Bietstrategie im Gleichgewicht an.