

<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 1</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Norm</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 2</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Halbnorm</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 3</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Einheitskugel</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 4</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Im normierten Vektorraum konvergente Folge</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 5</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>umgekehrte Dreiecksungleichung</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 6</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>äquivalente Normen</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 7</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>äquivalente Normen + endlich dimensionalen Vektorraum</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 8</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>äquivalente Normen + unendlich dimensionalen Vektorraum</div> </div>

2 *Antwort*

Falls $\|\cdot\|$ all die Eigenschaften einer Norm erfüllt außer

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$$

dann heißt $\|\cdot\|$ **Halbnorm**.

1 *Antwort*

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt **Norm**, falls

(N1) $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

4 *Antwort*

Eine Folge (x_n) des normierten Raums X **konvergiert** gegen ein $x \in X$, falls

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

3 *Antwort*

Die Menge $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ heißt **Einheitskugel**.

6 *Antwort*

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen **äquivalent** auf X , falls es $0 < m, M < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

5 *Antwort*

Für zwei Elemente $x, y \in (X, \|\cdot\|)$ in normierten Räumen gilt auch die **umgekehrte Dreiecksungleichung**

$$(|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|)$$

8 *Antwort*

Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen $\|\cdot\|_p$ auf \mathbb{F} nicht äquivalent.

Sei z.B. o.B.d.A. $p > q$ und setze

$$x_n := \sum_{j=2^{n+1}}^{2^{n+1}+1} j^{-\frac{1}{p}} e_j, \quad e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$$

7 *Antwort*

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 9</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Äquivalenzen zu äquivalente Norm</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 10</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Folgenraum</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 11</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Minkowski-Ungleichung</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 12</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Hölder-Ungleichung</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 13</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>äquivalente Normen + unendlich dimensionale Räume</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 14</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 15</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Quotientenraum</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 16</div> <div>3 - Beschr. und lin. Op.</div> </div> <div>Beschränkte Menge</div> </div>

10

Antwort

Wir definieren den **Folgenraum** mittels

$$\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$

und $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der j-te Einheitsvektor in \mathbb{F} , wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

12

Antwort

Hölder-Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt;

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| |y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

14

Antwort

Definiere

$$C_b^m(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : D^\alpha f \text{ sind für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ stetig und beschränkt auf } \Omega, |\alpha| \leq m\}.$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|f\|_{C_b^m} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Äquivalent dazu ist die Norm

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

16

Antwort

Eine Teilmenge V eines normierten Raums $(X, \|\cdot\|)$ heißt **beschränkt**, falls

$$c := \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X, \|\cdot\|)}.$$

9

Antwort

Für zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf X sind äquivalent:

- a) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind äquivalent
- b) Für alle $(x_n)_n \subset X, x \in X$ gilt $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$
- c) Für alle $(x_n)_n \subset X$ gilt $\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n\|_2 \rightarrow 0$
- d) Es gibt Konstanten $0 < m, M < \infty$, so dass

$$mU_{(X, \|\cdot\|_1)} \subseteq U_{(X, \|\cdot\|_2)} \subseteq MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$$

11

Antwort

Minkowski-Ungleichung:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

13

Antwort

Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen $\|\cdot\|_p$ auf \mathbb{F} nicht äquivalent.

Bsp.: sei o.B.d.A. $p > q$ und setze

$$x_n := \sum_{j=2^{n+1}}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j, e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$$

15

Antwort

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset X$ sei abgeschlossener (d.h. für alle $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x \in M$), linearer Unterraum. Definiere $\hat{X} := X/M$, dann ist $\hat{x} \in X/M$:

$$\hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$$

Dabei gilt unter anderem $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \widehat{x_1 + x_2}$ und $\lambda \hat{x}_1 = \widehat{\lambda x_1}$; \hat{X} bildet somit einen Vektorraum.

Definieren wir eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels

$$n\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|x - y\|_X : y \in M\} =: d(x, Y)$$

$(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ein normierter Raum.

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 17</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

Beschränkte Folge

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 18</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>

Äquivalenzen zu T stetig

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 19</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

Vektorraum der beschränkten, linearen
Operatoren

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 20</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

Isometrie

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 21</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

stetige Einbettung

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 22</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

isomorphe Einbettung

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 23</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

Isomorphismus

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 24</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

Dualraum

18

Antwort

Seien X, Y normierte Räume. Für einen linearen Operator $S : X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

- a) T stetig, d.h. $x_n \rightarrow x$ impliziert $Tx_n \rightarrow Tx$
- b) T stetig in 0
- c) $T(U_{(X, \|\cdot\|)})$ ist beschränkt in Y
- d) Es gibt ein $c < \infty$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$

20

Antwort

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \rightarrow Y$ linear.

T heißt **Isometrie**, falls

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

22

Antwort

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \rightarrow Y$ linear.

T heißt **isomorphe Einbettung**, falls T injektiv ist und ein $c > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

In diesem Fall identifizieren wir oft X mit dem Bild von T in Y , $X \cong T(X) \subset Y$

24

Antwort

Sei X ein normierter Vektorraum. Der Raum

$$X' = B(X, \mathbb{K})$$

heißt **Dualraum** von X oder Raum der linearen Funktionalen.

17

Antwort

Eine konvergente Folge $(x_n) \in X, x_n \rightarrow x$ ist beschränkt, denn $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$ für fast alle m .

19

Antwort

Seien X, Y normierte Räume. Mit $B(X, Y)$ bezeichnen wir den **Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren** $T : X \rightarrow Y$. Ist $X = Y$ schreiben wir auch kurz

$$B(X) := B(X, X)$$

$(B(X, Y), \|\cdot\|)$ ist ebenfalls ein normierter Raum und für $X = Y$ gilt für $S, T \in B(X)$:

$$S \cdot T \in B(X) \quad \text{und} \quad \|S \cdot T\| \leq \|S\| \|T\|$$

21

Antwort

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \rightarrow Y$ linear.

T heißt **stetige Einbettung**, falls T stetig und injektiv ist.

23

Antwort

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \rightarrow Y$ linear.

T heißt **Isomorphismus**, falls T bijektiv und stetig ist und $T^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist.

$$\text{d.h. falls } \exists c > 0 : \frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

daraus folgt auch für $T^{-1} : Y \rightarrow X$ aus der ersten Ungl.:

$$\|T^{-1}y\|_X \leq c\|T(T^{-1}y)\|_Y = c\|y\|_Y, \text{ d.h. } T^{-1} \text{ ist stetig.})$$

In diesem Fall identifizieren wir $X \cong Y$ und sagen X und Y sind isomorph.

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 25</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Metrik		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 27</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Durch Halbnorm induzierte Metrik		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 29</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Offene Menge		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 31</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Offene Menge bezüglich diskreter Metrik		

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 26</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Konvergente Folge im metrischen Raum		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 28</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Abgeschlossen Menge		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 30</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Offene bzw. abgeschlossene Kugel		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 32</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Vereinigungen/Schnitte offener/abgeschlossener Mengen		

26

Antwort

Eine Folge $(x_n)_{n \geq 1} \subset M$ konvergiert gegen $x \in M$, falls

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Notation: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (in M)

28

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **abgeschlossen** (in M), falls für alle in M konvergenten Folgen $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$ der Grenzwert von (x_n) in A liegt

30

Antwort

Wir benutzen die Bezeichnungen

- **offene Kugel:** $K(x, r) := \{y \in M : d(x, y) < r\}$
- **abgeschlossene Kugel:** $\bar{K}(x, r) := \{y \in M : d(x, y) \leq r\}$

mit $x \in M, r > 0$. Man sieht leicht, dass $K(x, r)$ offen und $\bar{K}(x, r)$ abgeschlossen ist.

32

Antwort

Für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen $(A_i)_{i \in I}$ sind

$$A := \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{und} \quad A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_N} \quad (i_1, \dots, i_N \in I)$$

abgeschlossen in M .

Für eine beliebige Familie offener Mengen $(U_i)_{i \in I}$ sind

$$U := \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{und} \quad U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_N} \quad (i_1, \dots, i_N \in I)$$

offen in M .

25

Antwort

Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf M , falls $\forall x, y, z \in M$:

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{positive Definitheit})$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

27

Antwort

Sei X ein Vektorraum und p_j für $j \in \mathbb{N}$ Halbnormen auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_K > 0$. Dann definiert

$$d(x, y) := \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \frac{p_j(x - y)}{1 + p_j(x - y)}, \quad x, y \in X$$

eine Metrik auf X mit

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff p_j(x_n - x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

29

Antwort

Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen** (in M), falls zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$\{y \in M : d(x, y) < \epsilon\} \subset U$$

$A \subset M$ ist offen in M genau dann,

$$\text{wenn } U = M \setminus A \text{ abgeschlossen ist.}$$

31

Antwort

Bezüglich der diskreten Metrik d aus Beispiel 4.2 b) ist $\{x\} \subset M$ offen für jedes $x \in M$, da

$$K(x, r) = \{x\} \subset \{x\} \quad \text{für } r \in (0, 1]$$

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 33</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Abschluss, Innere und Rand		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 35</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Separabel		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 37</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Ist ℓ^p separabel?		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 39</u>	<u>5 - Vollständigkeit</u>
Cauchy-Folge		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 34</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Dicht		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 36</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Stetige Abbildung		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 38</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Äquivalenzen zur Stetigkeit einer Abbildungen		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 40</u>	<u>5 - Vollständigkeit</u>
Vollständigkeit		

34

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $V \subset M$ heißt **dicht** in M , falls $\bar{V} = M$, d.h. jeder Punkt in M ist Grenzwert einer Folge aus V .

36

Antwort

Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt **stetig in** $x_0 \in M$, falls für alle $(x_n) \subset M$ gilt

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ in } M \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ in } N$$

$$d_M(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow d_N(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0$$

Die Abbildung f heißt **stetig auf** M , falls f in jedem Punkt von M stetig ist.

38

Antwort

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) f ist stetig auf M
- (ii) Ist $U \subset N$ offen, so ist auch $f^{-1}(U)$ offen in M
- (iii) Ist $A \subset N$ abgeschlossen, so ist auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in M .

40

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum, dann heißt (M, d) **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge $(x_n) \subset M$ einen Grenzwert in M hat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad x \in M$$

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ der vollständig ist bezüglich $d(x, y) = \|x - y\|$ heißt **Banachraum**.

33

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $V \subset M$. Dann heißt

$$\bar{V} := \bigcap \{A \subset M : A \text{ ist abgeschlossen mit } V \subset A\}$$

der **Abschluss** von V .

$$\mathring{V} := \bigcup \{U \subset M : U \text{ ist offen mit } U \subset V\}$$

das **Innere** von V

$$\partial V := \bar{V} \setminus \mathring{V}$$

der **Rand** von V

35

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum, M heißt **separabel**, falls es eine abzählbare Teilmenge $V \subset M$ gibt, die dicht in M liegt.

37

Antwort

Die Räume $\ell^p, p \in [1, \infty)$ und c_0 sind separabel, da

$$D = \text{lin}\{e_k, k \in \mathbb{K}\} \text{ dicht in allen Räumen liegt.}$$

Der Raum ℓ^∞ ist nicht separabel: Die Menge Ω der $\{0, 1\}$ -wertigen Folgen ist überabzählbar. Für $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt $\|x - y\|_\infty = 1$

39

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum. $x_n \in M$ heißt **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\forall m, n \geq n_0$ gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 41</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Cauchy-Folge vs. konvergente Folge</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 42</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Raum der Abbildungen zwischen metrischen und Banachraum</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 43</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Vollständigkeit vs. äquivalente Normen</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 44</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Abg. Teilmengen von BR vs metrische Räume</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 45</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Raum der beschränkten Operatoren vollständig</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 46</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Neumann'sche Reihe</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 47</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div> <div>J (surjektiver) Isomorphismus, A beschränkt mit $\ A\ < \ J^{-1}\ ^{-1}$:</div> <div>$J - A$</div> </div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 48</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Fortsetzung von Operatoren</div> </div>

42

Antwort

Sei X ein metrischer Raum, Y ein Banachraum.

$$C(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y : f \text{ stetig}\}, \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$$

Dann ist $C(X, Y)$ ein (linearer) Banachraum.

44

Antwort

Abgeschlossene Teilmengen von Banachräumen sind vollständige metrische Räume bezüglich

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

46

Antwort

Sei $A \in B(X)$, X ein Banachraum mit $\|A\| < 1$.
Dann ist $Id - A$ invertierbar und

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

48

Antwort

Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $D \subset X$ ein dichter Teilraum.

Jeder lineare Operator $T: X \rightarrow Y$ mit

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \text{für alle } x \in D$$

lässt sich zu einem eindeutig bestimmten Operator $\tilde{T} \in B(X, Y)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq M$ fortsetzen.

41

Antwort

Jede konvergente Folge in (M, d) ist eine Cauchy-Folge:

$$\text{Sei } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x : d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \rightarrow 0$$

Aber: nicht jede Cauchy-Folge eines normierten Raums X konvergiert in $C[0, 2]$:

$$\|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)| dt, \quad f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$$

43

Antwort

Sind $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf X und ist dann X bezüglich $\|\cdot\|_1$ vollständig, so auch bezüglich $\|\cdot\|_2$; da äquivalente Normen haben gleiche Cauchy-Folgen.

Bsp.: $C^1[0, 1]$

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

Früher: $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty \Rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|)$ ist vollständig.

45

Antwort

Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum. Dann ist $B(X, Y)$ mit der Operatornorm vollständig.

Insbesondere: $X' = B(X, \mathbb{K})$ ist immer vollständig.

47

Antwort

Sei X ein Banachraum und $J: X \rightarrow X$ ein (surjektiver) Isomorphismus.

Für $A \in B(X)$ und $\|A\| < \|J^{-1}\|^{-1}$ ist auch $J - A$ ein Isomorphismus

Insbesondere: $G = \{T \in B(X) : T \text{ stetig und invertierbar}\}$ ist eine offene Menge in $B(X)$.

<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 49</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 50</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>
Operatorgrenzwert auf dichter Menge	Äquivalenz zur Vollständigkeit eines normierten Raums
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 51</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 52</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>
Vollständigkeit des Quotientenraums	Lipschitz
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 53</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 54</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>
Isometrische Einbettung in den Raum der Lipschitz-Funktionen	Vervollständigung
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 55</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 56</u> <u>6 - Kompakte Mengen</u>
Existenz einer Vervollständigung	kompakt, folgenkompakt und relativ kompakt

50

Antwort

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ sind äquivalent:

- X ist vollständig
- Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n \geq 1} x_n$ mit $x_n \in X$ hat einen Limes in X .

52

Antwort

Sei X ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ beliebig, $d(x, y) := \|x - y\|$, wobei $x, y \in M$ und damit (M, d) ein metrischer Raum.

Eine Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz**, falls

$$\sup_{x, y \in M, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} = \underbrace{\|f\|_L}_{\text{Lipschitz-Konstante}} < \infty$$

Dann ist $X = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lipschitz und } f(x_0) = 0\}$ bezüglich $\|\cdot\|_L$ ein normierter Raum und $X' = B(X, \mathbb{R})$ ist vollständig.

54

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Ein vollständiger metrischer Raum (\hat{M}, \hat{d}) heißt **Vervollständigung** von (M, d) , falls es eine Einbettung $J: M \rightarrow \hat{M}$ gibt mit:

- $\hat{d}(J(x), J(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in M$ (Isometrie)
- $J(M)$ ist dicht in \hat{M}

56

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $K \subseteq M$ heißt (folgen-) **kompakt**, falls es in jeder Folge $(x_n) \subset M$ eine Teilfolge (x_{n_k}) und ein $x \in K$ gibt, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

$K \subseteq M$ heißt **relativ kompakt**, falls \overline{K} in M kompakt ist.

49

Antwort

Sei X ein normierter Banachraum, $D \subset X$ dicht in X und sei eine Folge $T_n \in B(X, Y)$, wobei $(T_n x)$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in D$ sei.

Dann gibt es genau einen Operator $T \in B(X, Y)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = T x$$

51

Antwort

Sei X ein Banachraum und $M \subset X$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum.

Dann $\hat{X} = X/M$ ist vollständig.

53

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in M$ fest, X definiert wie in 5.15:

Zu $x \in M$ definiere $F_x \in X'$ durch $F_x(f) = f(x)$ für $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ in X .

Dann ist $x \in M \rightarrow F_x \in X'$ eine Abbildung, die eine isometrische Einbettung von M nach X' gibt, d.h.

$$d(x, y) = \|F_x - F_y\|_{X'}$$

55

Antwort

Zu jedem metrischen Raum (M, d) gibt es eine Vervollständigung, die bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist.

<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 57</div> <div>6 - Kompakte Mengen</div> </div> <div>Kompaktheit der Einheitskugel</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 58</div> <div>6 - Kompakte Mengen</div> </div> <div>Satz von Riesz</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 59</div> <div>6 - Kompakte Mengen</div> </div> <div>Äquivalenzen zur Kompaktheit</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 60</div> <div>6 - Kompakte Mengen</div> </div> <div>4x abgeschlossene bzw. kompakte Mengen</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 61</div> <div>6 - Kompakte Mengen</div> </div> <div>Arzelà-Ascoli</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 62</div> <div>6 - Kompakte Mengen</div> </div> <div>Äquivalenzen zur relativen Kompaktheit</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 63</div> <div>7 - Kompakte Op.</div> </div> <div>kompakter Operator</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 64</div> <div>7 - Kompakte Op.</div> </div> <div>$K(X, Y)$</div> </div>

58

Antwort

Sei Y ein abgeschlossener Teilraum von X und $X \neq Y$. Zu $\delta \in (0, 1)$ existiert ein $x_\delta \in X \setminus Y$, sodass

$$\|x\| = 1, \quad \|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta \quad \text{für alle } y \in Y$$

60

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

- Eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ ist immer vollständig und abgeschlossen in M .
- Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist kompakt.
- Jede kompakte Menge in M ist separabel.
- Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raums ist beschränkt.

62

Antwort

Sei X ein Banachraum. Für $K \subseteq X$ sind äquivalent

- K relativ kompakt (d.h. \overline{K} ist kompakt)
- Jede Folge $(x_k) \subseteq K$ hat eine Cauchy-Teilfolge
- $\forall \epsilon > 0 \exists y_1, \dots, y_m \in K$ mit $K \subseteq K(y_1, \epsilon) \cup \dots \cup K(y_m, \epsilon)$

64

Antwort

$K(X, Y)$ = Raum der linearen, kompakten Operatoren von X nach Y .

Bemerkung:

- $T \in K(X, Y) \iff$ jede beschränkte Folge $(x_n) \subset X$ besitzt eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $T(x_{n_k})$ ist Cauchy-Folge in Y .
- $K(X, Y) \subset B(X, Y)$, da die kompakte Menge $\overline{T(U_X)}$ beschränkt in Y ist.

57

Antwort

Sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist

$$\overline{U_x} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

genau dann kompakt, wenn $\dim X < \infty$.

59

Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für $K \subset M$ sind folgende Aussagen äquivalent zu K ist (folgen-)kompakt:

- K ist vollständig und total beschränkt, d.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_m \in M$ so dass $K \subset \bigcup_{j=1}^m K(x_j, \epsilon)$
- Jede Überdeckung von K durch offene Mengen $U_j, j \in J$ mit $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d.h. j_1, \dots, j_m mit $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{j_k}$

61

Antwort

Sei (S, d) ein kompakter, metrischer Raum. Definiere $C(S) := \{d: S \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|$. Eine Teilmenge $M \subset C(S)$ ist kompakt, genau dann wenn gilt

- M ist beschränkt in $C(S)$,
- M ist abgeschlossen in $C(S)$ und
- M ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : d(s, t) < \delta \Rightarrow |x(s) - x(t)| < \epsilon$$

63

Antwort

Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum. Ein linearer Operator $T: X \rightarrow Y$ heißt kompakt, falls $T(U_X)$ relativ kompakt ist in Y .

<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 65</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 66</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>
2x Eigenschaften von $K(X, Y)$	Folge endlich dimensionaler beschränkter Operatoren
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 67</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 68</u> <u>8 - Approx. von L^p Fkt</u>
Folge der Approximationseigenschaft	Beschränkter Kern definiert beschränkten Operator
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 69</u> <u>8 - Approx. von L^p Fkt</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 70</u> <u>8 - Approx. von L^p Fkt</u>
Bedingter Erwartungsoperator	Konvergenz des bedingten Erwartungsoperators
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 71</u> <u>8 - Approx. von L^p Fkt</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 72</u> <u>8 - Approx. von L^p Fkt</u>
Approximation der kompakten Operatoren	Approximative Eins

Seien X, Y Banachräume, $T \in B(X, Y)$.

Falls es endlich dimensionale Operatoren $T_n \in B(X, Y)$ gibt, dann ist $T \in K(X, Y)$.

Beweis: Bemerkung nach 7.1, 7.5 a)

Sei $k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ messbar und

$$\sup_{u \in \Omega} \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \leq C_1 < \infty \text{ und}$$

$$\sup_{v \in \Omega} \int_{\Omega} |k(u, v)| du \leq C_2 < \infty$$

Dann wird durch $(*)$ ein beschränkter Operator $T: L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ mit

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C_1^{\frac{1}{p'}} C_2^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

und $1 \leq p \leq \infty$.

Sei $\mathcal{A}_m = \{A_{n,m} : n = 1, \dots, m_n\}$ eine Zerlegung von $\Omega \cap K(0, r_m), \Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Es gelte $r_m \rightarrow \infty$ und $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_{m+1}, r_m \rightarrow \infty$.

$$d_m = \sup\{|t - s| : s, t \in A_{m,n}, n = 1, \dots, m_n\}$$

'Feinheit der Zerlegung'

Dann gilt für alle $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$

$$\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty$$

Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\phi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(u) du = 1$. Dann heißt $\phi_\epsilon(u) = \epsilon^{-d} \phi(\epsilon^{-1}u), \epsilon > 0$, **approximative Eins**.

Notation: $\phi_\epsilon * f(u) = \int \phi_\epsilon(u - v) f(v) dv$.

Bsp: $\phi(u) = \frac{1}{|B(0,1)|} \cdot \mathbb{1}_{B(0,1)}(u), \phi \geq 0, \int \phi du = 1$

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon * f(u) &= \frac{1}{|B(u, \epsilon)|} \int \mathbb{1}_{B(u, \epsilon)}(u - v) f(v) dv \\ &= \frac{1}{|B(u, \epsilon)|} \int_{(u, \epsilon)} f(v) dv \end{aligned}$$

Vermutung: $\phi_\epsilon * f(u) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f(u)$. Sinne jedoch noch unklar.

Seien X, Y und Z Banachräume.

- $K(X, Y)$ ist ein linearer, abgeschlossener Teilraum von $B(X, Y)$.
- Seien $T \in B(X, Y), S \in B(Y, Z)$ und entweder T oder S kompakt. Dann ist $S \circ T \in K(X, Z)$.
Insbesondere: $K(X) = K(X, X)$ ist ein Ideal in $B(X)$.

Seien X, Y Banachräume und X habe die **Approximationseigenschaft** (d.h. es existieren endlich dimensionale Operatoren $S_n \in B(X) : S_n x \rightarrow x, \forall x \in X$).

Dann gilt: $K(X, Y) = \overline{F(X, Y)}$ in der Operatornorm, wobei $F(X, Y) = \{T \in B(X, Y) : \dim T(X) < \infty\}$.

Sei $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Partition von Ω in paarweise disjunkte, messbare Mengen A_n mit $0 < \mu(A_n) < \infty$. Setze

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}}(f)(s) = \sum_n \left[\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(t) dt \right] \mathbb{1}_{A_n}(s)$$

- Für jede Partition $\mathcal{A} = \{A_n\}$ von Ω ist $\mathbb{E}_{\mathcal{A}} \in B(L^p(\Omega))$ für alle $1 \leq p \leq \infty$ mit $\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}}\|_{L^p \rightarrow L^p} = 1$.
- Bild $\mathbb{E}_{\mathcal{A}} = \mathbb{E}_{\mathcal{A}}(L^p)$ ist isometrisch zu $\ell_m^p \cong (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$, mit $m = \text{card}(\mathcal{A})$.

Für $X = L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ gilt:

$$K(X, X) = \overline{\mathcal{F}(X, X)}$$

= Abschluss der endl. dim. Operatoren

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 73</u>	<u>8 - Approx. von L^p Fkt</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 74</u>	<u>8 - Approx. von L^p Fkt</u>
Konvergenz der Approximativen Eins			Young		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 75</u>	<u>8 - Approx. von L^p Fkt</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 76</u>	<u>8 - Approx. von L^p Fkt</u>
Dichte Menge in L^p			Korollar 8.10		
<u>Elem. der Op.Theo.</u>	<u># 77</u>	<u>9 - Baire & B.-S.</u>	<u>Elem. der Op.Theo.</u>	<u># 78</u>	<u>9 - Baire & B.-S.</u>
Satz von Baire			nirgends dicht		
<u>Elem. der Op.Theo.</u>	<u># 79</u>	<u>9 - Baire & B.-S.</u>	<u>Elem. der Op.Theo.</u>	<u># 80</u>	<u>9 - Baire & B.-S.</u>
1. Kategorie			2. Kategorie		

74

Antwort

Für $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ setze für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$(k * f)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} k(u-v)f(v)dv \quad (*)$$

$k * f$ heißt **Faltung** von k und f .

Dann definiert **(*)** einen beschränkten Operator $Tf = k * f$ von $L^p(\mathbb{R}^d)$ nach $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq \|k\|_{L^1}$.

76

Antwort

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Sei $f \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$ mit

$$\int f(u)g(u)du = 0 \text{ für alle } g \in C_c^\infty(\Omega)$$

Dann ist $f = 0$.

78

Antwort

Eine Teilmenge L eines metrischen Raums M heißt **nirgends dicht**, falls \overline{L} keine inneren Punkte enthält.

Ist L nirgends dicht, dann ist $M \setminus \overline{L}$ dicht in M .

80

Antwort

L heißt von **2. Kategorie**, falls L nicht von 1. Kategorie ist.

73

Antwort

Sei $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ eine approximative Eins. Dann gilt für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$

$$\|f - \phi_\epsilon * f\|_{L^p} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\text{i) } \int \phi_\epsilon(u)du = 1$$

$$\text{ii) } \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \phi_\epsilon(u)du \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\text{iii) } \text{supp}(\phi) \subset B(0,r) \Rightarrow \text{supp}(\phi_\epsilon) \subset B(0,\epsilon)$$

$$\text{iv) } \|\phi_\epsilon * f\|_{L^p} \leq 1\|f\|_{L^p} \quad (\text{nach Young})$$

75

Antwort

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann liegt

$$C_c^\infty(\Omega) = \{f : f \text{ ist unendlich oft differenzierbar}$$

$$\text{und } \text{supp}(f) \text{ ist kompakt.}\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$.

77

Antwort

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und seien $(U_n)_{n \geq 1}$ offen und dicht in M .

$$\text{Dann ist } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ dicht in } M.$$

79

Antwort

Eine Teilmenge L , die sich als Vereinigung von einer Folge von nirgends dichten Mengen L_n darstellen lässt, d.h. $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ heißt von **1. Kategorie**.

<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 81</u> </div> <div> <u>9 - Baire & B.-S.</u> </div> </div> <div>Kategoriensatz von Baire</div>	<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 82</u> </div> <div> <u>9 - Baire & B.-S.</u> </div> </div> <div>Dichte Teilmenge von $(C[0,1], \ \cdot\ _\infty)$</div>
<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 83</u> </div> <div> <u>9 - Baire & B.-S.</u> </div> </div> <div>Banach-Steinhaus</div>	<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 84</u> </div> <div> <u>10 - offenen Abbildung</u> </div> </div> <div>Offene Abbildung</div>
<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 85</u> </div> <div> <u>10 - offenen Abbildung</u> </div> </div> <div>Äquivalenzen zu offenem Operator</div>	<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 86</u> </div> <div> <u>10 - offenen Abbildung</u> </div> </div> <div>Satz von der offenen Abbildung</div>
<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 87</u> </div> <div> <u>10 - offenen Abbildung</u> </div> </div> <div>Bijektiver beschränkter Operator</div>	<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 88</u> </div> <div> <u>10 - offenen Abbildung</u> </div> </div> <div>Beschränkte Einbettung zwischen Banachräumen</div>

82

Antwort

$E = \{x \in C[0, 1] : x \text{ ist in keinem Punkt von } [0, 1] \text{ differenzierbar}\}$ ist dicht in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$.

Insbesondere:

- $E \neq \emptyset$
- $C^1[0, 1]$ ist von 1. Kategorie in $C[0, 1]$, also liegt

$$C[0, 1] \setminus C^1[0, 1] \text{ dicht in } C[0, 1]$$

84

Antwort

Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **offen**, wenn offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden.

86

Antwort

Seien X, Y Banachräume und $T \in B(X, Y)$, dann gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ offen}$$

88

Antwort

Sei X ein Vektorraum der sowohl mit $\|\cdot\|$ als auch mit $\|\cdot\|$ ein Banachraum ist. Gilt

$$\exists c > 0 : \|x\| \leq c \cdot \|x\|, \forall x \in X,$$

dann sind die Normen äquivalent, d.h. $\exists \hat{c}$ mit

$$\hat{c} \cdot \|x\| \leq \|x\| \quad \forall x \in X \leq c \cdot \|x\|$$

81

Antwort

a) In einem vollständigen metrischen Raum (M, d) liegt das Komplement einer Menge L von 1. Kategorie stets dicht. Insbesondere:

- b) Ein vollständig metrischer Raum ist von 2. Kategorie
- c) Sei (M, d) vollständig und $(M_n)_{n \geq 1}$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Dann enthält mindestens ein M_n eine Kugel

83

Antwort

Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, I eine Indexmenge und $(T_i)_{i \geq 1} \in B(X, Y)$. Falls:

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| = c(x) < \infty, \quad \forall x \in X$$

dann ist auch

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| = \sup_{i \in I} \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_i x\| < \infty.$$

85

Antwort

Seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator, dann sind äquivalent:

- a) T ist offen
- b) $\exists \epsilon > 0 : K_Y(0, \epsilon) \subset T(K_X(0, 1))$

87

Antwort

Seien X, Y Banachräume und $T \in B(X, Y)$ bijektiv, dann ist $T^{-1} \in B(Y, X)$

<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 89</u> </div> <div> <u>11 - Projektionen</u> </div> </div> <div> <div>Projektion, und die Existenz der Einbettung in Untervektorraum</div> </div>	<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 90</u> </div> <div> <u>11 - Projektionen</u> </div> </div> <div> <div>Direkte Summe von Banachräumen</div> </div>
<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 91</u> </div> <div> <u>11 - Projektionen</u> </div> </div> <div> <div>Äquivalenzen zur Existenz einer stetigen Projektion auf Untervektorraum</div> </div>	<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 92</u> </div> <div> <u>12 - Abg. Operatoren</u> </div> </div> <div> <div>s</div> <div>Operatorfortsetzung</div> </div>
<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 93</u> </div> <div> <u>12 - Abg. Operatoren</u> </div> </div> <div> <div>Graphennorm</div> </div>	<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 94</u> </div> <div> <u>12 - Abg. Operatoren</u> </div> </div> <div> <div>Abgeschlossener Operator</div> </div>
<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 95</u> </div> <div> <u>12 - Abg. Operatoren</u> </div> </div> <div> <div>Abgeschlossener vs. stetiger Operator</div> </div>	<div> <div> <u>Elem. der Op.Theo.</u> </div> <div> <u># 96</u> </div> <div> <u>12 - Abg. Operatoren</u> </div> </div> <div> <div>Satz vom abgeschlossenen Graphen</div> </div>

90

Antwort

Sind X, Y Banachräume, dann ist auch $X \oplus Y$ ein Banachraum mit $\|(x, y)\|_{X \oplus Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y \quad \forall x \in X, y \in Y$

92

Antwort

Sei X ein Banachraum, $D(A)$ ein dichter Untervektorraum und $A : D(A) \rightarrow X$ linear

Gilt $\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in D(A)$, so lässt sich A zu einem beschränkten Operator fortsetzen $A \in B(X)$

94

Antwort

Es sind äquivalent

- a) $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ist ein Banachraum
- b) $\text{graph}(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$ ist abgeschlossen
- c) Wenn $(x_n)_n \subset D(A) : \begin{cases} x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x & \text{in } X \\ Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y & \text{in } X \end{cases}$, so ist $x \in D(A), Ax = y$

A heißt abgeschlossen, wenn a) – c) aus 12.3 erfüllt sind

96

Antwort

Ist A abgeschlossen und $D(A) = X$, so ist A stetig auf X .

89

Antwort

Sei X ein Banachraum. $P : X \rightarrow X$ heißt **Projektion**, wenn P linear und $P^2 = P$ ist.

Sei X ein Vektorraum, $M \subset X$ ein Untervektorraum. Es gibt nach dem Basisergänzungssatz eine lineare Projektion

$$P : X \rightarrow X, P(X) = M$$

91

Antwort

Sei X ein BR, $M \subset X$ ein abg. UVR. Dann sind äquivalent:

- a) \exists stetige Projektion $P : X \rightarrow X, P(X) = M$
- b) Es gibt einen abg. UVR $N \subset X : X = M \oplus N$.
- c) \exists abg. Untervektorraum $N \subset X$ und $J : M \oplus N \rightarrow X, J(x, y) = x + y$ ist ein Isomorphismus, insbesondere $\exists c > 0 \quad \forall x \in M, y \in N : c(\|x\| + \|y\|) \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

M heißt komplementierter Raum,
 $N = \text{Kern}(P)$ Komplementärraum.

93

Antwort

Auf $D(A)$ definieren wir die **Graphennorm**

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\| \quad \forall x \in D$$

Insbesondere: $A : (D(A), \|\cdot\|_A) \rightarrow X$ stetig, denn

$$\|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A$$

95

Antwort

$$A \text{ stetig: } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y, Ax = y$$

$$A \text{ abgeschlossen: } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \Rightarrow Ax = y$$