Aufgabe 5

Ein Versteigerer möchte mit Hilfe einer Auktion ein Gut veräußern. An der Auktion nehmen n risikoneutrale und (a priori) symmetrische Bieter teil. Die Signale der Bieter für den Wert des Gutes können als n unabhängige Realisationen einer im Intervall $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen X aufgefasst werden. Die Wertschätzungen aller Bieter entsprechen ihren Signalen. Dies ist alles Allgemeinwissen.

b) Wie lautet das Entscheidungskalkül von Bieter i mit dem Signal $x_i \in [0,1]$, wenn der Versteigerer eine Simultane Erstpreisauktion (FA) durchführt, in der er keinen Limitpreis für das Gut setzt ($r = 0$)?

Beweis:

$$\begin{aligned}\max \pi_i &= \max\left((v_i - b) \cdot \mathbb{P}\left(B_{(1,n)} \leq b\right)\right) \\ &= \max\left((x_i - b) \cdot F_{(1,n-1)}(\beta^{-1}(b))\right)\end{aligned}$$

□

c) Wie lautet die Bietfunktion $\beta^{FA}(x_i)$ von Bieter i aus dem symmetrischen Bayes-Gleichgewicht der FA? In welcher Weise hängt das Gebot von Bieter i von der Anzahl der Bieter n ab?

Beweis:

$$\begin{aligned}\beta^{FA}(x_i) &= x_i - \frac{\int_{r=0}^{x_i} F^{(n-1)}(x)dx}{F^{(n-1)}(x_i)} \\ &= x_i - \frac{\frac{1}{n}x_i^n}{x_i^{n-1}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_i\end{aligned}$$

D.h. mit steigender Anzahl der Bieter strebt das Gebot gegen x_i, ist bei zwei Bietern bei der Hälfte der Wertschätzung und dazwischen streng monoton steigend □

d) Zeigen Sie für die Bietstrategie β^{FA} des symmetrischen Bayes-Gleichgewichts der FA, dass $\mathbb{E}\left[\beta^{FA}(X_{(1,n)})\right] = \mathbb{E}[X_{(2,n)}]$ gilt.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\beta^{FA}(X_{(1,n)})\right] &= \mathbb{E}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_{(1,n)}\right] \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbb{E}\left[X_{(1,n)}\right] \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\int_0^1 1-F_{(1,n)}(x)dx \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{(2,n)}\right] &= \int_0^1 \left(1-F_{(2,n)}\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(1-\left(x^n+n\left((1-x)x^{n-1}\right)\right)\right)dx \\
&= \left[x-\frac{1}{n+1}x^{n+1}-n\left(\frac{1}{n}x^n-\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{n}{n+1}-\frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}
\end{aligned}
$$

□

e) Welchen Verkaufserlös darf der Versteigerer in der FA erwarten?

Beweis: Das höchste Gebot bekommt den Zuschlag und nach d) ist dessen Erwartungswert gleich $\frac{n-1}{n+1}$. □

f) Bestimmen Sie die erwartete Rente eines Bieters i mit dem Signal x_i im symmetrischen Bayes-Gleichgewicht der FA. Ist das Auktionsergebnis effizient?

Beweis: Das Ergebnis ist effizient, da für $x_i < x_j$:

$$\beta^{FA}(x_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_i < \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_j = \beta^{FA}(x_j)$$

Somit der Bieter mit der höchsten Wertschätzung das höchste Gebot abgibt und nach dem Design der Auktion auch den Zuschlag erhält. Die erwartete Rente ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\pi_i] &= \left(x_i - \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_{(2,n)} \leq x_i\right) \\ &= \frac{x_i}{n} \cdot F_{(2,n)}(x_i) = \frac{x_i^n}{n} \left(n + (1-n)x_i\right)\end{aligned}$$

□

Aufgabe 7

Ein Auktionator beabsichtigt ein Gut mittels einer Simultanen Zweitpreisauktion (SA) zu verkaufen, in der er einen Limitpreis $r > 0$ setzt. An der Auktion nehmen zwei risikoneutrale Bieter teil, für die der IPV-Ansatz gilt. Die Signale der Bieter entstammen aus der Gleichverteilung über dem Intervall $[0, 1]$, sind private Information und stimmen mit der Wertschätzung der Bieter für das Gut überein.

a) Welcher Gefahr setzt sich der Versteigerer durch das Setzen einen positiven Limitpreis $r > 0$ aus?

   Beweis: Durch Festsetzen eines Limitpreises setzt sich der Auktionator der Gefahr aus, dass er das Gut nicht versteigert bekommt, obwohl es Bieter gibt, die bereit wären das Gut zu einem gewissen Preis zu ersteigern und zwar, falls der Reservationspreis über den beiden Wertschätzungen liegt. $\square$

b) Formulieren Sie den Optimierungsansatz zur Bestimmung des Limitpreis r^*, der den erwarteten Erlös des Versteigerers maximiert. Berechnen Sie r^* unter der Annahme, dass der Versteigerer dem Gut keinen Wert beimisst, d.h. $v_0 = 0$.

   Beweis:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= r \cdot \mathbb{P}(X_{(2,2)} \leq r \leq X_{(1,2)}) + \mathbb{E}[X_{(2,2)}] \cdot \mathbb{P}(r < X_{(2,2)}) \\ &= r \cdot 2 \cdot r(1-r) + \left(r + \frac{1}{3}(1-r)\right) \cdot (1-r)^2\end{aligned}$$

F.O.C

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial r} = 4r - 6r^2 + \frac{2}{3}(1-r)^2 - 2(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3})(1-r) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned}0 &= 4r - 6r^2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}r + \frac{2}{3}r^2 - 2(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}) + 2(\frac{2}{3}r^2 + \frac{1}{3}r) \\ &= -4r^2 + \frac{6}{3}r\end{aligned}$$

$$\iff 4r = \frac{6}{12} \iff r = \frac{1}{2}$$

$\square$

c) Bestimmen Sie den erwarteten Erlös des Versteigerers für den Fall, dass er einen Limitpreis in Höhe von r^* setzt. Zeigen Sie, dass dies zu einem höheren erwarteten Erlös des Versteigerers führt als als die klassische Zweitpreisauktion ohne Limitpreis

Beweis:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 2 \cdot r^2(1-r) + \left(r + \frac{1}{3}(1-r)\right) \cdot (1-r)^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \mathbb{E}[X_{(2,2)}] = \int 1 - x^2 - 2x(1-x)dx \\
&= 1 - \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3} = \frac{4}{12} < \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 8

Ein Auktionator beabsichtigt ein Gut mittels einer Simultanen Erstpreisauktion (FA) zu verkaufen, in der er keinen Limitpreis setzt ($r = 0$). An der Auktion nehmen n risikoaverse Bieter teil, die alle dieselbe Nutzenfunktion besitzen. Für die Wertschätzungen der Bieter für das Gut gilt der IPV-Ansatz, wobei die Signale der Bieter aus der Gleichverteilung über dem Intervall [0, 1] stammen und mit den Wertschätzungen übereinstimmen.

a) Worin besteht das Risiko eines Bieters in einer FA und auf welche Weise kann er dieses Risiko vermindern? Macht Ihre Argumentation für die FA auch für die Simultane Zweitpreisauktion (SA) Sinn?

   Beweis: Bid-shading, Gut nicht erhalten, bid-shading verringern, nur sinnvoll für FA, in SA existiert dominante Strategie. □

b) In welchem Intervall liegt das Gebot eines Bieter im symmetrischen Bayes-Gleichgewicht der FA?

   Beweis: Zwischen x_0 und $\beta_{rn}^{FA}(x_0) = x_0 - \frac{\int_{r=0}^{x-0} F^{n-1}(s)ds}{F^{n-1}(x_0)}$ □

c) In welchem Intervall liegt der erwartete Verkaufserlös des Versteigerers im symmetrischen Bayes-Gleichgewicht der FA mit risikoaversen Bietern? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem entsprechenden erwarteten Verkaufserlös in einer SA.

   Beweis: $\mathbb{E}[X_{(2,n)}] \leq \mathbb{E}[\pi] \leq \mathbb{E}[X_{(1,n)}]$ □

Aufgabe 9

An einer simultanen Erstpreisauktion (FA) nehmen zwei asymmetrische Bieter teil, wobei für die Verteilungen der Signale der beiden Bieter $X_1 \tilde{U}[0, \frac{4}{3}]$ bzw. $X_2 \tilde{U}[0, \frac{5}{4}]$ gelte. Ansonsten gelten die Annahmen des IPV-Grundmodells.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Strategienkombination ein Bayes-Nash-Gleichgewicht dieser FA konstituiert.

$$\beta_1(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{x_1}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right), & x_1 \neq 0 \\ 0 & x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\beta_2(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right), & x_1 \neq 0 \\ 0 & x_1 = 0 \end{cases}$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[\beta_1] = (x_1 - \beta_1) \cdot \mathbb{P}[\beta_2(X_2) < \beta_1(x_1)]$$

□

b) Zeigen Sie, dass das obige Gleichgewicht ineffiziente Auktionsergebnisse ermöglicht.

Aufgabe 10

a) Geben Sie die wesentliche Charakteristik eines Common Value-Gutes an. Wie kann dabei der Wert des Gutes modelltechnisch umgesetzt werden?

Beweis: Bei einem common value Gut ist der Wert des Gutes unbekannt aber für alle Gleich, modelltechnisch bedeutet das, dass die Wertschätzung $v_i(X_i, X_{-i}, S) = v(X_i, X_{-i}, S)$ □

b) Aus welchem Grund ist das Kriterium der Effizienz in Auktionen von CV-Gütern nicht von Bedeutung?

Beweis: Effizienz bedeute, dass der Bieter mit der höchsten Wertschätzung das Gut erhält, aber alle Bieter haben die gleiche. □

c) Erläutern Sie, was man unter dem so genannten Fluch des Gewinners versteht, und wie rationale Bieter diesem entgegenwirken.

Beweis: Der Fluch des Gewinners ist ein Phänomen, das häufig bei Gütern mit hoher CV-Komponente zu beobachten ist, bei dem der Gewinner der Auktion mehr für das Gut zahlt, als es wert ist. Grund ist, dass in der Regel der Bieter den Zuschlag erhält, der den Wert des Gutes am meisten überschätzt hat. Rationale Bieter berücksichtigen genau dies bei ihrem Gebot. □

Aufgabe 11

An einer Zweitpreisauktion nehmen zwei (a priori) symmetrische und risikoneutrale Bieter teil. Versteigert wird der Geldbetrag, der sich als Summe des Bargelds in den beiden Geldbeuteln der Bieter ergibt, wobei aber jeder Bieter nur den Inhalt des eigenen Geldbeutels kennt. Jedoch sei allgemein bekannt, dass beide Geldbeutel einen Geldbetrag zwischen 0 und 100 Euro enthalten.

a) Bestimmen Sie das symmetrische Bayes-Nash-Gleichgewicht der obigen Auktion.

Beweis: Unter der Annahme von Monotonie der Bietfunktion gilt für den erwarteten Erlös:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\pi_i] &= ((x_i + X_j) - \beta(X_j)) \cdot F_{X_j}(x_i)\\ &= \int_0^{x_i} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(x_i)ds\\ &= \int_0^{\beta^{-1}(b_i)} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(x_i)ds,\end{aligned}$$

wobei wir davon ausgehen, dass sowohl Spieler i als auch j dieselbe Bietfunktion β aufgrund der Symmetriebedingung verwenden. Im Bayes-Nash-Gleichgewicht darf abweichen nicht besser stellen, d.h. die erwartete Rente muss maximal sein. Die F.O.C. lautet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}\mathbb{E}[\pi_i] &= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\int_0^{\beta^{-1}(b_i)} ((x_i + s) - \beta(s)) \cdot f_{X_j}(x_i)ds\right)\\ &\underset{Regel}{\overset{Leibnitz}{=}} \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg(\Big(\Big(\Big(x_i + \beta^{-1}(b_i)\Big) - \beta(\beta^{-1}(b_i))\Big) \cdot f_{X_j}(x_i)\Big) - \Big(\Big(\Big(x_i + 0\Big) - \beta(0)\Big) \cdot f_{X_j}(x_i)\Big)\bigg)\\ &= \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg(\Big(\Big(\Big(x_i + \beta^{-1}(b_i)\Big) - b_i\Big) \cdot f_{X_j}(x_i)\Big) - \Big(\Big(\Big(x_i + 0\Big)\Big) \cdot f_{X_j}(x_i)\Big)\bigg)\\ &= \frac{\partial}{\partial\beta}\bigg(\Big(x_i + \beta^{-1}(b_i)\Big) - (b_i + x_i)\bigg) \cdot f_{X_j}(x_i)\\ &= \frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\beta^{-1}(b_i) - b_i\Big) \cdot f_{X_j}(x_i)\\ &\overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die optimale Bietstrategie:

$$\beta(x_i) = b_i = \beta^{-1}(b_i) = x_i$$

$\square$