Funktionalanalysis

Prof. Dr. Lutz Weis

Wintersemester 2015

Martin Belica

Einleitung

Die Funktionalanalysis liefert den begrifflichen Rahmen sowie allgemeine Methoden, die in weiten Teilen der modernen Analysis verwendet werden. Zum Beispiel ist es möglich Integral- und Differentialgleichungen als lineare Gleichungen in einem geeigneten unendlichdimensionalen Vektorraum (wie z.B. einem Raum stetiger oder integrierbarer Funktionen) aufzufassen. Will man nun auf diese unendlichdimensionalen Gleichungen Ideen der linearen Algebra anwenden, so treten Konvergenz- und Kompaktheitsprobleme auf, die wir in dieser Vorlesung behandeln wollen. Zu den Themen gehören:

- Beschränkte und abgeschlossene Operatoren auf normierten Räumen
- Stetigkeit und Kompaktheit auf metrischen Räumen
- Geometrie und Operatorentheorie in Hilberträumen
- Der Satz von Hahn-Banach und Dualität von Banachräumen

Die allgemeinen Aussagen werden durch konkrete Beispiele von Räumen und Operatoren der Analysis illustriert.

Erforderliche Vorkenntnisse

Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Operatoren auf Banachräumen **2**

1.1 Einführung . . . 2

1.1.1 Räume . . . 2

1.1.2 Operatoren . . . 2

1.1.3 Anwendungen . . . 3

1.2 Normierte Räume . . . 4

1.3 Beschränkte und lineare Operatoren . . . 8

Bildquellen **10**

Abkürzungsverzeichnis **11**

Symbolverzeichnis **12**

1 Lineare Operatoren auf Banachräumen

1.1 Einführung

1.1.1 Räume

Sei X ein Vektorraum, $dim X < \infty$ und sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_i^2\| \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Diese Normen sind äquivalent, denn: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$

Satz (Bolzano-Weierstraß)
$A \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann hat jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Teilfolge.

Beispiel
$X = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \text{ stetig auf } [0,1]\}$

$$\left. \begin{array}{l} \|f\|_2 := \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|f\|_\infty := \max\limits_{t \in [0,1]} \|f(t)\| \end{array} \right\} \text{ dabei gilt } \|f\|_\infty \leq \|f\|_2 \leq \dots$$

Aber: $f_n(t) = Bild, \quad \|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$
$\|f_n - f_m\| = 1$ für $n \neq m \Rightarrow$ Satz von Bolzano-Weierstraß gilt im ∞-dimensionalen i.A. nicht!

1.1.2 Operatoren

Sei $N = dim X, M = dim Y$ und seien (e_n) bzw. (f_n) Basen von X bzw. Y. Für $T : X \to Y$ gegeben durch:

$$Komm.Diagramm$$

Daraus folgt:

- T ist stetig
- X = Y $\iff$ T injektiv $\iff$ T surjektiv (Dimensionsformel)
  (Die Gleichung $Tx = y$ ist eindeutig lösbar $\iff$ Gleichung hat für alle $y \in Y$ eine Lösung.)

- Falls A selbstadjungiert ist, d.h. $A = A^*$, gibt es eine Basis aus Eigenvektoren (e_n) von A, d.h. $T(\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n) = \sum n = 1^N \lambda_n \alpha_n e_n$, wobei λ_n Eigenwerte sind $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Beispiel
$X = C^1[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} :$ stetig auf $[0,1]\}$ $Tf = f', T : X \to Y$ stetig.
(Aber: $T : C[0,1] \to C[0,1]$, hier ist T nicht definiert.)
T ist nicht stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$-Norm, da:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}, \quad \text{dann: } \|f_n\| \to 0 \text{ für } t \to \infty$$

$$Tf_n(t) = i\sqrt{n}e^{int}, \quad \text{mit: } \|Tf_n\|_\infty \to \infty, \text{ für } n \to \infty$$

Beispiel
$X = L_2 = \{(a_n) : \left(\sum_{n\geq 1}^\infty \|a_n\|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$
$T(a_1, a_2, a_3, ...) = (0, a_1, a_2, a_3, ...)$
T ist injektiv, aber nicht surjektiv

1.1.3 Anwendungen

(1) Fredholm'sche Integralglechungen

(2) Dirichletproblem

(3) Sturm-Liouville Problem

1.2 Normierte Räume

Definition
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
Eine Abbildung $\|\cdot\| \cdot \|\|: X \to \mathbb{R}_+$ heißt eine Norm, wenn

(1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

(2) $|\lambda x\| = |\lambda\|x\|$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bemerkung: Falls $\|\cdot\|$ all die oben genannten Eigenschaften erfüllt außer $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, dann heißt $\|\cdot\|$ Halbnorm

Vereinbarung: Die Menge $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ heißt **Einheitskugel**.
Eine Folge (x_n) des normierten Raums X **konvergiert** gegen ein $x \in X$, falls $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Bemerkung: Für zwei Elemente $x, y \in (X, \|\cdot\|)$ ... gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung $(|\|x\| + \|y\|| \leq \|x+y\|)$

Beispiel
Sei $X = \mathbb{K}^n$, $\quad X = (X_1, \ldots, X_n)$, $\quad X_i = \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\|x\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^p|\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty (p=2: \text{ Euklidische Norm})\\ \|x\|_\infty &= \sup_{j=1}^{n} |x_j|\end{aligned}$$

Beh: $\|\cdot\|$ ist Norm auf $\mathbb{K}^n$ für $1 \leq p \leq \infty$

$\|x+y\|_\infty = sup_{j=1}^k |x_j + y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ Für $p \in (1, \infty), p \neq 2$: siehe Übungsaufgabe (Fall $p = 2$ läuft über Cauchy-Schwarz)

Beachte: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n\|x\|_\infty$

Definition
Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen äquivalent auf X, falls es $0 < m, M < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

Satz 1.1
Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Beweis
Wähle eine algebraische Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von X, wobei $n = dim X < \infty$.
Definiere $|\|x\|| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

z. z. die gegeben Norm $|||\cdot|||$ist äquivalent zu $\|\cdot\|$.

Beweis:
In der einen Richtung betrachte:

$$\begin{aligned}\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &=: \quad \nu \qquad\qquad |||x|||\end{aligned}$$

Für die Umkehrung benutze die Funktion $J : \mathbb{K}^n \to X,\ J(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\begin{aligned}&\text{Die Abbildung } y \in \mathbb{K}^n \to \|Jy\| \text{ ist stetig, denn} \\ \|Jy\| - \|y\|_{\mathbb{K}^n} &= \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, y = (y_1, \dots, y_n) \\ \text{und } |\|Jy\| - \|Jz\| &\leq |\|Jy - Jz\| \leq |\|J(y-z)\| \\ &\leq M|||J(y-z)||| \\ &= M\|y-z\|_{\mathbb{K}^n}\end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von $Jy \to \|Jy\| \in \mathbb{R}$

Sei $S = \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\|_2 = 1\}$. Dann ist S abgeschlossen und beschränkt. Die Abbildung $N := y \in S \to \|Jx\| > 0$ ist wie in (*) gezeigt stetig. Nach Analysis nimmt N sein Minimum in einem Punkt $y_0 \in S$ an. Setze

$$\begin{aligned}m = \inf\{\|x\| : |||x||| = 1\} &= \inf\{\|Jy\| : y \in S\} \\ &= \|Jy_0\| > 0\end{aligned}$$

$$\text{Also } m \leq \|\frac{x}{|||x|||}\| = \frac{\|x\|}{|||x|||} \Rightarrow |||x||| \leq m\|x\|$$ ■

Proposition 1.2
Für zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf X sind äquivalent:

(1) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind äquivalent

(2) Für alle $(x_n) \subset X$, $x \in X$ gilt $\|x_m - x\|_1 \to 0 \iff \|x_m - x\|_2 \to 0$

(3) Für alle $(x_n) \subset X$ gilt $\|x_m|_1 \to 0 \iff \|x_m\|_2 \to 0$

(4) Es gibt Konstanten $0 < m,\ M < \infty$, so dass $mU_{(X,\|\cdot\|_1)} \leq U_{(X,\|\cdot\|_2)} \leq MU_{(X,\|\cdot\|_1)}$

Beweis

Vereinbarung: Sei $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^N : x_i = 0$ bis auf endlich viele $n \in N\}$ der Folgenraum und $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der Einheitsvektor, wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

Beispiel

- $l^p = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^n : \|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$
- $l^\infty = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$
- $c_0 = \{x = (x_n) \in l^\infty : \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\}$

Gültigkeit der Dreiecksungleichung beweist man ähnlich wie bei $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$.

Lemma 1.3
Minkowskii-Ungleichung: $(\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^\infty |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
Hölder-Ungleichung: mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt $\sum_{i=1}^\infty |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^\infty |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$

Bemerkung: Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{F}$ nicht äquivalent.

Beweis

Beispiel

a) Raum der stetigen Funktionen

b) Raum der differentierbaren Funktionen
$D^\alpha f(x) = \frac{\delta^{|\alpha|}}{\delta x_1^{\alpha_1} \dots \delta x_n^{\alpha_n}} f(x)$, wobei $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Definition
$C_b^m(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} | D^\alpha f$ sind stetig in Ω, beschränkt auf Ω für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq n\}$
mit der Norm: $\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$

Bemerkung: Auf $C_b^m[0,1]$ ist eine äquivalente Norm zu $\|f\|_{C_b^m}$ gegeben durch

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

Denn $f^{(i)}(t) = f^{(i)}(0) + \int_0^t f^{(i+1)}(s)ds$ und damit $\|f^{(i)}\|_0 \leq |f^{(i)}(0)| + \|f^{(i+1)}\|_\infty$

Beispiel
$X = C(\bar{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt Definiere $\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\int_\Omega |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$ Betrachte $f_k(t) = t^k, t \in [0,1]$, dann gilt

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad p < \infty$$

Definition (Quotientenräume)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. $M \subset X$ sei abgeschlossener (d.h. für alle $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in M$), linearer Unterraum.

Definiere $\hat{X} = X/M, \quad \hat{x} \in X/M : \quad \hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$
Dabei gilt unter anderem $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = x_1 \hat{+} x_2$ und $\lambda \hat{x}_1 = \lambda \hat{x}_1$. $\hat{X}$ bildet einen Vektorraum.

Wir definieren nun eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|y\|_X : y \in \hat{X}\}$

Beh.: $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ein normierter Raum.
$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = 0 : \exists y_n \in \hat{X}$ mit $\|y_n\| \to 0, x - y_n \in M \Rightarrow x \in M, \hat{x} = 0$ zu $\epsilon < 0$ wähle zu $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}$ Elemente

Beispiel

- hölderstetige Funktionen
- Lebesgues-Integrierbare Funktionen

1.3 Beschränkte und lineare Operatoren

Definition
Eine Teilmenge V eines normieren Raums $(X, \|\cdot\|)$ heißt beschränkt, falls

$$c := \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X,\|\cdot\|)}$$

Bemerkung: Eine konvergente Folge $(x_n) \in X, x_n \to X$ ist beschränkt, denn $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$ für fast alle m.

Satz 1.4
Seien X, Y normierte Räume. Füreinen linearen Operator $S : X \to Y$ sind äquivalent:

a) T stetig, d.h. $x_n \to x$ impliziert $Tx_n \to Tx$

b) T stetig in 0

c) $T(U_{(X,\|\cdot\|)})$ ist beschränkt in Y

d) Es gibt ein $c < \infty$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$

Beweis

Definition
Seien X, Y normierte Räume. Mit $B(X, Y)$ bezeichnen wir den Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren $T : X \to Y$. Ist $X = Y$ schreiben wir auch kurz $B(X) := B(X, X)$.

Für $T \in B(X, Y)$ setze

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \ 0\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

Die Norm $\|T\|$ von T ist die kleinste Konstante c für welche die Gleichung $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.

Satz 1.5
$(B(X, Y), \|\cdot\|)$ ist ebenfalls ein normierter Raum und für $X = Y$ gilt für $S, T \in B(X)$:

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\|\|T\|$$

Beweis

Beispiel

a) $Idx = x, \quad \|Id\| = 1$

b) Falls $dimX = n < \infty, Y$ normierter Raum, dann sind alle linearen Operatoren $T : X \to Y$ beschränkt. Beweis:

c) $X = C^{\infty}(0,1), \|f\|_{\infty} = \sup_{u \in (0,1)} |f(u)|$
$T : X \to X, Tf = f', f_k(t) = e^{i2\pi kt} \in X, Tf_k(t) = 2\pi ik f_k(t)$
$\|f_k\| = 1, \|Tf_k\| = 2\pi k \to \infty$

d) $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \text{ bis auf endlich viele } n\}$

$$T : \mathbb{F} \to \mathbb{R}, T((x_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} nx_n \in \mathbb{R} \|Te_n\| = n \to \infty$$

Beispiel (Integraloperator)
$X = Y = C(\bar{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Gegeben: $k \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$

Für $f \in C(\bar{\Omega})$ setze: $Tf(u) = \int_{\Omega} k(u,v)f(v)dv$
$((A(f_j)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j, A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n})$

Dann ist $Tf \in C(\bar{\Omega})$ (nach Lebesguesschem Konvergenzsatz)

$$|Tf(u)| \leq \int_{\Omega} |k(u,v)||f(u)|dz \leq \int_{\Omega} |k(u,v)|du \sup_{u \in \Omega} |f(u)| \sup \text{ über } u \in \Omega \text{ liefert:}$$
$$\|Tf\|_{\infty} \leq \sup_{u \in \Omega} \int |k(u,v)|dv \|f\|_{\infty} \Rightarrow \|T\| = \sup_{u \in \Omega} \int |k(u,v)|dv < \infty,$$
$$\text{da die Abbildung } u \in \bar{\Omega} \to \int |k(u,v)|dv \in \mathbb{R} \text{ stetig (nach dem Konvergenzsatz von Lebesgues)}$$

Beweis :

Beispiel (Kompositionsoperator)
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Beispiel (Differentialoperatoren)
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}$, $X = C^m(\bar{\Omega}), Y = C_b(\Omega)$,

$$T : X \to Y, \;\; Tf(u) = \sum_{|\alpha| < m} a_{\alpha} D^{\alpha} f(u), u \in \mathbb{R}, a_{\alpha} \in C\bar{\Omega}$$
$$\text{damit } \|Tf\|_{\infty} \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|\|_{\infty} \|D^{\alpha} f\|_{\infty} \leq c\|f\|_{\infty}$$

Beispiel
$X = Y = l^p, e_n = (\delta_n)_{m \in \mathbb{N}}$
$Te_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{ij} e_i$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R} : (\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$

Dann gilt $X = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j, 0.25cm$ mit $x_j \in \mathbb{R}$, $0.25cm\|x\| = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
$[Tx]_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ (Matrizenmultiplikation)
$T \in B(l^p) \to A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$

Bildquellen

Abb. **??** Tag: Name, URL-Name

Abkürzungsverzeichnis

Beh. Behauptung

Bew. Beweis

bzgl. bezüglich

bzw. beziehungsweise

ca. circa

d. h. das heißt

Def. Definition

etc. et cetera

ex. existieren

Hom. Homomorphismus

i. A. im Allgemeinen

o. B. d. A. ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Prop. Proposition

sog. sogenannte

Vor. Voraussetzung

vgl. vergleiche

z. B. zum Beispiel

zhgd. zusammenhängend

z. z. zu zeigen

Symbolverzeichnis

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ Ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\} = \{\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ Rationale Zahlen
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, -\sqrt[3]{3}, \dots\}$ Reele Zahlen
$\mathbb{R}_+$ Echt positive reele Zahlen
$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$ Komplexe Zahlen
$I = [0, 1] \subsetneq \mathbb{R}$ Einheitsintervall