Aufgabe 11

An einer Zweitpreisauktion nehmen zwei (a priori) symmetrische und risikoneutrale Bieter teil. Versteigert wird der Geldbetrag, der sich als Summe des Bargelds in den beiden Geldbeuteln der Bieter ergibt, wobei aber jeder Bieter nur den Inhalt des eigenen Geldbeutels kennt. Jedoch sei allgemein bekannt, dass beide Geldbeutel einen Geldbetrag zwischen 0 und 100 Euro enthalten.

a) Bestimmen Sie das symmetrische Bayes-Nash-Gleichgewicht der obigen Auktion.

   Beweis: Unter der Annahme von Monotonie der Bietfunktion gilt für den erwarteten Erlös:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\pi_i] &= \mathbb{E}\Big[\,(x_i + X_j) - \beta(X_j)\Big] \cdot \mathbb{1}_{x_i > x_j} \\
&= \int_0^{x_i} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(s)ds \\
&= \int_0^{\beta^{-1}(b_i)} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(s)ds,
\end{aligned}$$

   wobei wir davon ausgehen, dass sowohl Spieler i als auch j dieselbe Bietfunktion β aufgrund der Symmetriebedingung verwenden. Außerdem ist die obere Integralgrenze durch $\beta^{-1}(b_i)$ gegeben, da für $X_j > x_i$ Bieter j den Zuschlag bekommt und damit für Bieter i die Rente identisch 0 ist.

   Im Bayes-Nash-Gleichgewicht darf das einseitige Abweichen von der Bietstrategie den Spieler nicht besser stellen, d.h. die erwartete Rente muss unter β maximal sein.

Die F.O.C. lautet daher:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbb{E}[\pi_i] &= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\int_0^{\beta^{-1}(b_i)}((x_i+s)-\beta(s))\cdot f(s|X_i=x_i)ds\right)\\
&\overset{Leibnitz}{\underset{Regel}{=}} \frac{\partial}{\partial\beta}\Bigg(\bigg(\Big(\Big(x_i+\beta^{-1}(b_i)\Big)-\beta(\beta^{-1}(b_i))\Big)\cdot f(\beta^{-1}(b_i)|X_i=x_i)\bigg)\\
&\qquad -\bigg(\Big(\Big(x_i+\beta^{-1}(0)\Big)-\beta(\beta^{-1}(0))\Big)\cdot f(\beta^{-1}(0)|X_i=x_i)\bigg)\Bigg)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg(\Big(\Big(x_i+\beta^{-1}(b_i)\Big)-b_i\Big)\cdot f(\beta^{-1}(b_i)|X_i=x_i)-x_i\cdot f(\beta^{-1}(0)|X_i=x_i)\bigg)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\Big((2\cdot x_i-b_i)\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(b_i))-x_i\cdot f_{X_j}(\beta^{-1}(0))\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\Big((2\cdot x_i-b_i)\cdot f\Big(\beta^{-1}(b_i)|X_i=x_i\Big)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\Big(2\cdot x_i-\beta(x_i)\Big)\cdot f\Big(\beta^{-1}(b_i)|X_i=x_i\Big)\Big)\\
&= \Big(\beta^{-1}(b_i)\Big)'\Big(2\cdot x_i-\beta(x_i)\Big)\cdot f\Big(\beta^{-1}(b_i)|X_i\Big)\overset{!}{=}0
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die mögliche optimale Bietstrategie:

$$0=\frac{1}{\beta'(b_i)}\Big(2\cdot x_i-\beta(x_i)\Big)\cdot f\Big(\beta^{-1}(b_i)|X_i\Big)$$

$$\iff \beta(x_i)=2\cdot x_i=\mathbb{E}\Big[v(X,Y)\Big|X=x,Y=x\Big]$$

□

b) Ist dieses Gleichgewicht ein Gleichgewicht in dominanten Strategien?

Beweis: Nein, denn ist $x_j > x_i$, und bietet j zum Beispiel $2x_i$, so lohnt es sich für i sein Gebot um maximal $x_j - x_i$ zu erhöhen, um den Zuschlag zu erhalten und damit seinen Gewinn zu erhöhen. □

c) Analysieren Sie, ob der Fluch des Gewinners im Gleichgewicht (ex ante und ex post) auftreten kann.

Beweis: Ex ante kann der Fluch des Gewinners nicht auftreten, da β gewählt mit der Antizipation des Fluch des Gewinners. Ex post kann dieser Effekt allerdings im Gleichgewicht auch nicht auftreten, denn

$$\beta(x_i) > \beta(x_j) \iff x_i > x_j.$$

Für den zu ersteigernden Geldbetrag gilt damit:

$$x_i + x_j > 2 \cdot x_j = \beta(x_j) = \rho(X_i).$$

$\Rightarrow \pi = x_i + x_j - \rho(X_i) > 0$. Argumentativ: Zuschlag erhält derjenige mit dem höheren Anteil im Geldtopf den Zuschlag und zahlt nur zwei mal den kleineren Betrag, falls ein Bieter also den Zuschlag erhält, wird er immer Gewinn einstreichen. $\square$