

# Funktionalanalysis

Prof. Dr. Lutz Weis

Wintersemester 2015

Martin Belica

## Einleitung

Die Funktionalanalysis liefert den begrifflichen Rahmen sowie allgemeine Methoden, die in weiten Teilen der modernen Analysis verwendet werden. Zum Beispiel ist es möglich Integral- und Differentialgleichungen als lineare Gleichungen in einem geeigneten unendlichdimensionalen Vektorraum (wie z.B. einem Raum stetiger oder integrierbarer Funktionen) aufzufassen. Will man nun auf diese unendlichdimensionalen Gleichungen Ideen der linearen Algebra anwenden, so treten Konvergenz- und Kompaktheitsprobleme auf, die wir in dieser Vorlesung behandeln wollen. Zu den Themen gehören:

- Beschränkte und abgeschlossene Operatoren auf normierten Räumen
- Stetigkeit und Kompaktheit auf metrischen Räumen
- Geometrie und Operatorentheorie in Hilberträumen
- Der Satz von Hahn-Banach und Dualität von Banachräumen

Die allgemeinen Aussagen werden durch konkrete Beispiele von Räumen und Operatoren der Analysis illustriert.

## Erforderliche Vorkenntnisse

Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lineare Operatoren auf Banachräumen</b>	<b>2</b>
1.1	Einführung . . . . .	2
1.1.1	Räume . . . . .	2
1.1.2	Operatoren . . . . .	2
1.1.3	Anwendungen . . . . .	3
1.2	Normierte Räume . . . . .	4
1.3	Beschränkte und lineare Operatoren . . . . .	8
	<b>Bildquellen</b>	<b>9</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>10</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>11</b>

# 1 Lineare Operatoren auf Banachräumen

## 1.1 Einführung

### 1.1.1 Räume

Sei  $X$  ein Vektorraum,  $\dim X < \infty$  und sei  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 := \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n \|x_i\|$$

Diese Normen sind äquivalent, denn:  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$

#### Satz (Bolzano-Weierstraß)

$A \subset \mathbb{R}$  beschränkt. Dann hat jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  eine konvergente Teilfolge.

#### Beispiel

$X = C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \text{stetig auf } [0, 1]\}$

$$\left. \begin{aligned} \|f\|_2 &:= \left( \int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|f\|_\infty &:= \max_{t \in [0, 1]} \|f(t)\| \end{aligned} \right\} \text{ dabei gilt } \|f\|_\infty \leq \|f\|_2 \leq \dots$$

Aber:  $f_n(t) = \text{Bild}$ ,  $\|f_n\|_\infty = 1$ ,  $\|f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\|f_n - f_m\| = 1$  für  $n \neq m \Rightarrow$  **Satz von Bolzano-Weierstraß** gilt im  $\infty$ -dimensionalen i.A. nicht!

### 1.1.2 Operatoren

Sei  $N = \dim X, M = \dim Y$  und seien  $(e_n)$  bzw.  $(f_n)$  Basen von  $X$  bzw.  $Y$ . Für  $T : X \rightarrow Y$  gegeben durch:

*Komm.Diagramm*

Daraus folgt:

- $T$  ist stetig
- $X = Y \iff T \text{ injektiv} \iff T \text{ surjektiv (Dimensionsformel)}$   
(Die Gleichung  $Tx = y$  ist eindeutig lösbar  $\iff$  Gleichung hat für alle  $y \in Y$  eine Lösung.)

- Falls  $A$  selbstadjungiert ist, d.h.  $A = A^*$ , gibt es eine Basis aus Eigenvektoren  $(e_n)$  von  $A$ ,  
d.h.  $T(\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \alpha_n e_n$ , wobei  $\lambda_n$  Eigenwerte sind  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

**Beispiel (1)**

$X = C^1[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \text{stetig auf } [0, 1]\}$   $Tf = f'$ ,  $T : X \rightarrow Y$  stetig.

(Aber:  $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , hier ist  $T$  nicht definiert.)

$T$  ist nicht stetig bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm, da:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}, \quad \text{dann: } \|f_n\| \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

$$Tf_n(t) = i\sqrt{n}e^{int}, \quad \text{mit: } \|Tf_n\|_\infty \rightarrow \infty, \text{ für } n \rightarrow \infty$$

**Beispiel (2)**

$$X = L_2 = \{(a_n) : \left(\sum_{n \geq 1} \|a_n\|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$$

$$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$T$  ist injektiv, aber nicht surjektiv

**1.1.3 Anwendungen**

- (1) Fredholm'sche Integralgleichungen
- (2) Dirichletproblem
- (3) Sturm-Liouville Problem

## 1.2 Normierte Räume

### Definition

Sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Eine Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  heißt eine Norm, wenn

$$(1) \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Bemerkung:** Falls  $\|\cdot\|$  all die oben genannten Eigenschaften erfüllt außer  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ , dann heißt  $\|\cdot\|$  Halbnorm

**Vereinbarung:** Die Menge  $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  heißt **Einheitskugel**.

Eine Folge  $(x_n)$  des normierten Raums  $X$  **konvergiert** gegen ein  $x \in X$ , falls  $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Bemerkung:** Für zwei Elemente  $x, y \in (X, \|\cdot\|)$  ... gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung ( $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\|$ )

### Beispiel

Sei  $X = \mathbb{K}^n$ ,  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i = \mathbb{K}$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j^p| \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty (p = 2 : \text{Euklidische Norm})$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j=1}^n |x_j|$$

Beh:  $\|\cdot\|$  ist Norm auf  $\mathbb{K}^n$  für  $1 \leq p \leq \infty$

$\|x + y\|_\infty = \sup_{j=1}^n |x_j + y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$  Für  $p \in (1, \infty), p \neq 2$ : siehe Übungsaufgabe (Fall  $p = 2$  läuft über Cauchy-Schwarz)

Beachte:  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n \|x\|_\infty$

### Definition

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  heißen äquivalent auf  $X$ , falls es  $0 < m, M < \infty$  gibt, so dass für alle  $x \in X$  gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

#### Satz 1.1

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

### Beweis

Wähle eine algebraische Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $X$ , wobei  $n = \dim X < \infty$ .

Definiere  $\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , wobei  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

z. z. die gegebene Norm  $||| \cdot |||$  ist äquivalent zu  $\| \cdot \|$ .

Beweis:

In der einen Richtung betrachte:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &=: \nu \quad |||x||| \end{aligned}$$

Für die Umkehrung benutze die Funktion  $J : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ ,  $J(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Die Abbildung  $y \in \mathbb{K}^n \rightarrow \|Jy\|$  ist stetig, denn

$$\|Jy\| - \|y\|_{\mathbb{K}^n} = \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\begin{aligned} \text{und } |||Jy\| - \|Jz\|| &\leq |||Jy - Jz|| \leq |||J(y - z)|| \\ &\leq M |||J(y - z)||| \\ &= M \|y - z\|_{\mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von  $Jy \rightarrow \|Jy\| \in \mathbb{R}$

Sei  $S = \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\|_2 = 1\}$ . Dann ist  $S$  abgeschlossen und beschränkt. Die Abbildung  $N := y \in S \rightarrow \|Jy\| > 0$  ist wie in (\*) gezeigt stetig. Nach Analysis nimmt  $N$  sein Minimum in einem Punkt  $y_0 \in S$  an. Setze

$$\begin{aligned} m &= \inf\{\|x\| : |||x||| = 1\} = \inf\{\|Jy\| : y \in S\} \\ &= \|Jy_0\| > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Also } m \leq \left\| \frac{x}{|||x|||} \right\| = \frac{\|x\|}{|||x|||} \Rightarrow |||x||| \leq m\|x\|$$

■

### Proposition 1.2

Für zwei Normen  $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$  auf  $X$  sind äquivalent:

- (1)  $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$  sind äquivalent
- (2) Für alle  $(x_n) \subset X$ ,  $x \in X$  gilt  $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$
- (3) Für alle  $(x_n) \subset X$  gilt  $\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n\|_2 \rightarrow 0$
- (4) Es gibt Konstanten  $0 < m, M < \infty$ , so dass  $mU_{(X, \|\cdot\|_1)} \leq U_{(X, \|\cdot\|_2)} \leq MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$

Beweis

todo

■

**Vereinbarung:** Sei  $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^N : x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } n \in N\}$  der Folgenraum und  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der Einheitsvektor, wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

**Beispiel**

- $l^p = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^N : \|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$
- $l^\infty = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^N : \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$
- $c_0 = \{x = (x_n) \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0\}$

Gültigkeit der Dreiecksungleichung beweist man ähnlich wie bei  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ .

**Lemma 1.3**

Minkowskii-Ungleichung:  $(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Hölder-Ungleichung: mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| |y_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$

**Bemerkung:** Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen  $\|\cdot\|_p$  auf  $\mathbb{F}$  nicht äquivalent.

**Beweis**

todo ■

**Beispiel**

a) Raum der stetigen Funktionen

b) Raum der differentierbaren Funktionen

$$D^\alpha f(x) = \frac{\delta^{|\alpha|}}{\delta x_1^{\alpha_1} \dots \delta x_n^{\alpha_n}} f(x), \text{ wobei } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

**Definition**

$C_b^m(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | D^\alpha f \text{ sind stetig in } \Omega, \text{ beschränkt auf } \Omega \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq n\}$   
mit der Norm:  $\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$

**Bemerkung:** Auf  $C_b^m[0,1]$  ist eine äquivalente Norm zu  $\|f\|_{C_b^m}$  gegeben durch

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

Denn  $f^{(i)}(t) = f^{(i)}(0) + \int_0^t f^{(i+1)}(s) ds$  und damit  $\|f^{(i)}\|_0 \leq |f^{(i)}(0)| + \|f^{(i+1)}\|_\infty$

**Beispiel**

$X = C(\bar{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt. Definiere  $\|f\|_{\mathbb{L}^p} = (\int_\Omega |f(u)|^p du)^{\frac{1}{p}}$ . Betrachte  $f_k(t) = t^k, t \in [0,1]$ , dann gilt

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left( \frac{1}{kp+1} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad p < \infty$$

**Definition (Quotientenräume)**

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum.  $M \subset X$  sei abgeschlossener (d.h. für alle  $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x \in M$ ), linearer Unterraum.



Definiere  $\hat{X} = X/M$ ,  $\hat{x} \in X/M : \hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$   
 Dabei gilt unter anderem  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$  und  $\lambda \hat{x}_1 = \lambda \hat{x}_1$ .  $\hat{X}$  bildet einen Vektorraum.

Wir definieren nun eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels  $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|y\|_X : y \in \hat{X}\}$

Beh.:  $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$  ein normierter Raum.

$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = 0 : \exists y_n \in \hat{X}$  mit  $\|y_n\| \rightarrow 0, x - y_n \in M \Rightarrow x \in M, \hat{x} = 0$  zu  $\epsilon < 0$  wähle zu  $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}$   
 Elemente

todo

### Beispiel

- hölderstetige Funktionen
- Lebesgues-Integrierbare Funktionen

## 1.3 Beschränkte und lineare Operatoren

### Definition

Eine Teilmenge  $V$  eines normierten Raums  $(X, \|\cdot\|)$  heißt beschränkt, falls

$$c := \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ d.h. } V \subset cU_{(X, \|\cdot\|)}$$

**Bemerkung:** Eine konvergente Folge  $(x_n) \in X, x_n \rightarrow x$  ist beschränkt, denn  $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$  für fast alle  $m$ .

### Satz 1.4

Seien  $X, Y$  normierte Räume. Für einen linearen Operator  $S : X \rightarrow Y$  sind äquivalent:

- a)  $T$  stetig, d.h.  $x_n \rightarrow x$  impliziert  $Tx_n \rightarrow Tx$
- b)  $T$  stetig in 0
- c)  $T(U_{(X, \|\cdot\|)})$  ist beschränkt in  $Y$
- d) Es gibt ein  $c < \infty$  mit  $\|Tx\| \leq c\|x\|$

### Beweis

todo

■

### Definition

Seien  $X, Y$  normierte Räume. Mit  $B(X, Y)$  bezeichnen wir den Vektorraum der beschränkten linearen

# Bildquellen

Abb. ?? Tag: Name, [URL-Name](#)

# Abkürzungsverzeichnis

**Beh.** Behauptung

**Bew.** Beweis

**bzgl.** bezüglich

**bzw.** beziehungsweise

**ca.** circa

**d. h.** das heißt

**Def.** Definition

**etc.** et cetera

**ex.** existieren

**Hom.** Homomorphismus

**i. A.** im Allgemeinen

**o. B. d. A.** ohne Beschränkung der Allgemeinheit

**Prop.** Proposition

**sog.** sogenannte

**Vor.** Voraussetzung

**vgl.** vergleiche

**z. B.** zum Beispiel

**zhgd.** zusammenhängend

**z. z.** zu zeigen

# Symbolverzeichnis

## Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  Natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$  Ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\} = \{\frac{z}{n} \text{ mit } z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$  Rationale Zahlen

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, -\sqrt[3]{3}, \dots\}$  Reelle Zahlen

$\mathbb{R}_+$  Echt positive reelle Zahlen

$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  Komplexe Zahlen

$I = [0, 1] \subsetneq \mathbb{R}$  Einheitsintervall