Funktionalanalysis

Prof. Dr. Lutz Weis

Wintersemester 2015

Karlsruher Institut für Technologie

Vorwort

Dieses Skript wurde im Wintersemester 2015/2016 von Martin Belica geschrieben. Es ist ein inoffizielles Skript und beinhaltet die Mitschriften aus der Vorlesung von Prof. Dr. Weis am Karlsruhe Institut für Technologie sowie die Mitschriften einiger Übungen.

Einleitung

Die Funktionalanalysis liefert den begrifflichen Rahmen sowie allgemeine Methoden, die in weiten Teilen der modernen Analysis verwendet werden. Zum Beispiel ist es möglich Integral- und Differentialgleichungen als lineare Gleichungen in einem geeigneten unendlichdimensionalen Vektorraum (wie z.B. einem Raum stetiger oder integrierbarer Funktionen) aufzufassen. Will man nun auf diese unendlichdimensionalen Gleichungen Ideen der linearen Algebra anwenden, so treten Konvergenz- und Kompaktheitsprobleme auf, die wir in dieser Vorlesung behandeln wollen. Zu den Themen gehören:

- Beschränkte und abgeschlossene Operatoren auf normierten Räumen
- Stetigkeit und Kompaktheit auf metrischen Räumen
- Geometrie und Operatorentheorie in Hilberträumen
- Der Satz von Hahn-Banach und Dualität von Banachräumen

Die allgemeinen Aussagen werden durch konkrete Beispiele von Räumen und Operatoren der Analysis illustriert.

Erforderliche Vorkenntnisse

Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Räume

Sei X ein Vektorraum, $dim X < \infty$ und sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &:= \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_i^2\|\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|x\|_\infty &:= \max_{i=1}^{n} \|x_i\| \end{aligned}$$

Diese Normen sind äquivalent, denn: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$

Satz 1.1 (Bolzano-Weierstraß)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann hat jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Teilfolge.

Beispiel 1.2
Betrachte $X = C[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } [0,1]\}$ mit $\|f\|_\infty := \max\limits_{t \in [0,1]} \|f(t)\|$.
Sei weiter $f_n\colon t \to t^n$, damit gilt $\|f_n\|_\infty \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

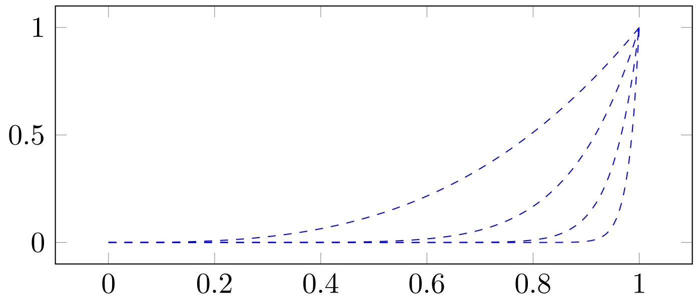


Abbildung 1.1: f_n für $n = 3, 8, 20$ und 50

Die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ besitzt damit aber in X keine konvergente Teilfolge, da die Grenzfunktion

$$f = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

nicht in X liegt. $\Rightarrow$ Satz von Bolzano-Weierstraß gilt im unendlich dimensionalen i.A. nicht!

Operatoren

Sei $N = dim X, M = dim Y$ und seien (e_n) bzw. (f_n) Basen von X bzw. Y.
Sei $T \colon X \to Y$ gegeben durch:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\alpha_n \to \sum \alpha_n e_n"'] & Y \arrow[d, "\beta_n \to \sum \beta_n f_n"] \\ \mathbb{R}^N \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

wobei $x = \sum \alpha_n e_n, \;\; Tx = \sum \beta_n f_n, \;\; \beta_m = \sum_{n=1}^N a_{mn}\alpha_n$.

Daraus folgt:

- T ist stetig
- X = Y $\iff$ T injektiv $\iff$ T surjektiv (Dimensionsformel)
  (Die Gleichung $Tx = y$ ist eindeutig lösbar $\iff$ Gleichung hat für alle $y \in Y$ eine Lösung.)
- Falls A selbstadjungiert ist, d.h. $A = A^*$, gibt es eine Basis aus Eigenvektoren (e_n) von A, d.h. $T(\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \alpha_n e_n$, wobei λ_n Eigenwerte sind, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.3
$X = C^1[0,1] = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } [0,1]\}$
$Tf = f', T \colon X \to C[0,1]$ stetig. (Aber: $T : C[0,1] \to C[0,1]$, hier ist T nicht definiert.)

T ist nicht stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$-Norm, da:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}, \quad \text{dann: } \|f_n\| \to 0 \text{ für } t \to \infty$$
$$Tf_n(t) = i\sqrt{n} e^{int}, \quad \text{mit: } \|Tf_n\|_\infty \to \infty, \text{ für } n \to \infty$$

Beispiel 1.4
$X = L_2 = \{(a_n) : \left(\sum_{n\geq 1}^\infty \|a_n\|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$
$T(a_1, a_2, a_3, ...) = (0, a_1, a_2, a_3, ...)$

T ist injektiv, aber nicht surjektiv

Anwendungen

1. **Fredholm'sche Integralgleichungen**: Sei $X = C[0,1]$ und $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $Tf(t) := \int_0^1 k(t,s) f(s) ds$ *(Analogie zum endlich dim. als 'Verallg. der Matrixmultiplikation' mit $T(f_j)(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$).*
   T ist in diesem Fall linear und stetig und es gilt die Fredholm'sche Alternative:
$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (\lambda Id - T)(f) = y, \quad f, g \in C[0,1]$$

und eine Lösung existiert genau dann, wenn diese eindeutig ist.

2. **Dirichletproblem**: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet mit glattem Rand und sei $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht ist ein $f \in C(\bar{\Omega}) \cap C^(\Omega)$, so dass $\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ in Ω und $f|_{\partial\Omega} = g$.
Beispiel: Durch Wärmeverteilung auf dem Rand auf die Wärmeverteilung im Inneren schließen.

Lösung: Dirichletintegral $J(u) = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx$, wobei $u \in M = \{v \in C^1(\bar{\Omega})| \;\; v|_{\partial\Omega} = g\}$
Sei v_0 das absolute Minimum von J, d.h. $J(v_0) = \inf\{J(w) : w \in M\}$. Ist $v \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $v = 0$ in einer Umgebung von ∂U. $\epsilon \to J(u_0 + \epsilon v)$:

$$\frac{d}{d\epsilon}J(u_0+\epsilon v) = \int_\Omega \frac{d}{d\epsilon}(\nabla u_0 + \epsilon \nabla v)^2 dx = 2\int_\Omega (\nabla u_0 + \epsilon\nabla v)(\nabla v)dx|_{\epsilon=0} = 2\int_\Omega (\nabla u_0)(\nabla v)dx$$

Mit $0 \geq J(u_0+\epsilon v) - J(u_0) \geq 0 :\quad \int(\nabla u_0)(\nabla v)dx \overset{\text{P.I.}}{=} -\int(\nabla u_0)v dx = 0$

$$\Rightarrow \nabla u_0 = 0, \text{ außerdem } u_0|_{\partial\Omega} = g \text{ (s.o.)}$$

Im Allgemeinen existiert das, das absolute Minimum $u_0 \in J$ aber nicht.
Ausweg: $X = \{f \in L^2(\Omega), f' \in L^2(\Omega)\} \supset \{f \in C(\bar{\Omega}), f' \in C(\bar{\Omega})\}$ In diesem Raum X (Sobolevräume) gibt es ein Minimum u_0 von J.

3. **Sturm-Liouville Problem**: Gegeben $X = C^2([0,1]), Tu = (pu')' + qu$, mit $q \in C[0,1], p \in C^1[0,1]$, finde bei gegebenen $f \in C[0,1]$ ein $u \in X$ mit $Tu = f, v(0) = 0, v'(1) = 0$.

Sei $Y = \{f \in L^2[0,1], f' \in L^2[0,1]\}$ ein Hilbertraum und (e_n) ein Orthonormalbasis. Wäre:$\|e_n\|_2 = 1, \int e_n(x)e_m(x)dx = 0$ für $m \neq m$:

$$f \in Y : f = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n \text{ mit } \|f\|^2 = \sum |\alpha_n|^2$$

Die (e_n) sind außerdem Eigenvektoren des Operatoren T, d.h. $Te_n = \lambda_n e_n$

$$Ty = f \Rightarrow \int Ty(x)e_n(x)dx = \int f(x)e_n(x)dx, y = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$$

Gesucht sind die Koeffizienten α_n

$$\begin{aligned}\int f(x)e_n(x)dx &= \sum_m \lambda_m\alpha_m \int Te_n(x)e_m(x)dx \\ &= \lambda_n\alpha_n \int e_n(x)e_n(x)dx\end{aligned}$$

$$\iff \alpha_n = \frac{1}{\lambda_n}\int f(x)e_n(x)dx$$

Lineare Operatoren auf Banachräumen

2 Normierte Räume

Definition 2.1
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}_+$ heißt **Norm**, falls

$(N1)$ $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

$(N2)$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bemerkung 2.2
Falls $\|\cdot\|$ all die oben genannten Eigenschaften erfüllt außer $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, dann heißt $\|\cdot\|$ **Halbnorm**.

Vereinbarungen:

- Die Menge $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ heißt **Einheitskugel**.
- Eine Folge (x_n) des normierten Raums X **konvergiert** gegen ein $x \in X$, falls $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Bemerkung 2.3
Für zwei Elemente $x, y \in (X, \|\cdot\|)$ in normierten Räumen gilt auch die **umgekehrte Dreiecksungleichung** $(|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|)$

Beispiel 2.4
Sei $X = \mathbb{K}^n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{K}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^p| \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \ (p = 2: \text{ Euklidische Norm})$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{j=1}^{n} |x_j|$$

Beh.: $\|\cdot\|$ ist Norm auf $\mathbb{K}^n$ für $1 \leq p \leq \infty$.

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{j=1}^{k} |x_j + y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Für $p \in (1, \infty), p \neq 2$: siehe Übungsaufgabe (Fall $p = 2$ läuft über Cauchy-Schwarz).
Beachte: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n \|x\|_\infty$

Definition 2.5
Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen **äquivalent** auf X, falls es $0 < m, M < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

Satz 2.6
Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Beweis
Wähle eine algebraische Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von X, wobei $n = dim X < \infty$.
Definiere $|||x||| \coloneqq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in X$

z. z. die gegeben Norm $|||\cdot|||$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|$.

Beweis:
Für die eine Richtung betrachte:

$$\begin{aligned} \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=|||x|||} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:M} \end{aligned}$$

also $\|x\| \leq M|||x|||$.

Für die Umkehrung betrachten wir die Funktion $J \colon \mathbb{K}^n \to X,\ J(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
Die Abbildung $y \in \mathbb{K}^n \to \|Jy\|$ ist stetig, denn

$$|||Jy||| = \|y\|_{\mathbb{K}^n} = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} |\|Jy\| - \|Jz\|| &\leq \|Jy - Jz\| \\ &= \|J(y-z)\| \\ &\leq M|||J(y-z)||| \\ &= M\|y-z\|_{\mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit der Abbildung $y \to \|Jy\| \in \mathbb{R}$.
Weiter ist $S = \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\|_{\mathbb{K}^n} = 1\}$ abgeschlossen und beschränkt und damit im endlich dimensionalen Vektorraum kompakt. Nach Analysis II nimmt damit die stetige Abbildung $N \colon y \in S \to \|Jy\| > 0$ ihr Minimum in einem Punkt $y_0 \in S$ an. Setze

$$m \coloneqq \inf\{\|x\| : |||x||| = 1\} = \inf\{\|Jy\| : y \in S\}$$

Das bedeutet $m \leq \left\| \frac{x}{|||x|||} \right\| = \frac{\|x\|}{|||x|||}$ für alle $x \in X$ und damit

$$m|||x||| \leq \|x\|. \qquad \square$$

Proposition 2.7
Für zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf X sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind äquivalent

b) Für alle $(x_n)_n \subset X$, $x \in X$ gilt $\|x_n - x\|_1 \to 0 \iff \|x_n - x\|_2 \to 0$

c) Für alle $(x_n)_n \subset X$ gilt $\|x_n\|_1 \to 0 \iff \|x_n\|_2 \to 0$

d) Es gibt Konstanten $0 < m$, $M < \infty$, so dass $mU_{(X,\|\cdot\|_1)} \subseteq U_{(X,\|\cdot\|_2)} \subseteq MU_{(X,\|\cdot\|_1)}$

Beweis
a) $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)* folgt direkt durch die Definition von äquivalenten Normen.

c) $\Rightarrow$ *d)* Annahme: Es existiert kein M mit $U_{(X,\|\cdot\|_2)} \subseteq MU_{(X,\|\cdot\|_1)}$.
Dann gibt es eine Folge $x_n \in U_{(X,\|\cdot\|_2)}$ mit $\|x_n\|_1 \geq n^2$
Setze $y_n = \frac{1}{n}x_n$. Dann gilt $\|y_n\|_2 \to 0$ und $\|y_n\|_1 \to \infty$.
Widerspruch zu *c)*.

d) $\Rightarrow$ *a)* Gegeben $mU_{(X,\|\cdot\|_1)} \subseteq U_{(X,\|\cdot\|_2)} \subseteq MU_{(X,\|\cdot\|_1)}$
Es folgt aus der ersten Ungleichung $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, bzw. aus der zweiten $\|x\|_2 \leq M\|x\|_1$.
Also $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$. □

Vereinbarung:
$\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$ ist der **Folgenraum** und $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der j-te Einheitsvektor in $\mathbb{F}$, wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

Beispiel 2.8
- $\ell^p \;= \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$
- $\ell^\infty = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$
- $c_0 \;= \{x = (x_n)_n \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\}$

Gültigkeit der Dreiecksungleichung beweist man ähnlich wie bei $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$.

Lemma 2.9
Minkowski-Ungleichung: $(\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^\infty |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
Hölder-Ungleichung: mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt $\sum_{i=1}^\infty |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^\infty |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$

Bemerkung 2.10
Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{F}$ nicht äquivalent.

Beweis
Sei o.B.d.A. $p > q$ und setze $x_n := \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j$, $e_j = (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$.
Damit ist $x_n \in \mathbb{F}$ und

$$\|x_n\|_p = \left(\sum_{j=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{p}} \simeq (ln(2))^{\frac{1}{p}}$$

aber $\|x_n\|_q \to \infty$, also sind $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ nach Prop. 2.7 c) keine äquivalente Normen. □

Beispiel 2.11

a) Raum der stetigen Funktionen:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $C(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty = \sup_{u\in\Omega} |f(u)|$

$$\Rightarrow \|f - f_n\|_\infty \to 0 \text{ bedeutet gleichmäßige Konvergenz von } f_n \text{ gegen } f \text{ auf } \Omega.$$

b) Raum der differenzierbaren Funktionen:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Definiere

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_m}} f(x), \text{ wobei } |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$$

Definition 2.12
Wir definieren durch

$$C_b^m(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha f \text{ sind für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ stetig und beschränkt auf } \Omega, |\alpha| \leq m\}.$$

den **Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen** und versehen ihn mit der Norm $\|f\|_{C_b^m} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$.

Bemerkung 2.13
Auf $C_b^m[0,1]$ ist eine äquivalente Norm zu $\|f\|_{C_b^m}$ gegeben durch

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

$$\text{Denn } f^{(i)}(t) = f^{(i)}(0) + \int_0^t f^{(i+1)}(s)ds \text{ und damit } \|f^{(i)}\|_\infty \leq |f^{(i)}(0)| + \|f^{(i+1)}\|_\infty$$

Beispiel 2.14
Sei $X = C(\bar{\Omega})$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt.
Definiere $\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$ und betrachte $f_k(t) = t^k, t \in [0,1]$, dann gilt:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\ p < \infty$$

Definition 2.15 (Quotientenräume)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset X$ sei abgeschlossener (d.h. für alle $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in M$), linearer Unterraum. Definiere $\hat{X} := {}^X\!/_M$, dann ist $\hat{x} \in {}^X\!/_M$:

$$\hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$$

Dabei gilt unter anderem $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \widehat{x_1 + x_2}$ und $\lambda\hat{x}_1 = \widehat{\lambda x_1}$; $\hat{X}$ bildet somit einen Vektorraum. Definieren wir eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|x - y\|_X : y \in M\} =: d(x, Y)$$

Behauptung: $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ein normierter Raum.

Beweis: Sei $\hat{x} \in \hat{X}$ beliebig mit $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = 0$.
Dann existiert ein $y_n \in \hat{X}$ mit $\|y_n\| \to 0$ und $x - y_n \in M \Rightarrow x \in M, \hat{x} = 0$
Zu $\epsilon > 0$ wähle für $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}, y_1, y_2 \in M$ mit

$$\|\hat{x}_i\| \geq \|x_i - y_i\| - \epsilon$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\|\widehat{x+y}\| &\leq \|x_1 + x_2 - y_1 - y_2\| \\ &\leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \\ &\leq \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| + 2\epsilon\end{aligned}$$

Bemerkung 2.16
Ist $\|\cdot\|$ nur eine Halbnorm auf X, so ist $M = \{x : \|x\| = 0\}$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum von X und der Quotientenraum $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ist ein normierter Raum.

Beispiel 2.17
- Hölderstetige Funktionen
  Wenn $h_\alpha(f) = \sup_{u,v\in\mathbb{R},u\neq v} \frac{\|f(u)-f(v)\|}{|u-v|^\alpha} < \infty$ (mit $\alpha \in (0,1]$), dann nennt man f hölderstetig.
  $$C^\alpha(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : h_\alpha(f) < \infty\} \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$
  Im Moment ist $h_\alpha(\cdot)$ eine Halbnorm. Unter der Voraussetzung Ω zusammenhängend gilt aber weiter:
  $$h_\alpha(f) = 0 \iff f \equiv c \text{ konstant}$$
  Wenn z.B. $M = \{\mathbb{1}_\Omega\}$ und $V = C^\alpha/M$ ist oben genanntes sogar ein normierter Raum.

- Lebesgues-Integrierbare Funktionen
  Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : |f|^p$ ist Lesbesgue-integrierbar auf Ω $\}$. Wir definieren $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, wobei $\|\cdot\|_p$ hier eine Halbnorm bildet.
  $$\|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \text{ fast überall auf } \Omega$$
  Wähle $M = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f = 0 \text{ fast überall auf } \Omega\}$.

  Dann ist
  $$L^p(\Omega) := {}^{\mathcal{L}^p(\Omega)}/_{M} \text{ ein normierter Raum.}$$

3 Beschränkte und lineare Operatoren

Definition 3.1
Eine Teilmenge V eines normieren Raums $(X, \|\cdot\|)$ heißt **beschränkt**, falls

$$c \coloneqq \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X,\|\cdot\|)}.$$

Bemerkung 3.2
Eine konvergente Folge $(x_n) \in X, x_n \to x$ ist beschränkt, denn $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$ für fast alle m.

Satz 3.3
Seien X, Y normierte Räume. Für einen linearen Operator $S : X \to Y$ sind äquivalent:

a) T stetig, d.h. $x_n \to x$ impliziert $Tx_n \to Tx$

b) T stetig in 0

c) $T(U_{(X,\|\cdot\|)})$ ist beschränkt in Y

d) Es gibt ein $c < \infty$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$

Beweis
a) $\Rightarrow$ *b)* klar, ist ein Spezialfall.

b) $\Rightarrow$ *c)* Wäre *c)* falsch, dann gäbe es ein $x_n \in U_X$ mit

$$\|Tx_n\| \geq n^2$$

Setze $y_n \coloneqq \frac{1}{n} x_n$, dann gilt

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{n}\|x_n\| \to 0, \|Ty_n\| = n^2 \|T(x_n)\| \geq \frac{n^2}{n} \to \infty$$

Widerspruch zur Voraussetzung.

c) $\Rightarrow$ *d)* Sei $T(U_X) \subset cU_Y$
Für $x \in X \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|} \in U_X$ folgt:

$$T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in cU_Y$$

$$\Rightarrow \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq c \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

d) $\Rightarrow$ *a)* Für $x_n \to x$ in X folgt:

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tx\| &= \|T(x_n - x)\| \\ &\leq c\|x_n - x\| \to 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tx_n \to Tx \text{ in } Y$$

□

Definition 3.4
Seien X, Y normierte Räume. Mit $B(X,Y)$ bezeichnen wir den **Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren** $T : X \to Y$. Ist $X = Y$ schreiben wir auch kurz $B(X) := B(X,X)$.

Für $T \in B(X,Y)$ setze

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\}\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}\end{aligned}$$

Die Norm $\|T\|$ ist die kleinste Konstante c, für welche die Gleichung $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.

Satz 3.5
$(B(X,Y), \|\cdot\|)$ ist ebenfalls ein normierter Raum und für $X = Y$ gilt für $S, T \in B(X)$:

$$S \cdot T \in B(X) \quad \text{und} \quad \|S \cdot T\| \leq \|S\|\|T\|$$

Beweis
Wir betrachten also ab sofort $T \in B(X)$: $\|T\| > 0$, da $\|T\| \geq 0$ und für $\|T\| = 0$ ist $\|Tx\| = 0$ für alle $\|x\| \leq 1 \xRightarrow[\text{ist Norm}]{\|\cdot\|} Tx = 0$ für alle $\|x\| \leq 1 \Rightarrow T = 0$

Die Beschränktheit erhalten wir mittels

$$\begin{aligned}\|(T+S)(x)\| = \|Tx + Sx\| &\leq \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq \|T\| + \|S\|\end{aligned}$$

Bilden des Supremums über $\|x\| \leq 1$ liefert:

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|.$$

Für $X = Y$ und $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned}\|(S \cdot T)(x)\| = \|S(Tx)\| &\leq \|S\|\|Tx\| \\ &\leq \|S\|\|T\|\|x\|\end{aligned}$$

Also ist der Operator $S \cdot T$ beschränkt und $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. □

Beispiel 3.6

a) $Idx = x, \quad \|Id\| = 1$

b) Falls $\dim X = n < \infty, Y$ normierter Raum, dann sind alle linearen Operatoren $T : X \to Y$ beschränkt.

   Beweis
   Wähle die Basis $e_1, \ldots, e_n$ von X

Für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ gilt:

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \|\sum_{i=1}^n x_i Te_i\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|Te_i\| \\ &\leq \max_{i=1}^n \|Te_i\|_Y \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &\leq c\|x\|, \text{ da } \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|\end{aligned}$$

Aber: Wenn $dimX = \infty, dimY < \infty$ so gibt es viele unbeschränkte, lineare Operatoren von X nach Y. □

c) $X = C^\infty(0,1), \|f\|_\infty = \sup_{u\in(0,1)} |f(u)|$
$T : X \to X, Tf = f', f_k(t) = e^{i2\pi kt} \in X, Tf_k(t) = 2\pi ik f_k(t)$
$\|f_k\| = 1, \|Tf_k\| = 2\pi k \to \infty$

d) $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \text{ bis auf endlich viele } n\}$

$$T : \mathbb{F} \to \mathbb{R}, \quad T((x_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} nx_n \in \mathbb{R}, \quad \|Te_n\| = n \to \infty$$

Beispiel 3.7 (Integraloperator)
$X = Y = C(\bar{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Gegeben sei $k \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$

Für $f \in C(\bar{\Omega})$ setze: $Tf(u) = \int_\Omega k(u,v)f(v)dv, \quad (A(f_j))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}f_j, A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n})$

Dann ist $Tf \in C(\bar{\Omega})$ (nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue)

$$\begin{aligned}|Tf(v)| &\leq \int_\Omega |k(u,v)||f(u)|du \\ &\leq \int_\Omega |k(u,v)|du \cdot \sup_{u\in\Omega} |f(u)| \\ &= \int_\Omega |k(u,v)|du \cdot \|f\|_\infty\end{aligned}$$

Das Bilden des Supremums über $v \in \Omega$ liefert somit eine Abschätzung der Norm:

$$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty &\leq \sup_{v\in\Omega} \int |k(u,v)|du \cdot \|f\|_\infty \\ \Rightarrow \|T\| &= \sup_{v\in\Omega} \int |k(u,v)|du < \infty,\end{aligned}$$

Die Abbildung $u \in \bar{\Omega} \to \int |k(u,v)|dv \in \mathbb{R}$ ist stetig nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue.

Beweis
" $\leq$ " ist klar
" $\geq$ " Falls $k(u,v) \geq 0$ dann ist $T \cdot \mathbb{1}(u) = \int k(u,v)dv = \int |k(u,v)|dv$

$$\|T \cdot \mathbb{1}\| = \sup_{u\in\Omega} \int |k(u,v)|dv \leq \|T\|, \text{ d.h. } \|\mathbb{1}\| = 1$$

Skizze:

$$\sup \int |k(u,v)|dv \sim \int |k(u_0,v)|dv = \int k(u_0,v)g(v)dv$$

mit $g(v) = sign(v)k(u_0,v)$, g ist aber nicht stetig.
Ggf. Approximation des Signums durch stetige Funktionen. □

Beispiel 3.8 (Kompositionsoperator)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und betrachte für $\sigma\colon \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$ stetig und $f \in C(\bar{\Omega})$:

$$Tf(u) = f(\sigma(u))$$

z.B.: σ als Transposition der Elemente in Ω

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \|T\| = 1$$

Beispiel 3.9 (Differentialoperatoren)
Mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}$ und $X = C^m(\bar{\Omega}), Y = C_b(\Omega)$, betrachte

$$T : X \to Y,\ Tf(u) = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha D^\alpha f(u), u \in \mathbb{R}, a_\alpha \in C(\bar{\Omega})$$

Dann ist $\|Tf\|_\infty \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \|a_\alpha\|_\infty \|D^\alpha f\|_\infty \leq c\|f\|_\infty$.

Beispiel 3.10 (Matrizenmultiplikation)
Für $p \in [1,\infty]$ und $T \in B(\ell^p)$ setzen wir

$$e_l \coloneqq (0,\dots,0,1,0,\dots),\ l \in \mathbb{N}, \quad \text{wobei die 1 an l-ter Stelle steht.}$$

und $a_{kl} \coloneqq (Te_l)_k$, sowie $A \coloneqq (a_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}}$

$$\Rightarrow (Tx)_k = (\sum_{l=1}^{\infty} x_l Te_l)_k = (\sum_{l=1}^{\infty} x_l a_{kl})_k,\ k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow Tx = Ax \text{ (vgl. unendliches Matrixprodukt)}$$

a) Die Hille-Tamarkin-Bedingung (nur hinreichend)
Sei $p \in (1,\infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Setze

$$c \coloneqq \left(\sum_{k\geq 1}\left(\sum_{l\geq 1}|a_{kl}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

so definiert T einen Operator $T \in B(\ell^p)$ mit $\|T\| \leq c$

Beweis

a) Wohldefiniertheit: (und Beschränktheit)
Für $x \in \ell^p$ folgt

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k\geq 1} |(Tx)_k|^p \\
&= \sum_{k\geq 1} |\sum_{l\geq 1} a_{kl}x_l|^p \\
&\leq \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{l\geq 1}|a_{kl}|^q\right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{l\geq 1}|x_l|^p\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= c^p\|x\|_{\ell^p}^p < \infty
\end{aligned}$$

b) Linearität

Wegen $c < \infty$ ist $(\sum_l |a_{kl}|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty,\ \forall k \in \mathbb{N}$

Für $x \in \ell^p$ konvergiert die Reihe nach Hölder. Damit ist T offensichtlich linear. $\square$

b) Der Fall ℓ^1:

Es ist $T \in B(\ell^1)$ genau dann, wenn

$$c_1 := \sup_l \sum_k |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist $\|T\| = c_1$.

Beweis

" $\Rightarrow$ " Sei $T \in B(\ell^1)$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_k |a_{kl}| &= \sum_k |(Te_l)_k| \\ &= \|Te_l\|_{\ell^1} \\ &\leq \|T\| \|e_l\|_{\ell^1} = \|T\| < \infty\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem gilt $\|T\| \leq c_1$ $\square$

c) Der Fall ℓ^∞:

Es ist $T \in B(\ell^\infty)$ genau dann, wenn

$$c_\infty := \sup_k \sum_l |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist $\|T\| = c_\infty$

Beweis

" $\Rightarrow$ " Sei $T \in B(\ell^\infty)$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze dann $x^{(k)} = \begin{cases} \frac{|a_{kl}|}{a_{kl}} & a_{kl} \neq 0 \\ 0 & a_{kl} = 0 \end{cases}$

dann ist $x^{(k)} \in \ell^\infty$ mit $\|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} = 1$ und weiter

$$\begin{aligned}\sum_l |a_{kl}| &= |\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl} x_l^{(k)}| \\ &= |(Tx^{(k)})_k| \\ &\leq \|Tx^{(k)}\|_\infty \\ &\leq \|T\| \|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} = \|T\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_\infty \leq \|T\|$$

" $\Leftarrow$ " folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem gilt $\|T\| \leq c_\infty$ $\square$

d) Interpolation

Ist $T \in B(\ell^1) \cap B(\ell^\infty)$, dann ist $T \in B(\ell^p)$ für alle $p \in (1, \infty)$ mit $\|T\| \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}}$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Beweis
Für $x \in \ell^p$ setzen wir $y_k := |(Tx)_k|^{p-1}, \quad k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \|y\|_{\ell^q} = \left(\sum_{k\geq 1} |(Tx)_k|^{\overbrace{q(p-1)}_{=p}} \right)^{\frac{1}{q}} = \|Tx\|_{\ell^p}^{p-1}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k\geq 1} y_k |(Tx)_k| \leq \sum_{k\geq 1} \sum_{l\geq 1} y_k |a_{kl}||x_l| \\
&= \sum_{k\geq 1} \sum_{l\geq 1} |a_{kl}|^{\frac{1}{p}} |a_{kl}|^{\frac{1}{q}} |y_k||x_l| \\
&\leq \left(\sum_{k\geq 1} \sum_{l\geq 1} |a_{kl}||y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k\geq 1} \sum_{l\geq 1} |a_{kl}||x_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c_\infty^{\frac{1}{q}} \|y\|_{\ell^q} c_1^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\ell^p} \\
&= c_\infty^{\frac{1}{q}} c_1^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\ell^p} \|Tx\|_{\ell^p}^{p-1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_{\ell^p} \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell^p} \text{ und } \|T\| \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}}$$

□

Definition 3.11
Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

a) T heißt **Isometrie**, falls $\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \ \forall x \in X$

b) T heißt **stetige Einbettung**, falls T stetig und injektiv ist.

c) T heißt **isomorphe Einbettung**, falls T injektiv ist und ein $c > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_x$$

In diesem Fall identifizieren wir oft X mit dem Bild von T in Y, $X \cong T(X) \subset Y$

d) T heißt **Isomorphismus**, falls T bijektiv und stetig ist und $T^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

$$\text{d.h. falls } \exists c > 0 : \frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

(daraus folgt dann auch für $T^{-1} : Y \to X$ aus der ersten Ungleichung

$$\|T^{-1}y\|_X \leq c\|T(T^{-1}y)\|_Y = c\|y\|_Y, \text{d.h. } T^{-1} \text{ ist stetig.)}$$

In diesem Fall Identifizieren wir $X \cong Y$ und sagen X und Y sind isomorph (da X, Y normierte Vektorräume sind, fordern wir im Gegensatz zur Linearen Algebra, dass T, T^{-1} zusätzlich stetig sind).

Beispiel 3.12

a) Seien $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ normierte Vektorräume. Dann gilt

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \iff I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2), Ix = x \text{ ist isomorph}$$

b) $I : c_0 \hookrightarrow \ell^\infty, Ix = x$ ist isometrische Einbettung

Definition 3.13
Sei X ein normierter Vektorraum. Der Raum

$$X' = B(X, \mathbb{K})$$

heißt **Dualraum** von X oder Raum der linearen Funktionalen.

Beispiel 3.14
Sei $X = \ell^p$ für $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Die Abbildung

$$\Phi_p \colon \ell^q \to (\ell^p)', \quad [\Phi_p(x)](y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x \in \ell^q, y \in \ell^p$$

Ist ein isometrischer Isomorphismus, d.h. $(\ell^p)' \cong \ell^q$, (insbesondere $(\ell^2)' \cong \ell^2$)

Beweis
Nach Hölder konvergiert die Reihe $[\Phi_p(x)](y)$ absolut mit

$$|[\Phi_p(x)](y)| \leq \sum_n |x_n y_n| \leq \|x\|_{\ell^q} \|y\|_{\ell^p}$$

Da $\Phi_p(x)$ linear in Y ist, folgt $\Phi_p(x) \in (\ell^p)'$ mit

$$\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \leq \|x\|_{\ell^q}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \geq \|x\|_{\ell^q}$ und Φ_p surjektiv ist. Sei $y' \in (\ell^p)'$, dann setze $x_n \coloneqq y'(e_n), n \in \mathbb{N}$ und $x = (x_n)_{n \geq 1}$. Setze außerdem

$$z_n \coloneqq \begin{cases} \frac{|x_n|^q}{x_n} & x_n \neq 0 \\ 0 & x_n = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt für $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q &= \sum_{n=1}^{N} x_n z_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} y'(e_n) z_n = y'\left(\sum_{n=1}^{N} z_n e_n\right) \\
&\leq \|y'\|_{(\ell^p)'} \underbrace{\|\sum_{n=1}^{N} z_n e_n\|_{\ell^p}}_{=\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\text{Also zusammen: } \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|y\|_{(\ell^p)'}, \text{ wobei } 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

$$\xRightarrow{N \to \infty} \|x\|_{\ell^q} \leq \|y'\|_{\ell^\infty} < \infty, \text{ d.h. } x \in \ell^q \tag{0.1}$$

Da für $y \in \ell^p$

$$\|y - \sum_{n=1}^{N} y_n e_n\|_{\ell^p}^p = \sum_{n \geq N+1} |y_n|^p \to 0 \text{ für } N \to \infty$$

folgt

$$|y'(y) - \sum_{n=1}^{N} y'(y_n e_n)| \leq \|y'\| \|y - \sum_{n=1}^{N} y_n e_n\|_{\ell^p} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

und damit

$$\begin{aligned}[\Phi_p(x)](y) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n e_n) \\ &= y'(y) \ \forall y \in \ell^p\end{aligned}$$

d.h. $\Phi_p(x) = y'$ und damit Φ_p surjektiv. Außerdem gilt nach (0.1)

$$\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \geq \|x\|_{\ell^q},$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Bemerkung

a) Analog zu obigem zeigt man $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$ und $(c_0)' \cong \ell^1$

b) Eine ähnliche Aussage gilt auch für L^p-Räume auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: Hier gilt:

$$L^p(\Omega, \mu)' \cong L^q(\Omega, \mu)$$

bezüglich der Dualität $[\Phi_p(f)](g)(= \langle f, g \rangle) = \int_\Omega f(x) g(x) d\mu(x)$ wobei $p \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Beispiel 3.15

a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $x \in K$. Dann definieren wir

$$\delta_x(f) := f(x) \text{ für } f \in C(K)$$

Wir versetzen $C(K)$ mit der Supremumsnorm. Dann gilt:

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

und offensichtlich ist δ_x linear, d.h. $\delta_x \in (C(K))'$ mit $\|\delta_x\| \leq 1$.

b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und μ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}(K)$. Dann definieren wir

$$\delta_\mu(f) = \int_K f(x) d\mu(x) \text{ für } f \in C(K)$$

Dann gilt

$$|\delta_\mu(f)| \leq \mu(K) \|f\|_\infty.$$

Da δ_μ linear ist, gilt $\delta_\mu \in (C(K))'$ mit $\delta_\mu \leq \|\mu(K)\|$. In diesem Sinne sind Maße Elemente von $(C(K))'$

Bemerkung 3.16

Man kann zeigen, dass $(C(K))' \cong M(K)$, wobei $M(K)$ die Menge der 'regulären' Borelmaße versehen mit der Variationsnorm ist. Die Dualität ist gegeben durch

$$(T\mu)(f) = \int_K f(x) d\mu(x)$$

4 Metrische Räume

Definition 4.1

a) Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf M, falls $\forall x, y, z \in M$:

$$(M1) \quad d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \iff x = y \text{ (positive Definitheit)}$$

$$(M2) \quad d(x,y) = d(y,x) \text{ (Symmetrie)}$$

$$(M3) \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

Das Tupel (M,d) nennen wir dann einen metrischen Raum.

b) Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset M$ konvergiert gegen $x \in M$, falls

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Notation: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (in M)

Bemerkung

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist stets eindeutig, denn:
Sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = y \in M$, dann folgt:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \\ &\to 0 \text{ für } n \to \infty \end{aligned}$$

d.h. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

Beispiel 4.2

a) Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subset X$ (nichtleere) Teilmenge.
Dann definiert $d(x,y) := \|x - y\|, \quad x, y \in M$ eine Metrik auf M
Ein Unterschied hier: Eine Norm setzt eine lineare Struktur auf X voraus, eine Metrik macht auch Sinn auf nicht-linearen Teilmengen.

b) Sei M eine nichtleere Menge, dann definieren wir die **diskrete Metrik** auf M durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

Dann ist (M,d) ein metrischer Raum und es gilt:

$$x_n \to x \text{ in } M \iff \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = x \quad \forall n \geq N$$

Beispiel 4.3

a) Sei X ein Vektorraum und p_j für $j \in \mathbb{N}$ Halbnormen auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_K > 0$. Dann definiert

$$d(x,y) := \sum_{j\geq 1} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}, \qquad x, y \in X$$

eine Metrik auf X mit

$$d(x_n, x) \to 0 \iff p_j(x_n - x) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Beweis siehe Übung

b) Für $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{K}\}$ und $p_j(x) := |x_j|, j \in \mathbb{N}$ definiert also

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} \text{ gerade die komponentenweise Konvergenz auf } X$$

c) In ℓ^∞ entspricht die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ gerade der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $x_n := (x_{n,i})_{(i\in\mathbb{N})}$ gegen $x := (x_i)_{(i\in\mathbb{N})}$

$$\|x_n - x\|_{\ell^\infty} = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_{n,i} - x_i| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

d) In $C[a,b]$ entspricht die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ebenfalls der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionen

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ in } [a,b] &\iff \|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \to 0 \\ &\iff f_n \to f \text{ gleichmäßig.} \end{aligned}$$

Definition 4.4
Sei (M,d) ein metrischer Raum.

a) Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **abgeschlossen** (in M), falls für alle in M konvergenten Folgen $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ der Grenzwert von (x_n) in A liegt

b) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen** (in M), falls zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$\{y \in M : d(x,y) < \epsilon\} \subset U$$

Bemerkung 4.5
a) Wir benutzen die Bezeichnungen

- **offene Kugel**: $K(x,r) := \{y \in M : d(x,y) < r\}$
- **abgeschlossene Kugel**: $\bar{K}(x,r) := \{y \in M : d(x,y) \leq r\}$

mit $x \in M, r > 0$. Man sieht leicht, dass $K(x,r)$ offen und $\bar{K}(x,r)$ abgeschlossen ist.

Beweis

a) Sei $y \in K(x,r)$ und wähle $\rho := r - d(x,y) > 0$. Wir zeigen: $K(y,\rho) \subset K(x,r)$ (dann ist $K(x,r)$ offen).
Sei dazu $z \in K(y,\rho)$, dann folgt

$$\begin{aligned} d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) &\leq r - \rho + d(z,y) \\ &< r - \rho + \rho = r \end{aligned}$$

Damit ist $z \in K(x,r)$ und da z beliebig war, folgt die Behauptung.

b) Sei $(y_n)_{n\geq 1} \subset \bar{K}(x,r)$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in M$. Wir müssen zeigen, dass $y \in \bar{K}(x,r)$ (dann ist $\bar{K}(x,r)$ abgeschlossen).

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,y_n) + d(y_n,y) \\ &\leq r + d(y_n,y) \to r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq r, \text{ d.h. } y \in \bar{K}(x,r).$$

□

b) $\emptyset, M$ sind sowohl offen, als auch abgeschlossen (in M)

c) Bezüglich der diskreten Metrik d aus Beispiel 4.2 b) ist $O = \{x\} \subset M$ offen für jedes $x \in M$, da
$$K(x,r) = \{x\} \subseteq O \text{ für } r \in [0,1)$$

Wir fassen als nächstes die grundlegenden Eigenschaften offener und abgeschlossener Mengen zusammen:

Proposition 4.6
Sei (M,d) ein metrischer Raum und I eine beliebige Indexmenge

a) $A \subset M$ ist abgeschlossen in M genau dann, wenn $U = M \setminus A$ offen ist

b) Für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen $(A_i)_{i\in I}$ sind
$$A := \bigcap_{i\in I} A_i \qquad \text{und} \qquad A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_N} \quad (i_1, \ldots, i_N \in I)$$
abgeschlossen in M.

c) Für eine beliebige Familie offenere Mengen $(U_i)_{i\in I}$ sind
$$U := \bigcup_{i\in I} U_i \quad \text{und} \quad U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N} \qquad (i_1, \ldots, i_N \in I)$$
offen in M.

Beweis

a) Sei U nicht offen. Dann existiert ein $x_0 \in U$ und ein $x_n \in K(x_0, \frac{1}{n})$ mit $x_n \notin U$, d.h. $x_n \in U^c = A \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Da $d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n} \to 0$ und $x_0 \notin A$ ist A nicht abgeschlossen.

Sei umgekehrt A nicht abgeschlossen. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \notin A$, d.h. $x \in U$.
Für beliebige $\epsilon > 0$ existiert dann ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \epsilon \; \forall n \geq N_\epsilon$
$\Rightarrow (x_n)_{n\geq N_\epsilon} \subset K(x,\epsilon) \cap A = K(x,\epsilon) \cap U^c$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0$ ist $K(x,\epsilon) \not\subset U$, d.h. U ist nicht offen.

b) folgt aus a) & c), da
$$M \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} M \setminus A_i$$

c) Sei $x \in U$. Dann existiert ein U_{i_0} mit $x \in U_{i_0}$
$$\Rightarrow \exists r > 0 : K(x,r) \subset U_{i_0} \subset U, \text{ d.h. } U \text{ ist offen.}$$
Sei $x \in U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N}$. Dann existieren $r_1, \ldots, r_N > 0$ mit
$$K(x, r_n) \subset U_{i_n} \qquad n = 1, \ldots, N$$
Setze $r := \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$. Dann ist $K(x,r) \subset U_{i_n} \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\}$
$$\Rightarrow K(x,r) \subset U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N},$$
d.h. $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N}$ ist offen. $\square$

Definition 4.7
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $V \subset M$. Dann heißt

a) $\bar{V} := \bigcap\{A \subset M : A \text{ ist abgeschlossen mit } V \subset A\}$ der **Abschluss** von V.

b) $\mathring{V} := \bigcup\{U \subset M : U \text{ ist offen mit } U \subset V\}$ das **Innere** von V.

c) $\partial V := \bar{V} \setminus \mathring{V}$ der **Rand** von V.

Hierfür gelten die folgenden Eigenschaften:

Proposition 4.8
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $V \subset M$

a) a) $\bar{V}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die V enthält.

 b) V ist abgeschlossen $\iff V = \bar{V}$

 c) $\bar{V} = \{x \in M : \exists (x_n) \subset V \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x\} =: \tilde{V}$

b) a) $\mathring{V}$ ist die größte offene Teilmenge von V.

 b) V ist offen $\iff V = \mathring{V}$

 c) $\mathring{V} = \{x \in M : \exists \epsilon > 0 \text{ mit } K(x, \epsilon) \subset V\} =: \hat{V}$

c) a) ∂V ist abgeschlossen.

 b) $\partial V = \{x \in M : \exists (x_n) \subset V, (y_n) \subset M\ V \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x\}$

Beweis

a) a) Nach Definition gilt $V \subseteq \bar{V}$ und $\bar{V}$ ist nach Proposition 4.7 abgeschlossen.
 Falls $V \subseteq A \subseteq \bar{V}$ und A abgeschlossen, dann gilt $\bar{V} \subseteq A$ nach der Definition von $\bar{V}$, d.h. $A = \bar{V}$.

 b) folgt aus (i)

 c) Per Definition ist $\tilde{V}$ abgeschlossen, denn zu $(x_n) \subseteq \tilde{V}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$ existieren Folgen $(x_{n,m})_{m\geq 1}$ mit $\lim_{m\to\infty} x_{n,m} = x_n$.
 Dann folgt aber für $(x_{n,n})_{n\geq 1} \subseteq V$:

$$d(x, x_{n,n}) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_{n,n}) \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

 d.h. $x \in \tilde{V}$. Sei nun $A \subseteq M$ abgeschlossen mit $V \subseteq A$. Dann gilt nach Definition 4.4 $\tilde{V} \subseteq A$ und nach (i) damit $\bar{V} = \tilde{V}$.

b) a) zeigt man wie a) (i)

 b) folgt aus (i)

 c) $\hat{V}$ ist per Definition offen, denn zu $x \in \hat{V}$ existiert ein $\epsilon > 0$ mit $K(x, \epsilon) \subseteq V$.
 Dann existiert aber zu jedem $y \in K(x, \epsilon)$ ein $\delta > 0$ mit $K(y, \delta) \subseteq K(x, \epsilon) \subseteq V$, d.h. $y \in \hat{V}$. $\Rightarrow K(x, \epsilon) \subseteq \hat{V}$
 Falls nun $U \subseteq V$ offen, so ist nach Definition 4.4 $U \subset \hat{V}$ und somit $\mathring{V} = \hat{V}$ nach (i)

c) a) Da $\partial V = \overline{V} \cap (\mathring{V})^c$ ist ∂V als Schnitz zweier abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen.

b) Nach Definition 4.6 gilt $(\mathring{V})^c = \overline{V^c}$ (und $(\bar{V})^c = (V^c)^\circ$)
Damit folgt die Behauptung auf $\partial V = \bar{V}_n \cap \bar{V}^c$ und a) □

Definition 4.9
Sei (M, d) ein metrischer Raum.

a) Eine Menge $V \subset M$ heißt **dicht** in M, falls $\bar{V} = M$, d.h. jeder Punkt in M ist Grenzwert einer Folge aus V.

b) M heißt **separabel**, falls es eine abzählbare Teilmenge $V \subset M$ gibt, die dicht in M liegt.

Bemerkung 4.10
a) All die Begriffe und Bezeichnungen aus Definition 4.4, Bemerkung 4.5, Definition 4.7 und Definition 4.9 werden wir auch in normieren Räumen benutzen bzgl. der kanonischen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

b) Sei (M, d) ein metrischer Raum, $U \subset M$. Dann ist auch (U, d) ein metrischer Raum. Für $V \subset U$ muss man dann aber unterscheiden bzgl. Abgeschlossenheit (bzw. Offenheit) von V in U oder in M. Man sagt dann, dass V **relativ offen** bzw. **relativ abgeschlossen** in U ist.

Beispiel 4.11
a) Sei X ein normierter Vektorraum (!), $x \in X, r > 0$. Dann gilt

a) $\bar{K}(x, r) = \overline{K(x, r)}$

b) $\bar{K}(x, r)^\circ = K(x, r)$

c) $\partial\bar{K}(x, r) = \partial K(x, r)(= \{y \in X : \|x - y\| = r\})$

Beweis
a) Da $\bar{K}(x, r)$ abgeschlossen ist mit $K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)$ folgt aus Proposition 4.8 a) (i) $\overline{K(x, r)} \subset \bar{K}(x, r)$. Sei umgekehrt $y \in \bar{K}(x, r)$ und $y_n = y - \frac{1}{n}(y - x), n \in \mathbb{N}$. Dann ist $y_n \in K(x, r)$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, d.h. $y \in \overline{K(x, r)}$ nach Proposition 4.8 a) (iii).

b) Da $K(x, r)$ offen ist mit $K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)$ folgt mit Proposition 4.8 b) (ii):

$$K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)^\circ$$

Sei umgekehrt $y \in \bar{K}(x, r)^\circ$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ mit $K(y, \epsilon) \subseteq \bar{K}(x, r)$.
Angenommen $\|x - y\| = r$. Setze in diesem Fall $z := y + \frac{\epsilon}{2r}(y - x)$. Dann gilt $z \in K(y, \epsilon)$, aber $z \notin \bar{K}(x, r)$, was zu einem Widerspruch führt.
Also ist $\|x - y\| < r$, d.h. $y \in K(x, r)$.

c) Aussage über Rand folgt aus i) und ii) □

b) Die Aussagen in a) sind im Allgemeinen falsch für metrische Räume.
Sei M nichtleer mit mindestens 2 Elementen und d die diskrete Metrik, dann gilt:

$$K(x, 1) = \{x\}, \quad \bar{K}(x, 1) = M, \quad \overline{K(x, 1)} = \{x\}$$

$\Rightarrow \overline{K(x, 1)} \subsetneq \bar{K}(x, 1)$

c) Sei $X = C[0,1]$ und $a, b > 0$ mit $a < b$. Dann ist die Menge
$$A := \{f \in X : f(t) \in (a,b) \quad \forall t \in [0,1]\}$$
offen mit
$$\bar{A} = \{f \in X : f(t) \in [a,b] \quad \forall t \in [0,1]\}$$
$$\partial A = \{f \in \bar{A} : \exists t \in [0,1] \text{ mit } f(t) \in \{a,b\}\}$$

Beweis

a) Sei $f \in A$ beliebig.
Da f stetig auf $[0,1]$ existieren $t_1, t_2 \in [0,1]$ mit
$$f(t_1) = \min_{t \in [0,1]} f(t) =: c_1 > a$$
$$f(t_2) = \max_{t \in [0,1]} f(t) =: c_2 < b$$

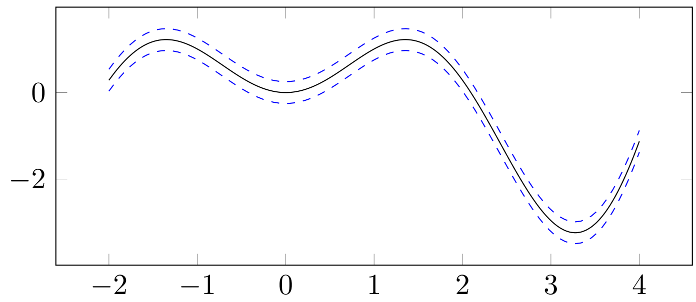


Abbildung 4.1: ϵ-Kugel um f bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Für $\epsilon \in (0, \min\{c_1 - a, b - c_2\})$ gilt dann $K(f,\epsilon) \subseteq A$, d.h. A ist offen.

b) Da punktweise Konvergenz durch Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ impliziert wird, folgt direkt
$$\overline{A} \subseteq \{f \in X \colon f(t) \in [a,b] \quad \forall t \in [a,b]\}.$$
Ist umgekehrt $f \in X$ mit $f(t) \in [a,b]$ für alle $t \in [0,1]$, so definieren wir
$$f_n(t) = \begin{cases} a + \frac{1}{n} & , f(t) \leq a + \frac{1}{n} \\ b - \frac{1}{n} & , f(t) \geq b - \frac{1}{n} \\ f(t) & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

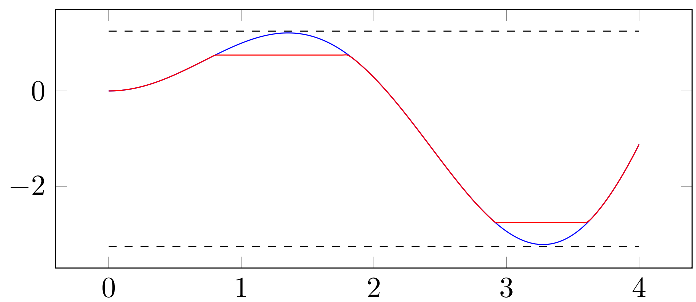


Abbildung 4.2: f bzw. f_n für konkretes $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f_n \in A \text{ mit } \|f_n - f\|_\infty \to 0 \ (n \to \infty), \text{ d.h. } f \in \bar{A}$$

c) Aussage über ∂A folgt aus i) und ii) $\square$

d) Sei X ein normierter Vektorraum und $Y \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{linY} = X$. Dann ist X separabel.

Beweis
Wir definieren

$$lin_{\mathbb{Q}}Y := \{y = \sum_{i=1}^{n} q_j y_j : q_j \in \mathbb{Q} \quad (q_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}), y_j \in Y, n \in \mathbb{N}\}$$

Dann ist $lin_{\mathbb{Q}}Y$ abzählbar, da Y abzählbar ist. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig, $x \in X$.
Nach Voraussetzung existiert dann ein $y \in linY$ mit $\|x - y\| < \epsilon$
Zu diesem y finden wir ein $z \in lin_{\mathbb{Q}}Y$ mit $\|y - z\| < \epsilon$

$$\Rightarrow \|x - z\| < 2\epsilon, \quad \text{d.h. } \overline{lin_{\mathbb{Q}}Y} = X$$ $\square$

e) $C[0,1]$ ist separabel, da $lin\{t^n, n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $C[0,1]$ liegt nach dem Approximationssatz von Weierstrass.

f) Die Räume $\ell^p, p \in [1,\infty)$ und c_0 sind separabel, da

$$D = lin\{e_k, k \in \mathbb{K}\} \text{ dicht in allen Räumen liegt.}$$

g) Der Raum ℓ^∞ ist nicht separabel:
Die Menge Ω der $\{0,1\}$-wertigen Folgen ist überabzählbar. Für $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt $\|x - y\|_\infty = 1$
Angenommen: $\overline{\{v_k, k \in \mathbb{N}\}} = \ell^\infty$. Dann

$$\Omega \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K\left(v_k, \frac{1}{4}\right)$$

Wegen $\|x - y\|_{\ell^\infty} = 1 \ \forall x, y \in \Omega$ kann aber in jeder Kugel $K(v_k, \frac{1}{4})$ nur ein Element auf Ω liegen. (d.h. zu $x \in \Omega$ existiert ein $k(x) \in \mathbb{K}$ mit $x \in K(v_{k(x)}, \frac{1}{4})$)
$\Rightarrow$ die Abbildung $J\colon \Omega \to \mathbb{N}, x \to k(x)$ ist injektiv
$\Rightarrow$ Ω ist abzählbar, Widerspruch.

Schließlich betrachten wir noch die Stetigkeit:

Definition 4.12
Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume.
Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt **stetig in** $x_0 \in M$, falls für alle $(x_n) \subset M$ gilt

$$x_n \to x_0 \text{ in } M \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \text{ in } N$$

$$(d_M(x_n, x_0) \to 0 \ \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad d_N(f(x_n), f(x_0)) \to \ \ (n \to \infty))$$

Die Abbildung f heißt **stetig auf** M, falls f in jedem Punkt von M stetig ist.

Hierfür gelten folgende Eigenschaften:

Proposition 4.13
Seien $(K, d_K), (M, d_M)$ und (N, d_N) metrische Räume und $f\colon M \to N, g\colon K \to M$. Dann gilt:

a) Ist g stetig in x_0, f stetig in $g(x_0)$, dann ist auch

$$f \circ g\colon K \to N \text{ stetig in } x_0$$

b) f ist stetig in $x_0 \in M$ genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, x_0) < \delta \text{ gilt } d_N(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist stetig auf M

(ii) Ist $U \subset N$ offen, so ist auch $f^{-1}(U)$ offen in M

(iii) Ist $A \subset N$ abgeschlossen, so ist auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in M.

Beweis

a) Folgt direkt aus der Definition

b) " $\Rightarrow$ ": Annahme, das ϵ-δ-Kriterium gilt nicht. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K(x_0, \frac{1}{n})$ mit $d_M(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$.
Dann gilt aber $d_M(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ und $d_N(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon \not\to 0$ für $n \to \infty$, d.h. f ist nicht stetig in x_0.

" $\Leftarrow$ ": Es gelte das ϵ-δ-Kriterium. Sei $(x_n) \subseteq M$ mit $x_n \to x_0, \epsilon > 0$.
Dann gilt $d_N(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$ für n groß genug. Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt $d_N(f(x_n), f(f_0)) \to 0$ für $n \to \infty$.

c) $(i) \Rightarrow (iii)$: Sei $A \subseteq N$ abgeschlossen und $(x_n) \subseteq f^{-1}(A)$ mit $x_n \to x$ in M für $n \to \infty$.
Dann gilt nach (i) $f(x_n) \to f(x)$ in N für $n \to \infty$.
Da $(f(x_n))_{n \geq 1} \subseteq A$ und A abgeschlossen ist, folgt $f(x) \in A$, d.h. $x \in f^{-1}(A)$.
Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Sei $U \subset N$ offen $\Rightarrow U^c$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(U^c) = f^{-1}(U)^c$ ist abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(U)$ offen.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $x_0 \in M$ beliebig. Für $\epsilon > 0$ ist nach (ii) dann auch $f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$ offen in M.
Da $x_0 \in f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$, existiert ein $\delta > 0$ mit $K(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$
Das bedeutet gerade

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in M \text{ mit } d_M(x_0, x) < \delta \text{ gilt auch}$$

$$d_N(f(x_0), f(x)) < \epsilon$$

Nach b) bedeutet dies gerade, dass f stetig in x_0 ist. □

Beispiel 4.14

a) Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, so definiert

$$d(x, y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$ eine Metrik mit

$$d(x_n, x) \to 0 \iff d_1(x_{n,1}, x_1) \to 0, d_2(x_{n,2}, x_2) \to 0$$

In diesem Sinne ist jede Metrik $d : M \times M \to \mathbb{R}$ stetig. Denn:
Sei $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $M \times M$, d.h.

$$d(x_n, x) \to 0 \text{ und } d(y_n, y) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x, y) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) - d(x, y) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) - d(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x, y) - d(x_n, y_n) &\leq \ldots \leq d(x, x_n) + d(y_n, y) \\ \Rightarrow |d(x, y) - d(x_n, y_n)| &\leq d(x, x_n) + d(y_n, y) \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

b) Sei X ein normierter Vektorraum und

$$\begin{aligned} A &: \mathbb{K} \times X \to X, \quad A(\alpha, x) = \alpha x \\ S &: X \times X \to X, \quad S(x, y) = x + y \end{aligned}$$

Dann sind A und S stetig.

c) Sei $X = C[0, 1], t_0 \in [0, 1], \psi \colon X \to \mathbb{K}, \psi(f) = f(t_0)$
Nach Beispiel 3.15 ist ψ stetig. D.h. ist $A \subset \mathbb{K}$ offen (abgeschlossen), so ist $\psi^{-1}(A)$ offen (abgeschlossen) nach Proposition 4.13.

5 Vollständigkeit

Definition 5.1
Sei (M, d) ein metrischer Raum.

a) $x_n \in M$ heißt **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\forall m, n \geq n_0$ gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

b) (M, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge $(x_n) \subset M$ einen Grenzwert <u>in M</u> hat:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad x \in M$$

c) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ der vollständig ist bezüglich $d(x, y) = \|x - y\|$ heißt **Banachraum**.

Bemerkung 5.2

a) Jede konvergente Folge in (M, d) ist eine Cauchy-Folge:

$$\text{Sei } \lim_{n\to\infty} x_n = x: \quad d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

b) <u>Aber:</u> nicht jede Cauchy-Folge eines normierten Raums X konvergiert in X.

Beispiel
$X = C[0, 2]$, $\|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)|dt$, $f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases} \quad \text{für feste } x \in [0, 2]$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt $\|f - f_n\|_1 \to 0$ für $n \to \infty$, aber $f \notin C[0, 2]$
Demnach ist f_n zwar eine Cauchy-Folge, aber f_n konvergiert nicht gegen f in X bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm.

Proposition 5.3
Sei X ein metrischer Raum, Y ein Banachraum.

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y : f \text{ stetig}\}, \ \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$$

Dann ist $C(X, Y)$ ein (linearer) Banachraum.

Beispiel
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist $C(\Omega, \mathbb{R})$ ein Banachraum.

Beweis
Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $C(X, Y)$. Für alle $x \in X$ gilt demnach

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Mit $x \in X$ ist $(f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge in Y und da Y vollständig ist, existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in Y.

z.z. $f \in C(X,Y)$, $\|f - f_n\|_\infty \to 0$.

Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0, sodass für alle $x \in X$:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \epsilon \quad m, n \geq n_0$$

Für jedes $x \in X$ fest, folgt für $m \to \infty$:

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon \qquad \text{für } n \geq n_0$$

Nehme das Supremum über $x \in X$:

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

Somit ist $f \in C(X,Y)$, da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist. □

Beispiel 5.4
Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so ist $C^m(\bar{\Omega})$ vollständig bezüglich der Supremumsnorm.

Beweis
Für $C^1(\bar{\Omega})$ gilt $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_i} f\|_\infty$.
Sei (f_j) eine Cauchy-Folge in $C^1(\bar{\Omega})$, dann sind für $i = 1, \ldots, n$

$$(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (\frac{\partial}{\partial x_i} f_j)_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{Cauchy-Folgen in } C(\bar{\Omega})$$

Da $C(\bar{\Omega})$ vollständig ist, existieren für $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$f = \lim_{j \to \infty} f_j$$
$$g_i = \lim_{j \to \infty} \frac{\partial}{\partial x_i} f_j$$

in $C(\bar{\Omega})$. Setze $g = (g_1, \ldots, g_n)$.

z. z. $f \in C^1(\bar{\Omega})$ und $g = \nabla f$
Beweis: zu $u \in \Omega$ und v nahe bei u wähle

$$u_t = (1-t)u + tv$$

$$\begin{aligned}
|f_k(v) - f_k(u) - \nabla f_k(u)(v-u)| &= |\int_0^1 [\nabla f_k(u_t) - \nabla f_k(u)](v-u)dt \\
&\leq \int_0^1 |\nabla f_k(u_t) - \nabla f_k(u)| dt (v-u) \\
&\leq \left[\int_0^1 |\nabla f_k(u_t) - g(u_t)| dt + \int_0^1 |g(u_t) - g(u)| dt + \int_0^1 |g(u) - \nabla f_k(u)| dt\right] \\
&\qquad \cdot |v-u| \\
&\leq \left[z\|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{0 \leq t \leq 1} |g(u_t) - g(u)|\right] |v-u|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } k \to \infty: |f(v) - f(u) - g(u)(v-u)| &\leq \sup_{t \in [0,1]} |g(u_t) - g(u)||v-u| \\
&\to 0 \text{ für } v \to u \text{ (da g gleichmäßig stetig)}
\end{aligned}$$
□

Bemerkung 5.5

a) Sind $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf X, ist dann X bezüglich $\|\cdot\|_1$ vollständig, so auch bezüglich $\|\cdot\|_2$.

Beweis
Äquivalente Normen haben gleiche Cauchy-Folgen. □

Bsp.: $C^1[0,1]$, $|||f||| = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$. Früher: $|||\cdot||| \sim \|\cdot\|_\infty \Rightarrow (C[0,1], |||\cdot|||)$ ist vollständig.

b) Abgeschlossene Teilmengen von Banachräumen sind vollständige metrische Räume bezüglich $d(x,y) = \|x-y\|$.

Beweis
$(x_n) \subset M$, Cauchy-Folge in $X \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \in X \overset{M}{\underset{abg.}{\Longrightarrow}} x \in M$ existiert. □

Bsp.: $X = C([0,1],\mathbb{C}), M = \{f \in X : |f(t)| = 1\}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Satz 5.6
Sei X ein normiert Raum, Y ein Banachraum. Dann ist $B(X,Y)$ mit der Operatornorm vollständig.
Insbesondere: $X' = B(X,\mathbb{K})$ ist immer vollständig.

Beweis
Sei $(T_n) \subset B(X,Y)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Operatornorm. Sei $x \in X$

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X$$

Also $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in Y für alle $x \in X$. Definiere $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$
z.z. $T \in B(X,Y)$, $\|T_n - T\| \to 0$

$$T_n(x+y) = T_n x + T_n y \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx + Ty = T(x+y)$$

$$\begin{aligned}\|Tx - T_n x\|_Y &\overset{\text{Norm}}{\underset{\text{stetig}}{=}} \lim_{m\to\infty} \|T_m x - T_n x\|_Y \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \|T_n - T_m\| \|x\|_X \\ &\leq \epsilon \|x\|_X\end{aligned}$$

für n groß genug; d.h. $\|T - T_n\| \leq \epsilon$ und für $\|x\| \leq 1$ gilt dann:

$$\|Tx\|_Y \leq \|T_n x\|_Y + \epsilon \leq \|T_n\| + \epsilon$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \|T_n\| + \epsilon, \quad \text{also } T \in B(X,Y)$$ □

Bemerkung 5.7 (Exponentialfunktion)
Sei $A \in B(X)$, mit X Banachraum, dann ist $e^{tA} \in B(X)$ (Idee: $e^{tA} = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i!} t^i A^i$).

Beweis
Setze $S_k := \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} t^i A^i$ und seien $m, n \in \mathbb{N}, n > m$.

z. z. S_k ist eine Cauchy-Folge in $B(X)$

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \|\frac{1}{i!} t^i A^i\| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i!} |t^i| \|A^i\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Da $B(X)$ vollständig ist, ist $e^{tA} = \lim_{n\to\infty} S_n \in B(X)$. □

Proposition 5.8 (Neumann'sche Reihe)
Sei $A \in B(X)$, X ein Banachraum mit $\|A\| < 1$.
Dann ist $Id - A$ invertierbar und

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Beweis
$S_m = \sum_{n=0}^{m} A^n$ ist eine Cauchy-Folge in $B(X)$, denn für

$$\begin{aligned} k > m: \quad \|S_k - S_m\| &\leq \sum_{n=m+1}^{k} \|A^n\| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{k} \|A\|^n \to 0 \text{ für } m, n \to \infty, \text{ da } \|A\| < 1 \end{aligned}$$

Weiter existiert $R := \lim_{m\to\infty} S_m$ in $B(X)$, da $B(X)$ nach Satz 5.6 vollständig ist.

$$S_m(Id - A) = (Id - A)S_m = Id - A^m$$

mit $\|A^m\| \leq \|A\|^m \to 0$ für $m \to \infty$ ist

$$R(Id - A) = (Id - A)R = Id,$$

und damit $R = (Id - A)^{-1}$. □

Korollar 5.9
Sei X ein Banachraum und $J : X \to X$ ein (surjektiver) Isomorphismus.
Für $A \in B(X)$ und $\|A\| < \|J^{-1}\|^{-1}$ ist auch $J - A$ ein Isomorphismus

Insbesondere: $G = \{T \in B(X) : T \text{ stetig und invertierbar}\}$ ist eine offene Menge in $B(X)$.

Beweis
Da $J - A = J(Id - J^{-1}A)$ folgt:

$$\|J^{-1}A\| \leq \|J^{-1}\| \underbrace{\|A\|}_{<\|J^{-1}\|^{-1}} < 1$$

Nach 5.8 ist $(Id - J^{-1}A)$ invertierbar mit

$$\begin{aligned} (J - A)^{-1} &= (Id - J^{-1}A)^{-1} J^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (J^{-1}A)^n J^{-1} \end{aligned}$$ □

Proposition 5.10 (Fortsetzung von Operatoren)
Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $D \subset X$ ein dichter Teilraum.
Jeder linearere Operator $T : X \to Y$ mit

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \text{für alle } x \in D$$

lässt sich zu einem eindeutig bestimmten Operator $\tilde{T} \in B(X,Y)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq M$ fortsetzen.

Beweis
Zu $x \in X$ wähle eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset D$ mit $\|x_n - x\|_X \to 0$, dann ist $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ auch eine Cauchy-Folge und

$$\|Tx_n - Tx_m\|_Y \leq M\|x_n - x_m\|_X \to 0,$$

d.h. (Tx_n) ist eine Cauchy-Folge in Y und da Y ein Banachraum ist, existiert

$$\hat{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n \text{ in } Y.$$

$\hat{T}$ wohldefiniert: Sei $(y_n)_{n\geq 1} \in D$ mit $y_n \to x$, dann ist

$$\|\hat{T}x_n - \hat{T}y_n\| \leq M\|x_n - y_n\| \leq M\left(\|x_n - x\| + \|x - y_n\|\right) \to 0$$

$\hat{T}$ linear: Ist $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \in D : x_n \to x, y_n \to y$, so gilt:

$$T(x_n + y_n) = T(x_n) + T(y_n) \xRightarrow{n\to\infty} \hat{T}(x+y) = \hat{T}(x) + \hat{T}(y)$$

$\hat{T}$ beschränkt: Sei $(x_n)_{n\geq 1} \in D, x_n \to x$,

$$\|\hat{T}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leq M\|x\| \Rightarrow \|\hat{T}\| \leq M$$

□

Korollar 5.11
Sei X ein normierter Vektorraum, Y ein Banachraum und $D \subset X$ dicht in X und sei eine Folge $T_n \in B(X,Y)$, wobei $(T_n x)$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in D$ sei.
Dann gibt es genau einen Operator $T \in B(X,Y)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$$

Beweis
Setze für $x \in D$: $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, da Y vollständig.
Dieses $T : X \to Y$ ist linear.
Nach 5.10 gibt es genau ein $\tilde{T} \in B(X,Y)$ mit $\tilde{T}x = Tx$ für $x \in D$, $\|\tilde{T}\| \leq M$, denn für $x \in D$:

$$\|Tx\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq M\|x\|$$

z. z. $\tilde{T}x = \lim_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in X$.
Zu $\epsilon > 0$ wähle $y \in D$ mit $\|x - y\| \leq \frac{\epsilon}{2M}$. Dann:

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}x - T_n x\| &\leq \|\tilde{T}x - Ty\| + \|Ty - T_n y\| + \|T_n y - T_n x\| \\ &\leq \|\tilde{T}\|\|x - y\| + \|Ty - T_n y\| + \|T_n\|\|x - y\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \|\tilde{T}x - T_n x\| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + \limsup_{n\to\infty} \|Ty - T_n y\| + M\frac{\epsilon}{2M} \leq \epsilon + 0$$

□

Beispiel 5.12
Sei $e_n(t) := e^{2\pi nti} = \cos(2\pi nt) + i\sin(2\pi nt)$, $D = \{(\alpha_n) \in L^2(\mathbb{Z}) : \text{Nur endlich viele } \alpha_n \neq 0\}$.

$$T\colon \begin{cases} D \to L^2[0,1] \\ (\alpha_n) \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n \end{cases}$$

Wie kann man mit unendlichen Reihen $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n$ definieren?
Ohne Beweis aus der Fourieranalysis:

- Es gibt $(\alpha_n) \in \mathbb{C}^2$, so dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n(t)$ nicht für alle $t \in [0,1]$ konvergent.
- Für alle $(\alpha_n) \in \mathbb{C}^2$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n(t)$ punktweise für fast alle t $t \in [0,1]$
- $\int_0^1 e_n \overline{e}_m dt = \delta_{n,m}$

Für $(\alpha_n) \in D$ wie in der Linearen Algebra folgt:

$$\begin{aligned}
\|\sum_n \alpha_n e_n(t)\|^2_{L^2[0,1]} &= \int (\sum_n \alpha_n e_n(t))\overline{(\sum_m \alpha_m e_m(t))}dt \\
&= \sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m \int e_n(t)\overline{e_m(t)}dt \\
&= \sum_n |\alpha_n|^2
\end{aligned}$$

D.h. $\|T(\alpha_n)\| \leq 1 \left(\sum_n |\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\alpha_n\|_{L^2}$, $(M = 1)$. Nach 5.10 gibt es dann ein $\tilde{T} : \ell^2[0,1] \to L^2(0,1)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq 1$

Zusatz: $T_m((\alpha_n)) = \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n e_n$. $T_m : \ell^2 \to L^2[0,1]$, $\|Tm\| \leq 1$
Für $(\alpha_n) \in \ell^2$ gilt: $T(\alpha_n) = \lim_{m\to\infty} T_m(\alpha_n)$.
Nach Kor. 11: $T_m(\alpha_n) \to T(\alpha_n)$ in $L^2[0,1]$ für alle $(\alpha_n) \in \ell^2$. Damit konvergiert die Partialsumme der Fourierreihen in $L^2[0,1]$.

Lemma 5.13
Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ sind äquivalent:

a) X ist vollständig

b) Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n\geq 1} x_n$ mit $x_n \in X$ hat einen Limes in X.

Beweis
a) $\Rightarrow$ *b)* $(y_n)_{n\geq 1}$ mit $y_n = \sum_{m=1}^{n} x_m$ ist eine Cauchy-Folge in X, denn für $l > n$:

$$\|y_l - y_n\| = \|\sum_{m=n+1}^{l} x_m\| \leq \sum_{m=n+1}^{l} \|x_m\| \xrightarrow[n,l\to\infty]{} 0$$

Also ist $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert, da X vollständig ist.

$b) \Rightarrow a)$ Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in X, d.h. für $\epsilon = 2^{-k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein n_k so, dass:

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k} \text{ für } n, m \geq n_k$$

Wähle zu $k \in \mathbb{N}$ ein x_{n_k} so, dass

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}.$$

Setze $y_0 = x_{k_1}$ und für $k \in \mathbb{N} : y_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$.
Dann gilt: $\sum_{k\geq 1} \|y_k\| \leq \sum_{k\geq 1} 2^{-k} < \infty$. Nach $b)$ konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 1} y_k$ in X.
$\sum_{j=0}^{k} x_j \overset{Teleskop-}{\underset{summe}{=}} x_{n_k} \Rightarrow$ die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in X.
Damit ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge und damit existiert $\lim_{n\to\infty} x_n$ in X. □

Korollar 5.14
Sei X ein Banachraum und $M \subset X$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum.
Dann $\hat{X} = {}^{X}/_{M}$ ist vollständig.

Beweis (mit Lemma 5.13)
Sei $(x_k) \in X$ so, dass für $(\hat{x}_k) \in \hat{X}$ gilt:

$$\sum_{k\geq 1} \|\hat{x}_k\|_{\hat{X}} < \infty$$

Nach der Definition des Quotientenraums kann man annehmen, dass

$$\|x_k\|_X \leq \|\hat{x}_k\|_{\hat{X}} + \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{K} \quad \text{(vgl. Quotientennorm)}$$

Dann $\sum_{k\geq 1} \|x_k\|_X \leq \sum_{k\geq 1} \|\hat{x}_k\|_{\hat{X}} + \sum_{k\geq 1} 2^{-k} < \infty$
Da X vollständig ist, gibt es nach 5. 13 ein $x \in X$ mit:

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ in } X.$$

Anwendung der Quotientenabbildung liefert $\hat{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k$ konvergiert in $\hat{X}$. □

Anhang zu Kapitel 5: Vervollständigung

Sei X ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ beliebig, $d(x,y) := \|x - y\|$, wobei $x, y \in M$ und damit (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 5.15
Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz**, falls

$$\sup_{x,y\notin M, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = \underbrace{\|f\|_L}_{\substack{Lipschitz- \\ Konstante}} < \infty$$

Bemerkung 5.16
Sei (M, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in M$ fest. Dann ist

$$X = \{f : M \to \mathbb{R} : f \text{ Lipschitz und } f(x_0) = 0\}$$

bezüglich $\|\cdot\|_L$ ein normierter Raum und $X' = B(X, \mathbb{R})$ ist vollständig.

Beweis
Die Normiertheit erhalten mittels $f, g \in X$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_L &= \sup_{x,y\in X} \frac{|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)|}{d(x,y)} \\ &\le \sup_{x,y\in X} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} + \sup_{x,y\in X} \frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)} \\ &= \|f\|_L + \|g\|_l\end{aligned}$$

Die Vollständigkeit folgt dann aus Satz 5.6. □

Satz 5.17
Sei (M,d) ein metrische Raum, $x_0 \in M$ fest, X definiert wie in 5.15:

Zu $x \in M$ definiere $F_x \in X'$ durch $F_x(f) = f(x)$ für $f\colon M \to \mathbb{R}$ in X.
Dann ist $x \in M \to F_x \in X'$ eine Abbildung, die eine isometrische Einbettung von M nach X' gibt, d.h.

$$d(x,y) = \|F_x - F_y\|_{X'}$$

Beweis
Für die eine Richtung betrachten wir:

$$\begin{aligned}\|F_x - F_y\|_{X'} &= \sup_{\|f\|_L \le 1} |(F_x - F_y)(f)| \\ &= \sup_{\|f\|_L = 1} |(F_x - F_y)| \\ &= \left(\sup_{\|f\|_L=1} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\right) d(x,y) \\ &\le 1 \cdot d(x,y)\end{aligned}$$

Zur Umkehrung wähle für $x \in M$ fest: $f(z) = d(x,z)$. Für diese Funktion gilt nach umgekehrter Dreiecksungleichung:

$$|f(z_1 - f(z_2)| = |d(x,z_1) - d(x,z_2)| \le d(z_1,z_2) \Rightarrow \|f\|_L \le 1$$

$$\begin{aligned}\|F_x - F_y\| = \sup_{\|y\|\le 1} |(F_x - F_y)(y)| &\ge (F_x - F_y)(f) \\ &= f(x) - f(y) = d(x,y)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(x,y) = \|F_x - F_y\|$$

$F_{x_0} = 0$ in $X', \|F_x\|_{X'} = \|F_x - F_{x_0}\| = d(x,x_0) < \infty$ □

Definition 5.18
Sei (M,d) ein metrischer Raum. Ein vollständiger metrischer Raum $(\hat{M},\hat{d})$ heißt **Vervollständigung** von (M,d), falls es eine Einbettung $J\colon M \to \hat{M}$ gibt mit:

i) $\hat{d}(J(x),J(y)) = d(x,y)$ für alle $x,y \in M$ (Isometrie)

ii) J(M) ist dicht in $\hat{M}$

Beispiel 5.19

a) $M =$ Polynome auf $[0,1]$, $d(p,q) = \sup_{t\in[0,1]} |p(t) - q(t)| = \|p-q\|_\infty$

$$\hat{M} = C[0,1], \quad \hat{d}(f,g) = \|f-g\|_\infty \quad \text{ist Vervollständigung}$$

b) $M = C[0,1]$, $d(f,g) = \|f-g\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\hat{M} = L^2[0,1], \quad \hat{d}(f,g) = d(f,g) \quad \text{ist Vervollständigung}$$

c) $M = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R}, x_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$, $d((x_n),(y_n)) = \left(\sum |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < \infty$

$$\hat{M} = \ell^p, \quad \hat{d}((x_n),(y_n)) = d((x_n),(y_n) \quad \text{ist Vervollständigung}$$

Satz 5.20
Zu jedem metrischen Raum (M,d) gibt es eine Vervollständigung, die bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist.

Beweis
Existenz: Zu (M,d) konstruieren wie in 5.17 den Banachraum X und die Einbettung

$$J\colon \begin{cases} M \to X' \\ x \to Fx \end{cases}$$

mit $d(x,y) = \|Fx - Fy\| = \|J(x) - J(y)\|$.
Setze $\hat{M} = \overline{J(M)}^{X'} \mathrel{\widehat{=}}$ Abschluss von $J(M)$ in X', damit ist $\hat{M}$ als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes X' auch vollständig: $J(M)$ dicht in $\hat{M}$ nach Definition.
Somit ist $\hat{M}$ mit $\hat{d}(f,g) = \|f-h\|_{X'}$ eine Vervollständigung von (M,d).

Eindeutigkeit: Für $(M,d) = (X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum seien $(X_1,d_1), (X_2,d_2)$ zwei Vervollständigungen von $X, \|\cdot\|)$ mit isometrischen Einbettungen $J_1\colon X \to X_1$, $J_2\colon X \to X_2$ wobei $J_2 J_1^{-1} : J_1(x) \to X_2$ stetig ist.
Nach Proposition 5.10 hat also $J_2 J_1^{-1}$ eine stetige Fortsetzung $U_1\colon X_1 \to X_2$ mit

$$\|U_1\| \le \|J_2 J_1^{-1}\| = 1.$$

Ebenso hat $J_2 J_1^{-1}$ eine stetige Fortsetzung $U_2 : X_2 \to X_1$ mit

$$\|U_2\| \le \|J_1 J_2^{-1}\| = 1.$$

Wobei

$$(U_2 U_1)\,|_{J_1(X)} = Id_{X_1}, \quad (U_1 U_2)\,|_{J_2(X)} = Id_{X_2}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung gilt damit

$$U_2 U_1 = Id_{X_1} \quad U_1 U_2 = Id_{X_2} \quad \Rightarrow \quad U_1 = U_2^{-1}$$

und mit $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$ folgt $X_1 \overset{iso}{\sim} X_2$. $\square$

Bemerkung 5.21
Alternativer Beweis der Existenz der Vervollständigung nach Cantor für einen normierten Vektorraum:

Sei $(X, \|\cdot\|9$ ein normierter Vektorraum, definiere

$$CF(X) := \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} : (x_n) \text{ ist Cauchy-Folge in } X\} \quad \text{und} \quad \mu((x_n)) := \overline{\lim}\|x_n\|$$

Dann ist p eine Halbnorm auf $CF(X)$. Setze $M := \{(x_n) \in CF(X) : p(x_n) = 0\} = \{(x_n) \in CF(X) : \|x_n\| \to 0\}$ Wähle als Kandidaten für die Vervollständigung $\hat{X} = {}^{CF(X)}/_{M}$

i) Vollständig, d.h. gegen $x_k = (x_{k,j}) \in CF(X)$ mit: $\forall \epsilon > 0\ \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : p(x_n - x_m) \leq \epsilon$ für $n, m \geq k_0$ gibt es ein $x = (x_j) \in CF(X)$ mit $p(x - x_k) \to 0$

ii) M ist abgeschlossen in $CF(X)$ und ${}^{CF(X)}/_{M}$ ist ein Banachraum.

iii) $J : X \to {}^{CF(X)}/_{M}$, $J(x) = (x)_{j\in\mathbb{N}}$ erfüllt $p\,(J(x)) = \|x\|$ und $J(X)$ ist dicht in ${}^{CF(X)}/_{M}$.

Beweis

i) Sei $x_k = (x_{k,j})$ eine Cauchy-Folge in $CF(X)$. Wähle für jedes k ein j_k mit $\|x_{k,i} - x_{k,j}\| \leq \frac{1}{k}$ für $i, j \geq j_k$. Setze $x = (x_{k,j_k})$:

$$\begin{aligned}\|x_{k,j_k} - x_{l,j_k}\| &\leq \|x_{k,j_k} - x_{k,j}\| + \|x_{k,j} - x_{l,j}\|\|x_{l,j} - x_{l,j_l}\| \\ &\leq \frac{1}{k} + \|x_{l,j} - x_{k,j}\| + \frac{1}{l} \quad \text{für } j \geq j_l, j \geq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overline{\lim}_{k,l\to\infty}\|x_{k,j_k} - x_{l,j_l}\| &\leq \lim_{k,l\to\infty}\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{k}\right) + \overline{\lim}_{k,l\to\infty}\|x_{l,j} - x_{k,j}\| \\ &\leq \overline{\lim}_{k,l\to\infty} p(x_l - x_k) = 0, \text{ d.h. } x \in CF(X).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(x_l - x) &= \overline{\lim}_{k\to\infty}\|x_{l,k} - x_{k,j_k}\| \\ &\leq \overline{\lim}_{k\to\infty}\left(\|x_{l,k} - x_{l,j_l}\| + \|x_{l,j_l} - x_{k,j_k}\right) \\ &\leq \frac{1}{l} + \overline{\lim}_{k\to\infty}\|x_{l,j_l} - x_{k,j_k}\| \xrightarrow{k\geq j_l} 0 \quad \text{für } l \to \infty.\end{aligned}$$

Also $\lim_{l\to\infty} x_l = x$ in $CF(X)$.

ii) vgl. Lemma 5.13

iii) $p(J(x)) = \overline{\lim}\|x_n\| = \|x\|$. Gegeben $x = (x_j) \in CF(X)$ und $\epsilon > 0$ wähle j_0 mit $\|x_i - x_j\| \leq \epsilon$ für $i, j \geq j_0$. Für $J(x_{j_0})$ gilt: $p(J(x_{j_0}) - x) = \overline{\lim}\|x_{j_0} - x_j\| \leq \epsilon$. □

6 Kompakte Mengen

Definition 6.1
Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $K \subseteq M$ heißt (folgen-)**kompakt**, falls es in jeder Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geq 1} \subset K$ und ein $x \in K$ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

$K \subseteq M$ heißt **relativ kompakt**, falls $\overline{K}$ in M kompakt ist.

Satz 6.2
Sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist

$$\overline{U_x} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

genau dann kompakt, wenn $dim X < \infty$.

Beweis
" $\Rightarrow$ " $X \cong \mathbb{K}^d$, $d = \dim X$, U_X ist abgeschlossen, beschränkt $\xrightarrow[Borell]{Heine-}$ U_X ist kompakt.

" $\Leftarrow$ " Sei $\dim X = \infty$. Wähle $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| = 1$.
Nach (6.3) mit $Y = \overline{span}\{x_1\}$ finde zu $\delta = \frac{1}{2}$ ein $x_2 \in X, \|x_2\| = 1$ und $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$
Wieder nach (6.3) mit $Y = \overline{span}\{x_1, x_2\}$ finde zu $\delta = \frac{1}{2}$ ein $x_3 \in X, \|x_3\| = 1$ und $\|x_3 - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ für $j = 1, 2$
Induktiv erhält man eine Folge $x_i \in X$ mit $\|x_i\| = 1$ und $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ für $j = 1, \ldots, i-1$. Dieses Folge $(x_i)_{i\geq 1}$ hat keine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist und demnach ist U_X nicht relativ kompakt in X. □

Lemma 6.3 (Riesz)
Sei Y ein abgeschlossener Teilraum von X und $X \neq Y$. Zu $\delta \in (0, 1)$ existiert ein $x_\delta \in X \setminus Y$, sodass

$$\|x\| = 1, \quad \|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta \quad \text{für alle } y \in Y$$

Beweis
Sei $x \in X \setminus Y$ und $d := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} > 0$, da Y ein abgeschlossener Teilraum ist.
Da $d < \frac{d}{1-\delta}$ gibt es ein $y_\delta \in Y$ mit $\|x - y_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$.
Setze $x_\delta = \frac{x - y_\delta}{\|x - y_\delta\|}$, damit gilt $\|x_\delta\| = 1$ und weiter

$$\begin{aligned}
\|x_\delta - y\| &= \|\frac{x}{\|x - y_\delta\|} - \frac{y_\delta}{\|x - y_\delta - y\|}\| \\
&= \frac{1}{\|x - y_\delta\|}\|x - \underbrace{y_\delta - \|x - y_\delta\| y}_{\leq y}\| \\
&\geq \frac{d}{\|x - y_\delta\|} \\
&\geq 1 - \delta
\end{aligned}$$

□

Beispiel 6.4
Sei $X = \ell^p$ für $1 \leq p < \infty$ gilt:
$M \subset \ell^p$ ist kompakt genau dann, wenn

$$\sup\{\sum_{n=k}^{\infty} |x_n|^p : x = (x_m) \in M\} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

(Kompakte Mengen lassen sich gut durch endliche Mengen approximieren)

Beweis
siehe Übung. □

Satz 6.5
Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für $K \subset M$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) K ist (folgen-)kompakt

b) K ist vollständig und total beschränkt, d.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_m \in M$ so dass
$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} K(x_j, \epsilon)$$

c) Jede Überdeckung von K durch offene Mengen $U_j, j \in J$ mit $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d.h. $j_1, \ldots, j_m$ mit
$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{j_k}$$

Beweis
$a) \Rightarrow b)$ (indirekt)
Angenommen $b)$ ist falsch. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $x_1, \ldots, x_n, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$K \not\subset K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon)$$

Um einen Widerspruch zu erhalten konstruieren wir eine Folge ohne konvergente Teilfolge:
Wähle $y_1 \in K$ beliebig, dann gilt nach Voraussetzung $K \not\subset K(y_1, \epsilon)$. Wähle weiter $y_2 \in K \setminus K(y_1, \epsilon)$ beliebig, dann gilt $K \not\subset K(y_1, \epsilon) \cup K(y_2, \epsilon)$.
Induktiv erhält man eine Folge $y_j \in K$ mit $y_j \notin \{K(y_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(y_{j-1}, \epsilon\}$.
D.h. $\|y_j - y_k\| \geq \epsilon$ für $k = 1, \ldots, j-1$. D.h. y_j hat keine konvergente Teilfolge, was ein Widerspruch zu $a)$ ist.

$b) \Rightarrow c)$ (indirekt)
Sei $c)$ falsch, d.h. es gibt eine offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ ohne endliche Teilüberdeckung.
Zu ϵ_1 gibt es nach $b)$ aber endlich viele $x_1^1, ..., x_m^1 \in K$, so dass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} K(x_j^1, \epsilon_1)$$

Setze der Kürze halber $y_1 := x^1_{j_0}$. Nun gibt es eine dieser Kugeln $K(y_1, \epsilon_1)$, sodass $\underbrace{K \cap K(y_1, 1)}_{=:L_1}$ nicht durch endlich viele der U_j überdeckt werden kann.
Nach B) gibt es aber auch zu $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$ endlich viele $x^2_1, \ldots, x^2_{m'}$, sodass

$$L_1 \subset K(x^2_1, \epsilon_2) \cup \ldots \cup K(x^2_{m'}, \epsilon_2).$$

Wieder muss es nach Voraussetzung eine dieser Kugeln $K(y_2, \epsilon_2)$ geben, sodass $\underbrace{K \cap K(y_1, \epsilon_1) \cap K(y_2, \epsilon_2)}_{=:L_2}$ sich nicht durch endlich viele der U_j überdecken lässt.
Induktiv finden wir zu $\epsilon_l = \frac{1}{2^{l-1}}$ eine Folge $y_l \in K$, so dass

$$L_l := K \cap K(y_1, \epsilon_1) \cap \ldots \cap K(y_l, \epsilon_l)$$

sich nicht durch endlich viele der U_j überdecken lässt.
Nun ist aber $L_l \subset K(y_{l-1}, \epsilon_{l-1}) \cap K(y_l, \epsilon_l) \neq \emptyset$. Mit $z \in K(y_{l-1}, \epsilon_{l-1}) \cap K(y_l, \epsilon_l)$ gilt

$$d(y_l, y_{l-1}) \leq d(y_l, z) + d(z, y_{l-1}) \leq \frac{1}{2^{l-1}} + \frac{1}{2^{l-2}} \leq \frac{1}{2^{l-3}}.$$

Für $n < m$: $d(y_n, y_m) \leq \sum_{l=n}^{m} \frac{1}{2^l} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, d.h. $(y_n)_{n\geq 1}$ ist Cauchy-Folge in K.
Da K vollständig ist nach b), gilt $y := \lim_{l\to\infty} y_l \in K$. Wähle n so groß, dass $d(y_n, y) < \frac{\delta}{2}, 2^{1-n} < \frac{\delta}{2}$.

$$\Rightarrow L_n = K \cap K(y_1, 1) \cap \ldots \cap K(y_n, \frac{1}{2^{n-1?}} \subset K(y_n, \frac{1}{2^{n-1}} \subset K(y, \delta) \subset U_{i_0}$$

Was jedoch Widerspruch zur Konstruktion der L_n wäre.

$c) \Rightarrow a)$ (indirekt)
Angenommen a) wäre falsch. D.h. es gibt eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$ ohne konvergente Teilfolge. Sei o.B.d.A. $|K| = \infty$. Zu jedem $y \in K$ gibt es ein $\epsilon(y)$, so dass $K(y, \epsilon(y))$ nur endlich viele der x_n enthält. $K \subset \bigcup_{y\in K} K(y, \epsilon(y))$, wobei alle $K(y, \epsilon(y))$ offen sind.
Nach c) existiert eine endliche Teilüberdeckung, so dass $K \subset K(y_1, \epsilon(y_1)) \cup \ldots \cup K(y_n, \epsilon(y_n))$.
$\Rightarrow (x_n)$ besteht nur aus endlich vielen Elementen und hat damit eine konvergente Teilfolge, was ein Widerspruch zur Wahl von (x_n) ist. □

Proposition 6.6
Sei (M, d) ein metrischer Raum.

a) Eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ ist immer vollständig und abgeschlossen in M.

b) Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist kompakt.

c) Jede kompakte Menge in M ist separabel.

d) Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raums ist beschränkt.

Beweis

a) siehe 6.5 b)

b) Nach Definition

c) Nach 6.5 b) gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge L_n mit:

$$\inf \|y - x\| : x \in L_n \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } x \in K.$$

Dann ist $L = \bigcup_{n\geq 1} L_n$ abzählbar und L ist dicht in K (d.h. $\overline{L} = K$), also ist K separabel.

d) Falls K unbeschränkt ist, dann gibt es $x_n \in K$ mit $\|x_n\| \geq n, n \in \mathbb{N}$. (x_n) kann dann keine konvergente Teilfolge besitzen. $\square$

Satz 6.7 (Arzelà-Ascoli)
Sei (S, d) ein kompakter, metrischer Raum

$$C(S) = \{d \colon S \to \mathbb{K} \text{ stetig}\}$$

$\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|$. Eine Teilmenge $M \subset C(S)$ ist kompakt, genau dann wenn gilt

a) M ist beschränkt in $C(S)$,

b) M ist abgeschlossen in $C(S)$ und

c) M ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in M : d(s,t) < \delta \Rightarrow |x(s) - x(t)| < \epsilon$$

Beweis
" $\Rightarrow$ " Sei M kompakt $\Rightarrow$ a,b) nach 6.6
z.z. M ist gleichgradig stetig:
Nach 6.5 b) ist M totalbeschränkt. Damit gibt es zu $\epsilon > 0$ $x_1, \dots, x_m$, so dass zu $x \in M$ ein x_i existiert mit $\|x - x_i\|_M \leq \epsilon$ $(*)$
Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind, sind$x_1, \dots, x_m \in M$ gleichmäßig stetig und damit folgt

$$\exists \delta_1, \dots, \delta_m \text{ mit } d(s,t) < \delta_i \Rightarrow |x_i(t) - x_i(s)| < \epsilon, \; i = 1, \dots, m \quad (**)$$

Definiere $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \dots, \delta_m) > 0$, dann gilt für $x \in M$:

$$\begin{aligned} |x(t) - x(s)| &\leq \underbrace{|x(t) - x_i(t)|}_{\leq \|x - x_i\| \leq \epsilon \text{ nach } (*)} + \underbrace{|x_i(t) - x_i(s)|}_{\leq \epsilon \text{ nach } (**)} + \underbrace{|x_i(s) - x(s)|}_{\leq \epsilon} \\ &\leq 3\epsilon \text{ für } d(s,t) < \delta \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Da nach Voraussetzung S kompakt ist, ist S mit 6.6 auch separabel. Sei also $(s_n)_{n \geq 1}$ eine dichte Folge in S. Sei weiter eine Folge $(x_n) \subset M$ gegeben.
Da M beschränkt in $C(S)$ ist, gibt es ein $C < \infty$ mit $|x_n(s)| \leq C$ für alle $s \in S, n \in \mathbb{N}$. Also ist für festes m $(x_n(s_m))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und hat somit eine konvergente Teilfolge.

$$\exists N_1 \subseteq \mathbb{N} \text{ mit } |N_1| = \infty \text{ so, dass } (x_n(s_1))_{n \in N_1} \text{ konvergiert.}$$

$$\exists N_2 \subseteq N_1 \text{ mit } |N_2| = \infty \text{ so, dass } (x_n(s_2))_{n \in N_2} \text{ konvergiert.}$$

Induktiv gibt es $N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_l \supset \ldots$ mit $|N_l| = \infty$ so, dass $(x_n(s_m))_{n \in N_m}$ konvergiert.
Wähle $n_j \in N_j$ mit $n_j \to \infty$ für $j \to \infty$. Dann gilt: $(x_{n_j}(s_m))_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{K}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. $(**)$
z.z. (x_{n_j}) konvergiert gleichmäßig auf S.
Zu $\epsilon > 0$ wähle δ wie in der Definition für gleichgradige Stetigkeit. Da die Überdeckung $S =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} K(s_n, \delta)$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $S' = K(s_1, \delta) \cup \ldots \cup K(s_m, \delta)$.
Setze zur Abkürzung $x_j = x_{n_j}$ und $s_k = s_{n_k}$.
Zum bereits gewählten $\epsilon > 0$ gibt es ein i_0 mit

$$|x_j(s_k) - x_i(s_k)| \leq \epsilon \quad i, j \geq i_0, k = 1, \ldots, m$$

Dann gilt ebenfalls für $i, j \geq i_0, s \in S$:

$$|x_j(s) - x_i(s)| \leq \underbrace{|x(t) - x_i(s)|}_{\substack{\leq \epsilon \\ \text{(wg. glgrd. Stetigkeit)}}} + \underbrace{|x_j(s_k) - x_i(s_k)|}_{\leq \epsilon} + \underbrace{|x_i(s_k) - x_i(s)|}_{\substack{\leq \epsilon \\ \text{(wg. glgrd. Stetigkeit)}}} \leq 3\epsilon$$

$$\Rightarrow \|x_j - x_i\|_\infty \leq 3\epsilon \text{ d. h. } x_j \text{ ist eine Cauchy-Folge in } C(S).$$

$$\Rightarrow \text{Da } C(S) \text{ vollständig ist und } M \text{ abgeschlossen, existiert } x = \lim_{j\to\infty} x_j \text{ mit } x \in M$$

□

Beispiel 6.8
$K = \{f \in C^1[0,1] : \|f'\|_\infty \leq 1, |f(0)| \leq 1\}$
K ist nicht kompakt in $C^1[0,1]$, aber K ist kompakt in $C[0,1]$.

Beweis
$U_{C^1[0,1]} \subset K$ ist nicht kompakt, da $\dim C^1[0,1] = \infty$ nach 6.2. Aber $K \subseteq C[0,1]$ ist kompakt nach 6.7, denn

a) $f \in K : f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)du \to \|f(t)\| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$

b) K ist abgeschlossen nach Definition

c) $f \in K, s < t \in [0,1] : |f(s) - f(t)| = |\int_s^t f'(u)du| \leq |t-s|\|f'\|_\infty \leq |t-s| < \epsilon$ für $\delta = \epsilon$ □

Korollar 6.9
Sei X ein Banachraum. Für $K \subseteq X$ sind äquivalent

a) K relativ kompakt (d.h. $\overline{K}$ ist kompakt)

b) Jede Folge $(x_k) \subseteq K$ hat eine Cauchy-Teilfolge

c) $\forall \epsilon > 0\ \exists y_1, \ldots, y_m \in K$ mit $K \subseteq K(y_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(y_m, \epsilon)$

Beweis
"*a*) ⇒ *b*)" und "*a*) ⇒ *c*)" klar nach 6.5.

"*b*) ⇒ *a*)" Sei $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq K$ mit einer Cauchy-Teilfolge (x_{n_k}).

$$\text{Da } X \text{ vollständig ist, existiert } \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x \in X \Rightarrow x \in \overline{K} \Rightarrow \overline{K} \text{ kompakt.}$$

"*c*) ⇒ *a*)" Da X vollständig ist, ist $\overline{K}$ vollständig. Zu $\epsilon > 0$ wähle $y_1, \ldots, y_m \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^m K(y_j, \epsilon) \Rightarrow \overline{K} \subseteq \bigcup_{j=1}^m \overline{K(y_j, \epsilon)} \subseteq \bigcup_{j=1}^m K(y_j, 2\epsilon)$$

□

7 Kompakte Operatoren

Definition 7.1
Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum. Ein linearer Operator $T\colon X \to Y$ heißt kompakt, falls $T(U_X)$ relativ kompakt ist in Y.

Vereinbarung:
$K(X,Y) =$ Raum der linearen, kompakten Operatoren von X nach Y.

Bemerkung

a) $T \in K(X,Y) \iff$ jede beschränkte Folge $(x_n) \subset X$ besitzt eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $T(x_{n_k})$ ist Cauchy-Folge in Y.

b) $K(X,Y) \subset B(X,Y)$, da die kompakte Menge $\overline{T(U_X)}$ beschränkt in Y ist.

Beispiel

a) $Id_X \in K(X,X) \iff \dim X < \infty$ (nach 6.2).

b) Endlich dimensionale Operatoren sind kompakt

$$X \xrightarrow{T} T(X) \subset Y_0 \subset Y \text{ mit } \dim Y_0 < \infty$$

Beispiel 7.2
$X = \ell^p, 1 \leq p < \infty$. $Q_n \in B(\ell^p) : Q_n(x_j) \coloneqq (0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},\dots)$
Behauptung:

$$T \in B(\ell^p) \text{ kompakt } \iff \|Q_nT\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\iff \sup_{\|x\|_p \leq 1} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |(Tx)_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff T(U_X) \text{ ist relativ kompakt in } \ell^p \text{ nach } 6.4$$

a) $T(x_j) \coloneqq (\lambda_j x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{K}$ Diagonaloperator
T ist kompakt $\iff \lambda_j \to 0$, für $j \to \infty$.

Beweis
Da $Q_n \in B(\ell^p)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|Q_nT(X_j)\| &= \|(0,\dots,0,\lambda_{n+1},x_{n+1},\lambda_{n+2},x_{n+2},\dots)\|_{\ell^p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j| \|x\|_{\ell^p} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|\leq 1} \|Q_nTx\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ falls } \lambda_j \to 0$$

Sei umgekehrt: $\lambda_j \not\to 0$, dann $\exists \lambda_{j_k} \to \lambda \neq 0$

$$T(e_{i_k}) = \lambda_{i_k} e_{i_k},\ T(\lambda_{j_k}) \approx \lambda e_{j_k} \text{ hat keine konvergente Teilfolge.}$$ □

b) $T(x_i) \coloneqq (0,x_1,x_2,x_3,\dots)$ "Shift"
Isometrie! $\|T(x_j)\| = \|x_i\| \Rightarrow$ nicht kompakt.

c) $[T(x_j)]_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$. Dann ist $T \in B(\ell^p)$, falls $\left(\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
Diese Hille-Tamerkin-Operatoren sind kompakt.

Beweis

$$\| [Q_nT(x_j)]_i \| \leq \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\sum_j |a_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0, n \to \infty$$

□

Beispiel 7.3
Sei $X = C(\Omega)$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Für $k\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{K}$ ist der Integraloperator

$$(Tx)(u) = \int_\Omega k(u,v)x(v)dv$$

kompakt.

Beweis
Wir führen den Beweis mittels Arzèla-Ascoli. Beachte

$$\exists M \text{ mit } |k(u,v)| \leq M \text{ für } u,v \in \Omega$$

$k\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{K}$ ist gleichmäßig stetig, da $\Omega\times\Omega$ kompakt ist.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_{\mathbb{R}^{2d}} < \delta \Rightarrow |k(u_1,v_1)-k(u_2,v_2)| < \epsilon$$

Dann gilt $T(U_{C(\Omega)})$ ist beschränkt, denn

$$|Tx(u)| \leq \int_\Omega |k(u,v)||x(v)|dv \leq M \underbrace{v_0(\Omega)}_{<\infty} \|x\|_\infty$$

Für $x \in U_{C(\Omega)}$: $\|Tx\|_\infty \leq Mv_0(\Omega) < \infty$
Damit ist $T(U_{C(\Omega)})$ gleichgradig stetig, da

$$|Tx(v_1) - Tx(v_2)| \leq \int_\Omega (k(u_1,v)-k(u_2,v))\,x(v)dv \leq v_0(\Omega)\sup_{v\in\Omega}|k(u_1,v)-k(u_2,v)|\underbrace{\|x\|_\infty}_{\leq 1}$$

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ bzgl. glw. Stetigkeit: dann folgt für $|u_1 - u_2| < \delta$:

$$Tx(u_1) - Tx(u_2)| \leq v_0(\Omega)\epsilon, \quad \forall x \in U_{C(\Omega)}$$

Dann nur noch Arzèla-Ascoli mit der gezeigten gleichgradigen Stetigkeit anwenden. □

Beispiel 7.4
$j\colon C^1[0,1] \hookrightarrow C[0,1]$, j Inklusion. Dann $j \in K(C^1[0,1], C[0,1])$.

Beweis
$j(U_{C^1[0,1]})$ ist relativ kompakt in $C[0,1]$ nach 6.9. (auch nach Arzèla-Ascoli). □

Satz 7.5
Seien X, Y und Z Banachräume.

a) $K(X, Y)$ ist ist ein linearer, *abgeschlossener* Teilraum von $B(X, Y)$.

b) Seien $T \in B(X, Y), S \in B(Y, Z)$ und entweder T oder S kompakt. Dann ist $S \circ T \in K(X, Z)$.
Insbesondere: $K(X) = K(X, X)$ ist ein Ideal in $B(X)$.

Beweis

a) $S, T \in K(X, Y). \lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \lambda T \in K(X, Y)$.
Zu $(x_j) \in U_X$ wähle x_{n_k} und x_{n_l} so, dass $T(x_{n_k})$ und $S(x_n)$ jeweils Cauchy-Folgen sind.

$$\Rightarrow (S+T)x_{k_j} = Sx_{k_j} + Tx_{k_j} \text{ ist Cauchy-Folge.}$$

z.z.: $K(X, Y)$ ist abgeschlossen in $B(X, Y)$.
Seien $T_n \in K(X, Y), T \in B(X, Y)$ mit $\|T_n - T\| \to 0$.

z.z.: $T \in K(X, Y)$.
Sei $\epsilon > 0$. Wähle n_0 so, dass $\|T - T_n\| \leq \epsilon$ für $n \geq n_0$.
Da $T_{n_0}(U_X)$ relativ kompakt ist, gibt es zu $\epsilon > 0, y_1, \ldots, y_j \in T_{n_0}(U_X)$:

$$T_{n_0}(U_X) \subset K(y_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(y_m, \epsilon)$$

Sei $x \in U_X$. Wähle j_0 mit $\|T_{n_0}x - y_{j_0}\|_Y \leq \epsilon$.

$$\|Tx - y_{j_0}\| \leq \underbrace{\|Tx - T_{n_0}x\|}_{\leq \underbrace{\|T - T_{n_0}\|}_{\leq \epsilon} \underbrace{\|x\|}_{\leq 1}} + \underbrace{\|T_{n_0} - y_{j_0}\|}_{\leq \epsilon} \leq 2\epsilon$$

d.h. $T(U_X) \subset \bigcup_{j=1}^{n} K(y_j, 2\epsilon)$, d.h. $T(U_X)$ ist relativ kompakt.

b) Sei $\|x_n\|_X \leq 1$ und S kompakt $\Rightarrow \exists n_k : S(Tx_{n_k})$ ist eine Cauchy-Folge, denn Tx_{n_k} ist beschränkt.
Sei $\|x_n\|_X \leq 1$ und T kompakt $\Rightarrow \exists n_k : Tx_{n_k}$ ist eine Cauchy-Folge, damit ist aber auch $S(Tx_{n_k})$ eine Cauchy-Folge, da S stetig ist. □

Korollar 7.6
Seien X, Y Banachräume, $T \in B(X, Y)$.
Falls es endlich dimensionale Operatoren $T_n \in B(X, Y)$ gibt, dann ist $T \in K(X, Y)$.

Beweis
Bemerkung nach 7.1, 7.5 a) □

Beispiel
$X = \ell^p, T \in B(\ell^p)$ ist kompakt $\iff \|Q_n T\| \to 0$.
$P_n = Id - Q_n, P_n(x_j) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots), P_n$ endlich dimensional.

$$T \in B(\ell^p) \iff \|P_n T - T\| = \|Q_n T\| \to 0$$

$$T \in K(\ell^p) \iff T \text{ ist limes von endlichen Operatoren in der Operatornorm.}$$

Satz 7.7
Seien X, Y Banachräume und X habe die **Approximationseigenschaft** (d.h. es existieren endlich dimensionale Operatoren $S_n \in B(X) : S_n x \to x, \quad \forall x \in X$).

Dann gilt: $K(X,Y) = \overline{F(X,Y)}$ in der Operatornorm, wobei $F(X,Y) = \{T \in B(X,Y) : \dim T(X) < \infty\}$.

Beweis
Für $T \in K(X,Y)$ setze $T_n = S_n T \in F(X,Y)$.
Wegen 7.6 bleibt z.z.: $\|T - T_n\| \to 0$.
Da $T(U_X)$ relativ kompakt ist, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es $y_1, \dots, y_m$ so, dass

$$T(U_X) \subset \bigcup_{j=1}^{m} K(y_j, \epsilon)$$

Aufgrund der Approximationseigenschaft gibt es ein n_0 so, dass $\|S_n y_j - y_j\| \le \epsilon$ für $n \ge n_0, j = 1, \dots, m$. Zu $x \in U_X$ wähle j_0 mit $\|Tx - y_{j_0}\| \le \epsilon$ und damit

$$\begin{aligned}
\|T_n x - Tx\| &\le \|S_n Tx - S_n y_{j_0}\| + \|S_n y_{j_0} - y_{j_0}\| + \|y_{j_0} - Tx\| \\
&\le \|S_n\| \underbrace{\|Tx - y_j\|}_{\le \epsilon} + \epsilon + \epsilon \\
&\le \left(\underbrace{\sup_n \|S_n\|}_{<\infty (\text{beschr.!})} + 2 \right) \epsilon \\
&= \left(c' + 2\right) \epsilon \qquad \text{für } n \ge n_0.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T_n - T\| \le c\epsilon \quad$ für $n \ge n_0$ und eine Konstante C. □

8 Approximation von L^p Funktionen

Sei $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p, x_m = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$.

$$\text{Dann } \|x - x_m\| \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Betrachten wir $L^p(\Omega)$, mit z.B. $\Omega = \mathbb{R}^d$ und die Integraloperatoren $T\colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$

$$Tf(u) = \int k(u,v) f(v) dv \quad (*)$$

wobei $k\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ messbar.

Satz 8.1
Sei $k\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ messbar und

$$\sup_{u \in \Omega} \int_\Omega |k(u,v)| dv \le C_1 < \infty \text{ und}$$
$$\sup_{v \in \Omega} \int_\Omega |k(u,v)| du \le C_2 < \infty$$

Dann wird durch $(*)$ ein beschränkter Operator $T\colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ mit

$$\|T\|_{L^p \to L^p} \le C_1^{\frac{1}{p'}} C_2^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

und $1 \le p \le \infty$.

Beweis

- $p = \infty : f \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} |Tf(u)| &\le \int |k(u,v)||f(v)| dv \\ &\le \int_\Omega |k(u,v)| dv \|f\|_\infty \\ &\le C_1 \|f\|_\infty \quad \forall u \in \Omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|T\| \le C_1$$

- $p = 1 : f \in L^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^1} &= \int_\Omega \left| \int_\Omega k(u,v) f(v) dv \right| du \\ &\le \int \int |k(u,v)||f(v)| du dv \\ &= \int \left(\int |k(u,v)| du \right) |f(v)| dv \\ &\le C_2 \int |f(v)| dv \\ &= C_2 \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

- $1 < p < \infty : f \in L^1 \cap L^\infty \subset L^p, Tf \in L^1 \cap L^\infty \subset L^p$.

  Definiere $g(u) = \left(\int |Tf(u)|^p du\right)^{-\frac{1}{p'}} |Tf(u)|^{p-1} sign(Tf(u))$.

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p} &= \left(\int_\Omega |Tf(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega |Tf(u)|^p du\right)\left(\int_\Omega |Tf(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}-1} \\
&= \int_\Omega g(u) Tf(u) du \\
&= \int_\Omega \int_\Omega g(u) k(u,v) f(v) dv du \\
&\leq \int_{\Omega\times\Omega} |g(u)||k(u,v)|^{\frac{1}{p'}} |k(u,v)|^{\frac{1}{p}} |f(v)| d(u,v), \qquad \text{durch Hölder auf } \Omega\times\Omega \text{ folgt} \\
&\leq \left(\int_{\Omega\times\Omega} |g(u)|^{p'} |k(u,v)| d(u,v)\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega\times\Omega} |k(u,v)||f(v)|^p d(u,v)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (*)
\end{aligned}$$

Definiere nun: $T_1 h(v) = \int |k(u,v)| h(u) du$, $T_1 h(u) = \int |k(u,v)| h(v) dv$

Mit diesen Notationen wird $(*)$:

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega T_1[|g|^{p'}](v) dv\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega T_2[|f|^p] dv\right)^{\frac{1}{p}} &= \|T_1[|g|^{p'}]\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \|T_2[|f|^p]\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \underbrace{\|T_1\|_{L^1\to L^1}^{\frac{1}{p'}}}_{\leq C_1^{\frac{1}{p'}}} \underbrace{\||g|^{p'}\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}}}_{=\|g\|_{L^{p'}}} \underbrace{\|T_2\|_{L^1\to L^1}^{\frac{1}{p}}}_{\leq C_2^{\frac{1}{p}}} \underbrace{\||f|^p\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}}_{\|f\|_{L^p}} \\
&\leq C_1^{\frac{1}{p'}} C_2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}
\end{aligned}$$

Wir wollen noch zeigen, dass $\|g\|_{L^{p'}} \leq 1$, da wir dann die richtige Abschätzung auf einer dichten Teilmenge gefunden haben.

$$\|g\|_{L^{p'}} = \left(\int |Tf(u)|^p du\right)^{-\frac{1}{p'}} \left(\int |Tf(u)|^{(p-1)p'} du\right)^{\frac{1}{p'}} = 1, \text{ da } (p-1)p' = p$$

□

Definition 8.2 (Bedingter Erwartungsoperator)
Sei $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Partition von Ω in paarweise disjunkte, messbare Mengen A_n mit $0 < \mu(A_n) < \infty$. Setze

$$\mathbb{E}_\mathcal{A}(f)(s) = \sum_n \left[\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(t) dt\right] \mathbb{1}_{A_n}(s)$$

Korollar 8.3

a) Für jede Partition $\mathcal{A} = \{A_n\}$ von Ω ist $\mathbb{E}_\mathcal{A} \in B(L^p(\Omega))$ für alle $1 \leq p \leq \infty$ mit $\|\mathbb{E}_\mathcal{A}\|_{L^p\to L^p} = 1$.

b) Bild $\mathbb{E}_\mathcal{A} = \mathbb{E}_\mathcal{A}(L^p)$ ist isometrisch zu $\ell_m^p \cong (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$, mit $m = card(A)$.

Beweis

a) Setze $k(s,t) = \sum_n \mu(A_n)^{-1}\mathbb{1}_{A_n}(s)\mathbb{1}_{A_n}(t)$. Dann gilt für $s \in A_n$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathcal{A}} f(s) &= \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(t)dt \\ &= \int_\Omega k(s,t) f(t)dt\end{aligned}$$

und außerdem $\int k(s,u)du = 1$ für $s \in \Omega$, $\int k(s,u)ds = 1$ für $u \in \Omega$.
Aus 8.1 folgt damit mit $C_1 = 1, C_2 = 1$: $\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}}\|_{L^p \to L^p} \leq 1$.

b) $J : \ell^p_m \to L^p(\Omega), J(\alpha_n) = \sum \alpha_n \mu(A_n)^{-\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{A_n}$.

$$\text{da Bild } J = \text{span}\{\mathbb{1}_{A_n}\} = \text{ Bild } \mathbb{E}_{\mathcal{A}}$$

$\|J(\alpha_n)\|^p_{L^p} = \int_\Omega |\sum_n \alpha_n \mu(A_n)^{-\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{A_n}(s)|^p ds = \int_\Omega \sum_n |\alpha_n|^p \frac{1}{\mu(A_n)}\mathbb{1}_{A_n} ds = \sum |\alpha_n|^p$ □

Satz 8.4
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{A}_m = \{A_{n,m} : n = 1, \dots, m_n\}$ eine Zerlegung von $\Omega \cap K(0, r_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $r_m \to \infty$. Es gelte $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_{m+1}$ und die "Feinheit der Zerlegung" soll gegen 0 gehen:

$$d_m = \sup_{n=1,\dots,m_n} \{|t-s| : s,t \in A_{m,n}\} \to 0$$

Dann gilt für alle $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$

$$\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f\|_{L^p} \to 0 \text{ für } m \to \infty$$

Beweis
1. Beweis

$D =$ span $\{\mathbb{1}_{A_{n,m}} : n = 1, \dots, m_n, m \in \mathbb{N}\}$. Da $d_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ "weiß man", dass D dicht ist.

2. Beweis

$D = C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega), \{t : f(t) \neq 0\}$ kompakt$\}$ "Man weiß", dass D dicht in $L^p(\Omega)$ ist.

Dann gilt zu zeigen: Für $f \in C_0(\Omega)$ gilt $\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f\|_{L^p} \to 0$ für $m \to \infty$.

Annahme $f \in C(K(0,r_m)), f$ gleichmäßig stetig, $\text{supp}(f) \subset K(0,r_m)$ für m groß genug

$$
\begin{aligned}
\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f\|_{L^p}^p &= \int_\Omega |\sum_n (\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f)\, \mathbb{1}_{A_{m,n}}(s)|^p ds \\
&= \sum_n \int \left|(\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f)\, \mathbb{1}_{A_{m,n}}(s)\right|^p ds \\
&= \sum_{n=1}^{m_n} \int \left| \frac{1}{\mu(A_{m,n})} \int_{A_{m,n}} [f(t)dt - f(s)]\, \mathbb{1}_{A_{m,n}}(s) \right|^p ds \\
&= \sum_{n=1} \int_{K(0,r_m)\cap A_{n,m}} \left| \frac{1}{\mu(A_{m,n})} \int_{A_{m,n}} [f(t) - f(s)]\, dt \right|^p ds \\
&\leq \sum_n \mu\left(K(0,r_m) \cap A_{n,m}\right) sup\{|f(t) - f(s)| : s,t \in A_{m,n}\} \\
&\leq \left(\sum_n^{m_n} \mu\left(K(0,r_m) \cap A_{n,m}\right) \right) sup\{|f(t) - f(s)| : |s-t| < d_m\} \\
&\leq \mu\left(K(0,r_m)\right) \underbrace{\sup_{|s-t|\leq d_m} |f(s) - f(t)|}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0, \text{ da } d_m \to 0}
\end{aligned}
$$

□

Beispiel
$\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A}_m = \{[\frac{n-1}{2^m}, \frac{n}{2^m}) : n = -2^{2m}, \ldots, 0, \ldots, 2^{2m}\}$, dann ist die Feinheit $r_m = 2^m$.

Korollar
Für $X = L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ gilt:

$$K(X,X) = \overline{\mathcal{F}(X,X)} = \text{ Abschluss der endl. dim. Operatoren}$$

Beweis (siehe 7.7)
Die Behauptung ist richtig, falls L^p die Approximationseigenschaft hat:

$$\exists S_n \in \mathcal{F}(x), \|S_n\| \leq 1, S_n f \to f \text{ in } L^p \text{ für } n \to \infty$$

Mit Satz 8.4 bzw. $S_n = \mathbb{E}_{\mathcal{A}_n}$ folgt die Behauptung. □

Satz 8.5 (Young)
Für $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ setze für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$(k * f)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} k(u-v) f(v) dv \quad (*)$$

$k * f$ heißt **Faltung** von k und f.
Dann definiert $(*)$ einen beschränkten Operator $Tf = k * f$ von $L^p(\mathbb{R}^d)$ nach $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $\|T\|_{L^p \to L^p} \leq \|k\|_{L^1}$.

Beweis
Setze $k(u,v) := k(u-v)$. Dann gilt:

$$\int |k(u,v)|dv = \int |k(u-v)|dv = \|k\|_{L^1} \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^d$$
$$\int |k(u,v)|du = \int |k(u-v)|du = \|k\|_{L^1} \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^d$$

Wende Satz 8.1 an: $\|T\| \leq \|k\|_{L^1}$ □

Bemerkung
$D \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ dicht, z.B.: $D = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ $f \in D : \int_{\mathbb{R}^d} k(u-v)f(v)dv$ existiert als Lebesgueintegral für alle $f \in D$.
Nach Satz 8.1 gilt $\|Tf\|_{L^p} \leq \|k\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^p}$ für $f \in D$.
T ist die **stetige Fortsetzung** von $T|_D$ auf ganz $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Definition 8.6
Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\phi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(u)du = 1$. Dann heißt $\phi_\epsilon(u) = \epsilon^{-d}\phi(\epsilon^{-1}u), \epsilon > 0$, **approximative Eins**.
Notation: $\phi_\epsilon * f(u) = \int \phi_\epsilon(u-v)f(v)dv$.

Beispiel
$\phi(u) = \frac{1}{|B(0,1)|} \cdot \mathbb{1}_{B(0,1)}(u), \phi \geq 0, \int \phi du = 1$

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon * f(u) &= \frac{1}{|B(u,\epsilon)|} \int \mathbb{1}_{B(u,\epsilon)}(u-v)f(v)dv \\ &= \frac{1}{|B(u,\epsilon)|} \int_{(u,\epsilon)} f(v)dv \\ &= \text{"Durchschnitt"von } f \text{ über die Kugel } B(u,\epsilon).\end{aligned}$$

Vermutung: $\phi_\epsilon * f(u) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} f(u)$. In welchem Sinne jedoch ist noch unklar.

Bemerkung 8.7
i) $\int \phi_\epsilon(u)du = 1$
ii) $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \phi_\epsilon(u)du \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$
iii) $\text{supp}(\phi) \subset B(0,r) \Rightarrow \text{supp}(\phi_\epsilon) \subset B(0,\epsilon)$
iv) $\|\phi_\epsilon * f\|_{L^p} \leq 1\|f\|_{L^p}$ (nach 8.5)

Satz 8.8
Sei $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ eine approximative Eins. Dann gilt für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p < \infty$

$$\|f - \phi_\epsilon * f\|_{L^p} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$$

Beweis
Sei $D = \{f \in C(\mathbb{R}^d) : \text{supp}(f) \text{ kompakt }\}$, $D \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ dicht.
Für $f \in D$, $\text{supp}(f) \subset B(0, r_0)$

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon * f(u) - f(u) &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\epsilon(u-v)\,[f(v) - f(u)]\,dv \quad \left(\text{da } \int \phi_\epsilon(u)du = 1\right)\\ &= \int \phi_\epsilon(h)\,[f(u-h) - f(u)]\,dh\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\phi_\epsilon * f - f\|_{L^p} &\le \left\| \int_{|h|\le r} \phi_\epsilon(h)\,[f(\cdot - h) - f(\cdot)]\,dh \right\|_{L^p(\cdot)} + \left\| \int_{|h|\ge r} \phi_\epsilon(h)\,[f(\cdot - h) - f(\cdot)]\,dh \right\|_{L^p(\cdot)}\\ &\le \underbrace{\left(\int_{|h|\le r} \phi_\epsilon(h)dh \right)}_{\le 1} \sup_{|h|\le r} \|f(\cdot - h) - f(\cdot)\|_{L^p} + \int_{|h|\ge r} \phi_\epsilon(h)dh\,(\|f(\cdot - h)\|_{L^p} + \|f(\cdot)\|_{L^p})\\ &\le \sup_{|h|\le r} \|f(\cdot - h) - f(\cdot)\|_{L^p(\cdot)} + \underbrace{\int_{|h|\ge r} \phi_\epsilon(h)dh}_{\to 0 \text{ für } \epsilon \to 0 \text{ nach } 8.7ii)} \quad (2 \cdot \|f\|_{L^p}) \quad (L^p \text{ ist translationsinvariant})\end{aligned}$$

Gegeben ein $\tau > 0$ wähle r so groß, dass der erste Teil kleiner ist als τ. Gegeben r und τ wähle $\epsilon > 0$ so klein, dass der zweite Teil kleiner ist als τ, d.h.

$$\|\phi_\epsilon * f - f\|_{L^p} \le 2\tau \text{ für } \epsilon \text{ klein genug, für } f \in D.$$

Nach 8.7 iv): $\|\phi_\epsilon * f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$
Für $T_\epsilon f = \phi_\epsilon * f$ gilt:

- $\|T_\epsilon\| \le 1$ für alle $\epsilon > 0$
- $T_\epsilon f \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} f$ in L^p für alle $f \in D$
- **D ist dicht in L^p**

$\Rightarrow$ Behauptung nach Proposition 5.10 $\square$

Korollar 8.9
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann liegt

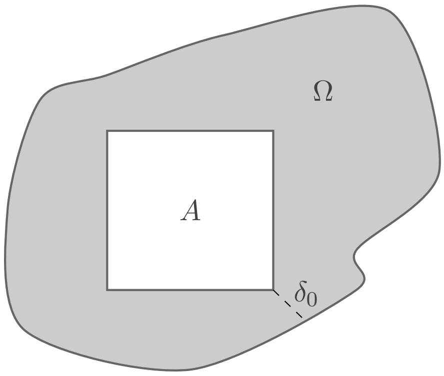
$$C_c^\infty(\Omega) = \{f : f \text{ ist unendlich oft differenzierbar und } \text{supp}(f) \text{ ist kompakt.}\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$.

Beweis
Sei $\phi_\delta, \delta > 0$ eine approximative Eins und $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp}(\phi) \le B(0,1)$.
Gegeben $f \in L^p(\Omega), \epsilon > 0$ wähle $g \in L^\infty(\Omega)$ mit

- $\text{supp}(g) = \overline{\{x \in \Omega : g(x) \neq 0\}} =: A \subseteq \Omega$, A kompakt
- $\|f - g\|_{L^p} \le \epsilon$

$$\delta_0 = \inf\{|t - s| : t \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega, s \in A\} \quad \text{Abstand von } A \text{ und } \Omega^c$$



Da $\operatorname{supp}(\phi_\delta) \subset B(0,\delta)$ nach 8.7 ii)

$$\Rightarrow \operatorname{supp}(g * \phi_\delta) \subset A + B\left(0, \frac{\delta_0}{2}\right) \subset \Omega \text{ für } \delta < \frac{\delta_0}{2}$$

(mit $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$), denn $g * \phi_\delta(u) = \int \phi_\delta(u-v)g(v)dv \neq 0$ nur wenn $v \in A$ und $\|u - v\| < \delta$.
Also $g * \phi_\delta \in C_c(\Omega)$. Zu zeigen: $g * \phi_\delta \in C^\infty(\Omega)$

$$D_u^\alpha(\phi_\delta * g)(u) = \int_A [D_u^\alpha \phi_\delta(u - v)] \underbrace{g(v)}_{\text{beschränkt}} gv$$

d.h. $\phi_\delta * g \in C^\infty$; in einfachen Worten bedeutet das, dass $C_\delta * g$ alle guten Eigenschaften von ϕ "erbt", auch wenn g "schlecht" ist.

$$\|f - \phi_\delta * g\|_{L^p} \leq \underbrace{\|f - g\|}_{\leq \epsilon} + \underbrace{\|g - \phi_\delta * g\|_{L^p}}_{\leq \epsilon} \text{ für } \epsilon \text{ klein genug nach } 8.8$$

□

Bemerkung
Es gilt:

- $\operatorname{supp}(f) \subset A, \operatorname{supp}(g) \subset B \quad \Rightarrow \quad \operatorname{supp}(f + g) \subset A + B$
- $f * g = g * f$

Korollar 8.10
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Sei $f \in L^p(\Omega), p \in [1, \infty)$ mit $\int f(u)g(u)du = 0$ für alle $g \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann ist $f = 0$.

Beweis
Zu $f \in L^p$ gibt es ein $g \in L^{p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ mit

$$\|f\|_{L^p} = \int f(u)g(u)du, \quad \|g\|_{L^{p'}} = 1$$

Wähle $g(u) = |f(u)|^{p-1}\,(sign(f(u))) \cdot \|f\|_{L^p}^{\frac{1}{p}-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p} &= \left(\int |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{1}{p}-1} \int |f(u)|^p du \\ &= \int f(u) \underbrace{\frac{sign(f(u))|f(u)|^{p-1}}{\|f\|^{1-\frac{1}{p}}}}_{=:g(u)} du \\ &= \int f(u)g(u)du \end{aligned}$$

$\|g\|_{L^{p'}} = 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. (sieh auch Beweis 8.1)

$\|f\|_{L^p} = \int f(u)g(u)du = \int f(u)[g(u) - \phi(u)]du$ für alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\quad$ denn $\int f(u)\phi(u)du = 0$

Wähle nach 8.9 ein $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\|g - \phi\|_{L^{p'}(\Omega)} < \frac{1}{2}$

Also $\|f\|_{L^p} \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^p}\|f - \phi\|_{L^{p'}} < \frac{1}{2}\|f\|_{L^p}$, was einen Widerspruch zu $f \neq 0$ darstellt, demnach gilt $\|f\|_{L^p} = 0, f = 0.$ $\square$

Elemente der Operatortheorie

9 Der Satz von Baire und der Satz von Banach-Steinhaus

Satz 9.1 (Satz von Baire)
Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und seien $(U_n)_{n\geq 1}$ offen und dicht in M.

$$\text{Dann ist } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \text{ dicht in } M.$$

Beweis
Wir definiere der Kürze halber $D \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und werden zeigen, dass zu jedem $x_0 \in M$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in K(x_0, \epsilon) \cap D$ existiert. Für gegebenes $\epsilon > 0$

- ist $U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$ offen und nichtleer, da U_1 dicht ist. Also existiert ein $x_1 \in U_1$ und $\epsilon_1 > 0$ mit $\epsilon_1 < \frac{1}{2}\epsilon$ so, dass $K(x_1, 2\epsilon_1) \subset U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$

$$\Rightarrow \overline{K(x_1, \epsilon_1)} \subseteq U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$$

- ist $U_2 \cap K(x_1, \epsilon_1)$ offen und nichtleer, da U_1 dicht ist. Also existiert ein $x_2 \in U_2$ und ein $\epsilon_2 < \frac{1}{2}\epsilon_1$ mit

$$\overline{K(x_2, \epsilon_2)} \subset K(x_2, 2\epsilon_2) \subset U_2 \cap K(x_1, \epsilon_1) \subset U_2 \cap U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$$

- Induktiv findet man Folgen $\epsilon_n > 0, x_n$ mit
  (i) $\epsilon_n < \frac{1}{2}\epsilon_{n-1}$ und damit $\epsilon_n < \frac{1}{2^n}\epsilon$
  (ii) $\overline{K(x_n, \epsilon_n)} \subset U_n \cap K(x_{n-1}, \epsilon_{n-1}) \subset \ldots \subset U_n \cap \ldots \cap U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$

Insbesondere für $n > N$:

$$d(x_n, x_N) \leq \sum_{j=N+1}^{n} d(x_j, x_{j-1}) \leq \sum_{j=N+1}^{n} \epsilon_n \leq \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\right)\epsilon$$

d.h. (x_n) ist eine Cauchy-Folge und da M vollständig ist, existiert $\lim_{n\to\infty} x_n =: x$ in M.
Mit ii) gilt: $x_n \in \overline{K(x_N, \epsilon_N)}$ für alle $n \geq N$

$$\Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{K(x_N, \epsilon_N)} \subset U_N \cap \ldots \cap U_1 \cap K(x_0, \epsilon),\ \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \cap K(x_0, \epsilon) = D \cap K(x_0, \epsilon)$$

□

Definition 9.2

a) Eine Teilmenge L eines metrischen Raums M heißt **nirgends dicht**, falls $\overline{L}$ keine inneren Punkte enthält.

b) Eine Teilmenge L, die sich als Vereinigung von einer Folge von nirgends dichten Mengen L_n darstellen lässt, d.h. $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ heißt von **1. Kategorie**.

c) L heißt von **2. Kategorie**, falls L nicht von 1. Kategorie ist.

Bemerkung

- Ist L nirgends dicht, dann ist $M \setminus \overline{L}$ dicht in M
- Ist L nirgends dicht oder von Kategorie 1, dann ist L "dünn", "voller Löcher".

Korollar 9.3 (Kategoriensatz von Baire)

a) In einem vollständigen metrischen Raum (M, d) liegt das Komplement einer Menge L von 1. Kategorie stets dicht. Insbesondere:

b) Ein vollständig metrischer Raum ist von 2. Kategorie

c) Sei (M, d) vollständig und $(M_n)_{n\geq 1}$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Dann enthält mindestens ein M_n eine Kugel

Beweis

$L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, L_n nirgends dicht.
Damit gilt $L^c = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_n^c \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{L_n}^c$, mit $\overline{L_n}^c$ offen.
Da L_n nirgends dicht ist, ist daher $\overline{L_n}^c$ dicht in M
Nach 9.1 ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{L_n}^c$ dicht in M und da $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{L_n}^c \subset L^c$, ist auch L^c dicht in M.

$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$ nach Definition. □

Satz 9.4

$E = \{x \in C[0,1] : x \text{ ist in keinem Punkt von } [0,1] \text{ differenzierbar}\}$ ist dicht in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Insbesondere:

- $E \neq \emptyset$
- $C^1[0,1]$ ist von 1. Kategorie in $C[0,1]$, also liegt $C[0,1] \setminus C^1[0,1]$ dicht in $C[0,1]$.

Beweis

Betrachte die Menge

$$E_n = \left\{ x \in C[0,1] : \sup_{0<|h|\leq\frac{1}{n}} \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right| > n, \text{ für alle } t \in [0,1] \right\},$$

dann ist $\bigcap_{n\geq 1} E_n \subset E$.

Damit wir den Satz von Baire anwenden können, müssen wir zeigen

i) E_n sind offen in $C[0,1]$ für alle n

ii) E_n sind dicht in $C[0,1]$ für alle n

und erhalten dann, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ und damit auch die Menge E dicht in $C[0,1]$ ist.

i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E_n$ fest.
Zu jedem $t \in [0,1]$ wähle δ_t definiert durch: $\sup_{0<|h|\leq\frac{1}{n}} \left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right| = n + 2\delta_t$

$$\Rightarrow \left|\frac{x(t+h_t)-x(t)}{h_t}\right| > n + \delta_t \text{ für } 0 < |h_t| \leq \frac{1}{n}$$

Da x stetig ist, gibt es zu t eine offene Umgebung U_t mit

$$\left|\frac{x(s+h_t)-x(s)}{h_t}\right| > n + \delta_t \text{ für } s \in U_t, \quad 0 < |h_t| \leq \frac{1}{n}$$

Da $[0,1]$ kompakt und $[0,1] = \bigcup_{t\in[0,1]} U_t$ gibt es endlich viele $U_{t_1}, \dots, U_{t_n}$ mit

$$[0,1] \subset U_{t_1} \cup \ldots \cup U_{t_n}$$

Setze $\delta := \min\{\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_1}\} > 0$, $h := \min\{h_{t_1}, \dots, h_{t_n}\}$ und wähle ein ϵ mit $0 < \epsilon < \frac{1}{2}h\delta$.
Zu zeigen bleibt $K(x,\epsilon) \subset E_n$:
Sei $y \in C[0,1]$ mit $\|x-y\|_\infty < \epsilon$. Zu $t \in [0,1]$ wähle $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $t \in U_i$. Dann:

$$\begin{aligned}\left|\frac{y(t+h_{t_i})-y(t)}{h_{t_i}}\right| &\overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\geq} \left|\frac{x(t+h_{t_i})-x(t)}{h_{t_i}}\right| - 2\frac{\|x-y\|_\infty}{|h_{t_i}|} \\ &\overset{t\in U_{t_i}}{>} n + \delta - 2\frac{\epsilon}{n} \\ &> n \quad \text{nach Wahl von } \epsilon\end{aligned}$$

$\Rightarrow x \in E_n, K(x,\epsilon) \subseteq E_n \Rightarrow A_n$ offen, $n \in \mathbb{N}$.

ii) Wir wollen noch zeigen, dass U_n dicht in $C[0,1]$ ist.
Sei $V \subset C[0,1]$ offen, $V \neq \emptyset$. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es ein Polynom p mit $p \in V, \epsilon > 0 : \|x-p\|_\infty \leq \epsilon \Rightarrow x \in V$.
Sei weiter y_m eine Sägezahnfunktion mit $y_m : [0,1] \to [0,\epsilon]$ und der Steigung $\pm m$. Dann ist $x := p + m \in K(p,\epsilon)$.
Wähle zu n die Zahl $m \in \mathbb{N}$ so, dass $m > n + \|p\|_\infty$.
Für $t \in [0,1], 0 < |n| \leq \frac{1}{n}$ gilt:

$$\left|\frac{x_m(t+h)-x(t)}{h}\right| \overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\geq} \left|\frac{y_m(t+h)-y(t)}{h}\right| - \underbrace{\left|\frac{p(t+h)_p(t)}{h}\right|}_{\leq\|p'\|_\infty \text{nach MWS}}$$

$$\Rightarrow \sup_{0<|h|\leq\frac{1}{n}} \left|\frac{x_m(t+h)-x_m(t)}{h}\right| \geq m - \|p'\|_\infty \underset{\text{von } m}{\overset{\text{nach Wahl}}{\geq}} n$$

Damit ist $x_m \in E_n$ und sogar $x_m \in E_n \cap V$

$\Rightarrow E_n \cap V \neq \emptyset \quad \Rightarrow E_n$ dicht. $\square$

Satz 9.5 (Banach-Steinhaus)
Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, I eine Indexmenge und $(T_i)_{i\geq 1} \in B(X,Y)$. Falls:

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| = c(x) < \infty, \quad \forall x \in X$$

dann ist auch

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| = \sup_{i\in I} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_i x\| < \infty.$$

Beweis
Betrachte die Menge $E_n \coloneqq \{x \in X : \sup \|T_i x\| \leq n\}$. Dann ist E_n abgeschlossen, denn $E_n = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \{x \in X : \|T_i x\| \leq n\}$. Außerdem ist E_n symmetrisch, d.h. $x \in E_n \iff -x \in E_n$ und konvex, denn für $x_1, x_2 \in E_n$ gilt

$$\sup \|T_i \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)\| \leq \frac{1}{2}\sup \|T_i x_1\| + \frac{1}{2}\sup \|T_i x_2\| \leq n \quad \text{also } \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in E_n$$

Es gilt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, nach Baire existiert dann ein $N \in \mathbb{N}, x \in E_N, \epsilon > 0$ mit $K(x,\epsilon) \subset E_N \Rightarrow K(-x,\epsilon) \subseteq E_n$
Sei $z \in X : \|z\| < \epsilon$. $z = \frac{1}{2}(x+z) + \frac{1}{2}(z-x) \in \frac{1}{2}E_N + \frac{1}{2}E_N \subseteq E_N$.

$$\Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{\|z\|\leq 1} \|T_i z\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{\|z\|<\epsilon} \|T_i \frac{z}{\epsilon}\| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{z\in E_N} \frac{1}{\epsilon}\|T_i z\| \leq \frac{N}{\epsilon}$$

□

Bemerkung 9.6

a) Der Satz von Banach-Steinhaus ist nicht konstruktiv d.h. aus $c(x)$ kann man $\sup_{i\in I} \|T_i\|$ nicht herleiten.

b) Die Vollständigkeit von X ist notwendig.

Beispiel
$F \coloneqq \{(x_n)_n : x_n = 0$ für alle, bis auf endlich viele $n\}$ mit $\|\cdot\|_\infty$ und betrachte $T_k(x_n)_n = kx_k$. Dann gilt $\|T_k\| = k$ und $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\| = \infty$, aber

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k(x_n)_n\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|kx_k\| < \infty,$$

da das Supremum nur über endlich viele Werte genommen wird.

Korollar 9.7
Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $(T_n)_{n\geq 1} \subset B(X,Y)$ derart, dass

$$\lim_{n\to\infty} T_n x \eqqcolon y \text{ existiert für alle } x \in X$$

Dann ist $Tx \coloneqq y_x$ linear und $T \in B(X,Y)$.

Beweis
Da sowohl der Limes als auch T_n für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils linear sind, ist T linear.
Insbesondere ist $(T_n x)_{n\geq 1}$ beschränkt; mit Banach-Steinhaus ist also auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow T \in B(X,Y) \text{ mit } \|T\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|$$

□

Frage: $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ in $B(X,Y)$? Nein, nicht im Allgemeinen!

Beispiel
$X = Y = \ell^p$, $T_k(x_n)_n = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots)$

$$\|T_k(x_n)_n - I(x_n)_n\|_{\ell^p} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Aber

$$\|T_k - I\| \geq \|(T_k - I) \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}_{1 \text{ an } k+1-\text{ter Stelle}} \|_{\ell^p} = 1 \not\to 0$$

D.h. punktweise Konvergenz impliziert keine Konvergenz bezüglich der Operatornorm.

10 Satz von der offenen Abbildung

Definition 10.1
Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **offen**, wenn offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden.

Lemma 10.2
Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator, dann sind äquivalent:

a) T ist offen

b) $\exists \epsilon > 0 : K_Y(0, \epsilon) \subset T(K_X(0, 1))$

Beweis
" $\Rightarrow$ " : $T(K_X(0, 1))$ ist offen und $T(0) = 0$.

" $\Leftarrow$ " : Sei $U \subset X$ offen und $x \in U$ beliebig. Nehme ein $\epsilon > 0$, sodass $K_X(x, \epsilon) \subset U$.
Dann ist $T(K_X(x, \epsilon)) \subset T(U)$ und damit auch

$$Tx + \epsilon T(K_X(0, 1)) = Tx + T(K_X(0, \epsilon)) \subset T(U)$$

Nach *b)* $\exists \delta > 0 : K_Y(0, \delta) \subset T(K_X(0, 1))$

$$\Rightarrow \; K_Y(Tx, \epsilon\delta) = Tx + \epsilon K_Y(0, \delta) \subset T(U)$$

Somit ist $T(U)$ offen. □

Satz 10.3 (von der offenen Abbildung)
Seien X, Y Banachräume und $T \in B(X, Y)$, dann gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ offen}$$

Beweis
" $\Leftarrow$ " : Nach Lemma 10.2 $\exists \epsilon > 0 : K_Y(0, \epsilon) \subset T(K_X(0, 1))$

$$\Rightarrow K_Y(0, R) \subset T(K_X(0, \frac{R}{\epsilon})), \; \forall R > 0$$
$$\Rightarrow Y \subset T(X)$$

" $\Rightarrow$ " : Behauptung: $\exists \epsilon > 0 : K_y(0, \epsilon) \subseteq \overline{T(K_X(0, 1))}$.
Beweis: Definiere $E_n := \overline{T(K_X(0, n))}$, dann ist E_n abgeschlossen, symmetrisch und konvex, da Kugeln um 0 symmetrisch und konvex sind und T linear ist.
Nach Voraussetzung ist $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, mit Baire folgt $\exists N \in \mathbb{N}, y \in E_N, \hat{\epsilon} > 0 : K(y, \hat{\epsilon}) \subseteq E_N$.
Sei $z \in Y$ mit $\|z\| < \hat{\epsilon}$ und $z = \frac{1}{2}(z + y) + \frac{1}{2}(z - y) \in E_N$

$$\Rightarrow K_Y(0, \hat{\epsilon}) \subseteq \overline{T(K_X(0, N))} \Rightarrow K_Y(0, \frac{\hat{\epsilon}}{N}) \subseteq \overline{T(K_X(0, 1))} \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung mit } \epsilon = \frac{\hat{\epsilon}}{N}$$

Behauptung: $\exists \delta > 0 : K_Y(0,\delta) \subseteq T(K_X(0,1))$
Beweis: Wenn $\hat{y} \in K_Y(0,\epsilon)$ gibt es ein $\hat{x} \in K_X(0,1)$ mit $\|\hat{y} - T\hat{x}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Außerdem ist $2(\hat{y} - T\hat{x}) \subset K_Y(0,\epsilon)$. Induktiv wählen wir auf diese Art zu $y \in K_Y(0,\epsilon) : y_0 = y, y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k)$ für $k \in \mathbb{N}$.
Es gilt $(y_k) \subseteq K_Y(0,\epsilon)$ und $(x_k) \subseteq K_X(0,1)$, damit folgt

$$T\left(\sum_{k=0}^{N} 2^{-K} x_k\right) = \sum_{k=0}^{N} 2^{-k} y_k - 2^{-(k+1)} y_{k+1} = y_0 2^0 - 2^{-(N+1)} y_{N+1} \qquad (*)$$

Wegen $\| \sum_{k=0}^{N} 2^{-k} x_k \| \leq \sum_{k=0}^{N} 2^{-k} \leq 2$ ist $\left(\sum_{k=0}^{N} x_k\right)_N$ eine Cauchy-Folge mit Grenzwert $x \in K_X(0,2) \subseteq X \overset{(*)}{\Longrightarrow} T(x) = \lim_{N\to\infty} y - 2^{-(N+1)} y_{N+1} = y$.

$$K_Y\left(0,\epsilon\right) \subseteq T\left(K_X(0,2)\right) \Rightarrow K_Y\left(0, \frac{\epsilon}{2}\right) \subseteq T\left(K_X(0,1)\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung für } \delta = \frac{\epsilon}{2}$$

□

Korollar 10.4
Seien X, Y Banachräume und $T \in B(X,Y)$ bijektv, dann ist $T^{-1} \in B(Y,X)$

Beweis
Nach 10.3 ist T offen, d.h. ist $U \subset X$ offen, so ist auch $T(U)$ offen in Y.

$$\Rightarrow T(U) = \left(T^{-1}\right)^{-1}(U) \text{ ist offen.}$$

Somit sind Urbilder offener Mengen offen unter T^{-1} und damit ist T^{-1} stetig. Und da die Inversen linearer Operatoren bekanntlich linear sind, ist $T^{-1} \in B(Y,X)$. □

Korollar 10.5
Sei X ein Vektorraum der sowohl mit $\|\cdot\|$ als auch mit $|||\cdot|||$ ein Banachraum ist. Gilt

$$\exists c > 0 : \|x\| \leq c \cdot |||x|||, \ \forall x \in X,$$

dann sind die Normen äquivalent, d.h. $\exists \hat{c}$ mit $\hat{c} \cdot |||x||| \leq \|x\| \ \forall x \in X \leq c \cdot |||x|||$.

Beweis
Per Voraussetzung ist $I\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ beschränkt, außerdem ist die Einbettung offensichtlich linear und bijektiv. Nach 10.4 ist dann auch die Inverse $I\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ in beschränkt. □

11 Projektionen

Definition 11.1
Sei X ein Banachraum. $P\colon X \to X$ heißt **Projektion**, wenn P linear und $P^2 = P$ ist.

Die Frage die wir uns dabei stellen sollten, lautet: wann ist P beschränkt?

Beispiel 11.2

a) $X = L^p(\mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R} : \mu(\Omega) > 0$, $\mu(\mathbb{R} \setminus \Omega) > 0$

$$Pf := \mathbb{1}_\Omega f \;\Rightarrow\; P^2 f = \mathbb{1}_\Omega^2 f = \mathbb{1}_\Omega f = Pf$$

$\|Pf\|_{L^p} = \left(\int |\mathbb{1}_\Omega f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p} \Rightarrow P$ ist beschränkt.

b) $X = L^p[0,1]^2$, mit $1 \leq p < \infty$

$$Pf(x,y) := \int_0^1 f(s,y)ds \;\Rightarrow\; P^2 f(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 f(s,y)dsdt = \int_0^1 f(s,y)ds = Pf(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\|Pf\|_{L^p} &= \left(\int_0^1 \int_0^1 \left|\int_0^1 f(s,y)ds\right|^p dydx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(s,y)|ds\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\underset{()^p \text{ konvex!}}{\overset{\text{Jensen}}{\leq}} \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(s,y)|^p dsdy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Bemerkung 11.3
Sei X ein Vektorraum, $M \subset X$ ein Untervektorraum. Es gibt nach dem Basisergänzungssatz eine lineare Projektion $P\colon X \to X$, $P(X) = M$

Beweis
Sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von M und $(b_j)_{j \in J}$ von X, mit $I \subset J$.
Nun existiert ein $(\alpha_j(x))_j$:

$$x = \sum_{j \in J} \alpha_j(x) b_j \text{ mit } \alpha_j(x) = 0 \text{ für fast alle } j \in J.$$

$P(x) := \sum_{i \in I} \alpha_i(x) b_i$. □

Erinnerung:
Sind X, Y Banachräume, dann ist auch $X \oplus Y$ ein Banachraum mit $\|(x,y)\|_{X \bigoplus Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ $\forall x \in X, y \in Y$

Satz 11.4
Sei X ein Banachraum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

> a) Es gibt eine stetige Projektion $P\colon X \to X$ mit $P(X) = M$
>
> b) Es gibt einen abgeschlossenen Untervektorraum $N \subset X : X = M \oplus N$.
>
> c) Es gibt einen abgeschlossenen Untervekottraum $N \subset X$ und $J : M \oplus N \to X$, $J(x,y) = x + y$ ist ein Isomorphismus, insbesondere $\exists c > 0\ \forall x \in M, y \in N : c(\|x\| + \|y\|) \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beweis
a) $\Rightarrow$ *b)* Definiere $N = (I - P)(X)$. Dann gilt

$$X = P(X) + (I - P)(X) \text{ und } P(X) \cap (I - P)(X) = \{0\}$$

N ist abgeschlossen, denn $N = \operatorname{Kern} P = P^{-1}\{0\}$ und P ist stetig.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sei N wie in *b)*. $J : M \oplus N \to X$, $J(x,y) = x + y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \|J(x,y)\| \quad \forall x \in M, y \in N \\ &\leq \|x\| + \|y\| \\ &= \|(x,y)\|_{M \oplus N} \end{aligned}$$

Außerdem ist J bijektiv, da $X = M \oplus N \overset{10.5}{\Longrightarrow} J^{-1} \textit{stetig}$, $\exists \hat{c} > 0 : \forall x \in M, y \in N$:

$$\|x + y\| - \|(x,y)\| = \|J^{-1}(x + y)\| \leq \hat{c}\|x + y\|$$

c) $\Rightarrow$ *a)* Definiere $\hat{P}\colon M \oplus N \to M \oplus N$, $\hat{P}(x,y) = (x, 0)$

$$\Rightarrow \hat{P}(M \oplus N) = M \oplus \{0\}. \text{ Setze } P = J\hat{P}J^{-1} \quad (P \text{ ist Projektion!})$$

$P(X) = M$, denn $P(X) = J\hat{P}(M \oplus N) = J(M \oplus \{0\}) = M$ □

Vereinbarung:
M heißt komplementierter Raum, $N = \operatorname{Kern}(P)$ Komplementärraum.

Beispiel

a) $X = L^p(\mathbb{R})\ \Omega \subseteq \mathbb{R}$, $Pf = \mathbb{1}_\Omega f$

$$\begin{aligned} M = P(X) &= \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ fast überall auf } \Omega^c\} \\ N = \operatorname{Kern}(f) &= \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ fast überall auf } \Omega\} \end{aligned}$$

b) $X = L^p([0,1]^2)\ Pf(x,y) = \int_0^1 f(s,y)ds$

$$\begin{aligned} M &= \{f \in L^p([0,1]^2), f \text{ konstant in 1. Komponente}\} \\ N &= \{f \in L^p([0,1]^2) : \int_0^1 f(s,y)ds = 0 \text{ fast überall, } y \in [0,1]\} \end{aligned}$$

Sowohl in *a)* als auch in *b)* gilt $X = M \oplus N$, da P in beiden Fällen stetig ist.

12 Abgeschlossene Operatoren

Sei X ein Banachraum, $D(A)$ ein dichter Untervektorraum und $A : D(A) \to X$ linear

Erinnerung:
Gilt $\|Ax\| \leq c\|x\| \ \forall x \in D(A)$, so lässt sich A zu einem beschränkten Operator $\hat{A} \in B(X)$ fortsetzen.

Beispiel 12.1

a) Sei $X = C[0,1]$, $D(A) = C^1([0,1])$, $Ax = x'$
Behauptung: A ist nicht beschränkt
$\lambda > 0, x_\lambda(t) = e^{i\lambda t} \quad t \in [0,1] \Rightarrow Ax_\lambda(t) = i\lambda e^{i\lambda t}$
$\Rightarrow \|x_\lambda\|_\infty = 1, \ \|Ax_\lambda\|_\infty = \lambda \xrightarrow{\lambda\to\infty} \infty \Rightarrow A$ ist nicht beschränkt auf $D(A)$.

b) $X = L^p[0,1]$, $Bx(t) = \frac{1}{t}x(t)$.

$$D(B) = \{x \in L^p([0,1]) : \exists \epsilon(x), x = 0 \text{ fast überall auf } [0,\epsilon]\}$$

B bildet nach X ab, denn $\|Bx\|_{L^p} = \left(\int_\epsilon^1 t^{-p}|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\epsilon(x)}\|x\|_{L^p}$

z.B.: $x_\lambda = \mathbb{1}_{[\frac{1}{\lambda},1]} \Rightarrow \|x_\lambda\|_{L^p} = \left(\int_{\frac{1}{\lambda}}^1 |x_\lambda(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\frac{1}{\lambda}}^1 dt\right)^{\frac{1}{p}} < 1$

$$\|Bx_\lambda\| = \left(\int_{\frac{1}{\lambda}}^1 t^{-p} dt\right) \xrightarrow{\lambda\to\infty} \infty$$

$\Rightarrow B$ ist unbeschränkt auf $D(B)$.

Beobachtung:

- A, B lassen sich nicht auf X fortsetzen
- Es gibt viele Möglichkeiten $D(A), D(B)$ zu wählen; $D(A) = C^\infty[0,1]$ ist genauso möglich.

Definition 12.2
Auf $D(A)$ definieren wir die **Graphennorm**

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\| \quad \forall x \in D$$

Insbesondere: $A : (D(A), \|\cdot\|_A) \to X$ stetig, denn $\|x\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A$

Satz 12.3
Es sind äquivalent

a) $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ist ein Banachraum

b) $\text{graph}(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$ ist abgeschlossen

c) Wenn $(x_n)_{n\geq 1} \subset D(A) : \begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x & \text{in } X \\ Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y & \text{in } X \end{cases}$ so ist $x \in D(A), Ax = y$

Beweis
a) $\Rightarrow$ *b)* $J : D(A) \to X \times X, J(x) = (x, Ax)$. Dann gilt

$$\|(x, Ax)\|_{X\times X} = \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A \Rightarrow J \text{ ist Isometrie (erhält Vollständigkeit)}$$

$\Rightarrow \operatorname{graph}(A) = \operatorname{Bild}(J)$ ist vollständig $\Rightarrow \operatorname{graph}(A)$ ist abgeschlossen.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sei $(x_n)_n \subset D(A)$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ in X.

$$\Rightarrow (x_n, Ax_n) \xrightarrow{n\to\infty} (x, y) \text{ in } X \times X$$

$\xRightarrow{A \text{ abg.}} (x, y) \in \operatorname{graph}(A) \Rightarrow x \in D(A), Ax = y.$

c) $\Rightarrow$ *a)* Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $D(A)$. Es folgt, dass $(x_n)_n$ und $(Ax_n)_n$ auch Cauchy-Folgen in X sind.
Da X vollständig ist folgt, dass $\exists x, y \in X$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y$

$$\overset{c)}{\Rightarrow} x \in D(A) \text{ und } Ax = y \Rightarrow \|x_n - x\|_A = \|x - x_n\| + \|y - Ax_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$ □

Definition 12.4
A heißt abgeschlossen, wenn *a)* $-$ *c)* aus 12.3 erfüllt sind

Bemerkung 12.5 (Abgeschlossen vs. stetig)

$$\begin{aligned} A \text{ stetig: } x_n &\xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow Ax \xrightarrow{n\to\infty} y, Ax = y \\ A \text{ abgeschlossen: } x_n &\xrightarrow{n\to\infty} x, Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y \Rightarrow Ax = y \end{aligned}$$

Satz 12.6 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)
Ist A abgeschlossen und $D(A) = X$, so ist A stetig auf X.

Beweis
$(X, \|\cdot\|_A)$ und $(X, \|\cdot\|)$ sind Banachräume. Außerdem gilt $\|x\|_X \le \|x\|_A \ \forall x \in X$

$$\xRightarrow{10.5} \exists c > 0 : \|x\|_A \le c\|x\| \forall x \in X$$

$\Rightarrow \|x\| + \|Ax\| \le c\|x\| \ x \in X \Rightarrow \|Ax\| \le c\|x\| \ x \in X \Rightarrow A$ stetig. □

Beispiel 12.7

a) $X = C[0, 1], D(A) = C^1[0, 1], Ax = x'$
Behauptung: A ist abgeschlossen.

Beweis
$\|x\|_A = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty = \|x\|_{C^1}$

$$(D(A), \|\cdot\|_A) = \left(C^1[0, 1], \|\cdot\|_{C^1}\right)$$

$\Rightarrow D(A)$ ist vollständig. □

b) $X = L^p[0,1], Ax(t) = \frac{1}{t}x(t), t \in [0,1]$

$$D_1(A) = \{f \in L^p[0,1] : \exists \epsilon > 0, f = 0 \text{ fast überall auf } [0,\epsilon]\}$$
$$D_2(A) = \{f \in L^p[0,1] : t \to \frac{1}{t}f(t) \in L^p\left([0,1]\right)\}$$

Behauptung: A ist auf D_2 abgeschlossen.

Beweis
$(x_n)_n \subset D_2 : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ in $L^p[0,1]$ und $Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ in $L^p[0,1]$
$\Rightarrow \exists (x_{n_k})_k \subset D_2 : x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x$ fast überall und $Ax_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y$ fast überall.

$$\frac{1}{t}x(t) \leftarrow \frac{1}{t}x_{n_k}(t) = Ax_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y(t) \text{ fast überall für } t \in [0,1]$$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{t}x(t)$ fast überall $\Rightarrow Ax = y, x \in D_2$
Behauptung: A ist nicht abgeschlossen auf D_1
Beweis: $x_n(t) = \begin{cases} t & \text{auf } (\frac{1}{n},1) \\ 0 & \text{auf } [0,\frac{1}{n}] \end{cases}$, $y(t) = 1, \forall t \in [0,1] \Rightarrow x(t) = t,\ t \in [0,1]$

Dann gilt:

$$\|x_n - x\|_{L^p} = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$\|Ax_n - y\|_{L^p} = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} 1dt\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Aber $x \notin D_1 \Rightarrow A$ ist nicht abgeschlossen. $\square$

13 Spektrum und Resolvente

Sei $Y \supset D(A) \to X$ linear, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$(\lambda I - A)x = y \quad (*)$$

Problem: Gegeben $y \in X$ finde $x \in D(A)$ so, dass $(*)$ erfüllt ist. Formel: $x = (\lambda I - A)^{-1}y$ ist Lösung, falls $(\lambda I - A)^{-1}$ existiert.

Definition 13.1
Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $A\colon X \supset D(A) \to X$ linear und abgeschlossen.

a) $\lambda \in \mathbb{C}$ gehört zur **Resolventenmenge** von A, $\lambda \in \rho(A)$, falls

$$\lambda I - A\colon D(A) \to X \text{ bijektiv, d.h. } (\lambda I - A)^{-1}\colon X \to D(A) \text{ linear}$$

b) $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt **Spektrum** von A

c) $\lambda \in \rho(A) \to R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ heißt **Resolventenfunktion** von A

Erinnerung:
A abgeschlossen $\iff$ $(x_n)_n \subset D(A) : \begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x & \text{in } X \\ Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y & \text{in } X \end{cases}$, so ist $x \in D(A), Ax = y$

Bemerkung 13.2
Sei A abgeschlossen, falls $\lambda \in \rho(A)$, so ist $R(\lambda, A) \in B(X)$ und $R(\lambda, A)\colon X \to (D(A), \|\cdot\|_A)$ ein Isomorphismus.

Beweis
$(\lambda - A) : (D(A), \|\cdot\|_A) \to A$ ist bijektiv und stetig, denn $\|(\lambda - A)x\| \leq \max(1, |\lambda|)(\|x\| + \|Ax\|) = c\|x\|_A$
Nach dem Satz der offenen Abbildung ist

$$R(\lambda, A) : X \to (D(A), \|\cdot\|_A)$$

ein Isomorphismus, $X \xrightarrow{R(\lambda,A)} (D(A), \|\cdot\|_A) \subset X$, also $R(\lambda, A) \in B(X)$. □

Beispiel 13.3

a) $X = \mathbb{C}^d, A \in B(X) \;\hat{=}\; M(d, d)$

$$\sigma(A) = \{\lambda \text{ Eigenwerte von A}\}$$

b) Sei $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $X = \ell^p, 1 \leq p < \infty, A(x_n) = (\alpha_n x_n)$, $(x_n) \in D(A) = \{(x_n) : \sum_{n\geq 1} |\alpha_n x_n|^p < \infty\}$.
Falls (α_n) beschränkt ist, dann ist $D(A) = \ell^p, A \in B(\ell^p)$.
Für allgemeine $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ ist A nur abgeschlossen (Übung).
Dann ist $\sigma(A) = \overline{\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}}^c$, da $A(e_n) - \alpha_n(e_n) = 0$ (e_n n-ter Einheitsvektor)

Beweis: $(\lambda I - A)(x_n) = ((\lambda - \alpha)x_n)$
Formal: $(\lambda I - A)^{-1}(x_n) = ((\lambda - \alpha_n)^{-1}x_n)$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \underset{\text{Übung}}{=} \sup_n |\lambda - \alpha_n|^n = \frac{1}{d(\lambda, \overline{(\alpha_n)})} < \infty \iff d(\lambda, \overline{(\alpha_n)}) > 0$$
$$\iff \lambda \notin \overline{(\alpha_n)}$$

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A) \iff \lambda \in \overline{\{\alpha_n\}}, \ \lambda \in \sigma(A) \iff \lambda \in \overline{(\alpha_n)}$

Folgerung: Jede abgeschlossene Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ kann das Spektrum eines abgeschlossenen Operators sein. Insbesondere: $\sigma(A)$ kann überabzählbar sein. Das Spektrum $\sigma(A)$ besteht im Allgemeinen nicht nur aus Eigenwerten.

Beweis
Gegeben $M \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, wähle dichte Folge $\alpha_n \in M$, d.h. $\overline{\{\alpha_n\}} = M$
Wähle $X = \ell^p$, $A(x_n) = (\alpha_n x_n)$, $\sigma(A) = \overline{\{\alpha_n\}} = M$. □

Falls $\lambda \in \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ dann ist λ kein Eigenwert von A.

c) Sei $X = \ell^p$, e_n Einheitsvektoren.

$$A(e_1) = 0, A(e_n) = e_{n-1}, n > 1 \Rightarrow A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_2, x_3, \dots)$$

$$B(e_n) = e_{n+1}, n \geq 1 \Rightarrow B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Übung: $\sigma(A) = \sigma(B) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$

Satz 13.4 (Resolventendarstellung)
Sei $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ abgeschlossen, X ein Banachraum.
Für $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$ ist auch

$$\lambda \in \rho(A) \text{ und } R(\lambda, A) = \sum_{n \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}.$$

Insbesondere ist $\rho(A)$ offen und $\sigma(A)$ abgeschlossen.

Beweis

$$\begin{aligned}(\lambda - A) = (\lambda_0 + \lambda) + (\lambda_0 - A) &= (\lambda_0 - A)\left[I - (\lambda_0 - \lambda) R(\lambda_0, A)\right] \\ &= (\lambda_0 - A)(I - S) \quad \text{ mit } S = (\lambda_0 - \lambda) R(\lambda_0, A)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|S\| \leq |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, A)\| \overset{Vor.}{<} 1$. Nach dem Satz über die Neumannsche Reihe: $(I - S)^{-1} = \sum_{n \geq 0} S^n$

Dann ist $(\lambda - A)$ ein Produkt von invertierbaren Operatoren $(\lambda_0 - A)$ und $(I - S)$, d.h.

$$\begin{aligned}(\lambda - A)^{-1} &= (I - S)^{-1} (\lambda_0 - A)^{-1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \underbrace{(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^n}_{= S^n} R(\lambda_0, A) \\ &= \sum_{n \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}\end{aligned}$$

□

Satz 13.5 (Resolventengleichung)
Sei A ein abgeschlossener Operator auf X. Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt:

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

Insbesondere ist $\lambda \in \rho(A) \to R(\lambda, A) \in B(X)$ eine komplex differenzierbare Abbildung und

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2$$

Beweis

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= R(\lambda, A)\left[I - (\lambda - A) R(\mu, A)\right] \\ &= R(\lambda, A)\left[\mu - A - \lambda + A\right] R(\mu, A) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung. (Idee: $\frac{1}{\lambda - a} - \frac{1}{\mu - a} = \frac{\mu - \lambda}{(\lambda - a)(\mu - a)}$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R(\lambda, A) &= \lim_{\mu \to \lambda} \frac{R(\mu, A) - R(\lambda, A)}{\mu - \lambda} \\ &\overset{s.o.}{=} \lim_{\mu \to \lambda} \left[-R(\lambda, A) R(\mu, A)\right] \\ &= -R(\lambda, A)^2, \text{ denn } \lambda \in \rho(A) \to R(\lambda, A) \in B(X) \text{ ist stetig als Potenzreihe.} \end{aligned}$$ □

Satz 13.6
Falls $A \in B(X)$, dann ist $\sigma(A)$ nichtleer und kompakt mit $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|A\|\}$

$$\text{Für } \lambda > \|A\| \text{ gilt: } R(\lambda, A) = \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} A^n$$

Beweis
Für $|\lambda| > \|A\|$ gilt: $\lambda - A = \lambda[I - S]$ mit $S = \frac{A}{\lambda}, \|S\| \leq \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$ nach Voraussetzung.
Nach Neumann:

$$(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\lambda - A)^{-1} &= \lambda^{-1}[I - S]^{-1} \\ &= \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n \end{aligned}$$

Also: $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|A\|\}, \sigma(A)$ beschränkt, abgeschlossen $\Rightarrow \sigma(A)$ kompakt.
Wir müssen noch zeigen, dass $\sigma(A) \neq \emptyset$.
Nach Bemerkung 8.7 gibt es in jedem Banachraum X $x \in X, x' \in X'$ mit $x'(x) \neq 0$ $(*)$
Indirekter Beweis für $\sigma(A) \neq \emptyset$.
Annahme $\sigma(A) = \emptyset$ bzw. $\rho(A) = \mathbb{C}$
$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \to r(\lambda) = x'[R(\lambda, A)x] \in \mathbb{C}$ mit x, x' wie in $(*)$.
$r(\lambda)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$, denn lokal gilt:

$$r(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \underbrace{x'[R(\lambda, A)x]}_{\in \mathbb{C}}, \quad |\lambda - \lambda_0| \overset{13.4}{<} \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$$

Wir definieren $\Gamma = \{\lambda : |\lambda| = 2\|A\|\}$.
Nach dem Cauchischen Integralsatz: $0 = \int_\Gamma r(x) d\lambda$

$$\lambda \in \Gamma, |\lambda| > \|A\|, R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$$

$$\Rightarrow r(\lambda) = x'(R(\lambda, A)x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x'(A^n x)$$

Dann ist $0 = \int_\Gamma r(\lambda) d\lambda = \int_\Gamma \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x'(A^n x)\right] dx$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\int_\Gamma \lambda^{-n-1} d\lambda\right]}_{=0, \text{ für } n>0, =2\pi i, \text{ für } n=0} x'(A^n x)$$

$\Rightarrow \sigma(A) \neq \emptyset$. □

Bemerkung 13.7
Für $X = L^p(\Omega)$ ist $(*)$ erfüllt. $x \in L^p(\Omega), x \neq 0, x'(w) = |x(w)|^{p-1} \operatorname{sign}(w), w \in \Omega$
Dann ist

$$x'(x) = \int |x(w)|^p dw \neq 0, x' \in L^{p'}, \int |x'|^{p'} dw = \int |x(w)^{(p-1)p'} dw$$

Allgemein folgt $(*)$ aus dem Satz von Hahn-Banach.

Definition 13.8
Für $A \in B(X)$ heißt $r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ der **Spektralradius** von A.

Satz 13.9
Für $A \in B(X)$ ist

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Satz
Hilfssatz: Ist $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ mit $0 \leq a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m$, für alle $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n^{\frac{1}{n}} =: a$$

Beweis
Beweis des Hilfssatzes:
Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $(a_N)^{\frac{1}{N}} \leq a + \epsilon$. Setze $b = b(\epsilon) = \max\{a_1, \dots, a_N\}$.
Jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich schreiben als $n = k \cdot N + r, k \in \mathbb{N}, r \in \{1, \dots, N-1\}$.
Damit folgt:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = a_{kN+r}^{\frac{1}{n}} \leq (a_N^k a_r)^{\frac{1}{n}} \leq (a+\epsilon)^{\frac{kN}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a+\epsilon)(a+\epsilon)^{-\frac{r}{n}} b^{\frac{1}{n}} < a + 2\epsilon \text{ für } n \text{ groß genug.}$$

Beweis von 13.9:
Definiere $a_n := \|A^n\|$, dann erfüllt a_n:

$$a_{n+m} = \|A^{n+m}\| = \|A^n A^m\| \leq \|A^n\| \cdot \|A^m\| = a_n \cdot a_m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Nach 13.6 gilt für $\left|\frac{1}{\lambda}\right| > \|A\|$ die Darstellung: $R(\frac{1}{\lambda}, A) = \sum_{n\geq 0} \lambda^{n+1} A^n (*)$
Nach dem Wurzelkriterium konvergiert diese Reihe falls $\overline{\lim}_{n\to\infty} \|\lambda^{n+1} A^n\|^{\frac{1}{n}} = |\lambda| \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$, d.h. $|\lambda| < \left[\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}\right]^{-1}$

$$\Rightarrow R(\frac{1}{\lambda}, A) \in B(X) \text{ für } |\frac{1}{\lambda} > \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Also $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| < \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}\}, \quad r(A) \leq \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$.

Wie in der Funktionentheorie zeigt man, dass wegen $(*)$ $R(\lambda, A)$ im größten Kreis, der zum Holomorphie-Gebiet von $\frac{1}{\lambda} \in \rho(A) \to R(\frac{1}{\lambda}, A)$ gehört, dort als die Potenzreihe in $(*)$ dargestellt werden kann.
Also $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A)$ □

Im Allgemeinen gilt $r(A) < \|A\|$.

Beispiel 13.10
Sei $X = C[0,1]$ und $Q = \{(s,t) \in [0,1]^2 : s \leq t\}$, betrachte $k : Q \to \mathbb{R}$ stetig.
Wir definieren einen Volterraoperator $V : C[0,1] \to C[0,1]$ durch

$$(Vx)(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)ds, t \in [0,1], x \in C[0,1]$$

Behauptung: $V \in B(C[0,1])$, $\|V\| = \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t k(t,s)ds \geq 0$ und $r(V) = 0$, $\sigma(V) = \{0\}$, d.h.

$(\lambda - v) \cdot x = y$ besitzt für alle $y \in C[0,1]$ und $\lambda \neq 0$ eine eindeutige Lösung $x = (\lambda - A)^{-1} y \in C[0,1]$

Beweis
$\|Vx\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t k(t,s)x(s)ds \leq \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} \int_0^t k(t,s)ds}_{=:K} \|x\|_\infty \Rightarrow \|V\| \leq K$

$$\|\mathbb{1}\|_\infty = 1, \quad \|V\mathbb{1}\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t k(t,s)ds \quad \Rightarrow \quad \|V\| = K$$

Wir müssen zeigen, dass $r(V) = \lim_{n\to\infty} \|V^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$. V^n hat die Form

$$V^n x(t) = \int_0^t k^n(t,s)x(s)ds$$

mit

$$\begin{aligned}
\left(V^{n+1}x\right)(t) = V\left(V^n x\right)(t) &= \int_0^t k(t,s)\left(V^n x\right)(s)ds \\
&= \int_0^t k(t,s)\left(\int_0^s k^{(n)}(s,u)x(u)du\right)ds \\
&\overset{Fubini}{=} \int_0^t \left(\int_u^t k(t,s)k^{(n)}(s,u)ds\right)x(u)du \\
&\overset{!}{=} \int_0^t k^{(n+1)}(t,u)x(u)du, \text{ d.h. } k_{(n+1)}(t,u) = \int_u^t k(t,s)k^{(n)}(s,u)ds
\end{aligned}$$

Damit haben wir V^n als Integraloperator dargestellt und die Kerne von V^{n+1} und V^n in Beziehung gesetzt. Es gilt

$$k^{(n)}(t,s) \leq \frac{M^n}{(n-1)!}|t-s|^{n-1}$$

wobei $M = \sup\{k(t,s) : (s,t) \in a\}$.

Über vollständige Induktion erhalten wir:

$n = 1 : k^{(1)}(t,s) \leq M.$

$n \to n+1$: $k^{(n+1)}(t,u) = \int_u^t k(t,s)k^{(n)}(s,u)ds \leq M\int_u^t \frac{M^n}{(n-1)!}|s-u|^{n-1}ds = M^{n+1}\frac{1}{n!}|t-s|^n$

Es gilt für $x \in C[0,1]$: $\left(V^n x\right)(t) = \int_0^t k^{(n)}(t,s)x(s)ds \leq \frac{M^n}{(n-1)!}\int_0^t |t-s|^{n-1}|x(s)|ds \leq \frac{M^n}{(n-1)!}\|x\|_\infty$, $t \in [0,1]$

$$\Rightarrow \ \|V^n\| \leq \frac{M^n}{(n-1)!} \quad \Rightarrow \ 0 \leq r(A) = \lim_{n\to\infty}\|V^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{M}{((n-1)!)^{\frac{1}{n}}} = 0$$

da für n ungerade $(n-1)! \geq \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$. □

14 Das Spektrum kompakter Operatoren

Sei X ein Banachraum, $T \in B(X)$. Spezialfall: $\dim X < \infty$

Grundlegende Aussagen zur Lösungstheorie linearer Gleichungen:

$$\lambda x = Tx = y \quad (*)$$

i) Für ein festes $\lambda \in \mathbb{C}$ hat $(*)$ für $y \in X$ eine (eindeutig bestimmte) Lösung genau dann, wenn $\lambda x - Tx = 0$ nur die triviale Lösung hat (folgt aus der Dimensionsformel).

ii) Bis auf endlich viele Eigenwerte $\lambda \in \sigma(T)$ hat $(*)$ stets eine eindeutig bestimmte Lösung.

Idee: Kompakte Operatoren lassen sich durch endlich dimensionale Operatoren "approximieren".

Ziel:

- i) bleibt richtig! (Variante der Fredholm Alternative)
- Die Ausnahmemenge in ii) besteht zwar nicht mehr nur aus endlich vielen Eigenwerten, aber höchstens eine Nullfolge von Eigenwerten der $\{0\}$

Satz 14.1
Sei X ein Banchraum, $K \in K(X)$ (d.h. $K \in B(X)$ kompakt bzw. $K(U_X)$ ist relativ kompakt in X), dann hat $I - K$ ein abgeschlossenen Bildraum und

$$\dim \operatorname{Kern}(I-K) = \operatorname{codim}(I-K)(X) \, [= \dim {}^{X}/_{(I-K)(X)}] < \infty$$

Insbesondere: $I - K$ injektiv $\iff$ $I - K$ surjektiv

Beweis
Wir setzen weiter voraus, dass ein endlich dimensionaler Operator $F \in B(X)$ existiert, mit $\|K - F\| < 1$. $\square$

Lemma 14.2
Zu jedem endlich dimensionalen $F \in B(X)$ ($\dim F(X) < \infty$) gibt es eine Zerlegung

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad \dim X_1 < \infty \quad \text{und} \quad F(X_1) \subset X_1, \quad F|_{X_0} = 0$$

Beweis
Beweis des Lemmas 14.2:
Wähle $Y \subseteq X, \dim Y < \infty$ so, dass $F(Y) = F(X)$. Setze $X_1 = Y + F(X), \dim(X_1) < \infty$

$\Rightarrow X = X_1 + \operatorname{Kern}(F)$, denn zu jedem $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $F(x) = F(y)$, also $x = y+z$ mit $z = x-y \in$

also $F(z) = F(x) - F(y) = 0$, da $X_1 \cap \operatorname{Kern}(F)$ ein endlicher Teilraum von $\operatorname{Kern}(F)$ ist. Dann gibt es einen abgeschlossenen Teilraum $X_0 \subset \operatorname{Kern}(F)$ mit

$$\operatorname{Kern}(F) = (X_1 \cap \operatorname{Kern}(F)) \oplus X_0 \Rightarrow X = X_0 \oplus X_1, F(X_1) \subset F, \text{ da } F(X) = X_1.$$

Beweis von Satz 14.1:

a) Sei K ein endlich dimensionaler Operator auf $X \overset{14.2}{\Longrightarrow}$ Es existiert eine Zerlegung $X = X_0 \oplus X_1$ mit X_0, X_1 abgeschlossen und $K(X_1) \subseteq X_1, K|_{X_0} \equiv 0, \dim(X_1) < \infty$. Definiere $K_1 := K|_{X_1}$, nach der Dimensionsformel der Linearen Algebra gilt:

$$\dim(\mathrm{Kern}(Id_{X_1} - K_1) = \dim(X_1) - \dim(K_1(X_1)) = \mathrm{codim}_{X_1}(K_1(X_1)) \quad (*)$$

Mit

(1) $\mathrm{Kern}(Id_X - K) = \mathrm{Kern}(Id_{X_1} - K_1)$,

(2) $\mathrm{Bild}(Id_X - K) = \mathrm{Bild}(Id_{X_1} - K_1) \oplus X_0$ und

(3) $\mathrm{Bild}(Id_X - K)$ ist abgeschlossen in X

folgt die Behauptung aus $(*)$.

Zu (1): Schreibe $x \in X$ als $x = x_0 + x_1 \in X_0 \oplus X_1$
" $\supseteq$ " Klar, da $K_1 = K|_{X_1}$
" $\subseteq$ " $0 = (Id - K)x = (Id - K)x_1 + x_0 + \underbrace{Kx_0}_{=0} \Rightarrow x_0 = K_1x_1 - x_1 \in X_1 \cap X_0 = \{0\}$

$$\Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow K_1x_1 - x_1 = 0, \text{ also } x_1 \in \mathrm{Kern}(Id - K_1) \Rightarrow \mathrm{Kern}(Id - k) \subset \mathrm{Kern}(Id - K_1)$$

Zu (2): $\mathrm{Bild}(Id - K) \ni (Id - K)x = (Id - K)x_1 + x_0 - \underbrace{Kx_0}_{=0} \in \mathrm{Bild}(Id - X_1) \oplus X_0$

Zu (3): Sei $(x_n) \subseteq \mathrm{Bild}(Id - K)$ mit $x_n \to x \in X$. Da $\mathrm{Bild})Id - K) = \mathrm{Bild}(Id_{X_1} - K_1) \oplus X_0$, schreibe $x_n = y_n + z_n$ mit $z_n \in \mathrm{Bild}(Id_{X_1} - K_1), y_n \in X_0$.
Nach Satz 11.4 gilt für $z \in \mathrm{Bild}(Id - K_1), y \in X_0$ für ein $C \in \mathbb{R}$

$$\|z\| + \|y\| \geq \|z + y\| \geq \frac{1}{c}(\|z\| + \|y\|) \Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{c}(\|z_n - z_m\| + \|y_n - y_m\|)$$

$\Rightarrow (y_n), (z_n)$ sind Cauchy-Folgen.
Da $(Id - K_1)(X)$ und X_0 abgeschlossen sind, folgt $y_n \to y \in X_0$ und $z_n \to z \in \mathrm{Bild}(Id - K_1) \Rightarrow x = z + y \in Bild(Id - K_1) \oplus X_0 = \mathrm{Bild}(Id - K)$.

b) Sei $F \in B(X)$ endlich dimensional mit $\|K - F\| < 1$. $T := Id - K + F$ ist invertierbar nach dem Satz über die Neumannsche Reihe.

$$\Rightarrow Id - K = T - F = (Id - FT^{-1})T \text{ mit } FT^{-1} \text{ endlich dimensional.}$$

Da T invertierbar ist, gilt insbesondere

$$\mathrm{Bild}(Id - K) = \mathrm{Bild}(Id - FT^{-1}) \text{ und } \mathrm{Kern}(Id - K) = T^{-1}(\mathrm{Kern}(Id - FT^{-1}))$$

$$\Rightarrow \dim(Id - K) = \dim(\mathrm{Kern}(Id - FT^{-1})) \text{ und } \mathrm{codim}(\mathrm{Bild}(Id - K)) = \mathrm{codim}(\dim(Id - FT^{-1}))$$

Anwenden von (a) auf den endlich dimensionalen Operator FT^{-1} liefert die Behauptung.
□

Satz 14.3
Sei $dim X = \infty$, $K \in B(X)$ kompakt, dann ist $0 \in \sigma(K)$ und $\sigma(K)$ ist endlich oder besteht aus einer Nullfolge.
Jedes $\lambda \in \sigma(K), \lambda \neq 0$ ist ein Eigenwert mit endlich dimensionalem Eigenraum.

Beweis
Wäre $0 \in \rho(K)$ dann wäre $I = \underbrace{K}_{kompakt} \underbrace{K^{-1}}_{beschr.}$ kompakt.
$\Rightarrow$ Einheitskugel kompakt $\underset{6.2}{\Longrightarrow} \dim X < \infty$. Widerspruch.
$\Rightarrow 0 \in \sigma(K)$.

Sei $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, dann gilt nach 14.1 $\dim \operatorname{Kern}(I - \lambda^{-1}K) = \operatorname{codim} \operatorname{Bild}(I - \lambda^{-1}K) \quad (*)$
Entweder ist $I - \lambda^{-1}K$ nicht injektiv oder nicht surjektiv (da $\lambda \in \sigma(K)$).
Nach $(*)$ ist in jedem Fall $\operatorname{Kern}(I - \lambda^{-1}K) \neq \{0\}$, d.h. in jedem Fall ist λ ein Eigenwert mit endlich dimensionalem Eigenraum $\operatorname{Kern}(I - \lambda^{-1}K)$.
Zu zeigen bleibt noch, dass für alle $\epsilon > 0$ liegen in $\{\lambda : |\lambda| \geq \epsilon\}$ höchstens endlich viele Spektralwerte.
Indirekter Beweis: Zu $\epsilon > 0$ gibt es eine Folge von verschiedenen Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, wobei $|\lambda_n| \geq \epsilon$, mit zugehörigen Eigenvektoren $(u_n)_{n\geq 1}$.
Setze $U_n = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_n), U_{n-1} \subsetneq U_n$, denn Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
Nach dem Lemma von Riesz 6.3 gibt es Vektoren $u_n \in U_n$ mit $\|u_n\| = 1, \|u_n - x\| \geq \frac{1}{2}$, für alle $x \in U_{n-1}$.
Sei $m < n : Ku_n - Ku_m = \lambda_n(v_n - x)$ mit $x = \lambda_n^{-1}(\lambda_n u_n - Ku_n + \underbrace{Ku_m}_{\in U_{m-1}, \text{ s.u.}})$

$K(U_n) \subset U_n$, d.h. $Ku_m \in U_m \subset U_{n-1}, m < n$ mit $u_m \in U_m$
Weiter kann man $u_n \in U_n$ schreiben als $u_n = \alpha u_n + y, y \in U_{n-1}, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_n u_n - Ku_n &= \alpha u_n + \lambda_n y - K(\alpha u_n) - K(y) \\ &= \alpha \lambda_n u_n - \alpha \lambda_n u_n + \lambda_n y - K(y) \in U_{n-1} \end{aligned}$$

Also $x \in U_{n-1}, \|Ku_n - Ku_m\| = |\lambda_n| \underbrace{\|u_n - x\|}_{\geq \frac{1}{2}} \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m$

d.h. Ku_n hat keine Cauchy-Teilfolge, was ein Widerspruch ist zu $K \in K(X)$. □

Beispiel 14.4

a) $X = \ell^p, 1 \leq p < \infty$. Gegeben $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, |\lambda_n| \to 0 :$

$$A(x_n) = (\lambda_n x_n) \text{ für } (x_n) \in \ell^p$$

Da $|\lambda_n| \to 0$ gilt, ist $A \in K(\ell^p)$ $(A\,(U_{\ell^p})$ kompakt).

- λ_n sind Eigenwerte mit endlich dimensionalem Eigenraum $\operatorname{span}\{e_m : \lambda = \lambda_m\}$
- $0 \in \sigma(A)$ ist aber kein Eigenwert, da A injektiv ist.

b) Sei $X = C[0,1]$, $k : \{(s,t) \in [0,1]^2 : s \leq t\} \to \mathbb{R}_+$ stetig.
Volterraoperator: $Vx(t) = \int_0^t k(t,s)x(s)ds$ kompakt.

Nach 13.10 $\sigma(V) = \{0\}$. Falls z.B. $k(s,t) \equiv 1$ ist 0 kein Eigenwert, da

$$Vx(t) = \int_0^t x(s)ds \overset{!}{=} 0 \cdot x(t)$$

$\Rightarrow x(t) = 0, t \in [0,1]$, d.h. V ist injektiv.

Satz 14.5
Sei $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ ein abgeschlossener, linearer Operator, $\rho(A) \neq \emptyset$, $(D(A), \|\cdot\|_A) \hookrightarrow X$ kompakt.
Dann besteht $\sigma(A)$ aus endlich vielen Eigenwerten oder einer Folge von Eigenwerten mit $|\lambda_n| \to \infty$ und die zugehörigen Eigenräume sind endlich dimensional.

Beweis
siehe Übung. $\square$

Operatoren auf Hilberträumen

15 Hilberträume

Definition 15.1
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$$

heißt **Skalarprodukt**, falls für $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(S1) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$

(S2) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$

(S3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(S4) $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

Proposition 15.2
Sei X ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

a) Für $x, y \in X$ gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

b) $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ definiert eine Norm auf X. Insbesondere gilt: $\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Bemerkung

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \quad (*)$$

Beweis
a) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle$$

Für $\lambda := -\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ folgt:

$$0 \leq \langle x, y\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}$$

$$\iff 0 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \Rightarrow \text{Behauptung } a)$$

b) $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$ folgt aus $(S4)$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle \overset{(S1),(S2)}{=} \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Damit ist auch $(*)$ gezeigt.

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$
$$\overset{a)}{=} (\|x\| + \|y\|)^2$$

$\Rightarrow$ Die Dreiecksungleichung gilt für $\|\cdot\|$. □

Bemerkung 15.3
Man kann aus der in *b)* definierten Norm das Skalarprodukt zurückgewinnen durch:

$$\text{Falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$
$$\text{Falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

Definition 15.4
Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **Prä-Hilbertraum**, falls es ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $X \times X$ gibt mit

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Falls $(X, \|\cdot\|)$ außerdem noch vollständig ist, dann heißt X ein **Hilbertraum**.

Beispiel 15.5

a) $\mathbb{C}$ mit $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ für $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{C}^n$

$$\|x\| = \left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

b) $X = \ell^2, x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2, y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{ß\in\mathbb{N}} x_i\overline{y_i}, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$X = \ell^p$ ist kein Hilbertraum für $n \neq 2$ (Übung).

c) $X = C(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen

$$\langle x,y\rangle = \int_\Omega x(u)\overline{y(u)}du$$

Dann ist $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein Prä-Hilbertraum, aber nicht vollständig.
$(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein Hilbertraum, da vollständig.

Bemerkung
$L^p(\Omega)$ ist kein Hilbertraum für $n \neq 2$.

Satz 15.6
Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Prä-Hilbertraum, falls die sogenannte **Prallelogramm-Gleichung** gilt, d.h.

$$\forall x, y \in X: \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (P)$$

Beweis
Nehmen wir an $(X, \|\cdot\|)$ sei ein Prä-Hilbertraum $\Rightarrow$ (P) gilt (einfaches nachrechnen mit $(*)$).
Angenommen es gilt (P) und sei o.B.d.A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (der Fall $\mathbb{C}$ absolut analog)

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Überprüfe die Eigenschaften des Skalarproduktes:

i) Zu zeigen: $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2\right) \quad (1)$$

$$\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2\right) \quad (2)$$

Wir müssen also zeigen, dass (1) = (2).
Nach (P) folgt:

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 = 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 - x_2 + y\|^2$$
$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 = 2\|x_2 + y\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|-x_1 + x_2 + y\|^2$$

Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$\|x_1+x_2+y\|^2 = \|x_1+y\|^2+\|x_2\|^2+\|x_2+y\|^2+\|x_1\|^2-\frac{1}{2}\left(\|x_1 - x_2 + y\|^2 + \|-x_1 + x_2 + y\|^2\right)$$

Ersetze y durch $(-y)$:

$$\|x_1+x_2-y\|^2 = \|x_1-y\|^2+\|x_2\|^2+\|x_2-y\|^2+\|x_1\|^2-\frac{1}{2}\left(\|x_1 - x_2 - y\|^2 + \|-x_1 + x_2 - y\|^2\right)$$

Subtrahieren der letzten beiden Zeilen liefert damit:

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 = \|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2$$

Dividieren durch 4 liefert gerade die Behauptung.

ii) klar, da $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mit $\langle x, x\rangle = \|x\|$.

iii) Aussage $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle$ gilt falls $\lambda \in \mathbb{N}$ (nach $(S1)$)
Nach Definition okay für $\lambda = 0, \lambda = -1$ und damit auch für $\lambda \in \mathbb{Z}$ Für $\lambda \in \mathbb{Q}$, setze $\lambda = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$$n\langle \lambda x, y\rangle = \langle n\lambda x, y\rangle = \langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle$$
$$\langle \lambda x, y\rangle = \frac{m}{n}\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{Q}$$

$\lambda\colon \mathbb{R} \to \langle \lambda x, y\rangle, \lambda\colon \mathbb{R} \to \lambda\langle x, y\rangle$ sind stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$, die auf dichten Teilmenge von $\mathbb{Q}$ übereinstimmen. $\square$

Satz 15.7 (Beste Approximation)
Sei X ein Hilbertraum und K eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von X.

a) Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y_0 \in K$ so, dass

$$\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in K\}$$

b) Dieses $y_0 \in K$ ist charakterisiert durch die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\langle x - y_0, y - y_0\rangle \leq 0 \quad (w)$$

Beweis

a) Da die Aussage invariant ist gegenüber von Translationen, sei o.B.d.A. $x = 0$ und $0 \notin K$.

Existenz: Setze $d := \inf\{\|y\| : y \in K\}$
Wähle eine Folge $y_n \in K$ mit $\lim_n \|y_n\| = d$; wir wollen zeigen, dass dann (y_n) eine Cauchy-Folge in X ist.
Da K konvex ist, gilt $\frac{y_n+y_m}{2} \in K : \|\frac{y_n+y_m}{2}\| \geq d$. Mit (P) folgt:

$$d^2 \leq \|\frac{y_n + y_m}{2}\|^2 + \|\frac{y_n - y_m}{2}\|^2 \overset{(P)}{=} \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} d^2$$

Also $\|y_n - y_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, d.h. (y_n) ist eine Cauchy-Folge, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ existiert in X und $y_0 \in K$, da K abgeschlossen ist.
Demnach $y_0 \in K, \|y_0\| = \lim_n \|y_n\| = d = \inf\{\|y\| : y \in K\}$.

Eindeutigkeit: Seien $y_1, y_2 \in K$, $\|y_1\| = \|y_2\| = d, y_1 \neq y_2$
Mit (P) gilt:

$$\left|\frac{y_0 + y_1}{2}\right|^2 < \left|\frac{y_0 + y_1}{2}\right|^2 + \left|\frac{y_0 - y_1}{2}\right|^2 \overset{(P)}{=} \frac{1}{2}\|y_0\|^2 + \frac{1}{2}\|y_1\|^2 = d^2$$

Also $\frac{y_0+y_1}{2} \in K$ und $\|\frac{y_0+y_1}{2}\| < d$, was ein Widerspruch zur Definition von D ist

Vereinbarung:
Das Element $y_0 \in K$ im Satz heißt das **Element bester Approximation** von x zu K.

b) Annahme: $y_0 \in K$ erfüllt die Ungleichung.

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 \\ &= \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\langle x - y_0, y_0 - y\rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \|x - y_0\|^2\end{aligned}$$

Also ist y_0 das Element bester Approximation.

Sei umgekehrt y_0 das Element bester Approximation und $y \in K$.
Für $t \in (0,1)$ setze $K \ni y_t = (1-t)y_0 + ty$.

$$\begin{aligned}\|x-y_0\|^2 &\leq \|x-y_t\|^2 \\ &= \langle x-y_0+t(y_0-y), x-y_0+t(y_0-y)\rangle \\ &= \|x-y_0\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x-y_0, t(y_0-y)\rangle + t^2\|y_0-y\|^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{Re}\langle x-y_0, y-y_0\rangle \leq \frac{t}{2}\|y_0-y\|^2$ für $t \in (0,1)$. Für $t \to 0$ folgt die Ungleichung. □

Bemerkung 15.8 (Winkel zwischen Vektoren)
Seien $u, v \in H \setminus \{0\}$ und definiere entsprechend $u_1 = \frac{u}{\|u\|}, v_1 = \frac{v}{\|v\|}$.

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} = |\langle u_1, v_1\rangle| = \cos(\alpha), \text{ wobei } \alpha \in [0,\pi) \text{ eindeutig gewählt.}$$

16 Orthogonalität und Orthonormalbasen

Definition 16.1
Sei X ein Prähilbertraum

a) $x, y \in X$ heißen **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$. Schreibweise: $x \perp y$

b) $A, B \subseteq X$ sind orthogonal, falls $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $x \in A, y \in B$. Schreibweise $A \perp B$

c) Sei $A \subset X$. $A^\perp = \{y \in X : \langle y, x\rangle = 0 \ \forall x \in A\}$ ist das **orthogonale Komplement** von A in X.

Bemerkung 16.2

a) $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pythagoras)

b) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

c) $A^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Unterraum von X

d) $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$, $A^\perp = \overline{\operatorname{span}(A)}^\perp$

Satz 16.3 (Orthogonalzerlegung)
Sei X ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Teilraum von X.

$$\text{Dann gilt: } X = U \oplus U^\perp$$

Beweis
Falls $x \in U \cap U^\perp$, dann $x \perp x \Rightarrow x = 0$. Sei $x \in X$, dazu gibt es eine Element bester Approximation $x_1 \in U$, setze $x_2 := x - x_1$.
Zu zeigen ist $x_2 \in U^\perp$
Nach (w) gilt für alle $y \in U$: $\operatorname{Re}\langle x_2, y - x_1\rangle \leq 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\langle x_2, y\rangle \leq 0 \ \forall y \in U$, denn mit y durchläuft auch $y - x_1$ ganz U
$\Rightarrow \langle x_2, y\rangle = 0 \ \forall y \in U$, denn mit y durchläuft auch $-y, iy$ und $-iy$ ganz $U \Rightarrow x_2 \in U^\perp$. □

Definition
Sei X ein Hilbertraum, $U \subseteq X$ abgeschlossen und $X = U \oplus U^\perp$. Für $X \ni x = x_1 + x_2$, mit $x_1 \in U, x_2 \in U^\perp$ definiere

$$P_U \colon X \to U, \ Px = x_1$$

P_U heißt **Orthogonalprojektion** von X auf U.

Folgerung 16.4
Die Orthogonalprojektion hat folgende Eigenschaften:

a) $\operatorname{Bild} P_U = U$, $\operatorname{Kern} P_U = U^\perp$

b) $\|P_U\| = 1$, denn $\|x\|^2 = \|P_U x\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|P_U x\|^2$

c) $P_U + P_{U^\perp} = Id_X$

Definition 16.5
Sei X ein Hilbertraum.

- Eine Folge $(h_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ heißt **Orthogonalsystem**, falls $h_n \perp h_m$ für $m \neq n$.
- $(h_n)_{n\geq 1}$ heißt **Orthonormalsystem**, falls zusätzlich $\|h_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Ein Orthonormalsystem $(h_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ heißt **Orthonormalbasis** von X falls
$$\overline{\operatorname{span}(h_n)} = X$$

Beispiel 16.6
Sei $X = \ell^p$, $h_n = e_n =$ Einheitsvektor, also $(h_n) = (\delta_{n,m})_{m\geq 1}$.
Weiter sei $x = (x_n) \in \ell^p$, mit $\langle x, e_n\rangle = x_n$, also
$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n \text{ und damit } \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$
Für $y = (\beta_n) \in \ell^2$ gilt: $\langle x, y\rangle = \sum_n x_n \overline{\beta_n} = \sum \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}$.

Satz 16.7
Sei (h_n) eine Orthonormalbasis. Für $U = \overline{\operatorname{span}(h_n)}$ gilt dann
$$P_U x = \sum_n \langle x, h_n\rangle h_n \quad \forall x \in X$$
Weiter ist $\|P_U x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \ \forall x \in X$ (Besselsche Ungleichung)

Korollar 16.8
Sei (h_n) eine Orthonormalbasis von X, dann ist $x = \sum_n \langle x, h_n\rangle h_n$, $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n\rangle|^2$ (Parseval) und
$$\langle x, y\rangle = \sum_n \langle x, h_n\rangle \overline{\langle y, h_n\rangle}$$

Beweis
Beweis des Korollars 16.8:
$U = \overline{\operatorname{span}(h_n)} = X$, also $P_U = Id_X$. Für $x, y \in X : \langle x, y\rangle = \langle \sum_n \langle x, h_n\rangle h_n, \sum_m \langle y, h_m\rangle h_m\rangle$.

Beweis von Satz 16.7:

a) Sei J eine endliche Indexmenge und $(h_n)_{n\in J}$ gegeben. Für $U := \overline{\operatorname{span}(h_n)}$ nehme ein $x \in X$ und setze $y_0 = \sum_{n\in J} \langle x, h_n\rangle h_n \quad y_1 := x - y_0$.
Für $j \in J$ gilt:
$$\langle y_1, h_j\rangle = \langle x, h_j\rangle - \sum_{n\in J} \langle x, h_n\rangle\langle h_n, h_j\rangle = 0$$
$\Rightarrow y_1 \in U^\perp \Rightarrow x = y_0 + y_1$ mit $y_0 \in U, y_1 \in U^\perp$
$$\Rightarrow P_U x = y_0 = \sum_{j\in J} \langle x, h_j\rangle h_j$$
$\sum_{j\in J} |\langle x, h_j\rangle|^2 = \sum_{j\in J} \|\langle x, h_j\rangle h_j\|^2 \overset{Pyth.}{=} \|\sum_{j\in J} \langle x, h_j\rangle h_j\|^2 = \|P_U x\|^2 \leq \|x\|^2$

b) Sei $J = \mathbb{N}$. Definiere $J_m = \{1, \dots, m\}$, daraus folgt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, h_j\rangle|^2 = \sup_m \sum_{j=1}^{m} |\langle x, h_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (+)$$

Sei $U_m = \overline{\operatorname{span}\{h_1, \dots, h_m\}}$, dann

$$\|P_{U_n}x - P_{U_m}x\|^2 = \|\sum_{j=m+1}^{n} \langle x, h_j\rangle h_j\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |\langle x, h_j\rangle|^2 \to 0 \text{ für } n, m \to \infty \text{ wegen } (+)$$

Da X vollständig ist: $\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, h_j\rangle h_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle x, h_j\rangle h_j$ existiert.
Setze $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, h_j\rangle h_j$ und $y_1 = x - y_0$. Dann ist wie oben $\langle y_1, h_j\rangle = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$, also $y_1 \in U^\perp \Rightarrow x = y_0 + y_1, P_U x = y_0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle x, h_j\rangle h_j$. □

Korollar 16.9
Ein Orthonormalsystem $(h_n)_{n\in J}$ ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn $\langle x, h_n\rangle = 0$ für alle $n \in J$ bedeutet $x = 0$.

Beweis
Ist $\langle x, h_n\rangle = 0 \ \forall n \in J$ gilt aber:

$$x \in U^\perp = \{0\} \text{ mit } U = \overline{\operatorname{span}(h_n)}.$$

Und somit ist $U = \left(\{h_n\}^\perp\right)^\perp = \{0\}^\perp = X$. □

Beispiel 16.10
Sei $X = L^2(\Omega, \Sigma, P)$, wobei (Ω, Σ, P) ein W-Raum sei. Sei außerdem $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ eine Partition von Ω mit $P(U_j) > 0$ und $U_j \cap U_k = \emptyset$.
Definiere $h_j := \frac{1}{P(U_j)^{\frac{1}{2}}} \mathbb{1}_{U_j}$, damit gilt:

$$\|h_j\|_{L^2} = 1 \quad \text{und} \quad h_j \perp h_i, \text{ da } U_i \cap U_j = \emptyset$$

$\Rightarrow \{h_j\}$ ist ein Orthonormalsystem in X. Nach 16.7: $U = \overline{\operatorname{span}\{\mathbb{1}_{U_j} : j = 1, \dots, n\}}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad P_U x &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{P(U_j)^{\frac{1}{2}}} \int_{U_j} x(u)dP(u) \right) \left(\frac{1}{P(U_j)^{\frac{1}{2}}} \mathbb{1}_{U_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{P(U_j)} \int_{U_j} x dP \right) \mathbb{1}_{U_j} \\ &= \mathbb{E}[x | U_1, \dots, U_n] \text{ bedingte Erwartung.}\end{aligned}$$

Beispiel 16.11
Sei $X = L^2[-\pi, \pi], \mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Fourierreihe $h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, t \in [-\pi, \pi]$ bildet eine Orthonormalbasis von $L^2[-\pi, \pi]$, denn

$$\|h_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1.$$

Für $n \neq m$ gilt weiter

$$\langle h_n, h_m\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(n-m)} [e^{i(n-m)t}]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Dabei ist $\mathbb{1}_{[0,a]}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ für $t \notin \{0,a\}$ ($\Rightarrow$ konv in L^2) wobei $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi k}\left(e^{-ika}-1\right)$ für $k \neq 0$ und $c_0 = \frac{a}{2\pi}$.
Da Linearkombinationen von $\mathbb{1}_{[0,a]}, a \in (0,\pi]$ dicht in $L^2[-\pi,\pi]$ liegen, folgt $\overline{\operatorname{span}\left(e^{in\cdot}\right)} = L^2[-\pi,\pi]$.

Beispiel 16.12
$S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{sin(nt)}{\sqrt{\pi}}; n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2[-\pi,\pi]$.

Beweis
Zuerst benötigen wir folgende Identitäten

$$\begin{aligned} 2\cos(nx)\cos(mx) &= \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x) \\ 2\sin(nx)\sin(mx) &= \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x) \\ 2\cos(nx)\sin(mx) &= \sin((n+m)x) - \sin((n-m)x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Orthogonalität folgt durch Integration und der Periodizität des Sinuses.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}1dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx$$

$\Rightarrow S$ ist ein Orthonormalsystem.
Die Vollständigkeit folgt wegen $e^0 = 1, e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$. □

Anwendung 16.13 (Gram-Schmidt-Verfahren)
Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $(y_n) \subset X$ linear unabhängig. Definiere

$h_1 := \frac{y_1}{\|y_1\|}, U_1 = \operatorname{span}\{h_1\} = \operatorname{span}\{y_1\}$

$\hat{h}_2 := y_2 - P_{U_1}y_2 = y_2 - \langle y_2, h_1\rangle h_1$

$$\text{damit ist } \hat{h}_2 \perp U_1, \quad h_2 := \frac{\hat{h}_2}{\|\hat{h}_2\|}, \quad U_2 = \operatorname{span}\{h_1,h_2\} = \operatorname{span}\{y_1,y_2\}$$

...

Seien $h_1,\dots,h_n$ gefunden mit $\{h_1,\dots,h_n\}$ Orthonormalsystem und $U_n = \operatorname{span}\{h_1,\dots,h_n\} = \operatorname{span}\{y_1,\dots,y_n\}$. Definiere dann:

$$\hat{h}_{n+1} := y_{n+1} - P_{U_n}y_{n+1} = y_{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\langle y_{n+1}, h_j\rangle h_j, \quad h_{n+1} := \frac{\hat{h}_{n+1}}{\|\hat{h}_{n+1}\|}$$

Am Ende: $\overline{\operatorname{span}}\{h_j\} = \overline{\operatorname{span}}\{y_j\}$

Satz 16.14
Jeder separable, unendlich dimensionale Hilbertraum X hat eine Orthonormalbasis $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Orthonormalbasis definiert eine Isometrie

$$\phi\colon \ell^2 \to X, \phi((\alpha_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n h_n, \quad (\alpha_n) \in \ell^2$$

mit

- $\phi(e_j) = h_j$
- $\|\phi((\alpha_j))\|_X = \langle(\alpha_j), (\beta_j)\rangle_{\ell^2} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j \overline{\beta_j}$
- $\phi^{-1}\colon X \to \ell^2, \phi^{-1}(x) = (\langle x, h_j\rangle_X)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$

Beweis
Es gibt eine Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in X mit $\overline{\operatorname{span}\{y_j\}} = X$ wobei (y_j) linear unabhängig sind. Auf (y_j) wende 16.13 an und erhalte eine Orthonormalbasis (h_j) mit

$$\overline{\operatorname{span}}(h_j) = \overline{\operatorname{span}(y_j)} = X.$$

Setze $\phi\left((\alpha_j)\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j h_j$, damit gilt $\langle\phi\left((\alpha_j)\right), h_n\rangle = \langle\sum_j \alpha_j h_j, h_n\rangle = \alpha_n$ und weiter

$$\|\phi\left((\alpha_j)\right)\|_X^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle\phi\left((\alpha_j)\right), h_k\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k|^2 = \|(\alpha_j)\|_{\ell^2}$$

ϕ ist somit eine Isometrie und ist surjektiv, da jedes x die Form

$$x = \sum_j \langle x, h_j\rangle h_j \text{ besitzt, also mit } \alpha_j = \langle x, h_j\rangle \in \ell^2 : \ \phi(\alpha_j) = \sum \alpha_j h_j = x.$$

□

17 Der Darstellungssatz von Riesz

Ziel: Sei X ein Hilbertraum, $X' = \{x' \colon X \to \mathbb{K} : \text{linear stetig }\}$, $X' \cong X$.

Bemerkung 17.1
Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. $X \hookrightarrow X'$
Für jedes $x \in X$ erhält man ein stetiges, lineares Funktional $x' \colon X \to \mathbb{K}$ durch

$$x'(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{für } y \in X$$

mit $\|x'\| = \sup\{x'(y) : \|y\| = 1\} = \|x\|_X$

Beweis
x' ist linear, da $\langle \cdot, x \rangle$ linear ist und stetig da

$$|x'(y) - x'(y_n)| = \langle y - y_n, x \rangle \leq \|y - y_n\| \cdot \|x\|$$

Da $y = \frac{x}{\|x\|} : \langle y, x \rangle = \frac{1}{\|x\|}\langle x, x \rangle = \|x\|$ folgt $\|x'\|_{X'} = \|x\|_X$. $\square$

Satz 17.2 (Riesz)
Zu jedem $x' \in X'$ gibt es genau ein $x \in X$ mit

$$x'(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{für } y \in X.$$

und $\|x'\|_{X'} = \|x\|_X$. Kurz: $X' \,\widehat{=}\, X$.

Beweis
Sei $x' \in X'$ gegeben. Setze $U = \operatorname{Kern}(x')$, dann ist U ein abgeschlossener Teilraum von X

$$X = U \oplus U^\perp, \quad \dim\left(U^\perp\right) = 1 \quad (*)$$

Wähle $x_0 \in U^\perp$, mit $x_0 \neq 0, x'(x_0) = 1$.
Jedes $y \in X$ hat wegen $(*)$ die Form

$$y = u + \lambda x_0 \text{ mit } u \in U, \lambda \in \mathbb{K}$$

Dann ist $x'(y) = \underbrace{x'(u)}_{=0} + \lambda \underbrace{x'(x_0)}_{=1} = \lambda$ und

$$\langle y, x_0 \rangle = \underbrace{\langle u, x_0 \rangle}_{=0} + \lambda \langle x_0, x_0 \rangle = \lambda \|x_0\|^2$$

Setze $x := \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$, dann folgt:

$$\langle y, x \rangle = \frac{1}{\|x_0\|^2}\langle y, x_0 \rangle = x'(y) \text{ mit } (+).$$

Für die Eindeutigkeit seien x_1 und x_2 Elemente in X zugehörig zu gegebenem $x' \in X'$.
Dann gilt $x'(y) = \langle y, x_1 \rangle = \langle y, x_2 \rangle$, also $0 = \langle y, x_1 \rangle - \langle y, x_2 \rangle = \langle y, x_1 - x_2 \rangle$, also ist $x_1 - x_2 \perp y$ $\forall y \in X$, also $x_1 - x_2 = 0$ bzw. $x_1 = x_2$.
Aus 17.1 folgt dann noch $\|x'\|_X = \|x\|_X$. $\square$

Bemerkung
Damit gibt es eine bijektive Abbildung $\Phi : X \to X'$ mit $\langle \Phi x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ für $y \in X, \Phi(x_1+x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2), \Phi(\lambda x) = \overline{\lambda}\Phi(x)$ für $x_1, x_2, x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ und $\|\Phi(x)\|_{X'} = \|x\|_X$.
$\Rightarrow \Phi$ ist eine anti-lineare Isometrie von X auf X'. In diesem Sinne $X \cong X'$.

Korollar 17.3
Sei X ein Hilbertraum, $M \subseteq X$ ein Untervektorraum und $y' \in M'$. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $x'|_M = y'$ und $\|y'\| = \|x'\|$.

Beweis
Sei $P_M : X \to M$ die Orthogonalprojektion auf M. Setze $x' = y' \circ P_M$, dann gilt für $y \in X$ bzw. $y \in M$

$$\|x'(y)\| = \|y'(P_M y)\| \leq \|y'\| \cdot \|P_M y\| \leq \|y'\| \cdot \|y\|, \quad x'(y) = y'(P_M y) = y'(y), \text{ d.h. } x'|_M = y'$$

□

18 Schwache Konvergenz und Kompaktheit

Definition 18.1
Sei X ein Hilbertraum und $x_n, x \in X$. Wir sagen x_n **konvergiert schwach** gegen x, falls

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \quad \forall y \in X$$

Notation: $x_n \xrightarrow{w} x$

Bemerkung 18.2
Der schwache Limes ist eindeutig bestimmt und linear. Sei $x_n \xrightarrow{w} x, x_n \xrightarrow{w} \hat{x}$

$$\Rightarrow \langle x - \hat{x}, y\rangle = \lim_{n\to\infty} (\langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y\rangle) = 0 \quad \forall y \in X,\ \text{insbesondere für } y = x - \hat{x}$$

Proposition 18.3 (Vgl. von Norm- und schwacher Konvergenz)

a) Normenkonvergenz impliziert schwache Konvergenz

b) $x_n \xrightarrow{w} x$, dann $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$

c) Falls $x_n \xrightarrow{w} x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$, dann $\|x - x_n\| \to 0$

Beweis

a) Sei $\|x_n - x\| \to 0$. Dann gilt für $y \in X$:

$$|\langle x_n - x, y\rangle \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0$$

Umgekehrt: (h_j) Orthonormalsystem $\Rightarrow h_j \xrightarrow{w} 0$, aber $\|h_j\| = 1 \not\to 0$

b) Sei $x_n \xrightarrow{w} x \neq 0$. Für $y = \frac{x}{\|x\|}$ gilt: $\|x_n\| \geq \langle x_n, \frac{x}{\|x\|}\rangle \to \langle x, x\rangle \frac{1}{\|x\|} = \|x\|$

c) Sei $x_n \xrightarrow{w} x$ und $\|x_n\| \to \|x\| \Rightarrow \|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \to 0$ □

Proposition 18.4
Jede schwach konvergente Folge ist normbeschränkt.

Beweis
Sei $x_n \xrightarrow{w} x$. Setze $l_n \in B(X, \mathbb{K}) = X'$: $l_n(y) := \langle y, x_n\rangle$.
Für jedes $y \in X$ gilt:

$$\|l_n(y)\| = |\langle y, x_n\rangle| \leq C\|y\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \overset{13.1}{=} \|l_n\|_{X'} < \infty \text{ nach Banach-Steinhaus.}$$ □

Beispiel 18.5
Sei $X = \ell^2$, $x_n = (a_{n,j})_j, x = (a_j)$. Dann $x_n \xrightarrow{w} x \iff a_{n,j} \to a_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Beweis
$a_{n,j} = \langle x_n, e_j\rangle \to \langle x, e_j\rangle = a_j$. Umkehrung folgt aus 18.6. □

Proposition 18.6
Sei X ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis (h_j). Dann gilt

$$x_n \xrightarrow{w} x \iff \langle x_n, h_j\rangle \to \langle x, h_j\rangle\ \forall j \in \mathbb{N}$$

Beweis
Die Hinrichtung folgt direkt. Betrachten wir also die Rückrichtung:
Nach 18.3: $\exists c < \infty \colon \|x_n\|, \|x\| \leq c$. Für beliebiges $y \in X$ folgt

$$
\begin{aligned}
|\langle x_n - x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, h_j\rangle h_j\rangle| \\
&\leq \underbrace{\sum_{j=1}^{N} |\underbrace{\langle x_n - x, h_j\rangle}_{\to 0} \langle y, h_j\rangle|}_{\to 0} + \underbrace{|\langle x_n - x, \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle y, h_j\rangle h_j\rangle|}_{\leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\leq 2\epsilon} \cdot \underbrace{\|\sum_{j=N+1}^{\infty} \langle y, h_j\rangle h_j\|}_{\leq \epsilon \text{ für } N \text{ groß}}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \overline{\text{span}} |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \epsilon$ für N groß und $\epsilon > 0$ beliebig. □

Definition 18.7
Eine Teilmenge M eines Hilbertraums X heißt **relativ schwach kompakt**, falls jede Folge $(x_n) \subseteq M$ eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 18.8
Eine beschränkte Teilmenge eines Hilbertraums ist relativ schwach kompakt.

Beweis
Sei $(x_n) \subseteq M \Rightarrow \|x_n\| \leq C$. Definiere $X_0 \coloneqq \overline{\text{span}(x_n)} \subseteq X$ als separablen Hilbertraum mit Orthonormalbasis (h_j).

$$\sup |\langle x_n, h_j\rangle| \leq c \Rightarrow \langle x_n, h_j\rangle \in \mathbb{K} \text{ hat eine konvergente Teilfolge nach Bolzano-Weierstrass.}$$

Mit Hilfe des Cantor'schen Diagonalverfahrens wähle eine Teilfolge $M_{j+1} \subseteq M_j, |M_j| = \infty$ mit $\lim_{n \in M_j} \langle x_n, h_j\rangle = \alpha_j$. Wähle $n_k \in M_k$ mit $n_k \geq k$.
Dann ist $n_k \in M_j$ für k groß genug und $n_k \to \infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, h_j\rangle = \alpha_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.
Zu zeigen ist noch $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j h_j \in X$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2 &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |\langle x_{n_k}, h_j\rangle|^2 \\
&= \lim_{k\to\infty} \|\sum_{j=1}^{N} \langle x_{n_k}, h_j\rangle h_j\|^2 \\
&\overset{\text{Bessel}}{\leq} \lim_{k} \|x_{n_k}\|^2 \leq C^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \leq C^2 < \infty$ und somit $x \in X_0$. □

19 Duale Operatoren auf Hilberträumen

Für $X = \mathbb{C}^n$ mit euklidischem Skalarprodukt:
$A \in B(X)$: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad x, y \in X$, wobei

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}, \quad A^* = (\overline{a_{ji}})_{i,j=1,\ldots,n}$$

Satz 19.1
Seien X, Y Hilberträume und $T \in B(X,Y)$. Dann gibt es genau ein $T^* \in B(Y,X)$ mit

- $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \forall x \in X, y \in Y$,
- $\|T^*\| = \|T\|$,
- $(T^*)^* = T$.

Beweis
Für $y \in Y$ fest, setze $l_y(x) := \langle Tx, y\rangle$ für alle $x \in X \Rightarrow l_y \in X'$, denn

$$|l_y(x)| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \text{ also } \|l_y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$$

Nach dem Satz von Riesz gibt es ein $z \in X$ mit

$$l_y(x) = \langle x, z\rangle \quad \text{und} \quad \|z\|_X = \|l_y\|_{X'}$$

Definiere $T^*y := z$, dann gilt: $T^*\colon Y \to X$ ist linear und $\langle x, T^*y\rangle = l_y(x) = \langle Tx, y\rangle$.
Weiter ist

$$\|T^*y\| = \|z\| = \|l_y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|T^*\| \leq \|T\|.$$

Nach Definition ist

$$(T^*)^* = T \quad \Rightarrow \quad \|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$$

$\Rightarrow \|T^*\| = \|T\|$. □

Bemerkung 19.2 (Eigenschaften der Adjungierten)
Sei $S, T \in B(X), \lambda \in \mathbb{K}$

a) $(S+T)^* = S^* + T^*$

b) $(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*$

c) $(T \cdot S)^* = S^* T^*$

d) $\|S \cdot S^*\| = \|S\|^2 = \|S^* \cdot S\|$

Beweis

d) $\|S^*\| \leq \|S^*\| \cdot \|S\| = \|S\|^2$

$$\begin{aligned}\|S\|^2 &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Sx\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} \langle Sx, Sx\rangle \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} \langle x, S^*Sx\rangle \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \cdot \|S^*Sx\| = \|S^*S\|\end{aligned}$$

$T = S^*$: $\|SS^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2 = \|S^*\|^2 = \|S\|^2$ □

Korollar 19.3
Für $S \in B(X)$ gilt:

$$\operatorname{Kern}(S) = (\operatorname{Bild}(S^*))^{\perp}, \quad \operatorname{Kern}(S^*) = (\operatorname{Bild}(S))^{\perp}$$

Beweis
Zuerst zeigen wir $\operatorname{Kern}(S) = (\operatorname{Bild}(S^*))^{\perp}$:

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Kern} S &\iff Sx = 0 \iff \langle Sx, y\rangle = 0 \ \forall y \in X \\ &\iff \langle x, S^* y\rangle = 0 \ \forall y \in X \iff x \in (\operatorname{Bild} S^*) \end{aligned}$$

Die zweite Aussage zeigt man analog. □

Beispiel 19.4
Integraloperator: Sei $k \in L^2(\Omega \times \Omega), (T_k x)(u) = \int_\Omega k(u,v)x(v)dv$, $T_k \in B(L^2(\Omega))$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle T_k x, y\rangle &= \int_\Omega \left(\int_\Omega k(u,v)x(v)dv\right)\overline{y(u)}du \\ &\overset{Fubini}{=} \int_\Omega x(v)\left(\int_\Omega k(u,v)\overline{y(u)}du\right)dv \\ &\int_\Omega x(v)\left(\overline{\int_\Omega \overline{k(u,v)}y(u)du}\right)dv \\ &= \langle x, T_{k^*}y\rangle, \text{ wobei } T_{k^*}y(u) = \int_\Omega \overline{k(v,u)}y(v)dv \end{aligned}$$

Es gilt also: $(T_k)^* = T_{k^*}$, $k^*(u,v) = \overline{k(v,u)}$ (vgl. $A = (a_{ij}), A^* = \overline{(A^T)}$)

Definition 19.5
Sei $T \in B(X,Y)$, X, Y Hilberträume

a) T heißt **unitär**, falls T invertierbar ist und $T^{-1} = T^*$

$$\text{d.h. } T \text{ ist surjektiv und } \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in X$$

b) Sei $X = Y$. T ist **selbstadjungiert**, falls $T^* = T$, d.h. $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y \in X$

c) Sei $X = Y$. $T \in B(X)$ heißt **normal**, falls $T^*T = TT^*$.

$$\text{d.h. } \langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle \quad \forall x, y \in X$$

Bemerkung
Unitäre und selbstadjungierte Operatoren sind normal.

Beispiel 19.6
Seien X, Y Hilberträume und $T \in B(X,Y)$.

a) Integraloperator
T_k ist selbstadjungiert $\iff T_{k^*} = T_k \iff \overline{k(v,u)} = k(u,v) \iff k^* = k$.
Falls $k \in L^2\left([0,1]^2\right)$, so ist T_k kompakt und damit nicht unitär, da T_k keine Isometrie sein kann ($\dim = \infty$).

b) Verschiebungsoperator auf $X = \ell^2$
$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (\alpha_2, \alpha_3, \dots)$, $(\alpha_j) \in \ell^2 \Rightarrow T^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$

$$\text{somit ist zwar } TT^* = Id, \text{ aber } T^*T(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$$

$\Rightarrow T * T = P_U$ mit $U = \{(\alpha_j) \in \ell^2 \colon \alpha_1 = 0\}$.

c) Sei $U \subset X$ ein Teilraum und $P_U \colon X \to U$ die Orthogonalprojektion auf U.
P_U ist selbstadjungiert.

$$\text{Für } x, y \in X \quad \exists\, x_1, y_1 \in U,\ x_2, y_2 \in U^\perp : x = x_1 + x_2 \text{ und } y = y_1 + y_2$$

$\Rightarrow \langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$, $\forall x, y \in X$.

Ziel in diesem Abschnitt:
Ist $T \in B(X)$ normal und kompakt, so existiert eine Folge $\lambda_n \in \mathbb{C}$ und ein Orthonormalsystem (h_n) so, dass

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, h_n\rangle h_n \quad \forall x \in X$$

(vgl. Diagonalisierung von selbstadjungierten Matrizen)

Satz 19.7
Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

$$T \in B(X) \text{ ist selbstadjungiert} \iff \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in X$$

Beweis
„$\Rightarrow$“: $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \in \mathbb{R}$

„$\Leftarrow$“: $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in X$

$$\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \overline{\lambda}\langle Ty, x\rangle + \lambda\langle y, Tx\rangle + |\lambda|^2\langle Ty, Ty\rangle \quad (1)$$

Konjugieren dieser Gleichung liefert:

$$\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \lambda\langle x, Ty\rangle + \overline{\lambda}\langle Tx, y\rangle + |\lambda|^2\langle Ty, Ty\rangle \quad (2)$$

Bilde (1) − (2) für $\lambda = 1$:

$$\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle \quad (3)$$

Bilde (1) − (2) für $\lambda = i$:

$$\langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle = -\langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle \quad (4)$$

und (3) + (4) liefert dann:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

□

Proposition 19.8
Für $T \in B(X)$ selbstadjungiert, gilt:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$$

Beweis
" $\geq$ ": $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|Tx\| \leq \|T\|$, falls $\|x\| \leq 1$.

" $\leq$ ": Definiere $M := \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$. Zu zeigen ist damit $\|T\| \leq M$:

Nach $T^* = T$ und der Definition von M gilt:

$$\begin{aligned}\langle T(x+y), (x+y)\rangle - \langle T(x-y), (x-y)\rangle &= 2\langle Tx, y\rangle + 2\underbrace{\langle Ty, x\rangle}_{=\langle y, Tx\rangle} \\ &= 2\left(\langle Tx, y\rangle + \overline{\langle x, Ty\rangle}\right) \\ &= 4\,\mathrm{Re}\left(\langle Tx, y\rangle\right)\end{aligned}$$

Also mittels der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned}|4 \cdot \mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle| &\leq |\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle| \\ &\leq M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2 \\ &= M\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right)\end{aligned}$$

Für $\|x\|, \|y\| \leq 1$ ist

$$|4\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle| \leq 4M$$

Wähle $\theta \in (-\pi, \pi]$, für $\|x\| \leq 1, \|e^{i\theta}y\| \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}|\langle Tx, y\rangle| &= e^{i\theta}\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle \\ &= \mathrm{Re}\langle Tx, e^{i\theta}y\rangle \\ &\leq M\end{aligned}$$

$\sup_{\|x\|,\|y\|\leq 1}\langle Tx, y\rangle = \|T\| \leq M$. □

Proposition 19.9
Sei $T \in B(X)$ normal

a) $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|T\|$

b) $\mathrm{Kern}\, T = \mathrm{Kern}\, T^*$

Beweis

a) Es gilt $\|T\|^2 = \|T^2\|$ $(*)$, denn:

$$\begin{aligned}\|T^2\|^2 &\overset{19.2}{=} \|T^2\left(T^2\right)^*\| \qquad \left((T^2)^* = T^*T^* = (T^*)^2\right) \\ &= \|(TT^*)(TT^*)^*\| \overset{19.2}{=} \|TT^*\|^2 \overset{19.2}{=} \left(\|T\|^2\right)^2\end{aligned}$$

T normal $\Rightarrow T^2$ normal. Also $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$, wende $(*)$ k-mal an.

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty}\left(\|T\|^{2^k}\right)^{\frac{1}{2^k}} = \|T\|$$

b) $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$

$$\Rightarrow Tx = 0 \quad \iff \quad T^*x = 0$$

□

Lemma 19.10
Sei X ein Hilbertraum und $T \in B(X)$ kompakt und normal, d.h. $TT^* = T^*T$. Dann gilt

a) $Tx = \lambda x \iff T^*x = \overline{\lambda}x$

b) $Tx = \lambda x, Ty = \mu y$ mit $\mu \neq \lambda$ dann ist $x \perp y$

c) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann gibt es ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = \|T\|$

d) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und $\|T\| \in \sigma(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma(T)$

Beweis

a) $Tx = \lambda x \iff x \in \mathrm{Kern}(T - \lambda) \iff x \in \mathrm{Kern}(T-\lambda)^* \overset{19.9}{\iff} x \in \mathrm{Kern}(T^* - \overline{\lambda}) \iff T^*x = \overline{\lambda}x$

b) $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0.$

c) Nach 19.9a ist $\mathrm{span}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|T\|$
Wähle $\lambda_j \in \sigma(T)$ mit $|\lambda_j| \to \|T\|$. Für eine Teilfolge (λ_n) von (λ_j) gilt:

$$\lambda_n \to \lambda, |\lambda_n| \to |\lambda| = \|T\|$$

Da $\lambda_n \in \sigma(T)$ und $\sigma(T)$ abgeschlossen folgt $\lambda \in \sigma(T), |\lambda| = \|T\|$.

d) $Tx = \lambda x, x \neq 0 : \lambda\langle x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$

$$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Nach Prop. 19.8 ist $\|T\| = \sup\{\langle x, Tx\rangle : \|x\| \leq 1\}$.

$$\exists x_j, \|x_j\| = 1, |\langle Tx_j, x_j\rangle| \to \|T\|.$$

Wähle Teilfolge (x_n) von (x_j) so, dass

$$x := \lim_j \langle Tx_j, x_j\rangle, \quad y := \lim_n Tx_n$$

Da $|x| = \lim_j |\langle Tx_j, x_j\rangle| = \|T\|$ ist:

$$\|Tx_n - \lambda_n x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda_n^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1}$$

$$\to \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0$$

Da $y = \lim_n (\lambda_n x_n)$: $Ty = \lambda \lim Tx_n = \lambda y$. $\Rightarrow \lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| = \|T\|$. □

Satz 19.11 (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren)
Sei X ein Hilbertraum, $T \in B(X)$ kompakt und normal.
Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, die entweder endlich oder eine Nullfolge und es gibt ein Orthonormalsystem (h_n) in X, das endlich ist, falls (λ_n) endlich ist, so dass

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n \quad \forall x \in X$$

Insbesondere:

- $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}$, $Th_n = \lambda_n h_n$
- $X = (\operatorname{Kern} T) \oplus \overline{\operatorname{span}}\{h_n\}$, orthogonale Komplement
- $\|T\| = \sup_n |\lambda_n|$

Bemerkung
Falls X separabel ist, so gibt es eine Orthonormalbasis (e_n) von X, die diese (h_n) und eine orthonormalbasis von $\operatorname{Kern}(T)$ so, dass

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

wobei $\mu_n = 0$, falls $e_n \in \operatorname{Kern}(T), \mu_n = \lambda_m$ falls $e_n = h_m$.

Die Abbildung $\phi \colon \ell^2 \to X, \phi((\alpha_n)) = \sum_n \alpha_n e_n$ ist eine Isometrie.
Setze $D := \phi^{-1} T \phi (Te_n = \mu_n e_n)$, dann ergibt sich das Folgende und damit ein kommutative Diagramm:

$$x = (\langle x, e_n \rangle) \to Tx = (\mu_n \langle x, e_n \rangle), \quad D((\alpha_n)) = ((\mu_n \alpha_n))$$

$$\begin{tikzcd}
\ell^2 \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\phi"] & \ell^2 \arrow[d, "\pi"'] \\
X \arrow[r, "T"'] & X
\end{tikzcd}$$

Wenn X endlich dimensional und D kompakt wäre, könnte man D als folgende Diagonalmatrix auffassen:

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Beweis
Aus dem Kapitel über Spektraltheorie von kompakten Operatoren wissen wir $\sigma(T) \setminus \{0\}$ besteht aus endlich vielen oder einer Nullfolge von Eigenwerten (ν_n) mit $X_k = \operatorname{Kern}(T - \nu_k Id)$, $\dim X_k = d_k < \infty$.
Sei (λ_n) eine Folge, die jeden Eigenwert ν_k entsprechend seiner Vielfachheit d_k enthält:

$$(\lambda_n) = (\underbrace{v_1, \dots, v_1}_{d_1\text{-mal}}, \underbrace{v_2, \dots, v_2}_{d_2\text{-mal}}, \underbrace{v_3, \dots, v_3}_{d_3\text{-mal}}, \dots)$$
$$(h_n) = (e_1^1, \dots, e_{d_1}^1, e_1^2, \dots, e_{d_2}^2, e_1^3, \dots, e_{d_3}^3, \dots)$$

Da für jedes k $(e_1^k, \dots, e_{d_k}^k)$ ein Orthonormalsystem von X_k ist und $X_k \perp X_l$ für $k \neq l$ nach 19.10b, ist (h_n) ein Orthonormalsystem in X.
Also: $Th_n = \lambda_n h_n$ und $h_n \perp \mathrm{Kern}(T)$ nach 19.10b
Beh: $X = \mathrm{Kern}(T) \oplus X_0$, $X_0 = \overline{\mathrm{span}}(h_n)$, denn daraus würde schon die Behauptung folgen:
Für alle $x \in X$ ist $x = y + \sum_n \langle x, h_n \rangle h_n$, da (h_n) Orthonormalbasis von X_0

$$\Rightarrow Tx = \underbrace{Ty}_{=0} + \sum_n \langle x, h_n \rangle \underbrace{(Th_n)}_{\lambda_n h_n}) \sum \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n.$$

Zu zeigen ist also $X_0^\perp = \mathrm{Kern}(T)$
Beweis: für $x \in X_0^\perp$ ist $Tx \in X_0^\perp$, denn für alle n ist $\langle Tx, h_n \rangle = \langle x, Th_n \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, h_n \rangle}_{=0}$.

Also $T(X_0^\perp) \subset X_0^\perp$, setze $S = T|_{X_0^\perp} \in B(X_0^\perp)$ kompakt und normal. Nach 19.10c, d) gibt es einen Eigenwert μ von S mit $|\mu| = \|S\|$.

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(S - \mu) \subset X_0 \cap X_0^\perp = \{0\} \Rightarrow S = 0 \Rightarrow X_0^\perp \subset \mathrm{Kern}\, S.$$

Andererseits: $\mathrm{Kern}\, T \perp X_k \Rightarrow \mathrm{Kern}\, T \subset X_0^\perp \Rightarrow X_0^\perp = \mathrm{Kern}(T)$. $\square$

Dualität in Banachräumen

20 Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

Motivation:
Sei X ein Hilbertraum und

$$\begin{array}{ccc} M \subseteq X & : & M^\perp \\ T \in B(X) & & T^* \in B(X) \\ \text{schwach konv.} & & \text{Kompaktheit} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\cup"'] \arrow[dr, "L"] & \\ M \arrow[r, "l"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Wir suchen zu $l \in M'$ ein $L \in X'$ mit $L|_M = l$ und $\|L\| = \|l\|$.

Zum Beispiel mit X einem beliebigen Hilbertraum und $M \subset X$ betrachte

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "P_U"'] & \\ M \arrow[r, "l"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Dann besitzt $L := l \circ P_U$ die gewünschten Eigenschaften.

Definition 20.1
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $p\colon X \to \mathbb{R}$ heißt **sublinear**, falls

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$

b) $p(\lambda x) = \lambda p(y) \quad \forall y \in X, \lambda \geq 0$

Satz 20.2 (Hahn-Banach für Vektorräume)
Sei X ein Vektorraum, $p\colon X \to \mathbb{R}$ sublinear.
Zu jeder linearen Abbildung $l\colon U \to \mathbb{K}$, $U \subset X$ Untervektorraum mit

$$\operatorname{Re} l(x) \leq p(x) \quad \forall x \in U$$

gibt es eine lineare Abbildung $L\colon X \to \mathbb{R}$ mit

$$L|_U = l, \quad \operatorname{Re} L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

Es wird jedoch keine Eindeutigkeit behauptet.

Beweis
Wir gehen in 3 Schritten vor: 1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \dim {}^X\!/_U = 1$, 2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allgemeines U, 3. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1. Schritt: sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\dim {}^X\!/_U = 1$. Wähle $x_0 \in {}^X\!/_U \Rightarrow X = \operatorname{span}(x_0) \oplus U$, d.h. zu $x \in X$ gibt es ein $u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = u + \lambda x_0$
Für jedes $r \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine lineare Abbildung:

$$L_r \colon X \to \mathbb{R}, \quad L_r(x) = l(u) + \lambda r, \quad L_r|_U = l$$

Zeige dass r so gewählt werden kann, dass für alle $x \in X$ gilt

$$L_r(x) \leq p(x) \iff l(u) + \lambda r \leq p(u + \lambda_0 x_0) \quad \forall u \in U, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Für $\lambda > 0$ bedeutet (1):

$$\begin{aligned} & r \leq p(\frac{u}{\lambda} + x_0) - l(\frac{u}{\lambda}) \quad \forall u \in U \\ \iff & r \leq \inf\{p(v + x_0) - l(v) : v \in U\} \quad (2) \end{aligned}$$

Für $\lambda < 0$ bedeutet (1):

$$\begin{aligned} & -r \leq p(\frac{u}{-\lambda} - x_0) - l(\frac{u}{-\lambda}) \quad \forall u \in U \\ \iff & r \geq \sup\{l(w) - p(w + x_0) : w \in U\} \quad (3) \end{aligned}$$

Um (2) und (3) und damit (1) zu erfüllen, benötigt man

$$\begin{aligned} & l(w) - p(w - x_0) \leq p(v + x_0) - l(v) \quad \forall v, w \in U \\ \iff & l(w) + l(v) \leq p(v + x_0) + p(w - x_0) \quad \forall u, v \in U \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt wegen $l(v) + l(w) = l(v + w) \leq p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ $\forall v, w \in U$ und liefert die erste Behauptung.

2. Schritt: sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und U allgemein.

$\mathcal{A} := \{(V, L_V) : U \subseteq V \subseteq X \text{ UVR }, L_V \colon V \to \mathbb{R} \text{ linear, mit } L_V|_U = l, \operatorname{Re} L_V(x) \leq p(x) \forall x \in V\}$

Definiere eine Ordnung auf $\mathcal{A} : (V_1, L_1) \leq (V_2, L_2) \iff V_1 \subseteq V_2, L_2|_{V_1} = L_1$.
Zu zeigen ist: jede total geordnete Teilmenge von $\mathcal{A}$ hat eine obere Schranke.
Sei $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ total geordnet, setze $V_0 = \bigcup_{V \in \mathcal{A}} V$, dann ist V_0 ein Untervektorraum von X. Definiere $L_0(x) = L_{V_j}(x)$ falls $x \in V_j \in \mathcal{A}_0$. Dann ist L_0 wohldefiniert, linear und erfüllt die Abschätzung $\Rightarrow (V_0, L_0) \in \mathcal{A}$ und $(\hat{V}, \hat{L}) \leq (V_0, L_0)$ für alle $(\hat{V}, \hat{L}) \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow (V_0, L_0)$ ist eine obere Schranke für $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{A}$.

3. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und sei $X_{\mathbb{R}}$ der zu X gehörige reelle Vektorraum. Definiere $l_{\mathbb{R}}(x) = \operatorname{Re} l(x) = \frac{1}{2}\left(l(x) + \overline{l(x)}\right)$. Nach (ii) gibt es ein reelles lineares Funktional $L_{\mathbb{R}} \colon X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ mit $L_{\mathbb{R}}|_U = l_{\mathbb{R}}$ und $L_{\mathbb{R}}(x) \leq p(x)$ $\forall x \in X_{\mathbb{R}}$. Setze $L(x) = L_{\mathbb{R}}(x) - iL_{\mathbb{R}}(ix)$, dann ist L additiv und es gilt $L(ix) = L_{\mathbb{R}}(ix) - iL_{\mathbb{R}}(-x) = i\left(-iL_{\mathbb{R}}(ix) + L_{\mathbb{R}}(x)\right) = iL(x)$. Somit ist L linear, weiter ist $\operatorname{Re} L(x) = L_{\mathbb{R}}(x) \leq p(x)$ $\forall x \in X$ und $L|_U = l$. $\square$

Satz 20.3 (Hahn-Banach für normierte Räume)
Sei X normierter Vektorraum. Sei $U \subset X$ ein linearer Teilraum.
Zu jedem stetigen Funktional $u' \colon U \to \mathbb{K}$, gibt es ein stetiges lineares Funktional $x' \colon X \to \mathbb{K}$ mit

$$\|x'\|_{X'} = \|u'\|_{U'} \quad \text{und} \quad x'|_U = u'.$$

Beweis
Setze $l := u'$ und $p(x) := \|u'\| \cdot \|x\|$. Dann gilt

$$\operatorname{Re} l(x) \leq |u'(x)| \leq \|u'\|_U \cdot \|x\| = p(x), \ \forall x \in U$$

Nach 20.2. gibt es eine Fortsetzung x' von l auf X mit $\operatorname{Re} x'(x) \leq \|u'\| \cdot \|x\|$ und $x'|_{U'} = u'$. Zu $x' \in X'$ und $x \in X$ wähle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und

$$|x'(x)| = \alpha \operatorname{Re} x'(x) \leq \|u'\| \|\alpha x\| = \|u'\| \|x\|$$

Somit ist $\|x'\| \leq \|u'\|$. □

Korollar 20.4
Sei X ein normierter Vektorraum. Zu jedem $x \in X, x \neq 0$ gibt es ein $x' \in X'$ mit

$$\|x'\|_{X'} = 1 \quad \text{und} \quad x'(x) = \|x\|_X$$

Beweis
Sei $U = \operatorname{span}\{x\}, u'(\lambda x) := \lambda \|x\|$. Dann ist u' linear, $\|u\| \leq 1$, $u'(\frac{x}{\|x\|}) = 1$, also $\|u'\| = 1$. Sei x' die Fortsetzung von u' auf X wie in 20.3, dann folgt

$$\|x'\| = \|u'\| = 1 \text{ und } x'(x) = u'(x) = \|x\|$$ □

Folgerung 20.5

a) $x \in X, x'(x) = 0$ für alle $x' \in X' \Rightarrow x = 0$

b) Zu $x_1, x_2 \in X$ gibt es $x' \in X'$ mit $x'(x_1) \neq x'(x_2)$ (folgt aus a) mit $x = x_1 - x_2$)

c) $\|x\| = \sup\{x'(x) : \|x'\| = 1, \ x' \in X'\}$

Beweis
$|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ für $\|x'\| \leq 1$. Für die Umkehrung wähle x' wie in 20.4. □

Korollar 20.6
Sei X ein normierter Raum. $U \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum, $x \in X \setminus U$.
Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit $x'|_U \equiv 0$ und $x'(x) \neq 0$.

Beweis
Sei $q \colon X \to {}^X\!/_U$ Quotientenabbildung $\Rightarrow q(x) \in {}^X\!/_U, q(x) \neq 0 \overset{20.4}{\Longrightarrow}$ Wähle $l \in ({}^X\!/_U)'$ mit $l(q(x)) \neq 0$. Setze $x' = l \circ q \colon X \to \mathbb{K} \Rightarrow x' \in X'$ und $x'(x) = l(q(x)) \neq 0$. □

Definition 20.7
Sei X ein normierter Raum, $U \subset X, V \subset X'$ Teilmenge. Setze

$$U^\perp := \{x' \in X' : x'(x) = 0 \text{ für alle } x \in U\}$$
$$V_\perp := \{x \in X : x'(x) = 0 \text{ für alle } x' \in V\}$$

Beachte: $X'' \supset V^\perp = \{x'' \in X'' : x''(x') = 0 \text{ für alle } x' \in V\} \neq V_\perp \subset X$

Bemerkung 20.8

a) $U^\perp$ ist ein linearer abgeschlossener Teilraum X', $V_\perp$ ist ein linearer abgeschlossen Teilraum von X.

b) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$, $V_1 \subset V_2 \Rightarrow (V_2)_\perp \subset (V_1)_\perp$

c) $(U^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}\,(U)$

Beweis
c) "$\supseteq$" Nach Definition. "$\subseteq$" Sei $x \notin \overline{\operatorname{span}}(U) \xRightarrow{20.6} \exists\, x' \in X'$ mit $x'|_{\overline{\operatorname{span}}(U)} \equiv 0$ und $x'(x) \neq 0$

$$\Rightarrow x' \in U^\perp, \text{ aber wegen } x'(x) \neq 0 \text{ gilt } x' \notin (U^\perp)_\perp$$ □

Proposition 20.9
Sei X ein Banachraum, $U \subset X$ abgeschlossen. Dann gilt

$$\left({}^{X}\!/\!{}_{U}\right)' \;\widehat{=}\; U^\perp, \quad U' \;\widehat{=}\; {}^{X'}\!/\!{}_{U^\perp}$$

Beweis
siehe Übung. □

21 Trennungssätze für konvexe Menge

Definition 21.1
Sei X ein Vektorraum mit $A \subset X$. Die Abbildung

$$p_A \colon X \to [0, \infty],\ p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$$

heißt **Minkowski-Funktional** von A und A heißt **absorbierend**, falls $p_A(x) < \infty, \forall x \in X$, d.h. für alle $x \in X$ gibt es ein $\lambda \geq 0$, sodass $x \in \lambda A$.

Beispiel 21.2
Für $A = U_X$ ist $p_A(x) = \|x\|$ ($\|x\| \leq \lambda \iff x \in \lambda(U_X)$).

Proposition 21.3
Sei $U \subset X$ konvex und 0 innerer Punkt von U. Dann gilt

a) Falls $\epsilon U_X \subset U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{\epsilon}\|x\|$

b) p_U ist sublinear

c) Ist U offen, so ist $U = p_U^{-1}([0, 1))$

Beweis
a) $x \in \epsilon \cdot U_X \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} \cdot x \in U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{\epsilon} \cdot \|x\|$.

b) $p_U(\lambda x) = \lambda \cdot p_U(x)$ für $\lambda > 0$, denn

$$(r\lambda)x \in U \iff r(\lambda x) \in U$$

Zu $\epsilon > 0$ wähle $\lambda, \mu > 0$ mit $\lambda \leq p_U(x) + \epsilon,\ \mu \leq p_U(y) + \epsilon$. Dann $\frac{x}{\lambda} \in U, \frac{y}{\mu} \in U$

$$\xRightarrow{Konv} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\mu + \lambda}\left(\frac{y}{\mu}\right) = \frac{x + y}{\lambda + \mu} \in U$$

Somit ist $p_U(x + y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\epsilon$ für alle $\epsilon > 0$.

c) $x \in p_U^{-1}([0, 1)) \Rightarrow p_U(x) \leq 1$. Dann existiert ein $\lambda < 1$ mit $\frac{x}{\lambda} \in U$. Da $0 \in U$ und U konvex ist, folgt

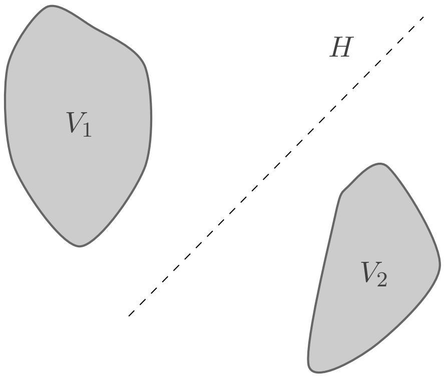
$$x = \lambda\left(\frac{x}{\lambda}\right) + (1 - \lambda)0 \in U$$

Sei umgekehrt $x \in U$. Da U offen ist, gibt es $\epsilon > 0$ mit $x + \epsilon x \in U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon}$. □

Satz 21.4 (1. Trennungssatz)
Sei X ein normierter Vektorraum, $V_1, V_2 \subset X$ mit

- V_1, V_2 konvex, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- V_1 offen,

dann gibt es ein $x' \in X'$ so, dass $\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2)$ für alle $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.



$$H = \left\{ x : x'(x) = \inf_{v_2 \in V_2} x'(v_2) \right\}$$

Beweis
(i) Sei $V_2 = \{0\}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wähle ein beliebiges $x_0 \in V_1$ und setze $y_0 = -x_0$.

$$U := \{v - x_0 : v \in V_1\} \text{ ist offen und konvex; außerdem: } 0 \in U, y_0 \notin U$$

Nach Prop. 21.3 gilt $p_U(y_0) \geq 1$ und $p_U(y) \leq C\|y\|$. Auf dem Untervektorraum $y = \operatorname{span}\{y_0\}$ def $y' \colon Y \to \mathbb{R}, y'(ty_0) := tp_U(y_0)$ für $t \in \mathbb{R}$ ein Funktional. Dann gilt $y'(ty_0) \leq 0 \leq p_U(ty_0)$ für $t < 0$, $y'(ty_0) = tp_U(y_0) = p_U(ty_0)$ für $t \geq 0$

$$\Rightarrow y'(y) \leq p_U(y) \forall y \in Y$$

Nach Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung $x' \colon X \to \mathbb{R}$ mit $x'(x) \leq p(x) \forall x \in X, x'$ ist linear und stetig, denn

$$|x'(x)| = \max\{|x'(x)|, |x'(-x)|\} \leq \max\{p(x), p(-x)\} \leq C\|x\|$$

Für $x \in V_1$ gilt $x + y_0 \in U$ und $x'(x) = x'(x + y_0) - x'(y_0) < 0$, denn mit Prop. 21.3 folgt

$$x'(y_0) = p(y_0) \geq 1 \quad \text{und} \quad p(x + y_0) < 1, \text{ da } x + y_0 \in U, x'(0) = 0$$

(ii) Sei $V_2 = \{0\}, \mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $X_\mathbb{R}$ der Vektorraum X aufgefasst als reeller Vektorraum. Nach (i) existiert ein $x'_\mathbb{R} \in X'_\mathbb{R}$ mit

$$x'_\mathbb{R}(v_1) < \underbrace{x'_\mathbb{R}(v_2}_{=0}$$

Wie im Beweis des Satzes von Hahn-Banach: $x'(x) := x'_\mathbb{R}(x) - ix'_\mathbb{R}(-x) \Rightarrow x'$ $\mathbb{C}$-linear, stetig und $\operatorname{Re} x'(x) = x'_\mathbb{R}(x)$
(iii) V_1, V_2 allgemein. Setze $W_1 := V_1 - V_2$ konvex und offen $\left(W_1 = \bigcup_{v_1 \in V_1} \{v_1 - V_2\}\right)$.
Weiter ist $0 \in W_1$, denn $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Nach (ii) gibt es ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(v_1 - v_2) < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2)$ für $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.□

Satz 21.5 (2. Trennungssatz)
Sei X ein normierter Raum, $V \subset X$ konvex und abgeschlossen. Für $x \notin V$ gibt es ein $x' \in X'$ mit:

$$\operatorname{Re} x'(x) < \inf\{\operatorname{Re} x'(v) : v \in V\}$$

22 Schwache Konvergenz & Reflexivität

Notation 22.1
Sei X ein normierter Raum und X' der Dualraum. Für $x \in X, x' \in X'$ setze

$$(x, x') := x'(x),$$

$$\text{dann ist } X \times X' \ni (x, x') \to (x, x') \text{ eine Bilinearform auf } X \times X'.$$

Bemerkung
Ist X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so existiert nach Riesz ein

$$J : X \to X', J(x)(y) = \langle y, x \rangle \text{ (antilineare Isometrie)}$$

Für $x' = J(x)$ gilt $(y, x') = (y, J(x)) = \langle y, x \rangle = \langle y, J^{-1}x' \rangle$.
Ziele:

- schwache Konvergenz
- $X \triangleq X''$ (Reflexivität)
- schwache Kompaktheit

Definition 22.2
Sei X ein normierter Raum und X' der zugehörige Dualraum

a) Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ **konvergiert schwach** gegen $x \in X$, falls

$$(x_n, x') \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, x'), \quad \forall x' \in X'$$

b) Eine Folge $(x'_n)_{n\geq 1} \subset X'$ **konvergiert schwach*** gegen $y' \in X'$, falls

$$(x, x'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, x'), \quad \forall x \in X$$

Notation
a) $x_n \xrightarrow{w} x$ oder $x_n \to x$ in $\sigma(X, X')$ oder $x = w\text{-}\lim_n x_n$

b) $x'_n \xrightarrow{w^*} x'$ oder $x'_n \to x'$ in $\sigma(X', X)$ oder $x' = w^*\text{-}\lim_n x'_n$

Eigenschaften 22.3
a) w-lim und w^*-lim sind (falls existent) eindeutig bestimmt

b) Normkonvergenz in X (oder X') impliziert schwache (bzw. w*-schwache) Konvergenz; nicht umgekehrt.

c) Falls $x_k \xrightarrow{w} x \Rightarrow \|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$ und falls $x'_k \xrightarrow{w^*} x' \Rightarrow \|x'\| \leq \liminf_n \|x'_n\|$

d) Falls X ein Banachraum ist und $(x_n) \subset X$ schwach konvergiert, so ist (x_n) beschränkt; das selbe gilt für $(x'_n) \subset X'$

Beweis
a) Gelte $x_n \xrightarrow{w} y_1, x_n \xrightarrow{w} y_2 \Rightarrow x'(y_1) = \lim x'(x_n) = x'(y_2)$ für alle $x' \in X'$

$$\Rightarrow x'(y_1 - y_2) = 0 \text{ für alle } x' \in X' \Rightarrow y_1 = y_2$$

b) $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$

c) $x_n \xrightarrow{w} x$. Nach §20 existiert $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$ und $x'(x) = \|x\|$

$$\Rightarrow \|x\| = x'(x) = \lim x'(x_n) \leq \underbrace{\|x'\|}_{=1} \|x_n\| \Rightarrow \|x\| \leq \liminf \|x_n\|$$

d) Sei (x_n) schwach konvergent. Definiere $T_n\colon X' \to \mathbb{K}, T_n(x') = x'(x_n)$. Für alle x' ist $\{T_n(x')\}$ beschränkt in $\mathbb{K}$. Mit Banach-Steinhaus folgt $\sup \|T_n\| < \infty$ und wegen $\|T_n\| = \|x_n\|$ folgt, dass (x_n) beschränkt ist.
Für die zweite Behauptung definiere $T_n\colon X \to \mathbb{K}, T_n x := x'_n(x)$ (erst hier wird die Vollständigkeit von X benötigt) □

Lemma 22.4
Sei (x'_n) beschränkt in X' und $D \subset X$ mit $\overline{\operatorname{span} D} = X$. Falls $x'_n(x)$ eine Cauchy-Folge ist für alle $x \in D$, dann konvergiert x'_n schwach* gegen ein $x' \in X'$

Beweis
Sei $Y = \operatorname{span}(D)$, definiere $y'\colon Y \to \mathbb{K}, y'(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^n \alpha_i x'_n(x_i))$. y' ist beschränkt

$$|y'(x)| \leq \sup \|x'_n\| \cdot \| \underbrace{\sum \alpha_i x_i}_{=x} \|$$

$\overset{§3}{\Longrightarrow}$ Es gibt eine stetige Fortsetzung x' von y' auf ganz X.

$$\Rightarrow x'_n \xrightarrow{w^*} x', \ \|y'\| = \|x'\| \text{ denn } x'|_Y = y' \text{ und } \overline{Y} = X$$ □

Proposition 22.5 (Kanonische Einbettung von X nach X")
Setze $J\colon X \to X'', J(x)(x') = x'(x)$, für alle $x' \in X$.
Dann ist J eine isometrische Einbettung von X nach X''.

Beweis
$J(x)$ linear, $|J(x)(x')| = |x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\| \ \forall x' \in X'$

$$\Rightarrow J(x) \in X'', \ \|J(x)\|_{X''} \leq \|x\|$$

Zu $x \in X$ gibt es ein x'_0 mit $\|x'_0\| = 1$, $x'_0(x) = \|x\|$

$$\Rightarrow \|J(x)\|_{X''} \geq |J(x)(x'_0)| = |x'_0(x)| = \|x\|$$ □

Definition 22.6
Ein Banachraum heißt **reflexiv**, falls $J\colon X \to X''$ (in 21.5) surjektiv ist ($X \mathrel{\hat{=}} X''$).

Beispiel 22.7

a) Sei $X = H$ HR, $X' = X$ (Riesz) $\Rightarrow X'' = X' = X$ reflexiv. Schwache Konvergenz im obigen Sinn stimmt überein mit der schwache Konvergenz im Hilbertraum-Sinne.

b) $X = \ell^p, 1 < p < \infty$, dann ist $(\ell^p)' = \ell^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\ell^p)'' = \ell^p$ reflexiv

$$x_n = (\alpha_{n_k})_k \xrightarrow{w} x = (a_k)_k \iff \alpha_{n_k} \to \alpha_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

c) $(c_0)' = \ell^1$, $(\ell^1)' = \ell^\infty \Rightarrow J_{c_0} \colon c_0 \hookrightarrow \ell^\infty$ nicht reflexiv

d) $X = L^p(\Omega), L^1(\Omega)' = L^\infty(\Omega), L^p(\Omega)' = L^q(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q \in (1, \infty)$

$$\Rightarrow L^p(\Omega) \text{ reflexiv für } p \in (1, \infty)$$

Für $x, x_n \in L^p(\Omega)$ gilt $x_n \xrightarrow{w} x \iff \int_A x_n d\mu \to \int_A x d\mu \ \forall A \in \mathcal{A}$ (falls (x_n) beschränkt)

e) $X = C(K)$, K kompakt. Sei $(x_k) \subseteq C(K)$ beschränkt und $x \in C(K)$. Dann gilt

$$x_k \xrightarrow{w} x \iff x_k(u) \to x(u) \text{ für alle } u \in K$$

Definition 22.8

a) Sei X ein normierter Vektorraum, $U \subseteq X$ heißt **schwach kompakt**, falls zu jeder Folge $(x_n) \subseteq U$ eine Teilfolge x_{n_k} und ein $x \in U$ existiert mit $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$

b) $V \subseteq X'$ heißt **schwach*-kompakt**, falls jede Folge $(x'_n) \subseteq V$ eine Teilfolge (x'_{n_k}) besitzt, sodass ein $x' \in V$ existiert mit $x'_{n_k} \xrightarrow{w^*} x'$

Satz 22.9 (Alaoglu-Bourbaki)
Sei X separabel, dann ist $U_{X'}$ w*-kompakt.

Beweis
todo □

Proposition 22.10

1. Ein abgeschlossener Untervektorraum U eines reflexiven Raumes X ist reflexiv.
2. Ein Banachraum X ist genau dann reflexiv, falls sein Dualraum X' reflexiv ist.

Beweis
todo □

Lemma 22.11
Sei X reflexiv, dann gilt:

$$X \text{ ist separabel} \iff X' \text{ ist separabel}$$

Beweis
todo □

Satz 22.12
Sei X reflexiv, dann ist U_X schwach folgenkompakt (und umgekehrt).

Beweis
todo □

Satz 22.13
Sei X ein normierter Vektorraum und $V \subseteq X$ konvex und abgeschlossen. Sei $(x_n) \subseteq V$ und $x_n \xrightarrow{w} x$, dann ist $x \in V$.

Beweis
todo □

Korollar 22.14 (Satz von Mazur)
Falls $(x_n) \subset X$ ein normierter Vektorraum ist mit $x_n \xrightarrow{w} x$, dann gibt es eine Folge von Linearkombinationen

$$y_n = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j x_j \text{ mit } \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j = 1 \text{ und } \lambda_j \geq 0$$

so dass $\|y_n - x\| \to 0$.

Beweis
todo □

23 Adjungierte Operatoren

Satz 23.1
Seien X, Y, Z normierte Vektorräume, dann gibt es zu jedem $T \in B(X,Y)$ genau einen Operator $T' \in B(Y'X')$ mit

$$(T'y')(x) = y'(Tx)$$

und folgende Eigenschaften gelten

(i) $\|T'\| = \|T\|$

(ii) $(\lambda T)' = \lambda T' \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

(iii) $(S+T)' = S' + T'$

(iv) $(S \circ T)' = T' \circ S'$

T' heißt der **duale Operator** von T.

Beweis
todo □

Bemerkung 23.2
Analogie zur Hilbertraumadjungierten:
Notation: Für $x' \in X', x \in X$ sei $x'(x) = (x, x')$. Außerdem sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nach Definition von ...

Beweis
todo □

Beispiel 23.3
a) $X = Y = L^p[0,1], K\colon [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ stetig.

$$Tx(u) \coloneqq \int_0^1 k(u,v)x(v)dv, \ \left(T'x\right)(v) = \int_0^1 k(u,v)x(u)du$$

Beweis
todo □

b) $X = Y = \ell^p, 1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. $T \in B(\ell^p).T(s_1, s_2, \cdots) = (s_2, s_3, \cdots)$, $S \in B(\ell q), S(s_1, s_2, \cdots) = (0, s_1, s_2, \cdots)$

Dann ist $T' = S$

Beweis
todo □

Proposition 23.4
Für $T \in B(X,Y)$ gilt

(i) $(\operatorname{Bild} T)^{\perp} = \operatorname{Kern} T'$

(ii) $\overline{\operatorname{Bild} T} = (\operatorname{Kern} T')_{\perp}$

(iii) $\operatorname{Kern} T = (\operatorname{Bild} T')_{\perp}$

(iv) $(\operatorname{Kern} T)^{\perp} = \overline{\operatorname{Bild} T'}$

Beweis
todo □

Proposition 23.5
Für $T \in B(X,Y)$ gilt

$$J_Y T = T'' J_X$$

Insbesondere, falls X reell ist, so ist für $X = Y$, $T = T''$.

Beweis
todo □

Satz 23.6
Es gilt:

$$T \in B(X,Y) \text{ invertierbar} \iff T' \in B(Y',X') \text{ invertierbar}$$

Insbesondere: $\sigma(T') = \sigma(T)$ für $X = Y$

Beweis
todo □

Satz 23.7 (vom abgeschlossenen Bild)
Sind X, Y Banachräume, dann sind für $T \in B(X,Y)$ äquivalent:

(i) $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen

(ii) $\exists c > 0 : \|y\| \geq c\|x\| \ \forall y \in T(x), x \in X$ mit $Tx = y$

(iii) $\operatorname{Bild} T'$ abgeschlossen

Beweis
todo □

Satz 23.8 (Schauder)
Sind X, Y, dann gilt

$$T \in K(X,Y) \iff T' \in K(Y',X')$$

Beweis
todo □

Abkürzungsverzeichnis

Beh. Behauptung

Bew. Beweis

bzgl. bezüglich

bzw. beziehungsweise

ca. circa

d. h. das heißt

Def. Definition

etc. et cetera

ex. existieren

Hom. Homomorphismus

i. A. im Allgemeinen

o. B. d. A. ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Prop. Proposition

sog. sogenannte

Vor. Voraussetzung

vgl. vergleiche

z. B. zum Beispiel

zhgd. zusammenhängend

z. z. zu zeigen