Funktionalanalysis

Prof. Dr. Lutz Weis

Wintersemester 2015

Martin Belica

Einleitung

Die Funktionalanalysis liefert den begrifflichen Rahmen sowie allgemeine Methoden, die in weiten Teilen der modernen Analysis verwendet werden. Zum Beispiel ist es möglich Integral- und Differentialgleichungen als lineare Gleichungen in einem geeigneten unendlichdimensionalen Vektorraum (wie z.B. einem Raum stetiger oder integrierbarer Funktionen) aufzufassen. Will man nun auf diese unendlichdimensionalen Gleichungen Ideen der linearen Algebra anwenden, so treten Konvergenz- und Kompaktheitsprobleme auf, die wir in dieser Vorlesung behandeln wollen. Zu den Themen gehören:

- Beschränkte und abgeschlossene Operatoren auf normierten Räumen
- Stetigkeit und Kompaktheit auf metrischen Räumen
- Geometrie und Operatorentheorie in Hilberträumen
- Der Satz von Hahn-Banach und Dualität von Banachräumen

Die allgemeinen Aussagen werden durch konkrete Beispiele von Räumen und Operatoren der Analysis illustriert.

Erforderliche Vorkenntnisse

Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung 2
 1.1 Räume 2
 1.2 Operatoren 3
 1.3 Anwendungen 3

2 Normierte Räume 5

3 Beschränkte und lineare Operatoren 10

4 Metrische Räume 18

5 Vollständigkeit 27

Abkürzungsverzeichnis 33
 Stichwortverzeichnis 34

1 Einführung

1.1 Räume

Sei X ein Vektorraum, $dim X < \infty$ und sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_i^2\|\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

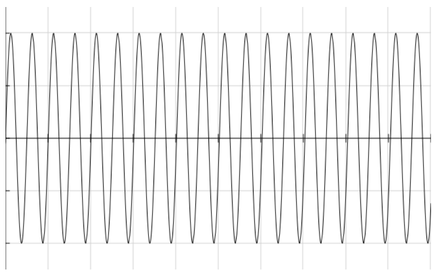
Diese Normen sind äquivalent, denn: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$

Satz 1.1 (Bolzano-Weierstraß)
$A \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann hat jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Teilfolge.

Beispiel 1.2
$X = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } [0,1]\}$

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [0,1]} \|f(t)\|$$

Dabei gilt $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$, aber mit folgender Funktion folgt zum Beispiel: $f_n(t) =$



$$\text{gilt} \quad \|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \|f_n - f_m\| = 1 \text{ für } n \neq m$$

$\Rightarrow$ Satz von Bolzano-Weierstraß gilt im ∞-dimensionalen i.A. nicht!

1.2 Operatoren

Sei $N = dimX, M = dimY$ und seien (e_n) bzw. (f_n) Basen von X bzw. Y.
Sei $T : X \to Y$ gegeben durch:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\alpha_n \to \sum \alpha_n e_n"'] & Y \arrow[d, "\beta_n \to \sum \beta_n f_n"] \\ \mathbb{R}^N \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

wobei $x = \sum \alpha_n e_n, \;\; Tx = \sum \beta_n f_n, \;\; \beta_m = \sum_{n=1}^N a_{mn}\alpha_n.$

Daraus folgt:

- T ist stetig
- X = Y $\iff$ T injektiv $\iff$ T surjektiv (Dimensionsformel)
(Die Gleichung $Tx = y$ ist eindeutig lösbar $\iff$ Gleichung hat für alle $y \in Y$ eine Lösung.)
- Falls A selbstadjungiert ist, d.h. $A = A^*$, gibt es eine Basis aus Eigenvektoren (e_n) von A, d.h. $T(\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \alpha_n e_n$, wobei λ_n Eigenwerte sind, d.h. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Beispiel 1.3
$X = C^1[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } [0,1]\}$
$Tf = f', T : X \to C[0,1]$ stetig. (Aber: $T : C[0,1] \to C[0,1]$, hier ist T nicht definiert.)

T ist nicht stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$-Norm, da:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}, \qquad \text{dann: } \|f_n\| \to 0 \text{ für } t \to \infty$$

$$Tf_n(t) = i\sqrt{n}e^{int}, \qquad \text{mit: } \|Tf_n\|_\infty \to \infty, \text{ für } n \to \infty$$

Beispiel 1.4
$X = L_2 = \{(a_n) : \left(\sum_{n\geq 1}^\infty \|a_n\|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$
$T(a_1, a_2, a_3, ...) = (0, a_1, a_2, a_3, ...)$

T ist injektiv, aber nicht surjektiv

1.3 Anwendungen

(1) Fredholm'sche Integralglechungen
$X = C[0,1], \;\; k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig

$$Tf(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)ds$$

Analogie zum endlich dim. ('Verallg. der Matrixmultiplikation'): $T(f_j)(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$

T ist in diesem Fall linear und stetig und es gilt die Fredholm'sche Alternative:

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (\lambda Id - T)(f) = y, \quad f, g \in C[0,1]$$

Dann existiert eine Lösung genau dann, wenn diese eindeutig ist.

(2) Dirichletproblem
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, offen, beschränkt, glatter Rand. Sei $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig
Gesucht ist ein $f \in C(\bar{\Omega}) \cap C^(\Omega)$, so dass $\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ in Ω und $f_{|\partial\Omega} = g$

Beispiel: Durch Wärmeverteilung auf dem Rand auf die Wärmeverteilung im Inneren schließen.

Lösung: Dirichletintegral $J(u) = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx$, wobei $u \in M = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) | \ v_{|\partial\Omega} = g\}$
Sei v_0 das absolute Minimum von J, d.h. $J(v_0) = \inf\{J(w) : w \in M\}$
$v \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $v = 0$ in einer Umgebung von ∂U. $\epsilon \to J(u_0 + \epsilon v)$

$$\frac{d}{d\epsilon} J(u_0 + \epsilon v) = \int_\Omega \frac{d}{d\epsilon} (\nabla u_0 + \epsilon \nabla v)^2 dx = 2 \int_\Omega (\nabla u_0 + \epsilon \nabla v)(\nabla v) dx_{|\epsilon=0} = 2 \int_\Omega (\nabla u_0)(\nabla v) dx$$

Mit $0 \geq J(u_0 + \epsilon v) - J(u_0) \geq 0 : \quad \int (\nabla u_0)(\nabla v) dx \overset{\text{P.I.}}{=} -\int (\nabla u_0) v dx = 0$

$$\Rightarrow \nabla u_0 = 0, \text{ außerdem } {u_0}_{|\partial\Omega} = g \text{ (s.o.)}$$

Im aAlgemeinen existiert das, da absolute Minimum $u_0 \in J$ aber nicht.
Ausweg: $X = \{f \in L^2(\Omega), f' \in L^2(\Omega)\} \supset \{f \in C(\bar{\Omega}), f' \in C(\bar{\Omega})\}$
In diesem Raum X (Sobolevräume) gibt es ein Minimum u_0 von J.

(3) Sturm-Liouville Problem
$X = C^2([0,1]), Tu = (pu')' + qu$, mit $q \in C[0,1], p \in C^1[0,1]$
Problem: bei gegebenen $f \in C[0,1]$ finde $u \in X$ mit $Tu = f, v(0) = 0, v'(1) = 0$

$Y = \{f \in L^2[0,1], f' \in L^2[0,1]\}$ Hilbertraum.
Orthonormalbais (e_n) von Y wäre: $\|e_n\|_2 = 1, \int e_n(x) e_m(x) dx = 0$ für $m \neq m$
$f \in Y : f = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$ mit $\|f\|^2 = \sum |\alpha_n|^2$
Die (e_n) sind außerdem Eigenvektoren des Operatoren T, d.h. $Te_n = \lambda_n e_n$

$$Ty = f \Rightarrow \int Ty(x) e_n(x) dx = \int f(x) e_n(x) dx, y = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$$

Gesucht sind die Koeffizienten α_n

$$\begin{aligned} \int f(x) e_n(x) dx &= \sum_m \lambda_m \alpha_m \int Te_n(x) e_m(x) dx \\ &= \lambda_n \alpha_n \int e_n(x) e_n(x) dx \\ \iff \alpha_n &= \frac{1}{\lambda_n} \int f(x) e_n(x) dx \end{aligned}$$

2 Normierte Räume

Definition 2.1
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ heißt eine **Norm**, wenn

(1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

(2) $|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bemerkung 2.2
Falls $\|\cdot\|$ all die oben genannten Eigenschaften erfüllt außer $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, dann heißt $\|\cdot\|$ Halbnorm. ■

Vereinbarung:
Die Menge $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ heißt **Einheitskugel**.
Eine Folge (x_n) des normierten Raums X **konvergiert** gegen ein $x \in X$, falls $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Bemerkung 2.3
Für zwei Elemente $x, y \in (X, \|\cdot\|)$ in normierten Räumen gilt auch die umgekehrte Dreiecksungleichung $(|\|x\| + \|y\|| \leq \|x + y\|)$ ■

Beispiel 2.4
Sei $X = \mathbb{K}^n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^p| \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (p = 2 : \text{ Euklidische Norm}) \\ \|x\|_\infty &= \sup_{j=1}^{n} |x_j| \end{aligned}$$

Beh: $\|\cdot\|$ ist Norm auf $\mathbb{K}^n$ für $1 \leq p \leq \infty$

$\|x + y\|_\infty = sup_{j=1}^k |x_j + y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ Für $p \in (1, \infty), p \neq 2 :$ siehe Übungsaufgabe (Fall $p = 2$ läuft über Cauchy-Schwarz)

Beachte: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n\|x\|_\infty$

Definition 2.5
Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen äquivalent auf X, falls es $0 < m, M < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

Satz 2.6
Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Beweis
Wähle eine algebraische Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von X, wobei $n = dimX < \infty$.
Definiere $|||x||| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

z. z. die gegeben Norm $|||\cdot|||$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|$.

Beweis:
In der einen Richtung betrachte:

$$\begin{aligned}\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:|||x|||} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:\nu}\end{aligned}$$

Für die Umkehrung benutze die Funktion $J : \mathbb{K}^n \to X,\ J(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\begin{aligned}&\text{Die Abbildung } y \in \mathbb{K}^n \to \|Jy\| \text{ ist stetig, denn} \\ &|||Jy||| = \|y\|_{\mathbb{K}^n} = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, y = (y_1, \dots, y_n) \\ \text{und } &|\|Jy\| - \|Jz\|| \leq |\|Jy - Jz\| = |\|J(y-z)\| \\ &\leq \nu |||J(y-z)||| \\ &= M\|y-z\|_{\mathbb{K}^n}\end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von $y \to \|Jy\| \in \mathbb{R}$

Sei $S = \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\|_{\mathbb{K}^n} = 1\}$. Dann ist S abgeschlossen und beschränkt. Die Abbildung $N : y \in S \to \|Jy\| > 0$ ist wie in (*) gezeigt stetig. Nach Analysis II nimmt N sein Minimum in einem Punkt $y_0 \in S$ an. Setze

$$\begin{aligned}m = \inf\{\|x\| : |||x||| = 1\} &= \inf\{\|Jy\| : y \in S\} \\ &= \|Jy_0\| > 0\end{aligned}$$

$$\text{Also } m \leq \left\|\frac{x}{|||x|||}\right\| = \frac{\|x\|}{|||x|||} \Rightarrow |||x||| \leq m\|x\|.$$

Proposition 2.7
Für zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf X sind äquivalent:

a) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind äquivalent

b) Für alle $(x_n) \subset X$, $x \in X$ gilt $\|x_n - x\|_1 \to 0 \iff \|x_n - x\|_2 \to 0$

c) Für alle $(x_n) \subset X$ gilt $\|x_n|_1 \to 0 \iff \|x_n\|_2 \to 0$

d) Es gibt Konstanten $0 < m,\ M < \infty$, so dass $mU_{(X,\|\cdot\|_1)} \leq U_{(X,\|\cdot\|_2)} \leq MU_{(X,\|\cdot\|_1)}$

Beweis

a) $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)* folgt direkt durch die Definition von äquivalenten Normen.

c) $\Rightarrow$ *d)* Annahme: Es existiert kein M mit $U_{(X,\|\cdot\|_2)} \subset MU_{(X,\|\cdot\|_1)}$.
Dann gibt es eine Folge $x_n \in U_{(X,\|\cdot\|_2)}$ mit $\|x_n\|_1 \geq n^2$
Setze $y_n = \frac{1}{n}x_n$. Dann gilt $\|y_n\|_1 \to 0$ und $\|y_n\|_2 \to \infty$.
Widerspruch zu *c)*.

d) $\Rightarrow$ *a)* Gegeben ist $U_{(X,\|\cdot\|_2)} \subset MU_{(X,\|\cdot\|_1)}$
Das ist äquivalent zu $\|x\|_2 \leq M\|x\|_1$
Analog folgt aus $mU_{(X,\|\cdot\|_1)} \subset U_{(X,\|\cdot\|_2)}$ dann $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2$.
Also $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$

Vereinbarung:
Sei $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$ der **Folgenraum**
und $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der Einheitsvektor, wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

Beispiel 2.8

- $\ell^p = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$
- $\ell^\infty = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$
- $c_0 = \{x = (x_n) \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\}$

Gültigkeit der Dreiecksungleichung beweist man ähnlich wie bei $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$.

Lemma 2.9
Minkowskii-Ungleichung: $(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\ (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
Hölder-Ungleichung: mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$

Bemerkung 2.10
Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{F}$ nicht äquivalent.

Beweis
Sei $p > q$, setze

$$X_n := \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j, \qquad e_j = (\delta_{ij})_{u\in\mathbb{N}}$$

Damit gilt $x_n \in \mathbb{F}$ und weiter

$$\|x_n\|_p = \left(\sum_{j=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{p}} \simeq (ln(2))^{\frac{1}{p}}$$

aber $\|x_n\|_q \to \infty$, also sind $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ keine äquivalente Normen.

Beispiel 2.11

a) Raum der stetigen Funktionen
$\Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{u\in\Omega} |f(u)|$
$\Rightarrow \|f - f_n\|_\infty \to 0$ bedeutet gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f auf Ω.

b) Raum der differentierbaren Funktionen
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$
$D^\alpha f(x) = \frac{\delta^{|\alpha|}}{\delta x_1^{\alpha_1} \ldots \delta x_n^{\alpha_n}} f(x),$ wobei $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$

Definition 2.12
Wir nennen $C_b^m(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} | D^\alpha f$ sind stetig in $\Omega,$ beschränkt auf Ω für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$ den **Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen**.
Auf C_b^m definieren wir die Norm: $\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$

Bemerkung 2.13
Auf $C_b^m[0,1]$ ist eine äquivalente Norm zu $\|f\|_{C_b^m}$ gegeben durch

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

Denn $f^{(i)}(t) = f^{(i)}(0) + \int_0^t f^{(i+1)}(s) ds$ und damit $\|f^{(i)}\|_\infty \leq |f^{(i)}(0)| + \|f^{(i+1)}\|_\infty$ ∎

Beispiel 2.14
$X = C(\bar{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt.
Definiere $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$ und betrachte $f_k(t) = t^k, t \in [0,1]$, dann gilt:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad p < \infty$$

Definition 2.15 (Quotientenräume)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. $M \subset X$ sei abgeschlossener, linearer Unterraum.

(abgeschlossen: d.h. für alle $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in M$)

Definiere $\hat{X} = X/M, \quad \hat{x} \in X/M : \quad \hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$
Dabei gilt unter anderem $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \widehat{x_1 + x_2}$ und $\lambda \hat{x}_1 = \widehat{\lambda x_1}$; $\hat{X}$ bildet somit einen Vektorraum.
Definieren wir eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|x - y\|_X : y \in M\} =: d(x, Y)$

Behauptung: $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ein normierter Raum.
Beweis: Sei $\hat{x} \in \hat{X}$ beliebig mit $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = 0$
dann existiert ein $y_n \in \hat{X}$ mit $\|y_n\| \to 0$ und $x - y_n \in M$

$$\Rightarrow x \in M, \hat{x} = 0$$

Zu $\epsilon > 0$ wähle für $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}, y_1, y_2 \in M$ mit

$$\|\hat{x}_i\| \geq \|x_i - y_i\| - \epsilon$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\|\widehat{x+y}\| &\leq \|x_1 + x_2 - y_1 - y_2\| \\ &\leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \\ &\leq \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| + 2\epsilon\end{aligned}$$

Bemerkung 2.16
Ist $\|\cdot\|$ nur eine Halbnorm auf X, so ist $M = \{x : \|x\| = 0\}$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum von X und der Quotientenraum $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ist ein normierter Raum. ∎

Beispiel 2.17

- Hölderstetige Funktionen
  Wenn $h_\alpha(f) = \sup_{u,v\in\mathbb{R},u\neq v} \frac{\|f(u)-f(v)\|}{|u-v|^\alpha} < \infty \quad (\alpha \in (0,1])$, dann nennt man f hölderstetig.

  $$C^\alpha(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : h_\alpha(f) < \infty\} \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

  Im Moment ist $h_\alpha(\cdot)$ eine Halbnorm. Unter der Voraussetzung Ω zusammenhängend gilt aber weiter:

  $$h_\alpha(f) = 0 \iff f \equiv c \text{ konstant}$$

  Wenn z.B. $M = \{\mathbb{1}\Omega\}$ und $V = C^\alpha/M$ ist oben genanntes sogar ein normierter Raum.

- Lebesgues-Integrierbare Funktionen
  Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : |f|^p$ ist Lesbesgue-integrierbar auf Ω $\}$. Wir definieren $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, wobei $\|\cdot\|_p$ hier eine Halbnorm bildet.

  $$\|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \text{ fast überall auf } \Omega$$

  Wähle $M = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f = 0$ fast überall auf $\Omega\}$.

  Dann ist

  $$L^p(\Omega) := {\mathcal{L}^p(\Omega)}\big/{M} \text{ ein normierter Raum.}$$

3 Beschränkte und lineare Operatoren

Definition 3.1
Eine Teilmenge V eines normieren Raums $(X, \|\cdot\|)$ heißt **beschränkt**, falls

$$c := \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X,\|\cdot\|)}.$$

Bemerkung 3.2
Eine konvergente Folge $(x_n) \in X, x_n \to x$ ist beschränkt, denn $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$ für fast alle m. ■

Satz 3.3
Seien X, Y normierte Räume. Für einen linearen Operator $S : X \to Y$ sind äquivalent:

a) T stetig, d.h. $x_n \to x$ impliziert $Tx_n \to Tx$

b) T stetig in 0

c) $T(U_{(X,\|\cdot\|)})$ ist beschränkt in Y

d) Es gibt ein $c < \infty$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$

Beweis
$a) \Rightarrow b)$ klar, ist ein Spezialfall.

$b) \Rightarrow c)$ Wäre $c)$ falsch, dann gibt es ein $x_n \in U_X$ mit

$$\|Tx_n\| \geq \frac{1}{n^2}$$

Setze $y_n = \frac{1}{n}x_n$, dann gilt

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{n}\|x_n\| \to 0, \|Ty_n\| = n^2\|T(x_n)\| \geq \frac{n^2}{n} \to \infty$$

Widerspruch zur Voraussetzung.

$c) \Rightarrow d)$ Sei $T(U_X) \subset U_Y$
Für $x \in X \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|} \in U_X$ folgt:

$$T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in cU_Y$$

$$\Rightarrow \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq c \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

$d) \Rightarrow a)$ Für $x_n \to x$ in X folgt:

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tx\| &= \|T(x_n - x)\| \\ &\leq c\|x_n - x\| \to 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tx_n \to Tx \text{ in } Y$$

Definition 3.4
Seien X, Y normierte Räume. Mit $B(X, Y)$ bezeichnen wir den **Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren** $T : X \to Y$. Ist $X = Y$ schreiben wir auch kurz $B(X) := B(X, X)$.

Für $T \in B(X, Y)$ setze

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \ 0\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

Die Norm $\|T\|$ von T ist die kleinste Konstante c, für welche die Gleichung $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.

Satz 3.5
$(B(X, Y), \|\cdot\|)$ ist ebenfalls ein normierter Raum und für $X = Y$ gilt für $S, T \in B(X)$:

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\|\|T\|$$

Beweis
$\|T\| \geq 0, \ \|T\| = 0 \ \Rightarrow \|Tx\| = 0$ für $\|x\| \leq 1 \ \Rightarrow \ Tx = 0 \ \Rightarrow \ T = 0$

$$\begin{aligned} \|(T + S)(x)\| = \|Tx + Sx\| &\leq \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq \|T\| + \|S\| \end{aligned}$$

Nehme das Supremum über $\|x\| \leq 1$:

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

$$\begin{aligned} \|(S \cdot T)(x)\| = \|S(Tx)\| &\leq \|S\|\|Tx\| \\ &\leq \|S\|\|T\|\|x\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|ST\| \leq \|S\|\|T\|$$

Beispiel 3.6

a) $Idx = x, \quad \|Id\| = 1$

b) Falls $dim X = n < \infty, Y$ normierter Raum, dann sind alle linearen Operatoren $T : X \to Y$ beschränkt.

Beweis
Wähle die Basis $e_1, \dots, e_n$ von X
Für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ gilt:

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \|\sum_{i=1}^n x_i Te_i\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|Te_i\| \\ &\leq \max_{i=1}^n \|Te_i\|_Y \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &\leq c\|x\|, \text{ da } \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|\end{aligned}$$

Aber: Wenn $dimX = \infty, dimY < \infty$ so gibt es viele unbeschränkte, lineare Operatoren von X nach Y.

c) $X = C^\infty(0,1), \|f\|_\infty = \sup_{u\in(0,1)} |f(u)|$
$T : X \to X, Tf = f', f_k(t) = e^{i2\pi kt} \in X, Tf_k(t) = 2\pi ik f_k(t)$
$\|f_k\| = 1, \|Tf_k\| = 2\pi k \to \infty$

d) $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \text{ bis auf endlich viele } n\}$

$$T : \mathbb{F} \to \mathbb{R}, \quad T((x_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} nx_n \in \mathbb{R}, \quad \|Te_n\| = n \to \infty$$

Beispiel 3.7 (Integraloperator)
$X = Y = C(\bar\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Gegeben sei $k \in \bar\Omega \times \bar\Omega \to \mathbb{R}$

Für $f \in C(\bar\Omega)$ setze: $Tf(u) = \int_\Omega k(u,v)f(v)dv, \quad (A(f_j))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}f_j, A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n})$

Dann ist $Tf \in C(\bar\Omega)$ (nach Lebesguesschem Konvergenzsatz)

$$\begin{aligned}|Tf(u)| &\leq \int_\Omega |k(u,v)||f(u)|du \\ &\leq \int_\Omega |k(u,v)|du \sup_{u\in\Omega} |f(u)|\end{aligned}$$

sup über $u \in \Omega$ liefert dann:

$$\begin{aligned}&\|Tf\|_\infty \leq \sup_{u\in\Omega} \int |k(u,v)|dv\|f\|_\infty \\ &\Rightarrow \|T\| = \sup_{u\in\Omega} \int |k(u,v)|dv < \infty,\end{aligned}$$

Die Abbildung $u \in \bar\Omega \to \int |k(u,v)|dv \in \mathbb{R}$ ist stetig nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue.

Beweis
" $\leq$ " ist klar
" $\geq$ " Falls $k(u,v) \geq 0$ dann ist $T \cdot \mathbb{1}(u) = \int k(u,v)dv = \int |k(u,v)|dv$

$$\|T \cdot \mathbb{1}\| = \sup_{u\in\Omega} \int |k(u,v)|dv \leq \|T\|, \text{ d.h. } \|\mathbb{1}\| = 1$$

Skizze:

$$\sup \int |k(u,v)|dv \sim \int |k(u_0,v)|dv = \int k(u_0,v)g(v)dv$$

mit $g(v) = sign(v)k(u_0,v)$, $\;g$ ist aber nicht stetig.
Ggf. Approximation des Signums durch stetige Funktionen.

Beispiel 3.8 (Kompositionsoperator)
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$\sigma : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega} \text{ stetig, für } f \in C(\bar{\Omega}) : Tf(u) = f(\sigma(u))$$

z.B.: σ als Transposition der Elemente in Ω

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \|T\| = 1$$

Beispiel 3.9 (Differentialoperatoren)
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}$, $X = C^m(\bar{\Omega}), Y = C_b(\Omega)$,

$$T : X \to Y,\; Tf(u) = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha D^\alpha f(u), u \in \mathbb{R}, a_\alpha \in C\bar{\Omega}$$

$$\text{damit } \|Tf\|_\infty \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \|a_\alpha\|_\infty \|D^\alpha f\|_\infty \leq c\|f\|_\infty$$

Beispiel 3.10 (Matrizenmultiplikation)
Für $p \in [1,\infty]$ und $T \in B(\ell^p)$ setzen wir

$$e_l := (0,\dots,0,1,0,\dots), \quad l \in \mathbb{N}, \quad \text{wobei die 1 an l-ter Stelle steht.}$$

und $a_{kl} = (Te_l)_k$, sowie $A = (a_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}}$

$$\Rightarrow (Tx)_k = (\sum_{l=1}^{\infty} x_l Te_l)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}k_l, \quad k \in \mathbb{N} \Rightarrow Tx = Ax \text{ (unendliches Matrixprodukt)}$$

a) Die Hille-Tamarkin-Bedingung (nur hinreichend)
Sei $p \in (1,\infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Setze

$$c := \left(\sum_{k\geq 1} \left(\sum_{l\geq 1} |a_{kl}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

so definiert T einen Operator $T \in B(\ell^p)$ mit $\|T\| \leq c$

Beweis

(i) Wohldefiniertheit: (und Beschränktheit)
Für $x \in \ell^p$ folgt

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k\geq 1} |(Tx)_k|^p \\
&= \sum_{k\geq 1} |\sum_{l\geq 1} |a_{kl}x_l|^p \\
&\leq \sum_{k\geq 1} \left(\sum_{l\geq 1} |a_{kl}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{l\geq 1} |x_l|^p \right)^{\frac{p}{q}} \\
&= c^p \|x\|_{\ell^p}^p < \infty
\end{aligned}$$

(ii) Linearität
Wegen $c < \infty$ ist $(\sum_l |a_{kl}|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty, \ \forall k \in \mathbb{N}$
Für $x \in \ell^p$ konvergiert die Reihe nach Hölder. Damit ist T offensichtlich linear.

b) Der Fall ℓ^1:
Es ist $T \in B(\ell^1)$ genau dann, wenn

$$c_1 := \sup_l \sum_k |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist $\|T\| = c_1$.

Beweis
" $\Rightarrow$ " Sei $T \in B(\ell^1)$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_k |a_{kl}| &= \sum_k |(Te_l)_k| \\
&= \|Te_l\|_{\ell^1} \\
&\leq \|T\| \|e_l\|_{\ell^1} = \|T\| < \infty
\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem gilt $\|T\| \leq c_1$

c) Der Fall ℓ^∞:
Es ist $T \in B(\ell^\infty)$ genau dann, wenn

$$c_\infty := \sup_k \sum_l |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist $\|T\| = c_\infty$

Beweis
" $\Rightarrow$ " Sei $T \in B(\ell^\infty)$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze dann $x^{(k)} = \begin{cases} \frac{|a_{kl}|}{a_{kl}} & a_{kl} \neq 0 \\ 0 & a_{kl} = 0 \end{cases}$
dann ist $x^{(k)} \in \ell^\infty$ mit $\|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} = 1$ und weiter

$$\begin{aligned}
\sum_l |a_{kl}| &= |\sum_{l=1}^\infty a_{nl} x_l^{(k)}| \\
&= |(Tx^{(k)})_k| \\
&\leq \|Tx^{(k)}\|_\infty \\
&\leq \|T\| \|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} = \|T\|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_\infty \leq \|T\|$$

" $\Leftarrow$ " folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem gilt $\|T\| \leq c_\infty$

d) Interpolation
Ist $T \in B(\ell^1) \cap B(\ell^\infty)$, dann ist $T \in B(\ell^p)$ für alle $p \in (1, \infty)$ mit $\|T\| \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}}$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Beweis
Für $x \in \ell^p$ setzen wir $y_k := |(Tx)_k|^{p-1}, \quad k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \|y\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k\geq 1} |(Tx)_k|^{\overbrace{q(p-1)}^{=p}} \right)^{\frac{1}{q}} = \|Tx\|_{\ell^p}^{p-1}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k\geq 1} y_k |(Tx)_k| \leq \sum_{k\geq 1}\sum_{l\geq 1} y_k |a_{kl}||x_l| \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{l\geq 1} |a_{kl}|^{\frac{1}{p}} |a_{kl}|^{\frac{1}{q}} |y_k||x_l| \\
&\leq \left(\sum_{k\geq 1}\sum_{l\geq 1} |a_{kl}||y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k\geq 1}\sum_{l\geq 1} |a_{kl}||x_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c_\infty^{\frac{1}{q}} \|y\|_{\ell^q} c_1^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\ell^p} \\
&= c_\infty^{\frac{1}{q}} c_1^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\ell^p} \|Tx\|_{\ell^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_{\ell^p} \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell^p} \text{ und } \|T\| \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}}$$

Definition 3.11
Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

a) T heißt **Isometrie**, falls $\|Tx\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$

b) T heißt **stetige Einbettung**, falls T stetig und injektiv ist

c) T heißt **isomorphe Einbettung**, falls T injektiv ist und ein $c > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_x$$

In diesem Fall identifizieren wir oft X mit dem Bild von T in Y, $X \cong T(X) \subset Y$

d) T heißt **Isomorphismus**, falls T bijektiv und stetig ist und $T^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

$$\text{d.h. falls } \exists c > 0 : \frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

(daraus folgt dann auch für $T^{-1} : Y \to X$ aus der ersten Ungleichung

$$\|T^{-1}y\|_X \leq c\|T(T^{-1}y)\|_Y = c\|y\|_Y, \text{d.h. } T^{-1} \text{ ist stetig.)}$$

In diesem Fall Identifizieren wir $X \cong Y$ und sagen X und Y sind isomorph. (da X, Y normierte Vektorräume sind, fordern wir im Gegensatz zur Linearen Algebra, dass T, T^{-1} zusätzlich stetig)

Beispiel 3.12
a) Seien $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ normierte Vektorräume. Dann gilt

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \iff I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2), Ix = x \text{ ist isomorph}$$

b) $I : c_0 \hookrightarrow \ell^\infty, Ix = x$ ist isometrische Einbettung

Definition 3.13
Sei X ein normierter Vektorraum. Der Raum

$$X' = B(X, \mathbb{K})$$

heißt **Dualraum** von X oder Raum der linearen Funktionalen.

Beispiel 3.14
Sei $X = \ell^p$ für $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Die Abbildung

$$\Phi_p : \ell^p \to (\ell^p)', \quad [\Phi_p(x)](y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x \in \ell^p, y \in \ell^q$$

Ist ein isometrischer Isomorphismus, d.h. $(\ell^p)' \cong \ell^q$, (insbesondere $(\ell^2)' \cong \ell^2$)

Beweis
Nach Hölder konvergiert die Reihe $[\Phi_p(x)](y)$ absolut mit

$$|[\Phi_p(x)](y)| \leq \sum_n |x_n y_n| \leq \|x\|_{\ell^q} \|y\|_{\ell^p}$$

Da $\Phi_p(x)$ linear in Y ist, folgt $\Phi_p(x) \in (\ell^p)'$ mit

$$\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \leq \|x\|_{\ell^q}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \geq \|x\|_{\ell^q}$ und Φ_p surjektiv ist. Sei $y' \in (\ell^p)'$, dann setze $x_n := y'(e_n), n \in \mathbb{N}$ und $x = (x_n)_{n \geq 1}$. Setze außerdem

$$z_n := \begin{cases} \frac{|x_n|^q}{x_n} & x_n \neq 0 \\ 0 & x_n = 0 \end{cases}, \quad n \ \in \mathbb{N}$$

Dann gilt für $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q &= \sum_{n=1}^{N} x_n z_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} y'(e_n) z_n = y'\left(\sum_{n=1}^{N} z_n e_n\right) \\
&\leq \|y'\|_{(\ell^p)'} \| \underbrace{\sum_{n=1}^{N} z_n e_n}_{=\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}} \|_{\ell^p} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\text{Also zusammen:} \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|y\|_{(\ell^p)'}, \text{ wobei } 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

$$\xRightarrow{N \to \infty} \|x\|_{\ell^q} \leq \|y'\|_{\ell^\infty} < \infty, \text{ d.h. } x \in \ell^q \tag{3.1}$$

Da für $y \in \ell^p$

$$\|y - \sum_{n=1}^{N} y_n e_n\|_{\ell^p}^p = \sum_{n \geq N+1} |y_n|^p \to 0 \text{ für } N \to \infty$$

folgt

$$|y'(y) - \sum_{n=1}^{N} y'(y_n e_n)| \leq \|y'\| \|y - \sum_{n=1}^{N} y_n e_n\|_{\ell^p} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

und damit

$$\begin{aligned}
[\Phi_p(x)](y) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n e_n) \quad \forall y \in \ell^p \\
&= y'(y)
\end{aligned}$$

d.h. $\Phi_p(x) = y'$ und damit Φ_p surjektiv. Außerdem gilt nach (3.1)

$$\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \geq \|x\|_{\ell^q},$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Bemerkung

a) Analog zu obigem zeigt man $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$ und $(c_0)' \cong \ell^1$

b) Eine ähnliche Aussage gilt auch für L^p-Räumen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: Hier gilt:

$$L^p(\Omega, \mu)' \cong L^q(\Omega, \mu)$$

wobei $p \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bezüglich der Dualität: $[\Phi_p(f)](g)(= \langle f, g \rangle) = \int_\Omega f(x) g(x) d\mu(x)$

Beispiel 3.15

a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $x \in K$. Dann definieren wir

$$\delta_x(f) := f(x) \text{ für } f \in C(K)$$

Wir versetzen $C(K)$ mit der Supremumsnorm. Dann gilt:

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

und offensichtlich ist δ_x linear, d.h. $\delta_x \in (C(K))'$ mit $\|\delta_x\| \leq 1$.

b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und μ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}(K)$. Dann definieren wir

$$\delta_\mu(f) = \int_K f(x) d\mu(x) \text{ für } f \in C(K)$$

Dann gilt

$$|\delta_\mu(f)| \leq \mu(K) \|f\|_\infty.$$

Da δ_μ linear ist, gilt $\delta_\mu \in (C(K))'$ mit $\delta_\mu \leq \|\mu(K)\|$. In diesem Sinne sind Maße Elemente von $(C(K))'$

Bemerkung 3.16

Man kann zeigen, dass $(C(K))' \cong M(K)$, wobei $M(K)$ die Menge der 'regulären' Borelmaße versehen mit der Variationsnorm ist. Die Dualität ist gegeben durch

$$(T\mu)(f) = \int_K f(x) d\mu(x)$$

■

4 Metrische Räume

Definition 4.1

a) Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf M, falls $\forall x, y, z \in M$:

$$(M1) \quad d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \iff x = y \text{ (positive Definitheit)}$$

$$(M2) \quad d(x,y) = d(y,x) \text{ (Symmetrie)}$$

$$(M3) \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

Das Tupel (M, d) nennen wir dann einen metrischen Raum.

b) Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset M$ konvergiert gegen $x \in M$, falls

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Notation: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (in M)

Bemerkung
Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist stets eindeutig, denn:
Sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = y \in M$, dann folgt:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \\ &\to 0 \text{ für } n \to \infty \end{aligned}$$

d.h. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

Beispiel 4.2

a) Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subset X$ (nichtleere) Teilmenge.
Dann definiert $d(x,y) := \|x - y\|, \quad x, y \in M$ eine Metrik auf M
Ein Unterschied hier: Eine Norm setzt eine lineare Struktur auf X voraus, eine Metrik macht auch Sinn auf nicht-linearen Teilmengen.

b) Sei M eine nichtleere Menge, dann definieren wir die **diskrete Metrik** auf M durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

Dann ist (M, d) ein metrischer Raum und es gilt:

$$x_n \to x \text{ in } M \iff \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = x \ \ \forall n \geq N$$

Beispiel 4.3

a) Sei X ein Vektorraum und p_j für $j \in \mathbb{N}$ Halbnormen auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X \setminus 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ exisitert mit $p_K > 0$. Dann definiert

$$p := \sum_{j\geq 1} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}, \qquad x, y \in X$$

eine Metrik auf X mit

$$d(x_n, x) \to 0 \iff p_j(x_n - x) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Beweis siehe Übung

b) Für $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{K}\}$ und $p_j(x) := |x_j|, j \in \mathbb{N}$ definiert also

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} \text{ gerade die komponentenweise Konvergenz auf } X$$

c) In ℓ^∞ entspricht die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ gerade der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $x_n := (x_{n,i})_{(i\in\mathbb{N})}$ gegen $x := (x_i)_{(i\in\mathbb{N})}$

$$\|x_n - x\|_{\ell^\infty} = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_{n,i} - x_i| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

d) In $C[a,b]$ entspricht die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ebenfalls die gleichmäßige Konvergenz von Funktionen

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ in } [a,b] &\iff \|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \to 0 \\ &\iff f_n \to f \text{ gleichmäßig.} \end{aligned}$$

Definition 4.4
Sei (M,d) ein metrischer Raum.

a) Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **abgeschlossen** (in M), falls für alle in M konvergenten Folgen $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ der Grenzwert von (x_n) in A liegt

b) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen** (in M), falls zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$\{y \in M : d(x,y) < \epsilon\} \subset U$$

Bemerkung 4.5

a) Wir benutzen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} K(x,r) &:= \{y \in M : d(x,y) < r\} \quad \textbf{offene Kugel} \\ \bar{K}(x,r) &:= \{y \in M : d(x,y) \leq r\} \quad \textbf{abgeschlossene Kugel} \end{aligned}$$

für $x \in M, r > 0$. Man sieht leicht, dass $K(x,r)$ offen und $\bar{K}(x,r)$ abgeschlossen ist.

Beweis

(i) Sei $y \in K(x,r)$ und wähle $\rho := r - d(x,y) > 0$
Wir zeigen: $K(y,\rho) \subset K(x,r)$ (Dann ist $K(x,r)$ offen). Sei dazu $z \in K(y,\rho)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) &\leq r - \rho + d(z,y) \\ &\leq r - \rho + \rho = r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z \in K(x,r)$$

Da z beliebig war, folgt die Behauptung.

(ii) Sei $(y_n)_{n\geq 1} \subset \bar{K}(x,r)$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in M$. Wir müssen zeigen, dass $y \in \bar{K}(x,r)$ (Dann ist $\bar{K}(x,r)$ abgeschlossen).

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,y_n) + d(y_n,y) \\ &\leq r + d(y_n,y) \to r \\ &\Rightarrow d(x,y) \leq r, \text{ d.h. } y \in \bar{K}(x,r). \end{aligned}$$

b) $\emptyset, M$ sind sowohl offen, als auch abgeschlossen (in M)

c) Bezüglich der diskreten Metrik d aus Beispiel 4.2 b) ist $\{x\} \subset M$ offen für jedes $x \in M$, da
$$K(x,r) = \{x\} \subset \{x\} \text{ für } r \in (0,1]$$
■

Wir fassen als Nächstes die grundlegenden Eigenschaften offener und abgeschlossener Mengen zusammen.

Proposition 4.6
Sei (M,d) ein metrischer Raum und I eine beliebige Indexmenge

a) $A \subset M$ ist abgeschlossen in M genau dann, wenn $U = M \setminus A$ offen ist

b) Für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen $(A_i)_{i\in I}$ sind
$$A := \bigcap_{i\in I} A_i \quad \text{und} \quad A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_N} \quad (i_1,\ldots,i_N \in I)$$
abgeschlossen in M.

c) Für eine beliebige Familie offenere Mengen $(U_i)_{i\in I}$ sind
$$U := \bigcup_{i\in I} U_i \quad \text{und} \quad U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N} \quad (i_1,\ldots,i_N \in I)$$
offen in M.

Beweis

a) Sei U nicht offen. Dann existiert ein $X_0 \in U$ und ein $x_n \in K(x_0, \frac{1}{n})$ mit $x_n \notin U$, d.h. $x_n \in U^c = A \forall n \in \mathbb{N}$.
Da $d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n} \to 0$ und $x_0 \notin A$, ist A nicht abgeschlossen.

Sei umgekehrt A nicht abgeschlossen. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin A$, d.h. $x \in U$.
Für beliebige $\epsilon > 0$ existiert dann ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \epsilon \ \forall n \geq N_\epsilon$
$\Rightarrow (x_n)_{n\geq N_\epsilon} \subset K(x,\epsilon) \cap A = K(x,\epsilon) \cap U^c$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0$ ist $K(x,\epsilon) \not\subset U$, d.h. U ist nicht offen.

b) folgt aus a) & c), da
$$M \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} M \setminus A_i$$

c) Sei $x \in U$. Dann exisitert ein U_{i_0} mit $x \in U_{i_0}$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : K(x,r) \subset U_{i_0} \subset U, \text{ d.h. } U \text{ ist offen.}$$

Sei $x \in U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N}$. Dann existieren $r_1, \ldots, r_N > 0$ mit

$$K(x, r_n) \subset U_{i_n} \quad n = 1, \ldots, N$$

Setze $r := \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$. Dann ist $K(x,r) \subset U_{i_n} \ \forall n \in \{1, \ldots, N\}$

$$\Rightarrow K(x,r) \subset U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N},$$

d.h. $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N}$ ist offen.

Definition 4.7
Sei (M,d) ein metrischer Raum und $V \subset M$. Dann heißt

a) $\bar{V} := \bigcap\{A \subset M : A \text{ ist abgeschlossen mit } V \subset A\}$ der **Abschluss** von V.

b) $\mathring{V} := \bigcup\{U \subset M : U \text{ ist offen mit } U \subset V\}$ das **Innere** von V.

c) $\partial V := \bar{V} \setminus \mathring{V}$ der **Rand** von V.

Hierfür gelten die folgenden Eigenschaften:

Proposition 4.8
Sei (M,d) ein metrischer Raum und $V \subset M$

a) (i) $\bar{V}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die V enthält.

(ii) V ist abgeschlossen $\iff V = \bar{V}$

(iii) $\bar{V} = \{x \in M : \exists (x_n) \subset V \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x\} =: \tilde{V}$

b) (i) $\mathring{V}$ ist die größte offene Teilmenge von V.

(ii) V ist offen $\iff V = \mathring{V}$

(iii) $\mathring{V} = \{x \in M : \exists \epsilon > 0 \text{ mit } K(x,\epsilon) \subset V\} =: \hat{V}$

c) (i) ∂V ist abgeschlossen.

(ii) $\partial V = \{x \in M : \exists (x_n) \subset V, (y_n) \subset M \ V \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x\}$

Beweis

a) (i) Nach Definition gilt $V \subseteq \bar{V}$ und $\bar{V}$ ist nach Proposition 4.7.
Falls $V \subseteq A \subseteq \bar{V}$ und A abgeschlossen, dann gilt $\bar{V} \subseteq A$ nach der Definition von $\bar{V}$, d.h. $A = \bar{V}$.

(ii) folgt aus (i)

(iii) Per definition ist $\tilde{V}$ abgeschlossen, denn zu $(x_n) \subseteq \tilde{V}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$ existieren Folgen $(x_{n,m})_{m\geq 1}$ mit $\lim_{m\to\infty} x_{n,m} = x_n$.
Dann folgt aber für $(x_{n,m})_{n\geq 1} \subseteq V$:

$$d(x, x_{n,m}) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_{n,m}) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

d.h. $x \in \tilde{V}$. Sei nun $A \subseteq M$ abgeschlossen mit $V \subseteq A$. Dann gilt nach Definition 4.4 $\tilde{V} \subseteq A$ und nach (i) damit $\bar{V} = \tilde{V}$.

b) (i) zeigt man wie a) (i)

(ii) folgt aus (i)

(iii) $\hat{V}$ ist per Definition offen, denn zu $x \in \hat{V}$ existiert ein $\epsilon > 0$ mit $K(x, \epsilon) \subseteq V$.
Dann existiert aber zu jedem $y \in K(x, \epsilon)$ und $\delta > 0$ mit $K(y, \delta) \subseteq K(x, \epsilon) \subseteq V$, d.h. $y \in \hat{V}$. $\Rightarrow K(x, \epsilon) \subseteq \hat{V}$
Falls nun $U \subseteq V$ offen, so ist nach Definition 4.4 $U \subset \hat{V}$ und somit $\mathring{V} = \hat{V}$ nach (i)

c) (i) Da $\partial V = \bar{V}_n (V^\circ)^c$ ist ∂V als Schnitz zweier abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen.

(ii) Nach Definition 4.6 gilt $\mathring{V}^c = \overline{V^c}$ (und $\left(\bar{V}\right)^c = (V^c)^\circ$)
Damit folgt die Behauptung auf $\partial V = \bar{V}_n \bar{V}^c$ und a)

Definition 4.9
Sei (M, d) ein metrischer Raum

a) Eine Menge $V \subset M$ heißt **dicht** in M, falls $\bar{V} = M$, d.h. jeder Punkt in M ist Grenzwert einer Folge aus V.

b) M heißt **seperabel**, falls es eine abzählbare Teilmenge $V \subset M$ gibt, die dicht in M liegt.

Bemerkung 4.10

a) All die Begriffe und Bezeichnungen aus Definition 4.4, Bemerkung 4.5, Definition 4.7 und Definition 4.9 werden wir auch in normieren Räumen benutzen bzgl. der kanonischen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

b) Sei (M, d) ein metrischer Rauam, $U \subset M$. Dann ist auch (U, d) ein metrischer Raum. Für $V \subset U$ muss man dann aber unterscheiden bzgl. Abgeschlossenheit (bzw. Offenheit) von V in U oder in M. Man sagt dann, dass V **relativ offen** bzw. **relativ abeschlossen** in U ist. ■

Beispiel 4.11

a) Sei X ein normierter Vektorraum (!), $x \in X, r > 0$. Dann gilt

(i) $\bar{K}(x, r) = \overline{K(x, r)}$

(ii) $\bar{K}(x, r)^\circ = K(x, r)$

(iii) $\partial \bar{K}(x, r) = \partial K(x, r) (= \{y \in X : \|x - y\| = r\})$

Beweis

(i) Da $\bar{K}(x, r)$ abgeschlossen ist mit $K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)$ folgt aus Proposition Proposition 4.8 a) (i) $\overline{K(x, r)} \subset \bar{K}(x, r)$. Sei umgekehrt $y \in \bar{K}(x, r)$ und $y_n = y - \frac{1}{n}(y - x), n \in \mathbb{N}$. Dann ist $y_n \in K(x, r)$ mit $\lim_{n \to \infty} y_n = y$, d.h. $y \in \overline{K(x, r)}$ nach Proposition 4.8 a) (iii).

(ii) Da $K(x, r)$ offen ist mit $K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)$ folgt mit Proposition 4.8 b) (ii):

$$K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)^\circ$$

Sei umgekehrt $y \in \bar{K}(x, r)^\circ$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ mit $K(y, \epsilon) \subseteq \bar{K}(x, r)$.
Angenommen $\|x - y\| = r$. Setze in diesem Fall $z := y + \frac{\epsilon}{2r}(y - x)$. Dann gilt $z \in K(y, \epsilon$, aber $z \notin \bar{K}(x, r)$, was zu einem Widerspruch führt.
Also ist $\|x - y\| \leq r$, d.h. $y \in K(x, r)$.

(iii) Aussage über Rand folgt aus i) und ii)

b) Die Aussagen in a) sind im Allgemeinen falsch für metrische Räume.
Sei M nichtleer mit mindestens 2 Elementen und d die diskrete Metrik, dann gilt:

$$K(x,1) = \{x\}, \quad \bar{K}(x,1) = M, \quad \overline{K(x,1)} = \{x\}$$

$\Rightarrow \overline{K(x,1)} \subsetneq \bar{K}(x,1)$

c) Sei $X = C[0,1]$ und $a, b > 0$ mit $a < b$. Dann ist die Menge

$$A := \{f \in X : f(t) \in (a,b) \quad \forall t \in [0,1]\}$$

offen mit

$$\bar{A} = \{f \in X : f(t) \in [a,b] \quad \forall t \in [0,1]\}$$
$$\partial A = \{f \in \bar{A} : \exists t \in [0,1] \text{ mit } f(t) \in (a,b)\}$$

Beweis

(i) Sei $f \in A$ beliebig. Da f stetig auf $[0,1]$ existieren $t_1, t_2 \in [0,1]$ mit

$$f(t_1) = \min_{t \in [0,1]} f(t) =: c_1 > a$$
$$f(t_2) = \max_{t \in [0,1]} f(t) =: c_2 < b$$

Für $\epsilon \in (0, \min\{0, \min\{c_1 - a, b - c_2\})$ gilt dann $K(f, \epsilon) \subseteq A$, d.h. A ist offen.

(ii) Da Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ punktweise Konvergenz impliziert, folgt direkt

$$\bar{A} \subset \{f \in X : f(t_0 \in [a,b]\}$$

Ist umgekehrt $f \in X$ mit $f(t_0) \in [a,b]$, so definieren wir

$$f_n(t) = \begin{cases} a + \frac{1}{n} & , f(t) \leq a + \frac{1}{n} \\ b - \frac{1}{n} & , f(t) \geq b - \frac{1}{n} \\ f(t) & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_n \in A \text{ mit } \|f_n - f\|_\infty \to 0 \ (n \to \infty), \text{ d.h. } f \in \bar{A}$$

(iii) Aussage über ∂A folgt aus i) und ii)

d) Sei X ein normierter Vektorraum und $Y \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{linY} = X$. Dann ist X separabel.

Beweis

Wir definieren

$$lin_{\mathbb{Q}} Y = \{y = \sum_{i=1}^{n} q_j y_j : q_j \in \mathbb{Q} \quad (q_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}), y_j \in Y, n \in \mathbb{N}\}$$

Dann ist $linY$ abzählbar, da Y abzählbar ist. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig, $x \in X$.
Nach Voraussetzung existiert dann ein $y \in linY$ mit $\|x - y\| < \epsilon$
Zu diesem y finden wir ein $z \in lin_{\mathbb{Q}} Y$ mit $\|y - z\| < \epsilon$

$$\Rightarrow \|x - z\| < 2\epsilon, \quad \text{d.h. } lin_{\mathbb{Q}} Y = X$$

e) $C[0,1]$ ist separabel, da $lin\{t^n, n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $C[0,1]$ liegt nach dem Approximationssatz von Weierstrass.

f) Die Räume $\ell^p, p \in [1,\infty)$ und c_0 sind separabel, da

$$D = lin\{e_k, k \in \mathbb{K}\} \text{ dicht in allen Räumen liegt.}$$

g) Der Raum ℓ^∞ ist nicht separabel:
Die Menge Ω der $\{0,1\}$-wertigen Folgen ist überabzählbar. Für $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt $\|x-y\|_\infty = 1$
Angenommen: $\overline{\{v_k, k \in \mathbb{N}\}} = \ell^\infty$. Dann

$$\Omega \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K\left(v_k, \frac{1}{4}\right)$$

Wegen $\|x-y\|_{\ell^\infty} = 1 \; \forall x, y \in \Omega$ kann aber in jeder Kugel $K(v_k, \frac{1}{4})$ nur ein Element auf Ω liegen. (d.h. zu $x \in \Omega$ existiert ein $k(x) \in \mathbb{K}$ mit $x \in K(v_{k(x)}, \frac{1}{4})$)
$\Rightarrow$ die Abbildung $J : \Omega \to \mathbb{N}, x \to k(x)$ ist injektiv
$\Rightarrow$ Ω ist abzählbar, Widerspruch.

Schließlich betrachten wir Stetigkeit:

Definition 4.12
Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume.
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **stetig in** $x_0 \in M$, falls für alle $(x_n) \subset M$ gilt

$$x_n \to x_0 \text{ in } M \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \text{ in } N$$

$$(d_M(x_n, x_0) \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \qquad d_N(f(x_n), f(x_0)) \to \quad (n \to \infty))$$

Die Abbildung f heißt **stetig auf** M, falls f in jedem Punkt von M stetig ist.

Hierfür gelten folgende Eigenschaften:

Proposition 4.13
Sei $(K, d_K), (M, d_M)$ und (N, d_N) metrische Räume und $f : M \to N, g : K \to M$. Dann gilt:

a) Ist g stetig in x_0, f stetig in $g(x_0)$, dann ist auch

$$f \circ g : K \to N \text{ stetig in } x_0$$

b) f ist stetig in $x_0 \in M$ genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, x_0) < \delta \text{ gilt } d_N(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist stetig auf M

(ii) Ist $U \subset N$ offen, so ist auch $f^{-1}(U)$ offen in M

(iii) Ist $A \subset N$ abgeschlossen, so ist auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in M.

Beweis

a) Folgt direkt aus der Definition

b) " $\Rightarrow$ ": Annahme, das ϵ-δ-Kriterium gilt nicht. Dann existiert eine $\epsilon > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K(x_0, \frac{1}{n}) mit d_M(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$.
Dann gilt aber $d_M(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ und $d_N(f(x_n, f(x_0)) \geq \epsilon \not\to 0$ für $n \to \infty$, d.h. f ist nicht stetig in x_0.

" $\Leftarrow$ ": Es gelte das ϵ-δ-Kriterium. Sei $(x_n) \subseteq M$ mit $x_n \to x_0, \epsilon > 0$.
Dann gilt $d_N(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$ für n groß genug. Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt $d_N(f(x_n), f(f_0)) \to 0$ für $n \to \infty$.

c) $(i) \Rightarrow (iii)$: Sei $A \subseteq N$ abgeschlossen und $(x_n) \subseteq f^{-1}(A)$ mit $x_n \to x$ in M für $n \to \infty$.
Dann gilt nach (i) $f(x_n) \to f(x)$ in N für $n \to \infty$.
Da $(f(x_n))_{n \geq 1} \subseteq A$ und A abgeschlossen ist, folgt $f(x) \in A$, d.h. $x \in f^{-1}(A)$.
Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Sei $U \subset N$ offen $\Rightarrow U^c$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(U^c) = f^{-1}(U)^c$ ist abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(U)$ offen.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $x_0 \in M$ beliebig. Für $\epsilon > 0$ ist nach (ii) dann auch $f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$ offen in M.
Da $x_0 \in f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$, existiert ein $\delta > 0$ mit $K(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$
Das bedeutet gerade

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in M \text{ mit } d_M(x_0, x) < \delta \text{ gilt auch}$$

$$d_N(f(x_0), f(x)) < \epsilon$$

Nach b) bedeutet dies gerade, dass f stetig in x_0 ist.

Beispiel 4.14

a) Sind $(M_1, d_1$ und (M_2, d_2) metrische Räume, so definiert

$$d(x, y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$ eine Metrik mit

$$d(x_n, x) \to 0 \iff d_1(x_{n,1}, x_1) \to 0, d_2(x_{n,2}, x_2) \to 0$$

In diesem Sinne ist jede Metrik $d : M \times M \to \mathbb{R}$ stetig. Denn:
Sei $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $M \times M$, d.h.

$$d(x_n, x) \to 0 \text{ und } d(y_n, y) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x, y) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) - d(x, y) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) - d(x, y) \end{aligned}$$

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq \ldots \leq d(x, x_n) + d(y_n, y)$$

$$\Rightarrow |d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y_n, y) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

b) Sei X ein normierter Vektorraum und

$$\begin{aligned} A &: \mathbb{K} \times X \to X, \quad && A(\alpha, x) = \alpha x \\ S &: X \times X \to X, \quad && S(x, y) = x + y \end{aligned}$$

Dann sind A und S stetig.

c) Sei $X = C[0,1], t_0 \in [0,1], \psi : X \to \mathbb{K}, \psi(f) = f(t_0)$
Nach Beispiel 3.15 ist ψ stetig. D.h. ist $A \subset \mathbb{K}$ offen (abgeschlossen), so ist $\psi^{-1}(A)$ offen (abgeschlossen) nach Proposition 4.13.

5 Vollständigkeit

Definition 5.1
Sei (M, d) ein metrischer Raum.

a) $x_n \in M$ heißt **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\forall m, n \geq n_0$ gilt:
$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

b) (M, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge $(x_n) \subset M$ einen Grenzwert in M hat:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad x \in M$$

c) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$, der vollständig ist bezüglich $d(x, y) = \|x - y\|$ heiSSt **Banachraum**.

Bemerkung 5.2

a) Jede konvergenzte Folge in (M, d) ist eine Cauchy-Folge:
$$\text{Sei } \lim_{n\to\infty} x_n = x : \quad d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

b) Aber: nicht jede Cauchy-Folge eines normierten Raums X konvergiert in X

Beispiel
$X = C[0, 2], \quad \|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)|dt, \quad f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$
$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases} \quad \text{für feste } x \in [0, 2]$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt $\|f - f_n\|_1 \to 0$ für $n \to \infty$, aber $f \notin C[0, 2]$
Demnach ist f_n zwar eine Cauchy-Folge, aber f_n konvergiert nicht gegen f in X bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm.

Proposition 5.3
Sei X ein metrischer Raum, Y ei Banachraum.
$$C(x, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ stetig}\}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$$

Dann ist $C(X, Y)$ ein (linearer) Banachraum.

Beispiel
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad C(\Omega, \mathbb{R})$

Beweis
Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $C(X,Y)$.
Für alle $x \in X$:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Für alle $x \in X$: $(f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in Y. da Y vollständig ist, existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in Y.

z.z. $f \in C(X,Y)$, $\quad \|f - f_n\|_\infty \to 0$.
Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0, sodass für alle $x \in X$:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \epsilon$$

Für jedes $x \in X$ fest folgt für $m \to \infty$:

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon \qquad \text{für } n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon \text{ für } n \geq n_0 \qquad \text{nehme das Supremum über } x \in X$$

$f \in C(X,Y)$, da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist.

Beispiel 5.4
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. $C^m(\bar\Omega)$ ist vollständig bezüglich der Supremums-Norm.

Beweis
Für $C^1(\bar\Omega)$ gilt $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_i} f\|_\infty$.
Sei $(f_j) \subset F$ in $C^1(\bar\Omega)$.

$$\Rightarrow (f_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad (\frac{\partial}{\partial x_j} f_j)_{j\in\mathbb{N}}, \quad i = 1,\dots,n \text{ Cauchy-Folgen in } C(\bar\Omega)$$

Da $C(\bar\Omega)$ vollständig ist, existieren für $i \in \{1,\dots,n\}$

$$f = \lim_{j\to\infty} f_j$$

$$g_i = \lim_{j\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} f_j$$

in $C(\bar\Omega)$. Setze $g = (g_1,\dots,g_n)$

z. z. $f \in C^1(\bar\Omega)$ und $g = \nabla f$
Beweis: zu $u \in \Omega$ und v nahe bei u wähle

$$u_t = (1-t)u + tv$$

$$\begin{aligned}
|f_k(v) - f_k(u) - \nabla f_k(u)(v-u)| &= |\int_0^1 [\nabla f_k(u_t) - \nabla f_k(u)](v-u)dt \\
&\leq \int_0^1 |\nabla f_k(u_t) - \nabla f_k(u)|dt(v-u) \\
&\leq \left[\int_0^1 |\nabla f_k(u_t) - g(u_t)|dt + \int_0^1 |g(u_t) - g(u)|dt + \int_0^1 |g(u) - \nabla f_k(u)|dt\right] |v - \\
&\leq \left[z\|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{0\leq t\leq 1} |g(u_t) - g(u)|\right] |v-u|
\end{aligned}$$

$$\text{für } k \to \infty : |f(v) - f(u) - g(u)(v-u)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |g(u_t) - g(u)||v-u|$$

$$\to 0 \text{ für } v \to u \text{ (da g gleichmäßig stetig)}$$

Bemerkung 5.5

a) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ seien äquivalente Normen auf X. Ist X bezüglich $\|\cdot\|_1$, so auch bezüglich $\|\cdot\|_2$.

Beweis
Äquivalente Normen haben gleiche Cauchy-Folgen.

Bsp.: $C^1[0,1]$, $|||f||| = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. Früher: $|||\cdot|||\tilde{|||} \cdot \|_\infty \Rightarrow (C[0,1], |||\cdot|||)$ ist vollständig.

b) Abgeschlossene Teilmengen von Banachräumen sind vollständige metrische Räume bezüglich $d(x,y) = \|x-y\|$

Beweis
$(x_n) \subset M$, Cauchy-Folge in $X \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \in X \underset{M abg.}{\Longrightarrow} x \in M$ existiert.

Bsp.: $X = C([0,1], \mathbb{C}), M = \{f \in X : |f(t)| = 1\}$ ist ein vollständiger metrischer Raum. ∎

Satz 5.6
Sei X ein normiert Raum, Y ein Banachraum. Dann ist $B(X,Y)$ mit der Operatornorm vollständig.
Insbesondere: $X' = B(X, \mathbb{K})$ ist immer vollständig.

Beweis
Sei $(T_n) \subset B(X,Y)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Operatornorm. Sei $x \in X$

$$\|T_n x - T_m\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X$$

Also $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y für alle $x \in X$. Definiere $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$
z.z. $T \in B(X,Y)$, $s\|T_n - T\| \to 0$

$$T_n(x+y) = T_n x + T_n y \xrightarrow[n\to\infty]{} T(x+y) = Tx + Ty$$

$$\begin{aligned} \|Tx - T_n x\| &\overset{Norm\ stetig}{=} \lim_{m\to\infty} \|T_m x - T_n x\| \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \|T_n - T_m\| \|x\| \\ &\leq \epsilon \|x\| \text{ für n groß genug.} \end{aligned}$$

Wobei $\|T - T_n\| \leq \epsilon$ für n groß genug. Also für $\|x\| \leq 1$:

$$\|Tx\| \leq \|T_n x\| + \epsilon \leq \|T_n\| + \epsilon$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \|T_n\| + \epsilon, \quad \text{also } T \in B(X,Y)$$

Bemerkung 5.7 (Exponentialfunktion)
$A \in B(X)$, X Banachraum

- Frage: e^{tA}
- Idee: $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$
- Setze $S_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} t^n A^n$

z. z. S_m ist eine Cauchy-Folge in $B(X)$
Seien $k, m \in \mathbb{N}, k > 0$

$$\begin{aligned}\|S_k - S_m\| &\leq \sum_{n=m+1}^{k} \|\frac{1}{n!} t^n A^n\| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{n!} |t^n| \|A^n\| \xrightarrow[k,m\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

Da $B(X)$ vollständig ist, ist $e^{tA} = \lim_{m\to\infty} S_m$ in $B(X)$. ∎

Proposition 5.8 (Neumann'sche Reihe)
Sei $A \in B(X)$, X ein Banachraum mit $\|A\| < 1$.
Dann ist $Id - A$ invertierbar und

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Beweis
$S_m = \sum_{n=0}^{m} A^n$ ist eine Cauchy-Folge in $B(X)$, denn für

$$\begin{aligned}k > m: \quad \|S_k - S_m\| &\leq \sum_{n=m+1}^{k} \|A^n\| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{k} \|A\|^n \to 0 \text{ für } m, n \to \infty, \text{ da} \|A\| < 1\end{aligned}$$

$R := \lim_{m\to\infty} S_m$ existiert in $B(X)$, da $B(X)$ vollständig.

$$S_m(Id - A) = (Id - A)S_m = Id - A^m$$

mit $\|A^m\| \leq \|A\|^m \to 0$ für $m \to \infty$

$$\Rightarrow R(Id - A) = (Id - A)R = Id, \quad R = (Id - A)^{-1}$$

Korollar 5.9
X sei ein Banachraum und $J : X \to X$ ein (surjektiver) Isomorphismus.
Für $A \in B(X)$ und $\|A\| < \|J^{-1}\|^{-1}$ ist auch $J - A$ ein Isomorphismus

Insbesondere: $G = \{T \in B(X) : T \text{ stetig und invertierbar}\}$ ist eine offene Menge in $B(X)$.

Beweis
Da $J - A = J(Id - J^{-}A)$ folgt:

$$\|J^{-1}A\| \leq \|J^{-1}\| \underbrace{\|A\|}_{<\|J^{-1}\|^{-1}} < 1$$

Nach 5.8 ist $(Id - J^{-1}A)$ invertierbar mit

$$\begin{aligned}(J-A)^{-1} &= (Id - J^{-1}A)^{-1}J^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(J^{-1}A)^n J^{-1}\end{aligned}$$

Proposition 5.10
Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $D \subset X$ ein dichter Teilraum.
Jeder linearere Operator $T : X \to Y$ mit

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \qquad \text{für alle } x \in D$$

lässt sich zu einem eindeutig bestimmten Operator $\tilde{T} \in B(X,Y)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq c$ fortsetzen.

Korollar 5.11
Sei X ein normierter Banachraum, $D \subset X$ dicht in X und sei eine Folge $T_n \in B(X,Y)$, wobei $(T_n x)$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in D$ sei.
Dann gibt es genau einen Operator $T \in B(X,Y)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$$

Beweis
Setze für $x \in D$: $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, da Y vollständig.
Dieses $T : X \to Y$ ist linear.
Nach 5.10 gibt es genau ein $\tilde{T} \in B(X,Y)$ mit $\tilde{T}x = Tx$ für $x \in D$, $\|\tilde{T}\| \leq M$, denn für $x \in D$:

$$\|Tx\| \leq \limsup \|T_n x\| \leq M\|x\|$$

z. z. $\tilde{T}x = \lim_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in X$.
Zu $\epsilon > 0$ wähle $y \in D$ mit $\|x - y\| \leq \frac{\epsilon}{2M}$. Dann:

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}x - T_n x\| &\leq \|\tilde{T}x - Ty\| + \|Ty - T_n y\| + \|T_n y - T_n x\| \\ &\leq \|\tilde{T}\|\|x-y\| + \|Ty - T_n y\| + \|T_n\|\|x - y\|\end{aligned}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|\tilde{T}x - T_n x\| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + \limsup_{n\to\infty} \|Ty - T_n y\| + M\frac{\epsilon}{2M} \leq \epsilon + 0$$

Beispiel 5.12
$e_n(t) = e^{2\pi nit} = \cos(2\pi nt) + i\sin(2\pi nt), \quad D = \{(\alpha_n) \in L^2(\mathbb{Z}) : \text{Nur endlich viele } \alpha_n \neq 0\}$

$$T : \begin{cases} D \to L^2[0,1] \\ (\alpha_n) \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n \end{cases}$$

Wie kann man man unendlich Reihen $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n$ definieren?
Ohne Beweis aus der Fourieranalysis:

- Es gibt $(\alpha_n) \in \mathbb{C}^2$, so dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n(t)$ nicht für alle $t \in [0,1]$ konvergent.
- Für alle $(\alpha_n) \in \mathbb{C}^2$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n(t)$ punktweise für fast alle t $t \in [0,1]$
- $\int_0^1 e_n \overline{e}_m dt = \delta_{n,m}$

Für $(\alpha_n) \in D$ wie in der Linearen Algebra folgt:

$$\begin{aligned}
\| \sum_n \alpha_n e_n(t) \|_{L^2[0,1]}^2 &= \int (\sum_n \alpha_n e_n(t)) \overline{(\sum_m \alpha_m e_m(t))} dt \\
&= \sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m \int e_n(t) \overline{e_m(t)} dt \\
&= \sum_n |\alpha_n|^2
\end{aligned}$$

D.h. $\|T(\alpha_n)\| \leq 1 \left(\sum_n |\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\alpha_n\|_{L^2}$, $(M = 1)$. Nach 5.10 gibt es dann ein $\tilde{T} : \ell^2[0,1] \to L^2(0,1)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq 1$

Zusatz: $T_m((\alpha_n)) = \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n e_n$. $T_m : \ell^2 \to L^2[0,1]$, $\|Tm\| \leq 1$
Für $(\alpha_n) \in \ell^2$ gilt: $T(\alpha_n) = \lim_{m \to \infty} T_m(\alpha_n)$.
Nach Kor. 11: $T_m(\alpha_n) \to T(\alpha_n)$ in $L^2[0,1]$ für alle $(\alpha_n) \in \ell^2$. Damit konvergiert die Partialsumme der Fourierreihen in $L^2[0,1]$.

Proposition 5.13

a) upcoming

Abkürzungsverzeichnis

Beh. Behauptung

Bew. Beweis

bzgl. bezüglich

bzw. beziehungsweise

ca. circa

d. h. das heißt

Def. Definition

etc. et cetera

ex. existieren

Hom. Homomorphismus

i. A. im Allgemeinen

o. B. d. A. ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Prop. Proposition

sog. sogenannte

Vor. Voraussetzung

vgl. vergleiche

z. B. zum Beispiel

zhgd. zusammenhängend

z. z. zu zeigen

Stichwortverzeichnis

abgeschlossen, 19
Abschluss, 21

Banachraum, 27
beschränkt, 10
Bolzano-Weierstrass, 2

c_0-Raum, 7
Cauchy-Folge, 27

dicht, 22
Differentialoperatoren, 13
Dirichletproblem, 4
diskrete Metrix, 18
Dualraum, 16

Einheitskugel, 5

Folgenraum, 7
Fredholm'sche Integralglechung, 3

Hölder-Ungleichung, 7
Hölderstetige Funktionen, 9

Innere, 21
Integraloperator, 12
Isometrie, 15
isomorphe Einbettung, 15
Isomorphismuss, 15

Kompositionsoperator, 13
Konvergenz, 5

l^∞-Raum, 7
l^p-Raum, 7
Lebesgues-Integrierbare Funktionen, 9

Matrizenmultiplikation, 13
Metrik, 18
Minkowskii-Ungleichung, 7

Norm, 5

offen, 19

Quotientenräume, 8

Rand, 21
Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen, 8
Raum der differentierbaren Funktionen, 8
Raum der stetigen Funktionen, 8
relative Abgeschlossenheit, 22
relative Offenheit, 22

seperabel, 22
stetig, 24
stetige Einbettung, 15
Sturm-Liouville Problem, 4

Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren, 11
vollständig, 27

Äquivalenz von Normen, 5