

# Funktionalanalysis

Prof. Dr. Lutz Weis

Wintersemester 2015

Martin Belica

## Einleitung

Die Funktionalanalysis liefert den begrifflichen Rahmen sowie allgemeine Methoden, die in weiten Teilen der modernen Analysis verwendet werden. Zum Beispiel ist es möglich Integral- und Differentialgleichungen als lineare Gleichungen in einem geeigneten unendlichdimensionalen Vektorraum (wie z.B. einem Raum stetiger oder integrierbarer Funktionen) aufzufassen. Will man nun auf diese unendlichdimensionalen Gleichungen Ideen der linearen Algebra anwenden, so treten Konvergenz- und Kompaktheitsprobleme auf, die wir in dieser Vorlesung behandeln wollen. Zu den Themen gehören:

- Beschränkte und abgeschlossene Operatoren auf normierten Räumen
- Stetigkeit und Kompaktheit auf metrischen Räumen
- Geometrie und Operatorentheorie in Hilberträumen
- Der Satz von Hahn-Banach und Dualität von Banachräumen

Die allgemeinen Aussagen werden durch konkrete Beispiele von Räumen und Operatoren der Analysis illustriert.

## Erforderliche Vorkenntnisse

Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lineare Operatoren auf Banachräumen</b>	<b>2</b>
1.1	Einführung . . . . .	2
1.1.1	Räume . . . . .	2
1.1.2	Operatoren . . . . .	2
1.1.3	Anwendungen . . . . .	3
1.2	Normierte Räume . . . . .	5
1.3	Beschränkte und lineare Operatoren . . . . .	10
	<b>Bildquellen</b>	<b>15</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>16</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>17</b>

# 1 Lineare Operatoren auf Banachräumen

## 1.1 Einführung

### 1.1.1 Räume

Sei  $X$  ein Vektorraum,  $\dim X < \infty$  und sei  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 := \left( \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n \|x_i\|$$

Diese Normen sind äquivalent, denn:  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$

#### Satz (Bolzano-Weierstraß)

$A \subset \mathbb{R}$  beschränkt. Dann hat jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  eine konvergente Teilfolge.

#### Beispiel

$X = C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \text{stetig auf } [0, 1]\}$

$$\|f\|_2 := \left( \int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [0, 1]} \|f(t)\|$$

Dabei gilt  $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$ , aber bei:  $f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  folgt:

$$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \|f_n - f_m\| = 1 \text{ für } n \neq m$$

$\Rightarrow$  **Satz von Bolzano-Weierstraß** gilt im  $\infty$ -dimensionalen i.A. nicht!

### 1.1.2 Operatoren

Sei  $N = \dim X, M = \dim Y$  und seien  $(e_n)$  bzw.  $(f_n)$  Basen von  $X$  bzw.  $Y$ .

Sei  $T : X \rightarrow Y$  gegeben durch:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \alpha_n \rightarrow \sum \alpha_n e_n \downarrow & & \downarrow \beta_n \rightarrow \sum \beta_n f_n \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

wobei  $x = \sum \alpha_n e_n$ ,  $Tx = \sum \beta_n f_n$ ,  $\beta_m = \sum_{n=1}^N a_{mn} \alpha_n$ .

Daraus folgt:

- $T$  ist stetig
- $X = Y \iff T$  injektiv  $\iff T$  surjektiv (Dimensionsformel)  
(Die Gleichung  $Tx = y$  ist eindeutig lösbar  $\iff$  Gleichung hat für alle  $y \in Y$  eine Lösung.)
- Falls  $A$  selbstadjungiert ist, d.h.  $A = A^*$ , gibt es eine Basis aus Eigenvektoren  $(e_n)$  von  $A$ ,  
d.h.  $T(\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n) = \sum \alpha_n \lambda_n e_n$ , wobei  $\lambda_n$  Eigenwerte sind  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

### Beispiel

$X = C^1[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \text{stetig auf } [0, 1]\}$

$Tf = f'$ ,  $T : X \rightarrow Y$  stetig. (Aber:  $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , hier ist  $T$  nicht definiert.)

$T$  ist nicht stetig bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm, da:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}, \quad \text{dann: } \|f_n\| \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

$$Tf_n(t) = i\sqrt{n} e^{int}, \quad \text{mit: } \|Tf_n\|_\infty \rightarrow \infty, \text{ für } n \rightarrow \infty$$

### Beispiel

$X = L_2 = \{(a_n) : \left(\sum_{n \geq 1} \|a_n\|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$

$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$

$T$  ist injektiv, aber nicht surjektiv

## 1.1.3 Anwendungen

(1) Fredholm'sche Integralgleichungen

$X = C[0, 1]$ ,  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

$$Tf(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds$$

Analogie zum endlich dim. ('Verallg. der Matrixmultiplikation'):  $T(f_j)(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$

$T$  ist in diesem Fall linear und stetig und es gilt die Fredholm'sche Alternative:

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (\lambda Id - T)(f) = y, \quad f, y \in C[0, 1]$$

Dann existiert eine Lösung genau dann wenn diese eindeutig ist.

(2) Dirichletproblem

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Gebiet, offen, beschränkt, glatter Rand. Sei  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

Gesucht ist ein  $f \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ , so dass  $\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$  in  $\Omega$  und  $f|_{\partial\Omega} = g$

Beispiel: Durch Wärmeverteilung auf dem Rand auf WV im Inneren schließen.

Lösung: Dirichletintegral  $J(u) = \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx$ , wobei  $u \in M = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = g\}$

Sei  $v_0$  das absolute Minimum von  $J$ , d.h.  $J(v_0) = \inf\{J(w) : w \in M\}$   
 $v \in C^1(\bar{\Omega})$  mit  $v = 0$  in einer Umgebung von  $\partial\Omega$ .  $\epsilon \rightarrow J(u_0 + \epsilon v)$

$$\frac{d}{d\epsilon} J(u_0 + \epsilon v) = \int_{\Omega} \frac{d}{d\epsilon} (\nabla u_0 + \epsilon \nabla v)^2 dx = 2 \int_{\Omega} (\nabla u_0 + \epsilon \nabla v) (\nabla v) dx \Big|_{\epsilon=0} = 2 \int_{\Omega} (\nabla u_0) (\nabla v) dx$$

Mit  $0 \geq J(u_0 + \epsilon v) - J(u_0) \geq 0$  :  $\int (\nabla u_0) (\nabla v) dx \stackrel{\text{P.I.}}{=} - \int (\nabla u_0) v dx = 0$

$$\Rightarrow \nabla u_0 = 0, \text{ außerdem } u_0|_{\partial\Omega} = g \text{ (s.o.)}$$

Im allgemeinen existiert da absolute Minimum  $u_0 \in J$  aber nicht.

Ausweg:  $X = \{f \in L^2(\Omega), f' \in L^2(\Omega)\} \supset \{f \in C(\bar{\Omega}), f' \in C(\bar{\Omega})\}$

In diesem Raum  $X$  (Sobolevräume) gibt es ein Minimum  $u_0$  von  $J$ .

### (3) Sturm-Liouville Problem

$X = C^2([0, 1]), Tu = (pu')' + qu$ , mit  $q \in C[0, 1], p \in C^1[0, 1]$

Problem: bei gegebenen  $f \in C[0, 1]$  find  $u \in X$  mit  $Tu = f, v(0) = 0, v'(1) = 0$

$Y = \{f \in L^2[0, 1], f' \in L^2[0, 1]\}$  Hilbertraum.

Orthonormalbais  $(e_n)$  von  $Y$  wäre:  $\|e_n\|_2 = 1, \int e_n(x) e_m(x) dx = 0$  für  $m \neq n$

$f \in Y : f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$  mit  $\|f\|^2 = \sum |\alpha_n|^2$

Die  $(e_n)$  sind außerdem Eigenvektoren des Operatoren  $T$ , d.h.  $Te_n = \lambda_n e_n$

$$Ty = f \Rightarrow \int Ty(x) e_n(x) dx = \int f(x) e_n(x) dx, y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Gesucht sind die Koeffizienten  $\alpha_n$

$$\begin{aligned} \int f(x) e_n(x) dx &= \sum_m \lambda_m \alpha_m \int Te_m(x) e_n(x) dx \\ &= \lambda_n \alpha_n \int e_n(x) e_n(x) dx \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = \frac{1}{\lambda_n} \int f(x) e_n(x) dx$$

## 1.2 Normierte Räume

### Definition

Sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Eine Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  heißt eine Norm, wenn

$$(1) \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(2) \quad |\lambda x| = |\lambda| \|x\|$$

$$(3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Bemerkung:** Falls  $\|\cdot\|$  all die oben genannten Eigenschaften erfüllt außer  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ , dann heißt  $\|\cdot\|$  Halbnorm

**Vereinbarung:** Die Menge  $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  heißt **Einheitskugel**.

Eine Folge  $(x_n)$  des normierten Raums  $X$  **konvergiert** gegen ein  $x \in X$ , falls  $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Bemerkung:** Für zwei Elemente  $x, y \in (X, \|\cdot\|)$  in normierten Räumen gilt auch die umgekehrte Dreiecksungleichung ( $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\|$ )

### Beispiel

Sei  $X = \mathbb{K}^n$ ,  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i = \mathbb{K}$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty (p = 2 : \text{Euklidische Norm})$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{j=1}^n |x_j|$$

Beh:  $\|\cdot\|$  ist Norm auf  $\mathbb{K}^n$  für  $1 \leq p \leq \infty$

$\|x + y\|_\infty = \sup_{j=1}^n |x_j + y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$  Für  $p \in (1, \infty), p \neq 2$ : siehe Übungsaufgabe (Fall  $p = 2$  läuft über Cauchy-Schwarz)

Beachte:  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n \|x\|_\infty$

### Definition

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  heißen äquivalent auf  $X$ , falls es  $0 < m, M < \infty$  gibt, so dass für alle  $x \in X$  gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

### Satz 1.1

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

### Beweis

Wähle eine algebraische Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $X$ , wobei  $n = \dim X < \infty$ .

Definiere  $\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , wobei  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

z. z. die gegebene Norm  $\|\cdot\|$  ist äquivalent zu  $\|\cdot\|$ .

Beweis:

In der einen Richtung betrachte:

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &=: \nu \quad \|x\|\end{aligned}$$

Für die Umkehrung benutze die Funktion  $J : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ ,  $J(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Die Abbildung  $y \in \mathbb{K}^n \rightarrow \|Jy\|$  ist stetig, denn

$$\|Jy\| - \|y\|_{\mathbb{K}^n} = \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\begin{aligned}\text{und } \|\|Jy\| - \|Jz\|\| &\leq \|\|Jy - Jz\|\| \leq \|\|J(y - z)\|\| \\ &\leq M \|\|J(y - z)\|\| \\ &= M \|y - z\|_{\mathbb{K}^n}\end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von  $Jy \rightarrow \|Jy\| \in \mathbb{R}$

Sei  $S = \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\|_2 = 1\}$ . Dann ist  $S$  abgeschlossen und beschränkt. Die Abbildung  $N := y \in S \rightarrow \|Jy\| > 0$  ist wie in (\*) gezeigt stetig. Nach Analysis nimmt  $N$  sein Minimum in einem Punkt  $y_0 \in S$  an. Setze

$$\begin{aligned}m &= \inf\{\|x\| : \|\|x\|\| = 1\} = \inf\{\|Jy\| : y \in S\} \\ &= \|Jy_0\| > 0\end{aligned}$$

$$\text{Also } m \leq \left\| \frac{x}{\|\|x\|\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|\|x\|\|} \Rightarrow \|\|x\|\| \leq m\|x\|$$

■

### Proposition 1.2

Für zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  auf  $X$  sind äquivalent:

- a)  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  sind äquivalent
- b) Für alle  $(x_n) \subset X$ ,  $x \in X$  gilt  $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$
- c) Für alle  $(x_n) \subset X$  gilt  $\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n\|_2 \rightarrow 0$
- d) Es gibt Konstanten  $0 < m, M < \infty$ , so dass  $mU_{(X, \|\cdot\|_1)} \leq U_{(X, \|\cdot\|_2)} \leq MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$

**Beweis**

a)  $\Rightarrow$  b)  $\Rightarrow$  c) folgt direkt durch die Definition von äquivalenten Normen.



c)  $\Rightarrow$  d) Annahme: Es existiert kein  $M$  mit  $U_{(X, \|\cdot\|_2)} \subset MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$ .

Dann gibt es eine Folge  $x_n \in U_{(X, \|\cdot\|_2)}$  mit  $\|x_n\|_1 \geq n^2$

Setze  $y_n = \frac{1}{n}x_n$ . Dann gilt  $\|y_n\|_1 \rightarrow 0$  und  $\|y_n\|_2 \rightarrow \infty$ .

Widerspruch zu c).

d)  $\Rightarrow$  a) Gegeben ist  $U_{(X, \|\cdot\|_2)} \subset MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$

Das ist äquivalent zu  $\|x\|_2 \leq M\|x\|_1$

Analog folgt aus  $mU_{(X, \|\cdot\|_1)} \subset U_{(X, \|\cdot\|_2)}$  dann  $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ .

Also  $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$  ■

**Vereinbarung:** Sei  $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^N : x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } n \in N\}$  der **Folgenraum** und  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der Einheitsvektor, wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

**Beispiel**

- $l^p = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^N : \|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$
- $l^\infty = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^N : \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$
- $c_0 = \{x = (x_n) \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0\}$

Gültigkeit der Dreiecksungleichung beweist man ähnlich wie bei  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ .

**Lemma 1.3**

Minkowskii-Ungleichung:  $(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Hölder-Ungleichung: mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| |y_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$

**Bemerkung:** Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen  $\|\cdot\|_p$  auf  $\mathbb{F}$  nicht äquivalent.

**Beweis**

Sei  $p > q$ , setze

$$X_n := \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j, \quad e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$$

Damit gilt  $x_n \in \mathbb{F}$  und weiter

$$\|x_n\|_p = \left( \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{p}} \simeq (\ln(2))^{\frac{1}{p}}$$

aber  $\|x_n\|_q \rightarrow \infty$ , also sind  $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$  keine äquivalente Normen. ■

**Beispiel**

a) Raum der stetigen Funktionen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ ,  $\|f\| = \sup_{u \in \Omega} |f(u)|$

$\Rightarrow \|f - f_n\| \rightarrow 0$  bedeutet gleichmäßige Konvergenz von  $f_n$  gegen  $f$  auf  $\Omega$ .

b) Raum der differentierbaren Funktionen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$

$D^\alpha f(x) = \frac{\delta^{|\alpha|}}{\delta x_1^{\alpha_1} \dots \delta x_n^{\alpha_n}} f(x)$ , wobei  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

### Definition

Wir nennen  $C_b^m(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \text{ sind stetig in } \Omega, \text{ beschränkt auf } \Omega \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$  den **Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen**.

Auf  $C_b^m$  definieren wir die Norm:  $\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$

**Bemerkung:** Auf  $C_b^m[0, 1]$  ist eine äquivalente Norm zu  $\|f\|_{C_b^m}$  gegeben durch

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

Denn  $f^{(i)}(t) = f^{(i)}(0) + \int_0^t f^{(i+1)}(s) ds$  und damit  $\|f^{(i)}\|_0 \leq |f^{(i)}(0)| + \|f^{(i+1)}\|_\infty$

### Beispiel

$X = C(\bar{\Omega})$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt.

Definiere  $\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\int_\Omega |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$  und betrachte  $f_k(t) = t^k, t \in [0, 1]$ , dann gilt:

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad p < \infty$$

### Definition (Quotientenräume)

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum.  $M \subset X$  sei abgeschlossener, linearer Unterraum.

(abgeschlossen: d.h. für alle  $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x \in M$ )

Definiere  $\hat{X} = X/M$ ,  $\hat{x} \in X/M : \hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$

Dabei gilt unter anderem  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = x_1 + x_2$  und  $\lambda \hat{x}_1 = \lambda x_1$ ;  $\hat{X}$  bildet somit einen Vektorraum.

Definieren wir eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels  $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|y\|_X : y \in \hat{X}\}$

Behauptung:  $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$  ein normierter Raum.

Beweis: Sei  $\hat{x} \in \hat{X}$  beliebig mit  $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = 0$

dann existiert ein  $y_n \in \hat{X}$  mit  $\|y_n\| \rightarrow 0$  und  $x - y_n \in M$

$$\Rightarrow x \in M, \hat{x} = 0$$

Zu  $\epsilon > 0$  wähle für  $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}, y_1, y_2 \in M$  mit

$$\|\hat{x}_1\| \geq \|x_i - y_i\| - \epsilon$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq \|x_1 + x_2 - y_1 - y_2\| \\ &\leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \\ &\leq \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| + 2\epsilon \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Ist  $\|\cdot\|$  nur eine Halbnorm auf  $X$ , so ist  $M = \{x : \|x\| = 0\}$  ein abgeschlossener, linearer Teilraum von  $X$  und der Quotientenraum  $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$  ist ein normierter Raum.

**Beispiel**

- Hölderstetige Funktionen

Wenn  $h_\alpha(f) = \sup_{u,v \in \mathbb{R}, u \neq v} \frac{\|f(u) - f(v)\|}{|u - v|^\alpha} < \infty$  ( $\alpha \in (0, 1]$ ), dann nennt man  $f$  hölderstetig.

$$C^\alpha(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : h_\alpha(f) < \infty\} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

Im Moment ist  $h_\alpha(\cdot)$  eine Halbnorm. Unter der Voraussetzung  $\Omega$  zusammenhängend gilt aber weiter:

$$h_\alpha(f) = 0 \iff f \equiv c \text{ konstant}$$

Wenn z.B.  $M = \{\mathbb{1}_\Omega\}$  und  $V = C^\alpha/M$  ist oben genanntes sogar ein normierter Raum.

- Lebesgues-Integrierbare Funktionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : |f|^p \text{ ist lebesgue-integrierbar auf } \Omega\}$ . Wir definieren  $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ , wobei  $\|\cdot\|_p$  hier eine Halbnorm bildet.

$$\|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \text{ fast überall auf } \Omega$$

Wähle  $M = \{l : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f = 0 \text{ fast überall auf } \Omega\}$ .

Dann ist

$$\mathbb{L}^p(\Omega) := \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{M} \text{ ein normierter Raum.}$$

## 1.3 Beschränkte und lineare Operatoren

### Definition

Eine Teilmenge  $V$  eines normierten Raums  $(X, \|\cdot\|)$  heißt beschränkt, falls

$$c := \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X, \|\cdot\|)}$$

**Bemerkung:** Eine konvergente Folge  $(x_n) \in X, x_n \rightarrow x$  ist beschränkt, denn  $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$  für fast alle  $m$ .

### Satz 1.4

Seien  $X, Y$  normierte Räume. Für einen linearen Operator  $S : X \rightarrow Y$  sind äquivalent:

- a)  $T$  stetig, d.h.  $x_n \rightarrow x$  impliziert  $Tx_n \rightarrow Tx$
- b)  $T$  stetig in 0
- c)  $T(U_{(X, \|\cdot\|)})$  ist beschränkt in  $Y$
- d) Es gibt ein  $c < \infty$  mit  $\|Tx\| \leq c\|x\|$

### Beweis

a)  $\Rightarrow$  b) klar, ist ein Spezialfall.

b)  $\Rightarrow$  c) Wäre c) falsch, dann gibt es ein  $x_n \in U_X$  mit

$$\|Tx_n\| \geq \frac{1}{n^2}$$

Setze  $y_n = \frac{1}{n}x_n$ , dann gilt

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{n}\|x_n\| \rightarrow 0, \|T(y_n)\| = n^2\|T(x_n)\| \geq \frac{n^2}{n} \rightarrow \infty$$

Widerspruch zur Voraussetzung.

c)  $\Rightarrow$  d) Sei  $T(U_X) \subset U_Y$

Für  $x \in X \setminus \{0\}, \frac{x}{\|x\|} \in U_X$  folgt:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) &\in cU_Y \\ \Rightarrow \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| &\leq c \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \end{aligned}$$

d)  $\Rightarrow$  a) Für  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  folgt:

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tx\| &= \|T(x_n - x)\| \\ &\leq c\|x_n - x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx \text{ in } Y$$

■

**Definition**

Seien  $X, Y$  normierte Räume. Mit  $B(X, Y)$  bezeichnen wir den **Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren**  $T : X \rightarrow Y$ . Ist  $X = Y$  schreiben wir auch kurz  $B(X) := B(X, X)$ .

Für  $T \in B(X, Y)$  setze

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}\end{aligned}$$

Die Norm  $\|T\|$  von  $T$  ist die kleinste Konstante  $c$ , für welche die Gleichung  $\|Tx\| \leq c\|x\|$  für alle  $x \in X$  gilt.

**Satz 1.5**

$(B(X, Y), \|\cdot\|)$  ist ebenfalls ein normierter Raum und für  $X = Y$  gilt für  $S, T \in B(X)$ :

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\|\|T\|$$

**Beweis**

$$\|T\| \geq 0, \|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \text{ für } \|x\| \leq 1 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$\begin{aligned}\|(T + S)(x)\| &= \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\|_Y + \|Sx\|_Y \\ &\leq \|T\| + \|S\|\end{aligned}$$

Nehme das Supremum über  $\|x\| \leq 1$ :

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

$$\begin{aligned}\|(S \cdot T)(x)\|_Y &= \|S(Tx)\|_Y \leq \|S\|\|Tx\| \\ &\leq \|S\|\|T\|\|x\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|ST\| \leq \|S\|\|T\|$$

■

**Beispiel**

a)  $Id x = x, \|Id\| = 1$

b) Falls  $\dim X = n < \infty, Y$  normierter Raum, dann sind alle linearen Operatoren  $T : X \rightarrow Y$  beschränkt.

**Beweis**

Wähle die Basis  $e_1, \dots, e_n$  von  $X$

Für  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  gilt:

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \left\|\sum_{i=1}^n x_i T e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T e_i\| \\ &\leq \max_{i=1}^n \|T e_i\|_Y \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &\leq c\|x\|, \text{ da } \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|\end{aligned}$$

Aber: Wenn  $\dim X = \infty, \dim Y < \infty$  so gibt es viele unbeschränkte, lineare Operatoren von  $X$  nach  $Y$ . ■

c)  $X = C^\infty(0, 1), \|f\|_\infty = \sup_{u \in (0,1)} |f(u)|$   
 $T : X \rightarrow X, Tf = f', f_k(t) = e^{i2\pi kt} \in X, Tf_k(t) = 2\pi i k f_k(t)$   
 $\|f_k\| = 1, \|Tf_k\| = 2\pi k \rightarrow \infty$

d)  $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \text{ bis auf endlich viele } n\}$

$$T : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}, T((x_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n x_n \in \mathbb{R} \|Te_n\| = n \rightarrow \infty$$

### Beispiel (Integraloperator)

$X = Y = C(\bar{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt. Gegeben sei  $k \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

Für  $f \in C(\bar{\Omega})$  setze:  $Tf(u) = \int_{\Omega} k(u, v) f(v) dv, \quad (A(f_j))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j, A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

Dann ist  $Tf \in C(\bar{\Omega})$  (nach Lebesgueschem Konvergenzsatz)

$$\begin{aligned} |Tf(u)| &\leq \int_{\Omega} |k(u, v)| |f(v)| dv \\ &\leq \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \sup_{u \in \bar{\Omega}} |f(u)| \end{aligned}$$

sup über  $u \in \Omega$  liefert dann:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_\infty &\leq \sup_{u \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \|f\|_\infty \\ \Rightarrow \|T\| &= \sup_{u \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} |k(u, v)| dv < \infty, \end{aligned}$$

Die Abbildung  $u \in \bar{\Omega} \rightarrow \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \in \mathbb{R}$  ist stetig nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue.

### Beweis

"  $\leq$  " ist klar

"  $\geq$  " Falls  $k(u, v) \geq 0$  dann ist  $T \cdot \mathbf{1}(u) = \int_{\Omega} k(u, v) dv = \int_{\Omega} |k(u, v)| dv$

$$\|T \cdot \mathbf{1}\| = \sup_{u \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \leq \|T\|, \text{ d.h. } \|\mathbf{1}\| = 1$$

Skizze:

$$\sup \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \sim \int_{\Omega} |k(u_0, v)| dv = \int_{\Omega} k(u_0, v) g(v) dv$$

mit  $g(v) = \text{sign}(v) k(u_0, v)$ ,  $g$  ist aber nicht stetig.

Ggf. Approximation des Signums durch stetige Funktionen. ■

### Beispiel (Kompositionsoperator)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

$$\sigma : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega} \text{ stetig, für } f \in C(\bar{\Omega}) : Tf(u) = f(\sigma(u))$$

z.B.:  $\sigma$  als Transposition der Elemente in  $\Omega$

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \|T\| = 1$$

**Beispiel (Differentialoperatoren)**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X = C^m(\bar{\Omega})$ ,  $Y = C_b(\Omega)$ ,

$$T : X \rightarrow Y, \quad Tf(u) = \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha D^\alpha f(u), u \in \mathbb{R}, a_\alpha \in C\bar{\Omega}$$

$$\text{damit } \|Tf\|_\infty \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|a_\alpha\|_\infty \|D^\alpha f\|_\infty \leq c \|f\|_\infty$$

**Beispiel (Matrizenmultiplikation)**

Für  $p \in [1, \infty]$  und  $T \in B(l^p)$  setzen wir

$$e_l := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad l \in \mathbb{N}, \quad \text{wobei die 1 an } l\text{-ter Stelle steht.}$$

und  $a_{kl} = (Te_l)_k$ , sowie  $A = (a_{kl})_{k,l \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow (Tx)_k = \left( \sum_{l=1}^{\infty} x_l Te_l \right)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l, \quad k \in \mathbb{N} \Rightarrow Tx = Ax \text{ (unendliches Matrixprodukt)}$$

a) Die Hills-Tanerkin-Bedingung (nur Hinreichend)

Sei  $p \in (1, \infty)$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Setze

$$c := \left( \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{l \geq 1} |a_{kl}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

so definiert  $T$  einen Operator  $T \in B(l^p)$  mit  $\|T\| \leq c$

**Beweis**

(i) Wohldefiniertheit: (& Beschränktheit)

Für  $x \in l^p$  folgt

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{l^p}^p &= \sum_{k \geq 1} |(Tx)_k|^p \\ &= \sum_{k \geq 1} \left| \sum_{l \geq 1} a_{kl} x_l \right|^p \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{l \geq 1} |a_{kl}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \left( \sum_{l \geq 1} |x_l|^p \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= c^p \|x\|_{l^p}^p < \infty \end{aligned}$$

(ii) Linearität

Wegen  $c < \infty$  ist  $(\sum_l |a_{kl}|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty, \forall k \in \mathbb{N}$

Für  $x \in l^p$  konvergiert die Reihe nach Hölder. Damit ist  $T$  offensichtlich linear. ■

b) Der Fall  $l^1$ :

Es ist  $T \in B(l^1)$  genau dann wenn

$$c_1 := \sup_l \sum_k |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist  $\|T\| = c_1$ .

**Beweis**

"  $\Rightarrow$  " Sei  $T \in B(l^1)$ . Dann gilt für  $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_k |a_{kl}| &= \sum_k |(Te_l)_k| \\ &= \|Te_l\|_{l^1} \\ &\leq \|T\| \|e_l\|_{l^1} = \|T\| < \infty \end{aligned}$$

"  $\Leftarrow$  " folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem gilt  $\|T\| < c_1$  ■

c) Der Fall  $l^\infty$ :

Es ist  $T \in B(l^\infty)$  genau dann, wenn

$$c_\infty := \sup_k \sum_l |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist  $\|T\| = c_\infty$

**Beweis**

"  $\Rightarrow$  " Sei  $T \in B(l^\infty)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Setze dann  $x^{(k)} = \begin{cases} \frac{|a_{kl}|}{a_{kl}} & a_{kl} \neq 0 \\ 0 & a_{kl} = 0 \end{cases}$

dann ist  $x^{(k)} \in l^\infty$  mit  $\|x^{(k)}\|_{l^\infty} = 1$  und weiter

$$\sum_l |a_{kl}| =$$
■



# Bildquellen

Abb. ?? Tag: Name, [URL-Name](#)

# Abkürzungsverzeichnis

**Beh.** Behauptung

**Bew.** Beweis

**bzgl.** bezüglich

**bzw.** beziehungsweise

**ca.** circa

**d. h.** das heißt

**Def.** Definition

**etc.** et cetera

**ex.** existieren

**Hom.** Homomorphismus

**i. A.** im Allgemeinen

**o. B. d. A.** ohne Beschränkung der Allgemeinheit

**Prop.** Proposition

**sog.** sogenannte

**Vor.** Voraussetzung

**vgl.** vergleiche

**z. B.** zum Beispiel

**zhgd.** zusammenhängend

**z. z.** zu zeigen

# Symbolverzeichnis

## Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  Natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$  Ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\} = \{\frac{z}{n} \text{ mit } z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$  Rationale Zahlen

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, -\sqrt[3]{3}, \dots\}$  Reelle Zahlen

$\mathbb{R}_+$  Echt positive reelle Zahlen

$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  Komplexe Zahlen

$I = [0, 1] \subsetneq \mathbb{R}$  Einheitsintervall