

Funktionalanalysis

Prof. Dr. Lutz Weis

Wintersemester 2015

Martin Belica

Einleitung

Die Funktionalanalysis liefert den begrifflichen Rahmen sowie allgemeine Methoden, die in weiten Teilen der modernen Analysis verwendet werden. Zum Beispiel ist es möglich Integral- und Differentialgleichungen als lineare Gleichungen in einem geeigneten unendlichdimensionalen Vektorraum (wie z.B. einem Raum stetiger oder integrierbarer Funktionen) aufzufassen. Will man nun auf diese unendlichdimensionalen Gleichungen Ideen der linearen Algebra anwenden, so treten Konvergenz- und Kompaktheitsprobleme auf, die wir in dieser Vorlesung behandeln wollen. Zu den Themen gehören:

- Beschränkte und abgeschlossene Operatoren auf normierten Räumen
- Stetigkeit und Kompaktheit auf metrischen Räumen
- Geometrie und Operatorentheorie in Hilberträumen
- Der Satz von Hahn-Banach und Dualität von Banachräumen

Die allgemeinen Aussagen werden durch konkrete Beispiele von Räumen und Operatoren der Analysis illustriert.

Erforderliche Vorkenntnisse

Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1 Einführung | 2 |
| 1.1 Räume | 2 |
| 1.2 Operatoren | 3 |
| 1.3 Anwendungen | 3 |
| 2 Normierte Räume | 5 |
| 3 Beschränkte und lineare Operatoren | 10 |
| 4 Metrische Räume | 18 |
| Abkürzungsverzeichnis | 24 |
| Stichwortverzeichnis | 25 |

1 Einführung

1.1 Räume

Sei X ein Vektorraum, $\dim X < \infty$ und sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n \|x_i\|$$

Diese Normen sind äquivalent, denn: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$

Satz 1 (Bolzano-Weierstraß)

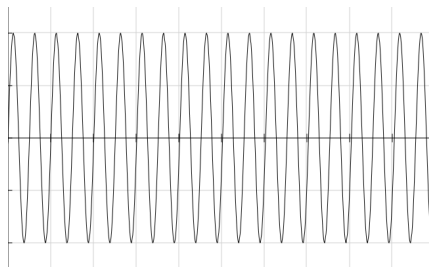
$A \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann hat jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Teilfolge.

Beispiel 1.1

$X = C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \text{stetig auf } [0, 1]\}$

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [0, 1]} \|f(t)\|$$

Dabei gilt $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2$, aber mit folgender Funktion folgt zum Beispiel: $f_n(t) =$



$$\text{gilt } \|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \|f_n - f_m\| = 1 \text{ für } n \neq m$$

\Rightarrow Satz von Bolzano-Weierstraß gilt im ∞ -dimensionalen i.A. nicht!

1.2 Operatoren

Sei $N = \dim X$, $M = \dim Y$ und seien (e_n) bzw. (f_n) Basen von X bzw. Y .
Sei $T : X \rightarrow Y$ gegeben durch:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \alpha_n \rightarrow \sum \alpha_n e_n \downarrow & & \downarrow \beta_n \rightarrow \sum \beta_n f_n \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

wobei $x = \sum \alpha_n e_n$, $Tx = \sum \beta_n f_n$, $\beta_m = \sum_{n=1}^N a_{mn} \alpha_n$.

Daraus folgt:

- T ist stetig
- $X = Y \iff T$ injektiv $\iff T$ surjektiv (Dimensionsformel)
(Die Gleichung $Tx = y$ ist eindeutig lösbar \iff Gleichung hat für alle $y \in Y$ eine Lösung.)
- Falls A selbstadjungiert ist, d.h. $A = A^*$, gibt es eine Basis aus Eigenvektoren (e_n) von A ,
d.h. $T(\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n) = \sum \alpha_n \lambda_n e_n$, wobei λ_n Eigenwerte sind $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Beispiel 1.2

$X = C^1[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \text{stetig auf } [0, 1]\}$

$Tf = f'$, $T : X \rightarrow Y$ stetig. (Aber: $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, hier ist T nicht definiert.)

T ist nicht stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ -Norm, da:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}, \quad \text{dann: } \|f_n\| \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

$$Tf_n(t) = i\sqrt{n} e^{int}, \quad \text{mit: } \|Tf_n\|_\infty \rightarrow \infty, \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Beispiel 1.3

$X = L_2 = \{(a_n) : \left(\sum_{n \geq 1} \|a_n\|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$

$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$

T ist injektiv, aber nicht surjektiv

1.3 Anwendungen

(1) Fredholm'sche Integralgleichungen

$X = C[0, 1]$, $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$Tf(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds$$

1 Einführung

Analogie zum endlich dim. ('Verallg. der Matrixmultiplikation'): $T(f_j)(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$

T ist in diesem Fall linear und stetig und es gilt die Fredholm'sche Alternative:

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (\lambda Id - T)(f) = y, \quad f, g \in C[0, 1]$$

Dann existiert eine Lösung genau dann, wenn diese eindeutig ist.

(2) Dirichletproblem

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, offen, beschränkt, glatter Rand. Sei $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Gesucht ist ein $f \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, so dass $\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$ in Ω und $f|_{\partial\Omega} = g$

Beispiel: Durch Wärmeverteilung auf dem Rand auf WV im Inneren schließen.

Lösung: Dirichletintegral $J(u) = \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx$, wobei $u \in M = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = g\}$

Sei u_0 das absolute Minimum von J , d.h. $J(u_0) = \inf\{J(w) : w \in M\}$

$u_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $u_0 = 0$ in einer Umgebung von $\partial\Omega$. $\epsilon \rightarrow J(u_0 + \epsilon v)$

$$\frac{d}{d\epsilon} J(u_0 + \epsilon v) = \int_{\Omega} \frac{d}{d\epsilon} (\nabla u_0 + \epsilon \nabla v)^2 dx = 2 \int_{\Omega} (\nabla u_0 + \epsilon \nabla v)(\nabla v) dx \Big|_{\epsilon=0} = 2 \int_{\Omega} (\nabla u_0)(\nabla v) dx$$

Mit $0 \geq J(u_0 + \epsilon v) - J(u_0) \geq 0 : \int (\nabla u_0)(\nabla v) dx \stackrel{\text{P.I.}}{=} - \int (\nabla u_0) v dx = 0$

$$\Rightarrow \nabla u_0 = 0, \text{ außerdem } u_0|_{\partial\Omega} = g \text{ (s.o.)}$$

Im allgemeinen existiert da absolute Minimum $u_0 \in J$ aber nicht.

Ausweg: $X = \{f \in L^2(\Omega), f' \in L^2(\Omega)\} \supset \{f \in C(\bar{\Omega}), f' \in C(\bar{\Omega})\}$

In diesem Raum X (Sobolevräume) gibt es ein Minimum u_0 von J .

(3) Sturm-Liouville Problem

$X = C^2([0, 1]), Tu = (pu')' + qu$, mit $q \in C[0, 1], p \in C^1[0, 1]$

Problem: bei gegebenen $f \in C[0, 1]$ find $u \in X$ mit $Tu = f, v(0) = 0, v'(1) = 0$

$Y = \{f \in L^2[0, 1], f' \in L^2[0, 1]\}$ Hilbertraum.

Orthonormalbasis (e_n) von Y wäre: $\|e_n\|_2 = 1, \int e_n(x) e_m(x) dx = 0$ für $m \neq n$

$f \in Y : f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ mit $\|f\|^2 = \sum |\alpha_n|^2$

Die (e_n) sind außerdem Eigenvektoren des Operatoren T , d.h. $T e_n = \lambda_n e_n$

$$Ty = f \Rightarrow \int Ty(x) e_n(x) dx = \int f(x) e_n(x) dx, y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Gesucht sind die Koeffizienten α_n

$$\begin{aligned} \int f(x) e_n(x) dx &= \sum_m \lambda_m \alpha_m \int T e_m(x) e_n(x) dx \\ &= \lambda_n \alpha_n \int e_n(x) e_n(x) dx \\ \Leftrightarrow \alpha_n &= \frac{1}{\lambda_n} \int f(x) e_n(x) dx \end{aligned}$$

2 Normierte Räume

Definition 2.1

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt eine **Norm**, wenn

$$(1) \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bemerkung:

Falls $\|\cdot\|$ all die oben genannten Eigenschaften erfüllt außer $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, dann heißt $\|\cdot\|$ Halbnorm

Vereinbarung:

Die Menge $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ heißt **Einheitskugel**.

Eine Folge (x_n) des normierten Raums X **konvergiert** gegen ein $x \in X$, falls $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Bemerkung:

Für zwei Elemente $x, y \in (X, \|\cdot\|)$ in normierten Räumen gilt auch die umgekehrte Dreiecksungleichung ($\|\|x\| + \|y\|\| \leq \|x + y\|$)

Beispiel 2.2

Sei $X = \mathbb{K}^n$, $X = (X_1, \dots, X_n)$, $X_i = \mathbb{K}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j^p| \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty (p = 2 : \text{Euklidische Norm})$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{j=1}^n |x_j|$$

Beh: $\|\cdot\|$ ist Norm auf \mathbb{K}^n für $1 \leq p \leq \infty$

$\|x + y\|_\infty = \sup_{j=1}^n |x_j + y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ Für $p \in (1, \infty), p \neq 2$: siehe Übungsaufgabe (Fall $p = 2$ läuft über Cauchy-Schwarz)

Beachte: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n \|x\|_\infty$

Definition 2.3

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen äquivalent auf X , falls es $0 < m, M < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

Satz 2.4

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Beweis

Wähle eine algebraische Basis (e_1, \dots, e_n) von X , wobei $n = \dim X < \infty$.

Definiere $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

z. z. die gegebene Norm $\|\cdot\|$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|$.

Beweis:

In der einen Richtung betrachte:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &=: \nu \|x\| \end{aligned}$$

Für die Umkehrung benutze die Funktion $J : \mathbb{K}^n \rightarrow X$, $J(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Die Abbildung $y \in \mathbb{K}^n \rightarrow \|Jy\|$ ist stetig, denn

$$\|Jy\| - \|y\|_{\mathbb{K}^n} = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\begin{aligned} \text{und } \|\|Jy\| - \|Jz\|\| &\leq \|\|Jy - Jz\|\| \leq \|\|J(y - z)\|\| \\ &\leq M \|\|J(y - z)\|\| \\ &= M \|y - z\|_{\mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von $Jy \rightarrow \|Jy\| \in \mathbb{R}$

Sei $S = \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\|_2 = 1\}$. Dann ist S abgeschlossen und beschränkt. Die Abbildung $N := y \in S \rightarrow \|Jy\| > 0$ ist wie in (*) gezeigt stetig. Nach Analysis nimmt N sein Minimum in einem Punkt $y_0 \in S$ an. Setze

$$\begin{aligned} m &= \inf\{\|x\| : \|x\| = 1\} = \inf\{\|Jy\| : y \in S\} \\ &= \|Jy_0\| > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Also } m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} \Rightarrow \|x\| \leq m \|x\|$$

Proposition 2.5

Für zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf X sind äquivalent:

- a) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind äquivalent
- b) Für alle $(x_n) \subset X, x \in X$ gilt $\|x_m - x\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_m - x\|_2 \rightarrow 0$
- c) Für alle $(x_n) \subset X$ gilt $\|x_m\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_m\|_2 \rightarrow 0$
- d) Es gibt Konstanten $0 < m, M < \infty$, so dass $mU_{(X, \|\cdot\|_1)} \leq U_{(X, \|\cdot\|_2)} \leq MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$

Beweis

a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) folgt direkt durch die Definition von äquivalenten Normen.

c) \Rightarrow d) Annahme: Es existiert kein M mit $U_{(X, \|\cdot\|_2)} \subset MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$.

Dann gibt es eine Folge $x_n \in U_{(X, \|\cdot\|_2)}$ mit $\|x_n\|_1 \geq n^2$

Setze $y_n = \frac{1}{n}x_n$. Dann gilt $\|y_n\|_1 \rightarrow 0$ und $\|y_n\|_2 \rightarrow \infty$.

Widerspruch zu c).

d) \Rightarrow a) Gegeben ist $U_{(X, \|\cdot\|_2)} \subset MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$

Das ist äquivalent zu $\|x\|_2 \leq M\|x\|_1$

Analog folgt aus $mU_{(X, \|\cdot\|_1)} \subset U_{(X, \|\cdot\|_2)}$ dann $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2$.

Also $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$

Vereinbarung:

Sei $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^N : x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } n \in N\}$ der **Folgenraum**
und $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der Einheitsvektor, wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

Beispiel 2.6

- $l^p = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^N : \|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$
- $l^\infty = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^N : \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$
- $c_0 = \{x = (x_n) \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0\}$

Gültigkeit der Dreiecksungleichung beweist man ähnlich wie bei $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$.

Lemma 2.7

Minkowskii-Ungleichung: $(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Hölder-Ungleichung: mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$

Bemerkung:

Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen $\|\cdot\|_p$ auf \mathbb{F} nicht äquivalent.

Beweis

Sei $p > q$, setze

$$X_n := \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j, \quad e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$$

Damit gilt $x_n \in \mathbb{F}$ und weiter

$$\|x_n\|_p = \left(\sum_{j=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{p}} \simeq (\ln(2))^{\frac{1}{p}}$$

aber $\|x_n\|_q \rightarrow \infty$, also sind $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$ keine äquivalente Normen.

Beispiel 2.8

a) Raum der stetigen Funktionen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, $\|f\| = \sup_{u \in \Omega} |f(u)|$
 $\Rightarrow \|f - f_n\| \rightarrow 0$ bedeutet gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f auf Ω .

b) Raum der differentierbaren Funktionen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$
 $D^\alpha f(x) = \frac{\delta^{|\alpha|}}{\delta x_1^{\alpha_1} \dots \delta x_n^{\alpha_n}} f(x)$, wobei $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Definition 2.9

Wir nennen $C_b^m(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \text{ sind stetig in } \Omega, \text{ beschränkt auf } \Omega \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq n\}$ den **Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen**.

Auf C_b^m definieren wir die Norm: $\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$

Bemerkung:

Auf $C_b^m[0, 1]$ ist eine äquivalente Norm zu $\|f\|_{C_b^m}$ gegeben durch

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

Denn $f^{(i)}(t) = f^{(i)}(0) + \int_0^t f^{(i+1)}(s) ds$ und damit $\|f^{(i)}\|_0 \leq |f^{(i)}(0)| + \|f^{(i+1)}\|_\infty$

Beispiel 2.10

$X = C(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt.

Definiere $\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\int_\Omega |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$ und betrachte $f_k(t) = t^k, t \in [0, 1]$, dann gilt:

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad p < \infty$$

Definition 2.11 (Quotientenräume)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. $M \subset X$ sei abgeschlossener, linearer Unterraum.

(abgeschlossen: d.h. für alle $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x \in M$)

Definiere $\hat{X} = X/M$, $\hat{x} \in X/M : \hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$

Dabei gilt unter anderem $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = x_1 + x_2$ und $\lambda \hat{x}_1 = \lambda x_1$; \hat{X} bildet somit einen Vektorraum.

Definieren wir eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|y\|_X : y \in \hat{X}\}$

Behauptung: $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ein normierter Raum.

Beweis: Sei $\hat{x} \in \hat{X}$ beliebig mit $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = 0$

dann existiert ein $y_n \in \hat{X}$ mit $\|y_n\| \rightarrow 0$ und $x - y_n \in M$

$$\Rightarrow x \in M, \hat{x} = 0$$

Zu $\epsilon < 0$ wähle für $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}, y_1, y_2 \in M$ mit

$$\|\hat{x}_1\| \geq \|x_i - y_i\| - \epsilon$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\|x \hat{+} y\| &\leq \|x_1 + x_2 - y_1 - y_2\| \\ &\leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \\ &\leq \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| + 2\epsilon\end{aligned}$$

Bemerkung:

Ist $\|\cdot\|$ nur eine Halbnorm auf X , so ist $M = \{x : \|x\| = 0\}$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum von X und der Quotientenraum $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ist ein normierter Raum.

Beispiel 2.12

- Hölderstetige Funktionen

Wenn $h_\alpha(f) = \sup_{u,v \in \mathbb{R}, u \neq v} \frac{\|f(u) - f(v)\|}{|u - v|^\alpha} < \infty$ ($\alpha \in (0, 1]$), dann nennt man f hölderstetig.

$$C^\alpha(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : h_\alpha(f) < \infty\} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

Im Moment ist $h_\alpha(\cdot)$ eine Halbnorm. Unter der Voraussetzung Ω zusammenhängend gilt aber weiter:

$$h_\alpha(f) = 0 \iff f \equiv c \text{ konstant}$$

Wenn z.B. $M = \{\mathbb{1}_\Omega\}$ und $V = C^\alpha/M$ ist oben genanntes sogar ein normierter Raum.

- Lebesgues-Integrierbare Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : |f|^p \text{ ist lebesgue-integrierbar auf } \Omega\}$. Wir definieren $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, wobei $\|\cdot\|_p$ hier eine Halbnorm bildet.

$$\|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \text{ fast überall auf } \Omega$$

Wähle $M = \{l : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f = 0 \text{ fast überall auf } \Omega\}$.

Dann ist

$$\mathbb{L}^p(\Omega) := \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{M} \text{ ein normierter Raum.}$$

3 Beschränkte und lineare Operatoren

Definition 3.1

Eine Teilmenge V eines normierten Raums $(X, \|\cdot\|)$ heißt **beschränkt**, falls

$$c := \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X, \|\cdot\|)}$$

Bemerkung:

Eine konvergente Folge $(x_n) \in X, x_n \rightarrow x$ ist beschränkt, denn $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$ für fast alle m .

Satz 3.2

Seien X, Y normierte Räume. Für einen linearen Operator $S : X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

- a) T stetig, d.h. $x_n \rightarrow x$ impliziert $Tx_n \rightarrow Tx$
- b) T stetig in 0
- c) $T(U_{(X, \|\cdot\|)})$ ist beschränkt in Y
- d) Es gibt ein $c < \infty$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$

Beweis

a) \Rightarrow b) klar, ist ein Spezialfall.

b) \Rightarrow c) Wäre c) falsch, dann gibt es ein $x_n \in U_X$ mit

$$\|Tx_n\| \geq \frac{1}{n^2}$$

Setze $y_n = \frac{1}{n}x_n$, dann gilt

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{n}\|x_n\| \rightarrow 0, \|T(y_n)\| = n^2\|T(x_n)\| \geq \frac{n^2}{n} \rightarrow \infty$$

Widerspruch zur Voraussetzung.

c) \Rightarrow d) Sei $T(U_X) \subset U_Y$

Für $x \in X \setminus \{0\}, \frac{x}{\|x\|} \in U_X$ folgt:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) &\in cU_Y \\ \Rightarrow \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| &\leq c \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \end{aligned}$$

d) \Rightarrow a) Für $x_n \rightarrow x$ in X folgt:

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx\| &= \|T(x_n - x)\| \\ &\leq c\|x_n - x\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx \text{ in } Y$$

Definition 3.3

Seien X, Y normierte Räume. Mit $B(X, Y)$ bezeichnen wir den **Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren** $T : X \rightarrow Y$. Ist $X = Y$ schreiben wir auch kurz $B(X) := B(X, X)$.

Für $T \in B(X, Y)$ setze

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}\end{aligned}$$

Die Norm $\|T\|$ von T ist die kleinste Konstante c , für welche die Gleichung $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.

Satz 3.4

$(B(X, Y), \|\cdot\|)$ ist ebenfalls ein normierter Raum und für $X = Y$ gilt für $S, T \in B(X)$:

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\|\|T\|$$

Beweis

$$\|T\| \geq 0, \quad \|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \text{ für } \|x\| \leq 1 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$\begin{aligned}\|(T + S)(x)\| &= \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\|_Y + \|Sx\|_Y \\ &\leq \|T\| + \|S\|\end{aligned}$$

Nehme das Supremum über $\|x\| \leq 1$:

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

$$\begin{aligned}\|(S \cdot T)(x)\|_Y &= \|S(Tx)\|_Y \leq \|S\|\|Tx\| \\ &\leq \|S\|\|T\|\|x\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|ST\| \leq \|S\|\|T\|$$

Beispiel 3.5

a) $Id x = x, \quad \|Id\| = 1$

b) Falls $\dim X = n < \infty, Y$ normierter Raum, dann sind alle linearen Operatoren $T : X \rightarrow Y$ beschränkt.

Beweis

Wähle die Basis e_1, \dots, e_n von X

Für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ gilt:

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i T e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T e_i\| \\ &\leq \max_{i=1}^n \|T e_i\|_Y \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &\leq c \|x\|, \text{ da } \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \end{aligned}$$

Aber: Wenn $\dim X = \infty, \dim Y < \infty$ so gibt es viele unbeschränkte, lineare Operatoren von X nach Y .

c) $X = C^\infty(0, 1), \|f\|_\infty = \sup_{u \in (0,1)} |f(u)|$
 $T : X \rightarrow X, T f = f', f_k(t) = e^{i2\pi k t} \in X, T f_k(t) = 2\pi i k f_k(t)$
 $\|f_k\| = 1, \|T f_k\| = 2\pi k \rightarrow \infty$

d) $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ bis auf endlich viele } n\}$

$$T : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}, T((x_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n x_n \in \mathbb{R} \|T e_n\| = n \rightarrow \infty$$

Beispiel 3.6 (Integraloperator)

$X = Y = C(\bar{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Gegeben sei $k \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

Für $f \in C(\bar{\Omega})$ setze: $T f(u) = \int_{\Omega} k(u, v) f(v) dv, \quad (A(f_j))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j, A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

Dann ist $T f \in C(\bar{\Omega})$ (nach Lebesgueschem Konvergenzsatz)

$$\begin{aligned} |T f(u)| &\leq \int_{\Omega} |k(u, v)| |f(v)| dv \\ &\leq \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \sup_{v \in \Omega} |f(v)| \end{aligned}$$

sup über $u \in \Omega$ liefert dann:

$$\begin{aligned} \|T f\|_\infty &\leq \sup_{u \in \Omega} \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \|f\|_\infty \\ \Rightarrow \|T\| &= \sup_{u \in \Omega} \int_{\Omega} |k(u, v)| dv < \infty, \end{aligned}$$

Die Abbildung $u \in \bar{\Omega} \rightarrow \int |k(u, v)| dv \in \mathbb{R}$ ist stetig nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue.

Beweis

" \leq " ist klar

" \geq " Falls $k(u, v) \geq 0$ dann ist $T \cdot \mathbf{1}(u) = \int k(u, v) dv = \int |k(u, v)| dv$

$$\|T \cdot \mathbf{1}\| = \sup_{u \in \Omega} \int |k(u, v)| dv \leq \|T\|, \text{ d.h. } \|\mathbf{1}\| = 1$$

Skizze:

$$\sup \int |k(u, v)| dv \sim \int |k(u_0, v)| dv = \int k(u_0, v) g(v) dv$$

mit $g(v) = \text{sign}(v)k(u_0, v)$, g ist aber nicht stetig.

Ggf. Approximation des Signums durch stetige Funktionen.

Beispiel 3.7 (Kompositionsoperator)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$\sigma : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega} \text{ stetig, für } f \in C(\bar{\Omega}) : Tf(u) = f(\sigma(u))$$

z.B.: σ als Transposition der Elemente in Ω

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \|T\| = 1$$

Beispiel 3.8 (Differentialoperatoren)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}$, $X = C^m(\bar{\Omega})$, $Y = C_b(\Omega)$,

$$T : X \rightarrow Y, \quad Tf(u) = \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha D^\alpha f(u), u \in \mathbb{R}, a_\alpha \in C\bar{\Omega}$$

$$\text{damit } \|Tf\|_\infty \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|a_\alpha\|_\infty \|D^\alpha f\|_\infty \leq c \|f\|_\infty$$

Beispiel 3.9 (Matrizenmultiplikation)

Für $p \in [1, \infty]$ und $T \in B(l^p)$ setzen wir

$$e_l := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad l \in \mathbb{N}, \quad \text{wobei die 1 an l-ter Stelle steht.}$$

und $a_{kl} = (Te_l)_k$, sowie $A = (a_{kl})_{k,l \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow (Tx)_k = \left(\sum_{l=1}^{\infty} x_l Te_l \right)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l, \quad k \in \mathbb{N} \Rightarrow Tx = Ax \text{ (unendliches Matrixprodukt)}$$

a) Die Hills-Tanerkin-Bedingung (nur Hinreichend)

Sei $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Setze

$$c := \left(\sum_{k \geq 1} \left(\sum_{l \geq 1} |a_{kl}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

so definiert T einen Operator $T \in B(l^p)$ mit $\|T\| \leq c$

Beweis

(i) Wohldefiniertheit: (und Beschränktheit)

Für $x \in l^p$ folgt

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{l^p}^p &= \sum_{k \geq 1} |(Tx)_k|^p \\ &= \sum_{k \geq 1} \left| \sum_{l \geq 1} a_{kl} x_l \right|^p \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{l \geq 1} |a_{kl}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{l \geq 1} |x_l|^p \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= c^p \|x\|_{l^p}^p < \infty \end{aligned}$$

(ii) Linearität

Wegen $c < \infty$ ist $(\sum_l |a_{kl}|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty, \forall k \in \mathbb{N}$

Für $x \in l^p$ konvergiert die Reihe nach Hölder. Damit ist T offensichtlich linear.

b) Der Fall l^1 :

Es ist $T \in B(l^1)$ genau dann, wenn

$$c_1 := \sup_k \sum_l |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist $\|T\| = c_1$.

Beweis

" \Rightarrow " Sei $T \in B(l^1)$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_k |a_{kl}| &= \sum_k |(Te_l)_k| \\ &= \|Te_l\|_{l^1} \\ &\leq \|T\| \|e_l\|_{l^1} = \|T\| < \infty \end{aligned}$$

" \Leftarrow " folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem gilt $\|T\| < c_1$

c) Der Fall l^∞ :

Es ist $T \in B(l^\infty)$ genau dann, wenn

$$c_\infty := \sup_k \sum_l |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist $\|T\| = c_\infty$

Beweis

" \Rightarrow " Sei $T \in B(l^\infty)$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze dann $x^{(k)} = \begin{cases} \frac{|a_{kl}|}{a_{kl}} & a_{kl} \neq 0 \\ 0 & a_{kl} = 0 \end{cases}$

dann ist $x^{(k)} \in l^\infty$ mit $\|x^{(k)}\|_{l^\infty} = 1$ und weiter

$$\begin{aligned} \sum_l |a_{kl}| &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l^{(k)} \right| \\ &= |(Tx^{(k)})_k| \\ &\leq \|Tx^{(k)}\|_{l^\infty} \\ &\leq \|T\| \|x^{(k)}\|_{l^\infty} = \|T\| \\ &\Rightarrow c_\infty \leq \|T\| \end{aligned}$$

" \Leftarrow " folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem gilt $\|T\| < \infty$

d) Interpolation

Ist $T \in B(l^1) \cap B(l^\infty)$, dann ist $T \in B(l^p)$ für alle $p \in (1, \infty)$ mit $\|T\| \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}}$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Beweis

Für $x \in l^p$ setzen wir $y_k := |(Tx)_k|^{p-1}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \|y\|_{l^q} = \left(\sum_{k \geq 1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{l^p}^p &= \sum_{k \geq 1} y_k |(Tx)_k| \leq \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} y_k |a_{kl}| |x_l| \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} |a_{kl}|^{\frac{1}{p}} |a_{kl}|^{\frac{1}{q}} |y_k| |x_l| \\ &\leq \left(\sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} |a_{kl}| |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} |a_{kl}| |x_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_\infty^{\frac{1}{q}} \|y\|_{l^q} c_1^{\frac{1}{p}} \|x\|_{l^p} \\ &= c_\infty^{\frac{1}{q}} c_1^{\frac{1}{p}} \|x\|_{l^p} \|Tx\|_{l^p}^{p-1} \\ &\Rightarrow \|Tx\|_{l^p} \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}} \|x\|_{l^p} \text{ und } \|T\| \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Definition 3.10

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \rightarrow Y$ linear.

- a) T heißt **Isometrie**, falls $\|Tx\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$
- b) T heißt **stetige Einbettung**, falls T stetig und injektiv ist
- c) T heißt **isomorphe Einbettung**, falls T injektiv ist und ein $c > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{c} \|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X$$

In diesem Fall identifizieren wir oft X mit dem Bild von T in Y , $X \cong T(X) \subset Y$

- d) T heißt **Isomorphismus**, falls T bijektiv und stetig ist und $T^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist. (d.h. falls $\exists c > 0 : \frac{1}{c} \|y\|_Y \leq \|T^{-1}y\|_X \leq c \|y\|_Y$)
- In diesem Fall identifizieren wir $X \cong Y$ und sagen X und Y sind isomorph.
(da X, Y normierte Vektorräume sind, fordern wir T, T^{-1} stetig)

Beispiel 3.11

- a) Seien $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ normierte Vektorräume. Dann gilt

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \iff I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2), Ix = x \text{ ist isomorph}$$

- b) $I : c_0 \hookrightarrow l^\infty, Ix = x$ ist isometrische Einbettung

Definition 3.12

Sei X ein normierter Vektorraum der Raum

$$X' = B(X, \mathbb{K})$$

heißt **Dualraum** von X oder Raum der linearen Funktionalen.

Beispiel 3.13

Sei $X = l^p$ für $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Die Abbildung

$$\Phi_p : l^p \rightarrow (l^p)', \quad [\Phi_p(x)](y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x \in l^p, y \in l^q$$

Ist ein isometrischer Isomorphismus, d.h. $(l^p)' \cong l^q$, (insbesondere $(l^2)' \cong l^2$)

Beweis

Nach Hölder konvergiert die Reihe $[\Phi_p(x)](y)$ absolut mit

$$|[\Phi_p(x)](y)| \leq \sum_n |x_n y_n| \leq \|x\|_{l^q} \|y\|_{l^p}$$

Da $\Phi_p(x)$ linear in Y ist, folgt $\Phi_p(x) \in (l^p)'$ mit

$$\|\Phi_p(x)\|_{(l^p)'} \leq \|x\|_{l^q}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\|\Phi_p(x)\|_{(l^p)'} \geq \|x\|_{l^q}$ und Φ_p surjektiv ist. Sei $Y \in (l^p)'$, dann setze $x_n := y'(e_n)$, $n \in \mathbb{N}$ und $x = (x_n)_{n \geq 1}$ Setze außerdem

$$z_n := \begin{cases} \frac{|x_n|}{x_n} & x_n \neq 0 \\ 0 & x_n = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |x_n|^q &= \sum_{n=1}^N x_n z_n \\ &= \sum_{n=1}^N y'(e_n) z_n = y' \left(\sum_{n=1}^N z_n e_n \right) \\ &\leq \|y'\|_{(l^p)'} \left\| \sum_{n=1}^N z_n e_n \right\|_{l^p} \\ &= \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^q \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|y'\|_{(l^p)'}, \text{ wobei } 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|_{l^q} \leq \|y'\|_{l^\infty} < \infty, \text{ d.h. } x \in l^q \end{aligned}$$

Da für $y \in l^p$

$$\|y - \sum_{n=1}^N y_n e_n\|_{l^p}^p = \sum_{n \geq N+1} |y_n|^p \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty$$

folgt

$$|y'(y) - \sum_{n=1}^N y'(y_n e_n)| \leq \|y'\| \|y - \sum_{n=1}^N y_n e_n\|_{l^p} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

und damit

$$\begin{aligned} [\Phi_p(x)](y) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n e_n) \quad \forall y \in l^p \\ &= y'(y) \end{aligned}$$

d.h. $\Phi_p(x) = y'$ und damit Φ_p surjektiv. Außerdem gilt nach (12)

$$\|\Phi_p(x)\|_{(l^p)'} \geq \|x\|_{(l^q)'}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Bemerkung:

- a) Analog zu obigem zeigt man $(l^1)' \cong l^\infty$ und $(c_0)' \cong l^1$
- b) Eine ähnliche Aussage gilt auch für \mathcal{L}^p -Räumen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: Hier gilt:

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)' \cong \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$$

wobei $p \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bezüglich der Dualität: $[\Phi_p(f)](g) (= \langle f, g \rangle) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x)$

Beispiel 3.14

- a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $x \in K$. Dann definieren wir

$$\delta_x(f) := f(x) \text{ für } f \in C(K)$$

Wir versetzen $C(X)$ mit der Supremumsnorm. Dann gilt:

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{\infty}$$

und offensichtlich ist δ_x linear, d.h. $\delta_x \in (C(K))'$ mit $\|\delta_x\| \leq 1$

- b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und μ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}(K)$. Dann definieren wir

$$\delta_{\mu}(f) = \int_K f(x)d\mu(x) \text{ für } f \in C(K)$$

Dann gilt

$$|\delta_{\mu}(f)| \leq \mu(K)\|f\|_{\infty}$$

Da δ_{μ} linear ist, gilt $\delta_{\mu} \in (C(K))'$ mit $\delta_{\mu} \leq \|\mu(K)\|$. In diesem Sinne sind Maße Elemente von $(C(K))'$

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass $(C(K))' \cong M(K)$, wobei $M(K)$ die Menge der 'regulären' Borelmaße versehen mit der Variationsnorm ist. Die Dualität ist gegeben durch

$$(Tu)(f) = \int_K f(x)d\mu(x)$$

4 Metrische Räume

Definition 4.1

Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf M , falls $\forall x, y, z \in M$:

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \text{ (positive Definitheit)}$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (Symmetrie)}$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

Das Tupel (M, d) nennen wir dann einen metrischen Raum.

Lemma 4.2

Eine Folge $(x_n)_{n \geq 1} \subset M$ konvergiert gegen $x \in M$, falls

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Notation: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (in M)

Bemerkung:

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist stets eindeutig, denn:

Sei $(x_n)_{n \geq 1} \subset M$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in M$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \in M$, dann folgt:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \\ &\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

d.h. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

Beispiel 4.3

a) Sei X ein normierter Vektorraum und $M \subset X$ (nichtleere) Teilmenge.

Dann definieren wir $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in M$ eine Metrik auf M

Ein Unterschied hier: Eine Norm setzt eine lineare Struktur auf X voraus, eine Metrik macht auch Sinn auf nicht-linearen Teilmengen.

b) Sei M eine nichtleere Menge, dann definieren wir die **diskrete Metrik** auf M durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

Dann ist (M, d) ein metrischer Raum und es gilt:

$$x_n \rightarrow x \text{ in } M \iff \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = x \quad \forall n \geq N$$

Beispiel 4.4

- a) Sei X ein Vektorraum und p_j für $j \in \mathbb{N}$ Halbnormen auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X$ 0 ein $K \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_K > 0$. Dann definiert

$$p := \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}, \quad x, y \in X$$

eine Metrik auf X mit

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff p_j(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Beweis siehe Übung

- b) Für $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{K}\}$ und $p_j(x) := |x_j|, j \in \mathbb{N}$ definiert also

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} \text{ gerade die komponentenweise Konvergenz auf } X$$

- c) In l^∞ entspricht die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_{l^\infty}$ gerade der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $x_n := (x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ gegen $x := (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\|x_n - x\|_{l^\infty} = \sup |x_{n_i} - x_i| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

d.h. in $C[a, b]$ entspricht die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ebenfalls die gleichmäßige Konvergenz von Funktionen

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ in } [a, b] &\iff \|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0 \\ &\iff f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig.} \end{aligned}$$

Definition 4.5

Sei (M, d) ein metrischer Raum

- a) Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **abgeschlossen** (in M), falls für alle in M konvergenten Folgen $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$ der Grenzwert von (x_n) in A liegt
- b) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen** (in M), falls zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$\{y \in M : d(x, y) < \epsilon\} \subset U$$

Bemerkung:

- a) Wir benutzen die Bezeichnungen

$$K(x, r) := \{y \in M : d(x, y) < r\} \quad \text{offene Kugel}$$

$$\bar{K}(x, r) := \{y \in M : d(x, y) \leq r\} \quad \text{abgeschlossene Kugel}$$

für $x \in M, r > 0$. Man sieht leicht, dass $K(x, r)$ offen und $\bar{K}(x, r)$ abgeschlossen ist.

Beweis

- (i) Sei $y \in K(x, r)$ und wähle $\rho := r - d(x, y) > 0$

Wir zeigen: $K(y, \rho) \subset K(x, r)$ (Dann ist $K(x, r)$ offen). Sei dazu $z \in K(y, \rho)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \leq r - \rho + d(z, y) \\ &\leq r - \rho + \rho = r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z \in K(x, r)$$

Da z beliebig war, folgt die Behauptung.

- (ii) Sei $(y_n)_{n \geq 1} \subset \bar{K}(x, r)$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in M$. Wir müssen zeigen, dass $y \in \bar{K}(x, r)$ (Dann ist $\bar{K}(x, r)$ abgeschlossen).

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, y_n) + d(y_n, y) \\ &\leq r + d(y_n, y) \rightarrow r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq r, \text{ d.h. } y \in \bar{K}(x, r).$$

- b) \emptyset, M sind sowohl offen, als auch abgeschlossen (in M)
 c) Bezüglich der diskreten Metrik d aus Beispiel (a)) ist $\{x\} \subset M$ offen für jedes $x \in M$, da

$$K(x, r) = \{x\} \subset \{x\} \text{ für } r \in (0, 1]$$

Wir fassen als nächstes die grundlegenden Eigenschaften offener und abgeschlossener Mengen zusammen.

Proposition 4.6

Sei (M, d) ein metrischer Raum und I eine beliebige Indexmenge

- a) $A \subset M$ ist abgeschlossen in M genau dann, wenn $U = M \setminus A$ offen ist
 b) Für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen $(A_i)_{i \in I}$ sind

$$A := \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{und} \quad A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_N} \quad (i_1, \dots, i_N \in I)$$

abgeschlossen in M .

- c) Für eine beliebige Familie offener Mengen $(U_i)_{i \in I}$ sind

$$U := \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{und} \quad U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_N} \quad (i_1, \dots, i_N \in I)$$

offen in M .

Beweis

- a) Todo: missing in my notes if you have it just send me an email
 b) folgt aus a) & c), da

$$M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} M \setminus A_i$$

- c) Sei $x \in U$. Dann existiert ein U_{i_0} mit $x \in U_{i_0}$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : K(x, r) \subset U_{i_0} \subset U, \text{ d.h. } U \text{ ist offen.}$$

Sei $x \in U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_N}$. Dann existieren $r_1, \dots, r_N > 0$ mit

$$K(x, r_n) \subset U_{i_n} \quad n = 1, \dots, N$$

Setze $r := \min\{r_1, \dots, r_N\} > 0$. Dann ist $K(x, r) \subset U_{i_n} \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$

$$\Rightarrow K(x, r) \subset U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_N} \text{ ist offen.}$$

Definition 4.7

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $V \subset M$. Dann heißt

- a) $\bar{V} := \bigcap \{A \subset M : A \text{ ist abgeschlossen mit } V \subset A\}$ der **Abschluss** von V .
- b) $\mathring{V} := \bigcup \{U \subset M : U \text{ ist offen mit } U \subset V\}$ das **Innere** von V .
- c) $\partial V := \bar{V} \setminus \mathring{V}$ der **Rand** von V .

Hierfür gelten die folgenden Eigenschaften:

Proposition 4.8

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $V \subset M$

- a) (i) \bar{V} ist die kleinste abgeschlossene Menge, die V enthält
- (ii) V ist abgeschlossen $\iff V = \bar{V}$
- (iii) $\bar{V} = \{x \in M : \exists (x_n) \subset V \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x\} =: \tilde{V}$
- b) (i) \mathring{V} ist die größte offene Teilmenge von V .
- (ii) V ist offen $\iff V = \mathring{V}$
- (iii) $\mathring{V} = \{x \in M : \exists \epsilon > 0 \text{ mit } K(x, \epsilon) \subset V\} =: \hat{V}$
- c) (i) ∂V ist abgeschlossen
- (ii) $\partial V = \{x \in M : \exists (x_n) \subset V, (y_n) \subset M \setminus V \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x\}$

Beweis

- a) (i) Nach Definition gilt
- (ii) folgt aus (i)
- (iii)
- b) (i) zeigt man wie a) (i)
- (ii) folgt aus (i)
- (iii)
- c) (i)
- (ii)

Definition 4.9

Sei (M, d) ein metrischer Raum

- a) Eine Menge $V \subset M$ heißt **dicht** in M , falls $\bar{V} = M$, d.h. jeder Punkt in M ist Grenzwert einer Folge aus V .
- b) M heißt **seperabel**, falls es eine abzählbare Teilmenge $V \subset M$ gibt, die dicht in M liegt.

Bemerkung:

- a) All die Begriffe und Bezeichnungen aus TODO: Verweise werden wir auch in normierten Räumen benutzen bzgl. der kanonischen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

- b) Sei (M, d) ein metrischer Raum, $U \subset M$. Dann ist auch (U, d) ein metrischer Raum. Für $V \subset U$ muss man dann aber unterscheiden bzgl. Abgeschlossenheit (bzw. Offenheit) von V in U oder in M . Man sagt dann, dass V **relativ offen** bzw. **relativ abgeschlossen** in U ist.

Beispiel 4.10

- a) Sei X ein normierter Vektorraum, $x \in X, r > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\bar{K}(x, r) &= \overline{K(x, r)} \\ \bar{K}(x, r) &= K(x, r)^\circ \\ \partial \bar{K}(x, r) &= \partial K(x, r) (= \{y \in X : \|x - y\| = r\})\end{aligned}$$

Beweis

Da $\bar{K}(x, r)$ abgeschlossen ist mit $K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)$ folgt aus Proposition 4.8 a) (i) $\overline{K(x, r)} \subset \bar{K}(x, r)$.

Sei umgekehrt $y \in \bar{K}(x, r)$ und $y_n = y - \frac{1}{n}(y - x), n \in \mathbb{N}$. Dann ist $y_n \in K(x, r)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, d.h. $y \in \overline{K(x, r)}$ nach Proposition 4.8 a) (iii).

- b) Da $K(x, r)$ offen ist mit $K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)$ folgt mit Proposition 4.9 b) (ii):

$$K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)^\circ$$

Sei umgekehrt

- c) 3
d) 4

Definition 4.11

Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume.

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **stetig in** $x_0 \in M$, falls für alle $(x_n) \subset M$ gilt

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ in } M \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ in } N$$

$$(d(x_n, x_0) \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}) \Rightarrow d_N(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{))}$$

Die Abbildung f heißt **stetig auf** M , falls f in jedem Punkt von M stetig ist.

Hierfür gelten folgende Eigenschaften:

Proposition 4.12

Sei $(K, d_K), (M, d_M)$ und (N, d_N) metrische Räume und $f : M \rightarrow N, g : K \rightarrow M$. Dann gilt:

- a) Ist g stetig in x_0 , f stetig in $g(x_0)$, dann ist auch

$$f \circ g : K \rightarrow N \text{ stetig in } x_0$$

- b) f ist stetig in $x_0 \in M$ genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, x_0) < \delta \text{ gilt } d_N(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) f ist stetig auf M
- (ii) Ist $U \subset N$ offen, so ist auch $f^{-1}(U)$ offen in M
- (iii) Ist $A \subset N$ abgeschlossen, so ist auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in M .

Beweis

Beispiel 4.13

a) Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, so definieren wir

$$d(x, y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$ mit

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff d_1(x_{n,1}, x_1) \rightarrow 0, d_2(x_{n,2}, x_2) \rightarrow 0$$

In diesem Sinne ist jede Metrik $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Denn:

Sei $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ in $M \times M$, d.h.

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ und } d(y_n, y) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x, y) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) - d(x, y) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) - d(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x, y) - d(x_n, y_n) &\leq \dots \leq d(x, x_n) + d(y_n, y) \\ \Rightarrow |d(x, y) - d(x_n, y_n)| &\leq d(x, x_n) + d(y_n, y) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

b) Sei X ein normierter Vektorraum und

$$\begin{aligned} A : \mathbb{K} \times X &\rightarrow X, & A(\alpha, x) &= \alpha x \\ S : X \times X &\rightarrow X, & S(x, y) &= x + y \end{aligned}$$

Dann sind A und S stetig.

c) Sei $X = C[0, 1], t_0 \in [0, 1], \psi : X \rightarrow \mathbb{K}, \psi(f) = f(t_0)$

Nach Beispiel 3.15 ist ψ stetig. D.h. ist $A \subset \mathbb{K}$ offen (abgeschlossen), so ist $\psi(A)$ offen (abgeschlossen) nach Prop 4.13.

Abkürzungsverzeichnis

Beh. Behauptung

Bew. Beweis

bzgl. bezüglich

bzw. beziehungsweise

ca. circa

d. h. das heißt

Def. Definition

etc. et cetera

ex. existieren

Hom. Homomorphismus

i. A. im Allgemeinen

o. B. d. A. ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Prop. Proposition

sog. sogenannte

Vor. Voraussetzung

vgl. vergleiche

z. B. zum Beispiel

zhgd. zusammenhängend

z. z. zu zeigen

Stichwortverzeichnis

- abgeschlossen, 19
- Abschluss, 21
- beschränkt, 10
- Bolzano-Weierstrass, 2
- c_0 -Raum, 7
- dicht, 21
- Differentialoperatoren, 13
- Dirichletproblem, 4
- diskrete Metrix, 18
- Dualraum, 15
- Einheitskugel, 5
- Folgenraum, 7
- Fredholm'sche Integralgleichung, 3
- Hölder-Ungleichung, 7
- Hölderstetige Funktionen, 9
- Innere, 21
- Integraloperator, 12
- Isometrie, 15
- isomorphe Einbettung, 15
- Isomorphismuss, 15
- Kompositionsoperator, 13
- Konvergenz, 5
- l^∞ -Raum, 7
- l^p -Raum, 7
- Lebesgues-Integrierbare Funktionen, 9
- Matrizenmultiplikation, 13
- Metrik, 18
- Minkowskii-Ungleichung, 7
- Norm, 5
- offen, 19
- Quotientenräume, 8
- Rand, 21
- Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen, 8
- Raum der differentierbaren Funktionen, 8
- Raum der stetigen Funktionen, 8
- relative Abgeschlossenheit, 21
- relative Offenheit, 21
- seperabel, 21
- stetig, 22
- stetige Einbettung, 15
- Sturm-Liouville Problem, 4
- Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren, 11
- Äquivalenz von Normen, 5