

# Funktionalanalysis

Prof. Dr. Lutz Weis

Wintersemester 2015

Karlsruher Institut für Technologie

# Vorwort

Dieses Skript wurde im Wintersemester 2015/2016 von Martin Belica geschrieben. Es ist ein inoffizielles Skript und beinhaltet die Mitschriften aus der Vorlesung von Prof. Dr. Weis am Karlsruhe Institut für Technologie sowie die Mitschriften einiger Übungen.

## Einleitung

Die Funktionalanalysis liefert den begrifflichen Rahmen sowie allgemeine Methoden, die in weiten Teilen der modernen Analysis verwendet werden. Zum Beispiel ist es möglich Integral- und Differentialgleichungen als lineare Gleichungen in einem geeigneten unendlichdimensionalen Vektorraum (wie z.B. einem Raum stetiger oder integrierbarer Funktionen) aufzufassen. Will man nun auf diese unendlichdimensionalen Gleichungen Ideen der linearen Algebra anwenden, so treten Konvergenz- und Kompaktheitsprobleme auf, die wir in dieser Vorlesung behandeln wollen. Zu den Themen gehören:

- Beschränkte und abgeschlossene Operatoren auf normierten Räumen
- Stetigkeit und Kompaktheit auf metrischen Räumen
- Geometrie und Operatorentheorie in Hilberträumen
- Der Satz von Hahn-Banach und Dualität von Banachräumen

Die allgemeinen Aussagen werden durch konkrete Beispiele von Räumen und Operatoren der Analysis illustriert.

## Erforderliche Vorkenntnisse

Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b>	<b>4</b>
<b>Lineare Operatoren auf Banachräumen</b>	<b>7</b>
2 Normierte Räume . . . . .	7
3 Beschränkte und lineare Operatoren . . . . .	12
4 Metrische Räume . . . . .	20
5 Vollständigkeit . . . . .	29
6 Kompakte Mengen . . . . .	39
7 Kompakte Operatoren . . . . .	44
8 Approximation von $L^p$ Funktionen . . . . .	48
<b>Elemente der Operatortheorie</b>	<b>56</b>
9 Der Satz von Baire und der Satz von Banach-Steinhaus . . . . .	56
10 Satz von der offenen Abbildung . . . . .	61
11 Projektionen . . . . .	63
12 Abgeschlossene Operatoren . . . . .	65
13 Spektrum und Resolvente . . . . .	68
14 Das Spektrum kompakter Operatoren . . . . .	73
<b>Operatoren auf Hilberträumen</b>	<b>77</b>
15 Hilberträume . . . . .	77
16 Orthogonalität und Orthonormalbasen . . . . .	82
17 Der Darstellungssatz von Riesz . . . . .	87
18 Schwache Konvergenz und Kompaktheit . . . . .	89
19 Duale Operatoren auf Hilberträumen . . . . .	91
<b>Dualität in Banachräumen</b>	<b>98</b>
20 Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach . . . . .	98
<b>Anhang</b>	<b>100</b>
Wiederholungen . . . . .	100
Ergänzungen . . . . .	101
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>103</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>104</b>

# Einführung

## Räume

Sei  $X$  ein Vektorraum,  $\dim X < \infty$  und sei  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 := \left( \sum_{k=1}^n \|x_k^2\| \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n \|x_i\|$$

Diese Normen sind äquivalent, denn:  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$

### Satz 1.1 (Bolzano-Weierstraß)

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt. Dann hat jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  eine konvergente Teilfolge.

### Beispiel 1.2

Betrachte  $X = C[0, 1] = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } [0, 1]\}$  mit  $\|f\|_\infty := \max_{t \in [0, 1]} \|f(t)\|$ .

Sei weiter  $f_n: t \rightarrow t^n$ , damit gilt  $\|f_n\|_\infty \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .



Abbildung 1.1:  $f_n$  für  $n = 3, 8, 20$  und  $50$

Die Folge  $(f_n)_{n \geq 1}$  besitzt damit aber in  $X$  keine konvergente Teilfolge, da die Grenzfunktion

$$f = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

nicht in  $X$  liegt.  $\Rightarrow$  Satz von Bolzano-Weierstraß gilt im unendlich dimensionalen i.A. nicht!

## Operatoren

Sei  $N = \dim X, M = \dim Y$  und seien  $(e_n)$  bzw.  $(f_n)$  Basen von  $X$  bzw.  $Y$ .  
Sei  $T: X \rightarrow Y$  gegeben durch:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \alpha_n \rightarrow \sum \alpha_n e_n \downarrow & & \downarrow \beta_n \rightarrow \sum \beta_n f_n \\ \mathbb{R}^N & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

wobei  $x = \sum \alpha_n e_n$ ,  $Tx = \sum \beta_n f_n$ ,  $\beta_m = \sum_{n=1}^N a_{mn} \alpha_n$ .

Daraus folgt:

- $T$  ist stetig
- $X = Y \iff T$  injektiv  $\iff T$  surjektiv (Dimensionsformel)  
(Die Gleichung  $Tx = y$  ist eindeutig lösbar  $\iff$  Gleichung hat für alle  $y \in Y$  eine Lösung.)
- Falls  $A$  selbstadjungiert ist, d.h.  $A = A^*$ , gibt es eine Basis aus Eigenvektoren  $(e_n)$  von  $A$ , d.h.  $T(\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \alpha_n e_n$ , wobei  $\lambda_n$  Eigenwerte sind, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### Beispiel 1.3

$X = C^1[0, 1] = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig auf } [0, 1]\}$

$Tf = f', T: X \rightarrow C[0, 1]$  stetig. (Aber:  $T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , hier ist  $T$  nicht definiert.)

$T$  ist nicht stetig bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm, da:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}, \quad \text{dann: } \|f_n\| \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

$$Tf_n(t) = i\sqrt{n} e^{int}, \quad \text{mit: } \|Tf_n\|_\infty \rightarrow \infty, \text{ für } n \rightarrow \infty$$

### Beispiel 1.4

$X = L_2 = \{(a_n) : \left(\sum_{n \geq 1} \|a_n\|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$

$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$

$T$  ist injektiv, aber nicht surjektiv

## Anwendungen

### 1. Fredholm'sche Integralgleichungen

$X = C[0, 1], \quad k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

$$Tf(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s) ds$$

Analogie zum endlich dim. ('Verallg. der Matrixmultiplikation'):  $T(f_j)(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$

$T$  ist in diesem Fall linear und stetig und es gilt die Fredholm'sche Alternative:

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (\lambda Id - T)(f) = y, \quad f, g \in C[0, 1]$$

Dann existiert eine Lösung genau dann, wenn diese eindeutig ist.

## 2. Dirichletproblem

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Gebiet, offen, beschränkt, glatter Rand. Sei  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig

Gesucht ist ein  $f \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ , so dass  $\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$  in  $\Omega$  und  $f|_{\partial\Omega} = g$

Beispiel: Durch Wärmeverteilung auf dem Rand auf die Wärmeverteilung im Inneren schließen.

Lösung: Dirichletintegral  $J(u) = \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx$ , wobei  $u \in M = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = g\}$

Sei  $u_0$  das absolute Minimum von  $J$ , d.h.  $J(u_0) = \inf\{J(w) : w \in M\}$

$v \in C^1(\bar{\Omega})$  mit  $v = 0$  in einer Umgebung von  $\partial\Omega$ .  $\epsilon \rightarrow J(u_0 + \epsilon v)$ :

$$\frac{d}{d\epsilon} J(u_0 + \epsilon v) = \int_{\Omega} \frac{d}{d\epsilon} (\nabla u_0 + \epsilon \nabla v)^2 dx = 2 \int_{\Omega} (\nabla u_0 + \epsilon \nabla v)(\nabla v) dx|_{\epsilon=0} = 2 \int_{\Omega} (\nabla u_0)(\nabla v) dx$$

$$\text{Mit } 0 \geq J(u_0 + \epsilon v) - J(u_0) \geq 0 : \quad \int (\nabla u_0)(\nabla v) dx \stackrel{\text{P.I.}}{=} - \int (\nabla u_0) v dx = 0$$

$$\Rightarrow \nabla u_0 = 0, \text{ außerdem } u_0|_{\partial\Omega} = g \text{ (s.o.)}$$

Im Allgemeinen existiert das, das absolute Minimum  $u_0 \in J$  aber nicht.

Ausweg:  $X = \{f \in L^2(\Omega), f' \in L^2(\Omega)\} \supset \{f \in C(\bar{\Omega}), f' \in C(\bar{\Omega})\}$

In diesem Raum  $X$  (Sobolevräume) gibt es ein Minimum  $u_0$  von  $J$ .

## 3. Sturm-Liouville Problem

$X = C^2([0, 1]), Tu = (pu')' + qu$ , mit  $q \in C[0, 1], p \in C^1[0, 1]$

Problem: bei gegebenen  $f \in C[0, 1]$  finde  $u \in X$  mit  $Tu = f, v(0) = 0, v'(1) = 0$

$Y = \{f \in L^2[0, 1], f' \in L^2[0, 1]\}$  Hilbertraum.

Orthonormalbasis  $(e_n)$  von  $Y$  wäre:  $\|e_n\|_2 = 1, \int e_n(x) e_m(x) dx = 0$  für  $m \neq n$

$f \in Y : f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$  mit  $\|f\|^2 = \sum |\alpha_n|^2$

Die  $(e_n)$  sind außerdem Eigenvektoren des Operatoren  $T$ , d.h.  $T e_n = \lambda_n e_n$

$$Ty = f \Rightarrow \int Ty(x) e_n(x) dx = \int f(x) e_n(x) dx, y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Gesucht sind die Koeffizienten  $\alpha_n$

$$\begin{aligned} \int f(x) e_n(x) dx &= \sum_m \lambda_m \alpha_m \int T e_m(x) e_n(x) dx \\ &= \lambda_n \alpha_n \int e_n(x) e_n(x) dx \\ \Leftrightarrow \alpha_n &= \frac{1}{\lambda_n} \int f(x) e_n(x) dx \end{aligned}$$

# Lineare Operatoren auf Banachräumen

## 2 Normierte Räume

### Definition 2.1

Sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

Eine Abbildung  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}_+$  heißt eine **Norm**, wenn

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

### Bemerkung 2.2

Falls  $\|\cdot\|$  all die oben genannten Eigenschaften erfüllt außer  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ , dann heißt  $\|\cdot\|$  Halbnorm.

### Vereinbarung:

Die Menge  $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  heißt **Einheitskugel**.

Eine Folge  $(x_n)$  des normierten Raums  $X$  **konvergiert** gegen ein  $x \in X$ , falls  $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

### Bemerkung 2.3

Für zwei Elemente  $x, y \in (X, \|\cdot\|)$  in normierten Räumen gilt auch die **umgekehrte Dreiecksungleichung** ( $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ )

### Beispiel 2.4

Sei  $X = \mathbb{K}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in \mathbb{K}$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (p=2: \text{Euklidische Norm})$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{j=1}^n |x_j|$$

Beh.:  $\|\cdot\|$  ist Norm auf  $\mathbb{K}^n$  für  $1 \leq p \leq \infty$

$\|x + y\|_\infty = \sup_{j=1}^n |x_j + y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$  Für  $p \in (1, \infty), p \neq 2$ : siehe Übungsaufgabe (Fall  $p=2$  läuft über Cauchy-Schwarz)

Beachte:  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n \|x\|_\infty$

### Definition 2.5

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  heißen **äquivalent** auf  $X$ , falls es  $0 < m, M < \infty$  gibt, so dass für alle  $x \in X$  gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

**Satz 2.6**

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

**Beweis**

Wähle eine algebraische Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $X$ , wobei  $n = \dim X < \infty$ .

Definiere  $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ , wobei  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

z. z. die gegebene Norm  $\|\cdot\|$  ist äquivalent zu  $\|\cdot\|$ .

Beweis:

In der einen Richtung betrachte:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\ &\leq \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=: \|x\|} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=: \nu} \end{aligned}$$

Für die Umkehrung benutze die Funktion  $J: \mathbb{K}^n \rightarrow X$ ,  $J(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Die Abbildung  $y \in \mathbb{K}^n \rightarrow \|Jy\|$  ist stetig, denn

$$\|Jy\| = \|y\|_{\mathbb{K}^n} = \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\begin{aligned} \text{und } \|Jy\| - \|Jz\| &\leq \|Jy - Jz\| = \|J(y - z)\| \\ &\leq \nu \|J(y - z)\| \\ &= M \|y - z\|_{\mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von  $y \rightarrow \|Jy\| \in \mathbb{R}$

Sei  $S = \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\|_{\mathbb{K}^n} = 1\}$ . Dann ist  $S$  abgeschlossen und beschränkt. Die Abbildung  $N: y \in S \rightarrow \|Jy\| > 0$  ist wie in (\*) gezeigt stetig. Nach Analysis II nimmt  $N$  sein Minimum in einem Punkt  $y_0 \in S$  an. Setze

$$\begin{aligned} m &= \inf\{\|x\| : \|x\| = 1\} = \inf\{\|Jy\| : y \in S\} \\ &= \|Jy_0\| > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Also } m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} \Rightarrow \|x\| \leq m \|x\|.$$

□



**Proposition 2.7**

Für zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  auf  $X$  sind äquivalent:

- a)  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  sind äquivalent
- b) Für alle  $(x_n) \subset X, x \in X$  gilt  $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$
- c) Für alle  $(x_n) \subset X$  gilt  $\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n\|_2 \rightarrow 0$
- d) Es gibt Konstanten  $0 < m, M < \infty$ , so dass  $mU_{(X, \|\cdot\|_1)} \leq U_{(X, \|\cdot\|_2)} \leq MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$

**Beweis**

a)  $\Rightarrow$  b)  $\Rightarrow$  c) folgt direkt durch die Definition von äquivalenten Normen.

c)  $\Rightarrow$  d) Annahme: Es existiert kein  $M$  mit  $U_{(X, \|\cdot\|_2)} \subset MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$ .

Dann gibt es eine Folge  $x_n \in U_{(X, \|\cdot\|_2)}$  mit  $\|x_n\|_1 \geq n^2$ .

Setze  $y_n = \frac{1}{n}x_n$ . Dann gilt  $\|y_n\|_1 \rightarrow 0$  und  $\|y_n\|_2 \rightarrow \infty$ .

Widerspruch zu c).

d)  $\Rightarrow$  a) Gegeben ist  $U_{(X, \|\cdot\|_2)} \subset MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$

Das ist äquivalent zu  $\|x\|_2 \leq M\|x\|_1$

Analog folgt aus  $mU_{(X, \|\cdot\|_1)} \subset U_{(X, \|\cdot\|_2)}$  dann  $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ .

Also  $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$

□

**Vereinbarung:**

Sei  $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$  der **Folgenraum**

und  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der Einheitsvektor, wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

**Beispiel 2.8**

- $\ell^p = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$
- $\ell^\infty = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$
- $c_0 = \{x = (x_n) \in \ell^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0\}$

Gültigkeit der Dreiecksungleichung beweist man ähnlich wie bei  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ .

**Lemma 2.9**

**Minkowskii-Ungleichung:**  $(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

**Hölder-Ungleichung:** mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$

**Bemerkung 2.10**

Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen  $\|\cdot\|_p$  auf  $\mathbb{F}$  nicht äquivalent.

**Beweis**

Sei  $p > q$ , setze

$$X_n := \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j, \quad e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$$

Damit gilt  $x_n \in \mathbb{F}$  und weiter

$$\|x_n\|_p = \left( \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{p}} \simeq (\ln(2))^{\frac{1}{p}}$$

aber  $\|x_n\|_q \rightarrow \infty$ , also sind  $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q$  keine äquivalente Normen. □

### Beispiel 2.11

a) Raum der stetigen Funktionen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{u \in \Omega} |f(u)|$   
 $\Rightarrow \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$  bedeutet gleichmäßige Konvergenz von  $f_n$  gegen  $f$  auf  $\Omega$ .

b) Raum der differenzierbaren Funktionen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$   
 $D^\alpha f(x) = \frac{\delta^{|\alpha|}}{\delta x_1^{\alpha_1} \dots \delta x_n^{\alpha_n}} f(x)$ , wobei  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

### Definition 2.12

Wir nennen  $C_b^m(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \text{ sind stetig in } \Omega, \text{ beschränkt auf } \Omega \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$  den **Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen**.

Auf  $C_b^m$  definieren wir die Norm:  $\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$

### Bemerkung 2.13

Auf  $C_b^m[0, 1]$  ist eine äquivalente Norm zu  $\|f\|_{C_b^m}$  gegeben durch

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

Denn  $f^{(i)}(t) = f^{(i)}(0) + \int_0^t f^{(i+1)}(s) ds$  und damit  $\|f^{(i)}\|_\infty \leq |f^{(i)}(0)| + \|f^{(i+1)}\|_\infty$

### Beispiel 2.14

$X = C(\bar{\Omega})$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt.

Definiere  $\|f\|_{L^p} = \left( \int_\Omega |f(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}}$  und betrachte  $f_k(t) = t^k, t \in [0, 1]$ , dann gilt:

$$\|f\|_{L^p} = \left( \frac{1}{kp+1} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad p < \infty$$

### Definition 2.15 (Quotientenräume)

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum.  $M \subset X$  sei abgeschlossener, linearer Unterraum.

(abgeschlossen: d.h. für alle  $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x \in M$ )

Definiere  $\hat{X} = X/M$ ,  $\hat{x} \in X/M$ :  $\hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$

Dabei gilt unter anderem  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \widehat{x_1 + x_2}$  und  $\lambda \hat{x}_1 = \widehat{\lambda x_1}$ ;  $\hat{X}$  bildet somit einen Vektorraum.  
 Definieren wir eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels  $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|x - y\|_X : y \in M\} =: d(x, Y)$

Behauptung:  $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$  ein normierter Raum.

Beweis: Sei  $\hat{x} \in \hat{X}$  beliebig mit  $\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = 0$

dann existiert ein  $y_n \in \hat{X}$  mit  $\|y_n\| \rightarrow 0$  und  $x - y_n \in M$

$$\Rightarrow x \in M, \hat{x} = 0$$

Zu  $\epsilon > 0$  wähle für  $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}, y_1, y_2 \in M$  mit

$$\|\hat{x}_i\| \geq \|x_i - y_i\| - \epsilon$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|\widehat{x+y}\| &\leq \|x_1 + x_2 - y_1 - y_2\| \\ &\leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \\ &\leq \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| + 2\epsilon \end{aligned}$$

### Bemerkung 2.16

Ist  $\|\cdot\|$  nur eine Halbnorm auf  $X$ , so ist  $M = \{x : \|x\| = 0\}$  ein abgeschlossener, linearer Teilraum von  $X$  und der Quotientenraum  $(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$  ist ein normierter Raum.

### Beispiel 2.17

- Hölderstetige Funktionen

Wenn  $h_\alpha(f) = \sup_{u,v \in \mathbb{R}, u \neq v} \frac{\|f(u) - f(v)\|}{|u - v|^\alpha} < \infty$  ( $\alpha \in (0, 1]$ ), dann nennt man  $f$  hölderstetig.

$$C^\alpha(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : h_\alpha(f) < \infty\} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

Im Moment ist  $h_\alpha(\cdot)$  eine Halbnorm. Unter der Voraussetzung  $\Omega$  zusammenhängend gilt aber weiter:

$$h_\alpha(f) = 0 \iff f \equiv c \text{ konstant}$$

Wenn z.B.  $M = \{1_\Omega\}$  und  $V = C^\alpha/M$  ist oben genanntes sogar ein normierter Raum.

- Lebesgues-Integrierbare Funktionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : |f|^p \text{ ist Lebesgue-integrierbar auf } \Omega\}$ . Wir definieren  $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ , wobei  $\|\cdot\|_p$  hier eine Halbnorm bildet.

$$\|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \text{ fast überall auf } \Omega$$

Wähle  $M = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f = 0 \text{ fast überall auf } \Omega\}$ .

Dann ist

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega) / M \text{ ein normierter Raum.}$$

### 3 Beschränkte und lineare Operatoren

**Definition 3.1**

Eine Teilmenge  $V$  eines normierten Raums  $(X, \|\cdot\|)$  heißt **beschränkt**, falls

$$c := \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X, \|\cdot\|)}.$$

**Bemerkung 3.2**

Eine konvergente Folge  $(x_n) \in X, x_n \rightarrow x$  ist beschränkt, denn  $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$  für fast alle  $m$ .

**Satz 3.3**

Seien  $X, Y$  normierte Räume. Für einen linearen Operator  $S : X \rightarrow Y$  sind äquivalent:

- a)  $T$  stetig, d.h.  $x_n \rightarrow x$  impliziert  $Tx_n \rightarrow Tx$
- b)  $T$  stetig in 0
- c)  $T(U_{(X, \|\cdot\|)})$  ist beschränkt in  $Y$
- d) Es gibt ein  $c < \infty$  mit  $\|Tx\| \leq c\|x\|$

**Beweis**

a)  $\Rightarrow$  b) klar, ist ein Spezialfall.

b)  $\Rightarrow$  c) Wäre c) falsch, dann gibt es ein  $x_n \in U_X$  mit

$$\|Tx_n\| \geq \frac{1}{n^2}$$

Setze  $y_n = \frac{1}{n}x_n$ , dann gilt

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{n}\|x_n\| \rightarrow 0, \|Ty_n\| = n^2\|T(x_n)\| \geq \frac{n^2}{n} \rightarrow \infty$$

Widerspruch zur Voraussetzung.

c)  $\Rightarrow$  d) Sei  $T(U_X) \subset U_Y$

Für  $x \in X \setminus \{0\}, \frac{x}{\|x\|} \in U_X$  folgt:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) &\in cU_Y \\ \Rightarrow \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| &\leq c \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \end{aligned}$$

d)  $\Rightarrow$  a) Für  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  folgt:

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tx\| &= \|T(x_n - x)\| \\ &\leq c\|x_n - x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx \text{ in } Y$$

□

**Definition 3.4**

Seien  $X, Y$  normierte Räume. Mit  $B(X, Y)$  bezeichnen wir den **Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren**  $T : X \rightarrow Y$ . Ist  $X = Y$  schreiben wir auch kurz  $B(X) := B(X, X)$ .

Für  $T \in B(X, Y)$  setze

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}\end{aligned}$$

Die Norm  $\|T\|$  von  $T$  ist die kleinste Konstante  $c$ , für welche die Gleichung  $\|Tx\| \leq c\|x\|$  für alle  $x \in X$  gilt.

**Satz 3.5**

$(B(X, Y), \|\cdot\|)$  ist ebenfalls ein normierter Raum und für  $X = Y$  gilt für  $S, T \in B(X)$ :

$$\|S \cdot T\| \leq \|S\|\|T\|$$

**Beweis**

$$\|T\| \geq 0, \|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \text{ für } \|x\| \leq 1 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow T = 0$$

$$\begin{aligned}\|(T + S)(x)\| &= \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq \|T\| + \|S\|\end{aligned}$$

Nehme das Supremum über  $\|x\| \leq 1$ :

$$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

$$\begin{aligned}\|(S \cdot T)(x)\| &= \|S(Tx)\| \leq \|S\|\|Tx\| \\ &\leq \|S\|\|T\|\|x\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|ST\| \leq \|S\|\|T\|$$

□

**Beispiel 3.6**

a)  $Id x = x, \|Id\| = 1$

b) Falls  $\dim X = n < \infty, Y$  normierter Raum, dann sind alle linearen Operatoren  $T : X \rightarrow Y$  beschränkt.

**Beweis**

Wähle die Basis  $e_1, \dots, e_n$  von  $X$

Für  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  gilt:

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \left\|\sum_{i=1}^n x_i T e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T e_i\| \\ &\leq \max_{i=1}^n \|T e_i\|_Y \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &\leq c\|x\|, \text{ da } \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|\end{aligned}$$

Aber: Wenn  $\dim X = \infty, \dim Y < \infty$  so gibt es viele unbeschränkte, lineare Operatoren von  $X$  nach  $Y$ .  $\square$

$$\begin{aligned} \text{c) } X &= C^\infty(0, 1), \|f\|_\infty = \sup_{u \in (0, 1)} |f(u)| \\ T : X &\rightarrow X, Tf = f', f_k(t) = e^{i2\pi kt} \in X, Tf_k(t) = 2\pi i k f_k(t) \\ \|f_k\| &= 1, \|Tf_k\| = 2\pi k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\text{d) } \mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \text{ bis auf endlich viele } n\}$$

$$T : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T((x_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n x_n \in \mathbb{R}, \quad \|Te_n\| = n \rightarrow \infty$$

### Beispiel 3.7 (Integraloperator)

$X = Y = C(\bar{\Omega}), \Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt. Gegeben sei  $k \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

Für  $f \in C(\bar{\Omega})$  setze:  $Tf(u) = \int_{\Omega} k(u, v)f(v)dv, \quad (A(f_j))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}f_j, A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

Dann ist  $Tf \in C(\bar{\Omega})$  (nach **Lebesgueschem Konvergenzsatz**)

$$\begin{aligned} |Tf(u)| &\leq \int_{\Omega} |k(u, v)| |f(v)| dv \\ &\leq \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \sup_{u \in \bar{\Omega}} |f(u)| \end{aligned}$$

sup über  $u \in \Omega$  liefert dann:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_\infty &\leq \sup_{u \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \|f\|_\infty \\ \Rightarrow \|T\| &= \sup_{u \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} |k(u, v)| dv < \infty, \end{aligned}$$

Die Abbildung  $u \in \bar{\Omega} \rightarrow \int |k(u, v)| dv \in \mathbb{R}$  ist stetig nach dem **Konvergenzsatz von Lebesgue**.

### Beweis

"  $\leq$  " ist klar

"  $\geq$  " Falls  $k(u, v) \geq 0$  dann ist  $T \cdot \mathbf{1}(u) = \int k(u, v)dv = \int |k(u, v)|dv$

$$\|T \cdot \mathbf{1}\| = \sup_{u \in \bar{\Omega}} \int |k(u, v)| dv \leq \|T\|, \text{ d.h. } \|\mathbf{1}\| = 1$$

Skizze:

$$\sup \int |k(u, v)| dv \sim \int |k(u_0, v)| dv = \int k(u_0, v)g(v)dv$$

mit  $g(v) = \text{sign}(v)k(u_0, v)$ ,  $g$  ist aber nicht stetig.

Ggf. Approximation des Signums durch stetige Funktionen.  $\square$

### Beispiel 3.8 (Kompositionsoperator)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

$$\sigma : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega} \text{ stetig, für } f \in C(\bar{\Omega}) : Tf(u) = f(\sigma(u))$$

z.B.:  $\sigma$  als Transposition der Elemente in  $\Omega$

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \|T\| = 1$$

**Beispiel 3.9 (Differentialoperatoren)**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $X = C^m(\bar{\Omega})$ ,  $Y = C_b(\Omega)$ ,

$$T : X \rightarrow Y, \quad Tf(u) = \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha D^\alpha f(u), \quad u \in \mathbb{R}, a_\alpha \in C\bar{\Omega}$$

$$\text{damit } \|Tf\|_\infty \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|a_\alpha\|_\infty \|D^\alpha f\|_\infty \leq c \|f\|_\infty$$

**Beispiel 3.10 (Matrizenmultiplikation)**

Für  $p \in [1, \infty]$  und  $T \in B(\ell^p)$  setzen wir

$$e_l := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots), \quad l \in \mathbb{N}, \quad \text{wobei die 1 an } l\text{-ter Stelle steht.}$$

und  $a_{kl} = (Te_l)_k$ , sowie  $A = (a_{kl})_{k,l \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow (Tx)_k = \left( \sum_{l=1}^{\infty} x_l Te_l \right)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l, \quad k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad Tx = Ax \quad (\text{unendliches Matrixprodukt})$$

a) Die Hille-Tamarkin-Bedingung (nur hinreichend)

Sei  $p \in (1, \infty)$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Setze

$$c := \left( \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{l \geq 1} |a_{kl}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

so definiert  $T$  einen Operator  $T \in B(\ell^p)$  mit  $\|T\| \leq c$

**Beweis**

a) Wohldefiniertheit: (und Beschränktheit)

Für  $x \in \ell^p$  folgt

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k \geq 1} |(Tx)_k|^p \\ &= \sum_{k \geq 1} \left| \sum_{l \geq 1} a_{kl} x_l \right|^p \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{l \geq 1} |a_{kl}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \left( \sum_{l \geq 1} |x_l|^p \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= c^p \|x\|_{\ell^p}^p < \infty \end{aligned}$$

b) Linearität

Wegen  $c < \infty$  ist  $(\sum_l |a_{kl}|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$

Für  $x \in \ell^p$  konvergiert die Reihe nach Hölder. Damit ist  $T$  offensichtlich linear.  $\square$

b) Der Fall  $\ell^1$ :

Es ist  $T \in B(\ell^1)$  genau dann, wenn

$$c_1 := \sup_l \sum_k |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist  $\|T\| = c_1$ .

**Beweis**

"  $\Rightarrow$  " Sei  $T \in B(\ell^1)$ . Dann gilt für  $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_k |a_{kl}| &= \sum_k |(Te_l)_k| \\ &= \|Te_l\|_{\ell^1} \\ &\leq \|T\| \|e_l\|_{\ell^1} = \|T\| < \infty \end{aligned}$$

"  $\Leftarrow$  " folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem gilt  $\|T\| \leq c_1$

□

c) Der Fall  $\ell^\infty$ :

Es ist  $T \in B(\ell^\infty)$  genau dann, wenn

$$c_\infty := \sup_k \sum_l |a_{kl}| < \infty$$

und in diesem Fall ist  $\|T\| = c_\infty$

**Beweis**

"  $\Rightarrow$  " Sei  $T \in B(\ell^\infty)$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  setze dann  $x^{(k)} = \begin{cases} \frac{|a_{kl}|}{a_{kl}} & a_{kl} \neq 0 \\ 0 & a_{kl} = 0 \end{cases}$

dann ist  $x^{(k)} \in \ell^\infty$  mit  $\|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} = 1$  und weiter

$$\begin{aligned} \sum_l |a_{kl}| &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl} x_l^{(k)} \right| \\ &= |(Tx^{(k)})_k| \\ &\leq \|Tx^{(k)}\|_{\infty} \\ &\leq \|T\| \|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} = \|T\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_\infty \leq \|T\|$$

"  $\Leftarrow$  " folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem gilt  $\|T\| \leq c_\infty$

□

d) Interpolation

Ist  $T \in B(\ell^1) \cap B(\ell^\infty)$ , dann ist  $T \in B(\ell^p)$  für alle  $p \in (1, \infty)$  mit  $\|T\| \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}}$ , wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

**Beweis**

Für  $x \in \ell^p$  setzen wir  $y_k := |(Tx)_k|^{p-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \|y\|_{\ell^q} = \left( \sum_{k \geq 1} |(Tx)_k|^{\overbrace{p}^{q(p-1)}} \right)^{\frac{1}{q}} = \|Tx\|_{\ell^p}^{p-1}$$



Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k \geq 1} y_k |(Tx)_k| \leq \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} y_k |a_{kl}| |x_l| \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} |a_{kl}|^{\frac{1}{p}} |a_{kl}|^{\frac{1}{q}} y_k |x_l| \\
&\leq \left( \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} |a_{kl}| |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum_{k \geq 1} \sum_{l \geq 1} |a_{kl}| |x_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c_\infty^{\frac{1}{q}} \|y\|_{\ell^q} c_1^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\ell^p} \\
&= c_\infty^{\frac{1}{q}} c_1^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\ell^p} \|Tx\|_{\ell^p}^{p-1} \\
&\Rightarrow \|Tx\|_{\ell^p} \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell^p} \text{ und } \|T\| \leq c_1^{\frac{1}{p}} c_\infty^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

□

### Definition 3.11

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume und  $T : X \rightarrow Y$  linear.

- a)  $T$  heißt **Isometrie**, falls  $\|Tx\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$
- b)  $T$  heißt **stetige Einbettung**, falls  $T$  stetig und injektiv ist
- c)  $T$  heißt **isomorphe Einbettung**, falls  $T$  injektiv ist und ein  $c > 0$  existiert mit

$$\frac{1}{c} \|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X$$

In diesem Fall identifizieren wir oft  $X$  mit dem Bild von  $T$  in  $Y$ ,  $X \cong T(X) \subset Y$

- d)  $T$  heißt **Isomorphismus**, falls  $T$  bijektiv und stetig ist und  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  ebenfalls stetig ist.

$$\text{d.h. falls } \exists c > 0 : \frac{1}{c} \|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X$$

(daraus folgt dann auch für  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  aus der ersten Ungleichung

$$\|T^{-1}y\|_X \leq c \|T(T^{-1}y)\|_Y = c \|y\|_Y, \text{ d.h. } T^{-1} \text{ ist stetig.})$$

In diesem Fall identifizieren wir  $X \cong Y$  und sagen  $X$  und  $Y$  sind isomorph (da  $X, Y$  normierte Vektorräume sind, fordern wir im Gegensatz zur Linearen Algebra, dass  $T, T^{-1}$  zusätzlich stetig sind).

### Beispiel 3.12

- a) Seien  $(X, \|\cdot\|_1)$  und  $(X, \|\cdot\|_2)$  normierte Vektorräume. Dann gilt

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \iff I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2), Ix = x \text{ ist isomorph}$$

- b)  $I : c_0 \hookrightarrow \ell^\infty, Ix = x$  ist isometrische Einbettung

### Definition 3.13

Sei  $X$  ein normierter Vektorraum. Der Raum

$$X' = B(X, \mathbb{K})$$

heißt **Dualraum** von  $X$  oder Raum der linearen Funktionalen.

**Beispiel 3.14**

Sei  $X = \ell^p$  für  $p \in (1, \infty)$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Die Abbildung

$$\Phi_p: \ell^p \rightarrow (\ell^p)', \quad [\Phi_p(x)](y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x \in \ell^p, y \in \ell^q$$

Ist ein isometrischer Isomorphismus, d.h.  $(\ell^p)' \cong \ell^q$ , (insbesondere  $(\ell^2)' \cong \ell^2$ )

**Beweis**

Nach Hölder konvergiert die Reihe  $[\Phi_p(x)](y)$  absolut mit

$$|[\Phi_p(x)](y)| \leq \sum_n |x_n y_n| \leq \|x\|_{\ell^q} \|y\|_{\ell^p}$$

Da  $\Phi_p(x)$  linear in  $Y$  ist, folgt  $\Phi_p(x) \in (\ell^p)'$  mit

$$\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \leq \|x\|_{\ell^q}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \geq \|x\|_{\ell^q}$  und  $\Phi_p$  surjektiv ist. Sei  $y' \in (\ell^p)'$ , dann setze  $x_n := y'(e_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $x = (x_n)_{n \geq 1}$ . Setze außerdem

$$z_n := \begin{cases} \frac{|x_n|^q}{x_n} & x_n \neq 0 \\ 0 & x_n = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt für  $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |x_n|^q &= \sum_{n=1}^N x_n z_n \\ &= \sum_{n=1}^N y'(e_n) z_n = y' \left( \sum_{n=1}^N z_n e_n \right) \\ &\leq \|y'\|_{(\ell^p)'} \underbrace{\left\| \sum_{n=1}^N z_n e_n \right\|_{\ell^p}}_{= (\sum_{n=1}^N |x_n|^{(q-1)p})^{\frac{1}{p}}} \\ &= \left( \sum_{n=1}^N |x_n|^q \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\text{Also zusammen: } \left( \sum_{n=1}^N |x_n|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|y'\|_{(\ell^p)'}, \text{ wobei } 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \|x\|_{\ell^q} \leq \|y'\|_{\ell^\infty} < \infty, \text{ d.h. } x \in \ell^q \quad (0.1)$$

Da für  $y \in \ell^p$

$$\|y - \sum_{n=1}^N y_n e_n\|_{\ell^p}^p = \sum_{n \geq N+1} |y_n|^p \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty$$

folgt

$$|y'(y) - \sum_{n=1}^N y'(y_n e_n)| \leq \|y'\| \|y - \sum_{n=1}^N y_n e_n\|_{\ell^p} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

und damit

$$\begin{aligned} [\Phi_p(x)](y) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y'(y_n e_n) \\ &= y'(y) \forall y \in \ell^p \end{aligned}$$

d.h.  $\Phi_p(x) = y'$  und damit  $\Phi_p$  surjektiv. Außerdem gilt nach (0.1)

$$\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \geq \|x\|_{\ell^q},$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

### Bemerkung

- a) Analog zu obigem zeigt man  $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$  und  $(c_0)' \cong \ell^1$
- b) Eine ähnliche Aussage gilt auch für  $L^p$ -Räume auf einem Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ : Hier gilt:

$$L^p(\Omega, \mu)' \cong L^q(\Omega, \mu)$$

bezüglich der Dualität  $[\Phi_p(f)](g) (= \langle f, g \rangle) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x)$  wobei  $p \in [1, \infty)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

### Beispiel 3.15

- a) Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $x \in K$ . Dann definieren wir

$$\delta_x(f) := f(x) \text{ für } f \in C(K)$$

Wir versetzen  $C(K)$  mit der Supremumsnorm. Dann gilt:

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{\infty}$$

und offensichtlich ist  $\delta_x$  linear, d.h.  $\delta_x \in (C(K))'$  mit  $\|\delta_x\| \leq 1$ .

- b) Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $\mu$  ein endliches Maß auf  $\mathcal{B}(K)$ . Dann definieren wir

$$\delta_{\mu}(f) = \int_K f(x)d\mu(x) \text{ für } f \in C(K)$$

Dann gilt

$$|\delta_{\mu}(f)| \leq \mu(K)\|f\|_{\infty}.$$

Da  $\delta_{\mu}$  linear ist, gilt  $\delta_{\mu} \in (C(K))'$  mit  $\delta_{\mu} \leq \|\mu(K)\|$ . In diesem Sinne sind Maße Elemente von  $(C(K))'$

### Bemerkung 3.16

Man kann zeigen, dass  $(C(K))' \cong M(K)$ , wobei  $M(K)$  die Menge der 'regulären' Borelmaße versehen mit der Variationsnorm ist. Die Dualität ist gegeben durch

$$(T\mu)(f) = \int_K f(x)d\mu(x)$$

## 4 Metrische Räume

### Definition 4.1

- a) Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Eine Abbildung  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Metrik** auf  $M$ , falls  $\forall x, y, z \in M$ :

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \text{ (positive Definitheit)}$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (Symmetrie)}$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

Das Tupel  $(M, d)$  nennen wir dann einen metrischen Raum.

- b) Eine Folge  $(x_n)_{n \geq 1} \subset M$  konvergiert gegen  $x \in M$ , falls

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Notation:  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  (in  $M$ )

### Bemerkung

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist stets eindeutig, denn:

Sei  $(x_n)_{n \geq 1} \subset M$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in M$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \in M$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

d.h.  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

### Beispiel 4.2

- a) Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und  $M \subset X$  (nichtleere) Teilmenge.  
 Dann definiert  $d(x, y) := \|x - y\|$ ,  $x, y \in M$  eine Metrik auf  $M$ .  
 Ein Unterschied hier: Eine Norm setzt eine lineare Struktur auf  $X$  voraus, eine Metrik macht auch Sinn auf nicht-linearen Teilmengen.
- b) Sei  $M$  eine nichtleere Menge, dann definieren wir die **diskrete Metrik** auf  $M$  durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

Dann ist  $(M, d)$  ein metrischer Raum und es gilt:

$$x_n \rightarrow x \text{ in } M \iff \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } x_n = x \quad \forall n \geq N$$

### Beispiel 4.3

- a) Sei  $X$  ein Vektorraum und  $p_j$  für  $j \in \mathbb{N}$  Halbnormen auf  $X$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $x \in X \setminus \{0\}$  ein  $K \in \mathbb{N}$  existiert mit  $p_K > 0$ . Dann definiert

$$d(x, y) := \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \frac{p_j(x - y)}{1 + p_j(x - y)}, \quad x, y \in X$$

eine Metrik auf  $X$  mit

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff p_j(x_n - x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Beweis siehe Übung

b) Für  $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{K}\}$  und  $p_j(x) := |x_j|, j \in \mathbb{N}$  definiert also

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} \text{ gerade die komponentenweise Konvergenz auf } X$$

c) In  $\ell^\infty$  entspricht die Konvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$  gerade der gleichmäßigen Konvergenz der Folge  $x_n := (x_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$  gegen  $x := (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\|x_n - x\|_{\ell^\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_{n,i} - x_i| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

d) In  $C[a, b]$  entspricht die Konvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  ebenfalls die gleichmäßige Konvergenz von Funktionen

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f \text{ in } [a, b] &\iff \|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0 \\ &\iff f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig.} \end{aligned}$$

#### Definition 4.4

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

- a) Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt **abgeschlossen** (in  $M$ ), falls für alle in  $M$  konvergenten Folgen  $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$  der Grenzwert von  $(x_n)$  in  $A$  liegt
- b) Eine Teilmenge  $U \subset M$  heißt **offen** (in  $M$ ), falls zu jedem  $x \in U$  ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass

$$\{y \in M : d(x, y) < \epsilon\} \subset U$$

#### Bemerkung 4.5

- a) Wir benutzen die Bezeichnungen

$$K(x, r) := \{y \in M : d(x, y) < r\} \quad \text{offene Kugel}$$

$$\bar{K}(x, r) := \{y \in M : d(x, y) \leq r\} \quad \text{abgeschlossene Kugel}$$

für  $x \in M, r > 0$ . Man sieht leicht, dass  $K(x, r)$  offen und  $\bar{K}(x, r)$  abgeschlossen ist.

#### Beweis

- a) Sei  $y \in K(x, r)$  und wähle  $\rho := r - d(x, y) > 0$   
Wir zeigen:  $K(y, \rho) \subset K(x, r)$  (Dann ist  $K(x, r)$  offen). Sei dazu  $z \in K(y, \rho)$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \leq r - \rho + d(z, y) \\ &\leq r - \rho + \rho = r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z \in K(x, r)$$

Da  $z$  beliebig war, folgt die Behauptung.

- b) Sei  $(y_n)_{n \geq 1} \subset \bar{K}(x, r)$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in M$ . Wir müssen zeigen, dass  $y \in \bar{K}(x, r)$  (Dann ist  $\bar{K}(x, r)$  abgeschlossen).

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, y_n) + d(y_n, y) \\ &\leq r + d(y_n, y) \rightarrow r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq r, \text{ d.h. } y \in \bar{K}(x, r). \quad \square$$

- b)  $\emptyset, M$  sind sowohl offen, als auch abgeschlossen (in  $M$ )
- c) Bezüglich der diskreten Metrik  $d$  aus **Beispiel 4.2 b)** ist  $\{x\} \subset M$  offen für jedes  $x \in M$ , da

$$K(x, r) = \{x\} \subset \{x\} \text{ für } r \in (0, 1]$$

Wir fassen als Nächstes die grundlegenden Eigenschaften offener und abgeschlossener Mengen zusammen.

**Proposition 4.6**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $I$  eine beliebige Indexmenge

- a)  $A \subset M$  ist abgeschlossen in  $M$  genau dann, wenn  $U = M \setminus A$  offen ist
- b) Für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen  $(A_i)_{i \in I}$  sind

$$A := \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{und} \quad A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_N} \quad (i_1, \dots, i_N \in I)$$

abgeschlossen in  $M$ .

- c) Für eine beliebige Familie offener Mengen  $(U_i)_{i \in I}$  sind

$$U := \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{und} \quad U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_N} \quad (i_1, \dots, i_N \in I)$$

offen in  $M$ .

**Beweis**

- a) Sei  $U$  nicht offen. Dann existiert ein  $x_0 \in U$  und ein  $x_n \in K(x_0, \frac{1}{n})$  mit  $x_n \notin U$ , d.h.  $x_n \in U^c = A \forall n \in \mathbb{N}$ .  
Da  $d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$  und  $x_0 \notin A$ , ist  $A$  nicht abgeschlossen.

Sei umgekehrt  $A$  nicht abgeschlossen. Dann existiert eine Folge  $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \notin A$ , d.h.  $x \in U$ .

Für beliebige  $\epsilon > 0$  existiert dann ein  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_n, x) < \epsilon \forall n \geq N_\epsilon$   
 $\Rightarrow (x_n)_{n \geq N_\epsilon} \subset K(x, \epsilon) \cap A = K(x, \epsilon) \cap U^c$   
 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0$  ist  $K(x, \epsilon) \not\subset U$ , d.h.  $U$  ist nicht offen.

- b) folgt aus a) & c), da

$$M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} M \setminus A_i$$

- c) Sei  $x \in U$ . Dann existiert ein  $U_{i_0}$  mit  $x \in U_{i_0}$

$$\Rightarrow \exists r > 0 : K(x, r) \subset U_{i_0} \subset U, \text{ d.h. } U \text{ ist offen.}$$

Sei  $x \in U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_N}$ . Dann existieren  $r_1, \dots, r_N > 0$  mit

$$K(x, r_n) \subset U_{i_n} \quad n = 1, \dots, N$$

Setze  $r := \min\{r_1, \dots, r_N\} > 0$ . Dann ist  $K(x, r) \subset U_{i_n} \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$

$$\Rightarrow K(x, r) \subset U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_N},$$

d.h.  $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_N}$  ist offen. □

**Definition 4.7**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $V \subset M$ . Dann heißt

- a)  $\bar{V} := \bigcap \{A \subset M : A \text{ ist abgeschlossen mit } V \subset A\}$  der **Abschluss** von  $V$ .
- b)  $\mathring{V} := \bigcup \{U \subset M : U \text{ ist offen mit } U \subset V\}$  das **Innere** von  $V$ .
- c)  $\partial V := \bar{V} \setminus \mathring{V}$  der **Rand** von  $V$ .

Hierfür gelten die folgenden Eigenschaften:

**Proposition 4.8**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $V \subset M$

- a) a)  $\bar{V}$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $V$  enthält.
- b)  $V$  ist abgeschlossen  $\iff V = \bar{V}$
- c)  $\bar{V} = \{x \in M : \exists (x_n) \subset V \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x\} =: \tilde{V}$
- b) a)  $\mathring{V}$  ist die größte offene Teilmenge von  $V$ .
- b)  $V$  ist offen  $\iff V = \mathring{V}$
- c)  $\mathring{V} = \{x \in M : \exists \epsilon > 0 \text{ mit } K(x, \epsilon) \subset V\} =: \hat{V}$
- c) a)  $\partial V$  ist abgeschlossen.
- b)  $\partial V = \{x \in M : \exists (x_n) \subset V, (y_n) \subset M \setminus V \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x\}$

**Beweis**

- a) a) Nach Definition gilt  $V \subseteq \bar{V}$  und  $\bar{V}$  ist nach **Proposition 4.7** abgeschlossen.  
Falls  $V \subseteq A \subseteq \bar{V}$  und  $A$  abgeschlossen, dann gilt  $\bar{V} \subseteq A$  nach der Definition von  $\bar{V}$ , d.h.  $A = \bar{V}$ .
- b) folgt aus (i)
- c) Per Definition ist  $\tilde{V}$  abgeschlossen, denn zu  $(x_n) \subseteq \tilde{V}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in M$  existieren Folgen  $(x_{n,m})_{m \geq 1}$  mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n,m} = x_n$ .  
Dann folgt aber für  $(x_{n,n})_{n \geq 1} \subseteq V$ :

$$d(x, x_{n,n}) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_{n,n}) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

d.h.  $x \in \tilde{V}$ . Sei nun  $A \subseteq M$  abgeschlossen mit  $V \subseteq A$ . Dann gilt nach Definition 4.4  $\tilde{V} \subseteq A$  und nach (i) damit  $\bar{V} = \tilde{V}$ .

- b) a) zeigt man wie a) (i)
- b) folgt aus (i)
- c)  $\hat{V}$  ist per Definition offen, denn zu  $x \in \hat{V}$  existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $K(x, \epsilon) \subseteq V$ .  
Dann existiert aber zu jedem  $y \in K(x, \epsilon)$  ein  $\delta > 0$  mit  $K(y, \delta) \subseteq K(x, \epsilon) \subseteq V$ , d.h.  $y \in \hat{V}$ .  $\Rightarrow K(x, \epsilon) \subseteq \hat{V}$   
Falls nun  $U \subseteq V$  offen, so ist nach Definition 4.4  $U \subset \hat{V}$  und somit  $\mathring{V} = \hat{V}$  nach (i)
- c) a) Da  $\partial V = \bar{V} \cap (\mathring{V})^c$  ist  $\partial V$  als Schnitt zweier abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen.

- b) Nach **Definition 4.6** gilt  $(\overset{\circ}{V})^c = \overline{V^c}$  (und  $(\bar{V})^c = (V^c)^\circ$ )  
 Damit folgt die Behauptung auf  $\partial V = \bar{V}_n \cap \bar{V}^c$  und **a)**

□

### Definition 4.9

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum

- a) Eine Menge  $V \subset M$  heißt **dicht** in  $M$ , falls  $\bar{V} = M$ , d.h. jeder Punkt in  $M$  ist Grenzwert einer Folge aus  $V$ .
- b)  $M$  heißt **seperabel**, falls es eine abzählbare Teilmenge  $V \subset M$  gibt, die dicht in  $M$  liegt.

### Bemerkung 4.10

- a) All die Begriffe und Bezeichnungen aus Definition 4.4, **Bemerkung 4.5**, **Definition 4.7** und **Definition 4.9** werden wir auch in normierten Räumen benutzen bzgl. der kanonischen Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$
- b) Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $U \subset M$ . Dann ist auch  $(U, d)$  ein metrischer Raum. Für  $V \subset U$  muss man dann aber unterscheiden bzgl. Abgeschlossenheit (bzw. Offenheit) von  $V$  in  $U$  oder in  $M$ . Man sagt dann, dass  $V$  **relativ offen** bzw. **relativ abgeschlossen** in  $U$  ist.

### Beispiel 4.11

- a) Sei  $X$  ein normierter Vektorraum (!),  $x \in X, r > 0$ . Dann gilt

- a)  $\bar{K}(x, r) = \overline{K(x, r)}$
- b)  $\bar{K}(x, r)^\circ = K(x, r)$
- c)  $\partial \bar{K}(x, r) = \partial K(x, r) (= \{y \in X : \|x - y\| = r\})$

### Beweis

- a) Da  $\bar{K}(x, r)$  abgeschlossen ist mit  $K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)$  folgt aus **Proposition 4.8 a) (i)**  $\overline{K(x, r)} \subset \bar{K}(x, r)$ . Sei umgekehrt  $y \in \bar{K}(x, r)$  und  $y_n = y - \frac{1}{n}(y - x), n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $y_n \in K(x, r)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , d.h.  $y \in \overline{K(x, r)}$  nach **Proposition 4.8 a) (iii)**.
- b) Da  $K(x, r)$  offen ist mit  $K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)$  folgt mit **Proposition 4.8 b) (ii)**:

$$K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)^\circ$$

Sei umgekehrt  $y \in \bar{K}(x, r)^\circ$ . Dann existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $K(y, \epsilon) \subseteq \bar{K}(x, r)$ .  
 Angenommen  $\|x - y\| = r$ . Setze in diesem Fall  $z := y + \frac{\epsilon}{2r}(y - x)$ . Dann gilt  $z \in K(y, \epsilon)$ , aber  $z \notin \bar{K}(x, r)$ , was zu einem Widerspruch führt.  
 Also ist  $\|x - y\| < r$ , d.h.  $y \in K(x, r)$ .

- c) Aussage über Rand folgt aus **i)** und **ii)**

□

- b) Die Aussagen in **a)** sind im Allgemeinen falsch für metrische Räume.  
 Sei  $M$  nichtleer mit mindestens 2 Elementen und  $d$  die diskrete Metrik, dann gilt:

$$K(x, 1) = \{x\}, \quad \bar{K}(x, 1) = M, \quad \overline{K(x, 1)} = \{x\}$$

$$\Rightarrow \overline{K(x, 1)} \subsetneq \bar{K}(x, 1)$$



c) Sei  $X = C[0, 1]$  und  $a, b > 0$  mit  $a < b$ . Dann ist die Menge

$$A := \{f \in X : f(t) \in (a, b) \quad \forall t \in [0, 1]\}$$

offen mit

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \{f \in X : f(t) \in [a, b] \quad \forall t \in [0, 1]\} \\ \partial A &= \{f \in \bar{A} : \exists t \in [0, 1] \text{ mit } f(t) \in \{a, b\}\}\end{aligned}$$

### Beweis

a) Sei  $f \in A$  beliebig.

Da  $f$  stetig auf  $[0, 1]$  existieren  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  mit

$$f(t_1) = \min_{t \in [0, 1]} f(t) =: c_1 > a$$

$$f(t_2) = \max_{t \in [0, 1]} f(t) =: c_2 < b$$



Abbildung 4.1:  $\epsilon$ -Kugel um  $f$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$

Für  $\epsilon \in (0, \min\{c_1 - a, b - c_2\})$  gilt dann  $K(f, \epsilon) \subseteq A$ , d.h.  $A$  ist offen.

b) Da Konvergenz bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  punktweise Konvergenz impliziert, folgt direkt

$$\bar{A} \subseteq \{f \in X : f(t) \in [a, b] \quad \forall t \in [a, b]\}.$$

Ist umgekehrt  $f \in X$  mit  $f(t) \in [a, b]$  für alle  $t \in [0, 1]$ , so definieren wir

$$f_n(t) = \begin{cases} a + \frac{1}{n} & , f(t) \leq a + \frac{1}{n} \\ b - \frac{1}{n} & , f(t) \geq b - \frac{1}{n} \\ f(t) & , \text{sonst.} \end{cases}$$



Abbildung 4.2:  $f$  bzw.  $f_n$  für konkretes  $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f_n \in A \text{ mit } \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty), \text{ d.h. } f \in \bar{A}$$

c) Aussage über  $\partial A$  folgt aus **i)** und **ii)** □

d) Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und  $Y \subseteq X$  abzählbar mit  $\overline{\text{lin} Y} = X$ . Dann ist  $X$  separabel.

**Beweis**

Wir definieren

$$\text{lin}_{\mathbb{Q}} Y := \left\{ y = \sum_{i=1}^n q_i y_i : q_i \in \mathbb{Q} \ (q_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}), y_i \in Y, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dann ist  $\text{lin} Y$  abzählbar, da  $Y$  abzählbar ist. Sei nun  $\epsilon > 0$  beliebig,  $x \in X$ .

Nach Voraussetzung existiert dann ein  $y \in \text{lin} Y$  mit  $\|x - y\| < \epsilon$

Zu diesem  $y$  finden wir ein  $z \in \text{lin}_{\mathbb{Q}} Y$  mit  $\|y - z\| < \epsilon$

$$\Rightarrow \|x - z\| < 2\epsilon, \quad \text{d.h. } \overline{\text{lin}_{\mathbb{Q}} Y} = X \quad \square$$

e)  $C[0, 1]$  ist separabel, da  $\text{lin}\{t^n, n \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $C[0, 1]$  liegt nach dem Approximationssatz von Weierstrass.

f) Die Räume  $\ell^p, p \in [1, \infty)$  und  $c_0$  sind separabel, da

$$D = \text{lin}\{e_k, k \in \mathbb{K}\} \text{ dicht in allen Räumen liegt.}$$

g) Der Raum  $\ell^\infty$  ist nicht separabel:

Die Menge  $\Omega$  der  $\{0, 1\}$ -wertigen Folgen ist überabzählbar. Für  $x, y \in \Omega$  mit  $x \neq y$  gilt  $\|x - y\|_\infty = 1$

Angenommen:  $\overline{\{v_k, k \in \mathbb{N}\}} = \ell^\infty$ . Dann

$$\Omega \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K\left(v_k, \frac{1}{4}\right)$$

Wegen  $\|x - y\|_\infty = 1 \ \forall x, y \in \Omega$  kann aber in jeder Kugel  $K(v_k, \frac{1}{4})$  nur ein Element auf  $\Omega$  liegen. (d.h. zu  $x \in \Omega$  existiert ein  $k(x) \in \mathbb{K}$  mit  $x \in K(v_{k(x)}, \frac{1}{4})$ )

$\Rightarrow$  die Abbildung  $J: \Omega \rightarrow \mathbb{N}, x \rightarrow k(x)$  ist injektiv

$\Rightarrow \Omega$  ist abzählbar, Widerspruch.

Schließlich betrachten wir Stetigkeit:

**Definition 4.12**

Seien  $(M, d_M), (N, d_N)$  metrische Räume.

Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt **stetig in**  $x_0 \in M$ , falls für alle  $(x_n) \subset M$  gilt

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ in } M \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ in } N$$

$$(d_M(x_n, x_0) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)) \quad \Rightarrow \quad d_N(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty))$$

Die Abbildung  $f$  heißt **stetig auf**  $M$ , falls  $f$  in jedem Punkt von  $M$  stetig ist.

Hierfür gelten folgende Eigenschaften:

**Proposition 4.13**

Sei  $(K, d_K), (M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  metrische Räume und  $f: M \rightarrow N, g: K \rightarrow M$ . Dann gilt:

- a) Ist  $g$  stetig in  $x_0$ ,  $f$  stetig in  $g(x_0)$ , dann ist auch

$$f \circ g: K \rightarrow N \text{ stetig in } x_0$$

- b)  $f$  ist stetig in  $x_0 \in M$  genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, x_0) < \delta \text{ gilt } d_N(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

- c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- a)  $f$  ist stetig auf  $M$
- b) Ist  $U \subset N$  offen, so ist auch  $f^{-1}(U)$  offen in  $M$
- c) Ist  $A \subset N$  abgeschlossen, so ist auch  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $M$ .

**Beweis**

- a) Folgt direkt aus der Definition

- b) " $\Rightarrow$ ": Annahme, das  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium gilt nicht. Dann existiert eine  $\epsilon > 0$  und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in K(x_0, \frac{1}{n})$  mit  $d_M(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$ .  
Dann gilt aber  $d_M(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $d_N(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon \not\rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  
d.h.  $f$  ist nicht stetig in  $x_0$ .

" $\Leftarrow$ ": Es gelte das  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium. Sei  $(x_n) \subseteq M$  mit  $x_n \rightarrow x_0, \epsilon > 0$ .

Dann gilt  $d_N(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$  für  $n$  groß genug. Da  $\epsilon > 0$  beliebig, folgt  $d_N(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

- c) (i)  $\Rightarrow$  (iii): Sei  $A \subseteq N$  abgeschlossen und  $(x_n) \subseteq f^{-1}(A)$  mit  $x_n \rightarrow x$  in  $M$  für  $n \rightarrow \infty$ .  
Dann gilt nach (i)  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  in  $N$  für  $n \rightarrow \infty$ .  
Da  $(f(x_n))_{n \geq 1} \subseteq A$  und  $A$  abgeschlossen ist, folgt  $f(x) \in A$ , d.h.  $x \in f^{-1}(A)$ .  
Also ist  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $U \subset N$  offen  $\Rightarrow U^c$  abgeschlossen  $\Rightarrow f^{-1}(U^c) = f^{-1}(U)^c$  ist abgeschlossen  $\Rightarrow f^{-1}(U)$  offen.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Sei  $x_0 \in M$  beliebig. Für  $\epsilon > 0$  ist nach (ii) dann auch  $f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$  offen in  $M$ .

Da  $x_0 \in f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$ , existiert ein  $\delta > 0$  mit  $K(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon))$

Das bedeutet gerade

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in M \text{ mit } d_M(x_0, x) < \delta \text{ gilt auch}$$

$$d_N(f(x_0), f(x)) < \epsilon$$

Nach **b)** bedeutet dies gerade, dass  $f$  stetig in  $x_0$  ist. □

**Beispiel 4.14**

a) Sind  $(M_1, d_1)$  und  $(M_2, d_2)$  metrische Räume, so definiert

$$d(x, y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

für  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M_1 \times M_2$  eine Metrik mit

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff d_1(x_{n,1}, x_1) \rightarrow 0, d_2(x_{n,2}, x_2) \rightarrow 0$$

In diesem Sinne ist jede Metrik  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Denn:

Sei  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$  in  $M \times M$ , d.h.

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ und } d(y_n, y) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x, y) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) - d(x, y) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) - d(x, y) \end{aligned}$$

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq \dots \leq d(x, x_n) + d(y_n, y)$$

$$\Rightarrow |d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y_n, y) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

b) Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und

$$\begin{aligned} A: \mathbb{K} \times X &\rightarrow X, & A(\alpha, x) &= \alpha x \\ S: X \times X &\rightarrow X, & S(x, y) &= x + y \end{aligned}$$

Dann sind  $A$  und  $S$  stetig.

c) Sei  $X = C[0, 1], t_0 \in [0, 1], \psi: X \rightarrow \mathbb{K}, \psi(f) = f(t_0)$

Nach Beispiel 3.15 ist  $\psi$  stetig. D.h. ist  $A \subset \mathbb{K}$  offen (abgeschlossen), so ist  $\psi^{-1}(A)$  offen (abgeschlossen) nach **Proposition 4.13**.

## 5 Vollständigkeit

### Definition 5.1

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

- a)  $x_n \in M$  heißt **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $\forall m, n \geq n_0$  gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

- b)  $(M, d)$  heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge  $(x_n) \subset M$  einen Grenzwert in M hat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad x \in M$$

- c) Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  der vollständig ist bezüglich  $d(x, y) = \|x - y\|$  heißt **Banachraum**.

### Bemerkung 5.2

- a) Jede konvergente Folge in  $(M, d)$  ist eine Cauchy-Folge:

$$\text{Sei } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x : \quad d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

- b) Aber: nicht jede Cauchy-Folge eines normierten Raums  $X$  konvergiert in  $X$ .

#### Beispiel

$$X = C[0, 2], \quad \|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)| dt, \quad f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases} \quad \text{für feste } x \in [0, 2]$$

Nach dem **Satz von Lebesgue** folgt  $\|f - f_n\|_1 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , aber  $f \notin C[0, 2]$   
 Demnach ist  $f_n$  zwar eine Cauchy-Folge, aber  $f_n$  konvergiert nicht gegen  $f$  in  $X$  bezüglich der  $\|\cdot\|_1$ -Norm.

### Proposition 5.3

Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $Y$  ein Banachraum.

$$C(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y : f \text{ stetig}\}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$$

Dann ist  $C(X, Y)$  ein (linearer) Banachraum.

#### Beispiel

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \quad C(\Omega, \mathbb{R})$$

#### Beweis

Sei  $(f_n)$  eine Cauchy-Folge in  $C(X, Y)$ . Für alle  $x \in X$  gilt

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Mit  $x \in X$  ist  $(f(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $Y$ . Da  $Y$  vollständig ist, existiert  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  in  $Y$ .

z.z.  $f \in C(X, Y)$ ,  $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$ .

Zu  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$ , sodass für alle  $x \in X$ :

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \epsilon \quad m, n \geq n_0$$

Für jedes  $x \in X$  fest, folgt für  $m \rightarrow \infty$ :

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0$$

Nehme das Supremum über  $x \in X$ :

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Somit ist  $f \in C(X, Y)$ , da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist. □

### Beispiel 5.4

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt.  $C^m(\bar{\Omega})$  ist vollständig bezüglich der Supremums-Norm.

### Beweis

Für  $C^1(\bar{\Omega})$  gilt  $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} f \right\|_\infty$ .

Sei  $(f_j) \subset C^1(\bar{\Omega})$ , dann sind für  $i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow (f_j)_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f_j \right)_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{Cauchy-Folgen in } C(\bar{\Omega})$$

Da  $C(\bar{\Omega})$  vollständig ist, existieren für  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$$

$$g_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x_i} f_j$$

in  $C(\bar{\Omega})$ . Setze  $g = (g_1, \dots, g_n)$ .

z. z.  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  und  $g = \nabla f$

Beweis: zu  $u \in \Omega$  und  $v$  nahe bei  $u$  wähle

$$u_t = (1 - t)u + tv$$

$$\begin{aligned} |f_k(v) - f_k(u) - \nabla f_k(u)(v - u)| &= \left| \int_0^1 [\nabla f_k(u_t) - \nabla f_k(u)](v - u) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |\nabla f_k(u_t) - \nabla f_k(u)| dt |v - u| \\ &\leq \left[ \int_0^1 |\nabla f_k(u_t) - g(u_t)| dt + \int_0^1 |g(u_t) - g(u)| dt + \int_0^1 |g(u) - \nabla f_k(u)| dt \right] \\ &\quad \cdot |v - u| \\ &\leq \left[ z \|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{0 \leq t \leq 1} |g(u_t) - g(u)| \right] |v - u| \end{aligned}$$

$$\text{für } k \rightarrow \infty : |f(v) - f(u) - g(u)(v - u)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |g(u_t) - g(u)| |v - u|$$

$\rightarrow 0$  für  $v \rightarrow u$  (da  $g$  gleichmäßig stetig) □

**Bemerkung 5.5**

- a)  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  seien äquivalente Normen auf  $X$ . Ist  $X$  bezüglich  $\|\cdot\|_1$  vollständig, so auch bezüglich  $\|\cdot\|_2$ .

**Beweis**

Äquivalente Normen haben gleiche Cauchy-Folgen. □

Bsp.:  $C^1[0, 1]$ ,  $\|f\| = |f(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$ . Früher:  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty \Rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|)$  ist vollständig.

- b) Abgeschlossene Teilmengen von Banachräumen sind vollständige metrische Räume bezüglich  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

**Beweis**

$(x_n) \subset M$ , Cauchy-Folge in  $X \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X \xrightarrow[\text{Mabg.}]{\quad} x \in M$  existiert. □

Bsp.:  $X = C([0, 1], \mathbb{C})$ ,  $M = \{f \in X : |f(t)| = 1\}$  ist ein vollständiger metrischer Raum.

**Satz 5.6**

Sei  $X$  ein normierter Raum,  $Y$  ein Banachraum. Dann ist  $B(X, Y)$  mit der Operatornorm vollständig.

Insbesondere:  $X' = B(X, \mathbb{K})$  ist immer vollständig.

**Beweis**

Sei  $(T_n) \subset B(X, Y)$  eine Cauchy-Folge bezüglich der Operatornorm. Sei  $x \in X$

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X$$

Also  $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $Y$  für alle  $x \in X$ . Definiere  $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$   
z.z.  $T \in B(X, Y)$ ,  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$

$$T_n(x + y) = T_n x + T_n y \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T(x + y) = Tx + Ty$$

$$\begin{aligned} \|Tx - T_n x\| &\stackrel{\text{Norm stetig}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m x - T_n x\| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n - T_m\| \|x\| \\ &\leq \epsilon \|x\| \text{ für } n \text{ groß genug.} \end{aligned}$$

Wobei  $\|T - T_n\| \leq \epsilon$  für  $n$  groß genug. Also für  $\|x\| \leq 1$ :

$$\|Tx\| \leq \|T_n x\| + \epsilon \leq \|T_n\| + \epsilon$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \|T_n\| + \epsilon, \quad \text{also } T \in B(X, Y) \quad \square$$

**Bemerkung 5.7 (Exponentialfunktion)**

$A \in B(X)$ ,  $X$  Banachraum

- Frage:  $e^{tA}$
- Idee:  $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$
- Setze  $S_m = \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} t^n A^n$

z. z.  $S_m$  ist eine Cauchy-Folge in  $B(X)$

Seien  $k, m \in \mathbb{N}, k > 0$

$$\begin{aligned} \|S_k - S_m\| &\leq \sum_{n=m+1}^k \left\| \frac{1}{n!} t^n A^n \right\| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^k \frac{1}{n!} |t^n| \|A^n\| \xrightarrow{k, m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Da  $B(X)$  vollständig ist, ist  $e^{tA} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m$  in  $B(X)$ .

**Proposition 5.8 (Neumann'sche Reihe)**

Sei  $A \in B(X)$ ,  $X$  ein Banachraum mit  $\|A\| < 1$ .

Dann ist  $Id - A$  invertierbar und

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

**Beweis**

$S_m = \sum_{n=0}^m A^n$  ist eine Cauchy-Folge in  $B(X)$ , denn für

$$\begin{aligned} k > m : \quad \|S_k - S_m\| &\leq \sum_{n=m+1}^k \|A^n\| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^k \|A\|^n \rightarrow 0 \text{ für } m, n \rightarrow \infty, \text{ da } \|A\| < 1 \end{aligned}$$

$R := \lim_{m \rightarrow \infty} S_m$  existiert in  $B(X)$ , da  $B(X)$  vollständig.

$$S_m(Id - A) = (Id - A)S_m = Id - A^{m+1}$$

mit  $\|A^{m+1}\| \leq \|A\|^{m+1} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow R(Id - A) = (Id - A)R = Id, \quad R = (Id - A)^{-1}$$

□

**Korollar 5.9**

$X$  sei ein Banachraum und  $J : X \rightarrow X$  ein (surjektiver) Isomorphismus.

Für  $A \in B(X)$  und  $\|A\| < \|J^{-1}\|^{-1}$  ist auch  $J - A$  ein Isomorphismus

Insbesondere:  $G = \{T \in B(X) : T \text{ stetig und invertierbar}\}$  ist eine offene Menge in  $B(X)$ .

**Beweis**

Da  $J - A = J(Id - J^{-1}A)$  folgt:

$$\|J^{-1}A\| \leq \|J^{-1}\| \underbrace{\|A\|}_{< \|J^{-1}\|^{-1}} < 1$$



Nach 5.8 ist  $(Id - J^{-1}A)$  invertierbar mit

$$\begin{aligned}(J - A)^{-1} &= (Id - J^{-1}A)^{-1}J^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (J^{-1}A)^n J^{-1}\end{aligned}\quad \square$$

### Proposition 5.10

Sei  $X$  ein normierter Raum,  $Y$  ein Banachraum und  $D \subset X$  ein dichter Teilraum. Jeder lineare Operator  $T : X \rightarrow Y$  mit

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \text{für alle } x \in D$$

lässt sich zu einem eindeutig bestimmten Operator  $\tilde{T} \in B(X, Y)$  mit  $\|\tilde{T}\| \leq c$  fortsetzen.

### Korollar 5.11

Sei  $X$  ein normierter Banachraum,  $D \subset X$  dicht in  $X$  und sei eine Folge  $T_n \in B(X, Y)$ , wobei  $(T_n x)$  eine Cauchy-Folge für jedes  $x \in D$  sei.

Dann gibt es genau einen Operator  $T \in B(X, Y)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = Tx$$

### Beweis

Setze für  $x \in D$ :  $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ , da  $Y$  vollständig.

Dieses  $T : X \rightarrow Y$  ist linear.

Nach 5.10 gibt es genau ein  $\tilde{T} \in B(X, Y)$  mit  $\tilde{T}x = Tx$  für  $x \in D$ ,  $\|\tilde{T}\| \leq M$ , denn für  $x \in D$ :

$$\|Tx\| \leq \limsup \|T_n x\| \leq M\|x\|$$

z. z.  $\tilde{T}x = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$  für alle  $x \in X$ .

Zu  $\epsilon > 0$  wähle  $y \in D$  mit  $\|x - y\| \leq \frac{\epsilon}{2M}$ . Dann:

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}x - T_n x\| &\leq \|\tilde{T}x - Ty\| + \|Ty - T_n y\| + \|T_n y - T_n x\| \\ &\leq \|\tilde{T}\|\|x - y\| + \|Ty - T_n y\| + \|T_n\|\|x - y\|\end{aligned}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{T}x - T_n x\| \leq M \frac{\epsilon}{2M} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Ty - T_n y\| + M \frac{\epsilon}{2M} \leq \epsilon + 0 \quad \square$$

### Beispiel 5.12

$e_n(t) = e^{2\pi i n t} = \cos(2\pi n t) + i \sin(2\pi n t)$ ,  $D = \{(\alpha_n) \in L^2(\mathbb{Z}) : \text{Nur endlich viele } \alpha_n \neq 0\}$

$$T: \begin{cases} D \rightarrow L^2[0, 1] \\ (\alpha_n) \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_n \end{cases}$$

Wie kann man man unendlich Reihen  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_n$  definieren?

Ohne Beweis aus der Fourieranalysis:

- Es gibt  $(\alpha_n) \in \mathbb{C}^2$ , so dass  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_n(t)$  nicht für alle  $t \in [0, 1]$  konvergent.
- Für alle  $(\alpha_n) \in \mathbb{C}^2$  konvergiert  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_n(t)$  punktweise für fast alle  $t \in [0, 1]$

$$\bullet \int_0^1 e_n \bar{e}_m dt = \delta_{n,m}$$

Für  $(\alpha_n) \in D$  wie in der Linearen Algebra folgt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_n \alpha_n e_n(t) \right\|_{L^2[0,1]}^2 &= \int \left( \sum_n \alpha_n e_n(t) \right) \overline{\left( \sum_m \alpha_m e_m(t) \right)} dt \\ &= \sum_{n,m} \alpha_n \alpha_m \int e_n(t) \overline{e_m(t)} dt \\ &= \sum_n |\alpha_n|^2 \end{aligned}$$

D.h.  $\|T(\alpha_n)\| \leq 1 \left( \sum_n |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\alpha_n\|_{L^2}$ , ( $M = 1$ ). Nach 5.10 gibt es dann ein  $\tilde{T} : \ell^2[0,1] \rightarrow L^2(0,1)$  mit  $\|\tilde{T}\| \leq 1$

Zusatz:  $T_m((\alpha_n)) = \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n e_n$ .  $T_m : \ell^2 \rightarrow L^2[0,1]$ ,  $\|T_m\| \leq 1$

Für  $(\alpha_n) \in \ell^2$  gilt:  $T(\alpha_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} T_m(\alpha_n)$ .

Nach Kor. 11:  $T_m(\alpha_n) \rightarrow T(\alpha_n)$  in  $L^2[0,1]$  für alle  $(\alpha_n) \in \ell^2$ . Damit konvergiert die Partialsumme der Fourierreihen in  $L^2[0,1]$ .

### Lemma 5.13

Für einen normierten Raum  $(X, \|\cdot\|)$  sind äquivalent:

- a)  $X$  ist vollständig
- b) Jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{n \geq 1} x_n$  mit

$$x_n \in X, \sum_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty$$

hat einen Limes in  $X$ .

### Beweis

$a) \Rightarrow b)$   $y_n = \sum_{m=1}^n x_m$  ist eine Cauchy-Folge in  $X$ , denn für  $l > n$ :

$$\|y_l - y_n\| = \left\| \sum_{m=n+1}^l x_m \right\| \leq \sum_{m=n+1}^l \|x_m\| \xrightarrow{n,l \rightarrow \infty} 0$$

Also ist  $(y_n)$  eine Cauchy-Folge und konvergiert da  $X$  vollständig ist.

$b) \Rightarrow a)$  Sei  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge in  $X$ , d.h. für  $\epsilon = 2^{-k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) gibt es ein  $n_k$  so, dass:

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k} \text{ für } n, m \geq n_k$$

Wähle zu  $k \in \mathbb{N}$  ein  $x_{n_k}$  so, dass

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}.$$

Setze  $y_0 = x_{k_1}$  und für  $k \in \mathbb{N} : y_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$ .

Dann gilt:  $\sum_{k \geq 1} \|y_k\| \leq \sum_{k \geq 1} 2^{-k} < \infty$ . Nach b) konvergiert die Reihe  $\sum_{k \geq 1} y_k$  in  $Y$ .

$\sum_{j=0}^k x_j \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} x_{n_k} \Rightarrow$  die Folge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert in  $X$ .

$(x_n)$  ist eine Cauchy-Folge  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existiert in  $X$ . □

**Korollar 5.14**

Sei  $X$  ein Banachraum und  $M \subset X$  ein abgeschlossener, linearer Teilraum.

Dann  $\hat{X} = X/M$  ist vollständig.

**Beweis (mit Lemma 5.13)**

Sei  $x_k \in X$  so, dass für  $\hat{x}_k \in \hat{X}$  gilt:

$$\sum_{k \geq 1} \|\hat{x}_k\|_{\hat{X}} < \infty$$

Nach der Definition des Quotientenraums kann man annehmen, dass

$$\|x_k\|_X \leq \|\hat{x}_k\|_{\hat{X}} + \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{K} \quad (\text{vgl. Quotientennorm})$$

Dann  $\sum_{k \geq 1} \|x_k\|_X \leq \sum_{k \geq 1} \|\hat{x}_k\|_{\hat{X}} + \sum_{k \geq 1} 2^{-k} < \infty$

Da  $X$  vollständig ist, gibt es nach 5.13 ein  $x \in X$  mit:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \text{ in } X.$$

Anwendung der Quotientenabbildung liefert  $\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \hat{x}_k$  konvergiert in  $\hat{X}$ . □

**Anhang zu Kapitel 5: Vervollständigung**

$$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C[0,1], \quad \int_0^1 |f(t)| dt \rightarrow L^1[0,1]$$

Sei  $X$  ein normierter Vektorraum,  $M \subset X$  beliebig,  $d(x, y) := \|x - y\|$ , wobei  $x, y \in M$  und damit  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

**Definition 5.15**

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Lipschitz**, falls:

$$\sup_{x, y \in M, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} = \underbrace{\|f\|_L}_{\text{Lipschitz-Konstante}} < \infty$$

**Bemerkung 5.16**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $x_0 \in M$  fest.

$X = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lipschitz}, f(x_0) = 0\}$  ist bezüglich  $\|\cdot\|_L$  ein normierter Raum.

Dann ist  $X' = B(X, \mathbb{R})$  vollständig.

**Beweis**

Seien  $f, g \in X$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_L &= \sup_{x, y \in X} \frac{|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)|}{d(x, y)} \\ &\leq \sup_{x, y \in X} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} + \sup_{x, y \in X} \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \\ &= \|f\|_L + \|g\|_L \end{aligned}$$

□

**Satz 5.17**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $x_0 \in M$  fest,  $X$  definiert wie in 5.15:

Zu  $x \in M$  definiere  $F_x \in X'$  durch  $F_x(f) = f(x)$  für  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  in  $X$ .

Dann ist  $x \in M \rightarrow F_x \in X'$  eine Abbildung, die eine isometrische Einbettung von  $M$  nach  $X'$  gibt, d.h.

$$d(x, y) = \|F_x - F_y\|_{X'}$$

**Beweis**

Für die eine Richtung betrachten wir:

$$\begin{aligned} \|F_x - F_y\|_{X'} &= \sup_{\|f\|_L \leq 1} |(F_x - F_y)(f)| \\ &= \sup_{\|f\|_L = 1} |(F_x - F_y)(f)| \\ &= \left( \sup_{\|f\|_L = 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \right) d(x, y) \\ &\leq 1 \cdot d(x, y) \end{aligned}$$

Zur Umkehrung wähle für  $x \in M$  fest:  $f(z) = d(x, z)$ . Für diese Funktion gilt nach umgekehrter Dreiecksungleichung:

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |d(x, z_1) - d(x, z_2)| \leq d(z_1, z_2) \Rightarrow \|f\|_L \leq 1$$

$$\begin{aligned} \|F_x - F_y\| &= \sup_{\|y\| \leq 1} |(F_x - F_y)(y)| \geq (F_x - F_y)(f) \\ &= f(x) - f(y) = d(x, y) \\ &\Rightarrow d(x, y) = \|F_x - F_y\| \end{aligned}$$

$$F_{x_0} = 0 \text{ in } X', \|F_x\|_{X'} = \|F_x - F_{x_0}\| = d(x, x_0) < \infty$$

□

**Definition 5.18**

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Ein vollständiger metrischer Raum  $(\hat{M}, \hat{d})$  heißt **Vervollständigung** von  $(M, d)$ , falls es eine Einbettung  $J: M \rightarrow \hat{M}$  gibt mit:

i)  $\hat{d}(J(x), J(y)) = d(x, y)$  für alle  $x, y \in M$  (Isometrie)

ii)  $J(M)$  ist dicht in  $\hat{M}$

**Beispiel 5.19**

a)  $M = \text{Polynome auf } [0, 1], d(p, q) = \sup_{t \in [0, 1]} |p(t) - q(t)| = \|p - q\|_\infty$

$$\hat{M} = C[0, 1], \quad \hat{d}(f, g) = \|f - g\|_\infty \quad \text{ist Vervollständigung}$$

b)  $M = C[0, 1], d(f, g) = \|f - g\|_2 = \left( \int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\hat{M} = L^2[0, 1], \quad \hat{d}(f, g) = \|f - g\|_2 \quad \text{ist Vervollständigung}$$

- c)  $M = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R}, x_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$ ,  $d((x_n), (y_n)) = (\sum |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ ,  
 $1 \leq p < \infty$

$$\hat{M} = \ell^p, \quad \hat{d}((x_n), (y_n)) = d((x_n), (y_n)) \quad \text{ist Vervollständigung}$$

**Satz 5.20**

Zu jedem metrischen Raum  $(M, d)$  gibt es eine Vervollständigung, die bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist.

**Beweis**

Existenz: Zu  $(M, d)$  konstruieren wie in 5.17 den Banachraum  $X$  und die Einbettung

$$J: \begin{cases} M \rightarrow X' \\ x \rightarrow Fx \end{cases}$$

mit  $d(x, y) = \|Fx - Fy\| = \|J(x) - J(y)\|$ .

Setze  $\hat{M} = \overline{J(M)}^{X'} \cong$  Abschluss von  $J(M)$  in  $X'$ , damit ist  $\hat{M}$  als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes  $X'$  auch vollständig:  $J(M)$  dicht in  $\hat{M}$  nach Definition.

Somit ist  $\hat{M}$  mit  $\hat{d}(f, g) = \|f - h\|_{X'}$  eine Vervollständigung von  $(M, d)$ .

Eindeutigkeit: Für  $(M, d) = (X, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum seien  $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$  zwei Vervollständigungen von  $X, \|\cdot\|$  mit isometrischen Einbettungen  $J_1: X \rightarrow X_1, J_2: X \rightarrow X_2$  wobei  $J_2 J_1^{-1}: J_1(x) \rightarrow X_2$  stetig ist.

Nach Proposition 5.10 hat also  $J_2 J_1^{-1}$  eine stetige Fortsetzung  $U_1: X_1 \rightarrow X_2$  mit

$$\|U_1\| \leq \|J_2 J_1^{-1}\| = 1.$$

Ebenso hat  $J_2 J_1^{-1}$  eine stetige Fortsetzung  $U_2: X_2 \rightarrow X_1$  mit

$$\|U_2\| \leq \|J_1 J_2^{-1}\| = 1.$$

Wobei

$$(U_2 U_1)|_{J_1(X)} = Id_{X_1}, \quad (U_1 U_2)|_{J_2(X)} = Id_{X_2}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung gilt damit

$$U_2 U_1 = Id_{X_1} \quad U_1 U_2 = Id_{X_2} \quad \Rightarrow \quad U_1 = U_2^{-1}$$

und mit  $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$  folgt  $X_1 \stackrel{iso}{\sim} X_2$ . □

**Bemerkung 5.21**

Alternativer Beweis der Existenz der Vervollständigung nach Cantor für einen normierten Vektorraum:

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum, definiere

$$CF(X) := \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} : (x_n) \text{ ist Cauchy-Folge in } X\} \quad \text{und} \quad \mu((x_n)) := \overline{\lim} \|x_n\|$$

Dann ist  $p$  eine Halbnorm auf  $CF(X)$ . Setze  $M := \{(x_n) \in CF(X) : p(x_n) = 0\} = \{(x_n) \in CF(X) : \|x_n\| \rightarrow 0\}$  Wähle als Kandidaten für die Vervollständigung  $\hat{X} = CF(X) / M$

- i) Vollständig, d.h. gegen  $x_k = (x_{k,j}) \in CF(X)$  mit:  $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : p(x_n - x_m) \leq \epsilon$  für  $n, m \geq k_0$  gibt es ein  $x = (x_j) \in CF(X)$  mit  $p(x - x_k) \rightarrow 0$
- ii)  $M$  ist abgeschlossen in  $CF(X)$  und  $\frac{CF(X)}{M}$  ist ein Banachraum.
- iii)  $J : X \rightarrow \frac{CF(X)}{M}, J(x) = (x)_{j \in \mathbb{N}}$  erfüllt  $p(J(x)) = \|x\|$  und  $J(X)$  ist dicht in  $\frac{CF(X)}{M}$ .

**Beweis**

- i) Sei  $x_k = (x_{k,j})$  eine Cauchy-Folge in  $CF(X)$ . Wähle für jedes  $k$  ein  $j_k$  mit  $\|x_{k,i} - x_{k,j}\| \leq \frac{1}{k}$  für  $i, j \geq j_k$ . Setze  $x = (x_{k,j_k})$ :

$$\begin{aligned} \|x_{k,j_k} - x_{l,j_l}\| &\leq \|x_{k,j_k} - x_{k,j}\| + \|x_{k,j} - x_{l,j}\| + \|x_{l,j} - x_{l,j_l}\| \\ &\leq \frac{1}{k} + \|x_{l,j} - x_{k,j}\| + \frac{1}{l} \quad \text{für } j \geq j_l, j \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{\lim}_{k,l \rightarrow \infty} \|x_{k,j_k} - x_{l,j_l}\| &\leq \lim_{k,l \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{k} \right) + \overline{\lim}_{k,l \rightarrow \infty} \|x_{l,j} - x_{k,j}\| \\ &\leq \overline{\lim}_{k,l \rightarrow \infty} p(x_l - x_k) = 0, \text{ d.h. } x \in CF(X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x_l - x) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_{l,k} - x_{k,j_k}\| \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\|x_{l,k} - x_{l,j_l}\| + \|x_{l,j_l} - x_{k,j_k}\|) \\ &\leq \frac{1}{l} + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_{l,j_l} - x_{k,j_k}\| \xrightarrow{k \geq j_l} 0 \quad \text{für } l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also  $\lim_{l \rightarrow \infty} x_l = x$  in  $CF(X)$ .

- ii) vgl. [Lemma 5.13](#)
- iii)  $p(J(x)) = \overline{\lim} \|x_n\| = \|x\|$ . Gegeben  $x = (x_j) \in CF(X)$  und  $\epsilon > 0$  wähle  $j_0$  mit  $\|x_i - x_j\| \leq \epsilon$  für  $i, j \geq j_0$ . Für  $J(x_{j_0})$  gilt:  $p(J(x_{j_0}) - x) = \overline{\lim} \|x_{j_0} - x_j\| \leq \epsilon$ .  $\square$

## 6 Kompakte Mengen

### Definition 6.1

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $K \subseteq M$  heißt (folgen-) **kompakt**, falls es in jeder Folge  $(x_n) \subset M$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  und ein  $x \in K$  gibt, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

$K \subseteq M$  heißt **relativ kompakt**, falls  $\overline{K}$  in  $M$  kompakt ist.

### Satz 6.2

Sei  $X$  ein normierter Vektorraum. Dann ist

$$\overline{U_x} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

genau dann kompakt, wenn  $\dim X < \infty$ .

### Beweis

"  $\Rightarrow$  "  $X \cong \mathbb{K}^d$ ,  $d = \dim X$ ,  $U_X$  ist abgeschlossen, beschränkt  $\xrightarrow[\text{Borell}]{\text{Heine}}$   $U_X$  ist kompakt.

"  $\Leftarrow$  " Sei  $\dim X = \infty$ . Wähle  $x_1 \in X$  mit  $\|x_1\| = 1$ .

Nach (6.3) mit  $Y = \overline{\text{span}}\{x_1\}$  finde zu  $\delta = \frac{1}{2}$  ein  $x_2 \in X$ ,  $\|x_2\| = 1$  und  $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$

Wieder nach (6.3) mit  $Y = \overline{\text{span}}\{x_1, x_2\}$  finde zu  $\delta = \frac{1}{2}$  ein  $x_3 \in X$ ,  $\|x_3\| = 1$  und  $\|x_3 - x_j\| \geq \frac{1}{2}$  für  $j = 1, 2$

Induktiv erhält man eine Folge  $x_i \in X$  mit  $\|x_i\| = 1$  und  $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2}$  für  $j = 1, \dots, i-1$ . Diese Folge  $(x_i)_{i \geq 1}$  hat keine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist und demnach ist  $U_X$  nicht relativ kompakt in  $X$ .  $\square$

### Lemma 6.3 (Riesz)

Sei  $Y$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X$  und  $X \neq Y$ . Zu  $\delta \in (0, 1)$  existiert ein  $x_\delta \in X \setminus Y$ , sodass

$$\|x\| = 1, \quad \|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta \quad \text{für alle } y \in Y$$

### Beweis

Sei  $x \in X \setminus Y$  und  $d := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} > 0$ , da  $Y$  ein abgeschlossener Teilraum ist.

Da  $d < \frac{d}{1-\delta}$  gibt es ein  $y_\delta \in Y$  mit  $\|x - y_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$ .

Setze  $x_\delta = \frac{x - y_\delta}{\|x - y_\delta\|}$ , damit gilt  $\|x_\delta\| = 1$  und weiter

$$\begin{aligned} \|x_\delta - y\| &= \left\| \frac{x}{\|x - y_\delta\|} - \frac{y_\delta}{\|x - y_\delta\|} - y \right\| \\ &= \frac{1}{\|x - y_\delta\|} \|x - y_\delta - \underbrace{\|x - y_\delta\| y}_{\leq y}\| \\ &\geq \frac{d}{\|x - y_\delta\|} \\ &\geq 1 - \delta \end{aligned}$$

$\square$

### Beispiel 6.4

Sei  $X = \ell^p$  für  $1 \leq p < \infty$  gilt:

$M \subset \ell^p$  ist kompakt genau dann, wenn

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p : x = (x_n) \in M\right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

(Kompakte Mengen lassen sich gut durch endliche Mengen approximieren)

### Beweis

siehe Übung. □

### Satz 6.5

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Für  $K \subset M$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $K$  ist (folgen-)kompakt
- b)  $K$  ist vollständig und total beschränkt, d.h. für alle  $\epsilon > 0$  gibt es endlich viele  $x_1, \dots, x_m \in M$  so dass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m K(x_j, \epsilon)$$

- c) Jede Überdeckung von  $K$  durch offene Mengen  $U_j, j \in J$  mit  $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d.h.  $j_1, \dots, j_m$  mit

$$K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{j_k}$$

### Beweis

$a) \Rightarrow b)$  (indirekt)

Angenommen  $b)$  ist falsch. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass für alle  $x_1, \dots, x_n, n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$K \not\subset K(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup K(x_n, \epsilon)$$

Um einen Widerspruch zu erhalten konstruieren wir eine Folge ohne konvergente Teilfolge:

Wähle  $y_1 \in K$  beliebig, dann gilt nach Voraussetzung  $K \not\subset K(y_1, \epsilon)$ . Wähle weiter  $y_2 \in K \setminus K(y_1, \epsilon)$  beliebig, dann gilt  $K \not\subset K(y_1, \epsilon) \cup K(y_2, \epsilon)$ .

Induktiv erhält man eine Folge  $y_j \in K$  mit  $y_j \notin \{K(y_1, \epsilon) \cup \dots \cup K(y_{j-1}, \epsilon)\}$ .

D.h.  $\|y_j - y_k\| \geq \epsilon$  für  $k = 1, \dots, j-1$ . D.h.  $y_j$  hat keine konvergente Teilfolge, was ein Widerspruch zu  $a)$  ist.

$b) \Rightarrow c)$  (indirekt)

Sei  $c)$  falsch, d.h. es gibt eine offene Überdeckung  $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$  ohne endliche Teilüberdeckung.

Zu  $\epsilon_1$  gibt es nach  $b)$  aber endlich viele  $x_1^1, \dots, x_m^1 \in K$ , so dass

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m K(x_j^1, \epsilon_1)$$



Setze der Kürze halber  $y_1 := x_{j_0}^1$ . Nun gibt es eine dieser Kugeln  $K(y_1, \epsilon_1)$ , sodass  $\underbrace{K \cap K(y_1, 1)}_{=: L_1}$

nicht durch endlich viele der  $U_j$  überdeckt werden kann.

Nach B) gibt es aber auch zu  $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$  endlich viele  $x_1^2, \dots, x_{m'}^2$ , sodass

$$L_1 \subset K(x_1^2, \epsilon_2) \cup \dots \cup K(x_{m'}^2, \epsilon_2).$$

Wieder muss es nach Voraussetzung eine dieser Kugeln  $K(y_2, \epsilon_2)$  geben, sodass  $\underbrace{K \cap K(y_1, \epsilon_1) \cap K(y_2, \epsilon_2)}_{=: L_2}$

sich nicht durch endlich viele der  $U_j$  überdecken lässt.

Induktiv finden wir zu  $\epsilon_l = \frac{1}{2^{l-1}}$  eine Folge  $y_l \in K$ , so dass

$$L_l := K \cap K(y_1, \epsilon_1) \cap \dots \cap K(y_l, \epsilon_l)$$

sich nicht durch endlich viele der  $U_j$  überdecken lässt.

Nun ist aber  $L_l \subset K(y_{l-1}, \epsilon_{l-1}) \cap K(y_l, \epsilon_l) \neq \emptyset$ . Mit  $z \in K(y_{l-1}, \epsilon_{l-1}) \cap K(y_l, \epsilon_l)$  gilt

$$d(y_l, y_{l-1}) \leq d(y_l, z) + d(z, y_{l-1}) \leq \frac{1}{2^{l-1}} + \frac{1}{2^{l-2}} \leq \frac{1}{2^{l-3}}.$$

Für  $n < m$ :  $d(y_n, y_m) \leq \sum_{l=n}^m \frac{1}{2^l} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ , d.h.  $(y_n)_{n \geq 1}$  ist Cauchy-Folge in  $K$ .

Da  $K$  vollständig ist nach b), gilt  $y := \lim_{l \rightarrow \infty} y_l \in K$ . Wähle  $n$  so groß, dass  $d(y_n, y) < \frac{\delta}{2}, 2^{1-n} < \frac{\delta}{2}$ .

$$\Rightarrow L_n = K \cap K(y_1, 1) \cap \dots \cap K(y_n, \frac{1}{2^{n-1}}) \subset K(y_n, \frac{1}{2^{n-1}}) \subset K(y, \delta) \subset U_{i_0}$$

Was jedoch Widerspruch zur Konstruktion der  $L_n$  wäre.

c)  $\Rightarrow$  a) (indirekt)

Angenommen a) wäre falsch. D.h. es gibt eine Folge  $(x_n)_{n \geq 1} \subset K$  ohne konvergente Teilfolge. Sei o.B.d.A.  $|K| = \infty$ . Zu jedem  $y \in K$  gibt es ein  $\epsilon(y)$ , so dass  $K(y, \epsilon(y))$  nur endlich viele der  $x_n$  enthält.  $K \subset \bigcup_{y \in K} K(y, \epsilon(y))$ , wobei alle  $K(y, \epsilon(y))$  offen sind.

Nach c) existiert eine endliche Teilüberdeckung, so dass  $K \subset K(y_1, \epsilon(y_1)) \cup \dots \cup K(y_n, \epsilon(y_n))$ .  $\Rightarrow (x_n)$  besteht nur aus endlich vielen Elementen und hat damit eine konvergente Teilfolge, was ein Widerspruch zur Wahl von  $(x_n)$  ist.  $\square$

### Proposition 6.6

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

- a) Eine kompakte Teilmenge  $K \subset M$  ist immer vollständig und abgeschlossen in  $M$ .
- b) Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist kompakt.
- c) Jede kompakte Menge in  $M$  ist separabel.
- d) Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raums ist beschränkt.

### Beweis

- a) siehe 6.5 b)
- b) Nach Definition
- c) Nach 6.5 b) gibt es zu  $n \in \mathbb{N}$  eine endliche Menge  $L_n$  mit:

$$\inf \|y - x\| : x \in L_n \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } y \in K.$$

Dann ist  $L = \bigcup_{n \geq 1} L_n$  abzählbar und  $L$  ist dicht in  $K$  (d.h.  $\overline{L} = K$ ), also ist  $K$  separabel.

- d) Falls  $K$  unbeschränkt ist, dann gibt es  $x_n \in K$  mit  $\|x_n\| \geq n, n \in \mathbb{N}$ .  
 $(x_n)$  kann dann keine konvergente Teilfolge besitzen. □

**Satz 6.7 (Arzelà-Ascoli)**

Sei  $(S, d)$  ein kompakter, metrischer Raum

$$C(S) = \{d: S \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig}\}$$

$\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|$ . Eine Teilmenge  $M \subset C(S)$  ist kompakt, genau dann wenn gilt

- a)  $M$  ist beschränkt in  $C(S)$ ,
- b)  $M$  ist abgeschlossen in  $C(S)$  und
- c)  $M$  ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : d(s, t) < \delta \Rightarrow |x(s) - x(t)| < \epsilon$$

**Beweis**

"  $\Rightarrow$  " Sei  $M$  kompakt  $\Rightarrow$  a,b) nach 6.6

z.z.  $M$  ist gleichgradig stetig:

Nach 6.5 b) ist  $M$  totalbeschränkt. Damit gibt es zu  $\epsilon > 0$   $x_1, \dots, x_m$ , so dass zu  $x \in M$  ein  $x_i$  existiert mit  $\|x - x_i\|_M \leq \epsilon$  (\*)

Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind, sind  $x_1, \dots, x_m \in M$  gleichmäßig stetig und damit folgt

$$\exists \delta_1, \dots, \delta_m \text{ mit } d(s, t) < \delta_i \Rightarrow |x_i(t) - x_i(s)| < \epsilon, \quad i = 1, \dots, m \quad (**)$$

Definiere  $\delta := \min(\delta_1, \dots, \delta_m) > 0$ , dann gilt für  $x \in M$ :

$$\begin{aligned} |x(t) - x(s)| &\leq \underbrace{|x(t) - x_i(s)|}_{\leq \|x - x_i\| \leq \epsilon \text{ nach (*)}} + \underbrace{|x_i(t) - x_i(s)|}_{\leq \epsilon \text{ nach (**)}} + \underbrace{|x_i(s) - x(s)|}_{\leq \epsilon} \\ &\leq 3\epsilon \text{ für } d(s, t) < \delta \end{aligned}$$

"  $\Leftarrow$  " Nach 6.6 ist  $S$  separabel. Sei also  $(S_n)$  eine dichte Folge in  $S$ . Sei weiter eine Folge  $(x_n) \subset M$  gegeben.

Da  $M$  beschränkt in  $C(S)$  ist, gibt es ein  $C < \infty$  mit  $|x_n(s)| \leq C$  für alle  $s \in S, n \in \mathbb{N}$ . Also ist für festes  $m$   $(x_n(s_m))_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und hat somit eine konvergente Teilfolge.

$$\exists N_1 \subseteq \mathbb{N} \text{ mit } |N_1| = \infty \text{ so, dass } (x_n(s_1))_{n \in N_1} \text{ konvergiert.}$$

$$\exists N_2 \subseteq N_1 \text{ mit } |N_2| = \infty \text{ so, dass } (x_n(s_2))_{n \in N_2} \text{ konvergiert.}$$

Induktiv gibt es  $N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_l \supset \dots$  mit  $|N_l| = \infty$  so, dass  $(x_n(s_m))_{n \in N_m}$  konvergiert.

Wähle  $n_j \in N_j$  mit  $n_j \rightarrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$ . Dann gilt:  $(x_{n_j}(s_m))_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiert in  $\mathbb{K}$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$ . (\*\*)

z.z.  $(x_{n_j})$  konvergiert gleichmäßig auf  $S$ .

Zu  $\epsilon > 0$  wähle  $\delta$  wie in der Definition für gleichgradige Stetigkeit. Da die Überdeckung  $S =$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} K(s_n, \delta)$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $S' = K(s_1, \delta) \cup \dots \cup K(s_m, \delta)$ .  
 Setze zur Abkürzung  $x_j = x_{n_j}$  und  $s_k = s_{n_k}$ .  
 Zum bereits gewählten  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $i_0$  mit

$$|x_j(s_k) - x_i(s_k)| \leq \epsilon \quad i, j \geq i_0, k = 1, \dots, m$$

Dann gilt ebenfalls für  $i, j \geq i_0, s \in S$ :

$$|x_j(s) - x_i(s)| \leq \underbrace{|x_j(s) - x_i(s)|}_{\substack{\leq \epsilon \\ \text{(wg. glgrd. Stetigkeit)}}} + \underbrace{|x_j(s_k) - x_i(s_k)|}_{\leq \epsilon} + \underbrace{|x_i(s_k) - x_i(s)|}_{\substack{\leq \epsilon \\ \text{(wg. glgrd. Stetigkeit)}}} \leq 3\epsilon$$

$$\Rightarrow \|x_j - x_i\|_{\infty} \leq 3\epsilon \text{ d. h. } x_j \text{ ist eine Cauchy-Folge in } C(S).$$

$\Rightarrow$  Da  $C(S)$  vollständig ist und  $M$  abgeschlossen, existiert  $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$  mit  $x \in M$  □

### Beispiel 6.8

$$K = \{d \in C^1[0, 1] : \|f'\|_{\infty} \leq 1, |f(0)| \leq 1\}$$

$K$  ist nicht kompakt in  $C^1[0, 1]$ , aber  $K$  ist kompakt in  $C[0, 1]$ .

### Beweis

$U_{C^1[0,1]} \subset K$  ist nicht kompakt, da  $\dim C^1[0, 1] = \infty$  nach 6.2. Aber  $K \subseteq C[0, 1]$  ist kompakt nach 6.7, denn

$$a) f \in K : f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u) du \rightarrow |f(t)| \leq |f(0)| + \|f'\|_{\infty}$$

b)  $K$  ist abgeschlossen nach Definition

$$c) f \in K, s < t \in [0, 1] : |f(s) - f(t)| = \left| \int_s^t f'(u) du \right| \leq |t - s| \|f'\|_{\infty} \leq |t - s| < \epsilon \text{ für } \delta = \epsilon \quad \square$$

### Korollar 6.9

Sei  $X$  ein Banachraum. Für  $K \subseteq X$  sind äquivalent

- a)  $K$  relativ kompakt (d.h.  $\overline{K}$  ist kompakt)
- b) Jede Folge  $(x_k) \subseteq K$  hat eine Cauchy-Teilfolge
- c)  $\forall \epsilon > 0 \exists y_1, \dots, y_m \in K$  mit  $K \subseteq K(y_1, \epsilon) \cup \dots \cup K(y_m, \epsilon)$

### Beweis

"a)  $\Rightarrow$  b)" und "b)  $\Rightarrow$  c)" klar nach 6.5.

"b)  $\Rightarrow$  a)" Sei  $(x_n) \subseteq K$  mit einer Cauchy-Teilfolge  $(x_{n_k})$ .

Da  $X$  vollständig ist, existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in X \Rightarrow x \in \overline{K} \Rightarrow \overline{K}$  kompakt.

"c)  $\Rightarrow$  a)" Da  $X$  vollständig ist, ist  $\overline{K}$  vollständig. Zu  $\epsilon > 0$  wähle  $y_1, \dots, y_m \in K$  mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^m K(y_j, \epsilon) \Rightarrow \overline{K} \subseteq \bigcup_{j=1}^m \overline{K(y_j, \epsilon)} \subseteq \bigcup_{j=1}^m K(y_j, 2\epsilon)$$

□

## 7 Kompakte Operatoren

### Definition 7.1

Sei  $X$  ein normierter Raum,  $Y$  ein Banachraum. Ein linearer Operator  $T: X \rightarrow Y$  heißt kompakt, falls  $T(U_X)$  relativ kompakt ist in  $Y$ .

### Vereinbarung:

$K(X, Y)$  = Raum der linearen, kompakten Operatoren von  $X$  nach  $Y$ .

### Bemerkung

- a)  $T \in K(X, Y) \iff$  jede beschränkte Folge  $(x_n) \subset X$  besitzt eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $T(x_{n_k})$  ist Cauchy-Folge in  $Y$ .
- b)  $K(X, Y) \subset B(X, Y)$ , da die kompakte Menge  $\overline{T(U_X)}$  beschränkt in  $Y$  ist.

### Beispiel

- a)  $Id_X \in K(X, X) \iff \dim X < \infty$  (nach 6.2).
- b) Endlich dimensionale Operatoren sind kompakt

$$X \xrightarrow{T} T(X) \subset Y_0 \subset Y \text{ mit } \dim Y_0 < \infty$$

### Beispiel 7.2

$X = \ell^p, 1 \leq p < \infty$ .  $Q_n \in B(\ell^p) : Q_n(x_j) := (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$

Behauptung:

$$T \in B(\ell^p) \text{ kompakt} \iff \|Q_n T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \sup_{\|x\|_p \leq 1} \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} (Tx)_j \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff T(U_X) \text{ ist relativ kompakt in } \ell^p \text{ nach 6.4}$$

- a)  $T(x_j) = (\lambda_j x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $\lambda_j \in \mathbb{K}$  Diagonaloperator  
 $T$  ist kompakt  $\iff \lambda_j \rightarrow 0$ , für  $j \rightarrow \infty$ .

### Beweis

Da  $Q_n \in B(\ell^p)$  gilt:

$$\begin{aligned} \|Q_n T(X_j)\| &= \|(0, \dots, 0, \lambda_{n+1}, x_{n+1}, \lambda_{n+2}, x_{n+2}, \dots)\|_{\ell^p} \\ &= \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j| \|x\|_{\ell^p} \\ &\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Q_n T x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ falls } \lambda_j \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Sei umgekehrt:  $\lambda_j \rightarrow 0$ , dann  $\exists \lambda_{j_k} \rightarrow \lambda \neq 0$

$$T(e_{i_k}) = \lambda_{i_k} e_{i_k}, T(\lambda_{j_k}) \approx \lambda e_{j_k} \text{ hat keine konvergente Teilfolge.}$$

□

- b)  $T(x_i) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ , "Shift"  
 Isometrie!  $\|T(x_j)\| = \|x_i\| \Rightarrow$  nicht kompakt.

- c)  $[T(x_j)]_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$ ,  $T \in B(\ell^p)$ , falls  $\left(\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

Diese Hille-Tamerkin-Operatoren sind kompakt.

**Beweis**

$$\| [Q_n T(x_j)]_i \| \leq \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} \left( \sum_j |a_{ij}|^{p'} \right)^{\frac{p}{p'}} \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

□

### Beispiel 7.3

Sei  $X = C(\Omega)$ , mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  kompakt. Für  $k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ , ist der Integraloperator

$$(Tx)(u) = \int_{\Omega} k(u, v)x(v)dv \quad \text{kompakt.}$$

**Beweis**

Wir führen den Beweis mittels Arzèla-Ascoli. Beachte

$$\exists M \text{ mit } |k(u, v)| \leq M \text{ für } u, v \in \Omega$$

$k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  ist gleichmäßig stetig, da  $\Omega \times \Omega$  kompakt ist.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \| (u_1, v_1) - (u_2, v_2) \|_{\mathbb{R}^{2d}} < \delta \Rightarrow |k(u_1, v_1) - k(u_2, v_2)| < \epsilon$$

Dann gilt  $T(U_{C(\Omega)})$  ist beschränkt, denn

$$|Tx(u)| \leq \int_{\Omega} |k(u, v)| |x(v)| dv \leq M \underbrace{v_0(\Omega)}_{< \infty} \|x\|_{\infty}$$

Für  $x \in U_{C(\Omega)} : \|Tx\|_{\infty} \leq M v_0(\Omega) < \infty$

Damit ist  $T(U_{C(\Omega)})$  gleichgradig stetig, da

$$|Tx(v_1) - Tx(v_2)| \leq \int_{\Omega} (k(u_1, v) - k(u_2, v)) x(v) dv \leq v_0(\Omega) \sup_{v \in \Omega} |k(u_1, v) - k(u_2, v)| \underbrace{\|x\|_{\infty}}_{\leq 1}$$

Sei  $\epsilon > 0$ . Wähle  $\delta > 0$  bzgl. glw. Stetigkeit: dann folgt für  $|u_1 - u_2| < \delta$ :

$$|Tx(u_1) - Tx(u_2)| \leq v_0(\Omega)\epsilon, \quad \forall x \in U_{C(\Omega)}$$

Dann nur noch Arzèla-Ascoli mit der gezeigten gleichgradigen Stetigkeit anwenden. □

### Beispiel 7.4

$j: C^1[0, 1] \hookrightarrow C[0, 1]$ ,  $j$  Inklusion. Dann  $j \in K(C^1[0, 1], C[0, 1])$ .

**Beweis**

$j(U_{C^1[0,1]})$  ist relativ kompakt in  $C[0, 1]$  nach 6.9. (auch nach Arzèla-Ascoli). □

**Satz 7.5**

Seien  $X, Y$  und  $Z$  Banachräume.

- a)  $K(X, Y)$  ist ein linearer, abgeschlossener Teilraum von  $B(X, Y)$ .
- b) Seien  $T \in B(X, Y), S \in B(Y, Z)$  und entweder  $T$  oder  $S$  kompakt. Dann ist  $S \circ T \in K(X, Z)$ .  
Insbesondere:  $K(X) = K(X, X)$  ist ein Ideal in  $B(X)$ .

**Beweis**

- a)  $S, T \in K(X, Y), \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda T \in K(X, Y)$ .

Zu  $(x_j) \in U_X$  wähle  $x_{n_k}$  und  $x_{n_l}$  so, dass  $T(x_{n_k})$  und  $S(x_{n_l})$  jeweils Cauchy-Folgen sind.

$$\Rightarrow (S + T)x_{k_j} = Sx_{k_j} + Tx_{k_j} \text{ ist Cauchy-Folge.}$$

z.z.:  $K(X, Y)$  ist abgeschlossen in  $B(X, Y)$ .

Seien  $T_n \in K(X, Y), T \in B(X, Y)$  mit  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ .

z.z.:  $T \in K(X, Y)$ .

Sei  $\epsilon > 0$ . Wähle  $n_0$  so, dass  $\|T - T_{n_0}\| \leq \epsilon$  für  $n \geq n_0$ .

Da  $T_{n_0}(U_X)$  relativ kompakt ist, gibt es zu  $\epsilon > 0, y_1, \dots, y_j \in T_{n_0}(U_X)$  :

$$T_{n_0}(U_X) \subset K(y_1, \epsilon) \cup \dots \cup K(y_m, \epsilon)$$

Sei  $x \in U_X$ . Wähle  $j_0$  mit  $\|T_{n_0}x - y_{j_0}\|_Y \leq \epsilon$ .

$$\begin{aligned} \|Tx - y_{j_0}\| &\leq \underbrace{\|Tx - T_{n_0}x\|}_{\leq \epsilon} + \underbrace{\|T_{n_0}x - y_{j_0}\|}_{\leq \epsilon} \leq 2\epsilon \\ &\leq \underbrace{\|T - T_{n_0}\|}_{\leq \epsilon} \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \end{aligned}$$

d.h.  $T(U_X) \subset \bigcup_{j=1}^n K(y_j, 2\epsilon)$ , d.h.  $T(U_X)$  ist relativ kompakt.

- b)  $\|x_n\|_X \leq 1, S$  kompakt  $\Rightarrow \exists n_k : S(Tx_{n_k})$  ist eine Cauchy-Folge.

$$\Rightarrow S(Tx_{n_k}) \text{ ist Cauchy-Folge, da } S \text{ stetig ist.}$$

□

**Korollar 7.6**

Seien  $X, Y$  Banachräume,  $T \in B(X, Y)$ .

Falls es endlich dimensionale Operatoren  $T_n \in B(X, Y)$  gibt, dann ist  $T \in K(X, Y)$ .

**Beweis**

Bemerkung nach 7.1, 7.5 a)

□

**Beispiel**

$X = \ell^p, T \in B(\ell^p)$  ist kompakt  $\iff \|Q_n T\| \rightarrow 0$ .

$P_n = Id - Q_n, P_n(x_j) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots), P_n$  endlich dimensional.

$$T \in B(\ell^p) \iff \|P_n T - T\| = \|Q_n T\| \rightarrow 0$$

$$T \in K(\ell^p) \iff T \text{ ist limes von endlichen Operatoren in der Operatornorm.}$$

**Satz 7.7**

Seien  $X, Y$  Banachräume und  $X$  habe die **Approximationseigenschaft** (d.h. es existieren endlich dimensionale Operatoren  $S_n \in B(X) : S_n x \rightarrow x, \quad \forall x \in X$ ).

Dann gilt:  $K(X, Y) = \overline{F(X, Y)}$  in der Operatornorm, wobei  $F(X, Y) = \{T \in B(X, Y) : \dim T(X) < \infty\}$ .

**Beweis**

Für  $T \in K(X, Y)$  setze  $T_n = S_n T \in F(X, Y)$ .

Wegen 7.6 bleibt z.z.:  $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ .

Da  $T(U_X)$  relativ kompakt ist, d.h. zu  $\epsilon > 0$  gibt es  $y_1, \dots, y_m$  so, dass

$$T(U_X) \subset \bigcup_{j=1}^m K(y_j, \epsilon)$$

Aufgrund der Approximationseigenschaft gibt es ein  $n_0$  so, dass  $\|S_n y_j - y_j\| \leq \epsilon$  für  $n \geq n_0, j = 1, \dots, m$ . Zu  $x \in U_X$  wähle  $j_0$  mit  $\|Tx - y_{j_0}\| \leq \epsilon$  und damit

$$\begin{aligned} \|T_n x - Tx\| &\leq \|S_n Tx - S_n y_{j_0}\| + \|S_n y_{j_0} - y_{j_0}\| + \|y_{j_0} - Tx\| \\ &\leq \|S_n\| \underbrace{\|Tx - y_{j_0}\|}_{\leq \epsilon} + \epsilon + \epsilon \\ &\leq \left( \underbrace{\sup_n \|S_n\|}_{< \infty \text{ (beschr.!)}} + 2 \right) \epsilon \\ &= (c' + 2) \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T_n - T\| \leq c\epsilon \quad \text{für } n \geq n_0 \text{ und eine Konstante } C.$

□

## 8 Approximation von $L^p$ Funktionen

Sei  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p, x_m = (x_1, \dots, x_m, \dots)$ .

Dann  $\|x - x_m\| \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ .

Betrachten wir  $L^p(\Omega)$ , mit z.B.  $\Omega = \mathbb{R}^d$  und die Integraloperatoren  $T: L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$

$$Tf(u) = \int k(u, v)f(v)dv \quad (*)$$

wobei  $k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  messbar.

### Satz 8.1

Sei  $k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  messbar und

$$\sup_{u \in \Omega} \int_{\Omega} |k(u, v)|dv \leq C_1 < \infty \text{ und}$$

$$\sup_{v \in \Omega} \int_{\Omega} |k(u, v)|du \leq C_2 < \infty$$

Dann wird durch (\*) ein beschränkter Operator  $T: L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$  mit

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C_1^{\frac{1}{p'}} C_1^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

und  $1 \leq p \leq \infty$ .

### Beweis

- $p = \infty : f \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} |Tf(u)| &\leq \int |k(u, v)||f(v)|dv \\ &\leq \int_{\Omega} |k(u, v)|dv \|f\|_{\infty} \\ &\leq C_1 \|f\|_{\infty} \quad \forall u \in \Omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq C_1$$



- $p = 1 : f \in L^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^1} &= \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} k(u, v) f(v) dv \right| du \\
&\leq \int \int |k(u, v)| |f(v)| du dv \\
&= \int \left( \int |k(u, v)| du \right) |f(v)| dv \\
&\leq C_2 \int |f(v)| dv \\
&= C_2 \|f\|_{L^1}
\end{aligned}$$

- $1 < p < \infty : f \in L^1 \cap L^\infty \subset L^p, Tf \in L^1 \cap L^\infty \subset L^p.$

Definiere  $g(u) = \left( \int |Tf(u)|^p du \right)^{-\frac{1}{p'}} |Tf(u)|^{p-1} \text{sign}(Tf(u)).$

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^p} &= \left( \int_{\Omega} |Tf(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |Tf(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p'} - 1} \\
&= \int g(u) Tf(u) du \\
&= \int \int g(u) k(u, v) f(v) dv du \\
&\leq \int_{\Omega \times \Omega} |g(u)| |k(u, v)|^{\frac{1}{p'}} |k(u, v)|^{\frac{1}{p}} |f(v)| d(u, v), \quad \text{durch Hölder auf } \Omega \times \Omega \text{ folgt} \\
&\leq \left( \int_{\Omega \times \Omega} |g(u)|^{p'} |k(u, v)| d(u, v) \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\Omega \times \Omega} |k(u, v)| |f(v)|^p d(u, v) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (*)
\end{aligned}$$

Definiere nun:  $T_1 h(v) = \int |k(u, v)| h(u) du, T_1 h(u) = \int |k(u, v)| h(v) dv$

Mit diesen Notationen wird (\*):

$$\begin{aligned}
\left( \int_{\Omega} T_1[|g|^{p'}](v) dv \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\Omega} T_2[|f|^p](v) dv \right)^{\frac{1}{p}} &= \|T_1[|g|^{p'}]\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \|T_2[|f|^p]\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \underbrace{\|T_1\|_{L^1 \rightarrow L^1}^{\frac{1}{p'}}}_{\leq C_1^{\frac{1}{p'}}} \underbrace{\| |g|^{p'} \|_{L^1}^{\frac{1}{p'}}}_{= \|g\|_{L^{p'}}} \underbrace{\|T_2\|_{L^1 \rightarrow L^1}^{\frac{1}{p}}}_{\leq C_2^{\frac{1}{p}}} \underbrace{\| |f|^p \|_{L^1}^{\frac{1}{p}}}_{\|f\|_{L^p}} \\
&\leq C_1^{\frac{1}{p'}} C_2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}
\end{aligned}$$

Wir wollen noch zeigen, dass  $\|g\|_{L^{p'}} \leq 1$ , da wir dann die richtige Abschätzung auf einer dichten Teilmenge gefunden haben.

$$\|g\|_{L^{p'}} = \left( \int |Tf(u)|^p du \right)^{-\frac{1}{p'}} \left( \int |Tf(u)|^{(p-1)p'} du \right)^{\frac{1}{p'}} = 1 \quad \text{da } (p-1)p' = p \quad \square$$

### Definition 8.2 (Bedingter Erwartungsoperator)

Sei  $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Partition von  $\Omega$  in paarweise disjunkte, messbare Mengen  $A_n$  mit  $0 < \mu(A_n) < \infty$ . Setze

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}}(f)(s) = \sum_n \left[ \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(t) dt \right] \mathbf{1}_{A_n}(s)$$

**Korollar 8.3**

- a) Für jede Partition  $\mathcal{A} = \{A_n\}$  von  $\Omega$  ist  $\mathbb{E}_{\mathcal{A}} \in B(L^p(\Omega))$  für alle  $1 \leq p \leq \infty$  mit  $\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}}\|_{L^p \rightarrow L^p} = 1$ .
- b) Bild  $\mathbb{E}_{\mathcal{A}} = \mathbb{E}_{\mathcal{A}}(L^p)$  ist isometrisch zu  $\ell_m^p \cong (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$ , mit  $m = \text{card}(A)$ .

**Beweis**

- a) Setze  $k(s, t) = \sum_n \mu(A_n)^{-1} \mathbb{1}_{A_n}(s) \mathbb{1}_{A_n}(t)$ . Dann gilt für  $s \in A_n$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{A}} f(s) &= \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(t) dt \\ &= \int_{\Omega} k(s, t) f(t) dt \end{aligned}$$

und außerdem  $\int k(s, u) du = 1$  für  $s \in \Omega$ ,  $\int k(s, u) ds = 1$  für  $u \in \Omega$ .

Aus 8.1 folgt damit mit  $C_1 = 1, C_2 = 1$ :  $\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}}\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq 1$ .

- b)  $J : \ell_m^p \rightarrow L^p(\Omega), J(\alpha_n) = \sum \alpha_n \mu(A_n)^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{A_n}$ .

da Bild  $J = \text{span}\{\mathbb{1}_{A_n}\} = \text{Bild } \mathbb{E}_{\mathcal{A}}$

$$\|J(\alpha_n)\|_{L^p}^p = \int_{\Omega} |\sum_n \alpha_n \mu(A_n)^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{A_n}(s)|^p ds = \int_{\Omega} \sum_n |\alpha_n|^p \frac{1}{\mu(A_n)} \mathbb{1}_{A_n} ds = \sum |\alpha_n|^p \quad \square$$

**Satz 8.4**

Sei  $\mathcal{A}_m = \{A_{n,m} : n = 1, \dots, m_n\}$  eine Zerlegung von  $\Omega \cap K(0, r_m), \Omega \subset \mathbb{R}^d, r_m \rightarrow \infty$  und  $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_{m+1}, r_m \rightarrow \infty$ .

$$d_m = \sup\{|t - s| : s, t \in A_{n,m}, n = 1, \dots, m_n\} \quad \text{'Feinheit der Zerlegung'}$$

Dann gilt für alle  $f \in L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$

$$\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f\|_{L^p} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty$$

**Beweis**

1. Beweis

$D = \text{span}\{\mathbb{1}_{A_{n,m}} : n = 1, \dots, m_n, m \in \mathbb{N}\}$ . Da  $d_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  "weiß man", dass  $D$  dicht ist.

2. Beweis

$D = C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega), \{t : f(t) \neq 0\} \text{ kompakt}\}$  "Man weiß", dass  $D$  dicht in  $L^p(\Omega)$  ist.

Dann gilt zu zeigen: Für  $f \in C_0(\Omega)$  gilt  $\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f\|_{L^p} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ .

Annahme  $f \in C(K(0, r_m))$ ,  $f$  gleichmäßig stetig,  $\text{supp}(f) \subset K(0, r_m)$  für  $m$  groß genug

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f\|_{L^p}^p &= \int_{\Omega} \left| \sum_n (\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f) \mathbb{1}_{A_{m,n}}(s) \right|^p ds \\
&= \sum_n \int \left| (\mathbb{E}_{\mathcal{A}_m} f - f) \mathbb{1}_{A_{m,n}}(s) \right|^p ds \\
&= \sum_{n=1}^{m_n} \int \left| \frac{1}{\mu(A_{m,n})} \int_{A_{m,n}} [f(t)dt - f(s)] \mathbb{1}_{A_{m,n}}(s) \right|^p ds \\
&= \sum_{n=1} \int_{K(0, r_m) \cap A_{n,m}} \left| \frac{1}{\mu(A_{m,n})} \int_{A_{m,n}} [f(t) - f(s)] dt \right|^p ds \\
&\leq \sum_n \mu(K(0, r_m) \cap A_{n,m}) \sup\{|f(t) - f(s)| : s, t \in A_{m,n}\} \\
&\leq \left( \sum_n \mu(K(0, r_m) \cap A_{n,m}) \right) \sup\{|f(t) - f(s)| : |s - t| < d_m\} \\
&\leq \mu(K(0, r_m)) \underbrace{\sup_{|s-t| \leq d_m} |f(s) - f(t)|}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \text{ da } d_m \rightarrow 0}
\end{aligned}$$

□

### Beispiel

$\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}_m = \{[\frac{n-1}{2^m}, \frac{n}{2^m}) : -2^{2m}, \dots, 0, \dots, 2^{2m}\}$ ,  $r_m = 2^m$ .

### Korollar

Für  $X = L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  gilt:

$$K(X, X) = \overline{\mathcal{F}(X, X)} = \text{Abschluss der endl. dim. Operatoren}$$

### Beweis (siehe 7.7)

Die Behauptung ist richtig, falls  $L^p$  die Approximationseigenschaft hat:

$$\exists S_n \in \mathcal{F}(x), \|S_n\| \leq 1, S_n f \rightarrow f \text{ in } L^p \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Wähle  $S_n = \mathbb{E}_{\mathcal{A}_n}$ .

□

### Satz 8.5 (Young)

Für  $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$  setze für  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$(k * f)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} k(u - v) f(v) dv \quad (*)$$

$k * f$  heißt **Faltung** von  $k$  und  $f$ .

Dann definiert  $(*)$  einen beschränkten Operator  $Tf = k * f$  von  $L^p(\mathbb{R}^d)$  nach  $L^p(\mathbb{R}^d)$  für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq \|k\|_{L^1}$ .

### Beweis

Setze  $k(u, v) := k(u - v)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int |k(u, v)| dv &= \int |k(u - v)| dv = \|k\|_{L^1} \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^d \\ \int |k(u, v)| du &= \int |k(u - v)| du = \|k\|_{L^1} \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^d\end{aligned}$$

Wende **Satz 8.1** an:  $\|T\| \leq \|k\|_{L^1}$  □

### Bemerkung

$D \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$  dicht, z.B.:  $D = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}$   $f \in D : \int_{\mathbb{R}^d} k(u - v)f(v)dv$  existiert als Lebesgueintegral für alle  $f \in D$ .

Nach **Satz 8.1** gilt  $\|Tf\|_{L^p} \leq \|k\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^p}$  für  $f \in D$ .

$T$  ist die **stetige Fortsetzung** von  $T|_D$  auf ganz  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

### Definition 8.6

Sei  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$  mit  $\phi \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(u)du = 1$ . Dann heißt  $\phi_\epsilon(u) = \epsilon^{-d}\phi(\epsilon^{-1}u), \epsilon > 0$ ,

**approximative Eins.**

Notation:  $\phi_\epsilon * f(u) = \int \phi_\epsilon(u - v)f(v)dv$ .

### Beispiel

$$\phi(u) = \frac{1}{|B(0,1)|} \cdot \mathbb{1}_{B(0,1)}(u), \phi \geq 0, \int \phi du = 1$$

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon * f(u) &= \frac{1}{|B(u, \epsilon)|} \int \mathbb{1}_{B(u, \epsilon)}(u - v)f(v)dv \\ &= \frac{1}{|B(u, \epsilon)|} \int_{(u, \epsilon)} f(v)dv \\ &= \text{"Durchschnitt" von } f \text{ über die Kugel } B(u, \epsilon).\end{aligned}$$

Vermutung:  $\phi_\epsilon * f(u) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f(u)$ . In welchem Sinne jedoch ist noch unklar.

### Bemerkung 8.7

- i)  $\int \phi_\epsilon(u)du = 1$
- ii)  $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r)} \phi_\epsilon(u)du \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$
- iii)  $\text{supp}(\phi) \subset B(0, r) \Rightarrow \text{supp}(\phi_\epsilon) \subset B(0, \epsilon)$
- iv)  $\|\phi_\epsilon * f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$  (nach **8.5**)

### Satz 8.8

Sei  $(\phi_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  eine approximative Eins. Dann gilt für alle  $f \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p < \infty$

$$\|f - \phi_\epsilon * f\|_{L^p} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

**Beweis**

Sei  $D = \{f \in C(\mathbb{R}^d) : \text{supp}(f) \text{ kompakt} \}$ ,  $D \subset L^p(\mathbb{R}^d)$  dicht.

Für  $f \in D$ ,  $\text{supp}(f) \subset B(0, r_0)$

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon * f(u) - f(u) &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\epsilon(u-v) [f(v) - f(u)] dv \quad (\text{da } \int \phi_\epsilon(u) du = 1) \\ &= \int \phi_\epsilon(h) [f(u-h) - f(u)] dh\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\phi_\epsilon * f - f\|_{L^p} &\leq \left\| \int_{|h| \leq r} \phi_\epsilon(h) [f(\cdot - h) - f(\cdot)] dh \right\|_{L^p(\cdot)} + \left\| \int_{|h| \geq r} \phi_\epsilon(h) [f(\cdot - h) - f(\cdot)] dh \right\|_{L^p(\cdot)} \\ &\leq \underbrace{\left( \int_{|h| \leq r} \phi_\epsilon(h) dh \right)}_{\leq 1} \sup_{|h| \leq r} \|f(\cdot - h) - f(\cdot)\|_{L^p} + \int_{|h| \geq r} \phi_\epsilon(h) dh (\|f(\cdot - h)\|_{L^p} + \|f(\cdot)\|_{L^p}) \\ &\leq \sup_{|h| \leq r} \|f(\cdot - h) - f(\cdot)\|_{L^p(\cdot)} + \underbrace{\int_{|h| \geq r} \phi_\epsilon(h) dh}_{\rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0 \text{ nach 8.7ii)} (2 \cdot \|f\|_{L^p}) \quad (L^p \text{ ist translationsinvariant})\end{aligned}$$

Gegeben ein  $\tau > 0$  wähle  $r$  so groß, dass der erste Teil kleiner ist als  $\tau$ . Gegeben  $r$  und  $\tau$  wähle  $\epsilon > 0$  so klein, dass der zweite Teil kleiner ist als  $\tau$ , d.h.

$$\|\phi_\epsilon * f - f\|_{L^p} \leq 2\tau \text{ für } \epsilon \text{ klein genug, für } f \in D.$$

Nach 8.7 iv):  $\|\phi_\epsilon * f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$

Für  $T_\epsilon f = \phi_\epsilon * f$  gilt:

- $\|T_\epsilon\| \leq 1$  für alle  $\epsilon > 0$
- $T_\epsilon f \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$  in  $L^p$  für alle  $f \in D$
- $D$  ist dicht in  $L^p$

$\Rightarrow$  Behauptung nach Proposition 5.10 □

**Korollar 8.9**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Dann liegt

$$C_c^\infty(\Omega) = \{f : f \text{ ist unendlich oft differenzierbar und } \text{supp}(f) \text{ ist kompakt.}\}$$

dicht in  $L^p(\Omega)$ .

**Beweis**

Sei  $\phi_\delta, \delta > 0$  eine approximative Eins und  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\text{supp}(\phi) \leq B(0, 1)$ .

Gegeben  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $\epsilon > 0$  wähle  $g \in L^\infty(\Omega)$  mit

- $\text{supp}(g) = \overline{\{x \in \Omega : g(x) \neq 0\}} =: A \subseteq \Omega$ ,  $A$  kompakt
- $\|f - g\|_{L^p} \leq \epsilon$

$$\delta_0 = \inf\{|t - s| : t \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega, s \in A\} \quad \text{Abstand von } A \text{ und } \Omega^c$$



Da  $\text{supp}(\phi_\delta) \subset B(0, \delta)$  nach 8.7 ii)

$$\Rightarrow \text{supp}(g * \phi_\delta) \subset A + B\left(0, \frac{\delta_0}{2}\right) \subset \Omega \text{ für } \delta < \frac{\delta_0}{2}$$

(mit  $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$ ), denn  $g * \phi_\delta(u) = \int \phi_\delta(u - v)g(v)dv \neq 0$  nur wenn  $v \in A$  und  $\|u - v\| < \delta$ .

Also  $g * \phi_\delta \in C_c(\Omega)$ . Zu zeigen:  $g * \phi_\delta \in C^\infty(\Omega)$

$$D_u^\alpha(\phi_\delta * g)(u) = \int_A [D_u^\alpha \phi_\delta(u - v)] \underbrace{g(v)}_{\text{beschränkt}} dv$$

d.h.  $\phi_\delta * g \in C^\infty$ ; in einfachen Worten bedeutet das, dass  $C_\delta * g$  alle guten Eigenschaften von  $\phi$  "erbt", auch wenn  $g$  "schlecht" ist.

$$\|f - \phi_\delta * g\|_{L^p} \leq \underbrace{\|f - g\|}_{\leq \epsilon} + \underbrace{\|g - \phi_\delta * g\|_{L^p}}_{\leq \epsilon} \text{ für } \epsilon \text{ klein genug nach 8.8}$$

□

### Bemerkung

Es gilt:

- $\text{supp}(f) \subset A, \text{supp}(g) \subset B \Rightarrow \text{supp}(f + g) \subset A + B$
- $f * g = g * f$

### Korollar 8.10

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Sei  $f \in L^p(\Omega), p \in [1, \infty)$  mit  $\int f(u)g(u)du = 0$  für alle  $g \in C_c^\infty(\Omega)$ . Dann ist  $f = 0$ .

### Beweis

Zu  $f \in L^p$  gibt es ein  $g \in L^{p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  mit

$$\|f\|_{L^p} = \int f(u)g(u)du, \quad \|g\|_{L^{p'}} = 1$$

Wähle  $g(u) = |f(u)|^{p-1} (\text{sign}(f(u))) \cdot \|f\|_{L^p}^{\frac{1}{p}-1}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p} &= \left( \int |f(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{1}{p}-1} \int |f(u)|^p du \\ &= \int f(u) \underbrace{\frac{\text{sign}(f(u))|f(u)|^{p-1}}{\|f\|_{L^p}^{1-\frac{1}{p}}}}_{=:g(u)} du \\ &= \int f(u)g(u)du \end{aligned}$$

$\|g\|_{L^{p'}} = 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . (siehe auch **Beweis 8.1**)

$$\|f\|_{L^p} = \int f(u)g(u)du = \int f(u)[g(u)-\phi(u)]du \text{ für alle } \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \text{denn } \int f(u)\phi(u)du = 0$$

Wähle nach 8.9 ein  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $\|g - \phi\|_{L^{p'}(\Omega)} < \frac{1}{2}$

Also  $\|f\|_{L^p} \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^p} \|f - \phi\|_{L^{p'}} < \frac{1}{2} \|f\|_{L^p}$ , was einen Widerspruch zu  $f \neq 0$  darstellt, demnach gilt  $\|f\|_{L^p} = 0, f = 0$ . □

# Elemente der Operatortheorie

## 9 Der Satz von Baire und der Satz von Banach-Steinhaus

### Satz 9.1 (Satz von Baire)

Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und seien  $U_n, n \in \mathbb{N}$  offen und dicht in  $M$ .

Dann ist  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  dicht in  $M$ .

### Beweis

Der Kürze halber definieren wir  $D := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ .

Zu zeigen gilt, dass zu jeder Kugel  $K(x_0, \epsilon), x_0 \in M, \epsilon > 0$ . Beweis:

- $U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$  ist offen und nichtleer, da  $U_1$  dicht ist. Also existiert ein  $x_1 \in U_1$  und  $\epsilon_1 > 0$  mit  $\epsilon_1 < \frac{1}{2}\epsilon$  so, dass  $K(x_1, 2\epsilon_1) \subset U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$

$$\Rightarrow \overline{K(x_1, \epsilon)} \subseteq U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$$

- Nun ist  $U_2 \cap K(x_1, \epsilon_1)$  offen und nichtleer, da  $U_2$  dicht ist. Also existiert ein  $x_2 \in U_2$  und ein  $\epsilon_2 < \frac{1}{2}\epsilon_1$  mit

$$\overline{K(x_2, \epsilon_2)} \subset K(x_2, 2\epsilon_2) \subset U_2 \cap K(x_1, \epsilon_1) \subset U_2 \cap U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$$

- Induktiv findet man Folgen  $\epsilon_n > 0, x_n$  mit

$$(i) \quad \epsilon_n < \frac{1}{2}\epsilon_{n-1} \text{ und damit } \epsilon_n \leq \frac{1}{2^n}\epsilon$$

$$(ii) \quad \overline{K(x_n, \epsilon_n)} \subset U_n \cap K(x_{n-1}, \epsilon_{n-1}) \subset \dots \subset U_n \cap \dots \cap U_1 \cap K(x_0, \epsilon)$$

Insbesondere für  $n > N$ :

$$d(x_n, x_N) \leq \sum_{j=N+1}^n d(x_j, x_{j-1}) \leq \sum_{j=N+1}^n \epsilon_j \leq \left( \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right) \epsilon$$

d.h.  $(x_n)$  ist eine Cauchy-Folge und da  $M$  vollständig ist, existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: x$  in  $M$ .

Mit **ii** gilt:  $x_n \in \overline{K(x_N, \epsilon_N)}$  für  $n \geq N$

$$\Rightarrow x = \lim_n x_n \in \overline{K(x_N, \epsilon_N)} \subset U_N \cap \dots \cap U_1 \cap K(x_0, \epsilon) \text{ für alle } N$$



$$\Rightarrow x \in \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n}_{=D} \cap K(x_0, \epsilon)$$

□

**Definition 9.2**

- a) Eine Teilmenge  $L$  eines metrischen Raums  $M$  heißt **nirgends dicht**, falls  $\overline{L}$  keine inneren Punkte enthält.
- b) Eine Teilmenge  $L$ , die sich als Vereinigung von einer Folge von nirgends dichten Mengen  $L_n$  darstellen lässt, d.h.  $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$  heißt von **1. Kategorie**.
- c)  $L$  heißt von **2. Kategorie**, falls  $L$  nicht von erster Kategorie ist.

**Bemerkung**

- Ist  $L$  nirgends dicht, dann ist  $M \setminus \overline{L}$  dicht in  $M$
- Ist  $L$  nirgends dicht oder von Kategorie 1, dann ist  $L$  "dünn", "voller Löcher".

**Korollar 9.3 (Kategoriensatz von Baire)**

- a) In einem vollständigen metrischen Raum  $(M, d)$  liegt das Komplement einer Menge  $L$  von 1. Kategorie stets dicht. Insbesondere:
- b) Ein vollständig metrischer Raum ist von 2. Kategorie
- c) Sei  $(M, d)$  vollständig und  $M_n, n \in \mathbb{N}$  eine Folge abgeschlossener Mengen mit  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ . Dann enthält mindestens ein  $M_n$  eine Kugel

**Beweis**

$L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ ,  $L_n$  nirgends dicht.

Damit gilt  $L^c = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n^c \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{L_n}^c$ , mit  $\overline{L_n}^c$  offen.

Da  $L_n$  nirgends dicht ist, ist daher  $\overline{L_n}^c$  dicht in  $M$

Nach 9.1 ist auch  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{L_n}^c$  dicht in  $M$  und da  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{L_n}^c \subset L^c$ , ist auch  $L^c$  dicht in  $M$ .

a)  $\Rightarrow$  b)  $\Rightarrow$  c) nach Definition.

□

**Satz 9.4**

$E = \{x \in C[0, 1] : x \text{ ist in keinem Punkt von } [0, 1] \text{ differenzierbar}\}$  ist dicht in  $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$ . Insbesondere:

- $E \neq \emptyset$
- $C^1[0, 1]$  ist von 1. Kategorie in  $C[0, 1]$ , also  $C^1[0, 1] \subset C[0, 1]$  dicht

**Beweis**

Betrachte

$$E_n = \{x \in C[0, 1] : \sup_{0 < |h| \leq \frac{1}{n}} \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right| > n, \text{ für alle } t \in [0, 1]\},$$

dann ist  $\bigcap E_n \subset E$ . Wir wollen nun zeigen, dass

- i)  $E_n$  sind offen in  $C[0, 1]$  für alle  $n$
- ii)  $E_n$  sind dicht in  $C[0, 1]$  für alle  $n$

Damit können den **Satz von Baire** anwenden und erhalten dass  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$  und damit auch die Menge  $E$  dicht in  $C[0, 1]$  ist.

- i) Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in E_n$  fest.  
Zu jedem  $t \in [0, 1]$  wähle  $f_t$  definiert durch

$$\sup_{0 < |h| \leq \frac{1}{n}} \left| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right| = n + 2\delta_t$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x(s+h_t) - x(s)}{h_t} \right| > n + \delta_t \text{ für } s \in U_t, 0 < |h_t| \leq \frac{1}{n}$$

Da  $x$  stetig ist, gibt es zu  $t$  eine kleine Umgebung  $U_t$  mit

$$\left| \frac{x(s+h_t) - x(s)}{h_t} \right| > n + \delta_t \text{ für } s \in U_t, 0 < |h_t| \leq \frac{1}{n}$$

Da  $[0, 1]$  kompakt und  $[0, 1] = \bigcup_{t \in [0, 1]} U_t$  gibt es endlich viele  $U_{t_1}, \dots, U_{t_n}$  mit  $[0, 1] \subset U_{t_1} \cup \dots \cup U_{t_n}$

Setze  $\delta := \min\{\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_n}\} > 0$ ,  $h := \min\{h_{t_1}, \dots, h_{t_n}\}$ .

Wähle nun ein  $\epsilon$  mit  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}h\delta$ .

Zu zeigen bleibt  $K(x, \epsilon) \subset E_n$ :

Sei  $y \in C[0, 1]$  mit  $\|x - y\|_\infty < \epsilon$ . Zu  $t \in [0, 1]$  wähle  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $t \in U_i$ .

Dann:

$$\begin{aligned} \left| \frac{y(t+h_{t_i}) - y(t)}{h_{t_i}} \right| &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} \left| \frac{x(t+h_{t_i}) - x(t)}{h_{t_i}} \right| - 2 \frac{\|x - y\|_\infty}{|h_{t_i}|} \\ &\stackrel{t \in U_{t_i}}{>} n + \delta - 2 \frac{\epsilon}{n} \\ &> n \quad \text{nach Wahl von } \epsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in E_n, K(x, \epsilon) \subseteq E_n \Rightarrow A_n \text{ offen, } n \in \mathbb{N}.$$

- ii) Wir wollen noch zeigen, dass  $U_n$  dicht in  $C[0, 1]$  ist.

Sei  $V \subset C[0, 1]$  offen,  $V \neq \emptyset$ . Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es ein Polynom  $p$  mit  $p \in V, \epsilon > 0 : \|x - p\|_\infty \leq \epsilon \Rightarrow x \in V$ .

Sei weiter  $y_m$  eine Sägezahnfunktion mit  $y_m : [0, 1] \rightarrow [0, \epsilon]$  und der Steigung  $\pm m$ . Dann ist  $x := p + m \in K(p, \epsilon)$ .

Wähle zu  $n$  die Zahl  $m \in \mathbb{N}$  so, dass  $m > n + \|p\|_\infty$ .

Für  $t \in [0, 1], 0 < |h| \leq \frac{1}{n}$  gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_m(t+h) - x_m(t)}{h} \right| &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} \left| \frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} \right| - \underbrace{\left| \frac{p(t+h) - p(t)}{h} \right|}_{\leq \|p'\|_\infty \text{ nach MWS}} \\ &\Rightarrow \sup_{0 < |h| \leq \frac{1}{n}} \left| \frac{x_m(t+h) - x_m(t)}{h} \right| \geq m - \|p'\|_\infty \stackrel{\text{nach Wahl von } m}{\geq} n \end{aligned}$$

Damit ist  $x_m \in E_n$  und sogar  $x_m \in E_n \cap V$

$$\Rightarrow E_n \cap V \neq \emptyset \Rightarrow E_n \text{ dicht.}$$

□

**Satz 9.5 (Banach-Steinhaus)**

Sei  $X$  ein Banachraum,  $Y$  ein normierter Raum,  $I$  eine Indexmenge und  $(T_i)_i \in B(X, Y)$ .  
Falls:

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| = C(X) < \infty \quad \forall x \in X$$

Dann:

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| = \sup_{i \in I} \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_i x\| < \infty.$$

**Beweis**

Betrachte die Menge  $E_n := \{x \in X : \sup \|T_i x\| \leq n\}$ . Dann ist  $E_n$  abgeschlossen, denn  $E_n = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{x \in X : \|T_i x\| \leq n\}$ . Außerdem ist  $E_n$  symmetrisch, d.h.  $x \in E_n \iff -x \in E_n$  und konvex, denn für  $x_1, x_2 \in E_n$  gilt

$$\sup \|T_i \left( \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)\| \leq \frac{1}{2} \sup \|T_i x_1\| + \frac{1}{2} \sup \|T_i x_2\| \leq n \quad \text{also } \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in E_n$$

Es gilt  $X = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ , nach **Baire** existiert dann ein  $N \in \mathbb{N}$ ,  $x \in E_N$ ,  $\epsilon > 0$  mit  $K(x, \epsilon) \subset E_N \Rightarrow K(-x, \epsilon) \subseteq E_N$

Sei  $z \in X : \|z\| < \epsilon$ .  $z = \frac{1}{2}(x + z) + \frac{1}{2}(z - x) \in \frac{1}{2}E_N + \frac{1}{2}E_N \subseteq E_N$ .

$$\Rightarrow \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\|z\| \leq 1} \|T_i z\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\|z\| < \epsilon} \|T_i \frac{z}{\epsilon}\| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{z \in E_N} \frac{1}{\epsilon} \|T_i z\| \leq \frac{N}{\epsilon}$$

□

**Bemerkung 9.6**

- a) Aus  $C(X)$  kann man  $\sup_{i \in I} \|T_i\|$  nicht herleiten (Baire ist nicht konstruktiv).
- b) Die Vollständigkeit von  $X$  ist notwendig.

**Beispiel**

Sei  $F = \{(x_n)_n : x_n = 0 \text{ für alle, bis auf endlich viele } n\}$  mit  $\|(x_n)_n\|_p = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ .

Betrachte  $T_k(x_n)_n = kx_k$ , dann gilt  $\|T_k\| = k$  und  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\| = \infty$

Aber  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k(x_n)_n\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|kx_k\| < \infty$ , da  $\sup$  nur über endlich viele Werte genommen wird.

**Korollar 9.7**

Sei  $X$  ein Banachraum,  $Y$  normiert und  $(T_n)_n \subset B(X, Y)$  derart, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x =: y \text{ existiert für alle } x \in X$$

Dann ist  $T_x := y_x$  linear und  $T \in B(X, Y)$

**Beweis**

$T$  ist linear, da  $\lim$  und  $T_n$  jeweils linear sind.

$(T_n x)_n$  ist beschränkt  $\xrightarrow[\text{Steinhaus}]{\text{Banach-}}$   $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow T \in B(X, Y) \text{ mit } \|T\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|.$$

□

Frage:  $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$  in  $B(X, Y)$ ? Nein!

**Beispiel**

$X = Y = \ell^p$ ,  $T_k(x_n)_n = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots)$

$$\|T_k(x_n)_n - I(x_n)_n\| = \left( \sum_{n=k+q}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Identität ist punktwaiser Gw.})$$

Aber:  $\|T_k - I\| \geq \|(T_k - I) \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)}_{1 \text{ an } k+1\text{-ter Stelle}}\|_{\ell^p} = 1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

## 10 Satz von der offenen Abbildung

### Definition 10.1

Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt **offen**, wenn offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden.

### Lemma 10.2

Seien  $X, Y$  normiert und  $T : X \rightarrow Y$  ein linearer Operator.  
Dann sind äquivalent:

- a)  $T$  ist offen
- b)  $\exists \epsilon > 0 : K_Y(0, \epsilon) \subset T(K_X(0, 1))$

### Beweis

"  $\Rightarrow$  " :  $T(K_X(0, 1))$  ist offen und  $T(0) = 0$ .

"  $\Leftarrow$  " : Sei  $U \subset X$  offen,  $x \in U, \epsilon > 0 : K_X(x, \epsilon) \subset \overline{U}$ .

$$\Rightarrow T(K_X(x, \epsilon)) \subset T(y)$$

$$\Rightarrow T_X + \epsilon T(K_X(0, 1)) = Tx + T(K_X(0, \epsilon)) \subset T(U)$$

Nach b)  $\exists \delta > 0 : K_Y(0, \delta) \subset T(K_X(0, 1))$

$$\Rightarrow K_Y(Tx, \epsilon \delta) = Tx + \epsilon K_Y(0, \delta) \subset T(U)$$

$$\Rightarrow T(U) \text{ ist offen}$$

□

### Satz 10.3 (von der offenen Abbildung)

Seien  $X, Y$  Banachräume und  $T \in B(X, Y)$ .

Dann gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ offen}$$

### Beweis

"  $\Leftarrow$  " : Nach Lemma 10.2  $\exists \epsilon > 0 : K_Y(0, \epsilon) \subset T(K_X(0, 1))$

$$\Rightarrow K_Y(0, R) \subset T(K_X(0, \frac{R}{\epsilon})) \quad \forall R > 0$$

$$\Rightarrow Y \subset T(X)$$

"  $\Rightarrow$  " : Behauptung:  $\exists \epsilon > 0 : K_Y(0, \epsilon) \subseteq \overline{T(K_X(0, 1))}$ .

Beweis: Definiere  $E_n := \overline{T(K_X(0, n))}$ , dann ist  $E_n$  abgeschlossen, symmetrisch und konvex, da Kugeln um 0 symmetrisch und konvex sind und  $T$  linear ist.

Nach Voraussetzung ist  $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , mit Baire folgt  $\exists N \in \mathbb{N}, y \in E_N, \hat{\epsilon} > 0 : K(y, \hat{\epsilon}) \subseteq E_N$ .

Sei  $z \in Y$  mit  $\|z\| < \hat{\epsilon}$  und  $z = \frac{1}{2}(z + y) + \frac{1}{2}(z - y) \in E_N$

$$\Rightarrow K_Y(0, \hat{\epsilon}) \subseteq \overline{T(K_X(0, N))} \Rightarrow K_Y(0, \frac{\hat{\epsilon}}{N}) \subseteq \overline{T(K_X(0, 1))} \Rightarrow \text{Behauptung mit } \epsilon = \frac{\hat{\epsilon}}{N}$$

Behauptung:  $\exists \delta > 0 : K_Y(0, \delta) \subseteq T(K_X(0, 1))$

Beweis: Wenn  $\hat{y} \in K_Y(0, \epsilon)$  gibt es ein  $\hat{x} \in K_X(0, 1)$  mit  $\|\hat{y} - T\hat{x}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ .

Außerdem ist  $2(\hat{y} - T\hat{x}) \in K_Y(0, \epsilon)$ . Induktiv wählen wir auf diese Art zu  $y \in K_Y(0, \epsilon) : y_0 = y, y_{k+1} = 2(y_k - Tx_k)$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Es gilt  $(y_k) \subseteq K_Y(0, \epsilon)$  und  $(x_k) \subseteq K_X(0, 1)$ , damit folgt

$$T\left(\sum_{k=0}^N 2^{-k} x_k\right) = \sum_{k=0}^N 2^{-k} y_k - 2^{-(N+1)} y_{N+1} = y_0 2^0 - 2^{-(N+1)} y_{N+1} \quad (*)$$

Wegen  $\|\sum_{k=0}^N 2^{-k} x_k\| \leq \sum_{k=0}^N 2^{-k} \leq 2$  ist  $\left(\sum_{k=0}^N x_k\right)_N$  eine Cauchy-Folge mit Grenzwert

$$x \in K_X(0, 2) \subseteq X \xrightarrow{(*)} T(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} y - 2^{-(N+1)} y_{N+1} = y.$$

$$K_Y(0, \epsilon) \subseteq T(K_X(0, 2)) \Rightarrow K_Y\left(0, \frac{\epsilon}{2}\right) \subseteq T(K_X(0, 1)) \Rightarrow \text{Behauptung für } \delta = \frac{\epsilon}{2} \quad \square$$

#### Korollar 10.4

Seien  $X, Y$  Banachräume und  $T \in B(X, Y)$  bijektiv. Dann ist  $T^{-1} \in B(Y, X)$

#### Beweis

Nach 10.3 ist  $T$  offen, d.h. ist  $U \subset X$  offen, so ist auch  $T(U)$  offen in  $Y$ .

$$\Rightarrow T(U) = (T^{-1})^{-1}(U) \text{ offen}$$

$$\Rightarrow \text{Urbilder offener Mengen sind offen unter } T^{-1} \Rightarrow T^{-1} \text{ ist stetig}$$

Die Inverser linearer Operatoren ist bekanntlich linear.  $\square$

#### Korollar 10.5

Sei  $X$  ein Vektorraum, der mit  $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$  ausgestattet ein Banachraum wird.

Gibt es ein  $c > 0 : \|x\| \leq c \cdot \|x\|_1 \forall x \in X$ , dann sind die Normen äquivalent (d.h.  $\exists \hat{c}$  mit  $\hat{c} \cdot \|x\|_1 \leq \|x\| \forall x \in X$ ).

#### Beweis

Nach Voraussetzung ist  $I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$  beschränkt.

$$\xrightarrow{10.4} I : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1) \text{ beschränkt.} \quad \square$$

## 11 Projektionen

### Definition 11.1

Sei  $X$  ein Banachraum.  $P: X \rightarrow X$  heißt **Projektion**, wenn  $P$  linear und  $P^2 = P$  ist.

Frage: Wann ist  $P$  beschränkt?

### Beispiel 11.2

a)  $X = L^p(\mathbb{R})$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R} : \mu(\Omega) > 0, \mu(\mathbb{R} \setminus \Omega) > 0$

$$Pf := \mathbb{1}_\Omega f \Rightarrow P^2 f = \mathbb{1}_\Omega^2 f = \mathbb{1}_\Omega f = Pf$$

$$\|Pf\|_{L^p} = \left( \int |\mathbb{1}_\Omega|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p} \Rightarrow P \text{ ist beschränkt.}$$

b)  $X = L^p[0, 1]^2$ , mit  $1 \leq p < \infty$ ,  $Pf(x, y) := \int_0^1 f(s, y) ds$

$$\Rightarrow P^2 f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 f(s, y) ds dt = \int_0^1 f(s, y) ds = Pf(x, y)$$

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{L^p} &= \left( \int_0^1 \int_0^1 \left| \int_0^1 f(s, y) ds \right|^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(s, y)|^p ds \right)^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \left( \int_0^1 \int_0^1 |f(s, y)|^p ds dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{()^p \text{ konvex!}}{=} \|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

### Bemerkung 11.3

Sei  $X$  ein Vektorraum,  $M \subset X$  ein Untervektorraum. Es gibt nach dem Basisergänzungssatz eine lineare Projektion  $P: X \rightarrow X$ ,  $P(X) = M$

### Beweis

Sei  $(b_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $M$  und  $(b_j)_{j \in J}$  von  $X$ , mit  $I \subset J$ .

Nun existiert ein  $(\alpha_j(x))_j$ :

$$x = \sum_{j \in J} \alpha_j(x) b_j \text{ und höchstens endlich viele } \alpha_j(x) \neq 0.$$

$$P(x) := \sum_{i \in I} \alpha_i(x) b_i. \quad \square$$

### Erinnerung:

Sind  $X, Y$  Banachräume, dann ist auch  $X \oplus Y$  ein Banachraum mit  $\|(x, y)\|_{X \oplus Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$   
 $\forall x \in X, y \in Y$

### Satz 11.4

Sei  $X$  ein Banachraum,  $M \subset X$  ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Es gibt eine stetige Projektion  $P: X \rightarrow X$  mit  $P(X) = M$
- b) Es gibt einen abgeschlossenen Untervektorraum  $N \subset X : X = M \oplus N$ .
- c) Es gibt einen abgeschlossenen Untervektorraum  $N \subset X$  und  $J: M \oplus N \rightarrow X, J(x, y) = x + y$  ist ein Isomorphismus, insbesondere  $\exists c > 0 \forall x \in M, y \in N : c(\|x\| + \|y\|) \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Beweis**

a)  $\Rightarrow$  b) Definiere  $N = (I - P)(X)$ . Dann gilt

$$X = P(X) + (I - P)(X) \text{ und } P(X) \cap (I - P)(X) = \{0\}$$

$N$  ist abgeschlossen, dann  $N = \text{Kern } P = P^{-1}\{0\}$  und  $P$  ist stetig.

b)  $\Rightarrow$  c) Sei  $N$  wie in b).  $J: M \oplus N \rightarrow X, J(x, y) = x + y$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \|J(x, y)\| \quad \forall x \in M, y \in N \\ &\leq \|x\| + \|y\| \\ &= \|(x, y)\|_{M \oplus N} \end{aligned}$$

Außerdem ist  $J$  bijektiv, da  $X = M \oplus N \xrightarrow{10.5} J^{-1}$  stetig,  $\exists \hat{c} > 0 : \forall x \in M, y \in N$ :

$$\|x + y\| - \|(x, y)\| = \|J^{-1}(x + y)\| \leq \hat{c}\|x + y\|$$

c)  $\Rightarrow$  a) Definiere  $\hat{P}: M \oplus N \rightarrow M \oplus N, \hat{P}(x, y) = (x, 0)$

$$\Rightarrow \hat{P}(M \oplus N) = M \oplus \{0\}. \text{ Setze } P = J\hat{P}J^{-1} \quad (P \text{ ist Projektion!})$$

$$P(X) = M, \text{ denn } P(X) = J\hat{P}(M \oplus N) = J(M \oplus \{0\}) = M$$

□

**Vereinbarung:**

$M$  heißt komplementierter Raum,  $N = \text{Kern}(P)$  Komplementärraum.

**Beispiel**

a)  $X = L^p(\mathbb{R}) \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}, Pf = \mathbb{1}_\Omega f$

$$M = P(X) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ fast überall auf } \Omega^c\}$$

$$N = \text{Kern}(P) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ fast überall auf } \Omega\}$$

b)  $X = L^p([0, 1]^2) \quad Pf(x, y) = \int_0^1 f(s, y) ds$

$$M = \{f \in L^p([0, 1]^2), f \text{ konstant in 1. Komponente}\}$$

$$N = \{f \in L^p([0, 1]^2) : \int_0^1 f(s, y) ds = 0 \text{ fast überall, } y \in [0, 1]\}$$

(a)&b) Da  $P$  stetig ist, gilt:  $X = M \oplus N$ .



## 12 Abgeschlossene Operatoren

Sei  $X$  ein Banachraum,  $D(A)$  ein dichter Untervektorraum und  $A : D(A) \rightarrow X$  linear

### Erinnerung:

Gilt  $\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in D(A)$ , so lässt sich  $A$  zu einem beschränkten Operator fortsetzen  $A \in B(X)$

### Beispiel 12.1

a) Sei  $X = C[0, 1]$ ,  $D(A) = C^1([0, 1])$ ,  $Ax = x'$

Behauptung:  $A$  ist nicht beschränkt

$$\lambda > 0, x_\lambda(t) = e^{i\lambda t} \quad t \in [0, 1] \Rightarrow Ax_\lambda(t) = i\lambda e^{i\lambda t}$$

$$\Rightarrow \|x_\lambda\|_\infty = 1, \|Ax_\lambda\|_\infty = \lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow A \text{ ist nicht beschränkt auf } D(A).$$

b)  $X = L^p[0, 1]$ ,  $Bx(t) = \frac{1}{t}x(t)$ .

$$D(B) = \{x \in L^p([0, 1]) : \exists \epsilon(x), x = 0 \text{ fast überall auf } [0, \epsilon]\}$$

$$B \text{ bildet nach } X \text{ ab, denn } \|Bx\|_{L^p} = \left( \int_\epsilon^1 t^{-p} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\epsilon(x)} \|x\|_{L^p}$$

$$\text{z.B.: } x_\lambda = \mathbb{1}_{[\frac{1}{\lambda}, 1]} \Rightarrow \|x_\lambda\|_{L^p} = \left( \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 |x_\lambda(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 dt \right)^{\frac{1}{p}} < 1$$

$$\|Bx_\lambda\| = \left( \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 t^{-p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow B$  ist unbeschränkt auf  $D(B)$ .

Beobachtung:

- $A, B$  lassen sich nicht auf  $X$  fortsetzen
- Es gibt viele Möglichkeiten  $D(A), D(B)$  zu wählen;  $D(A) = C^\infty[0, 1]$  ist genauso möglich.

### Definition 12.2

Auf  $D(A)$  definieren wir die **Graphennorm**

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\| \quad \forall x \in D$$

Insbesondere:  $A : (D(A), \|\cdot\|_A) \rightarrow X$  stetig, denn  $\|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A$

### Satz 12.3

Es sind äquivalent

- $(D(A), \|\cdot\|_A)$  ist ein Banachraum
- $\text{graph}(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$  ist abgeschlossen
- Wenn  $(x_n)_n \subset D(A) : \begin{cases} x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x & \text{in } X \\ Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y & \text{in } X \end{cases}$ , so ist  $x \in D(A), Ax = y$

**Beweis**

a)  $\Rightarrow$  b)  $J : D(A) \rightarrow X \times X, J(x) = (x, Ax)$ . Dann gilt

$$\|(x, Ax)\|_{X \times X} = \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A \Rightarrow J \text{ ist Isometrie (erhält Vollständigkeit)}$$

$\Rightarrow \text{graph}(A) = \text{Bild}(J)$  ist vollständig  $\Rightarrow \text{graph}(A)$  ist abgeschlossen.

b)  $\Rightarrow$  c) Sei  $(x_n)_n \subset D(A)$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  und  $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$  in  $X$ .

$$\Rightarrow (x_n, Ax_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y) \text{ in } X \times X$$

$$\xrightarrow{A \text{ abg.}} (x, y) \in \text{graph}(A) \Rightarrow x \in D(A), Ax = y.$$

c)  $\Rightarrow$  a) Sei  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $D(A)$ . Es folgt, dass  $(x_n)_n$  und  $(Ax_n)_n$  auch Cauchy-Folgen in  $X$  sind.

Da  $X$  vollständig ist folgt, dass  $\exists x, y \in X$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  und  $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$

$$\stackrel{c)}{\Rightarrow} x \in D(A) \text{ und } Ax = y \Rightarrow \|x_n - x\|_A = \|x - x_n\| + \|y - Ax_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

**Definition 12.4**

$A$  heißt abgeschlossen, wenn a) – c) aus 12.3 erfüllt sind

**Bemerkung 12.5 (Abgeschlossen vs. stetig)**

$$A \text{ stetig: } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow Ax \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y, Ax = y$$

$$A \text{ abgeschlossen: } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \Rightarrow Ax = y$$

**Satz 12.6 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**

Ist  $A$  abgeschlossen und  $D(A) = X$ , so ist  $A$  stetig auf  $X$ .

**Beweis**

$(X, \|\cdot\|_A)$  und  $(X, \|\cdot\|)$  sind Banachräume. Außerdem gilt  $\|x\|_X \leq \|x\|_A \forall x \in X$

$$\stackrel{10.5}{\Rightarrow} \exists c > 0 : \|x\|_A \leq c\|x\| \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \|x\| + \|Ax\| \leq c\|x\| \quad x \in X \Rightarrow \|Ax\| \leq c\|x\| \quad x \in X \Rightarrow A \text{ stetig.} \quad \square$$

**Beispiel 12.7**

a)  $X = C[0, 1], D(A) = C^1[0, 1], Ax = x'$

Behauptung:  $A$  ist abgeschlossen.

**Beweis**

$$\|x\|_A = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty = \|x\|_{C^1}$$

$$(D(A), \|\cdot\|_A) = (C^1[0, 1], \|\cdot\|_{C^1})$$

$$\Rightarrow D(A) \text{ ist vollständig.} \quad \square$$

b)  $X = L^p[0, 1]$ ,  $Ax(t) = \frac{1}{t}x(t)$ ,  $t \in [0, 1]$

$$D_1(A) = \{f \in L^p[0, 1] : \exists \epsilon > 0, f = 0 \text{ fast überall auf } [0, \epsilon]\}$$

$$D_2(A) = \{f \in L^p[0, 1] : t \rightarrow \frac{1}{t}f(t) \in L^p([0, 1])\}$$

Behauptung:  $A$  ist auf  $D_2$  abgeschlossen.

**Beweis (Beweisverfahren Klausurrelevant!)**

$(x_n)_n \subset D_2 : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  in  $L^p[0, 1]$  und  $Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$  in  $L^p[0, 1]$

$\Rightarrow \exists (x_{n_k})_k \subset D_2 : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$  fast überall und  $Ax_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$  fast überall.

$$\frac{1}{t}x(t) \leftarrow \frac{1}{t}x_{n_k}(t) = Ax_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y(t) \text{ fast überall für } t \in [0, 1]$$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{t}x(t)$  fast überall  $\Rightarrow Ax = y$ ,  $x \in D_2$

Behauptung:  $A$  ist nicht abgeschlossen auf  $D_1$

Beweis:  $x_n(t) = \begin{cases} t & \text{auf } (\frac{1}{n}, 1) \\ 0 & \text{auf } [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$ ,  $y(t) = 1, \forall t \in [0, 1] \Rightarrow x(t) = t, t \in [0, 1]$

Dann gilt:

$$\|x_n - x\|_{L^p} = \left( \int_0^{\frac{1}{n}} t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|Ax_n - y\|_{L^p} = \left( \int_0^{\frac{1}{n}} 1 dt \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Aber  $x \notin D_1 \Rightarrow A$  ist nicht abgeschlossen. □

## 13 Spektrum und Resolvente

Sei  $Y \supset D(A) \rightarrow X$  linear,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$(\lambda I - A)x = y \quad (*)$$

Problem: Gegeben  $y \in X$  finde  $x \in D(A)$  so, dass  $(*)$  erfüllt ist. Formel:  $x = (\lambda I - A)^{-1}$  ist Lösung, falls  $(\lambda I - A)^{-1}$  existiert.

### Definition 13.1

Sei  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{C}$ ,  $X \supset D(A) \rightarrow X$  linear und abgeschlossen.

a)  $\lambda \in \mathbb{C}$  gehört zur **Resolventenmenge** von  $A$ ,  $\lambda \in \rho(A)$ , falls

$$\lambda I - A: D(A) \rightarrow X \text{ bijektiv, d.h. } (\lambda I - A)^{-1}: X \rightarrow D(A) \text{ linear}$$

b)  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  heißt **Spektrum** von  $A$

c)  $\lambda \in \rho(A) \rightarrow R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$  heißt **Resolventenfunktion** von  $A$

### Erinnerung:

$A$  abgeschlossen  $\iff (x_n)_n \subset D(A) : \begin{cases} x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x & \text{in } X \\ Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y & \text{in } X \end{cases}$ , so ist  $x \in D(A)$ ,  $Ax = y$

### Bemerkung 13.2

$A$  ist abgeschlossen, falls  $\lambda \in \rho(A)$ , so ist  $R(\lambda, A) \in B(X)$  und  $R(\lambda, A): X \rightarrow (D(A), \|\cdot\|_A)$  ein Isomorphismus.

### Beweis

$(\lambda I - A): (D(A), \|\cdot\|_A) \rightarrow X$  ist bijektiv und stetig, denn  $\|(\lambda I - A)x\| \leq \max(1, |\lambda|)(\|x\| + \|Ax\|) = c\|x\|_A$

Nach dem **Satz der offenen Abbildung** ist

$$R(\lambda, A): X \rightarrow (D(A), \|\cdot\|_A)$$

ein Isomorphismus,  $X \xrightarrow{R(\lambda, A)} (D(A), \|\cdot\|_A) \subset X$ , also  $R(\lambda, A) \in B(X)$ . □

### Beispiel 13.3

a)  $X = \mathbb{C}^d, A \in B(X) \cong M(d, d)$

$$\sigma(A) = \{\lambda \text{ Eigenwerte von } A\}$$

b) Sei  $\alpha_n \in \mathbb{C}$ ,  $X = \ell^p, 1 \leq p < \infty, A(x_n) = (\alpha_n x_n), (x_n) \in D(A) = \{(x_n) : \sum_{n \geq 1} |\alpha_n x_n|^p < \infty\}$ .

Falls  $(\alpha_n)$  beschränkt ist, dann ist  $D(A) = \ell^p, A \in B(\ell^p)$ .

Für allgemeine  $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$  ist  $A$  nur abgeschlossen (Übung).

Dann ist  $\sigma(A) = \overline{\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}}^c$ , da  $A(e_n) - \alpha_n(e_n) = 0$  ( $e_n$  n-ter Einheitsvektor)

Beweis:  $(\lambda I - A)(x_n) = ((\lambda - \alpha_n)x_n)$

Formal:  $(\lambda I - A)^{-1}(x_n) = ((\lambda - \alpha_n)^{-1}x_n)$

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)^{-1}\| &= \sup_n |\lambda - \alpha_n|^{-1} = \frac{1}{d(\lambda, \overline{(\alpha_n)})} < \infty \iff d(\lambda, \overline{(\alpha_n)}) > 0 \\ &\iff \lambda \notin \overline{(\alpha_n)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda \in \rho(A) \iff \lambda \in \overline{\{\alpha_n\}}, \quad \lambda \in \sigma(A) \iff \lambda \in \overline{\{\alpha_n\}}$$

**Folgerung:** Jede abgeschlossene Menge  $S \subseteq \mathbb{C}$  kann das Spektrum eines abgeschlossenen Operators sein. Insbesondere:  $\sigma(A)$  kann überabzählbar sein. Das Spektrum  $\sigma(A)$  besteht im Allgemeinen nicht nur aus Eigenwerten.

**Beweis**

Gegeben  $M \subset \mathbb{C}$  abgeschlossen, wähle dichte Folge  $\alpha_n \in M$ , d.h.  $\{\alpha_n\} = M$

Wähle  $X = \ell^p$ ,  $A(x_n) = (\alpha_n x_n)$ ,  $\sigma(A) = \overline{\{\alpha_n\}} = M$ . □

Falls  $\lambda \in \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$  dann ist  $\lambda$  kein Eigenwert von  $A$ .

c) Sei  $X = \ell^p$ ,  $e_n$  Einheitsvektoren.

$$A(e_1) = 0, A(e_n) = e_{n-1}, n > 1 \Rightarrow A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_2, x_3, \dots)$$

$$B(e_n) = e_{n+1}, n \geq 1 \Rightarrow B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Übung:  $\sigma(A) = \sigma(B) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$

**Satz 13.4 (Resolventendarstellung)**

Sei  $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$  abgeschlossen,  $X$  ein Banachraum.

Für  $\lambda_0 \in \rho(A)$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$  ist auch

$$\lambda \in \rho(A) \text{ und } R(\lambda, A) = \sum_{n \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}.$$

Insbesondere ist  $\rho(A)$  offen und  $\sigma(A)$  abgeschlossen.

**Beweis**

$$\begin{aligned} (\lambda - A) &= (\lambda_0 - \lambda) + (\lambda_0 - A) = (\lambda_0 - A) [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A)] \\ &= (\lambda_0 - A)(I - S) \quad \text{mit } S = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, A) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|S\| \leq |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, A)\| \stackrel{\text{Vor.}}{<} 1$ . Nach dem **Satz über die Neumannsche Reihe**:  $(I - S)^{-1} = \sum_{n \geq 0} S^n$

Dann ist  $(\lambda - A)$  ein Produkt von invertierbaren Operatoren  $(\lambda_0 - A)$  und  $(I - S)$ , d.h.

$$\begin{aligned} (\lambda - A)^{-1} &= (I - S)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \underbrace{(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^n}_{=S^n} R(\lambda_0, A) \\ &= \sum_{n \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^{n+1} \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 13.5 (Resolventengleichung)**

Sei  $A$  ein abgeschlossener Operator auf  $X$ . Für  $\lambda, \mu \in \rho(A)$  gilt:

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

Insbesondere ist  $\lambda \in \rho(A) \rightarrow R(\lambda, A) \in B(X)$  eine komplex differenzierbare Abbildung und

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= R(\lambda, A) [I - (\lambda - A)R(\mu, A)] \\ &= R(\lambda, A) [\mu - A - \lambda + A] R(\mu, A) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Behauptung. (Idee:  $\frac{1}{\lambda-a} - \frac{1}{\mu-a} = \frac{\mu-\lambda}{(\lambda-a)(\mu-a)}$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R(\lambda, A) &= \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{R(\mu, A) - R(\lambda, A)}{\mu - \lambda} \\ &\stackrel{s.o.}{=} \lim_{\mu \rightarrow \lambda} [-R(\lambda, A)R(\mu, A)] \\ &= -R(\lambda, A)^2, \text{ denn } \lambda \in \rho(A) \rightarrow R(\lambda, A) \in B(X) \text{ ist stetig als Potenzreihe. } \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 13.6**

Falls  $A \in B(X)$ , dann ist  $\sigma(A)$  nichtleer und kompakt mit  $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|A\|\}$

$$\text{Für } \lambda > \|A\| \text{ gilt: } R(\lambda, A) = \sum_{n \geq 0} \lambda^{-n-1} A^n$$

**Beweis**

Für  $|\lambda| > \|A\|$  gilt:  $\lambda - A = \lambda[I - S]$  mit  $S = \frac{A}{\lambda}$ ,  $\|S\| \leq \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$  nach Voraussetzung.

Nach Neumann:

$$\begin{aligned} (I - S)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} S^n (\lambda - A)^{-1} \\ &= \lambda^{-1} [I - S]^{-1} \\ &= \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A}{\lambda} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n \end{aligned}$$

Also:  $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|A\|\}$ ,  $\sigma(A)$  beschränkt, abgeschlossen  $\Rightarrow \sigma(A)$  kompakt.

Wir müssen noch zeigen, dass  $\sigma(A) \neq \emptyset$ .

Nach **Bemerkung 8.7** gibt es in jedem Banachraum  $X$   $x \in X, x' \in X'$  mit  $x'(x) \neq 0$  (\*)

Indirekter Beweis für  $\sigma(A) \neq \emptyset$ .

Annahme  $\sigma(A) = \emptyset$  bzw.  $\rho(A) = \mathbb{C}$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \rightarrow r(\lambda) = x'[R(\lambda, A)x] \in \mathbb{C}$  mit  $x, x'$  wie in (\*).

$r(\lambda)$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$ , denn lokal gilt:

$$r(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \underbrace{x'[R(\lambda, A)x]}_{\in \mathbb{C}}, \quad |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|} \quad \text{13.4}$$

Wir definieren  $\Gamma = \{\lambda : |\lambda| = 2\|A\|\}$ .

Nach dem Cauchischen Integralsatz:  $0 = \int_{\Gamma} r(x) d\lambda$

$$\lambda \in \Gamma, |\lambda| > \|A\|, R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$$

$$\Rightarrow r(\lambda) = x'(R(\lambda, A)x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x'(A^n x)$$

Dann ist  $0 = \int_{\Gamma} r(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x'(A^n x) \right] d\lambda$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[ \int_{\Gamma} \lambda^{-n-1} d\lambda \right]}_{=0, \text{ für } n>0, =2\pi i, \text{ für } n=0} x'(A^n x)$$

$\Rightarrow \sigma(A) \neq \emptyset$ . □

### Bemerkung 13.7

Für  $X = L^p(\Omega)$  ist (\*) erfüllt.  $x \in L^p(\Omega), x \neq 0, x'(w) = |x(w)|^{p-1} \text{sign}(w), w \in \Omega$

Dann ist

$$x'(x) = \int |x(w)|^p dw \neq 0, x' \in L^{p'}, \int |x'|^{p'} dw = \int |x(w)|^{(p-1)p'} dw$$

Allgemein folgt (\*) aus dem **Satz von Hahn-Banach**.

### Definition 13.8

Für  $A \in B(X)$  heißt  $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$  der **Spektralradius** von  $A$ .

### Satz 13.9

Für  $A \in B(X)$  ist  $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$

Hilfssatz: Ist  $a_n \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m, n, m \in \mathbb{N}$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n^{\frac{1}{n}}$

### Beweis

Beweis des Hilfssatzes:

Zu  $\epsilon > 0$  wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $(a_N)^{\frac{1}{N}} \leq a + \epsilon$ . Setze  $b = b(\epsilon) = \max\{a_1, \dots, a_N\}$ .

Jedes  $n \in \mathbb{N}$  lässt sich schreiben als  $n = k \cdot N + r, k \in \mathbb{N}, r \in \{1, \dots, N-1\}$ .

Damit folgt:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = a_{kN+r}^{\frac{1}{n}} \leq (a_N^k a_r)^{\frac{1}{n}} \leq (a + \epsilon)^{\frac{kN}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a + \epsilon)(a + \epsilon)^{-\frac{r}{n}} b^{\frac{1}{n}} < a + 2\epsilon \text{ für } n \text{ groß genug.}$$

Beweis von 13.9:  $a_n := \|A^n\|$  erfüllt

$$a_{n+m} = \|A^{n+m}\| = \|A^n A^m\| \leq \|A^n\| \cdot \|A^m\| = a_n \cdot a_m \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Nach 13.6 gilt für  $|\frac{1}{\lambda}| > \|A\|$  die Darstellung:  $R(\frac{1}{\lambda}, A) = \sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} A^n (*)$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert diese Reihe falls  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda^{n+1} A^n\|^{\frac{1}{n}}} = |\lambda| \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ , d.h.  $|\lambda| < \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \right]^{-1}$

$$\Rightarrow R(\frac{1}{\lambda}, A) \in B(X) \text{ für } |\frac{1}{\lambda}| > \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Also  $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}\}$ ,  $r(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$ .

Wie in der Funktionentheorie zeigt man, dass wegen  $(*)$   $R(\lambda, A)$  im größten Kreis, der zum Holomorphie-Gebiet von  $\frac{1}{\lambda} \in \rho(A) \rightarrow R(\frac{1}{\lambda}, A)$  gehört, dort als die Potenzreihe in  $(*)$  dargestellt werden kann.

Also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A)$  □

Im Allgemeinen gilt  $r(A) < \|A\|$ .

### Beispiel 13.10

Sei  $X = C[0, 1]$  und  $Q = \{(s, t) \in [0, 1]^2 : s \leq t\}$ , betrachte  $k : Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Wir definieren einen Volterraoperator  $V : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  durch

$$(Vx)(t) = \int_0^t k(t, s)x(s)ds, t \in [0, 1], x \in C[0, 1]$$

Behauptung:  $V \in B(C[0, 1])$ ,  $\|V\| = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t k(t, s)ds > 0$ ,  $r(V) = 0$ ,  $\sigma(V) = \{0\}$ , d.h.

$(\lambda - V)x = y$  ist für alle  $y \in C[0, 1]$ ,  $\lambda \neq 0$ , eine eindeutige Lösung  $x = (\lambda - V)^{-1}y \in C[0, 1]$

### Beweis

$$\|Vx\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t k(t, s)x(s)ds \leq \underbrace{\sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t k(t, s)ds}_{=:K} \|x\|_\infty \Rightarrow \|V\| \leq K$$

$$\|1\|_\infty = 1, \quad \|V1\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} \int_0^t k(t, s)ds \Rightarrow \|V\| = K$$

Wir müssen zeigen, dass  $r(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|V^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ .

$V^n$  hat die Form  $V^n x(t) = \int_0^t k^n(t, s)x(s)ds$ , mit

$$(V^{n+1}x)(t) = a$$

□



## 14 Das Spektrum kompakter Operatoren

Sei  $X$  ein Banachraum,  $T \in B(X)$ . Spezialfall:  $\dim X < \infty$

Grundlegende Aussagen zur Lösungstheorie linearer Gleichungen:

$$\lambda x - Tx = y \quad (*)$$

- i) Für ein festes  $\lambda \in \mathbb{C}$  hat  $(*)$  für  $y \in X$  eine (eindeutig bestimmte) Lösung genau dann, wenn  $\lambda x - Tx = 0$  nur die triviale Lösung hat (folgt aus der Dimensionsformel).
- ii) Bis auf endlich viele Eigenwerte  $\lambda \in \sigma(T)$  hat  $(*)$  stets eine eindeutig bestimmte Lösung.

**Idee:** Kompakte Operatoren lassen sich durch endlich dimensionale Operatoren "approximieren".

**Ziel:**

- **i)** bleibt richtig! (Variante der Fredholm Alternative)
- Die Ausnahmemenge in **ii)** besteht zwar nicht mehr nur aus endlich vielen Eigenwerten, aber höchstens eine Nullfolge von Eigenwerten der  $\{0\}$

### Satz 14.1

Sei  $X$  ein Banachraum,  $K \in K(X)$  (d.h.  $K \in B(X)$  kompakt bzw.  $K(U_X)$  ist relativ kompakt in  $X$ ), dann hat  $I - K$  ein abgeschlossenen Bildraum und

$$\dim \text{Kern}(I - K) = \text{codim}(I - K)(X) \left[ = \dim^X / (I - K)(X) \right] < \infty$$

Insbesondere:  $I - K$  injektiv  $\iff I - K$  surjektiv

### Beweis

Wir setzen weiter voraus, dass ein endlich dimensionaler Operator  $F \in B(X)$  existiert, mit  $\|K - F\| < 1$ . □

### Lemma 14.2

Zu jedem endlich dimensionalen  $F \in B(X)$  ( $\dim F(X) < \infty$ ) gibt es eine Zerlegung

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad \dim X_1 < \infty \quad \text{und} \quad F(X_1) \subset X_1, \quad F|_{X_0} = 0$$

### Beweis

Beweis des **Lemmas 14.2**:

Wähle  $Y \subseteq X$ ,  $\dim Y < \infty$  so, dass  $F(Y) = F(X)$ . Setze  $X_1 = Y + F(X)$ ,  $\dim(X_1) < \infty$

$\Rightarrow X = X_1 = \text{Kern}(F)$ , denn zu jedem  $x \in X$  gibt es ein  $y \in Y$  mit  $F(x) = F(y)$ , also  $x = y + z$  mit  $z = x - y$

also  $F(z) = F(x) - F(y) = 0$ , da  $X_1 \cap \text{Kern}(F)$  ein endlicher Teilraum von  $\text{Kern}(F)$  ist. Dann gibt es einen abgeschlossenen Teilraum  $X_0 \subset \text{Kern}(F)$  mit

$$\text{Kern}(F) = (X_1 \cap \text{Kern}(F)) \oplus X_0 \Rightarrow X = X_0 \oplus X_1, F(X_1) \subset F, \text{ da } F(X) = X_1.$$

Beweis von **Satz 14.1**:

- a) Sei  $K$  ein endlich dimensionaler Operator auf  $X \xrightarrow{14.2}$  Es existiert eine Zerlegung  $X = X_0 \oplus X_1$  mit  $X_0, X_1$  abgeschlossen und  $K(X_1) \subseteq X_1, K|_{X_0} \equiv 0, \dim(X_1) < \infty$ . Definiere  $K_1 := K|_{X_1}$ , nach der Dimensionsformel der Linearen Algebra gilt:

$$\dim(\text{Kern}(Id_{X_1} - K_1)) = \dim(X_1) - \dim(K_1(X_1)) = \text{codim}_{X_1}(K_1(X_1)) \quad (*)$$

Mit

- (1)  $\text{Kern}(Id_X - K) = \text{Kern}(Id_{X_1} - K_1)$ ,
- (2)  $\text{Bild}(Id_X - K) = \text{Bild}(Id_{X_1} - K_1) \oplus X_0$  und
- (3)  $\text{Bild}(Id_X - K)$  ist abgeschlossen in  $X$

folgt die Behauptung aus **(\*)**.

Zu (1): Schreibe  $x \in X$  als  $x = x_0 + x_1 \in X_0 \oplus X_1$

"  $\supseteq$  " Klar, da  $K_1 = K|_{X_1}$

"  $\subseteq$  "  $0 = (Id - K)x = (Id - K)x_1 + x_0 + \underbrace{Kx_0}_{=0} \Rightarrow x_0 = K_1x_1 - x_1 \in X_1 \cap X_0 = \{0\}$

$\Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow K_1x_1 - x_1 = 0$ , also  $x_1 \in \text{Kern}(Id - K_1) \Rightarrow \text{Kern}(Id - k) \subset \text{Kern}(Id - K_1)$

Zu (2):  $\text{Bild}(Id - K) \ni (Id - K)x = (Id - K)x_1 + x_0 - \underbrace{Kx_0}_{=0} \in \text{Bild}(Id - K_1) \oplus X_0$

Zu (3): Sei  $(x_n) \subseteq \text{Bild}(Id - K)$  mit  $x_n \rightarrow x \in X$ . Da  $\text{Bild}(Id - K) = \text{Bild}(Id_{X_1} - K_1) \oplus X_0$ , schreibe  $x_n = y_n + z_n$  mit  $z_n \in \text{Bild}(Id_{X_1} - K_1), y_n \in X_0$ .

Nach **Satz 11.4** gilt für  $z \in \text{Bild}(Id - K_1), y \in X_0$  für ein  $C \in \mathbb{R}$

$$\|z\| + \|y\| \geq \|z + y\| \geq \frac{1}{C} (\|z\| + \|y\|) \Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{C} (\|z_n - z_m\| + \|y_n - y_m\|)$$

$\Rightarrow (y_n), (z_n)$  sind Cauchy-Folgen.

Da  $(Id - K_1)(X)$  und  $X_0$  abgeschlossen sind, folgt  $y_n \rightarrow y \in X_0$  und  $z_n \rightarrow z \in \text{Bild}(Id - K_1) \Rightarrow x = z + y \in \text{Bild}(Id - K_1) \oplus X_0 = \text{Bild}(Id - K)$ .

- b) Sei  $F \in B(X)$  endlich dimensional mit  $\|K - F\| < 1$ .  $T := Id - k + F$  ist invertierbar nach dem **Satz über die Neumannsche Reihe**.

$$\Rightarrow Id - K = T - F = (Id - FT^{-1})T \text{ mit } FT^{-1} \text{ endlich dimensional.}$$

Da  $T$  invertierbar ist, gilt insbesondere

$$\text{Bild}(Id - K) = \text{Bild}(Id - FT^{-1}) \text{ und } \text{Kern}(Id - K) = T^{-1}(\text{Kern}(Id - FT^{-1}))$$

$$\Rightarrow \dim(Id - K) = \dim(\text{Kern}(Id - FT^{-1})) \text{ und } \text{codim}(\text{Bild}(Id - K)) = \text{codim}(\dim(Id - FT^{-1}))$$

Anwenden von **(a)** auf den endlich dimensionalen Operator  $FT^{-1}$  liefert die Behauptung.

□

**Satz 14.3**

Sei  $\dim X = \infty$ ,  $K \in B(X)$  kompakt, dann ist  $0 \in \sigma(K)$  und  $\sigma(K)$  ist endlich oder besteht aus einer Nullfolge.

Jedes  $\lambda \in \sigma(K)$ ,  $\lambda \neq 0$  ist ein Eigenwert mit endlich dimensionalem Eigenraum.

**Beweis**

Wäre  $0 \in \rho(K)$  dann wäre  $I = \underbrace{K}_{\text{kompakt}} \underbrace{K^{-1}}_{\text{beschr.}}$  kompakt.

$\Rightarrow$  Einheitskugel kompakt  $\xRightarrow{6.2} \dim X < \infty$ . Widerspruch.

$\Rightarrow 0 \in \sigma(K)$ .

Sei  $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ , dann gilt nach 14.1  $\dim \text{Kern}(I - \lambda^{-1}K) = \text{codim Bild}(I - \lambda^{-1}K)$  (\*)

Entweder ist  $I - \lambda^{-1}K$  nicht injektiv oder nicht surjektiv (da  $\lambda \in \sigma(K)$ ).

Nach (\*) ist in jedem Fall  $\text{Kern}(I - \lambda^{-1}K) \neq \{0\}$ , d.h. in jedem Fall ist  $\lambda$  ein Eigenwert mit endlich dimensionalem Eigenraum  $\text{Kern}(I - \lambda^{-1}K)$ .

Zu zeigen bleibt noch, dass für alle  $\epsilon > 0$  liegen in  $\{\lambda : |\lambda| \geq \epsilon\}$  höchstens endlich viele Spektralwerte.

Indirekter Beweis: Zu  $\epsilon > 0$  gibt es eine Folge von verschiedenen Eigenwerten  $(\lambda_n)$ , wobei  $|\lambda_n| \geq \epsilon$ , mit Eigenvektoren  $(u_n)$ .

Setze  $U_n = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$ ,  $U_{n-1} \subsetneq U_n$ , denn Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Nach dem Lemma von Riesz 6.3 gibt es Vektoren  $u_n \in U_n$  mit  $\|u_n\| = 1$ ,  $\|u_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ , für alle  $x \in U_{n-1}$ .

Sei  $m < n : Ku_n - Ku_m = \lambda_n(v_n - x)$  mit  $x = \lambda_n^{-1}(\lambda_n u_n - Ku_n + \underbrace{Ku_m}_{\in U_{m-1}, \text{ s.u.}})$

$K(U_n) \subset U_n$ , d.h.  $KU_m \in U_m \subset U_{n-1}$ ,  $m < n$

$u_n \in U_n$  kann man schreiben als  $u_n = \alpha u_n + y$ ,  $y \in U_{n-1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_n u_n - Ku_n &= \alpha u_n + \lambda_n y - K(\alpha u_n) - K(y) \\ &= \alpha \lambda_n u_n - \alpha \lambda_n u_n + \lambda_n y - K(y) \in U_{n-1} \end{aligned}$$

Also  $x \in U_{n-1}$ ,  $\|Ku_n - Ku_m\| = |\lambda_n| \underbrace{\|u_n - x\|}_{\geq \frac{1}{2}} \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m$

d.h.  $Ku_n$  hat keine Cauchy-Teilfolge, was ein Widerspruch ist zu  $K \in K(X)$ .  $\square$

**Beispiel 14.4**

a)  $X = \ell^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Gegeben  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $|\lambda_n| \rightarrow 0$  :

$$A(x_n) = (\lambda_n x_n) \text{ für } (x_n) \in \ell^p$$

Da  $|\lambda_n| \rightarrow 0$  gilt:  $A \in K(\ell^p)$  ( $A(U_{\ell^p})$  kompakt).

$\lambda_n$  Eigenwerte mit Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda_n = \text{span}\{e_m : \lambda = \lambda_m\}$  endlich dimensional

$0 \in \sigma(A)$ , aber kein Eigenwert, da  $A$  injektiv.

b) Sei  $X = C[0, 1]$ ,  $k : \{(s, t) \in [0, 1]^2 : s \leq t\} \rightarrow \mathbb{R}_+$  stetig.

**Volterraoperator:**  $Vx(t) = \int_0^t k(t, s)x(s)ds$  kompakt.

Nach 13.10  $\sigma(V) = \{0\}$ . Falls z.B.  $k(s, t) \equiv 1$  ist 0 kein Eigenwert, da

$$Vx(t) = \int_0^t x(s)ds = 0x(t)$$

$\Rightarrow x(t) = 0, t \in [0, 1]$ , d.h.  $V$  ist injektiv.

**Satz 14.5**

Sei  $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$  ein abgeschlossener, linearer Operator,  $\rho(A) \neq \emptyset$ ,  $(D(A), \|\cdot\|_A) \hookrightarrow X$  kompakt.

Dann besteht  $\sigma(A)$  aus endlich vielen Eigenwerten oder einer Folge von Eigenwerten mit  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  und die zugehörigen Eigenräume sind endlich dimensional.

**Beweis**

siehe Übung. □

# Operatoren auf Hilberträumen

## 15 Hilberträume

### Definition 15.1

Sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

heißt **Skalarprodukt**, falls für  $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

$$(S1) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$$

$$(S2) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

$$(S3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(S4) \quad \langle x, y \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

### Proposition 15.2

Sei  $X$  ein Vektor mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

a) Für  $x, y \in X$  gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

b)  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$  definiert eine Norm auf  $X$  Insbesondere:  $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

### Bemerkung

$$\langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (*)$$

### Beweis

a) Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle$$

Für  $\lambda := -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$  folgt:

$$0 \leq \langle x, y \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}$$

$$\iff 0 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \Rightarrow \text{Behauptung a)}$$

b)  $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$  folgt aus (S4)

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \stackrel{(S1), (S2)}{=} \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Damit ist auch (\*) gezeigt.

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &\stackrel{a)}{=} (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Die Dreiecksungleichung gilt für  $\|\cdot\|$ . □

### Bemerkung 15.3

Man kann aus der in b) definierten Norm das Skalarprodukt zurückgewinnen durch:

$$\text{Falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$\text{Falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

### Definition 15.4

Ein metrischer Raum  $(X, \|\cdot\|)$  heißt **Prä-Hilbertraum**, falls es ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $X \times X$  gibt mit

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Falls  $(X, \|\cdot\|)$  außerdem noch vollständig ist, dann heißt  $X$  ein **Hilbertraum**.

### Beispiel 15.5

a)  $\mathbb{C}$  mit  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$  für  $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{C}^n$

$$\|x\| = \left( \sum |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

b)  $X = \ell^2, x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \overline{y_i}, \quad \|x\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$X = \ell^p$  ist kein Hilbertraum für  $n \neq 2$  (Übung).

c)  $X = C(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(u) \overline{y(u)} du$$

Dann ist  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist ein Prä-Hilbertraum, aber nicht vollständig.  
 $(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist ein Hilbertraum, da vollständig.

### Bemerkung

$L^p(\Omega)$  ist kein Hilbertraum für  $n \neq 2$ .

**Satz 15.6**

Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  ist genau dann ein Prä-Hilbertraum, falls die sogenannte **Parallelogramm-Gleichung** gilt, d.h.

$$\forall x, y \in X : \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (P)$$

**Beweis**

Nehmen wir an  $(X, \|\cdot\|)$  sei ein Prä-Hilbertraum  $\Rightarrow$  (P) gilt (einfaches nachrechnen mit (\*)). Angenommen es gilt (P) und sei o.B.d.A  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (der Fall  $\mathbb{C}$  absolut analog)

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Überprüfe die Eigenschaften des Skalarproduktes:

i) Zu zeigen:  $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2) \quad (1)$$

$$\langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2) \quad (2)$$

Wir müssen also zeigen, dass (1) = (2).

Nach (P) folgt:

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2 + y\|^2 &= 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 - x_2 + y\|^2 \\ \|x_1 + x_2 + y\|^2 &= 2\|x_2 + y\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|-x_1 + x_2 + y\|^2 \end{aligned}$$

Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 = \|x_1 + y\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_2 + y\|^2 + \|x_1\|^2 - \frac{1}{2} (\|x_1 - x_2 + y\|^2 + \|-x_1 + x_2 + y\|^2)$$

Ersetze  $y$  durch  $(-y)$ :

$$\|x_1 + x_2 - y\|^2 = \|x_1 - y\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_2 - y\|^2 + \|x_1\|^2 - \frac{1}{2} (\|x_1 - x_2 - y\|^2 + \|-x_1 + x_2 - y\|^2)$$

Subtrahieren der letzten beiden Zeilen liefert damit:

$$\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 = \|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2$$

Dividieren durch 4 liefert gerade die Behauptung.

ii) klar, da  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , mit  $\langle x, x \rangle = \|x\|$ .

iii) Aussage  $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$  gilt falls  $\lambda \in \mathbb{N}$  (nach (S1))

Nach Definition okay für  $\lambda = 0, \lambda = -1$  und damit auch für  $\lambda \in \mathbb{Z}$  Für  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , setze  $\lambda = \frac{m}{n}$  mit  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$$n \langle \lambda x, y \rangle = \langle n \lambda x, y \rangle = \langle m x, y \rangle = m \langle x, y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \frac{m}{n} \langle x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{Q}$$

$\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \langle \lambda x, y \rangle, \lambda: \mathbb{R} \rightarrow \lambda \langle x, y \rangle$  sind stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , die auf dichten Teilmenge von  $\mathbb{Q}$  übereinstimmen.  $\square$

**Satz 15.7 (Beste Approximation)**

Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $K$  eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von  $X$ .

- a) Zu jedem  $x \in X$  gibt es genau ein  $y_0 \in K$  so, dass

$$\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in K\}$$

- b) Dieses  $y_0 \in K$  ist charakterisiert durch die Ungleichung

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0 \quad (w)$$

**Beweis**

- a) Da Aussage invariant ist gegenüber von Translationen ist, sei o.B.d.A.  $x = 0$  und  $0 \notin K$ .

Existenz: Setze  $d := \inf\{\|y\| : y \in K\}$

Wähle eine Folge  $y_n \in K$  mit  $\lim_n \|y_n\| = d$ ; wir wollen zeigen, dass dann  $(y_n)$  eine Cauchy-Folge in  $X$  ist.

Da  $K$  konvex ist, gilt  $\frac{y_n + y_m}{2} \in K : \|\frac{y_n + y_m}{2}\| \geq d$ . Mit (P) folgt:

$$d^2 \leq \left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|^2 \stackrel{(P)}{=} \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} d^2$$

Also  $\|y_n - y_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ , d.h.  $(y_n)$  ist eine Cauchy-Folge,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$  existiert in  $X$  und  $y_0 \in K$ , da  $K$  abgeschlossen ist.

Demnach  $y_0 \in K$ ,  $\|y_0\| = \lim_n \|y_n\| = d = \inf\{\|y\| : y \in K\}$ .

Eindeutigkeit: Seien  $y_1, y_2 \in K$ ,  $\|y_1\| = \|y_2\| = d$ ,  $y_1 \neq y_2$

Mit (P) gilt:

$$\left\| \frac{y_0 + y_1}{2} \right\|^2 < \left\| \frac{y_0 + y_1}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_0 - y_1}{2} \right\|^2 \stackrel{(P)}{=} \frac{1}{2}\|y_0\|^2 + \frac{1}{2}\|y_1\|^2 = d^2$$

Also  $\frac{y_0 + y_1}{2} \in K$  und  $\|\frac{y_0 + y_1}{2}\| < d$ , was ein Widerspruch zur Definition von  $D$  ist

**Vereinbarung:**

Das Element  $y_0 \in K$  im Satz heißt das **Element bester Approximation** von  $x$  zu  $K$ .

- b) Annahme:  $y_0 \in K$  erfüllt die Ungleichung.

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 \\ &= \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 + \underbrace{2 \operatorname{Re}\langle x - y_0, y_0 - y \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \|x - y_0\|^2 \end{aligned}$$

Also ist  $y_0$  das Element bester Approximation.



Sei umgekehrt  $y_0$  das Element bester Approximation und  $y \in K$ .  
 Für  $t \in (0, 1)$  setze  $K \ni y_t = (1 - t)y_0 + ty$ .

$$\begin{aligned}\|x - y_0\|^2 &\leq \|x - y_0\|^2 \\ &= \langle x - y_0 + t(y_0 - y), x - y_0 + t(y_0 - y) \rangle \\ &= \|x - y_0\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x - y_0, t(y_0 - y) \rangle + t^2\|y_0 - y\|^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{Re}\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq \frac{t}{2}\|y_0 - y\|^2$  für  $t \in (0, 1)$ . Für  $t \rightarrow 0$  folgt die Ungleichung.  $\square$

**Bemerkung 15.8 (Winkel zwischen Vektoren)**

Seien  $u, v \in H \setminus \{0\}$  und definiere entsprechend  $u_1 = \frac{u}{\|u\|}$ ,  $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ .

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \cdot \|v\|} = |\langle u_1, v_1 \rangle| = \cos(\alpha), \text{ wobei } \alpha \in [0, \pi) \text{ eindeutig gewählt.}$$

## 16 Orthogonalität und Orthonormalbasen

### Definition 16.1

Sei  $X$  ein Prähilbertraum

- a)  $x, y \in X$  heißen **orthogonal**, falls  $\langle x, y \rangle = 0$ . Schreibweise:  $x \perp y$
- b)  $A, B \subseteq X$  sind orthogonal, falls  $\langle x, y \rangle = 0$  für alle  $x \in A, y \in B$ . Schreibweise  $A \perp B$
- c) Sei  $A \subset X$ .  $A^\perp = \{y \in X : \langle y, x \rangle = 0 \ \forall x \in A\}$  ist das **orthogonale Komplement** von  $A$  in  $X$ .

### Bemerkung 16.2

- a)  $x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  (Pythagoras)
- b)  $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$
- c)  $A^\perp$  ist stets ein abgeschlossener Unterraum von  $X$
- d)  $A \subseteq (A^\perp)^\perp$ ,  $A^\perp = \overline{\text{span}(A)}^\perp$

### Satz 16.3 (Orthogonalzerlegung)

Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $U$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X$ .

$$\text{Dann gilt: } X = U \oplus U^\perp$$

### Beweis

Falls  $x \in U \cap U^\perp$ , dann  $x \perp x \Rightarrow x = 0$ . Sei  $x \in X$ , dazu gibt es ein Element bester Approximation  $x_1 \in U$ . Setze  $x_2 := x - x_1$ .

Zu zeigen ist  $x_2 \in U^\perp$

Nach (w) gilt für alle  $y \in U$ :  $\text{Re}\langle x_2, y - x_1 \rangle \leq 0 \Rightarrow \text{Re}\langle x_2, y \rangle \leq 0 \ \forall y \in U$ , denn mit  $y$  durchläuft auch  $y - x_1$  ganz  $U$

$\Rightarrow \langle x_2, y \rangle = 0 \ \forall y \in U$ , denn mit  $y$  durchläuft auch  $-y, iy$  und  $-iy$  ganz  $U \Rightarrow x_2 \in U^\perp$ .  $\square$

### Definition

Sei  $X$  ein Hilbertraum,  $U \subseteq X$  abgeschlossen und  $X = U \oplus U^\perp$ . Für  $X \ni x = x_1 + x_2$ , mit  $x_1 \in U, x_2 \in U^\perp$  definiere

$$P_U: X \rightarrow U, \quad Px = x_1$$

$P_U$  heißt **Orthogonalprojektion** von  $X$  auf  $U$ .

### Folgerung 16.4

Die Orthogonalprojektion hat folgende Eigenschaften:

- a) Bild  $P_U = U$ , Kern  $P_U = U^\perp$
- b)  $\|P_U\| = 1$ , denn  $\|x\|^2 = \|P_U x\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|P_U x\|^2$
- c)  $P_U + P_{U^\perp} = Id_X$

### Definition 16.5

Sei  $X$  ein Hilbertraum.

- Eine Folge  $(h_n) \subseteq X$  heißt **Orthogonalsystem**, falls  $h_n \perp h_m$  für  $m \neq n$ .
- $(h_n)$  heißt **Orthonormalsystem**, falls zusätzlich  $\|h_n\| = 1$  für alle  $n$  gilt.
- Ein Orthonormalsystem  $(h_n) \subseteq X$  heißt **Orthonormalbasis** von  $X$  falls  $\overline{\text{span}(h_n)} = X$ .

**Beispiel 16.6**

Sei  $X = \ell^p$ ,  $h_n = e_n = \text{Einheitsvektor}$ , also  $(h_n) = (\delta_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ .

Weiter sei  $x = (x_n) \in \ell^p$ , mit  $\langle x, e_n \rangle = x_n$ , also

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n \text{ und damit } \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Für  $y = (\beta_n) \in \ell^2$  gilt:  $\langle x, y \rangle = \sum_n x_n \overline{\beta_n} = \sum \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$ .

**Satz 16.7**

Sei  $(h_n)$  eine Orthonormalbasis. Für  $U = \overline{\text{span}(h_n)}$  gilt dann

$$P_U x = \sum_n \langle x, h_n \rangle h_n \quad \forall x \in X$$

Weiter ist  $\|P_U x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in X$  (Besselsche Ungleichung)

**Korollar 16.8**

Sei  $(h_n)$  eine Orthonormalbasis von  $X$ . Dann ist  $x = \sum_n \langle x, h_n \rangle h_n$ ,  $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n \rangle|^2$  (Parseval) und

$$\langle x, y \rangle = \sum_n \langle x, h_n \rangle \overline{\langle y, h_n \rangle}$$

**Beweis**

Beweis des **Korollars 16.8**:

$U = \overline{\text{span}(h_n)} = X$ , also  $P_U = Id_X$ . Für  $x, y \in X$ :  $\langle x, y \rangle = \langle \sum_n \langle x, h_n \rangle h_n, \sum_m \langle y, h_m \rangle h_m \rangle$ .

Beweis von **Satz 16.7**:

- a) Sei  $J$  eine endliche Indexmenge und  $(h_n)_{n \in J}$  gegeben. Für  $U := \overline{\text{span}(h_n)}$  nehme ein  $x \in X$  und setze  $y_0 = \sum_{n \in J} \langle x, h_n \rangle h_n$ ,  $y_1 := x - y_0$ .

Für  $j \in J$  gilt:

$$\langle y_1, h_j \rangle = \langle x, h_j \rangle - \sum_{n \in J} \langle x, h_n \rangle \langle h_n, h_j \rangle = 0$$

$$\Rightarrow y_1 \in U^\perp \Rightarrow x = y_0 + y_1 \text{ mit } y_0 \in U, y_1 \in U^\perp$$

$$\Rightarrow P_U x = y_0 = \sum_{j \in J} \langle x, h_j \rangle h_j$$

$$\sum_{j \in J} |\langle x, h_j \rangle|^2 = \sum_{j \in J} \|\langle x, h_j \rangle h_j\|^2 \stackrel{\text{Pyth.}}{=} \|\sum_{j \in J} \langle x, h_j \rangle h_j\|^2 = \|P_U x\|^2 \leq \|x\|^2$$

- b) Sei  $J = \mathbb{N}$ . Definiere  $J_m = \{1, \dots, m\}$ , daraus folgt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, h_j \rangle|^2 = \sup_m \sum_{j=1}^m |\langle x, h_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (+)$$

Sei  $U_m = \overline{\text{span}\{h_1, \dots, h_m\}}$ , dann

$$\|P_{U_n}x - P_{U_m}x\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^n \langle x, h_j \rangle h_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |\langle x, h_j \rangle|^2 \rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty \text{ wegen (+)}$$

Da  $X$  vollständig ist:  $\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, h_j \rangle h_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle x, h_j \rangle h_j$  existiert.

Setze  $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, h_j \rangle h_j$  und  $y_1 = x - y_0$ . Dann ist wie oben  $\langle y_1, h_j \rangle = 0 \forall j \in \mathbb{N}$ , also  $y_1 \in U^\perp \Rightarrow x = y_0 + y_1, P_U x = y_0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle x, h_j \rangle h_j$ .  $\square$

### Korollar 16.9

Ein Orthonormalsystem  $(h_n)_{n \in J}$  ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn  $\langle x, h_n \rangle = 0$  für alle  $n \in J$  bedeutet  $x = 0$ .

### Beweis

Ist  $\langle x, h_n \rangle = 0 \forall n \in J$  gilt aber:

$$x \in U^\perp = \{0\} \text{ mit } U = \overline{\text{span}(h_n)}.$$

Und somit ist  $U = (\{h_n\}^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = X$ .  $\square$

### Beispiel 16.10

Sei  $X = L^2(\Omega, \Sigma, P)$ , wobei  $(\Omega, \Sigma, P)$  ein W-Raum sei. Sei außerdem  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n U_j$  eine Partition von  $\Omega$  mit  $P(U_j) > 0$  und  $U_j \cap U_k = \emptyset$ .

Definiere  $h_j := \frac{1}{P(U_j)^{\frac{1}{2}}} \mathbb{1}_{U_j}$ , damit gilt:

$$\|h_j\|_{L^2} = 1 \quad \text{und} \quad h_j \perp h_i, \text{ da } U_i \cap U_j = \emptyset$$

$\Rightarrow \{h_j\}$  ist ein Orthonormalsystem in  $X$ . Nach 16.7:  $U = \overline{\text{span}\{\mathbb{1}_{U_j} : j = 1, \dots, n\}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_U x &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{P(U_j)^{\frac{1}{2}}} \int_{U_j} x(u) dP(u) \right) \left( \frac{1}{P(U_j)^{\frac{1}{2}}} \mathbb{1}_{U_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{P(U_j)} \int_{U_j} x dP \right) \mathbb{1}_{U_j} \\ &= \mathbb{E}[x|U_1, \dots, U_n] \text{ bedingte Erwartung.} \end{aligned}$$

### Beispiel 16.11

Sei  $X = L^2[-\pi, \pi], \mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Die Fourierreihe  $h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, t \in [-\pi, \pi]$  bildet eine Orthonormalbasis von  $L^2[-\pi, \pi]$ , denn

$$\|h_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1.$$

Für  $n \neq m$  gilt weiter

$$\langle h_n, h_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(n-m)} [e^{i(n-m)t}]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Dabei ist  $\mathbb{1}_{[0,a]}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$  für  $t \notin \{0, a\}$  ( $\Rightarrow$  konv in  $L^2$ ) wobei  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-ikr} dr = \frac{1}{2\pi k} (e^{-ika} - 1)$  für  $k \neq 0$  und  $c_0 = \frac{a}{2\pi}$ .

Da Linearkombinationen von  $\mathbb{1}_{[0,a]}, a \in (0, \pi]$  dicht in  $L^2[-\pi, \pi]$  liegen, folgt  $\overline{\text{span}(e^{in\cdot})} = L^2[-\pi, \pi]$ .

**Beispiel 16.12**

Sei  $S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}; n \in \mathbb{N}\}$  ist eine Orthonormalbasis von  $L^2[-\pi, \pi]$ .

**Beweis**

Zuerst benötigen wir folgende Identitäten

$$2 \cos(nx) \cos(mx) = \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)$$

$$2 \sin(nx) \sin(mx) = \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)$$

$$2 \cos(nx) \sin(mx) = \sin((n+m)x) - \sin((n-m)x)$$

$\Rightarrow$  Orthogonalität folgt durch Integration und Periodizität vom sin.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx$$

$\Rightarrow S$  ist ein Orthonormalsystem.

Die Vollständigkeit folgt wegen  $e^0 = 1, e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ . □

**Anwendung 16.13 (Gram-Schmidt-Verfahren)**

Sei  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und  $(y_n) \subset X$  linear unabhängig. Definiere

$$h_1 := \frac{y_1}{\|y_1\|}, U_1 = \text{span}\{h_1\} = \text{span}\{y_1\}$$

$$\hat{h}_2 := y_2 - P_{U_1} y_2 = y_2 - \langle y_2, h_1 \rangle h_1$$

$$\text{damit ist } \hat{h}_2 \perp U_1, \quad h_2 := \frac{\hat{h}_2}{\|\hat{h}_2\|}, \quad U_2 = \text{span}\{h_1, h_2\} = \text{span}\{y_1, y_2\}$$

...

Seien  $h_1, \dots, h_n$  gefunden mit  $\{h_1, \dots, h_n\}$  Orthonormalsystem und  $U_n = \text{span}\{h_1, \dots, h_n\} = \text{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ . Definiere dann:

$$\hat{h}_{n+1} := y_{n+1} - P_{U_n} y_{n+1} = y_{n+1} + \sum_{j=1}^n \langle y_{n+1}, h_j \rangle h_j, \quad h_{n+1} := \frac{\hat{h}_{n+1}}{\|\hat{h}_{n+1}\|}$$

Am Ende:  $\overline{\text{span}}\{h_j\} = \overline{\text{span}}\{y_j\}$

**Satz 16.14**

Jeder separable, unendlich dimensionale Hilbertraum  $X$  hat eine Orthonormalbasis  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Diese Orthonormalbasis definiert eine Isometrie

$$\phi: \ell^2 \rightarrow X, \phi((\alpha_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n h_n, \quad (\alpha_n) \in \ell^2$$

mit

- $\phi(e_j) = h_j$
- $\|\phi((\alpha_j))\|_X = \langle (\alpha_j), (\beta_j) \rangle_{\ell^2} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j \overline{\beta_j}$
- $\phi^{-1}: X \rightarrow \ell^2, \phi^{-1}(x) = (\langle x, h_j \rangle_X)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2$

**Beweis**

Es gibt eine Folge  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit  $\overline{\text{span}\{y_j\}} = X$  wobei  $(y_j)$  linear unabhängig sind. Auf  $(y_j)$  wende **16.13** an und erhalte eine Orthonormalbasis  $(h_j)$  mit

$$\overline{\text{span}(h_j)} = \overline{\text{span}(y_j)} = X.$$

Setze  $\phi((\alpha_j)) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j h_j$ , damit gilt  $\langle \phi((\alpha_j)), h_n \rangle = \langle \sum_j \alpha_j h_j, h_n \rangle = \alpha_n$  und weiter

$$\|\phi((\alpha_j))\|_X^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle \phi((\alpha_j)), h_k \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k|^2 = \|(\alpha_j)\|_{\ell^2}$$

$\phi$  ist somit eine Isometrie und ist surjektiv, da jedes  $x$  die Form

$$x = \sum_j \langle x, h_j \rangle h_j \text{ besitzt, also mit } \alpha_j = \langle x, h_j \rangle \in \ell^2 : \phi(\alpha_j) = \sum \alpha_j h_j = x.$$

□

## 17 Der Darstellungssatz von Riesz

Ziel: Sei  $X$  ein Hilbertraum,  $X' = \{x' : X \rightarrow \mathbb{K} : \text{linear stetig}\}$ ,  $X' \cong X$ .

### Bemerkung 17.1

Sei  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum.  $X \hookrightarrow X'$

Für jedes  $x \in X$  erhält man ein stetiges, lineares Funktional  $x' : X \rightarrow \mathbb{K}$  durch

$$x'(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{für } y \in X$$

mit  $\|x'\| = \sup\{x'(y) : \|y\| = 1\} = \|x\|_X$

### Beweis

$x'$  ist linear, da  $\langle \cdot, x \rangle$  linear ist und stetig da

$$|x'(y) - x'(y_n)| = \langle y - y_n, x \rangle \leq \|y - y_n\| \cdot \|x\|$$

Da  $y = \frac{x}{\|x\|} : \langle y, x \rangle = \frac{1}{\|x\|} \langle x, x \rangle = \|x\|$  folgt  $\|x'\|_{X'} = \|x\|_X$ . □

### Satz 17.2 (Riesz)

Zu jedem  $x' \in X'$  gibt es genau ein  $x \in X$  mit

$$x'(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{für } y \in X.$$

und  $\|x'\|_{X'} = \|x\|_X$ . Kurz:  $X' \cong X$ .

### Beweis

Sei  $x' \in X'$  gegeben. Setze  $U = \text{Kern}(x')$ , dann ist  $U$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X$

$$X = U \oplus U^\perp, \quad \dim(U^\perp) = 1 \quad (*)$$

Wähle  $x_0 \in U^\perp$ , mit  $x_0 \neq 0$ ,  $x'(x_0) = 1$ .

Jedes  $y \in X$  hat wegen (\*) die Form

$$y = u + \lambda x_0 \quad \text{mit } u \in U, \lambda \in \mathbb{K}$$

Dann ist  $x'(y) = \underbrace{x'(u)}_{=0} + \lambda \underbrace{x'(x_0)}_{=1} = \lambda$  und

$$\langle y, x_0 \rangle = \underbrace{\langle u, x_0 \rangle}_{=0} + \lambda \langle x_0, x_0 \rangle = \lambda \|x_0\|^2$$

Setze  $x := \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$ , dann folgt:

$$\langle y, x \rangle = \frac{1}{\|x_0\|^2} \langle y, x_0 \rangle = x'(y) \quad \text{mit } \textcolor{red}{+}.$$

Für die Eindeutigkeit seien  $x_1$  und  $x_2$  Elemente in  $X$  zugehörig zu gegebenem  $x' \in X'$ .

Dann gilt  $x'(y) = \langle y, x_1 \rangle = \langle y, x_2 \rangle$ , also  $0 = \langle y, x_1 \rangle - \langle y, x_2 \rangle = \langle y, x_1 - x_2 \rangle$ , also ist  $x_1 - x_2 \perp y$   $\forall y \in X$ , also  $x_1 - x_2 = 0$  bzw.  $x_1 = x_2$ .

Aus 17.1 folgt dann noch  $\|x'\|_X = \|x\|_X$ . □

**Bemerkung**

Damit gibt es eine bijektive Abbildung  $\Phi : X \rightarrow X'$  mit  $\langle \Phi x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  für  $y \in X$ ,  $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$ ,  $\Phi(\lambda x) = \overline{\lambda} \Phi(x)$  für  $x_1, x_2, x \in X$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $\|\Phi(x)\|_{X'} = \|x\|_X$ .  
 $\Rightarrow \Phi$  ist eine anti-lineare Isometrie von  $X$  auf  $X'$ . In diesem Sinne  $X \cong X'$ .

**Korollar 17.3**

Sei  $X$  ein Hilbertraum,  $M \subseteq X$  ein Untervektorraum und  $y' \in M'$ . Dann existiert ein  $x' \in X'$  mit  $x'|_M = y'$  und  $\|y'\| = \|x'\|$ .

**Beweis**

Sei  $P_M : X \rightarrow M$  die Orthogonalprojektion auf  $M$ . Setze  $x' = y' \circ P_M$ , dann gilt für  $y \in X$  bzw.  $y \in M$

$$\|x'(y)\| = \|y'(P_M y)\| \leq \|y'\| \cdot \|P_M y\| \leq \|y'\| \cdot \|y\|, \quad x'(y) = y'(P_M y) = y'(y), \text{ d.h. } x'|_M = y'$$

□



## 18 Schwache Konvergenz und Kompaktheit

### Definition 18.1

Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $x_n, x \in X$ . Wir sagen  $x_n$  **konvergiert schwach** gegen  $x$ , falls

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in X$$

Notation:  $x_n \xrightarrow{w} x$

### Bemerkung 18.2

Der schwache Limes ist eindeutig bestimmt und linear. Sei  $x_n \xrightarrow{w} x, x_n \xrightarrow{w} \hat{x}$

$$\Rightarrow \langle x - \hat{x}, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y \rangle) = 0 \quad \forall y \in X, \text{ insbesondere für } y = x - \hat{x}$$

### Proposition 18.3 (Vgl. von Norm- und schwacher Konvergenz)

a) Normenkonvergenz impliziert schwache Konvergenz

b)  $x_n \xrightarrow{w} x$ , dann  $\|x_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$

c) Falls  $x_n \xrightarrow{w} x$  und  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ , dann  $\|x - x_n\| \rightarrow 0$

### Beweis

a) Sei  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ . Dann gilt für  $y \in X$ :

$$|\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| \rightarrow 0$$

Umgekehrt:  $(h_j)$  Orthonormalsystem  $\Rightarrow h_j \xrightarrow{w} 0$ , aber  $\|h_j\| = 1 \not\rightarrow 0$

b) Sei  $x_n \xrightarrow{w} x \neq 0$ . Für  $y = \frac{x}{\|x\|}$  gilt:  $\|x_n\| \geq \langle x_n, \frac{x}{\|x\|} \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle \frac{1}{\|x\|} = \|x\|$

c) Sei  $x_n \xrightarrow{w} x$  und  $\|x_n\| \rightarrow \|x\| \Rightarrow \|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_n, x \rangle + \|x\|^2 \rightarrow 0 \quad \square$

### Proposition 18.4

Jede schwach konvergente Folge ist normbeschränkt

### Beweis

Sei  $x_n \xrightarrow{w} x$ . Setze  $l_n \in B(X, \mathbb{K}) = X' : l_n(y) := \langle y, x_n \rangle$ .

Für jedes  $y \in X$  gilt:

$$\|l_n(y)\| = |\langle y, x_n \rangle| \leq C y < \infty \quad \Rightarrow \quad \|x_n\| \stackrel{13.1}{=} \|l_n\|_{X'} < \infty \text{ nach Banach-Steinhaus.} \quad \square$$

### Beispiel 18.5

Sei  $X = \ell^2$ ,  $x_n = (a_{n,j})_j, x = (a_j)$ . Dann  $x_n \xrightarrow{w} x \iff a_{n,j}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

### Beweis

$a_{n,j} = \langle x_n, e_j \rangle \rightarrow \langle x, e_j \rangle = a_j$ . Umkehrung folgt aus 18.6.  $\square$

### Proposition 18.6

Sei  $X$  ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis  $(h_j)$ . Dann gilt  $x_n \xrightarrow{w} x \iff \langle x_n, h_j \rangle \rightarrow \langle x, h_j \rangle \forall j \in \mathbb{N}$

### Beweis

Die Hinrichtung folgt direkt. Betrachten wir also die Rückrichtung:

Nach 18.3:  $\exists c < \infty: \|x_n\|, \|x\| \leq c$ . Für beliebiges  $y \in X$  folgt

$$\begin{aligned} |\langle x_n - x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, h_j \rangle h_j \rangle| \\ &\leq \underbrace{\sum_{j=1}^N |\langle x_n - x, h_j \rangle \langle y, h_j \rangle|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|\langle x_n - x, \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle y, h_j \rangle h_j \rangle|}_{\leq \|x_n - x\| \cdot \underbrace{\|\sum_{j=N+1}^{\infty} \langle y, h_j \rangle h_j\|}_{\leq \epsilon \text{ für } N \text{ groß}}} \\ &\leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\leq 2\epsilon} \cdot \underbrace{\|\sum_{j=N+1}^{\infty} \langle y, h_j \rangle h_j\|}_{\leq \epsilon \text{ für } N \text{ groß}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{\text{span}}|\langle x_n - x, y \rangle| \leq \epsilon$  für  $N$  groß und  $\epsilon > 0$  beliebig. □

### Definition 18.7

Eine Teilmenge  $M$  eines Hilbertraums  $X$  heißt **relativ schwach kompakt**, falls jede Folge  $(x_n) \subseteq M$  eine schwach konvergente Teilmenge besitzt.

### Satz 18.8

Eine beschränkte Teilmenge eines Hilbertraums ist relativ schwach kompakt.

### Beweis

Sei  $(x_n) \subseteq M \Rightarrow \|x_n\| \leq C$ . Definiere  $X_0 := \overline{\text{span}}(x_n) \subseteq X$  als separablen Hilbertraum mit Orthonormalbasis  $(h_j)$ .

$\sup |\langle x_n, h_j \rangle| \leq c \Rightarrow \langle x_n, h_j \rangle \in \mathbb{K}$  hat eine konvergente Teilfolge nach **Bolzano-Weierstrass**.

Mit Hilfe des Cantor'schen Diagonalverfahrens wähle eine Teilfolge  $M_{j+1} \subseteq M_j, |M_j| = \infty$  mit  $\lim_{n \in M_j} \langle x_n, h_j \rangle = \alpha_j$ . Wähle  $n_k \in M_k$  mit  $n_k \geq k$ .

Dann ist  $n_k \in M_j$  für  $k$  groß genug und  $n_k \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x_{n_k}, h_j \rangle = \alpha_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

Zu zeigen ist noch  $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j h_j \in X$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |\langle x_{n_k}, h_j \rangle|^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^N \langle x_{n_k}, h_j \rangle h_j \right\|^2 \\ &\stackrel{\text{Bessel}}{\leq} \lim_k \|x_{n_k}\|^2 \leq C^2 \quad \forall N \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Damit gilt  $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \leq C^2 < \infty$  und somit  $x \in X_0$ . □

## 19 Duale Operatoren auf Hilberträumen

Für  $X = \mathbb{C}^n$  mit euklidischem Skalarprodukt:

$A \in B(X)$ :  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ ,  $x, y \in X$ , wobei

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \quad A^* = (\overline{a_{ji}})_{i,j=1,\dots,n}$$

### Satz 19.1

Seien  $X, Y$  Hilberträume und  $T \in B(X, Y)$ . Dann gibt es genau ein  $T^* \in B(Y, X)$  mit

- $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x \in X, y \in Y$ ,
- $\|T^*\| = \|T\|$ ,
- $(T^*)^* = T$ .

### Beweis

Für  $y \in Y$  fest, setze  $l_y(y) := \langle Tx, y \rangle$  für alles  $x \in X \Rightarrow l_y \in X'$ , denn

$$|l_y(x)| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \text{ also } \|l_y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$$

Nach dem **Lemma von Riesz** gibt es ein  $z \in X$  mit

$$l_y(x) = \langle x, z \rangle \quad \text{und} \quad \|z\|_X = \|l_y\|_{X'}$$

Definiere  $T^*y := z$ , dann gilt:  $T^*: Y \rightarrow X$  ist linear und  $\langle x, T^*y \rangle = l_y(x) = \langle Tx, y \rangle$ .

Weiter ist

$$\|T^*y\| = \|z\| = \|l_y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|T^*\| \leq \|T\|.$$

Nach Definition ist

$$(T^*)^* = T \quad \Rightarrow \quad \|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$$

$$\Rightarrow \|T^*\| = \|T\|.$$

□

### Bemerkung 19.2 (Eigenschaften der Adjungierten)

Sei  $S, T \in B(X)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$

- a)  $(S + T)^* = T^* + S^*$
- b)  $(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*$
- c)  $(T \cdot S)^* = S^* T^*$
- d)  $\|S \cdot S^*\| = \|S\|^2 = \|S^* \cdot S\|$

### Beweis

$$\text{d) } \|S^*\| \leq \|S^*\| \cdot \|S\| = \|S\|^2$$

$$\begin{aligned} \|S\|^2 &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Sx\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Sx, Sx \rangle \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, S^* Sx \rangle \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \cdot \|S^* Sx\| = \|S^* S\| \end{aligned}$$

$$T = S^*: \|SS^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2 = \|S^*\|^2 = \|S\|^2$$

□

### Korollar 19.3

Für  $S \in B(X)$  gilt:

$$\text{Kern}(S) = (\text{Bild}(S^*))^\perp, \quad \text{Kern}(S^*) = (\text{Bild}(S))^\perp$$

### Beweis

Zuerst zeigen wir  $\text{Kern}(S) = (\text{Bild}(S^*))^\perp$ :

$$\begin{aligned} x \in \text{Kern } S &\iff Sx = 0 \iff \langle Sx, y \rangle = 0 \quad \forall y \in X \\ &\iff \langle x, S^*y \rangle = 0 \quad \forall y \in X \iff x \in (\text{Bild } S^*)^\perp \end{aligned}$$

Die zweite Aussage zeigt man analog. □

### Beispiel 19.4

Integraloperator: Sei  $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ,  $(T_k x)(u) = \int_\Omega k(u, v)x(v)dv$ ,  $T_k \in B(L^2(\Omega))$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle T_k x, y \rangle &= \int_\Omega \left( \int_\Omega k(u, v)x(v)dv \right) \overline{y(u)}du \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega x(v) \left( \int_\Omega k(u, v)\overline{y(u)}du \right) dv \\ &= \int_\Omega x(v) \left( \overline{\int_\Omega \overline{k(u, v)}y(u)du} \right) dv \\ &= \langle x, T_k^* y \rangle, \text{ wobei } T_k^* y(u) = \int_\Omega \overline{k(v, u)}y(v)dv \end{aligned}$$

Es gilt also:  $(T_k)^* = T_k^*$ ,  $k^*(u, v) = \overline{k(v, u)}$  (vgl.  $A = (a_{ij})$ ,  $A^* = \overline{(A^T)}$ )

### Definition 19.5

Sei  $T \in B(X, Y)$ ,  $X, Y$  Hilberträume

a)  $T$  heißt **unitär**, falls  $T$  invertierbar ist und  $T^{-1} = T^*$

$$\text{d.h. } T \text{ ist surjektiv und } \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^*Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in X$$

b) Sei  $X = Y$ .  $T$  ist **selbstadjungiert**, falls  $T^* = T$ , d.h.  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in X$

c) Sei  $X = Y$ .  $T \in B(X)$  heißt **normal**, falls  $T^*T = TT^*$ .

$$\text{d.h. } \langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in X$$

### Bemerkung

Unitäre und selbstadjungierte Operatoren sind normal.

### Beispiel 19.6

Seien  $X, Y$  Hilberträume und  $T \in B(X, Y)$ .

a) Integraloperator

$$T_k \text{ ist selbstadjungiert} \iff T_k^* = T_k \iff \overline{k(v, u)} = k(u, v) \iff k^* = k.$$

Falls  $k \in L^2([0, 1]^2)$ , so ist  $T_k$  kompakt und damit nicht unitär, da  $T_k$  keine Isometrie sein kann ( $\dim = \infty$ ).

b) Verschiebungsoperator auf  $X = \ell^2$

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (\alpha_2, \alpha_3, \dots), (\alpha_j) \in \ell^2 \Rightarrow T^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$$

$$\text{somit ist zwar } TT^* = Id, \text{ aber } T^*T(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$$

$$\Rightarrow T^*T = P_U \text{ mit } U = \{(\alpha_j) \in \ell^2 : \alpha_1 = 0\}.$$

c) Sei  $U \subset X$  ein Teilraum und  $P_U: X \rightarrow U$  die Orthogonalprojektion auf  $U$ .

$P_U$  ist selbstadjungiert.

$$\text{Für } x, y \in X \quad \exists x_1, y_1 \in U, x_2, y_2 \in U^\perp : x = x_1 + x_2 \text{ und } y = y_1 + y_2$$

$$\Rightarrow \langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle, \forall x, y \in X.$$

### Ziel in diesem Abschnitt:

Ist  $T \in B(X)$  normal und kompakt, so existiert eine Folge  $\lambda_n \in \mathbb{C}$  und ein Orthonormalsystem  $(h_n)$  so, dass

$$Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n \quad \forall x \in X$$

(vgl. Diagonalisierung von selbstadjungierten Matrizen)

### Satz 19.7

Sei  $X$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{C}$ .

$$T \in B(X) \text{ ist selbstadjungiert} \iff \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in X$$

### Beweis

$$" \Rightarrow ": \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} \in \mathbb{R}$$

$$" \Leftarrow ": \lambda \in \mathbb{C}, x, y \in X$$

$$\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle = \langle Tx, x \rangle + \bar{\lambda} \langle Ty, x \rangle + \lambda \langle y, Tx \rangle + |\lambda|^2 \langle Ty, Ty \rangle \quad (1)$$

Konjugieren dieser Gleichung liefert:

$$\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle = \langle Tx, x \rangle + \lambda \langle x, Ty \rangle + \bar{\lambda} \langle Tx, y \rangle + |\lambda|^2 \langle Ty, Ty \rangle \quad (2)$$

Bilde (1) – (2) für  $\lambda = 1$ :

$$\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle + \langle x, Ty \rangle \quad (3)$$

Bilde (1) – (2) für  $\lambda = i$ :

$$\langle Tx, y \rangle - \langle Ty, x \rangle = -\langle y, Tx \rangle + \langle x, Ty \rangle \quad (4)$$

und (3) + (4) liefert dann:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

□

**Proposition 19.8**

Für  $T \in B(X)$  selbstadjungiert, gilt:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$$

**Beweis**

"  $\geq$  ":  $|\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|Tx\| \leq \|T\|$ , falls  $\|x\| \leq 1$ .

"  $\leq$  ":  $M = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Tx, x \rangle$

Zu zeigen ist  $\|T\| \leq M$ :

Es gilt  $T^* = T$  und nach der Definition von  $M$

$$\begin{aligned} \langle T(x+y), (x+y) \rangle - \langle T(x-y), (x-y) \rangle &= 2\langle Tx, y \rangle + 2\underbrace{\langle Ty, x \rangle}_{=\langle y, Tx \rangle} \\ &= 2 \left( \langle Tx, y \rangle + \overline{\langle x, Ty \rangle} \right) \\ &= 4 \operatorname{Re}(\langle Tx, y \rangle) \end{aligned}$$

Also mittels der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned} |4 \cdot \operatorname{Re}\langle Tx, y \rangle| &\leq |\langle T(x+y), x+y \rangle| + |\langle T(x-y), x-y \rangle| \\ &\leq M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2 \\ &= M(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \end{aligned}$$

Für  $\|x\|, \|y\| \leq 1$  ist

$$|4 \operatorname{Re}\langle Tx, y \rangle| \leq 4M$$

Wähle  $\theta \in (-\pi, \pi]$ , für  $\|x\| \leq 1, \|e^{i\theta}y\| \leq 1$  gilt:

$$\begin{aligned} |\langle Tx, y \rangle| &= e^{i\theta} \operatorname{Re}\langle Tx, y \rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle Tx, e^{i\theta}y \rangle \\ &\leq M \end{aligned}$$

$$\sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} \langle Tx, y \rangle = \|T\| \leq M.$$

□

**Proposition 19.9**

Sei  $T \in B(X)$  normal

a)  $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|T\|$

b)  $\operatorname{Kern} T = \operatorname{Kern} T^*$

**Beweis**

a) Es gilt  $\|T\|^2 = \|T^2\|$  (\*), denn:

$$\begin{aligned} \|T^2\|^2 &\stackrel{19.2}{=} \|T^2 (T^2)^*\| = \|(T^2)^* = T^* T^* = (T^*)^2\| \\ &= \|(TT^*)(TT^*)^*\| \stackrel{19.2}{=} \|TT^*\|^2 \stackrel{19.2}{=} (\|T\|^2)^2 \end{aligned}$$

$T$  normal  $\Rightarrow T^2$  normal. Also  $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$ , wende (\*)  $k$ -mal an.

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|T\|^{2^k})^{\frac{1}{2^k}} = \|T\|$$

$$\text{b) } \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle = \langle x, TT^*x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle = \|T^*x\|^2$$

$$\Rightarrow Tx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T^*x = 0$$

□

**Lemma 19.10**

Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $T \in B(X)$  kompakt und normal, d.h.  $TT^* = T^*T$ . Dann gilt

1.  $Tx = \lambda x \iff T^*x = \bar{\lambda}x$
2.  $Tx = \lambda x, Ty = \mu y$  mit  $\mu \neq \lambda$  dann ist  $x \perp y$
3. Falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , dann gibt es ein  $\lambda \in \sigma(T)$  mit  $|\lambda| = \|T\|$
4. Falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , dann ist  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$  und  $\|T\| \in \sigma(T)$  oder  $-\|T\| \in \sigma(T)$

**Beweis**

$$\text{a) } Tx = \lambda x \iff x \in \text{Kern}(T - \lambda) \iff x \in \text{Kern}(T - \lambda)^* \stackrel{19.9}{\iff} x \in \text{Kern}(T^* - \bar{\lambda}) \iff T^*x = \bar{\lambda}x$$

$$\text{b) } \lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \bar{\mu}y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

- c) Nach 19.9a ist  $\text{span}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|T\|$   
 Wähle  $\lambda_j \in \sigma(T)$  mit  $|\lambda_j| \rightarrow \|T\|$ . Für eine Teilfolge  $(\lambda_n)$  von  $(\lambda_j)$  gilt:

$$\lambda_n \rightarrow \lambda, |\lambda_n| \rightarrow |\lambda| = \|T\|$$

Da  $\lambda_n \in \sigma(T)$  und  $\sigma(T)$  abgeschlossen folgt  $\lambda \in \sigma(T), |\lambda| = \|T\|$ .

- d)  $Tx = \lambda x, x \neq 0 : \lambda \langle x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$   
 $\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$   
 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : Nach Prop. 19.8 ist  $\|T\| = \sup\{\langle x, Tx \rangle : \|x\| \leq 1\}$ .  
 $\exists x_j, \|x_j\| = 1, |\langle Tx_j, x_j \rangle| \rightarrow \|T\|$ .  
 Wähle Teilfolge  $(x_n)$  von  $(x_j)$  so, dass

$$x := \lim_j \langle Tx_j, x_j \rangle, \quad y := \lim_n Tx_n$$

Da  $|x| = \lim_j |\langle Tx_j, x_j \rangle| = \|T\|$  ist:

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \lambda_n x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 - 2\langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda_n^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1} \\ &\rightarrow \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

Da  $y = \lim_n (\lambda_n x_n)$ :  $Ty = \lambda \lim Tx_n = \lambda y$ .  
 $\Rightarrow \lambda \in \sigma(T), \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = \|T\|$ .

□

**Satz 19.11 (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren)**

Sei  $X$  ein Hilbertraum,  $T \in B(X)$  kompakt und normal.

Dann gibt es eine Folge  $(\lambda_n) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , die entweder endlich oder eine Nullfolge und es gibt ein Orthonormalsystem  $(h_n)$  in  $X$ , das endlich ist, falls  $(\lambda_n)$  endlich ist, so dass

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n \quad \forall x \in X$$

Insbesondere:

- $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}$ ,  $Th_n = \lambda_n h_n$
- $X = (\text{Kern}(T)) \oplus \overline{\text{span}}\{h_n\}$ , orthogonale Komplement
- $\|T\| = \sup_n |\lambda_n|$

**Bemerkung**

Falls  $X$  separabel ist, so gibt es eine Orthonormalbasis  $(e_n)$  von  $X$ , die diese  $(h_n)$  und eine orthonormalbasis von  $\text{Kern}(T)$  so, dass

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

wobei  $\mu_n = 0$ , falls  $e_n \in \text{Kern}(T)$ ,  $\mu_n = \lambda_m$  falls  $e_n = h_m$ .

There was a drawing here

**Beweis**

Aus dem Kapitel über Spektraltheorie von kompakten Operatoren wissen wir  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  besteht aus endlich vielen oder einer Nullfolge von Eigenwerten  $(\nu_n)$  mit  $X_k = \text{Kern}(T - \nu_k Id)$ ,  $\dim X_k = d_k < \infty$ .

Sei  $(\lambda_n)$  eine Folge, die jeden Eigenwert  $\nu_k$  entsprechend seiner Vielfachheit  $d_k$  enthält:

$$\begin{aligned} (\lambda_n) &= (\underbrace{v_1, \dots, v_1}_{d_1\text{-mal}}, \underbrace{v_2, \dots, v_2}_{d_2\text{-mal}}, \underbrace{v_3, \dots, v_3}_{d_3\text{-mal}}, \dots) \\ (h_n) &= (e_1^1, \dots, e_{d_1}^1, e_1^2, \dots, e_{d_2}^2, e_1^3, \dots, e_{d_3}^3, \dots) \end{aligned}$$

Da für jedes  $k$   $(e_1^k, \dots, e_{d_k}^k)$  ein Orthonormalsystem von  $X_k$  ist und  $X_k \perp X_l$  für  $k \neq l$  nach 9.11b, ist  $(h_n)$  ein Orthonormalsystem in  $X$ .

Also:  $Th_n = \lambda_n h_n$  und  $h_n \perp \text{Kern}(T)$  nach 9.11b

Beh:  $X = \text{Kern}(T) \oplus X_0$ ,  $X_0 = \overline{\text{span}}(h_n)$ , denn daraus würde schon die Behauptung folgen:

Für alle  $x \in X$  ist  $x = y + \sum_n \langle x, h_n \rangle h_n$ , da  $(h_n)$  Orthonormalbasis von  $X_0$

$$\Rightarrow Tx = \underbrace{Ty}_{=0} + \sum_n \langle x, h_n \rangle \underbrace{(Th_n)}_{\lambda_n h_n} = \sum_n \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n.$$

Zu zeigen ist also  $X_0^\perp = \text{Kern}(T)$

Beweis: für  $x \in X_0^\perp$  ist  $Tx \in X_0^\perp$ , denn  $\langle Tx, h_n \rangle = \langle x, Th_n \rangle = \underbrace{\lambda \langle x, h_n \rangle}_{=0}, \quad \forall n$



Also  $T(X_0^\perp) \subset X_0^\perp$ , setze  $S = T|_{X_0^\perp} \in B(X_0^\perp)$  kompakt und normal. Nach 19.10c, d) gibt es einen Eigenwert  $\mu$  von  $S$  mit  $|\mu| = \|S\|$ .

$$\Rightarrow \text{Eig}(S - \mu) \subset X_0 \cap X_0^\perp = \{0\} \Rightarrow S = 0 \Rightarrow X_0^\perp \subset \text{Kern } S.$$

Andererseits:  $\text{Kern } T \perp X_k \Rightarrow \text{Kern } T \subset X_0^\perp \Rightarrow X_0^\perp = \text{Kern}(T)$ . □

# Dualität in Banachräumen

## 20 Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

### Motivation:

Don't have a proper drawing yet

### Definition 20.1

Sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Eine Abbildung  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **sublinear**, falls

1.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$
2.  $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in X, \lambda \geq 0$

### Satz 20.2 (Hahn-Banach für Vektorräume)

Sei  $X$  ein Vektorraum,  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  sublinear.

Zu jeder linearen Abbildung  $l: U \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $U \subset X$  Untervektorraum mit

$$\operatorname{Re} l(x) \leq p(x) \quad \forall x \in U$$

gibt es eine lineare Abbildung  $L: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$L|_U = l, \quad \operatorname{Re} L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

Es wird jedoch keine Eindeutigkeit behauptet.

### Beweis

1. Schritt: sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\dim X/U = 1$ . Wähle  $x_0 \in X/U$ ,  $x = \operatorname{span}(x) \oplus U$ , d.h. zu  $x \in X$  gibt es ein  $u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $x = u + \lambda x_0$

Für jedes  $r \in \mathbb{R}$  erhalten wir eine lineare Abbildung:

$$L_r: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_r(x) = l(u) + \lambda r, \quad L|_U = l$$

Zeige dass  $r$  so gewählt werden kann, dass für alle  $x \in X$  gilt  $L_r(x) \leq p(x)$  und

$$l(u) + \lambda r \leq p(u + \lambda x_0) \quad \forall u \in U, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Für  $\lambda > 0$  bedeutet (1):

$$\begin{aligned} r &\leq p\left(\frac{u}{\lambda} + x_0\right) - l\left(\frac{u}{\lambda}\right) \quad \forall u \in U \\ \iff r &\leq \inf\{p(v + x_0) - l(v) : v \in U\} \quad (2) \end{aligned}$$

Für  $\lambda < 0$  bedeutet (1):

$$\begin{aligned} -r &\leq p\left(\frac{u}{-\lambda} - x_0\right) - l\left(\frac{u}{-\lambda}\right) \quad \forall u \in U \\ \iff r &\geq \sup\{-p(w + x_0) + l(w) : w \in U\} \quad (3) \end{aligned}$$

Um (2) und (3) und damit (1) zu erfüllen, benötigt man

$$\begin{aligned} l(w) - p(w - x_0) &\leq p(v + x_0) - l(v) \quad \forall v, w \in U \\ \iff l(w) + l(v) &\leq p(v + x_0) + p(w - x_0) \quad u, v \in U \end{aligned}$$

Damit  $l(v) + l(w) = l(v + w) \leq p(v + w) \leq p(v) + p(w)$

Rückwärtsbetrachten liefert die erste Behauptung.

2. Schritt: sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $U$  allgemein mit  $U \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$  und  $\dim U_j / U_{j-1} = 1$

Da wir aber keine Topologie haben, können wir nicht annehmen, dass uns diese vollständige Induktion über z.B.  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$  eine in  $X$  dichte Menge liefert.  $\square$

# Anhang

## Wiederholungen

Zu jedem Kapitel eine kleine Wiederholung der einzelnen Sätze und dazu Beispiele:

*todo*

## Ergänzungen

Zur Vollständigkeit und solange dieses Skript in Arbeit ist, werden hier Definitionen und Sätze gelistet, auf die das Skript verweist, aber (noch) nicht eingeführt wurden.

### Definition

Ist  $V$  ein Vektorraum über einem beliebigen Körper und ist  $U$  ein Untervektorraum von  $V$ , dann wird die **Kodimension** von  $U$  in  $V$  durch

$$\operatorname{codim}(U, V) = \dim(V/U),$$

also als die Dimension des Faktorraums  $V/U$ , definiert.

### Bemerkung

Es gilt stets

$$\dim U + \operatorname{codim}(U, V) = \dim V.$$

Ist  $W$  ein Komplementärraum von  $U$  in  $V$ , d. h.  $U \oplus W = V$ , so ist

$$\operatorname{codim}(U, V) = \dim W.$$

Sind  $U_1, U_2 \subseteq V$  zwei Unterräume, so gilt stets

$$\operatorname{codim}(U_1 \cap U_2, V) \leq \operatorname{codim}(U_1, V) + \operatorname{codim}(U_2, V).$$

Sind  $U, W \subseteq V$  Unterräume, so gilt

$$\operatorname{codim}(U \cap W, W) = \operatorname{codim}(U, U + W) \leq \operatorname{codim}(U, V).$$

### Satz (Fubini)

Seien  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  und  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und  $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion, die bezüglich des Produktmaßes  $\mu_1 \otimes \mu_2$  integrierbar ist, d.h. es gelte

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$$

oder es gelte  $f \geq 0$  fast überall.

Dann ist für fast alle  $y$  die Funktion  $x \mapsto f(x, y)$  und für fast alle  $x$  die Funktion  $y \mapsto f(x, y)$  integrierbar bzw. nichtnegativ.

Man kann deshalb die durch Integration nach  $y$  beziehungsweise  $x$  definierten Funktionen

$$x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) \, d\mu_2(y)$$

$$y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) \, d\mu_1(x)$$

betrachten. Diese sind auch integrierbar bzw. nichtnegativ und es gilt

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) \, d\mu_1(x) \, d\mu_2(y) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) \, d\mu_2(y) \, d\mu_1(x).$$

**Satz (Lebesgue)**

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und sei  $(f_n)$  eine Folge von  $\mathcal{A}$ -messbaren Funktionen  $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Die Folge  $(f_n)$  konvergiere  $\mu$ -fast überall gegen eine  $\mathcal{A}$ -messbare Funktion  $f$ . Ferner werde die Folge  $(f_n)$  von einer  $\mu$ -integrierbaren Funktion  $g$  auf  $\Omega$  majorisiert, sprich für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelte  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -fast überall.

Beachte, dass bei der hiesigen Definition von Integrierbarkeit der Wert  $\infty$  ausgeschlossen ist, das heißt  $\int_{\Omega} |g| d\mu < \infty$ .

Dann ist  $f$  und alle  $f_n$   $\mu$ -integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0$$

Dies impliziert auch, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

gilt.

Dem Skript vorgreifend, aber da bereits darauf verwiesen wurde, hier der Satz von Hahn-Banach:

**Satz (Hahn-Banach)**

Es sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

Seien nun

- $Y \subseteq X$  ein linearer Unterraum;
- $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine sublineare Abbildung;
- $f: Y \rightarrow \mathbb{K}$  ein lineares Funktional, für das  $\operatorname{Re}(f(y)) \leq p(y)$  für alle  $y \in Y$  gilt.

Dann gibt es ein lineares Funktional  $F: X \rightarrow \mathbb{K}$ , so dass

$$F|_Y = f \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(F(x)) \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in X \text{ gilt.}$$

# Abkürzungsverzeichnis

**Beh.** Behauptung

**Bew.** Beweis

**bzgl.** bezüglich

**bzw.** beziehungsweise

**ca.** circa

**d. h.** das heißt

**Def.** Definition

**etc.** et cetera

**ex.** existieren

**Hom.** Homomorphismus

**i. A.** im Allgemeinen

**o. B. d. A.** ohne Beschränkung der Allgemeinheit

**Prop.** Proposition

**sog.** sogenannte

**Vor.** Voraussetzung

**vgl.** vergleiche

**z. B.** zum Beispiel

**zhgd.** zusammenhängend

**z. z.** zu zeigen

# Stichwortverzeichnis

- $\ell^\infty$ -Raum, 9
- $\ell^p$ -Raum, 9
- äquivalent, 7
- 1. Kategorie, 57
- 2. Kategorie, 57
- abgeschlossen, 21
- Abschluss, 23
- Approximationseigenschaft, 47
- approximative Eins, 52
- Arzelà-Ascoli, 42
- Baire, 56
- Banach-Steinhaus, 59
- Banachraum, 29
- Bedingter Erwartungsoperator, 49
- beschränkt, 12
- Besselsche Ungleichung, 83
- Beste Approximation, 80
- Bolzano-Weierstrass, 4
- $c_0$ -Raum, 9
- Cauchy-Folge, 29
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 77
- dicht, 24
- Differentialoperatoren, 15
- Dirichletproblem, 6
- diskrete Metrik, 20
- Dualraum, 17
- Einheitskugel, 7
- Element bester Approximation, 80
- Euklidische Norm, 7
- Faltung, 51
- Folgenraum, 9
- Fredholm'sche Integralgleichung, 5
- Fubini, 101
- Gram-Schmidt-Verfahren, 85
- Graphennorm, 65
- Hölder-Ungleichung, 9
- Hölderstetige Funktionen, 11
- Hahn-Banach, 102
- Hahn-Banach für Vektorräume, 98
- Hilbertraum, 78
- Innere, 23
- Integraloperator, 14
- Isometrie, 17
- isomorphe Einbettung, 17
- Isomorphismus, 17
- Kodimension, 101
- kompakt, 39
- kompakter Operator, 44
- Kompositionsoperator, 14
- konvergiert, 7
- konvergiert schwach, 89
- Lebesgue, 102
- Lebesgue-Integrierbare Funktionen, 11
- Lipschitz, 35
- Matrizenmultiplikation, 15
- Metrik, 20
- Minkowskii-Ungleichung, 9
- nirgends dicht, 57
- Norm, 7
- normal, 92
- offen, 21, 61
- orthogonal, 82
- orthogonale Komplement, 82
- Orthogonalprojektion, 82
- Orthogonalsystem, 83
- Orthogonalzerlegung, 82
- Orthonormalbasis, 83
- Orthonormalsystem, 83
- Parseval, 83
- Prä-Hilbertraum, 78
- Parallelogramm-Gleichung, 79
- Projektion, 63
- Pythagoras, 82



Quotientenräume, 10  
 Rand, 23  
 Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen, 10  
 Raum der differenzierbaren Funktionen, 10  
 Raum der stetigen Funktionen, 10  
 relativ abgeschlossen, 24  
 relativ kompakt, 39  
 relativ offen, 24  
 relativ schwach kompakt, 90  
 Resolventendarstellung, 69  
 Resolventenfunktion, 68  
 Resolventengleichung, 70  
 Resolventenmenge, 68  
 Riesz, 39, 87  
 Satz vom abgeschlossenen Graphen, 66  
 Satz von der offenen Abbildung, 61  
 selbstadjungiert, 92  
 separabel, 24  
 Skalarprodukt, 77  
 Spektralradius, 71  
 Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren, 96  
 Spektrum, 68  
 stetig, 26  
 stetige Einbettung, 17  
 stetige Fortsetzung, 52  
 Sturm-Liouville Problem, 6  
 sublinear, 98  
 umgekehrte Dreiecksungleichung, 7  
 unitär, 92  
 Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren, 13  
 Vervollständigung, 36  
 vollständig, 29  
 Volterraoperator, 75  
 Young, 51