Norm

Halbnorm

Einheitskugel

Im normierten Vektorraum konvergente Folge

1 Antwort

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}_+$ heißt **Norm**, falls

$(N1)$ $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

$(N2)$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2 Antwort

Falls $\|\cdot\|$ all die Eigenschaften einer Norm erfüllt außer

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$$

dann heißt $\|\cdot\|$ **Halbnorm**.

3 Antwort

Die Menge $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ heißt **Einheitskugel**.

4 Antwort

Eine Folge (x_n) des normierten Raums X **konvergiert** gegen ein $x \in X$, falls

$$\|x_n - x\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

umgekehrte Dreiecksungleichung

äquivalente Normen

äquivalente Normen + endlich dimensionalen Vektorraum

äquivalente Normen + unendlich dimensionalen Vektorraum

6 — *Antwort*

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen **äquivalent** auf X, falls es $0 < m, M < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

5 — *Antwort*

Für zwei Elemente $x, y \in (X, \|\cdot\|)$ in normierten Räumen gilt auch die **umgekehrte Dreiecksungleichung**

$$(|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|)$$

8 — *Antwort*

Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{F}$ nicht äquivalent.

Sei z.B. o.B.d.A. $p > q$ und setze

$$x_n := \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j,\ e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$$

7 — *Antwort*

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Äquivalenzen zu äquivalente Norm

Folgenraum

Minkowski-Ungleichung

Hölder-Ungleichung

10 *Antwort*

Wir definieren den **Folgenraum** mittels

$$\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$$

und $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der j-te Einheitsvektor in $\mathbb{F}$, wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

9 *Antwort*

Für zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf X sind äquivalent:

a) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind äquivalent

b) Für alle $(x_n)_n \subset X$, $x \in X$ gilt $\|x_n - x\|_1 \to 0 \iff \|x_n - x\|_2 \to 0$

c) Für alle $(x_n)_n \subset X$ gilt $\|x_n\|_1 \to 0 \iff \|x_n\|_2 \to 0$

d) Es gibt Konstanten $0 < m$, $M < \infty$, so dass

$$mU_{(X,\|\cdot\|_1)} \subseteq U_{(X,\|\cdot\|_2)} \subseteq MU_{(X,\|\cdot\|_1)}$$

12 *Antwort*

Hölder-Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt;

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

11 *Antwort*

Minkowski-Ungleichung:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

äquivalente Normen + unendlich dimensionale Räume

Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen

Quotientenraum

Beschränkte Menge

14 *Antwort*

Definiere

$$C_b^m(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha f \text{ sind für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ stetig}$$
$$\text{und beschränkt auf } \Omega, |\alpha| \leq m\}.$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|f\|_{C_b^m} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Äquivalent dazu ist die Norm

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

13 *Antwort*

Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{F}$ nicht äquivalent.

Bsp.: sei o.B.d.A. $p > q$ und setze

$$x_n := \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j, e_j = (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$$

16 *Antwort*

Eine Teilmenge V eines normieren Raums $(X, \|\cdot\|)$ heißt **beschränkt**, falls

$$c := \sup_{x\in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X,\|\cdot\|)}.$$

15 *Antwort*

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset X$ sei abgeschlossener (d.h. für alle $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in M$), linearer Unterraum. Definiere $\hat{X} := {}^X\!/_M$, dann ist $\hat{x} \in {}^X\!/_M$:

$$\hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$$

Dabei gilt unter anderem $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \widehat{x_1 + x_2}$ und $\lambda\hat{x}_1 = \widehat{\lambda x_1}$; $\hat{X}$ bildet somit einen Vektorraum.
Definieren wir eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|x - y\|_X : y \in M\} =: d(x, Y)$$

$(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ein normierter Raum.

Beschränkte Folge

Äquivalenzen zu T stetig

Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren

Isometrie

Seien X, Y normierte Räume. Für einen linearen Operator $S : X \to Y$ sind äquivalent:

a) T stetig, d.h. $x_n \to x$ impliziert $Tx_n \to Tx$

b) T stetig in 0

c) $T(U_{(X,\|\cdot\|)})$ ist beschränkt in Y

d) Es gibt ein $c < \infty$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$

Eine konvergente Folge $(x_n) \in X, x_n \to x$ ist beschränkt, denn $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$ für fast alle m.

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

T heißt **Isometrie**, falls

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X,\ \forall x \in X$$

Seien X, Y normierte Räume. Mit $B(X, Y)$ bezeichnen wir den **Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren** $T : X \to Y$. Ist $X = Y$ schreiben wir auch kurz

$$B(X) := B(X, X)$$

$(B(X, Y), \|\cdot\|)$ ist ebenfalls ein normierter Raum und für $X = Y$ gilt für $S, T \in B(X)$:

$$S \cdot T \in B(X) \quad \text{und} \quad \|S \cdot T\| \leq \|S\|\|T\|$$

stetige Einbettung

isomorphe Einbettung

Isomorphismus

Dualraum

22 *Antwort*

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

T heißt **isomorphe Einbettung**, falls T injektiv ist und ein $c > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_x$$

In diesem Fall identifizieren wir oft X mit dem Bild von T in Y, $X \cong T(X) \subset Y$

21 *Antwort*

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

T heißt **stetige Einbettung**, falls T stetig und injektiv ist.

24 *Antwort*

Sei X ein normierter Vektorraum. Der Raum

$$X' = B(X, \mathbb{K})$$

heißt **Dualraum** von X oder Raum der linearen Funktionalen.

23 *Antwort*

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

T heißt **Isomorphismus**, falls T bijektiv und stetig ist und $T^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

$$\text{d.h. falls } \exists c > 0 : \frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

daraus folgt auch für $T^{-1} : Y \to X$ aus der ersten Ungl.:

$$\|T^{-1}y\|_X \leq c\|T(T^{-1}y)\|_Y = c\|y\|_Y, \text{d.h. } T^{-1} \text{ ist stetig.)}$$

In diesem Fall identifizieren wir $X \cong Y$ und sagen X und Y sind isomorph.

Metrik

Konvergente Folge im metrischen Raum

Durch Halbnorm induzierte Metrik

Abgeschlossen Menge

 # 26 *Antwort*

Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset M$ konvergiert gegen $x \in M$, falls

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Notation: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (in M)

 # 25 *Antwort*

Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf M, falls $\forall x, y, z \in M$:

(M1) $d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$ (positive Definitheit)

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

 # 28 *Antwort*

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **abgeschlossen** (in M), falls für alle in M konvergenten Folgen $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ der Grenzwert von (x_n) in A liegt

 # 27 *Antwort*

Sei X ein Vektorraum und p_j für $j \in \mathbb{N}$ Halbnormen auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_K > 0$. Dann definiert

$$d(x,y) := \sum_{j\geq 1} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}, \qquad x, y \in X$$

eine Metrik auf X mit

$$d(x_n, x) \to 0 \iff p_j(x_n - x) \to 0 \;\; (n \to \infty) \;\; \forall j \in \mathbb{N}$$

Offene Menge

Offene bzw. abgeschlossene Kugel

Offene Menge bezüglich diskreter Metrik

Vereinigungen/Schnitte offener/abgeschlossener Mengen

30 *Antwort*

Wir benutzen die Bezeichnungen

- **offene Kugel**: $K(x,r) \coloneqq \{y \in M : d(x,y) < r\}$
- **abgeschlossene Kugel**: $\bar{K}(x,r) \coloneqq \{y \in M : d(x,y) \leq r\}$

mit $x \in M, r > 0$. Man sieht leicht, dass $K(x,r)$ offen und $\bar{K}(x,r)$ abgeschlossen ist.

29 *Antwort*

Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen** (in M), falls zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$\{y \in M : d(x,y) < \epsilon\} \subset U$$

$A \subset M$ ist offen in M genau dann,

$$\text{wenn } U = M \setminus Aabgeschlossenist.$$

32 *Antwort*

Für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen $(A_i)_{i \in I}$ sind

$$A \coloneqq \bigcap_{i \in I} A_i \qquad \text{und} \qquad A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_N} \quad (i_1, \ldots, i_N \in I)$$

abgeschlossen in M.

Für eine beliebige Familie offenere Mengen $(U_i)_{i \in I}$ sind

$$U \coloneqq \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{und} \quad U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N} \qquad (i_1, \ldots, i_N \in I)$$

offen in M.

31 *Antwort*

Bezüglich der diskreten Metrik d aus Beispiel 4.2 b) ist $\{x\} \subset M$ offen für jedes $x \in M$, da

$$K(x,r) = \{x\} \subset \{x\} \text{ für } r \in (0,1]$$

Abschluss, Innere und Rand

Dicht

Separabel

Stetige Abbildung

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $V \subset M$ heißt **dicht** in M, falls $\bar{V} = M$, d.h. jeder Punkt in M ist Grenzwert einer Folge aus V.

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $V \subset M$. Dann heißt

$$\bar{V} := \bigcap \{A \subset M : A \text{ ist abgeschlossen mit } V \subset A\}$$

der **Abschluss** von V.

$$\mathring{V} := \bigcup \{U \subset M : U \text{ ist offen mit } U \subset V\}$$

das **Innere** von V

$$\partial V := \bar{V} \setminus \mathring{V}$$

der **Rand** von V

Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f \colon M \to N$ heißt **stetig in** $x_0 \in M$, falls für alle $(x_n) \subset M$ gilt

$$x_n \to x_0 \text{ in } M \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \text{ in } N$$

$$d_M(x_n, x_0) \to 0 (n \to \infty) \ \Rightarrow \ d_N(f(x_n), f(x_0)) \to 0$$

Die Abbildung f heißt **stetig auf** M, falls f in jedem Punkt von M stetig ist.

Sei (M, d) ein metrischer Raum, M heißt **separabel**, falls es eine abzählbare Teilmenge $V \subset M$ gibt, die dicht in M liegt.

Ist ℓ^p separabel?

Äquivalenzen zur Stetigkeit einer Abbildungen

Cauchy-Folge

Vollständigkeit

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist stetig auf M

(ii) Ist $U \subset N$ offen, so ist auch $f^{-1}(U)$ offen in M

(iii) Ist $A \subset N$ abgeschlossen, so ist auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in M.

Die Räume $\ell^p, p \in [1, \infty)$ und c_0 sind separabel, da

$$D = lin\{e_k, k \in \mathbb{K}\} \text{ dicht in allen Räumen liegt.}$$

Der Raum ℓ^∞ ist nicht separabel: Die Menge Ω der $\{0,1\}$-wertigen Folgen ist überabzählbar. Für $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt $\|x - y\|_\infty = 1$

Sei (M, d) ein metrischer Raum, dann heißt (M, d) **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge $(x_n) \subset M$ einen Grenzwert in M hat:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad x \in M$$

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ der vollständig ist bezüglich $d(x, y) = \|x - y\|$ heißt **Banachraum**.

Sei (M, d) ein metrischer Raum. $x_n \in M$ heißt **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\forall m, n \geq n_0$ gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

Cauchy-Folge vs. konvergente Folge

Raum der Abbildungen zwischen metrischen und Banachraum

Vollständigkeit vs. äquivalente Normen

Abg. Teilmengen von BR vs metrische Räume

Sei X ein metrischer Raum, Y ein Banachraum.

$$C(X,Y) = \{f\colon X \to Y : f \text{ stetig}\},\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$$

Dann ist $C(X,Y)$ ein (linearer) Banachraum.

Jede konvergente Folge in (M,d) ist eine Cauchy-Folge:

$$\text{Sei } \lim_{n\to\infty} x_n = x:\ d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) \to 0$$

Aber: nicht jede Cauchy-Folge eines normierten Raums X konvergiert in $= C[0,2]$:

$$\|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)|dt,\ f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0,1] \\ 1 & \text{für } x \in [1,2] \end{cases}$$

Abgeschlossene Teilmengen von Banachräumen sind vollständige metrische Räume bezüglich

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Sind $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf X und ist dann X bezüglich $\|\cdot\|_1$ vollständig, so auch bezüglich $\|\cdot\|_2$; da äquivalente Normen haben gleiche Cauchy-Folgen.

Bsp.: $C^1[0,1]$

$$|||f||| = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

Früher: $|||\cdot||| \sim \|\cdot\|_\infty \Rightarrow (C[0,1], |||\cdot|||)$ ist vollständig.

Raum der beschränkten Operatoren vollständig

Neumann'sche Reihe

J (surjektiver) Isomorphismus, A beschränkt mit $\|A\| < \|J^{-1}\|^{-1}$:

$$J - A$$

Fortsetzung von Operatoren

46 *Antwort*

Sei $A \in B(X)$, X ein Banachraum mit $\|A\| < 1$.
Dann ist $Id - A$ invertierbar und

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

45 *Antwort*

Sei X ein normiert Raum, Y ein Banachraum. Dann ist $B(X, Y)$ mit der Operatornorm vollständig.

Insbesondere: $X' = B(X, \mathbb{K})$ ist immer vollständig.

48 *Antwort*

Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $D \subset X$ ein dichter Teilraum.
Jeder linearere Operator $T : X \to Y$ mit

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \text{für alle } x \in D$$

lässt sich zu einem eindeutig bestimmten Operator $\tilde{T} \in B(X, Y)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq M$ fortsetzen.

47 *Antwort*

Sei X ein Banachraum und $J : X \to X$ ein (surjektiver) Isomorphismus.
Für $A \in B(X)$ und $\|A\| < \|J^{-1}\|^{-1}$ ist auch $J - A$ ein Isomorphismus

Insbesondere: $G = \{T \in B(X) : T \text{ stetig und invertierbar}\}$ ist eine offene Menge in $B(X)$.

Operatorgrenzwert auf dichter Menge

Äquivalenz zur Vollständigkeit eines normierten Raums

Vollständigkeit des Quotientenraums

Lipschitz

 # 50 *Antwort*

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ sind äquivalent:

a) X ist vollständig

b) Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n\geq 1} x_n$ mit $x_n \in X$ hat einen Limes in X.

 # 49 *Antwort*

Sei X ein normierter Banachraum, $D \subset X$ dicht in X und sei eine Folge $T_n \in B(X,Y)$, wobei $(T_n x)$ eine Cauchy-Folge für jedes $x \in D$ sei.
Dann gibt es genau einen Operator $T \in B(X,Y)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$$

 # 52 *Antwort*

Sei X ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ beliebig, $d(x,y) := \|x-y\|$, wobei $x, y \in M$ und damit (M, d) ein metrischer Raum.
Eine Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz**, falls

$$\sup_{x,y\notin M, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} = \underbrace{\|f\|_L}_{\substack{Lipschitz-\\Konstante}} < \infty$$

Dann ist $X = \{f\colon M \to \mathbb{R} : f \text{ Lipschitz und } f(x_0) = 0\}$ bezüglich $\|\cdot\|_L$ ein normierter Raum und $X' = B(X, \mathbb{R})$ ist vollständig.

 # 51 *Antwort*

Sei X ein Banachraum und $M \subset X$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum.
Dann $\hat{X} = {}^{X}/_{M}$ ist vollständig.

Isometrische Einbettung in den Raum der Lipschitz-Funktionen

Vervollständigung

Existenz einer Vervollständigung

kompakt, folgenkompakt und relativ kompakt

54 *Antwort*

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Ein vollständiger metrischer Raum $(\hat{M},\hat{d})$ heißt **Vervollständigung** von (M,d), falls es eine Einbettung $J\colon M \to \hat{M}$ gibt mit:

i) $\hat{d}(J(x),J(y)) = d(x,y)$ für alle $x,y \in M$ (Isometrie)

ii) J(M) ist dicht in $\hat{M}$

53 *Antwort*

Sei (M,d) ein metrische Raum, $x_0 \in M$ fest, X definiert wie in 5.15:

Zu $x \in M$ definiere $F_x \in X'$ durch $F_x(f) = f(x)$ für $f\colon M \to \mathbb{R}$ in X.
Dann ist $x \in M \to F_x \in X'$ eine Abbildung, die eine isometrische Einbettung von M nach X' gibt, d.h.

$$d(x,y) = \|F_x - F_y\|_{X'}$$

56 *Antwort*

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Menge $K \subseteq M$ heißt (folgen-)**kompakt**, falls es in jeder Folge $(x_n) \subset M$ eine Teilfolge (x_{n_k}) und ein $x \in K$ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

$K \subseteq M$ heißt **relativ kompakt**, falls $\overline{K}$ in M kompakt ist.

55 *Antwort*

Zu jedem metrischen Raum (M,d) gibt es eine Vervollständigung, die bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist.

Kompaktheit der Einheitskugel

Satz von Riesz

Äquivalenzen zur Kompaktheit

4x abgeschlossene bzw. kompakte Mengen

Sei Y ein abgeschlossener Teilraum von X und $X \neq Y$. Zu $\delta \in (0,1)$ existiert ein $x_\delta \in X \setminus Y$, sodass

$$\|x\| = 1, \quad \|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta \quad \text{für alle } y \in Y$$

Sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist

$$\overline{U_x} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

genau dann kompakt, wenn $dim X < \infty$.

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

a) Eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ ist immer vollständig und abgeschlossen in M.

b) Eine abgeschlossene Teilmenge eine kompakten Raums ist kompakt.

c) Jede kompakte Menge in M ist separabel.

d) Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raums ist beschränkt.

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für $k \subset M$ sind folgende Aussagen äquivalent zu K ist (folgen-)kompakt:

a) K ist vollständig und total beschränkt, d.h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_m \in M$ so dass $\quad K \subset \bigcup_{j=1}^m K(x_j, \epsilon)$

b) Jede Überdeckung von K durch offene Mengen $U_j, j \in J$ mit $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d.h. $j_1, \ldots, j_m$ mit $\quad K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{j_k}$

Arzelà-Ascoli

Äquivalenzen zur relativen Kompaktheit

kompakter Operator

$K(X, Y)$

 # 62 *Antwort*

Sei X ein Banachraum. Für $K \subseteq X$ sind äquivalent

a) K relativ kompakt (d.h. $\overline{K}$ ist kompakt)

b) Jede Folge $(x_k) \subseteq K$ hat eine Cauchy-Teilfolge

c) $\forall \epsilon > 0 \; \exists y_1, \ldots, y_m \in K$ mit $K \subseteq K(y_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(y_m, \epsilon)$

 # 61 *Antwort*

Sei (S, d) ein kompakter, metrischer Raum. Definiere $C(S) := \{d \colon S \to \mathbb{K} \text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|$. Eine Teilmenge $M \subset C(S)$ ist kompakt, genau dann wenn gilt

a) M ist beschränkt in $C(S)$,

b) M ist abgeschlossen in $C(S)$ und

c) M ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in M : d(s,t) < \delta \Rightarrow |x(s) - x(t)| < \epsilon$$

 # 64 *Antwort*

$K(X, Y) =$ Raum der linearen, kompakten Operatoren von X nach Y.

Bemerkung:

a) $T \in K(X, Y) \iff$ jede beschränkte Folge $(x_n) \subset X$ besitzt eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $T(x_{n_k})$ ist Cauchy-Folge in Y.

b) $K(X, Y) \subset B(X, Y)$, da die kompakte Menge $\overline{T(U_X)}$ beschränkt in Y ist.

 # 63 *Antwort*

Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum. Ein linearer Operator $T \colon X \to Y$ heißt kompakt, falls $T(U_X)$ relativ kompakt ist in Y.

2x Eigenschaften von $K(X, Y)$

Folge endlich dimensionaler beschränkter Operatoren

Folge der Approximationseigenschaft

Beschränkter Kern definiert beschränkten Operator

Seien X, Y Banachräume, $T \in B(X,Y)$.

Falls es endlich dimensionale Operatoren $T_n \in B(X,Y)$ gibt, dann ist $T \in K(X,Y)$.

Beweis: Bemerkung nach 7.1, 7.5 a)

Seien X, Y und Z Banachräume.

a) $K(X,Y)$ ist ist ein linearer, *abgeschlossener* Teilraum von $B(X,Y)$.

b) Seien $T \in B(X,Y), S \in B(Y,Z)$ und entweder T oder S kompakt. Dann ist $S \circ T \in K(X,Z)$.
Insbesondere: $K(X) = K(X,X)$ ist ein Ideal in $B(X)$.

Sei $k\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ messbar und

$$\sup_{u\in\Omega} \int_\Omega |k(u,v)|dv \le C_1 < \infty \text{ und}$$
$$\sup_{v\in\Omega} \int_\Omega |k(u,v)|du \le C_2 < \infty$$

Dann wird durch $(*)$ ein beschränkter Operator $T\colon L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ mit

$$\|T\|_{L^p \to L^p} \le C_1^{\frac{1}{p'}} C_1^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

und $1 \le p \le \infty$.

Seien X, Y Banachräume und X habe die **Approximationseigenschaft** (d.h. es existieren endlich dimensionale Operatoren $S_n \in B(X) : S_n x \to x, \quad \forall x \in X$).

Dann gilt: $K(X,Y) = \overline{F(X,Y)}$ in der Operatornorm, wobei $F(X,Y) = \{T \in B(X,Y) : \dim T(X) < \infty\}$.

Bedingter Erwartungsoperator

Konvergenz des bedingten Erwartungsoperators

Approximation der kompakten Operatoren

Approximative Eins

Sei $\mathcal{A}_m = \{A_{n,m} : n = 1, \ldots, m_n\}$ eine Zerlegung von $\Omega \cap K(0, r_m), \Omega \subset \mathbb{R}^d$. Es gelte $r_m \to \infty$ und $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_{m+1}, r_m \to \infty$.

$$d_m = \sup\{|t - s| : s, t \in A_{m,n}, n = 1, \ldots, m_n\}$$

'Feinheit der Zerlegung'

Dann gilt für alle $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$

$$\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f\|_{L^p} \to 0 \text{ für } m \to \infty$$

Sei $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Partition von Ω in paarweise disjunkte, messbare Mengen A_n mit $0 < \mu(A_n) < \infty$. Setze

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}}(f)(s) = \sum_n \left[\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(t)dt \right] \mathbb{1}_{A_n}(s)$$

- Für jede Partition $\mathcal{A} = \{A_n\}$ von Ω ist $\mathbb{E}_{\mathcal{A}} \in B\left(L^p(\Omega)\right)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$ mit $\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}}\|_{L^p \to L^p} = 1$.
- Bild $\mathbb{E}_{\mathcal{A}} = \mathbb{E}_{\mathcal{A}}(L^p)$ ist isometrisch zu $\ell_m^p \cong (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$, mit $m = card(A)$.

Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\phi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(u)du = 1$. Dann heißt $\phi_\epsilon(u) = \epsilon^{-d}\phi(\epsilon^{-1}u), \epsilon > 0$, **approximative Eins**.
Notation: $\phi_\epsilon * f(u) = \int \phi_\epsilon(u - v)f(v)dv$.
Bsp: $\phi(u) = \frac{1}{|B(0,1)|} \cdot \mathbb{1}_{B(0,1)}(u), \phi \geq 0, \int \phi du = 1$

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon * f(u) &= \frac{1}{|B(u,\epsilon)|} \int \mathbb{1}_{B(u,\epsilon)}(u - v)f(v)dv \\ &= \frac{1}{|B(u,\epsilon)|} \int_{(u,\epsilon)} f(v)dv \end{aligned}$$

Vermutung: $\phi_\epsilon * f(u) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} f(u)$. Sinne jedoch noch unklar.

Für $X = L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} K(X, X) &= \overline{\mathcal{F}(X, X)} \\ &= \text{Abschluss der endl. dim. Operatoren} \end{aligned}$$

Konvergenz der Approximativen Eins

Young

Dichte Menge in L^p

Korollar 8.10

Für $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ setze für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$(k * f)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} k(u-v)f(v)dv \quad (*)$$

$k * f$ heißt **Faltung** von k und f.
Dann definiert $(*)$ einen beschränkten Operator $Tf = k * f$ von $L^p(\mathbb{R}^d)$ nach $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $\|T\|_{L^p \to L^p} \leq \|k\|_{L^1}$.

Sei $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ eine approximative Eins. Dann gilt für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p < \infty$

$$\|f - \phi_\epsilon * f\|_{L^p} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$$

i) $\int \phi_\epsilon(u)du = 1$

ii) $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \phi_\epsilon(u)du \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$

iii) $\mathrm{supp}(\phi) \subset B(0,r) \Rightarrow \mathrm{supp}(\phi_\epsilon) \subset B(0,\epsilon)$

iv) $\|\phi_\epsilon * f\|_{L^p} \leq 1\|f\|_{L^p}$ (nach Young)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Sei $f \in L^p(\Omega), p \in [1,\infty)$ mit

$$\int f(u)g(u)du = 0 \text{ für alle } g \in C_c^\infty(\Omega)$$

Dann ist $f = 0$.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann liegt

$$C_c^\infty(\Omega) = \{f : f \text{ ist unendlich oft differenzierbar und } \mathrm{supp}(f) \text{ ist kompakt.}\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$.

Satz von Baire

nirgends dicht

1. Kategorie

2. Kategorie

 # 78 — *Antwort*

Eine Teilmenge L eines metrischen Raums M heißt **nirgends dicht**, falls $\overline{L}$ keine inneren Punkte enthält.

Ist L nirgends dicht, dann ist $M \setminus \overline{L}$ dicht in M.

 # 77 — *Antwort*

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und seien $(U_n)_{n\geq 1}$ offen und dicht in M.

$$\text{Dann ist } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \text{ dicht in } M.$$

 # 80 — *Antwort*

L heißt von **2. Kategorie**, falls L nicht von 1. Kategorie ist.

 # 79 — *Antwort*

Eine Teilmenge L, die sich als Vereinigung von einer Folge von nirgends dichten Mengen L_n darstellen lässt, d.h. $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ heißt von **1. Kategorie**.

Kategoriensatz von Baire

Dichte Teilmenge von $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$

Banach-Steinhaus

Offene Abbildung

$E = \{x \in C[0,1] : x$ ist in keinem Punkt von $[0,1]$ differenzierbar$\}$ ist dicht in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.
Insbesondere:

- $E \neq \emptyset$
- $C^1[0,1]$ ist von 1. Kategorie in $C[0,1]$, also liegt

$$C[0,1] \setminus C^1[0,1] \text{ dicht in } C[0,1]$$

a) In einem vollständigen metrischen Raum (M,d) liegt das Komplement einer Menge L von 1. Kategorie stets dicht. Insbesondere:

b) Ein vollständig metrischer Raum ist von 2. Kategorie

c) Sei (M,d) vollständig und $(M_n)_{n\geq 1}$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Dann enthält mindestens ein M_n eine Kugel

Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **offen**, wenn offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden.

Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, I eine Indexmenge und $(T_i)_{i\geq 1} \in B(X,Y)$. Falls:

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| = c(x) < \infty, \quad \forall x \in X$$

dann ist auch

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| = \sup_{i\in I} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_i x\| < \infty.$$

Äquivalenzen zu offenem Operator

Satz von der offenen Abbildung

Bijektiver beschränkter Operator

Beschränkte Einbettung zwischen Banachräumen

Seien X, Y Banachräume und $T \in B(X, Y)$, dann gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ offen}$$

Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator, dann sind äquivalent:

a) T ist offen

b) $\exists \epsilon > 0 : K_Y(0, \epsilon) \subset T(K_X(0, 1))$

Sei X ein Vektorraum der sowohl mit $\|\cdot\|$ als auch mit $|||\cdot|||$ ein Banachraum ist. Gilt

$$\exists c > 0 : \|x\| \leq c \cdot |||x|||, \ \forall x \in X,$$

dann sind die Normen äquivalent, d.h. $\exists \hat{c}$ mit

$$\hat{c} \cdot |||x||| \leq \|x\| \ \forall x \in X \leq c \cdot |||x|||$$

Seien X, Y Banachräume und $T \in B(X, Y)$ bijektv, dann ist $T^{-1} \in B(Y, X)$

Projektion,
und die Existenz der Einbettung in Untervektorraum

Direkte Summe von Banachräumen

Äquivalenzen zur Existenz einer stetigen Projektion auf Untervektorraum

Operatorfortsetzung

90 *Antwort*

Sind X, Y Banachräume, dann ist auch $X \oplus Y$ ein Banachraum mit $\|(x,y)\|_{X \bigoplus Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y \ \forall x \in X, y \in Y$

89 *Antwort*

Sei X ein Banachraum. $P\colon X \to X$ heißt **Projektion**, wenn P linear und $P^2 = P$ ist.

Sei X ein Vektorraum, $M \subset X$ ein Untervektorraum. Es gibt nach dem Basisergänzungssatz eine lineare Projektion

$$P\colon X \to X, P(X) = M$$

92 *Antwort*

Sei X ein Banachraum, $D(A)$ ein dichter Untervektorraum und $A : D(A) \to X$ linear

Gilt $\|Ax\| \leq c\|x\| \ \forall x \in D(A)$, so lässt sich A zu einem beschränkten Operator fortsetzen $A \in B(X)$

91 *Antwort*

Sei X ein BR, $M \subset X$ ein abg. UVR. Dann sind äquivalent:

a) $\exists$ stetige Projektion $P\colon X \to X$, $P(X) = M$

b) Es gibt einen abg. UVR $N \subset X : X = M \oplus N$.

c) $\exists$ abg. Untervekottraum $N \subset X$ und $J : M \oplus N \to X$, $J(x,y) = x + y$ ist ein Isomorphismus, insbesondere $\exists c > 0 \ \forall x \in M, y \in N : c\,(\|x\| + \|y\|) \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

M heißt komplementierter Raum,
$N = \text{Kern}(P)$ Komplementärraum.

Graphennorm

Abgeschlossener Operator

Abgeschlossener vs. stetiger Operator

Satz vom abgeschlossenen Graphen

Es sind äquivalent

a) $(D(A), \|\cdot\|_A)$ ist ein Banachraum

b) $\mathrm{graph}(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$ ist abgeschlossen

c) Wenn $(x_n)_n \subset D(A) : \begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x & \text{in } X \\ Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y & \text{in } X \end{cases}$, so ist $x \in D(A), Ax = y$

A heißt abgeschlossen, wenn $a) - c)$ aus 12.3 erfüllt sind

Auf $D(A)$ definieren wir die **Graphennorm**

$$\|x\|_A := \|x\| + \|A\| \quad \forall x \in D$$

Insbesondere: $A : (D(A), \|\cdot\|_A) \to X$ stetig, denn

$$\|X\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A$$

Ist A abgeschlossen und $D(A) = X$, so ist A stetig auf X.

$$A \text{ stetig: } x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow Ax \xrightarrow{n\to\infty} y, Ax = y$$
$$A \text{ abgeschlossen: } x_n \xrightarrow{n\to\infty} x, Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y \Rightarrow Ax = y$$