Resolventenmenge, Spektrum und Resolventenfunktion

Zusammenhang λ und $R(\lambda, A)$

Resolventendarstellung

Resolventengleichung

Zusammenhang $A \in B(C)$ und $\sigma(A)$

Zusammenhang Hanh-Banach und Existenz einer dualen nicht-null Abbildung

Spektralradius

Berechnung des Spektralraduiuses

2 *Antwort*

A ist abgeschlossen, falls $\lambda \in \rho(A)$, so ist $R(\lambda, A) \in B(X)$ und $R(\lambda, A)\colon X \to (D(A), \|\cdot\|_A)$ ein Isomorphismus.

1 *Antwort*

Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $A\colon X \supset D(A) \to X$ linear und abgeschlossen.

a) $\lambda \in \mathbb{C}$ gehört zur **Resolventenmenge** von A, $\lambda \in \rho(A)$, falls

   $\lambda I - A\colon D(A) \to X$ bijektiv, d.h. $(\lambda I - A)^{-1}\colon X \to D($

b) $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt **Spektrum** von A

c) $\lambda \in \rho(A) \to R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ heißt **Resolventenfunktion** von A

4 *Antwort*

Sei A ein abgeschlossener Operator auf X. Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt:

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

Insbesondere ist $\lambda \in \rho(A) \to R(\lambda, A) \in B(X)$ eine komplex differenzierbare Abbildung und

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2$$

3 *Antwort*

Sei $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ abgeschlossen, X ein Banachraum. Für $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$ ist auch

$$\lambda \in \rho(A) \text{ und } R(\lambda, A) = \sum_{n \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}.$$

Insbesondere ist $\rho(A)$ offen und $\sigma(A)$ abgeschlossen.

6 *Antwort*

$(*)$ Nach Bemerkung 8.7 bzw. allgemein aus Hahn-Banach gibt es in jedem Banachraum X $x \in X, x' \in X' mit x'(x) \neq 0$

5 *Antwort*

Falls $A \in B(X)$, dann ist $\sigma(A)$ nichtleer und kompakt mit $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|A\|\}$

$$\text{Für } \lambda > \|A\| \text{ gilt: } R(\lambda, A) = \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} A^n$$

8 *Antwort*

Für $A \in B(X)$ ist

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Im Allgemeinen gilt $r(A) < \|A\|$.

7 *Antwort*

Für $A \in B(X)$ heißt $r(A) \coloneqq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ der **Spektralradius** von A.

$K \in K(X)$ vs. $I - K$

Zerlegung von X zu einem Operator F

Zusammenhang kompakter Operator und Spektrum

Zusammenhang abgeschlossener Operator und Spektrum

Skalarprodukt

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Aus Skalarprodukt induzierte Norm

Verallgemeinerter Pythagoras

 # 10 *Antwort*

Zu jedem endlich dimensionalen $F \in B(X)$ ($\dim F(X) < \infty$) gibt es eine Zerlegung

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad \dim X_1 < \infty \quad \text{und} \quad F(X_1) \subset X_1, \quad F|_{X_0} = 0$$

 # 9 *Antwort*

Sei X ein Banchraum, $K \in K(X)$ (d.h. $K \in B(X)$ kompakt bzw. $K(U_X)$ ist relativ kompakt in X), dann hat $I-K$ ein abgeschlossenen Bildraum und

$$\dim \operatorname{Kern}(I-K) = \operatorname{codim}(I-K)(X)\,[= \dim {}^{X}/_{(I-K)(X)}] < \infty$$

Insbesondere: $I-K$ injektiv $\iff$ $I-K$ surjektiv

 # 12 *Antwort*

Sei $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ ein abgeschlossener, linearer Operator, $\rho(A) \neq \emptyset$, $(D(A), \|\cdot\|_A) \hookrightarrow X$ kompakt.

Dann besteht $\sigma(A)$ aus endlich vielen Eigenwerten oder einer Folge von Eigenwerten mit $|\lambda_n| \to \infty$ und die zugehörigen Eigenräume sind endlich dimensional.

 # 11 *Antwort*

Sei $dim X = \infty$, $K \in B(X)$ kompakt, dann ist $0 \in \sigma(K)$ und $\sigma(K)$ ist endlich oder besteht aus einer Nullfolge.
Jedes $\lambda \in \sigma(K), \lambda \neq 0$ ist ein Eigenwert mit endlich dimensionalem Eigenraum.

 # 14 *Antwort*

Sei X ein Vektor mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Für $x, y \in X$ gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

 # 13 *Antwort*

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt**, falls für $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- $(S1)$ $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$
- $(S2)$ $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$
- $(S3)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
- $(S4)$ $\langle x, y\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

 # 16 *Antwort*

$$\langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \quad (*)$$

 # 15 *Antwort*

Sei X ein Vektor mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ definiert eine Norm auf X Insbesondere:

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Aus Norm induziertes Skalarprodukt

Prä-Hilbertraum und Hilbertraum

L^p Hilbertraum?

Parallelogramm-Gleichung

Beste Approximation

Winkel zwischen Vektoren

orthogonale Vektoren, Mengen und das orthogonale Komplement

3x Eigenschaften des orthogonalen Komplements

 # 18 *Antwort*

Ein metrischer Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **Prä-Hilbertraum**, falls es ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $X \times X$ gibt mit

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Falls $(X, \|\cdot\|)$ außerdem noch vollständig ist, dann heißt X ein **Hilbertraum**.

 # 17 *Antwort*

Man kann aus der in b) definierten Norm das Skalarprodukt zurückgewinnen durch:

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 -\right.$

 # 20 *Antwort*

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Prä-Hilbertraum, falls die sogenannte
Prallelogramm-Gleichung gilt, d.h.

$$\forall x, y \in X: \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (P)$$

 # 19 *Antwort*

$L^p(\Omega)$ ist kein Hilbertraum für $n \neq 2$.

 # 22 *Antwort*

Seien $u, v \in H \setminus \{0\}$ und definiere entsprechend $u_1 = \frac{u}{\|u\|}, v_1 = \frac{v}{\|v\|}$.

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} = |\langle u_1, v_1\rangle| = \cos(\alpha)$$

wobei $\alpha \in [0, \pi)$ eindeutig gewählt.

 # 21 *Antwort*

Sei X ein Hilbertraum und K eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von X.

a) Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y_0 \in K$ so, dass

$$\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in K\}$$

b) Dieses $y_0 \in K$ ist charakterisiert durch die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\langle x - y_0, y - y_0\rangle \leq 0 \quad (w)$$

 # 24 *Antwort*

a) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

b) $A^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Unterraum von X

c) $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$, $A^\perp = \overline{\mathrm{span}(A)}^\perp$

 # 23 *Antwort*

Sei X ein Prähilbertraum

a) $x, y \in X$ heißen **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$. Schreibweise: $x \perp y$

b) $A, B \subseteq X$ sind orthogonal, falls $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $x \in A, y \in B$. Schreibweise $A \perp B$

c) Sei $A \subset X$. $A^\perp = \{y \in X : \langle y, x\rangle = 0 \ \forall x \in A\}$ ist das **orthogonale Komplement** von A in X.

Orthogonalzerlegung

Orthogonoalprojektion

3x Eigenschaften der Orthogonoalprojektion

Orthogonalsystem, Orthonormalsystem und ONB

Besselsche Ungleichung

Parseval

ONS $\Longleftrightarrow$ ONB

Gram-Schmidt-Verfahren

26 *Antwort*

Sei X ein Hilbertraum, $U \subseteq X$ abgeschlossen und $X = U \oplus U^\perp$. Für $X \ni x = x_1 + x_2$, mit $x_1 \in U, x_2 \in U^\perp$ definiere

$$P_U \colon X \to U,\ Px = x_1$$

P_U heißt **Orthogonalprojektion** von X auf U.

25 *Antwort*

Sei X ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Teilraum von X.

Dann gilt: $X = U \oplus U^\perp$

28 *Antwort*

Sei X ein Hilbertraum.

- Eine Folge $(h_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ heißt **Orthogonalsystem**, falls $h_n \perp h_m$ für $m \neq n$.
- $(h_n)_{n\geq 1}$ heißt **Orthonormalsystem**, falls zusätzlich $\|h_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Ein Orthonormalsystem $(h_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ heißt **Orthonormalbasis** von X falls

  $$\overline{\operatorname{span}(h_n)} = X$$

27 *Antwort*

Die Orthogonalprojektion hat folgende Eigenschaften:

a) Bild $P_U = U$, Kern $P_U = U^\perp$

b) $\|P_U\| = 1$, denn $\|x\|^2 = \|P_U x\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|P_U x\|^2$

c) $P_U + P_{U^\perp} = Id_X$

30 *Antwort*

Sei (h_n) eine Orthonormalbasis von X, dann ist $x = \sum_n \langle x, h_n\rangle h_n$, $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n\rangle|^2$ (Parseval) und

$$\langle x, y\rangle = \sum_n \langle x, h_n\rangle \overline{\langle y, h_n\rangle}$$

29 *Antwort*

Sei (h_n) eine Orthonormalbasis. Für $U = \overline{\operatorname{span}(h_n)}$ gilt dann

$$P_U x = \sum_n \langle x, h_n\rangle h_n \quad \forall x \in X$$

Weiter ist $\|P_U x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2\ \forall x \in X$ (Besselsche Ungleichung)

32 *Antwort*

Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $(y_n) \subset X$ linear unabhängig. Definiere

$h_1 \coloneqq \frac{y_1}{\|y_1\|}, U_1 = \operatorname{span}\{h_1\} = \operatorname{span}\{y_1\}$

$h_2 = \frac{\hat{h}_2}{\|\hat{h}_2\|}, \hat{h}_2 \coloneqq y_2 - P_{U_1} y_2 = y_2 - \langle y_2, h_1\rangle h_1$

$\hat{h}_{n+1} \coloneqq y_{n+1} - P_{U_n} y_{n+1} = y_{n+1} + \sum_{j=1}^n \langle y_{n+1}, h_j\rangle h_j$, $h_{n+1} \coloneqq \frac{\hat{h}_{n+1}}{\|\hat{h}_{n+1}\|}$

Am Ende: $\overline{\operatorname{span}}\{h_j\} = \overline{\operatorname{span}}\{y_j\}$

31 *Antwort*

Ein Orthonormalsystem $(h_n)_{n\in J}$ ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn $\langle x, h_n\rangle = 0$ für alle $n \in J$ bedeutet $x = 0$.

Separable, unendlich dimensionale Hilbertraum und ONB

Einbettung von X in den dazugehörigen Dualraum

Riesz

Fortsetzung eines linearen Funktionals von Untervektorraum

Schwache Konvergenz

Eindeutigkeit des schwachen Limes

Vgl. von Norm- und schwacher Konvergenz

Schwach konvergente Formen und Beschränktheit

34 *Antwort*

Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. $X \hookrightarrow X'$
Für jedes $x \in X$ erhält man ein stetiges, lineares Funktional $x'\colon X \to \mathbb{K}$ durch

$$x'(y) = \langle y, x\rangle \quad \text{für } y \in X$$

mit $\|x'\| = \sup\{x'(y) : \|y\| = 1\} = \|x\|_X$

33 *Antwort*

Jeder separable, unendlich dimensionale Hilbertraum X hat eine Orthonormalbasis $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Diese Orthonormalbasis definiert eine Isometrie $\phi\colon \ell^2 \to X, \phi((\alpha_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n h_n, \quad (\alpha_n) \in \ell^2$ mit

- $\phi(e_j) = h_j$
- $\|\phi((\alpha_j))\|_X = \langle(\alpha_j), (\beta_j)\rangle_{\ell^2} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j \overline{\beta_j}$
- $\phi^{-1}\colon X \to \ell^2, \phi^{-1}(x) = (\langle x, h_j\rangle_X)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$

36 *Antwort*

Sei X ein Hilbertraum, $M \subseteq X$ ein Untervektorraum und $y' \in M'$. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $x'|_M = y'$ und $\|y'\| = \|x'\|$.

35 *Antwort*

Zu jedem $x' \in X'$ gibt es genau ein $x \in X$ mit

$$x'(y) = \langle y, x\rangle \quad \text{für } y \in X.$$

und $\|x'\|_{X'} = \|x\|_X$. Kurz: $X' \cong X$.

38 *Antwort*

Der schwache Limes ist eindeutig bestimmt und linear. Sei $x_n \xrightarrow{w} x, x_n \xrightarrow{w} \hat{x}$

$$\Rightarrow \langle x - \hat{x}, y\rangle = \lim_{n\to\infty} (\langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y\rangle) = 0 \quad \forall y \in X, \text{ insbesondere für } y = x - \hat{x}$$

37 *Antwort*

Sei X ein Hilbertraum und $x_n, x \in X$. Wir sagen x_n **konvergiert schwach** gegen x, falls

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \quad \forall y \in X$$

Notation: $x_n \xrightarrow{w} x$

40 *Antwort*

Jede schwach konvergente Folge ist normbeschränkt.

39 *Antwort*

a) Normenkonvergenz impliziert schwache Konvergenz

b) $x_n \xrightarrow{w} x$, dann $\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$

c) Falls $x_n \xrightarrow{w} x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$, dann $\|x - x_n\| \to 0$

Schwache Konvergenz in ℓ^2

Schwache Konvergenz bei ONBs

(relativ) schwach kompakt

Adjungierter Operator

4x Eigenschaften der Adjungierten

Kern von S und S^*

unitär, selbstadjungiert und normal

Welche Operatoren sind normal

42 *Antwort*

Sei X ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis (h_j). Dann gilt

$$x_n \xrightarrow{w} x \iff \langle x_n, h_j \rangle \to \langle x, h_j \rangle \ \forall j \in \mathbb{N}$$

41 *Antwort*

Sei $X = \ell^2$, $x_n = (a_{n,j})_j, x = (a_j)$. Dann $x_n \xrightarrow{w} x \iff a_{n,j} \to a_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

44 *Antwort*

Seien X, Y Hilberträume und $T \in B(X, Y)$. Dann gibt es genau ein $T^* \in B(Y, X)$ mit

- $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \forall x \in X, y \in Y$,
- $\|T^*\| = \|T\|$,
- $(T^*)^* = T$.

43 *Antwort*

Eine Teilmenge M eines Hilbertraums X heißt **relativ schwach kompakt**, falls jede Folge $(x_n) \subseteq M$ eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

Eine beschränkte Teilmenge eines Hilbertraums ist relativ schwach kompakt.

46 *Antwort*

Für $S \in B(X)$ gilt:

$$\text{Kern}(S) = (\text{Bild}(S^*))^\perp, \quad \text{Kern}(S^*) = (\text{Bild}(S))^\perp$$

45 *Antwort*

Sei $S, T \in B(X), \lambda \in \mathbb{K}$

a) $(S + T)^* = T^* + S^*$

b) $(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*$

c) $(T \cdot S)^* = S^* T^*$

d) $\|S \cdot S^*\| = \|S\|^2 = \|S^* \cdot S\|$

48 *Antwort*

Unitäre und selbstadjungierte Operatoren sind normal.

47 *Antwort*

Sei $T \in B(X, Y)$, X, Y Hilberträume

a) T heißt **unitär**, falls T invertierbar ist und $T^{-1} = T^*$ d.h. T ist surjektiv und $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^* Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in X$

b) Sei $X = Y$. T ist **selbstadjungiert**, falls $T^* = T$, d.h. $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in X$

c) Sei $X = Y$. $T \in B(X)$ heißt **normal**, falls $T^*T = TT^*$. d.h. $\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^* x, T^* y \rangle \quad \forall x, y \in X$

$T \in B(X)$ ist selbstadjungiert genau dann wenn...

Norm von T, wenn T selbstadjungiert ist

$r(T)$ und Kern(T) wenn T normal ist

4x: Sei X ein Hilbertraum und $T \in B(X)$ kompakt und normal, d.h. $TT^* = T^*T$. Dann gilt

Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren

Seperabel + ONB

=> Darstellung des Operators

50 Antwort

Für $T \in B(X)$ selbstadjungiert, gilt:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$$

52 Antwort

Sei X ein Hilbertraum und $T \in B(X)$ kompakt und normal, d.h. $TT^* = T^*T$. Dann gilt

a) $Tx = \lambda x \iff T^*x = \overline{\lambda} x$

b) $Tx = \lambda x, Ty = \mu y$ mit $\mu \neq \lambda$ dann ist $x \perp y$

c) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann gibt es ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = \|T\|$

d) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und $\|T\| \in \sigma(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma(T)$

54 Antwort

Falls X separabel ist, so gibt es eine Orthonormalbasis (e_n) von X, die diese (h_n) (vom Spektralsatz) und eine orthonormalbasis von Kern(T) so, dass

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

wobei $\mu_n = 0$, falls $e_n \in \text{Kern}(T), \mu_n = \lambda_m$ falls $e_n = h_m$.

49 Antwort

Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

$T \in B(X)$ ist selbstadjungiert $\iff \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle x

51 Antwort

Sei $T \in B(X)$ normal

a) $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|T\|$

b) $\operatorname{Kern} T = \operatorname{Kern} T^*$

53 Antwort

Sei X ein Hilbertraum, $T \in B(X)$ kompakt und normal. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n) \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, die entweder endlich oder eine Nullfolge und es gibt ein Orthonormalsystem (h_n) in X, das endlich ist, falls (λ_n) endlich ist, so dass

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, h_n\rangle h_n \quad \forall x \in X$$

Insbesondere: 1. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}$, $Th_n = \lambda_n h_n$, 2. $X = (\operatorname{Kern} T) \oplus \overline{\operatorname{span}}\{h_n\}$, orthogonale Komplement, 3. $\|T\| = \sup_n |\lambda_n|$