I Lineare Operatoren auf Banachräumen

2. Normierte Räume

2.1 Def a) X ein VR über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abb $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ heißt Norm, falls $\forall x,y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bez $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ Einheitskugel

b) Eine Folge (x_n) des norm. Raumes X konvergiert gegen ein $x \in X$, falls $\|x - x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Bem Für $x,y \in (X, \|.\|)$ gilt die umgekehrte Dreiecksungl: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

2.2 Bsp $X = \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{K}$. $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, $\|x\|_\infty = \sup |x_j|$

2.3 Def Zwei Normen $\|.\|_1, \|.\|_2$ heißen äquivalent auf X, falls es $0 < m, M < \infty$ gibt, so dass

für alle $x \in X$ gilt: $m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$

2.4 Satz Auf einem endl dim VR (über einem vollst. Körper) sind alle Normen äquivalent

Bew Wähle eine alg Basis $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ von X, d.h. $\dim X = n < \infty$. Definiere eine neue

Norm $|||x||| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$, wobei $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. ZZ Die geg Norm $\|.\|$ ist äquiv zu $|||.|||$

(i) $\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} =: M \cdot |||x|||$

(ii) Benutze die Fkt $J : \mathbb{K}^n \to X$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Die Abb $y \in \mathbb{K}^n \mapsto \|Jy\|$ ist stetig

denn: $|||Jy||| = \|y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

und $|\|Jy\| - \|Jz\|| \leq \|Jy - Jz\| = \|J(y-z)\| \leq M\,|||J(y-z)||| = M\|y-z\|_2$ $\Rightarrow$ stetig

Sei $S = \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\|_2 = 1\}$. S ist abg. und beschr., $\|J\| : S \to (0, \infty)$ ist stetig.

Nach Ana I nimmt $y \in S \mapsto \|Jy\|$ sein Minimum in einem Punkt $y_0 \in S$ an. Setze

$m = \inf\{\|x\| : |||x||| = 1\} = \inf\{\|Jy\| : y \in S\} = \|Jy_0\| > 0$. Also $m \leq \|\frac{x}{|||x|||}\| \Rightarrow |||x||| \leq \frac{1}{m}\|x\|$

2.5 Prop Für zwei Normen $\|.\|_1, \|.\|_2$ auf X sind äquivalent:

a) $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ sind äquivalent

b) Für alle $(x_n) \subseteq X$, $x \in X$ gilt $\|x_n - x\|_1 \to 0 \iff \|x_n - x\|_2 \to 0$

c) Für alle $(x_n) \subseteq X$ gilt: $\|x_n\|_1 \to 0 \iff \|x_n\|_2 \to 0$

d) Es gibt Konst $0 < m, M < \infty$, so dass $m\,U_{(X,\|.\|_1)} \subseteq U_{(X,\|.\|_2)} \subseteq M\,U_{(X,\|.\|_1)}$

Bew „a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c)" ✓ „c) $\Rightarrow$ d)" Ann: Es gibt kein M mit $U_{(X,\|.\|_2)} \subseteq M\,U_{(X,\|.\|_1)}$

Dann gibt es eine Folge $x_n \in U_{(X,\|.\|_2)}$ mit $\|x_n\|_1 \geq n^2$. Setze $y_n = \frac{1}{n}x_n$. Dann $\|y_n\|_2 \to 0$

und $\|y_n\|_1 \to \infty$.

„d) $\Rightarrow$ a)" $U_{(X,\|.\|_2)} \subseteq M\,U_{(X,\|.\|_1)}$ $\Rightarrow$ $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2$

Bez $\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n = 0$ bis auf endl viele $n \in \mathbb{N}\}$

2.6 Bsp (Folgenräume) $\ell^p := \{x = (x_n) : \|x\|_p < \infty\}$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $\mathbb{F} \subseteq \ell^p$

$\ell^\infty = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty < \infty\}$, $\|x\|_\infty = \sup |x_n|$. $c_0 := \{x = (x_n) \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\} \supseteq \mathbb{F}$

Minkowski Ungl $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Höldersche Ungl $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

Bem Im unendl. dim Falle sind die Normen $\|.\|_p$ auf $\mathbb{F}$ nicht äquivalent

Bew Sei $p > q$. Setze $x_n = \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j \in \mathbb{F}$, $e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$

$\|x_n\|_p = \left(\sum_{j=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot (\ln 2)^{1/p} < \infty$ aber $\|x_n\|_q \to \infty$

2.7 Bsp a) Räume stetige Fkt : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f$ stetig$\}$, $\|f\| = \sup |f(u)|$

$\|f - f_n\|_\infty \to 0$ bedeutet die glm Konv von f_n gegen f auf Ω

b) Räume diff. Fkt : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x)$. Def : $C_b^m(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid D^\alpha f$ sind stetig, beschränkt auf $\Omega\}$

$\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$

Bem Auf $C_b^m([0,1])$ ist eine äquivalente Norm gegeben durch $\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$

denn : $f^{(i)}(t) = f^{(i)}(0) + \int_0^t f^{(i+1)}(s)\, ds$, $\|f^{(i)}\|_\infty \leq |f^{(i)}(0)| + \|f^{(i+1)}\|_\infty$

2.8 Bsp $X = C(\overline{\Omega})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt $\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

Beispiel: $f_k(t) = t^k$, $t \in [0,1]$, $\left(\int |f_k|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $p < \infty$, $\|f_k\|_\infty = 1$

2.9 Quotientenräume $(X, \|.\|)$ normierter Raum. $M \subseteq X$ abg, d.h. $x_n \in M$, $x \in X$ $\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in M$

$\overline{X} = X/_M$, $\overline{x} \in X/_M$ $\overline{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$. $\overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{x_1 + x_2}$, $\lambda\overline{x} = \overline{\lambda x}$ ist VR

$\|\overline{x}\|_{\overline{X}} = \inf\{\|y\|_X : y \in \overline{x}\}$. Beh $(\overline{X}, \|.\|_{\overline{X}})$ ist ein normierter Raum

Bew $\|\overline{x}\|_{\overline{X}} = 0 \Leftrightarrow \exists y_n \in \overline{x}$ mit $\|y_n\|_X \to 0$, $x - y_n \in M \Rightarrow x \in M$, $\overline{x} = 0$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle zu $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \overline{X}$ Elemente $y_1, y_2 \in M$ mit $\|\overline{x}_i\|_{\overline{X}} \geq \|x_i - y_i\|_X - \varepsilon$

$\|\overline{x_1 + x_2}\|_{\overline{X}} \leq \|x_1 + x_2 - y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \leq \|\overline{x}_1\| + \|\overline{x}_2\| + 2\varepsilon$

Bem Ist $\|.\|$ nur eine Halbnorm auf X so ist $M = \{x : \|x\| = 0\}$ ein abg. lin Teilraum von X

und der Quotientenraum $\overline{X} = X/_M$, $\|\overline{x}\|_{\overline{X}}$ ist ein norm Raum

Bsp a) (Hölderstetige Fkt) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1]$ $h_\alpha(f) = \sup \frac{\|f(u) - f(v)\|}{|u-v|^\alpha}$

$\{f : \Omega \to \mathbb{R} : h_\alpha(f) < \infty\} =: C^\alpha(\Omega)$. $h_\alpha(.)$ ist eine Halbnorm. $h_\alpha(f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv c$ konst.

$M = \operatorname{span}\{1_\Omega\}$. $X = C^\alpha/_M$ ist ein normierter Raum

b) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid |f|^p$ ist lebesgue-integrierbar auf $\Omega\}$

$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ ist eine Halbnorm. $\|f\|_p = 0 \iff f=0$ fast überall auf Ω

$M = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f = 0$ f.ü. auf $\Omega \}$. $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/M$ ist ein normierter Raum

III Beschränkte lineare Operatoren

1. Def Eine TM V eines norm. Raumes $(X, \|.\|)$ heißt beschr., falls $C = \sup \|x\| < \infty$

2. Bsp Eine konv. Folge $x_n \in X$, $x_n \to x$, ist beschränkt, denn $x_n \in \{y : \|x-y\| \le 1\}$ für fast alle n

3. Satz Seien X, Y norm. Räume. Für alle linearen Operatoren $T : X \to Y$ sind äquivalent:

a) T stetig, d.h. $x_n \to x$ impliziert $Tx_n \to Tx$ b) T stetig in 0

c) $T(U_X)$ ist beschr. in Y. d) Es gibt ein $C < \infty$ mit $\|Tx\| \le C\|x\|$

Bew „a ⇒ b" ✓, „b ⇒ c" Wäre c) falsch, dann gibt es $x_n \in U_X$ mit $\|Tx_n\| \ge n^2$. Setze $y_n = \frac{1}{n} x_n$

$\|y_n\| \le \frac{1}{n} \overbrace{\|x_n\|}^{\le 1} \to 0$, $\|T(y_n)\| = \frac{1}{n} \|T(x_n)\| \ge \frac{n^2}{n} = n \to \infty$

„c ⇒ d" Sei $T(U_X) \subset C \cdot U_Y$. Für $x \in X \setminus \{0\}$: $\frac{x}{\|x\|} \in U_X \Rightarrow T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in C U_Y$

$\Rightarrow \|T(\frac{x}{\|x\|})\|_Y \le C \Rightarrow \|Tx\|_Y \le C \|x\|_X$

„d ⇒ a" Für $x_n \to x$ in X folgt $\|Tx_n - Tx\| \overset{\text{lin}}{=} \|T(x_n - x)\| \overset{d}{\le} C \|x_n - x\| \to 0$, d.h. $Tx_n \to Tx$ in Y.

4. Def X, Y norm. Räume. $B(X,Y)$ bez. den VR der beschr. lin. Op. $T : X \to Y$

Für $X = Y$ schreiben wir auch $B(X,X) = B(X)$. Für $T \in B(X,Y)$ setze

$\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$. Die Norm $\|T\|$ von T ist die kleinste Konst. C mit $\|Tx\| \le C\|x\| \quad \forall x \in X$

5. Satz $(B(X,Y), \|.\|)$ ist ein normierter Raum und für $X = Y$ gilt für $S, T \in B(X)$: $\|S \circ T\| \le \|S\| \cdot \|T\|$

Bew $\|T\| \ge 0$, $\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\|_Y = 0$ für $\|x\| = 1 \Rightarrow Tx = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow T = 0$

$\|(T+S)(x)\|_Y = \|Tx + Sx\|_Y \le \|Tx\|_Y + \|Sx\|_Y \le \|T\| + \|S\|$ für $\|x\| = 1$. $\overset{\sup}{\Rightarrow} \|T+S\| \le \|T\| + \|S\|$

Für $X = Y$ und $x \in X$ gilt: $\|(S \circ T)(x)\|_X = \|S(T(x))\|_X \le \|S\| \cdot \|Tx\|_X \le \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X \Rightarrow \|S \circ T\| \le \|S\| \cdot \|T\|$

6. Bsp a) $\mathrm{Id}\, x = x$, $\|\mathrm{Id}\| = 1$

b) Falls $\dim X = n < \infty$, dann sind alle lin. Op $T : X \to Y$ beschränkt

Bew Sei $e_1, \dots, e_n$ Basis von X. Für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ gilt:

$\|Tx\| = \|\sum_{i=1}^n x_i Te_i\| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \|Te_i\| \le \max \|Te_i\| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| \le C \cdot \|x\|$, da $|||x||| = \sum_{i=1}^n |x_i| \sim \|x\|_X$

Aber Wenn $\dim X = \infty$, $\dim Y < \infty$, so gibt es viele unbeschr. lin Op $X \to Y$

c) $X = C^\infty([0,1])$, $\|f\|_\infty = \sup |f(t)|$. $T : \begin{cases} X \to X \\ f \mapsto f' \end{cases}$ $f_k(t) = e^{i 2\pi k t} \in X$

$T(f_k) = 2\pi i k f_k$. $\|f_k\| = 1$, $\|Tf_k\| = 2\pi k \to \infty$

d) $F = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n = 0$ bis auf endl. viele $n\}$ $T : \begin{cases} F \to \mathbb{R} \\ T((x_n)) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} n x_n \end{cases}$ $\|Te_n\| = n \to \infty$

7 Bsp (Integralop). $X = Y = C(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, besch., $k: \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Für $f \in C(\overline{\Omega})$ setze

$Tf(u) = \int_\Omega k(u,v) f(v)\, dv$. Dann ist $Tf \in C(\overline{\Omega})$ (nach Leb. konv. Satz)

$|Tf(u)| \leq \int_\Omega |k(u,v)| |f(v)|\, dv \leq \int_\Omega |k(u,v)|\, dv \cdot \sup |f(u)|$

$\overset{\sup}{\underset{\text{über } u}{\Rightarrow}}$ $\|Tf\|_\infty \leq \sup_{u \in \Omega} \int_\Omega |k(u,v)|\, dv \cdot \|f\|_\infty$, $\|T\| \leq \sup_{u\in\Omega} \int_\Omega |k(u,v)|\, dv < \infty$

Bew „$\leq$" klar „$\geq$" Falls $k(u,v) \geq 0$ dann $T1(u) = \int_\Omega k(u,v)\, dv = \int_\Omega |k(u,v)|\, dv$,

$\|T1\| = \sup_{u\in\Omega} \int_\Omega |k(u,v)|\, dv \leq \|T\|$, da $\|1\| = 1$

8 Bsp (Kompositionsop), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\sigma: \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ stetig. Setze für $f \in C(\overline{\Omega})$:

$Tf(u) = f(\sigma(u))$. $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $\|T\| = 1$

9 Bsp (Diffop): $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}$. $Tf(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(u) D^\alpha f(u)$, $Y = C(\Omega)$, $X = C^m(\Omega)$, $a_\alpha \in C(\Omega)$

$\|Tf\|_\infty \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \|a_\alpha\|_\infty \|D^\alpha f\|_\infty \leq C \cdot \|f\|_{C^m}$

10. Bsp $X = \ell^p$, $e_n = (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. $Te_j = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} e_i$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$: $\left(\sum_{i=1}^\infty |a_{ij}|^p\right)^{1/p} < \infty$

Dann gilt: $x = \sum_{j=1}^\infty x_j e_j$ mit $x_j \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p\right)^{1/p}$. $[Tx]_i := \sum_{j=1}^\infty a_{ij} x_j$ (*)

$\Rightarrow$ Für $A = (a_{kl})$ gilt $Tx = A \cdot x$ (unendl. Matrixprod.)

a) Die Hille - Tamarkin - Bedingung (nur hinreichend)

Sei $p \in (1,\infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ist $C := \left(\sum_{k\geq 1} \left(\sum_{l \geq 1} |a_{kl}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, so def. (*) einen

Operator $T \in B(\ell^p)$ mit $\|T\| \leq C$

Bew 1) Wohldef. (u. Beschr.): Für $x \in \ell^p$ folgt $\|Tx\|_{\ell^p}^p = \sum_{k\geq 1} |(Tx)_k|^p = \sum_{k\geq 1} \left|\sum_{l\geq 1} a_{kl} x_l\right|^p \leq$

$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{k\geq 1} \left(\sum_{l\geq 1} |a_{kl}|^q\right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{l\geq 1} |x_l|^p\right)^{\frac{p}{p}} = C^p \|x\|_{\ell^p}^p < \infty$ $\Rightarrow$ $T: \ell^p \to \ell^p$ ist wohldef. + beschr.

2) Linearität: Wegen $C < \infty$ ist $\left(\sum_{l\geq 1} |a_{kl}|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Für $x \in \ell^p$ konv. die Reihe $(Tx)_k$ nach Hölder.

Damit ist T offensichtlich linear. 1) und 2) $\Rightarrow$ Beh.

b) Der Fall ℓ^1: Es ist $T \in B(\ell^1) \Leftrightarrow C_1 := \sup_l \sum_k |a_{kl}| < \infty$, I.d.F. ist $\|T\| = C_1$

Bew „$\Rightarrow$" Sei $T \in B(\ell^1)$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$:

$\sum_k |a_{kl}| = \sum_k |(Te_l)_k| = \|Te_l\|_{\ell^1} \leq \|T\| \|e_l\|_{\ell^1} = \|T\| < \infty$ $\Rightarrow$ $C_1 \leq \|T\| < \infty$

„$\Leftarrow$" folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem $\|T\| \leq C_1$.

c) Der Fall ℓ^∞ Es ist $T \in B(\ell^\infty) \Leftrightarrow C_\infty := \sup_k \sum_l |a_{kl}| < \infty$. I.d.F. ist $\|T\| = C_\infty$

Bew „$\Rightarrow$" Sei $T \in B(\ell^\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Setze dann $x_l^{(k)} := \begin{cases} \frac{|a_{kl}|}{a_{kl}}, & a_{kl} \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $l \in \mathbb{N}$. Dann ist $x^{(k)} \in \ell^\infty$

mit $\|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} = 1$ und $\sum_l |a_{kl}| = \left|\sum_{l=1}^\infty a_{kl} x_l^{(k)}\right| = |(Tx^{(k)})_k| \leq \|Tx^{(k)}\|_\infty \leq \|T\| \|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} = \|T\|$

$\Rightarrow$ $C_\infty \leq \|T\|$ „$\Leftarrow$" folgt genau wie in a) mit Hölder. Außerdem $\|T\| \leq C_\infty$

d) Interpolation Ist $T \in B(\ell^1) \cap B(\ell^\infty) \Rightarrow T \in B(\ell^p)$ $\forall p \in (1,\infty)$ mit $\|T\|_{\ell^p \to \ell^p} \leq C_1^{\frac{1}{p}} C_\infty^{\frac{1}{q}}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

Bew Für $x \in \ell^p$ setzen wir $y_k := |(Tx)_k|^{p-1}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \|y\|_{\ell^q} = \Big(\sum_{k\geq 1} |(Tx)_k|^{(p-1)q}\Big)^{\frac{p-1}{q(p-1)}} = \|Tx\|_{\ell^p}^{p-1}. \text{ Damit folgt } \|Tx\|_{\ell^p}^p = \sum_{k\geq 1} y_k |(Tx)_k| \leq \sum_k \sum_l y_k \overbrace{|a_{kl}|}^{= |a_{kl}|^{\frac{1}{q}} \cdot |a_{kl}|^{\frac{1}{p}}} |x_l|$$

$$\overset{\text{Höld.}}{\leq} \Big(\sum_k \sum_l |a_{kl}|\, y_k^q\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_k \sum_l |a_{kl}|\, |x_l|^p\Big)^{1/p} \leq C_\infty^{\frac{1}{q}} \|y\|_{\ell^q} \cdot C_1^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\ell^p} = C_1^{\frac{1}{p}} C_\infty^{1/q} \|Tx\|_{\ell^p}^{p-1} \|x\|_{\ell^p}$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_{\ell^p} \leq C_1^{\frac{1}{p}} C_\infty^{\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell^p} \text{ und } \|T\| \leq C_1^{\frac{1}{p}} C_\infty^{\frac{1}{q}}$$

11. Definition Seien X, Y norm VR und $T: X \to Y$ linear

a) T heißt Isometrie, falls $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ $\forall x \in X$ (insb. ist dann T injektiv)

b) T heißt stetige Einbettung, falls T stetig und injektiv ist.

c) T heißt isomorphe Einbettung, falls T injektiv ist und ein $C>0$ ex. mit: $\frac{1}{C}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$

In diesem Fall identifizieren wir oft X mit dem Bild von T in Y, $X \cong T(X) \subseteq Y$

d) T heißt Isomorphismus, falls T bijektiv und stetig ist und $T^{-1}: Y \to X$ ebenfalls stetig ist

d.h. falls $C>0$ ex. mit $\frac{1}{C}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ $\forall x \in X$

In diesem Fall identifizieren wir $X \cong Y$ und sagen X und Y seien isomorph

12. Bsp a) Seien $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ norm. VR. Dann gilt $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \mathrm{Id}: (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ ist isom.

b) $i: c_0 \hookrightarrow \ell^\infty$ ist isometrische Einbettung

c) $i: \ell^p \hookrightarrow \ell^q$ für $p \leq q$ ist eine stetige Einbettung

13. Def Sei X ein norm VR. Der Raum $X' := B(X, \mathbb{K})$ heißt Dualraum von X

14. Bsp Sei $X = \ell^p$ für $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die Abb

$\Phi_p: \ell^q \to (\ell^p)'$, $[\Phi_p(x)](y) := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$, $x \in \ell^q$, $y \in \ell^p$ ist ein isometrischer Isomorphismus,

d.h. $(\ell^p)' \cong \ell^q$ (insb. $(\ell^2)' \cong \ell^2$)

Bew Nach Hölder konv die Reihe $[\Phi_p(x)](y)$ absolut mit $|[\Phi_p(x)](y)| \leq \sum_n |x_n y_n| \leq \|x\|_{\ell^q} \|y\|_{\ell^p}$

Da $\Phi_p(x)$ linear in y ist, folgt $\Phi_p(x) \in (\ell^p)'$ mit $\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \leq \|x\|_{\ell^q}$. Es bleibt zu zeigen, dass

$\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \geq \|x\|_{\ell^q}$ und Φ_p surj ist. Sei $y' \in (\ell^p)'$. Dann setze $x_n := y'(e_n)$, $n \in \mathbb{N}$ und $x = (x_n)$.

Setze außerdem $z_n := \begin{cases} \frac{|x_n|^q}{x_n}, & x_n \neq 0 \\ 0, & x_n = 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$\sum_{n=1}^N |x_n|^q = \sum_{n=1}^N x_n z_n = \sum_{n=1}^N y'(e_n) z_n = y'\Big(\sum_{n=1}^N z_n e_n\Big) \leq \|y'\|_{(\ell^p)'} \overbrace{\Big\|\sum_{n=1}^N z_n e_n\Big\|_{\ell^p}}^{= (\sum_{n=1}^N |x_n|^{(q-1)p})^{\frac{1}{p}} = (\sum_{n=1}^N |x_n|^q)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\Rightarrow \Big(\sum_{n=1}^N |x_n|^q\Big)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|y'\|_{(\ell^p)'} \overset{N\to\infty}{\Rightarrow} \|x\|_{\ell^q} \overset{(*)}{\leq} \|y'\|_{\ell^\infty} < \infty, \text{ d.h. } x \in \ell^q$$

Da für $y \in \ell^p$ $\|y - \sum_{n=1}^N y_n e_n\|_{\ell^p}^p = \sum_{n \geq N+1} |y_n|^p \to 0$ für $N \to \infty$ folgt

$$\Big|y'(y) - \sum_{n=1}^N y'(y_n e_n)\Big| \leq \|y'\|_{(\ell^p)'} \Big\|y - \sum_{n=1}^N y_n e_n\Big\|_{\ell^p} \to 0 \text{ für } N \to \infty \text{, und damit}$$

$[\Phi_p(x)](y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n = \sum_{n=1}^\infty y'(y_n e_n) = y'(y)$ $\forall y \in \ell^p$. d.h. $\Phi_p(x) = y'$ also ist Φ_p surjektiv

Außerdem gilt nach $(*)$: $\|\Phi_p(x)\|_{(\ell^p)'} \geq \|x\|_{\ell^q}$ $\Rightarrow$ Bch

Bemerkung a) analog zu oben zeigt man $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$, $(c_0)' \cong \ell^1$

b) Eine ähnliche Aussage gilt auch für L^p-Räume auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: Hier gilt:

$$L^p(\Omega,\mu)' \cong L^q(\Omega,\mu) \quad \text{wobei } p\in[1,\infty), \ \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1$$

bzgl. der Dualität $[\Phi_p(f)](g) = \langle f,g\rangle = \int_\Omega f(x) g(x)\, d\mu(x)$

15 Bsp a) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, $x\in K$. Dann def wir $\delta_x(f) := f(x)$ für $f\in C(K)$

Wir versehen $C(K)$ mit der Sup-Norm. Dann gilt: $|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ und offensichtlich ist δ_x linear, d.h. $\delta_x \in C(K)'$ mit $\|\delta_x\| \leq 1$

b) Sei $K\subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und μ ein endl. Maß auf $B(K)$. Dann def wir: $\delta_\mu(f) := \int_K f(x) d\mu(x)$, $f\in C(K)$

Dann gilt $|\delta_\mu(f)| \leq \mu(K)\|f\|_\infty$. Da δ_μ linear ist $\delta_\mu \in C(K)'$ mit $\|\delta_\mu\| \leq \mu(K)$. In diesem Sinne sind Maße Elemente von $C(K)'$

Bemerkung Man kann zeigen, dass $C(K)' \cong M(K)$, wobei die Menge $M(K)$ die Menge der „regulären Borelmaße" versehen mit der Variationsnorm bezeichnet. Die Dualität ist hier gegeben durch $(T\mu)(f) = \int_K f(x)\, d\mu(x)$

4. Metrische Räume

1. Def a) Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abb $d: M\times M \to \mathbb{R}$ heißt Metrik auf M, falls $\forall x,y,z\in M$:

(i) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Das Tupel (M,d) nennen wir dann einen metrischen Raum

b) Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq M$ konv gegen $x\in M$, falls $d(x_n,x)\to 0$ für $n\to\infty$. Notation $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (in M)

Bemerkung Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist stets eindeutig, denn:

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(y,x_n) \to 0 \quad n\to\infty, \text{ d.h. } d(x,y)=0 \text{ also } x=y$$

2. Bsp a) Sei X ein nVR und $\emptyset \neq M \subseteq X$. Dann def $d(x,y) := \|x-y\|$, $x,y\in M$ eine Metrik auf M

Ein Unterschied hier: Eine Norm setzt eine lin Struktur auf X voraus; eine Metrik macht auch Sinn auf nicht-leeren Teilmengen.

b) Sei M eine nichtleere Menge. Dann def wir die diskrete Metrik auf M durch $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x\neq y \\ 0, & x=y\end{cases}$

Dann ist (M,d) ein metr. Raum und $x_n \to x \Leftrightarrow \exists N\in\mathbb{N}: x_n = x \ \forall n\geq N$

3. Bsp a) Sei X ein VR und p_j, $j\in\mathbb{N}$, Halbnorm auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x\in X\setminus\{0\}$ ein $k\in\mathbb{N}$ ex. mit $p_k(x)>0$. Dann def $d(x,y) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)}$, $x,y\in X$ eine Metrik auf X mit $d(x_n,x)\to 0 \Leftrightarrow p_j(x_n-x) \to 0$ $(n\to\infty)$ $\forall j\in\mathbb{N}$

b) Für $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und $p_j(x) := |x_j|$, $j\in\mathbb{N}$ def also $d(x,y) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|}$ gerade die komponentenweise Konvergenz auf X

c) In ℓ^∞ entspricht die Konvergenz bzgl $\|.\|_{\ell^\infty}$ der glm Konvergenz der Folge

d) In $C[a,b]$ entspricht die Konv bzgl $\|.\|_\infty$ ebenfalls der glm. Konvergenz von Funktionen

4. Def Sei (M,d) ein metr. Raum.

a) Eine TM $A \subseteq M$ heißt abgeschlossen (in M), falls für alle in M konvergenten Folgen $(x_n) \subseteq A$ der Grenzwert von (x_n) in A liegt

b) Eine TM $U \subseteq M$ heißt offen (in M), falls zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ ex, sodass $\{y \in M : d(x,y) < \varepsilon\} \subseteq U$

5. Bemerkung a) Wir benutzen die Bezeichnungen für $x \in M$, $r > 0$

$$K(x,r) = \{y \in M : d(x,y) < r\} = \text{offene Kugel}, \quad \overline{K}(x,r) = \{y \in M : d(x,y) \le r\} = \text{abg. Kugel}$$

b) $\emptyset, M$ sind sowohl offen und abgeschlossen (in M)

c) Bezüglich der diskreten Metrik d ist $\{x\} \subseteq M$ offen für jedes $x \in M$

6. Prop Sei (M,d) ein metr. Raum und I eine bel. Indexmenge

a) $A \subset M$ ist abg in M $\iff$ $U = M \setminus A$ ist offen

b) Für eine bel Familie abg Mengen $(A_i)_{i \in I}$ sind $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ und $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n}$ abgeschlossen in M

c) Für eine bel Familie offener Mengen $(U_i)_{i \in I}$ sind $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_n}$ offen in M

7. Def Sei (M,d) ein metr. Raum und $V \subseteq M$. Dann heißt

a) $\overline{V} := \bigcap \{A \subseteq M : A \text{ ist abg mit } V \subseteq A\}$ der Abschluss von V

b) $\mathring{V} = \bigcup \{U \subseteq M : U \text{ ist offen mit } U \subseteq V\}$ das Innere von V

c) $\partial V := \overline{V} \setminus \mathring{V}$ der Rand von V

Hierfür gelten die folgenden Eigenschaften

8. Prop Sei (M,d) ein metr Raum

a) (i) $\overline{V}$ ist die kleinste abg Menge die V enthält

(ii) V ist abg $\iff$ $V = \overline{V}$ (iii) $\overline{V} = \{x \in M : \exists (x_n) \subseteq V \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$

b) (i) $\mathring{V}$ ist die größte offene TM von V

(ii) V ist offen $\iff$ $V = \mathring{V}$ (iii) $\mathring{V} = \{x \in M : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } K(x,\varepsilon) \subseteq V\}$

c) (i) ∂V ist abgeschlossen (ii) $\partial V = \{x \in M : \exists (x_n) \subset V, (y_n) \subseteq M \setminus V \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x\}$

9. Def Sei (M,d) ein metr Raum.

a) Eine Menge $V \subseteq M$ heißt dicht in M, falls $\overline{V} = M$

b) M heißt separabel, falls es eine abzählbare TM $V \subseteq M$ gibt, die dicht in M liegt

10. Bem a) All die Begriffe und Bezeichnungen aus Def 4.4, Bem 4.5, Def 4.7 und Def 4.9 werden wir auch in norm. Räumen benutzen bzgl der kanonischen Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$

b) Sei (M,d) ein metr. Raum, $U \subseteq M$. Dann ist auch (U,d) ein metr. Raum. Für $V \subseteq U$ muss man dann aber unterscheiden bez. Abgeschl. (bzw. Offenheit) von V in U oder in M. Man sagt dann, dass V relativ offen / abg in U ist

11. Bsp a) Sei X ein nVR, $x \in X$, $r > 0$. Dann gilt $\bar{K}(x,r) = \overline{K(x,r)}$, $\bar{K}(x,r)^\circ = K(x,r)$, $\partial \bar{K}(x,r) = \partial K(x,r)$

Bew (i) Da $\bar{K}(x,r)$ abg und $K(x,r) \subseteq \bar{K}(x,r)$ folgt $\overline{K(x,r)} \subseteq \bar{K}(x,r)$. Sei umgekehrt $y \in \bar{K}(x,r)$ und $y_n = y - \frac{1}{n}(y-x)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $y_n \in K(x,r)$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, d.h. $y \in \overline{K(x,r)}$ nach Prop 4.8 a)

(ii) Da $K(x,r)$ offen mit $K(x,r) \subseteq \bar{K}(x,r)$ folgt $K(x,r) \subseteq \bar{K}(x,r)^\circ$. Sei umgekehrt $y \in \bar{K}(x,r)^\circ$. Dann ex $\varepsilon > 0$ mit $K(y,\varepsilon) \subseteq \bar{K}(x,r)$. Ann $\|x-y\| = r$. Setze in diesem Fall $z := y + \frac{\varepsilon}{2r}(y-x)$. Dann $z \in K(y,\varepsilon)$, aber $z \notin \bar{K}(x,r)$ ↯. Also ist $\|x-y\| < r$, d.h. $y \in K(x,r)$

(iii) folgt aus 1) und 2)

b) Die Aussagen in a) sind i.A. falsch für metr. Räume: Sei $M \neq \emptyset$, $|M| \geq 2$ und d die diskrete Metrik. Dann gilt: $K(x,1) = \{x\}$, $\bar{K}(x,1) = M$, $\overline{K(x,1)} = \{x\}$ $\Rightarrow$ $\overline{K(x,1)} \subsetneq \bar{K}(x,1)$

c) Sei $X = C[0,1]$, ~~$t_0 \in [0,1]$~~ und $a,b > 0$ mit $a < b$. Dann ist die Menge $A = \{f \in X : f(t) \in (a,b)\}$ offen mit $\bar{A} = \{f \in X : f(t) \in [a,b]\}$ und $\partial A = \{f \in \bar{A} : \exists t \in [0,1] : f(t) \in \{a,b\}\}$ (bzgl $\|.\|_\infty$)

Bew (i) Sei $f \in A$ bel. Da f stetig auf $[0,1]$ ex $t_1, t_2 \in [0,1]$ mit $f(t_1) = \min f(t) =: c_1 > a$ und $f(t_2) = \max f(t) = c_2 < b$. Für $\varepsilon \in (0, \min\{c_1 - a, b - c_2\})$ gilt dann $K(f,\varepsilon) \subseteq A \Rightarrow A$ offen

(ii) Da Konv bzgl $\|.\|_\infty$ pktw Konv impliziert, folgt direkt $\bar{A} \subseteq \{f \in X : f(t_0) \in [a,b]\}$. Ist umgekehrt $f \in X$ mit $f(t_0) \in [a,b]$, so def wir $f_n(t) = \begin{cases} a + \frac{1}{n}, & f(t) \leq a + \frac{1}{n} \\ b - \frac{1}{n}, & f(t) \geq b - \frac{1}{n} \\ f(t), & \text{sonst} \end{cases}$ $\Rightarrow f_n \in A$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, d.h. $f \in \bar{A}$

d) Sei X ein nVR und $Y \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{\operatorname{lin} Y} = \overline{\operatorname{span} Y} = X$. Dann ist X separabel

Bew Wir def $\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} Y = \{y = \sum_{j=1}^{n} q_j y_j : q_j \in \mathbb{Q}, y_j \in Y, n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} Y$ abz, da Y abz. Sei nun $\varepsilon > 0$ bel, $x \in X$. Nach Vorr. ex dann ein $y \in \operatorname{lin} Y$ mit $\|x-y\| < \varepsilon$. Zu y finden wir ein $z \in \operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} Y$ mit $\|y-z\| < \varepsilon \Rightarrow \|x-z\| < 2\varepsilon$, d.h. $\overline{\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} Y} = X$

e) $C[0,1]$ ist separabel, da $\operatorname{lin}\{t^n, n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $C[0,1]$ ist nach Approx. satz von Weierstraß

f) Die Räume ℓ^p, $p \in [1,\infty)$ und c_0 sind separabel, da $D = \operatorname{lin}\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ dicht in allen liegt

g) Der Raum ℓ^∞ ist nicht separabel: Die Menge Ω der $\{0,1\}$-wertigen Folgen ist überabz.

Für $x,y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt $\|x-y\|_\infty = 1$. Ann: $\overline{\{v_k, k \in \mathbb{N}\}} = \ell^\infty$. Dann $\Omega \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K(v_k, \frac{1}{4})$.

Wegen $\|x-y\|_{\ell^\infty} = 1$ $\forall x,y \in \Omega$ kann aber in jeder Kugel $K(v_k, \frac{1}{4})$ nur ein Element aus Ω liegen.

$\Rightarrow$ Zu $x \in \Omega$ ex ein $k(x) \in \mathbb{N}$ mit $x \in K(v_{k(x)}, \frac{1}{4})$ $\Rightarrow$ die Abb $J: \Omega \to \mathbb{N}$, $x \mapsto k(x)$ ist

injektiv $\Rightarrow$ Ω abzählbar ↯

<u>12. Def</u> Seien (M, d_M) (N, d_N) metr. Räume. Eine Abb $f: M \to N$ heißt stetig in $x_0 \in M$ falls

für alle $(x_n) \subseteq M$ gilt: $x_n \to x_0$ in M $\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(x_0)$ in N $\quad (d_M(x_n, x_0) \to 0 \Rightarrow d_N(f(x_n), f(x_0)) \to 0)$

f heißt stetig auf M, falls f in jedem Punkt von M stetig ist

<u>13. Prop</u> Seien (K, d_K), (M, d_M) und (N, d_N) metr. Räume und $f: M \to N$, $g: K \to M$. Dann gilt

a) Ist g stetig in x_0, f stetig in $g(x_0)$, dann ist auch $f \circ g: K \to N$ stetig in x_0

b) f ist stetig in $x_0 \in M$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in M$ mit $d_M(x, x_0) < \delta$ folgt $d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent: (i) f ist stetig auf M

(ii) Ist $U \subseteq N$ offen, so ist auch $f^{-1}(U)$ offen in M

(iii) Ist $A \subseteq N$ abg, so ist auch $f^{-1}(A)$ abg in M

<u>Bew</u> c) „i) $\Rightarrow$ iii)". Sei $A \subseteq N$ abg und $(x_n) \subseteq f^{-1}(A)$ mit $x_n \to x$ in M für $n \to \infty$. Dann gilt nach (i):

$f(x_n) \to f(x)$ in N für $n \to \infty$. Da $(f(x_n))_{n \geq 1} \subseteq A$ und A abg ist, folgt $f(x) \in A$, d.h. $x \in f^{-1}(A)$

„iii) $\Rightarrow$ ii)". Sei $U \subseteq N$ offen $\Rightarrow$ U^c ist abg $\Rightarrow$ $f^{-1}(U^c) = f^{-1}(U)^c$ ist abg $\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$ ist offen

„ii) $\Rightarrow$ i)". Sei $x_0 \in M$ bel. Für $\varepsilon > 0$ ist nach (ii) dann auch $f^{-1}(K(f(x_0), \varepsilon))$ offen in M.

Da $x_0 \in f^{-1}(K(f(x_0), \varepsilon))$, ex ein $\delta > 0$ mit $K(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(K(f(x_0), \varepsilon))$ $\Rightarrow$ f stetig in x_0

<u>14. Bsp</u> a) Vorbemerkung: Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metr. Räume, so def wir für $x = (x_1, x_2)$, $y \in M_1 \times M_2$

$d(x, y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ eine Metrik auf $M_1 \times M_2$ mit $d(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow d_i(x_{n,i}, x_i) \to 0$, $i = 1,2$

In diesem Sinne ist jede Metrik $d: M \times M \to \mathbb{R}$ stetig. Denn: Sei $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $M \times M$, d.h.

$d(x_n, x) \to 0$ und $d(y_n, y) \to 0$.

$\Rightarrow$ $d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n)$

Analog $d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq \ldots \leq d(x, x_n) + d(y_n, y)$ $\Rightarrow$ $|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y_n, y) \to 0$

b) Sei X nVR und $A: \mathbb{K} \times X \to X$, $A(\alpha, x) = \alpha \cdot x$, $S: X \times X \to X$, $S(x, y) = x + y$

Dann sind A und S stetig

c) Sei $X = C[0,1]$ und $t_0 \in [0,1]$, $\varphi: X \to \mathbb{K}$, $\varphi(f) = f(t_0)$. Nach Bsp 3.15 ist φ stetig.

D.h. ist $A \subseteq \mathbb{K}$ offen (abg) dann ist auch $\varphi^{-1}(A) = \{f \in X \mid f(t_0) \in A\}$ offen (abg) nach Prop 4.15

5. Vollständigkeit

5.1 Def Sei (M,d) metr. Raum

a) $x_n \in M$ heißt CF, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$

b) (M,d) heißt vollständig, falls jede CF $(x_n) \subseteq M$ eine GW in M hat. Schreibe $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

c) $(X, \|\cdot\|)$ norm. Raum, der vollst. ist bzgl. $d(x,y) = \|x-y\|$ heißt Banachraum

5.2 Bem a) Jede konv. Folge in (M,d) ist CF:

Bew Sei $\lim x_n = x \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \to 0$

b) Nicht jede CF eines norm. Raumes X konvergiert in X

Bsp: $X = C[0,2]$, $\|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)|\,dt$, $f_n(t) := \begin{cases} t^n, & t \in [0,1] \\ 1, & t \in [1,2] \end{cases}$, $f_n(t) \to f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [0,1) \\ 1 & \text{für } t \in [1,2] \end{cases}$

$\|f_n - f\| \to 0$ aber $f \notin C[0,2]$

5.3 Prop X metr. Raum, Y Banach. $C_b(X,Y) = \{ f: X \to Y \text{ stetig, besch.} \}$ $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y$

Dann ist $C_b(X,Y)$ ein Banachraum. Bsp $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $C(\Omega, \mathbb{R})$

Bew Sei (f_n) CF in $C(X,Y)$. $\forall x \in X: \|f_n(x) - f_m(x)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_\infty \to 0$

$\Rightarrow \forall x \in X: (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine CF in $Y \overset{Y \text{ vollst.}}{\Rightarrow} f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ exist. in Y

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass $\forall x \in X: \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Für jedes $x \in X$ fest folgt

für $m \to \infty$: $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$ (nehme sup über $x \in X$)

$\Rightarrow f \in C(X,Y)$, da der glm. Limes stetiger Fkt stetig ist

5.4 Bsp $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen beschr. $C^1(\overline{\Omega})$ ist vollst. bzgl. sup. Norm $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial}{\partial x_i} f\|_\infty$

Bew Sei (f_j) CF in $C^1(\overline{\Omega}) \Rightarrow (f_j), (\frac{\partial}{\partial x_i} f_j)$ sind CF in $C(\overline{\Omega}) \overset{C(\overline{\Omega})}{\underset{\text{vollst.}}{\Rightarrow}}$ Es ex $\lim f_j = f$ und

$g_i = \lim \frac{\partial}{\partial x_i} f_j$ in $C(\overline{\Omega})$. Setze $g = (g_1, \dots, g_n)$. Zz $f \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\nabla f = g$

Zu $u \in \Omega$ und v nahe bei u wähle $u_t = (1-t)u + tv$

$$f_k(v) - f_k(u) - \nabla f_k(u) \cdot (v-u) = \int_0^1 (\nabla f_k(u_t) - \nabla f_k(u)) \cdot (v-u)\,dt$$

$$\overset{CSU}{\leq} \int_0^1 |\nabla f_k(u_t) - \nabla f_k(u)|\,dt \cdot |v-u|$$

$$\leq \left(\int_0^1 |\nabla f_k(u_t) - g(u_t)|\,dt + \int_0^1 |g(u_t) - g(u)|\,dt + \int_0^1 |g(u) - \nabla f_k(u)|\,dt \right) \cdot |v-u|$$

$$\leq \left(2\|\nabla f_k - g\| + \sup |g(u_t) - g(u)| \right) |v-u|$$

Für $k \to \infty$ folgt: $|f(v) - f(u) - g(u)(v-u)| \leq \sup |g(u_t) - g(u)|\, |v-u| \to 0$ für $v \to u$

5.5 Bem a) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ seien äquiv. Normen auf X. Ist X bzgl. $\|\cdot\|_1$ vollst, so auch bzgl. $\|\cdot\|_2$

Bsp $C^1[0,1]$, $|||f||| = |f(0)| + \sup |f'(t)|$. $|||\cdot||| \sim \|\cdot\|_\infty \Rightarrow (C^1[0,1], |||\cdot|||)$ vollst.

b) Abg. Teilmengen von Banachräumen sind vollst. metr. Räume bzgl. $d(x,y) = \|x-y\|$

5.6 Satz Sei X nVR, Y ein Banachraum. Dann ist $B(X,Y)$ mit der Operatorennorm vollständig.

Insbesondere: $X' = B(X,\mathbb{K})$ ist immer vollst.

Bew Sei $(T_n) \subseteq B(X,Y)$ eine CF bzgl Operatorennorm. Sei $x \in X$. Dann gilt

$\| T_n x - T_m x \|_Y \leq \| T_n - T_m \| \|x\|$. Also $(T_n x)$ CF in Y für alle $x \in X$. Def $Tx := \lim T_n x$

$T_n(x+y) = T_n(x) + T_n(y) \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} T(x+y) = T(x) + T(y) \Rightarrow T$ linear. Weiter gilt:

$\| Tx - T_n x \| = \lim\limits_{m\to\infty} \| T_m x - T_n x \| \leq \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \| T_n - T_m \| \cdot \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$ für n groß genug

Also für $\|x\| \leq 1$: $\| Tx \| \leq \| T_n x \| + \varepsilon \leq \| T_n \| + \varepsilon \Rightarrow \| T \| \leq \| T_n \| + \varepsilon$, Also $T \in B(X,Y)$

und $\| T - T_n \| \leq \varepsilon$ für n groß genug

5.7 Bem (Exponentialfkt). X Banachraum, $A \in B(X)$. Def $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$

Setze $S_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} t^n A^n$. Zz: S_m ist CF in $B(X)$

$\| S_k - S_m \| \overset{k>m}{\leq} \sum_{n=m+1}^{k} \| \frac{1}{n!} t^n A^n \| \leq \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{n!} |t|^n \|A\|^n \to 0 \quad (k,m \to \infty)$

Da $B(X)$ vollst: $e^{tA} = \lim\limits_{m\to\infty} S_m$ existiert in $B(X)$

5.8 Prop (Neumann'sche Reihe). Sei X BR und $A \in B(X)$ mit $\|A\| < 1$. Dann ist $(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ wohldef

Bew Def $S_m = \sum_{n=0}^{m} A^n$ ist eine CF in $B(X)$, denn $\| S_k - S_m \| = \sum_{n=m+1}^{k} \| A^n \| \leq \sum_{n=m+1}^{k} \|A\|^n \to 0 \quad (\|A\| < 1)$

$\Rightarrow R = \lim S_m$ existiert in $B(X)$, da $B(X)$ vollst. Weiter gilt: $S_m (Id - A) = (Id - A) S_m = Id - A^n$

Mit $\|A^n\| \leq \|A\|^n \to 0$ folgt $R(Id - A) = (Id - A) R = Id$, $R = (Id - A)^{-1}$

5.9 Korr X sei ein BR und $J: X \to X$ ein Isomorphismus. Für $A \in B(X)$ mit $\|A\| < \|J^{-1}\|^{-1}$

ist auch $J - A$ ein Isomorphismus. Insb $G = \{T \in B(X) : T \text{ stetig inv}\}$ ist eine offene Menge in $B(X)$

Bew $J - A = J(Id - J^{-1}A)$. $\|J^{-1}A\| \leq \|J^{-1}\| \cdot \|A\| < 1$. Mit 5.8 folgt: $Id - J^{-1}A$ invertierbar

$\Rightarrow (J - A)^{-1} = (Id - J^{-1}A)^{-1} \cdot J^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (J^{-1}A)^n J^{-1}$

Prop 5.10 (Fortsetzung von Op). Sei X nVR, Y BR und $D \subseteq X$ dichter Teilraum.

Jeder lin Op $T: D \to Y$ mit $\| Tx \|_Y \leq C \|x\|_X \;\; \forall x \in D$ lässt zu einem eind. bestimmten Operator

$\tilde{T} \in B(X,Y)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq C$ fortsetzen.

Bew Zu $x \in X$ wähle eine Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $\|x_n - x\|_X \to 0$. Dann ist $(x_n) \subseteq X$ CF und

$\| Tx_n - Tx_m \|_Y \leq C \| x_n - x_m \| \to 0$, dh (Tx_n) ist eine CF in $Y \overset{Y \text{ BR}}{\Rightarrow} \tilde{T}x = \lim Tx_n$ exist in Y.

$\tilde{T}$ wohldef: Sei $y_n \in D$ mit $y_n \to x$. $\| Tx_n - Ty_n \| \leq C \| x_n - y_n \| \leq C(\|x_n - x\| + \|x - y_n\|) \to 0$

$\tilde{T}$ linear: $x_n, y_n \in D$: $x_n \to x$, $y_n \to y$. $T(x_n + y_n) = T(x_n) + T(y_n) \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \tilde{T}(x+y) = \tilde{T}(x) + \tilde{T}(y)$

$\tilde{T}$ beschr: Sei $x_n \in D$, $x_n \to x$. $\| \tilde{T}x \| = \lim \| Tx_n \| \leq C \|x\| \Rightarrow \|\tilde{T}\| \leq C$

5.11 Korolla Sei X nVR, Y BR, $D \subseteq X$ dicht, $T_n \in B(X,Y)$ und $(T_n x)$ ist eine CF für $x \in D$, $\|T_n\| \leq M$

Dann gibt es genau einen Op. $\tilde{T} \in B(X,Y)$ mit $\lim_{n\to\infty} T_n x = \tilde{T}x$ für alle $x \in X$

Bew Setze für $x \in D$: $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ (da Y vollst). Dann ist $T: D \to Y$ linear. Nach 5.10 gibt es genau ein $\tilde{T} \in B(X,Y)$ mit $\hat{T}x = Tx$ $\forall x \in D$ und $\|\tilde{T}\| \leq M$, denn für $x \in D$:

$\|Tx\| \leq \overline{\lim} \|T_n x\| \leq M\|x\|$. Zz: $\tilde{T}x = \lim_{n\to\infty} T_n x$ $\forall x \in X$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $y \in D$ mit $\|x-y\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.

$\|\tilde{T}x - T_n x\| \leq \|\tilde{T}x - \tilde{T}y\| + \|Ty - T_n y\| + \|T_n y - T_n x\| \leq \|\tilde{T}\|\|x-y\| + \|Ty - T_n y\| + \|T_n\|\|x-y\|$

$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \|\tilde{T}x - T_n x\| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \|Ty - T_n y\| + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \leq \varepsilon + 0$ für alle $\varepsilon > 0$

<u>5.12 Bsp</u> $e_n(t) := e^{2\pi i \frac{t}{n}} = \cos(2\pi \frac{t}{n}) + i \sin(2\pi \frac{t}{n})$. $D := \{(\alpha_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}) :$ Fast alle $\alpha_n = 0\}$

$T: \begin{cases} D \to L^2[0,1] \\ (\alpha_n) \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n \end{cases}$. Es gibt $(\alpha_n) \in \ell_2$ so dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n(t)$ nicht für alle $t \in [0,1]$ konv. Für alle $(\alpha_n) \in \ell_2$ konv $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n(t)$ pktweise für fast alle $t \in [0,1]$. $\int_0^1 e_n(t)\overline{e_m(t)}\,dt = \delta_{n,m}$. Für $(\alpha_n) \in D$ wie in LA: $\|\sum \alpha_n e_n\|^2_{L^2[0,1]} = \int (\sum_n \alpha_n e_n(t)) (\overline{\sum_m \alpha_m e_m(t)})\,dt = \sum_{n,m} \alpha_n \bar{\alpha}_m \int_0^1 e_n(t)\overline{e_m(t)}\,dt = \sum_n |\alpha_n|^2$

d.h. $\|T(\alpha_n)\| \leq 1 \cdot (\sum |\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|(\alpha_n)\|_{\ell^2}$. Nach 5.10 gibt es $\hat{T}: \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2[0,1]$ mit $\|\hat{T}\| \leq 1$

Zusatz: $T_m((\alpha_n)) := \sum_{n=-m}^{m} \alpha_n e_n$, $T_m: \ell^2 \to L^2[0,1]$, $\|T_m\| \leq 1$. Für $(\alpha_n) \in \ell^2$ gilt $T(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} T_m(\alpha_n)$

Nach Kor 11: $T_m((\alpha_n)) \to T((\alpha_n))$ in $L^2[0,1]$ für alle $(\alpha_n) \in \ell^2$. Die Partialsumme der FR konv in $L^2[0,1]$

<u>5.13 Lemma</u> Für nVR $(X, \|.\|)$ sind äquivalent:

a) X ist vollständig   b) Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiert in X

Bew „a ⇒ b" $y_n := \sum_{m=1}^{n} x_m$ ist eine CF in X: $\|y_\ell - y_n\| = \|\sum_{m=n+1}^{\ell} x_m\| \leq \sum_{m=n+1}^{\ell} \|x_m\| \to 0$. Also konv.

$\lim_{n\to\infty} y_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_m$ im GW in X

„b ⇒ a" Sei (x_n) eine CF in X, d.h. für $\varepsilon = 2^{-k}$ gibt es ein n_k, so dass $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$ für $n,m \geq n_k$

Wähle zu $k \in \mathbb{N}$ eine TF x_{n_k}, so dass $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$. Setze $y_0 = x_{n_1}$ und für $k \in \mathbb{N}$:

$y_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$. Dann gilt $\sum_k \|y_k\| \leq \sum_k 2^{-k} < \infty \Rightarrow$ Die Reihe $\sum_k y_k$ konv in Y. Für die Partialsummen erhalten wir: $\sum_{j=0}^{k} y_j = x_{n_k} \Rightarrow$ Die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konv in X. Da (x_n) eine CF in X folgt:

$\lim_{n\to\infty} x_n$ exist in X (CF haben höchstens einen GW)

<u>5.14 Korollar</u> Sei X ein BR und $M \subseteq X$ ein abg lin Teilraum. Dann ist $\hat{X} = X/M$ vollst.

Bew Seien $x_k \in X$, so dass für $\hat{x}_k \in \hat{X}$ gilt: $\sum_k \|\hat{x}_k\|_{\hat{X}} < \infty$. Nach Def der Quotientennorm können wir ann, dass $\|x_k\|_X \leq \|\hat{x}_k\|_{\hat{X}} + \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann: $\sum \|x_k\|_X \leq \sum \|\hat{x}_k\|_{\hat{X}} + \sum 2^{-k} < \infty$. Da X vollst, gibt es nach 5.13 ein $x \in X$ mit $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$ in X. Anw. d. Quotientenabb liefert $\hat{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k$ konv in $\hat{X}$

<u>Vervollständigung</u>

<u>5.15 Def</u> (M,d) metr. Raum. $f: M \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz, falls $\sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} =: \|f\|_L < \infty$

<u>5.16 Bem</u> (M,d) metr Raum, $x_0 \in M$ fest. $X := \{f: M \to \mathbb{R} \mid f$ Lipschitz, $f(x_0) = 0\}$ bzgl $\|.\|_L$ ist nVR

Bew $f, g \in X$: $\|f+g\|_L = \sup\limits_{x \neq y} \frac{|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)|}{d(x,y)} \leq \sup\limits_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} + \sup\limits_{x \neq y} \frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)} = \|f\|_L + \|g\|_L$

5.17 Satz (M,d) metr Raum, $x_0 \in M$ fest, X def wie in 5.16. Zu $x \in M$ definiere $F_x \in M$ durch

$F_x(f) = f(x)$ für $f \in X$. Dann ist $x \in M \to F_x \in X'$ eine Abb, die eine isometrische Einbettung von M

nach X gibt, d.h. $d(x,y) = \|F_x - F_y\|_{X'}$

Bew $\|F_x - F_y\|_{X'} = \sup\limits_{\|f\|_L \leq 1} (F_x - F_y)(f) = \sup |f(x) - f(y)| = \left(\sup \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\right) d(x,y) \leq d(x,y)$

Zur Umkehrung wähle für $x \in M$ fest: $f(z) = d(x,z)$. Für diese Fkt gilt aber nach umgekehrter Δ-Ungl:

$|f(z_1) - f(z_2)| = |d(x,z_1) - d(x,z_2)| \leq d(z_1,z_2)$, d.h. $\|f\|_L \leq 1$

$\|F_x - F_y\| = \sup\limits_{\|g\|_L \leq 1} |(F_x - F_y)(g)| \geq |(F_x - F_y)(f)| = |f(x) - f(y)| \overset{f(x)=0}{=} d(x,y)$. Also $\|F_x - F_y\| = d(x,y)$

$F_{x_0} = 0$ in X', $\|F_x\|_{X'} = \|F_x - F_{x_0}\| = d(x,x_0) < \infty$

5.18 Def Sei (M,d) ein metr Raum. Ein vollst metr Raum $(\hat{M}, \hat{d})$ heißt Vervollständigung von (M,d), falls es

eine Einbettung $J: M \to \hat{M}$ gibt mit

i) $\hat{d}(J(x), J(y)) = d(x,y)$ für alle $x,y \in M$ (Isometrie)

ii) $J(M)$ ist dicht in $\hat{M}$

5.19 Bsp a) $M =$ Polynome auf $[0,1]$, $d(p,q) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |p(t) - q(t)| = \|p-q\|_\infty$

$\hat{M} = C[0,1]$, $\hat{d}(f,g) = \|f-g\|_\infty$ ist Vervollständigung

b) $M = C[0,1]$, $d(f,g) = \|f-g\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \hat{M} = L^2[0,1]$, $d(f,g) = \left(\int_0^1 |f-g|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

c) $M = \{(x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}, x_n = 0$ für fast alle $n\}$ $d((x_n),(y_n)) = \left(\sum |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty \Rightarrow \hat{M} = \ell^p$

5.20 Satz Zu jedem metr. Raum (M,d) gibt es eine Vervollständigung, die bis auf Isometrie eind best ist

Bew Existenz: Zu (M,d) konstruiere wie in 5.17 den BR X und die Einbettung $J: \begin{cases} M \to X' \\ x \mapsto F_x \end{cases}$

mit $d(x,y) = \|F_x - F_y\| = \|J(x) - J(y)\|$. Setze $\hat{M} = \overline{J(M)}^{X'} \cong$ Abschluss von $J(M)$ in X'. Damit ist

$\hat{M}$ als abgeschl. TM des vollst. Raumes X' auch vollst; $J(M)$ dicht in $\hat{M}$ nach Def. Damit ist $\hat{M}$ mit

$\hat{d}(f,g) = \|f-g\|_{X'}$ eine Vervollst von (M,d)

Eindeutigkeit: (für $(M,d) = (X, \|.\|)$ nVR). Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ zwei Vervollst von $(X, \|.\|)$ mit

isometrischen Einbettungen $J_1: X \to X_1$, $J_2: X \to X_2$. $J_2 J_1^{-1}: J_1(X) \to X_2$ ist stetig. Nach Prop 5.9

hat also $J_2 J_1^{-1}$ eine stetige Fortsetzung $U_1: X_1 \to X_2$ mit $\|U_1\| \leq \|J_2 J_1^{-1}\| = 1$. Ebenso hat $J_1 J_2^{-1}$

eine stetige Fortsetzung $U_2: X_2 \to X_1$ mit $\|U_2\| \leq \|J_1 J_2^{-1}\| = 1$. $U_2 U_1|_{J_1(X)} = \mathrm{Id}|_{J_1(X)} = \mathrm{Id}_{X_1}$; $U_1 U_2|_{J_2(X)} = \mathrm{Id}_{X_2}$

Wegen d. Eind. d. Fortsetzung gilt $U_2 U_1 = \mathrm{id}_{X_1}$, $U_1 U_2 = \mathrm{id}_{X_2} \Rightarrow U_1 = U_2^{-1}$, $\|U_1\| = \|U_2\| = 1 \Rightarrow X_1 \overset{\text{iso}}{\simeq} X_2$

Bem (Bew nach Cantor) Sei $(X, \|.\|)$ nVR. Def $CF(X) = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} \mid (x_n)$ CF in $X\}$ und $p((x_n)) := \overline{\lim} \|x_n\|$

Dann ist p eine Halbnorm auf $CF(X)$. Setze $M := \{(x_n) \in CF(X) : p(x_n) = 0\} = \{(x_n) \in CF(X) : \|x_n\| \to 0\}$

Kandidat für die Vervollst: $\tilde{X} := CF(X)/M$. Z.z.: i) $CF(X)$ vollst, d.h. geg. $x_k = (x_{k,j}) \in CF(X)$ mit: $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}: p(x_n - x_m) \leq \varepsilon$ für $n, m \geq k_0$ gibt es ein $x = (x_j) \in CF(X)$ mit $p(x - x_k) \to 0$

ii) M ist abg in $CF(X)$ und $CF(X)/M$ ist ein BR. iii) $J: X \to CF(X)/M$, $J(x) = (x)_{j \in \mathbb{N}}$ erfüllt $p(J(x)) = \|x\|$ und $J(X)$ ist dicht in $CF(X)/M$

<u>Bew</u> i) Sei $x_k = (x_{k,j})$ CF in $CF(X)$. Wähle zu jedem k ein j_k mit $\|x_{k,i} - x_{k,j}\| \leq \frac{1}{k}$ für $i, j \geq j_k$

Setze $x = (x_{k,j_k})$. $\|x_{k,j_k} - x_{\ell,j_\ell}\| \leq \|x_{k,j_k} - x_{k,j}\| + \|x_{k,j} - x_{\ell,j}\| + \|x_{\ell,j} - x_{\ell,j_\ell}\| \leq \frac{1}{k} + \|x_{\ell,j} - x_{k,j}\| + \frac{1}{\ell}$

für $j \geq j_\ell$, $j \geq j_k$. $\Rightarrow \overline{\lim\limits_{k,\ell\to\infty}} \|x_{k,j_k} - x_{\ell,j_\ell}\| \leq \lim\limits_{k,\ell\to\infty} \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{k}\right) + \overline{\lim\limits_{k,\ell\to\infty}} \|x_{\ell,j} - x_{k,j}\| \leq \overline{\lim\limits_{k,\ell\to\infty}} p(x_\ell - x_k) = 0$,

d.h. $x \in CF(X)$. $p(x_\ell - x) = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \|x_{\ell,k} - x_{k,j_k}\| \leq \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left(\|x_{\ell,k} - x_{\ell,j_\ell}\| + \|x_{\ell,j_\ell} - x_{k,j_k}\|\right)$

(ii) vgl Kor 5.13)

$\leq \frac{1}{\ell} + \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \|x_{\ell,j_\ell} - x_{k,j_k}\| \xrightarrow{k \geq j_\ell} 0$ für $\ell \to \infty$, also $\lim\limits_{\ell\to\infty} x_\ell = x$ in $CF(X)$

iii) $p(J(x)) = \overline{\lim} \|x_n\| = \|x\|$. Geg $x = (x_j) \in CF(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle j_0 mit $\|x_i - x_j\| \leq \varepsilon$ für $i, j \geq j_0$

Für $J(x_{j_0})$ gilt: $p(J(x_{j_0}) - x) = \overline{\lim} \|x_{j_0} - x_j\| \leq \varepsilon$

<u>6. Kompakte Mengen</u>

<u>6.1 Def</u> (M, d) metr. Raum. Eine Menge $K \subseteq M$ heißt (Folgen)kompakt, falls es zu jeder Folge $(x_n) \subseteq M$ eine Teilfolge x_{n_k} und $x \in K$ gibt, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ in K

$K \subseteq M$ heißt relativ kompakt, falls $\overline{K}$ kompakt ist in M

<u>6.2 Satz</u> Sei X ein nVR. Dann ist $\overline{U}_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kompakt $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

<u>6.3 Lemma</u> (Riesz). Sei Y ein abg Teilraum von X und $Y \neq X$. Zu $\delta \in (0,1)$ ex ein $x_\delta \in X \setminus Y$ so dass

$\|x_\delta\| = 1$ und $\|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta$ für alle $y \in Y$

<u>Bew</u> Sei $x \in X \setminus Y$ und $d := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$. $d > 0$, da Y abg ist. Da $d < \frac{d}{1-\delta}$ gibt es $y_\delta \in Y$ mit $\|x - y_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$. Setze $x_\delta = \frac{x - y_\delta}{\|x - y_\delta\|}$. Dann ist $\|x_\delta\| = 1$ und für $y \in Y$ gilt:

$$\|x_\delta - y\| = \left\|\frac{x}{\|x - y_\delta\|} - \frac{y_\delta}{\|x - y_\delta\|} - y\right\| = \frac{1}{\|x - y_\delta\|} \|x - \overbrace{y_\delta + \|x - y_\delta\| y}^{\in Y}\| \geq \frac{d}{\|x - y_\delta\|} \geq 1 - \delta$$

<u>Bew 6.2</u> „$\Leftarrow$" $X \cong \mathbb{K}^d$, $d = \dim X$. U_X ist abg beschr $\overset{\text{Heine}}{\underset{\text{Borel}}{\Rightarrow}}$ U_X kompakt

„$\Rightarrow$" Sei $\dim X = \infty$. Wähle $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| = 1$. Nach 6.3 mit $Y = \operatorname{span}\{x_1\}$, $\delta = \frac{1}{2}$ ex $x_2 \in X$ mit $\|x_2\| = 1$ und $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Nach 6.3 mit $Y = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$, $\delta = \frac{1}{2}$ ex ein x_3 mit $\|x_3\| = 1$, $\|x_3 - x_j\| \geq \frac{1}{2}$

Induktiv def das eine Folge $x_i \in X$ mit $\|x_i\| = 1$ und $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ für $j = 1, \dots, i-1$. Dieses (x_i) hat keine Cauchyteilfolge

<u>6.4 Bsp</u>: $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$. $M \subseteq \ell^p$ kompakt $\Leftrightarrow \sup\{\sum\limits_{n=k}^{\infty} |x_n|^p \mid x = (x_n) \in M\} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

<u>6.5 Satz</u> Sei (M, d) metr. Raum. Für $K \subseteq M$ sind äquiv:

a) K ist (Folgen-) kompakt

b) K ist vollst. und total beschr., d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; x_1, \ldots, x_m \in M : \; K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} K(x_j, \varepsilon)$

c) Jede Überdeckung von K durch offene Mengen U_j, $j \in J$, besitzt eine endliche Teilüberdeckung

Bew „a $\Rightarrow$ b" (Widerspruch) Es ex ein $\varepsilon > 0$ so dass für alle $x_1, \ldots, x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \varepsilon)$.

Wir konstruieren eine Folge ohne konv TF: Sei $y_1 \in K$ bel. Dann gilt $K \not\subseteq K(y_1, \varepsilon)$. Wähle $y_2 \in K \setminus K(y_1, \varepsilon)$.

Dann gilt $K \not\subseteq K(y_1, \varepsilon) \cup K(y_2, \varepsilon)$. Wähle $y_3 \in K \setminus (K(y_1, \varepsilon) \cup K(y_2, \varepsilon))$. Induktiv erhalten wir eine Folge $y_j \in K$

mit $y_j \notin \{K(y_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup K(y_{j-1}, \varepsilon)\}$, d.h. $\|y_j - y_k\| \geq \varepsilon$ für $k = 1 \ldots j-1$ $\Rightarrow$ y_j hat keine konv TF

„b $\Rightarrow$ c" (Widerspruch) Es gibt eine offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$, U_j offen, ohne endl. Teilüberdeckung. Zu

$\varepsilon_1 = 1$ gibt es endl viele $x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}$ so dass $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} K(x_j^{(1)}, \varepsilon_1)$. Es (gibt) eine Kugel $K(x_{j_0}^{(1)}, \varepsilon_1)$, so

dass $L_1 = K \cap K(\underbrace{x_{j_0}^{(1)}}_{=: y_1}, 1)$ nicht durch endl viele der U_j überdeckt werden kann. Nach b) gibt es zu $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$

Kugeln $K(x_1^{(2)}, \varepsilon_2), \ldots, K(x_m^{(2)}, \varepsilon_2)$ so dass $L_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} K(x_j^{(2)}, \varepsilon_2)$. Es gibt eine dieser Kugeln, $K(y_2, \varepsilon_2)$,

so dass $L_2 = K \cap K(y_1, \varepsilon_1) \cap K(y_2, \varepsilon_2)$ sich nicht durch endl viele der U_j überdecken lässt. Induktiv finden

wir zu $\varepsilon_\ell = \frac{1}{2^{\ell-1}}$ eine Folge $y_\ell \in K$, so dass $L_\ell = K \cap \bigcap_{j=1}^{\ell} K(y_j, \varepsilon_j)$ nicht überdeckbar ist durch endl. viele

der U_j. Insb. gilt $L_\ell \subseteq K(y_{\ell-1}, \varepsilon_{\ell-1}) \cap K(y_\ell, \varepsilon_\ell) \neq \emptyset$. Mit $z \in K(y_{\ell-1}, \varepsilon_{\ell-1}) \cap K(y_\ell, \varepsilon_\ell)$ erhalten wir

$d(y_\ell, y_{\ell-1}) \leq d(y_\ell, z) + d(z, y_{\ell-1}) \leq \frac{1}{2^{\ell-1}} + \frac{1}{2^{\ell-2}} \leq \frac{1}{2^{\ell-3}}$. Für $n < m$ gilt $d(y_n, y_m) \leq \sum_{\ell=n}^{m} \frac{1}{2^\ell}$

$\Rightarrow$ (y_n) ist eine CF in K. $\lim_{\ell \to \infty} y_\ell = y \in K$, da K vollst ist. Wähle i_0 mit $y \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist,

ex ein $n_0 \in \mathbb{N}$: $y_n \in U_{i_0}$ $\forall n \geq n_0$. $\Rightarrow$ $L_{n_0} = K \cap K(y_1, 1) \cap \ldots \cap K(y_{n_0}, \frac{1}{2^{n_0-1}}) \subset U_{i_0}$ ↯

„c $\Rightarrow$ a" (Widerspruch) O.B.d.A sei K unendlich. Sei $(x_n) \subset K$ eine Folge in K ohne konv TF. Zu jedem $y \in K$

gibt es ein $\varepsilon(y) > 0$, so dass $K(y, \varepsilon(y))$ nur endl. viele der (x_n) enthält. $K \subseteq \bigcup_{y \in K} \overbrace{K(y, \varepsilon(y))}^{\text{offen}}$. Nach c)

ex eine endl Teilüberdeckung, d.h. $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} K(y_j, \varepsilon(y_j))$ $\Rightarrow$ (x_n) besteht aus endlich vielen Elementen und

hat daher eine konv Teilfolge ↯

6.6 Prop Sei (M, d) ein metr. Raum.

a) Eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ ist immer vollständig und abgeschlossen in M

b) Eine abg TM eines kompakten Raumes ist kompakt

c) Jede kompakte Menge in M ist separabel

d) Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raumes ist beschränkt

Bew a) siehe 6.5 b), b) nach Def, c) Nach 6.5 b) gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ eine endl Menge L_n mit

$\inf\{\|y - x\| : y \in L_n\} \leq \frac{1}{n}$ $\forall x \in K$. Dann ist $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ abz und dicht in K, d.h. K ist separabel.

d) Falls K unbeschr. gibt es $x_n \in K$ mit $\|x_n\| \geq n$, $n \in \mathbb{N}$. (x_n) hat keine konv Teilfolge

6.7 Satz (von Arzela-Ascoli). Sei (S,d) ein komp metr. R. $C(S)=\{f: S\to\mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty = \sup |f(s)|$

Eine Teilmenge $M\subset C(S)$ ist kompakt genau dann wenn: a) M ist beschränkt in $C(S)$, b) M ist abg. in $C(S)$ c) M ist gleichgradig stetig, d.h. $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in M: d(s,t)<\delta \Rightarrow |x(s)-x(t)|\le\varepsilon$

Bew. „⇒" Sei M kompakt ⇒ a), b) nach Satz 6.6. Nach 6.5 c) ist M total beschr., d.h. es gibt zu $\varepsilon>0$ $x_1\dots x_m\in M$ so dass zu $x\in M$ ein x_i ex mit $\|x-x_i\|_\infty\le\varepsilon$. Da $x_1\dots x_m$ glm stetig sind gibt es $\delta_1\dots\delta_m>0$ mit $d(s,t)<\delta_i \Rightarrow |x_i(s)-x_i(t)|<\varepsilon$. Setze $\delta := \min(\delta_1\dots\delta_m)>0$. Dann gilt für $x\in M$:

$$|x(t)-x(s)| \le \overbrace{|x(t)-x_i(t)|}^{\le\|x-x_i\|_\infty\le\varepsilon} + |x_i(t)-x_i(s)| + |x_i(s)-x(s)| \le 3\varepsilon \quad \text{für } d(s,t)<\delta$$

„⇐" Nach 6.6 ist S separabel, sei also (s_m) eine dichte Folge in S. Sei $(x_n)\subseteq M$ eine Folge. Da M beschr. in $C(S)$ gibt es $C<\infty$ mit $|x_n(s)|\le C$ $\forall s\in S, n\in\mathbb{N}$. Also ist für festes m $(x_n(s_m))_{n\in\mathbb{N}}$ beschr. in $\mathbb{R}$ und hat eine konv. TF. $\exists N_1\subseteq\mathbb{N}, |N_1|=\infty$ so dass $(x_n(s_1))_{n\in N_1}$ konvergiert. Induktiv gibt es $N_1\supseteq N_2\supseteq\dots\supseteq N_k\supseteq\dots$, $|N_i|=\infty$, so dass $(x_n(s_m))_{n\in N_m}$ konv. Wähle $n_j\in N_j$ mit $n_j\to\infty$ für $j\to\infty$. Dann gilt: $(x_{n_j}(s_m))_{j\in\mathbb{N}}$ konv in $\mathbb{R}$ für jedes $m\in\mathbb{N}$. Zz: (x_{n_j}) konv. glm auf S. Zu $\varepsilon>0$ wähle $\delta>0$ für gleichgr. Stetigkeit. $S=\bigcup_{n=1}^\infty K(s_n,\delta)$. Da S kompakt, gibt es eine endl. Teilüberdeckung $S=\bigcup_{i=1}^m K(s_{n_i},\delta)$.

Setze zur Abkürzung: $x_j = x_{n_j}$, $s_k=s_{n_k}$. Zum bereits gewählten $\varepsilon>0$ gibt es ein i_0 mit

$|x_j(s_k)-x_i(s_k)|\le\varepsilon$ $\forall i,j\ge i_0$, $k\in\{1\dots m\}$. Dann gilt für $i,j\ge i_0$, $s\in S$

$$|x_j(s)-x_i(s)| \le \overbrace{|x_j(s)-x_j(s_k)|}^{\le\varepsilon\ (\text{ggS})} + \overbrace{|x_j(s_k)-x_i(s_k)|}^{\le\varepsilon} + \overbrace{|x_i(s_k)-x_i(s)|}^{\le\varepsilon\ (\text{ggS})} \le 3\varepsilon \ge \|x_j-x_i\|_\infty$$

d.h. (x_j) ist eine CF in $C(S)$. Da $C(S)$ vollst, ex $x=\lim_{j\to\infty}x_j$ und $x\in M$, da M abg.

6.8 Bsp $K:=\{f\in C^1[0,1]: \|f'\|_\infty\le 1, |f(0)|\le 1\}$. K ist nicht kompakt in $C^1[0,1]$, aber K ist kompakt in $C[0,1]$

Bew $U_{C^1[0,1]}\subset K$ nicht komp, da $\dim C^1[0,1]=\infty$, nach 6.2. Aber $K\subseteq C[0,1]$ kompakt nach 6.7, denn a) $f\in K$: $f(t)=f(0)+\int_0^t f'(u)\,du \Rightarrow |f(t)|\le|f(0)|+\|f'\|_\infty\cdot 1\le 2$

b) K abg nach Def. c) $f\in K$, $s<t\in[0,1]$. $|f(s)-f(t)| = \left|\int_s^t f'(u)\,du\right| \le |t-s|\,\|f'\|_\infty\le|t-s|<\varepsilon$ für $\delta=\varepsilon$

6.9 Korollar Sei X BR. Für $K\subseteq X$ sind äquivalent

a) K relativ kompakt (d.h. $\bar K$ ist komp)

b) Jede Folge $(x_n)\subseteq K$ hat eine Cauchy Teilfolge

c) $\forall\varepsilon>0$ $\exists y_1,\dots,y_m\in K$ mit $K\subseteq K(y_1,\varepsilon)\cup\dots\cup K(y_m,\varepsilon)$

Bew „a⇒b" und „a⇒c" klar nach 6.5. „b⇒a" Sei $(x_n)\subset K$ mit einer CTF (x_{n_k}). Da X vollst. ex $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x\in X \Rightarrow x\in\bar K \Rightarrow \bar K$ komp. „c⇒a" Da X vollst, ist $\bar K$ vollst. Zu $\varepsilon>0$ wähle $y_1\dots y_m\in K$ mit $K\subseteq\bigcup_{j=1}^m K(y_j,\varepsilon)\Rightarrow \bar K\subseteq\bigcup_{j=1}^m\overline{K(y_j,\varepsilon)}\subseteq\bigcup_{j=1}^m K(y_j,2\varepsilon)$

7. Kompakte Operatoren

7.1 Def X nVR, Y BR. Ein lin Op $T: X \to Y$ heißt kompakt, falls $\overline{T(U_X)} \subseteq Y$ rel kompakt ist.

Bez $K(X,Y)$ = Raum der lin. kompakten Operatoren von X nach Y

Bem a) $T \in K(X,Y) \iff$ Jede beschränkte Folge $(x_n) \subseteq X$ hat eine TF (x_{n_k}), so dass $T(x_{n_k}) \subseteq Y$ CF ist

b) $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$, da die komp. Menge $\overline{T(U_X)}$ beschr ist in Y

Bsp a) $Id_X \in K(X,X) \iff \dim X < \infty$ (nach 6.2)

b) Endlich dimensionale Op sind kompakt, d.h. $X \xrightarrow{T} T(X) \subseteq Y_0 \subseteq Y$ mit $\dim Y_0 < \infty$

$T(U_X)$ in Y_0 ist rel komp. nach Heine-Borel: $Y_0 \cong K^d$, $d = \dim Y_0$

7.2 Bsp $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$. $Q_n \in B(\ell^p)$: $Q_n(x_j) = (0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+2},\dots)$

Beh $T \in B(\ell^p)$ kompakt $\iff \|Q_n T\| \to 0 \iff \sup_{\|(x_j)\|_{\ell^p} \leq 1} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |(Tx)_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \iff T(U_X)$ rel. komp in ℓ^p

Bew $T(U_X)$ rel komp in ℓ^p nach 6.4

a) $T(x_j) = (\lambda_j x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$ (Diagonalop.) $\quad T$ kompakt $\iff \lambda_j \to 0$

Bew $\|Q_n T(x_j)\| = \|(0\dots0,\lambda_{n+1}x_{n+1},\lambda_{n+2}x_{n+2},\dots)\|_{\ell^p} = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^p |x_j|^p\right)^{1/p} \leq \sup_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|x\|_{\ell^p}$

$\Rightarrow \sup_{\|x\|_{\ell^p} \leq 1} \|Q_n T x\| \to 0$, falls $\lambda_j \to 0$. Umgekehrt: $\lambda_j \not\to 0$. Dann ex $\lambda_{j_k} \to \lambda \neq 0$

$\Rightarrow T(e_{j_k}) = \lambda_{j_k} e_{j_k}$, $\quad T(e_{j_k}) \approx \lambda e_{j_k}$ hat keine konv TF, $\|\lambda e_j - \lambda e_k\|_{\ell^p} = \lambda$ für $j \neq k$

b) $T(x_j) = (0, x_1, x_2, \dots)$ (Shift). $\|Tx\| = \|x\|$ Isometrie, also nicht kompakt

c) $[T(x_j)]_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$. $T \in B(\ell^p)$, falls $\left(\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^{p'}\right)^{p/p'}\right)^{1/p} < \infty$ $\quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

Beh Der Hille-Tamarkin Op T ist kompakt

Bew $\|[Q_n T(x_j)]_i\| \leq \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_j |a_{ij}|^{p'}\right)^{p/p'}\right)^{1/p} \to 0 \quad (n \to \infty)$

7.3 Bsp $X = C(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, $k: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig.

Def $T \in B(X)$, $(Tx)(u) = \int_\Omega k(u,v)\, x(v)\, dv$. Diese Integralop. sind kompakt

Bew (mit Arzela-Ascoli). Beachte: $\exists M \geq 0$ mit $|k(u,v)| \leq M$ für $u,v \in \Omega$ und k ist glm stetig $(*)$

Damit gilt: • $T(U_{C(\Omega)})$ beschr, denn $|Tx(u)| \leq \int_\Omega |k(u,v)||x(v)|\,dv \leq M\,\lambda(\Omega)\,\|x\|_\infty < \infty$

Insb für $x \in U_{C(\Omega)}$: $\|Tx\|_\infty \leq M\,\lambda(\Omega) < \infty$

• $T(U_{C(\Omega)})$ ist gleichgradig stetig: Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ aus $(*)$. Dann gilt für $|u_1 - u_2| < \delta$, $x \in U_{C(\Omega)}$

$|Tx(u_1) - Tx(u_2)| \leq \int_\Omega |k(u_1,v) - k(u_2,v)|\,|x(v)|\,dv \leq \lambda(\Omega) \sup_{v \in \Omega} |k(u_1,v) - k(u_2,v)|\,\|x\|_\infty \leq \lambda(\Omega) \cdot \varepsilon$

7.4 Bsp $i: C^1[0,1] \hookrightarrow C[0,1] \in K(C^1[0,1], C[0,1])$

Bew $i(U_{C^1[0,1]})$ ist rel. komp in $C[0,1]$ nach 6.8

7.5 Satz Seien X, Y, Z BR

a) $K(X,Y)$ ist ein lin., abg., Teilraum von $B(X,Y)$

b) Sei $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$ und T oder S sei kompakt. Dann ist $S \circ T \in K(X,Z)$

Insbesondere: $K(X) = K(X,X)$ ist ein Ideal in $B(X)$

Bew a) $S, T \in K(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot T \in K(X,Y)$. Zu $(x_j) \in U_X$ wähle x_{n_k}, so dass $T(x_{n_k})$ CF ist und $x_{n_{k_l}}$, so dass $S(x_{n_{k_l}})$ CF ist $\Rightarrow (S+T)x_{n_{k_j}} = Sx_{n_{k_j}} + Tx_{n_{k_j}}$ ist CF $\Rightarrow$ linear

Seien $T_n \in K(X,Y)$, $T \in B(X,Y)$ mit $\|T_n - T\| \to 0$. Geg. $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T - T_n\| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$

Da $T_{n_0}(U_X)$ rel. kompakt, gibt es zu $\varepsilon > 0$, $y_1 \dots y_j \in T_{n_0}(U_X)$ mit $T_{n_0}(U_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} K(y_j, \varepsilon)$.

Für $x \in U_X$ ex j_0 mit $\|T_{n_0}x - y_{j_0}\| \leq \varepsilon$. Damit folgt:

$\|Tx - y_{j_0}\| \leq \|Tx - T_{n_0}x\| + \|T_n x - y_{j_0}\| \leq \|T - T_{n_0}\| \|x\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$, d.h. $T(U_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} K(y_j, 2\varepsilon)$

$\Rightarrow T(U_X)$ ist rel kompakt $\Rightarrow T \in K(X,Y) \Rightarrow K(X,Y)$ abg

b) $\|x_n\|_X \leq 1$, S komp $\Rightarrow \exists n_k : S(Tx_{n_k})$ CF, denn (Tx_{n_k}) beschr.

$\|x_n\|_X \leq 1$, T komp $\Rightarrow \exists n_k : Tx_{n_k}$ CF $\Rightarrow S(Tx_{n_k})$ CF, da S stetig ist

7.6 Kor Seien X, Y BR und $T \in B(X,Y)$. Falls es endl. dim. Op. $T_n \in B(X,Y)$ mit $\|T - T_n\| \to 0$ gibt, so ist $T \in K(X,Y)$

Bew Folgt aus Bem nach 7.1 und 7.5 a)

Bsp $X = \ell^p$, $T \in B(\ell^p)$ ist komp $\Leftrightarrow \|Q_n T\| \to 0 \Leftrightarrow \overbrace{\|P_n T - T\|}^{= \|Q_n T\|} \to 0$

$P_n = Id - Q_n$, $P_n(x_j) = (x_1 \dots x_n, 0 \dots)$, d.h. P_n ist endl. dim.

$\Rightarrow T \in K(\ell^p) \Leftrightarrow T$ ist Limes von endl. Op in der Op. Norm

7.7 Satz Seien X, Y BR und Y habe die Approximationseig., d.h. es gibt beschränkte endl. dim Operatoren

(*) $S_n \in B(Y)$ mit $S_n x \to x$ $\forall x \in Y$. Dann gilt $K(X,Y) = \overline{F(X,Y)}$ in der Op Norm

Dabei ist $F(X,Y) = \{T \in B(X,Y) : \dim T(X) < \infty\}$

Bew Für $T \in K(X,Y)$ setze $T_n = S_n T \in F(X,Y)$, Wg 7.6 bleibt zz. $\|T - T_n\| \to 0$

Da $T(U_X)$ rel. komp. ex zu $\varepsilon > 0$ $y_1 \dots y_m \in Y$ so dass $T(U_X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} K(y_j, \varepsilon)$. Nach (*) gibt es ein n_0, so dass $\|S_n y_j - y_j\| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$, $j = 1 \dots m$. Zu $x \in U_X$ wähle j_0 mit $\|Tx - y_{j_0}\| \leq \varepsilon$

$\|T_n x - Tx\| \leq \|S_n Tx - S_n y_{j_0}\| + \|S_n y_{j_0} - y_{j_0}\| + \|y_{j_0} - Tx\| \leq \|S_n\| \cdot \|Tx - y_{j_0}\| + \varepsilon + \varepsilon \leq (\sup(\|S_n\| + 2)) \cdot \varepsilon$

$\Rightarrow \|T_n - T\| \leq C \cdot \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und eine Konstante C.

8. Approximation von L^p-Fkt

8.1 Satz Sei $k: \Omega\times\Omega \to \mathbb{K}$ meßbar und $\sup\limits_{u\in\Omega}\int_\Omega |k(u,v)|\,dv \le C_1$, $\sup\limits_{v\in\Omega}\int_\Omega |k(u,v)|\,du \le C_2$. Dann wird durch $Tf(u) := \int_\Omega k(u,v) f(v)\, dv$ ein beschr. Op von $L^p(\Omega)\to L^p(\Omega)$ def mit $\|T\| \le C_1^{\frac{1}{p'}} \cdot C_2^{\frac{1}{p}}$

Bew $p=\infty$: $|Tf(u)| \le \int_\Omega |k(u,v)|\,|f(v)|\,dv \le \|f\|_\infty \int_\Omega |k(u,v)|\,dv \le C_1\|f\|_\infty \ \forall u\in\Omega \Rightarrow \|Tf\|_\infty \le C_1 \|f\|_\infty$

$p=1$: $\|Tf\|_{L^1} = \int_\Omega |\int_\Omega k(u,v) f(v)\, dv|\, du \le \int_\Omega\int_\Omega |k(u,v)|\, du\, |f(v)|\, dv \le C_2 \|f\|_{L^1}$

$1<p<\infty$: $f\in L^1\cap L^\infty \subseteq L^p \Rightarrow Tf \in L^1\cap L^\infty \subseteq L^p$. Weiter gilt für $g(u) = \left(\int_\Omega |Tf(u)|^p du\right)^{-\frac{1}{p'}} |Tf(u)|^{p-1}\, \mathrm{sign}(Tf(u))$

$$\|Tf\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |Tf(u)|^p du\right)\left(\int_\Omega |Tf(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}-1} = \int_\Omega g(u)\, Tf(u)\, du = \int_\Omega\int_\Omega g(u) k(u,v) f(v)\, dv\, du$$

$$\le \int_{\Omega\times\Omega} |g(u)|\,|k(u,v)|^{\frac{1}{p'}}\, |k(u,v)|^{\frac{1}{p}}\, |f(v)|\, d(u,v) \overset{\text{Höl}}{\le} \left(\int_{\Omega\times\Omega} |g(u)|^{p'} \cdot |k(u,v)|\, d(u,v)\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega\times\Omega} |k(u,v)|\, |f(v)|^p\, d(u,v)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Def. $T_1 h(v) = \int_\Omega |k(u,v)|\, h(u)\, du$, $T_2 h(u) = \int_\Omega |k(u,v)|\, h(v)\, dv$. Mit dieser Notation folgt:

$$\|Tf\|_{L^p} \le \left(\int_\Omega T_1[|g|^{p'}](v)\, dv\right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_\Omega T_2[|f|^p](u)\, du\right)^{\frac{1}{p}} = \|T_1[|g|^{p'}]\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \cdot \|T_2[|f|^p]\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \|T_1\|_{L^1\to L^1}^{\frac{1}{p'}} \cdot \||g|^{p'}\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \cdot \|T_2\|_{L^1\to L^1}^{\frac{1}{p}} \cdot \||f|^p\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \le C_1^{\frac{1}{p'}} \cdot \|g\|_{L^{p'}} \cdot C_2^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_{L^p}$$

Zz: $\|g\|_{L^{p'}} \le 1$: $\|g\|_{L^{p'}} = \left(\int_\Omega |Tf(u)|^p du\right)^{-\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |Tf(u)|^{\overbrace{(p-1)p'}^{=p}} du\right)^{\frac{1}{p'}} = 1$. Aus d. Dichtheit folgt die Beh.

8.2 Def (Bed. Erwartungsop) Sei $A = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Partition von Ω in pw. disj., messb. Mengen mit $0<\mu(A_n)<\infty$

Setze $E_A(f)(s) = \sum_n \left[\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(t)\, dt\right] \mathbb{1}_{A_n}(s)$

8.3 Korollar Für jede Partition $A=\{A_n\}$ von Ω ist $E_A \in B(L_p(\Omega))$ $\forall\, 1\le p\le\infty$ mit $\|E_A\|_{L^p\to L^p} = 1$

und $\mathrm{Bild}(E_A) = E_A(L^p)$ ist isometrisch zu ℓ^p_m, wobei $m = |A|$ $\quad(\ell_m^p \cong (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p))$

Bew a) Setze $k(s,t) = \sum_n \mu(A_n)^{-1}\, \mathbb{1}_{A_n}(s)\, \mathbb{1}_{A_n}(t)$. Dann gilt für $s\in A_n$ und $f\in L^p$:

$E_A f(s) = \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(t)\, dt = \int_\Omega k(s,t) f(t)\, dt$ und $\int_\Omega k(s,u)\, du = 1 = \int_\Omega k(s,u)\, ds$ für $s,u\in\Omega$

Aus 8.1 folgt mit $C_1=1$ und $C_2=1$, dass $\|E_A\|_{L^p\to L^p}\le 1$

b) Def: $J: \ell_m^p \to L^p(\Omega)$, $J(\alpha_n) \mapsto \sum_n \alpha_n \mu(A_n)^{-\frac{1}{p}}\, \mathbb{1}_{A_n}$. Dann ist $\mathrm{Bild}\, J = \mathrm{span}\{\mathbb{1}_{A_n}\} = \mathrm{Bild}\, E_A$

$$\|J(\alpha_n)\|_{L^p}^p = \int_\Omega \Big|\sum_n \alpha_n \mu(A_n)^{-\frac{1}{p}}\, \mathbb{1}_{A_n}(s)\Big|^p ds = \int_\Omega \sum_n |\alpha_n|^p \frac{1}{\mu(A_n)}\, \mathbb{1}_{A_n}(s)\, ds = \sum_n |\alpha_n|^p = \|(\alpha_n)\|_{\ell^p}^p$$

8.4 Satz Sei $A_m = \{A_{n,m} : n = 1,\dots, n_m\}$ eine Zerlegung von $\Omega\cap K(0,r_m)$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$, $r_m\to\infty$

und $A_m \subseteq A_{m+1}$. $d_m = \sup\{|t-s| : s,t\in A_{m,n}, n=1,\dots, n_m\} \to 0$ $(m\to\infty)$. Dann gilt für alle $f\in L^p(\Omega)$, $1\le p<\infty$,

dass $\|E_{A_m} f - f\|_{L^p} \to 0$ für $m\to\infty$

Bsp $\Omega = \mathbb{R}$, $A_m = \{[\frac{n-1}{2^m}, \frac{n}{2^m}) : n = -2^m,\dots, 2^m\}$, $r_m = 2^m$

Bew Nach Kor 8.3 ist $\|E_{A_m}\|_{L^p\to L^p} = 1$. Nach 5.8 genügt es zu zeigen: Es gibt eine dichte TM $D\subseteq L^p(\Omega)$,

so dass $\|E_{A_m} f - f\|_{L^p}\to 0$ $\forall f\in D$. Setze $D := \mathrm{span}\{\mathbb{1}_{A_{n,m}} \mid n = 1,\dots, n_m, m\in\mathbb{N}\}$. Da $d_m\to 0$ folgt,

dass D dicht ist. Alternativ wähle $D = C_c(\Omega)$. Auch hier ist D dicht in $L^p(\Omega)$. Sei $f\in C_c(\Omega)$. Dann

ist $\mathrm{supp}\, f\subseteq K(0,r_{m_0})$ für m_0 groß genug und für die Norm erhalten wir:

$$\|E_{A_m}f-f\|_{L^p}^p = \int_\Omega \Big|\sum_{n=1} (E_{A_m}f-f)\mathbb{1}_{A_{m,n}}(s)\Big|^p ds = \sum_n \int_\Omega |(E_{A_m}f-f)\mathbb{1}_{A_{m,n}}(s)|^p ds$$

$$= \sum_n \int_\Omega \Big|\Big(\frac{1}{\mu(A_{m,n})}\int_{A_{m,n}} f(t)\,dt - f(s)\Big)\mathbb{1}_{A_{m,n}}(s)\Big|^p ds = \sum_n \int_{K(0,r_m)\cap A_{m,n}} \Big|\frac{1}{\mu(A_{m,n})}\cdot\int_{A_{m,n}}[f(t)-f(s)]\,dt\Big|^p ds$$

$$\le \sum_n \mu(K(0,r_{m_0})\cap A_{m,n}) \sup\{|f(t)-f(s)| : s,t\in A_{m,n}\}^p \le \sup\{|f(t)-f(s)| : |t-s|\le d_m\}^p \cdot \sum_n \mu(K(0,r_{m_0})\cap A_{m,n})$$

$$\le \mu(K(0,r_{m_0})) \sup_{|s-t|<d_m} |f(s)-f(t)|^p \xrightarrow{m\to\infty} 0$$, da $d_m\to 0$ und $f\in C(K(0,r_{m_0}))$ glm stetig

__8.5 Korollar__ Für $X = L^p(\Omega)$, $1\le p<\infty$ gilt $K(X,X) = \overline{F}(X,X)$ (= Abschluss der endl. dim Op)

__Bew__ Folgt aus Satz 7.7 denn nach Satz 8.4 besitzt $L^p(\Omega)$ die Approximationseig. (wähle $S_n = E_{A_n}$)

__8.6 Satz (Young)__ Für $k\in L^1(\mathbb{R}^d)$ setze für $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$. Setze $(k*f)(u) := \int_{\mathbb{R}^d} k(u-v)f(v)\,dv$

(Faltung von k und f). Dann def $Tf := k*f : L^p(\mathbb{R}^d)\to L^p(\mathbb{R}^d)$ einen beschränkten Operator

für $1\le p\le\infty$ und $\|T\|_{L^p\to L^p} \le \|k\|_{L^1}$

__Bew__ Setze $K(u,v) := k(u-v)$. Dann gilt $\int |K(u,v)|\,dv = \int |k(u-v)|\,dv = \|k\|_{L^1}$ für alle $u\in\mathbb{R}^d$ und

$\int |K(u,v)|\,du = \int |k(u-v)|\,du = \|k\|_{L^1}$ für alle $v\in\mathbb{R}^d$ $\overset{8.1}{\Rightarrow} \|T\| \le \|k\|_{L^1}$

__Bem__ $D\subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ dicht, z.B. $D = \{f\in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f$ kompakt$\}$. Dann ex $\int_{\mathbb{R}^d} k(u-v)f(v)\,dv$ als

Lebesgue-Integral $\forall f\in D$. Nach 8.1 gilt $\|Tf\|_{L^p} \le \|k\|_{L^1}\cdot\|f\|_{L^p}$ für $f\in D$. T ist die stetige Fortsetzung

von $T|_D$ auf ganz $L^p(\mathbb{R}^d)$

__8.7 Def__ Sei $\varphi\in L_1(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi\ge 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(u)\,du = 1$. Dann heißt $\varphi_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-d}\varphi(\varepsilon^{-1}u)$, $\varepsilon>0$

approximative Eins. Notation $\varphi_\varepsilon * f(u) = \int \varphi_\varepsilon(u-v)f(v)\,dv$

__Bsp__ $\varphi(u) = \frac{1}{\lambda(B(0,1))}\mathbb{1}_{B(0,1)}(u)$. Dann ist $\varphi\ge 0$ und $\int\varphi\,du = 1$

$\varphi_\varepsilon * f(u) = \frac{1}{\lambda(B(0,\varepsilon))}\cdot\int \mathbb{1}_{B(0,\varepsilon)}(u-v)f(v)\,dv = \frac{1}{\lambda(B(u,\varepsilon))}\int_{B(u,\varepsilon)} f(v)\,dv$ „=" Durchschnitt von f über die Kugel $B(u,\varepsilon)$

__8.8 Bem__ i) $\int\varphi_\varepsilon(u)\,du = 1$

ii) $\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r)} \varphi_\varepsilon(u)\,du \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$

iii) $\operatorname{supp}\varphi \subseteq B(0,1) \Rightarrow \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq B(0,\varepsilon)$

iv) $\|\varphi_\varepsilon * f\|_{L^p} \le 1\cdot\|f\|_{L^p}$ (nach 8.6)

__8.9 Satz__ Sei $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Eins. Dann gilt für alle $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\|f-\varphi_\varepsilon * f\|_{L^p} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ ($1\le p<\infty$)

__Bew__ Sei $D = \{f\in C(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f$ kompakt$\}$. Dann ist D dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Für $f\in D$ mit $\operatorname{supp} f\subseteq B(0,r_0)$ gilt

$$\varphi_\varepsilon * f(u) - f(u) = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi_\varepsilon(u-v)[f(v)-f(u)]\,dv \overset{u-v=h}{=} \int\varphi_\varepsilon(h)(f(u-h)-f(u))\,dh$$

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^p} \le \Big\|\int_{|h|\le r}\varphi_\varepsilon(h)[f(\cdot-h)-f(\cdot)]\,dh\Big\|_{L^p(\cdot)} + \Big\|\int_{|h|\ge r}\varphi_\varepsilon(h)[f(\cdot-h)-f(\cdot)]\,dh\Big\|_{L^p(\cdot)}$$

$$\le \Big(\underbrace{\int_{|h|\le r}\varphi_\varepsilon(h)\,dh}_{\le 1}\Big)\cdot\sup_{|h|\le r}\|f(\cdot-h)-f(\cdot)\|_{L^p(\cdot)} + \int_{|h|\ge r}\varphi_\varepsilon(h)\,dh\,(\|f(\cdot-h)\|_{L^p(\cdot)} + \|f(\cdot)\|_{L^p(\cdot)})$$

$$\le \underbrace{\sup_{|h|\le r}\|f(\cdot-h)-f(\cdot)\|_{L^p(\cdot)}}_{\to 0 \text{ für } h\to 0} + \underbrace{\int_{|h|\ge r}\varphi_\varepsilon(h)\,dh}_{\to 0 \text{ für } \varepsilon\to 0\ (8.8.ii)}(\cdot 2\|f\|_{L^p})$$

Geg $\tau>0$ wähle r so groß, dass 1. Teil kleiner als τ ist. Geg r und τ wähle $\varepsilon>0$ so klein, dass der 2. Teil kleiner ist als ε, d.h. $\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^p} \le 2\varepsilon$ für ε klein genug und $f \in D$. Nach 8.8.(iv) ist $\|\varphi_\varepsilon * f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$. Für $T_\varepsilon f = \varphi_\varepsilon * f$ gilt: $\|T_\varepsilon\| \le 1$ $\forall \varepsilon > 0$, $T_\varepsilon f \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f$ in L^p $\forall f \in D$ und D ist dicht in L^p. Damit folgt die Bch nach Kor 5.10

<u>8.10 Korollar</u>: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann liegen $C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}$ dicht in $L^p(\Omega)$

<u>Bew</u> Sei $(\varphi_\delta)_{\delta > 0}$ eine approximative Eins und $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq B(0,1)$. Geg $f \in L^p(\Omega)$ wähle $g \in L^\infty(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(g) = \overline{\{x : g(x) \neq 0\}} =: A \subseteq \Omega$, A kompakt und $\|f - g\|_{L^p} \le \varepsilon$

Def $\delta_0 := \inf\{|t-s| : t \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega, s \in A\} = d(A, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) > 0$. Da $\operatorname{supp} \varphi_\delta \subseteq B(0,\delta)$ nach 8.8 (ii) folgt $\operatorname{supp} g * \varphi_\delta \subseteq A + B(0, \delta_0/2) \subseteq \Omega$ für $\delta < \delta_0/2$, denn $g * \varphi_\delta(u) = \int \varphi_\delta(u-v) g(v)\, dv \neq 0$ <u>nur</u> wenn $v \in A$ und $|u-v| < \delta$. Also $g * \varphi_\delta \in C_c(\Omega)$. Zz. $g * \varphi_\delta \in C^\infty(\Omega)$ $\quad (A + B(0, \frac{\delta_0}{2}) = \{x + y : x \in A, y \in B(0, \frac{\delta_0}{2})\})$

$D_u^\alpha (\varphi_\delta * g)(u) = \int_A [D_u^\alpha \varphi_\delta(u-v)] \overset{\text{beschr.}}{g(v)}\, dv$, d.h. $\varphi_\delta * g$ „erbt" alle guten Eigenschaften von φ, auch wenn g „schlecht" ist. Insb ist $\varphi_\delta * g \in C^\infty$. Weiter ist

$\|f - \varphi_\delta * g\|_{L^p} \le \|f - g\| + \|g - \varphi_\delta * g\|_{L^p} \le 2\varepsilon$ für δ klein genug nach Satz 8.9

<u>8.11 Korollar</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $\int f(u) g(u)\, du = 0$ $\forall g \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann ist $f = 0$ $(p < \infty)$

<u>Bew</u> Zu $f \in L^p$ gibt es ein $g \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, mit $\|f\|_{L^p} = \int f(u) g(u)\, du$ und $\|g\|_{L^{p'}} = 1$. Wähle z.B.

$g(u) = |f(u)|^{p-1} \operatorname{sign} f(u) \cdot \|f\|_{L^p}^{\frac{1}{p} - 1}$. Dann folgt: (wie im Beweis von Satz 8.1)

$\|f\|_{L^p} = (\int |f(u)|^p\, du)^{1/p} = \|f\|^{1/p - 1} \int |f(u)|^p\, du = \int f(u) \frac{\operatorname{sign} f(u) \cdot |f(u)|^{p-1}}{\|f\|^{1 - 1/p}}\, du = \int f(u) g(u)\, du$, $\|g\|_{L^{p'}} = 1$

$\|f\|_{L^p} = \int f(u) g(u)\, du = \int f(u) [g(u) - \varphi(u)]\, du$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Wähle nach 8.10 ein $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\|g - \varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} < \frac{1}{2} \Rightarrow \|f\|_{L^p} \overset{\text{Höld}}{\le} \|f\|_{L^p} \|g - \varphi\|_{L^{p'}} < \frac{1}{2} \|f\|_{L^p} \Rightarrow \|f\|_{L^p} = 0$, also $f = 0$

Kap II Elemente der Operatortheorie

9. Der Satz von Baire und der Satz von Banach-Steinhaus

9.1 Satz (Baire) Sei (M,d) ein vollst. metr. Raum und U_n, $n\in\mathbb{N}$ offen und dicht in M. Dann ist

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ebenfalls dicht in M.

Bew $D := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Wir zeigen: Zu jeder Kugel $K(x_0,\varepsilon)$, $x_0\in M$, $\varepsilon>0$ gibt es ein $x\in K(x_0,\varepsilon)\cap D$.

(i) $U_1\cap K(x_0,\varepsilon)$ offen und nicht leer, da U_1 dicht $\Rightarrow \exists x_1\in U_1$ und $\varepsilon_1>0$ mit $\varepsilon_1<\frac{1}{2}\varepsilon$ so dass

$K(x_1,2\varepsilon_1)\subseteq U_1\cap K(x_0,\varepsilon) \Rightarrow \overline{K(x_1,\varepsilon_1)}\subseteq U_1\cap K(x_0,\varepsilon)$. (ii) $U_2\cap K(x_1,\varepsilon_1)$ offen, nicht leer

$\Rightarrow \exists x_2\in U_2$ und $\varepsilon_2<\frac{1}{2}\varepsilon_1$ mit $\overline{K(x_2,\varepsilon_2)}\subseteq K(x_2,2\varepsilon_2)\subseteq U_2\cap K_1(x_1,\varepsilon_1)\subseteq U_2\cap U_1\cap K(x_0,\varepsilon)$

Induktiv finden wir eine Folge $\varepsilon_n>0$ und x_n mit

i) $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}$ (d.h. $\varepsilon_n\le\frac{1}{2^n}\varepsilon$) ii) $\overline{K(x_n,\varepsilon_n)}\subseteq U_n\cap K(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})\subseteq U_1\cap\ldots\cap U_n\cap K(x_0,\varepsilon)$

Insbesondere für $n>N$: $d(x_n,x_N)\le\sum_{j=N+1}^{n} d(x_j,x_{j-1})\le\sum_{j=N+1}^{n}\varepsilon_j\le\left(\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\right)\varepsilon\le\varepsilon$, d.h. (x_n) ist CF.

Da M vollst, ex $\lim_{n\to\infty} x_n =: x\in M$. Mit ii) gilt $x_n\in\overline{K(x_N,\varepsilon_N)}$ für $n\ge N \Rightarrow x=\lim_{n\to\infty}x_n\in\overline{K(x_N,\varepsilon_N)}$

$\Rightarrow x\in U_1\cap\ldots\cap U_N\cap K(x_0,\varepsilon)\ \forall N\in\mathbb{N} \Rightarrow x\in\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\right)\cap K(x_0,\varepsilon) = D\cap K(x_0,\varepsilon)$

9.2 Def a) Eine TM L eines metrischen Raumes M heißt nirgends dicht, falls $\overline{L}$ keine inneren Punkte enthält

b) Eine TM L, die sich als Vereinigung von einer Folge von nirgends dichten Mengen L_n darstellen lässt, d.h.

$L=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, heißt von 1. Kategorie

c) Eine TM L heißt von 2. Kategorie, falls L nicht von 1. Kategorie ist

Bem • Ist L nirgends dicht, so ist $M\setminus\overline{L}$ dicht in M

• Ist L nirgends dicht oder von 1. Kat, so ist L „dünn", bzw „voller Löcher"

9.3 Korollar (Kategoriensatz von Baire)

a) In einem vollst metr. Raum (M,d) liegt das Komplement einer Menge von 1. Kat stets dicht in M

b) Ein vollst. metr. Raum ist von 2. Kategorie

c) Sei (M,d) vollst und M_n, $n\in\mathbb{N}$, eine Folge abg Mengen mit $M=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Dann enthält mindestens

ein M_n eine Kugel

Bew a) Sei L von 1. Kat. $\Rightarrow L=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, L_n nirgends dicht $\overset{9.1}{\Rightarrow} L^c=\bigcap_n L_n^c\supseteq\bigcap_n(\overline{L_n})^c$ dicht in M

a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) nach Definition

9.4 Satz $E=\{x\in C[0,1] : x'(s)$ ex für kein $s\in[0,1]\}$ ist dicht in $(C[0,1],\|.\|_\infty)$

Insbesondere: • $E\neq\emptyset$, • $C^1[0,1]$ ist von 1. Kat in $C[0,1]$

Bew Def $E_n := \{x\in C[0,1] : \sup_{0<|h|\le\frac{1}{n}}\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right|>n,\ \forall t\in[0,1]\}$. Dann $E\supseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$

Wir werden zeigen: i) E_n ist offen in $C[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ii) E_n ist dicht in $C[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Da $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ vollst ist folgt damit aus dem Satz von Baire, dass $E \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ dicht ist in $C[0,1]$.

„i)" Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $x \in E_n$. Wähle $\forall t \in [0,1]$ ein δ_t def durch $\sup_{0<|h|\leq \frac{1}{n}} \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \right| = n + 2\delta_t$

$\Rightarrow \left| \frac{x(t+h_t)-x(t)}{h_t} \right| > n + \delta_t$ für $0 < |h_t| \leq \frac{1}{n}$. Da x stetig, gibt es zu t eine kleine Umgebung U_t mit

$\left| \frac{x(s+h_t)-x(s)}{h_t} \right| > n + \delta_t$ für $s \in U_t$, $0<|h_t| \leq \frac{1}{n}$. OE sei dabei U_t offen. Da $[0,1]$ kompakt und

$[0,1] = \bigcup_{t \in [0,1]} U_t$ gibt es endl. viele U_{t_j} mit $[0,1] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{t_j}$. Setze $\delta = \min\{\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_n}\} > 0$ und

$h := \min\{h_{t_1}, \dots h_{t_n}\} > 0$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \frac{1}{2} h\delta$. Sei $y \in C[0,1]$ mit $\|x-y\|_\infty < \varepsilon$. Zu $t \in [0,1]$

wähle $i \in \{1..n\}$ mit $t \in U_i$. Dann:

$$\left| \frac{y(t+h_{t_i})-y(t)}{h_{t_i}} \right| \geq \left| \frac{x(t+h_{t_i})-x(t)}{h_{t_i}} \right| - 2\frac{\|x-y\|_\infty}{|h_{t_i}|} > n+\delta - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{h} > n \quad \text{nach der Wahl von } \varepsilon.$$

$\Rightarrow y \in E_n$, also $K(x,\varepsilon) \subseteq E_n$. D.h. E_n ist offen $\forall n \in \mathbb{N}$

„ii)" Sei $\emptyset \neq V \subseteq C[0,1]$ offen. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es ein Polynom p mit $p \in V$ und $\varepsilon > 0$

mit $K(p,\varepsilon) \subseteq V$. Sei weiter y_m eine Sägezahnfkt mit $y_m : [0,1] \to [0,\varepsilon]$ und Steigung $\pm m$. $\Rightarrow \overbrace{p + y_m}^{=: x_m} \in K(p,\varepsilon)$.

Wähle zu n die Zahl $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $m > n + \|p'\|_\infty$. Für $t \in [0,1]$, $0<|h| \leq \frac{1}{n}$ gilt

$$\left| \frac{x_m(t+h)-x_m(t)}{h} \right| \geq \left| \frac{y_m(t+h)-y(t)}{h} \right| - \overbrace{\left| \frac{p(t+h)-p(t)}{h} \right|}^{\leq \|p'\|_\infty} \quad \text{nach dem MWS}$$

$\Rightarrow \sup_{0<|h|\leq \frac{1}{n}} \left| \frac{x_m(t+h)-x_m(t)}{h} \right| \geq m - \|p'\|_\infty > n$, nach der Wahl von m. $\Rightarrow x_m \in E_n \cap V \neq \emptyset \Rightarrow$ dicht.

<u>9.5 Satz</u> (von Banach-Steinhaus). Sei X BR, Y nVR und $(T_i) \subseteq B(X,Y)$.

Gilt $\sup \|T_i x\| = c(x) < \infty$ $\forall x \in X$ dann ist $\sup \|T_i\| = \sup \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_i x\| < \infty$

<u>Bew</u> $E_n := \{x \in X \mid \sup \|T_i x\| \leq n\}$. Dann ist E_n abg, denn $E_n = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \{x \in X : \|T_i x\| \leq n\}$. Außerdem

ist E_n symm, d.h. $x \in E_n \Leftrightarrow -x \in E_n$, und konvex, denn für $x_1, x_2 \in E_n$ gilt

$\sup \|T_i(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)\| \leq \frac{1}{2} \sup \|T_i x_1\| + \frac{1}{2} \sup \|T_i x_2\| \leq n$, also $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in E_n$.

Es gilt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Nach Baire ex $N \in \mathbb{N}$, $x \in E_N$, $\varepsilon > 0$ mit $K(x,\varepsilon) \subseteq E_N \Rightarrow K(-x,\varepsilon) \subseteq E_N$

Sei $z \in X : \|z\| < \varepsilon$. $z = \frac{1}{2}(x+z) + \frac{1}{2}(z-x) \in \frac{1}{2}E_N + \frac{1}{2}E_N \subseteq E_N$

$\Rightarrow \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\|z\| \leq 1} \|T_i z\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\|z\| < \varepsilon} \|T_i \frac{z}{\varepsilon}\| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{z \in E_N} \frac{1}{\varepsilon} \|T_i z\| \leq \frac{N}{\varepsilon}$

<u>9.6 Bem</u> a) Aus $c(x)$ kann man nicht $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|T_i\|$ herleiten

b) Die Vollständigkeit von X ist notwendig

<u>Bsp</u> $F = \{(x_n) \mid x_n = 0$ für alle bis auf endl viele $n\}$ mit $\|\cdot\|_\infty$. Def $T_k(x_n) := k \cdot x_k$

Dann gilt $\|T_k\| = k$, also $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\| = \infty$. Aber: $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k(x_n)\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|k x_k\| < \infty$

<u>9.7 Kor</u> Sei X BR, Y nVR und $(T_n) \subseteq B(X,Y)$ derart, dass $\lim_{n\to\infty} T_n x = y_x$ existiert $\forall x \in X$.

Dann ist $Tx := y_x$ linear und $T \in B(X,Y)$

Bew T ist linear, da lim und T_n jeweils linear sind. $(T_n x)$ ist insb beschr $\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$

$\Rightarrow \|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \cdot \|x\| \Rightarrow T \in B(X,Y)$ mit $\|T\| \leq \sup \|T_n\|$

Bsp $X = Y = \ell^p$, $T_k(x_n) := (x_1 .. , x_k, 0 ..)$. Dann ist $\|T_k(x_n) - I(x_n)\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Aber: $\|T_k - I\| \geq \|(T_k - I)(0..0,\underset{k+1\text{-te Stelle}}{1},0..)\|_{\ell^p} = 1 \not\to 0$, d.h. pktw. Konv impliziert keine Op Konv.

10. Satz von der offenen Abbildung

10.1 Def Eine Abb zw mR heißt offen, wenn offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden

10.2 Lemma Seien X, Y nVR und $T: X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent

a) T offen b) $\exists \varepsilon > 0: K_Y(0,\varepsilon) \subseteq T(K_X(0,1))$

Bew „a⇒b" $0 \in T(K_X(0,1))$ offen ✓. „b⇒a" Sei $U \subset X$ offen, $x \in U$, $\varepsilon > 0$ mit $K_X(x,\varepsilon) \subseteq U$.

$\Rightarrow T(K_X(x,\varepsilon)) \subseteq T(U) \Rightarrow Tx + \varepsilon T(K_X(0,1)) = Tx + T(K_X(0,\varepsilon)) \subseteq U$. Nach b) ex ein $\delta > 0$

mit $K_Y(0,\delta) \subseteq T(K_X(0,1))$. $\Rightarrow K_Y(Tx, \varepsilon\delta) = Tx + \varepsilon K_Y(0,\delta) \subseteq T(U) \Rightarrow T(U)$ offen

10.3 Satz (von d. offenen Abb). Seien X, Y BR und $T \in B(X,Y)$. Dann gilt:

$$T \text{ surjektiv} \iff T \text{ offen}$$

Bew „⇐" Nach 10.2 ex $\varepsilon > 0$: $K_Y(0,\varepsilon) \subseteq T(K_X(0,1)) \Rightarrow K_Y(0,R) \subseteq T(K_X(0,\frac{R}{\varepsilon}))\ \forall R > 0 \Rightarrow Y \subseteq T(X)$

„⇒" Beh $\exists \varepsilon > 0: K_Y(0,\varepsilon) \subseteq \overline{T(K_X(0,1))}$. Bew Def $E_n := \overline{T(K_X(0,n))}$. Dann ist E_n abg, symm und konvex, da Kugeln um 0 symm und konvex sind und T linear ist. Nach Vor ist $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Mit Baire folgt, $\exists N \in \mathbb{N}, y \in E_N, \tilde{\varepsilon} > 0: K(y,\tilde{\varepsilon}) \subseteq E_N$. Sei $z \in Y$ mit $\|z\| < \tilde{\varepsilon}$. $z = \frac{1}{2}(z+y) + \frac{1}{2}(z-y) \subseteq E_N$

$\Rightarrow K_Y(0,\tilde{\varepsilon}) \subseteq \overline{T(K_X(0,N))} \Rightarrow K_Y(0,\frac{\tilde{\varepsilon}}{N}) \subseteq \overline{T(K_X(0,1))} \Rightarrow$ Beh mit $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{N}$

Beh $\exists \delta > 0: K_Y(0,\delta) \subseteq T(K_X(0,1))$. Bew Wenn $\tilde{y} \in K_Y(0,\varepsilon)$ gibt es ein $\tilde{x} \in K_X(0,1)$ mit $\|\tilde{y} - T\tilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Außerdem $2(\tilde{y} - T\tilde{x}) \subseteq K_Y(0,\varepsilon)$. Induktiv wählen wir auf diese Art zu $y \in K_Y(0,\varepsilon)$ $\begin{cases} y_0 = y \\ y_{k+1} = (y_k - Tx_k)\cdot 2 \end{cases}$ für $k \in \mathbb{N}$. Es gilt: $(y_k) \subseteq K_Y(0,\varepsilon)$ und $(x_k) \subseteq K_X(0,1)$. Damit folgt

$(*)\ T\left(\sum_{k=0}^{N} 2^{-k} x_k\right) = \sum_{k=0}^{N} 2^{-k} y_k - 2^{-(k+1)} y_{k+1} = y_0 2^0 - 2^{-(N+1)} y_{N+1}$. Wegen $\left\|\sum_{k=0}^{N} 2^{-k} x_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{N} 2^{-k} < 2$

ist $\left(\sum_{k=0}^{N} x_k\right)_N$ eine CF mit GW $x \in K_X(0,2) \subseteq X$. $\overset{(*)}{\Rightarrow} T(x) = \lim_{N\to\infty} y - 2^{-(N+1)} y_{N+1} = y$.

$\Rightarrow K_Y(0,\varepsilon) \subseteq T(K_X(0,2)) \Rightarrow K_Y(0,\frac{\varepsilon}{2}) \subseteq T(K_X(0,1)) \Rightarrow$ Beh für $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

10.4 Kor Seien X, Y BR und $T \in B(X,Y)$ bij. Dann ist $T^{-1} \in B(X,Y)$

Bew $10.3 \Rightarrow T$ offen. Sei $U \subseteq X$ offen $\Rightarrow (T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ offen

10.5 Kor Sei X VR und $\|.\|, |||.|||$ Normen auf X, die X zu einem BR machen. Gibt es ein $C > 0$ so dass $\|x\| \leq C|||x|||\ \forall x \in X$, dann sind die Normen äquivalent

Bew Nach Vor ist $I: (X, |||.|||) \to (X, \|.\|)$ beschränkt $\overset{10.4}{\Rightarrow} I: (X, \|.\|) \to (X, |||.|||)$ beschränkt

11. Projektionen

11.1 Def Sei X BR. $P: X \to X$ heißt Projektion, falls P linear und $P^2 = P$ ist

11.2 Bsp a) $X = L^p(\mathbb{R},\mu)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mu(\Omega) > 0$ und $\mu(\mathbb{R}\setminus\Omega) > 0$. $Pf := 1\!\!1_\Omega f$ Projektion

Weiter ist $\|Pf\|_{L^p} = (\int |1\!\!1_\Omega f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} = (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L^p}$, also P beschr.

b) $X = L^p([0,1]^2)$, $1 \le p < \infty$. $Pf(x,y) := \int_0^1 f(s,y)\, ds$ Projektion. Weiter ist

$$\|Pf\|_{L^p} = \Big(\int_0^1 \int_0^1 \Big|\int_0^1 f(s,y)\, ds\Big|^p dy\, dy\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^1 |f(s,y)|\, ds\Big)^p dy\Big)^{\frac{1}{p}} \underset{\text{Jensen}}{\le} \Big(\int_0^1 \int_0^1 |f(s,y)|^p ds\, dy\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}$$

11.3 Bem Sei X VR und $M \subseteq X$ UVR. Nach dem Basisergänzungssatz gibt es eine lineare Projektion mit $P(X) = M$.

Bew Sei $(b_i)_{i\in I}$ Basis von M und $(b_i)_{i\in J}$ Basis von X, $I \subseteq J$. Dann: $\forall x \in X\ \exists (\alpha_j(x))_j : x = \sum_{j\in J} \alpha_j(x) b_j$

und $\alpha_j(x) = 0$ für fast alle $j \in J$ $\Rightarrow$ $Px := \sum_{i\in I} \alpha_i(x)\, b_i$ ist Projektion mit gew. Eig.

Bem Sind X, Y BR, dann ist auch $X \oplus Y$ ein BR mit $\|(x,y)\|_{X\oplus Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$

11.4 Satz Sei X BR, $M \subseteq X$ abg UVR. Dann sind äquivalent

a) Es gibt eine stetige Proj $P: X \to X$ mit $P(X) = M$

b) Es gibt einen abg UVR $N \subseteq X$: $X = M \oplus N$

c) Es gibt einen abg UVR $N \subseteq X$ und $J: M \oplus N \to X$, $J(x,y) = x+y$ ist ein Isomorphismus.

Insb. $\exists C > 0 : \forall x \in M, y \in N$: $C(\|x\| + \|y\|) \le \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Bew „a⇒b" Def $N := (I-P)(X)$. Dann gilt $X = P(X) + (I-P)(X)$ und $P(X) \cap (I-P)(X) = \{0\}$

N ist abg, denn $N = \mathrm{Kern}(P) = P^{-1}(0)$ und P ist stetig

„b⇒c" Sei N wie in b). Dann gilt: $\|J(x,y)\| = \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| = \|(x,y)\|_{M\oplus N}$ $\forall x \in M, y \in N$

Außerdem ist J bijektiv, da $X = M \oplus N$ $\overset{10.4}{\Rightarrow}$ J^{-1} stetig. Weiter ex $\tilde{C} > 0$ sodass für alle $x \in M, y \in N$ gilt:

$\|x\| + \|y\| = \|(x,y)\|_{M\oplus N} = \|J^{-1}(x+y)\| \le \tilde{C}\|x+y\|$. Setze $C := \frac{1}{\tilde{C}}$

„c⇒a". Def $\tilde{P}: M\oplus N \to M \oplus N$, $\tilde{P}(x,y) := (x,0)$ $\Rightarrow$ $\tilde{P}(M\oplus N) = M \oplus \{0\}$. Setze $P = J\tilde{P}J^{-1}$

Dann: $P^2 = J\tilde{P}J^{-1}J\tilde{P}J^{-1} = P$, P ist linear und stetig. $P(X) = J\tilde{P}(M\oplus N) = J(M\oplus\{0\}) = M$

Sprechweise M heißt komplementierter Raum. $N = \mathrm{Kern}(P)$ heißt Komplementärraum

Bsp a) $X = L^p(\mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $Pf := 1\!\!1_\Omega f$. $M = P(X) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ f.ü. auf } \mathbb{R}\setminus\Omega\}$

$N = \mathrm{Kern}(P) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ f.ü. auf } \Omega\}$

b) $X = L^p([0,1]^2)$, $Pf(x,y) = \int_0^1 f(s,y)\, ds$. $M = \{f \in L^p([0,1]^2) : f \text{ konstant in der 1. Komp}\}$

$N = \{f \in L^p([0,1]^2) : \int_0^1 f(s,y)\, ds = 0 \text{ für f.a. } y \in [0,1]\}$

Da P stetig ist, gilt $X = M \oplus N$ in beiden Fällen

12. Abgeschlossene Operatoren

In diesem Abschnitt sei X BR, $D(A)$ dichter UVR von X und $A: D(A) \to X$ linear.

Bem Gilt $\|Ax\| \leq C\|x\| \ \forall x \in D(A)$, so lässt sich A zu einem beschränkten $A \in B(X)$ fortsetzen

12.1 Bsp a) $X = C[0,1]$, $D(A) = C^1[0,1]$, $Ax := x'$ Bch A ist nicht beschränkt

Bew Für $z > 0$ def $x_z(t) := e^{izt}$, $t \in [0,1] \Rightarrow Ax_z(t) = iz e^{izt}$

Dann ist $\|x_z\|_\infty = 1$, $\|Ax_z\|_\infty = z \xrightarrow{z \to \infty} \infty \Rightarrow A$ nicht beschr. auf $D(A)$

b) $X = L^p([0,1])$, $Bx(t) = \frac{1}{t} x(t)$, $D(B) = \{x \in L^p([0,1]) \mid \exists \varepsilon(x) : x = 0$ fü auf $[0, \varepsilon(x)]\}$

B bildet nach X ab, denn $\|Bx\|_{L^p} = \left(\int_{\varepsilon(x)}^1 t^{-p} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\varepsilon(x)} \|x\|_{L^p}$ aber B ist nicht beschr.

Bew $x_z = 1\!\!1_{[\frac{1}{z}, 1]}$ für $z > 0 \Rightarrow \|x_z\|_{L^p} = \left(\int_{\frac{1}{z}}^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\frac{1}{z}}^1 1 dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$

$\|Bx_z\|_{L^p} = \left(\int_{\frac{1}{z}}^1 t^{-p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{z \to \infty} \infty$, da $p \geq 1 \Rightarrow B$ ist nicht beschr.

12.2 Def Auf $D(A)$ def wir die Graphennorm $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\| \quad \forall x \in D(A)$

Insb. ist $A: (D(A), \|.\|_A) \to X$ stetig, denn $\|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A$

12.3 Satz Es sind äquivalent: a) $(D(A), \|.\|_A)$ ist ein BR

b) $\mathrm{Graph}(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subseteq X \times X$ ist abg

c) Wenn $(x_n) \subseteq D(A)$: $x_n \to x$ in X und $Ax_n \to y$ in X, so ist $x \in D(A)$, $Ax = y$

Bew „a ⇒ b" Def $J: D(A) \to X \times X$, $J(x) := (x, Ax)$. Dann gilt $\|(x, Ax)\|_{X \times X} = \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_A$

$\Rightarrow J$ ist Isometrie $\Rightarrow \mathrm{graph}(A) = \mathrm{Bild}(J)$ ist vollständig, insb abg

„b ⇒ c" Sei $(x_n) \subseteq D(A)$ mit $x_n \to x$ in X und $Ax_n \to y$ in X. $\Rightarrow (x_n, Ax_n) \to (x, y)$ in $X \times X \Rightarrow (x,y) \in \mathrm{Graph}(A)$

$\Rightarrow x \in D(A)$, $Ax = y$ Graph(A) abg

„c ⇒ a" Sei (x_n) CF in $D(A)$. Damit ist (x_n) CF in X und (Ax_n) CF in X. X ist vollst, also ex $x, y \in X$

sodass $x_n \to x$ und $Ax_n \to y \overset{c)}{\Rightarrow} x \in D(A)$, $Ax = y \Rightarrow \|x - x_n\|_A = \|x - x_n\| + \|y - Ax_n\| \to 0$

12.4 Def A heißt abg, wenn a) - c) aus 12.3 erfüllt sind.

12.5 Bem Abgeschlossen VS stetig

A stetig: $x_n \to x \Rightarrow Ax_n \to y$, $Ax = y$

A abgeschlossen: $x_n \to x$ und $Ax_n \to y \Rightarrow Ax = y$

12.6 Satz Ist A abg und $D(A) = X$, so ist A stetig auf X (Satz vom abg Graphen)

Bew $(X, \|.\|_A)$ und $(X, \|.\|)$ sind BR. Außerdem gilt: $\|x\|_X \leq \|x\|_A \quad \forall x \in X$

$\overset{10.5}{\Rightarrow} \exists C > 0: \|x\|_A \leq C\|x\| \ \forall x \in X. \Rightarrow \|x\| + \|Ax\| \leq C\|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq C\|x\| \Rightarrow A$ ist stetig

12.7 Bsp a) $X = C[0,1]$, $D(A) = C^1[0,1]$, $Ax = x'$. Bch A ist abg.

Bew $\|x\|_A = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty = \|x\|_{C^1} \Rightarrow (D(A), \|\cdot\|_A) = (C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1}) \Rightarrow (D(A), \|\cdot\|_A)$ ist BR

b) $X = L^p[0,1]$, $Ax(t) = \frac{1}{t} x(t)$, $t \in [0,1]$, $D_1 := \{ f \in L^p[0,1] \mid \exists \varepsilon > 0 : f = 0$ f.ü. auf $[0,\varepsilon] \}$

$D_2 := \{ f \in L^p[0,1] \mid t \mapsto \frac{1}{t} f(t) \in L^p[0,1] \}$. Bch A ist auf D_2 abg.

Bew Sei $(x_n) \subseteq D_2$: $x_n \to x$ in X und $Ax_n \to y$ in X. $\Rightarrow \exists (x_{n_k})_k \subseteq D_2$: $x_{n_k} \to x$ f.ü. und

$Ax_{n_k} \to y$ f.ü.. D.h. $\frac{1}{t} x(t) \leftarrow \frac{1}{t} x_{n_k}(t) = Ax_{n_k}(t) \to y(t)$ für f.a. $t \in [0,1] \Rightarrow y(t) = \frac{1}{t} x(t)$ f.ü.

$\Rightarrow Ax = y$, $x \in D_2$. Bch A ist nicht abg auf D_1

Bew Def $x_n(t) := \begin{cases} t, & t \in (\frac{1}{n}, 1] \\ 0, & t \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$, $x(t) := t$, $t \in [0,1]$ und $y(t) := 1$, $t \in [0,1]$.

Dann $\|x_n - x\|_{L^p} = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} t^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$, $\|Ax_n - y\| = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} 1 \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$ aber $x \notin D_1 \Rightarrow A$ nicht abg

13 Spektrum und Resolvente

13.1 Def X BR über $\mathbb{C}$, $A : X \supseteq D(A) \to X$ linear und abg

a) $\lambda \in \mathbb{C}$ gehört zur Resolventenmenge von A, $\lambda \in \rho(A)$, falls $\lambda Id - A : D(A) \to X$ bijektiv ist

b) $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt Spektrum von A

c) $\lambda \in \rho(A) \longmapsto R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ heißt die Resolventenfkt von A

13.2 Bem. Falls $\lambda \in \rho(A)$, so ist $R(\lambda, A) \in B(X)$ und $R(\lambda, A) : X \to (D(A), \|\cdot\|_A)$ ein Isomorphismus

Bew Für $\lambda \in \rho(A)$ ist $(\lambda - A) : (D(A), \|\cdot\|_A) \to X$ bijektiv und stetig, denn $\|(\lambda - A)x\| \leq \max(1, |\lambda|)(\|x\| + \|Ax\|) = C \cdot \|x\|_A$

Nach Satz d. offenen Abb ist $R(\lambda, A) : X \to (D(A), \|\cdot\|_A)$ ein Isomorphismus, $X \xrightarrow{R(\lambda,A)} (D(A), \|\cdot\|_A) \hookrightarrow X$, also $R(\lambda, A) \in B(X)$

13.3 Bsp a) $X = \mathbb{C}^d$, $A \in B(X) \hat{=} \mathbb{C}^{d \times d}$, $\sigma(A) = \{ \lambda : \lambda$ EW von $A \}$

b) Sei $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, $A(x_n) = (\alpha_n x_n)$ für $(x_n) \in D(A) = \{ (x_n) : \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n x_n|^p < \infty \}$

Dann ist A abg und $\overline{\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}} = \sigma(A)$

Bew $(\lambda - A)(x_n) = ((\lambda - \alpha_n) x_n)$. Formal: $(\lambda - A)^{-1}(x_n) = ((\lambda - \alpha_n)^{-1} x_n)$. Nach Übung gilt:

$\|(\lambda - A)^{-1}\| = \sup_n |\lambda - \alpha_n|^{-1} = \frac{1}{d(\lambda, \{\alpha_n\})} < \infty \Leftrightarrow d(\lambda, \overline{\{\alpha_n\}}) > 0 \Leftrightarrow \lambda \notin \overline{\{\alpha_n\}}$

Also folgt $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \lambda \notin \overline{\{\alpha_n\}}$ und $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \in \overline{\{\alpha_n\}}$

Folgerung Jede abg Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ kann das Spektrum eines abg. Op. sein. Insb: $\sigma(A)$ kann überabz sein und das Spektrum $\sigma(A)$ besteht im allg nicht nur aus Eigenwerten

Bew Geg $M \subseteq \mathbb{C}$ abg, wähle dichte Folge $\alpha_n \in M$, also $\overline{\{\alpha_n\}} = M$. Mit $X = \ell^p$, $A(x_n) = (\alpha_n x_n)$ folgt $\sigma(A) = M$

Falls $\lambda \in \overline{\{\alpha_n\}} \setminus \{\alpha_n\}$, dann ist λ kein Eigenwert von A

c) Sei $X = \ell^p$. $Ae_1 = 0$, $Ae_n = e_{n-1}$, $n > 1$, also $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ Linksverschiebung

$Be_n := e_{n+1}$, also $B(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ Rechtsverschiebung. Dann ist $\sigma(A) = \sigma(B) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1 \}$

13.4 Satz (Resolventendarstellung). Sei $X \supseteq D(A) \xrightarrow{A} X$ abg, X BR. Für $\lambda_0 \in \varrho(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0,A)\|}$ ist auch $\lambda \in \varrho(A)$ und $R(\lambda,A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0-\lambda)^n R(\lambda_0,A)^{n+1}$

Insbesondere ist $\varrho(A)$ offen und $\sigma(A)$ abg.

Bew $(\lambda - A) = -(\lambda_0 - \lambda) + (\lambda_0 - A) = (\lambda_0 - A)[id - (\lambda_0-\lambda)R(\lambda_0,A)] = (\lambda_0 - A)\cdot(id - S)$ mit $S = (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0,A)$

Es ist $\|S\| \le |\lambda_0 - \lambda| \, \|R(\lambda_0,A)\| < 1$ nach Vor. Nach dem Satz über die Neumannsche Reihe gilt

$(id - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n \Rightarrow (\lambda - A)$ ist ein Produkt von invertierbaren Operatoren $(\lambda_0 - A)$ und $(id - S)$, d.h.

$(\lambda - A)^{-1}$ existiert und $(\lambda-A)^{-1} = (id-S)^{-1}(\lambda_0-A)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n R(\lambda_0,A)^n\right]\cdot R(\lambda_0,A) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n R(\lambda_0,A)^{n+1}$

13.5 Satz (Resolventengleichung) Sei A abg Op auf X. Für $\lambda, \mu \in \varrho(A)$ gilt $R(\lambda,A) - R(\mu,A) = (\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A)$

Insbesondere ist $\lambda \in \varrho(A) \mapsto R(\lambda,A) \in B(X)$ eine komplex diff'bare Fkt und $\frac{d}{d\lambda}R(\lambda,A) = -R(\lambda,A)^2$

Bew $R(\lambda,A) - R(\mu,A) = R(\lambda,A)[id - (\lambda - A)R(\mu,A)] = R(\lambda,A)[\mu - A - \lambda + A]\, R(\mu,A) = (\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A)$

$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}R(\lambda,A) = \lim_{\mu\to\lambda}\frac{R(\mu,A)-R(\lambda,A)}{\mu-\lambda} = \lim_{\mu\to\lambda}[-R(\lambda,A)R(\mu,A)] = -R(\lambda,A)^2$, denn $\lambda \in \varrho(A) \mapsto R(\lambda,A) \in B(X)$

ist stetig als Potenzreihe (13.4)

13.6 Satz Falls $A \in B(X)$ ist $\sigma(A) \neq \emptyset$ und kompakt mit $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|A\|\}$

Für $|\lambda| > \|A\|$ gilt: $R(\lambda,A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}A^n$

Bew Für $|\lambda| > \|A\|$ gilt: $\lambda - A = \lambda[id - S]$ mit $S = \frac{A}{\lambda}$, $\|S\| \le \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$. Mit Neumann folgt

$(I-S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n \Rightarrow (\lambda-A)^{-1} = \lambda^{-1}(id-S)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}A^n$. Also $\sigma(A) \subseteq \{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| \le \|A\|\}$

D.h. $\sigma(A)$ ist beschr und abg und damit kompakt. Weiter gilt in jedem BR X: Es gibt $x \in X$ und $x' \in X'$

mit $x'(x) \neq 0$ (Hahn-Banach). Indirekter Beweis für $\sigma(A) \neq \emptyset$: Sei $\sigma(A) = \emptyset$ bzw $\varrho(A) = \mathbb{C}$. Betrachte

die Abb $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto r(\lambda) = x'(R(\lambda,A)x) \in \mathbb{C}$ mit x, x' wie oben. Dann ist $r(\lambda)$ holomorph auf $\mathbb{C}$, denn

lokal gilt $r(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n \overbrace{x'(R(\lambda_0,A)x)}^{\in\mathbb{C}}$ für $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0,A)\|}$ nach 13.4. Setze $\Gamma := \{\lambda : |\lambda| \le 2\|A\|\}$

Nach dem Cauchy'schen Integralsatz gilt $\int_\Gamma r(\lambda)d\lambda = 0$. Für $\lambda \in \Gamma$ mit $|\lambda| > \|A\|$ gilt $R(\lambda,A) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}A^n$

$\Rightarrow r(\lambda) = x'(R(\lambda,A)x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x'(A^n x)$. Damit folgt

$0 = \int_\Gamma r(\lambda)d\lambda = \int_\Gamma\left[\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x'(A^n x)\right]d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\overbrace{\left[\int_\Gamma \lambda^{-n-1}d\lambda\right]}^{=0,\, n\ge 1} x'(A^n x) = x'(x)(2\pi i) \neq 0$

13.7 Bem Für $X = L^p(\Omega)$ ist Hahn Banach erfüllt: Für $x \in L^p(\Omega)$, $x \neq 0$ wähle $x'(\omega) := |x(\omega)|^{p-1}\operatorname{sign} x(\omega)$

Dann ist $x'(x) = \int_\Omega |x(\omega)|^p d\omega \neq 0$, $x' \in L^{p'}$, $\int |x'|^{p'}d\omega = \int |x(\omega)|^{(p-1)p'}d\omega$

13.8 Def Für $A \in B(X)$ heißt $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ der Spektralradius von A

13.9 Satz Für $A \in B(X)$ ist $r(A) = \lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|A^n\|^{1/n}$

Hilfsatz: $a_n \in \mathbb{R}$ mit $0 \le a_{n+m} \le a_n \cdot a_m$, $n,m \in \mathbb{N}$. Dann: $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \inf_n a_n^{\frac{1}{n}} =: a$

Bew Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[N]{a_N} \le a + \varepsilon$. Setze $b = b(\varepsilon) = \max\{a_1, \dots, a_N\}$

Jedes $n\in\mathbb{N}$ lässt sich schreiben als $n = k\cdot N + r$, $k\in\mathbb{N}$, $r\in\{1,\dots,N-1\}$. Damit folgt:

$\sqrt[n]{a_n} = a_{kN+r}^{\frac{1}{n}} \leq (a_N^k a_r)^{\frac{1}{n}} \leq (a+\varepsilon)^{\frac{kN}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{-\frac{r}{n}} b^{\frac{1}{n}} < a+2\varepsilon$ für n groß genug

Bew 13.9 $a_n := \|A^n\|$ erfüllt $a_{n+m} = \|A^{n+m}\| = \|A^n\cdot A^m\| \leq \|A^n\|\cdot\|A^m\| = a_n\cdot a_m$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Nach 13.6 gilt für $|\frac{1}{\lambda}| > \|A\|$ die Darstellung: $R(\frac{1}{\lambda},A) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}A^n$ (x)

Nach dem Wurzelkrit konv diese Reihe falls $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|\lambda^{n+1}A^n\|^{\frac{1}{n}} = |\lambda|\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$, d.h. $|\lambda| < [\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}]^{-1}$

$\Rightarrow R(\frac{1}{\lambda},A)\in B(X)$ für $|\frac{1}{\lambda}| > \lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. Also $\sigma(A)\subseteq\{\lambda : |\lambda| \leq \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}\}$, $r(A)\leq \lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$

Wie in der Funk Theo zeigt man, dass wegen (x) $R(\lambda,A)$ im größten Kreis, der zum Holomorphie-Gebiet von $\frac{1}{\lambda}\in\rho(A)\mapsto R(\frac{1}{\lambda},A)$ gehört, dort als die Potenzreihe in (x) dargestellt werden kann. Also $\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A)$

13.10 Bsp $X = C[0,1]$, $Q := \{(s,t)\in[0,1] : s\leq t\}$ und $k: Q\to\mathbb{R}_+$ stetig. Def einen Volterraoperator

$V: C[0,1]\to C[0,1]$ durch $(Vx)(t) = \int_0^t k(t,s)\,x(s)\,ds$.

Beh $V\in B(C[0,1])$, $\|V\| = \sup_{t\in[0,1]}\int_0^t k(t,s)ds \neq 0$ und $r(V) = 0$, d.h. $(\lambda - V)x = y$ eind lösbar $\forall y\in C[0,1], \lambda\neq 0$

Bew $\|Vx\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}\int_0^t k(t,s)\,x(s)ds \leq \sup\int_0^t k(t,s)ds\cdot\|x\|_\infty$ und $\|V1\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}\int_0^t k(t,s)\,ds$

Zz: $r(V) = \lim\|V^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$. V^n hat die Form $V^n x(t) = \int_0^t k^{(n)}(t,s)x(s)ds$ mit

$(V^{n+1}x)(t) = V(V^n x)(t) = \int_0^t k(t,s)(V^n x)(s)ds = \int_0^t k(t,s)\left(\int_0^s k^{(n)}(s,u)x(u)du\right)ds$

$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^t\left(\int_u^t k(t,s)k^{(n)}(s,u)ds\right)x(u)\,du \overset{!}{=} \int_0^t k^{(n+1)}(t,u)\,x(u)\,du$, d.h. $k^{(n+1)}(t,u) = \int_u^t k(t,s)k^{(n)}(s,u)ds$

Damit haben wir V^n als Integralop dargestellt und die Kerne von V^{n+1} und V^n in Beziehung gesetzt. Es gilt

$k^{(n)}(t,s) \leq \frac{M^n}{(n-1)!}|t-s|^{n-1}$, wobei $M = \sup\{k(t,s) : (s,t)\in Q\}$, denn: Vollst Ind: $n=1$: $k^{(1)}(t,s)\leq M$ ✓

$n\to n+1$: $k^{(n+1)}(t,u) = \int_u^t k(t,s)\,k^{(n)}(s,u)\,ds \leq M\int_u^t\frac{M^n}{(n-1)!}|s-u|^{n-1}ds = M^{n+1}\frac{1}{n!}|t-s|^n$

Es folgt für $x\in C[0,1]$: $(V^n x)(t) = \int_0^t k^{(n)}(t,s)x(s)ds \leq \frac{M^n}{(n-1)!}\int_0^t|t-s|^{n-1}|x(s)|ds \leq \frac{M^n}{(n-1)!}\|x\|_\infty$, $t\in[0,1]$

$\Rightarrow \|V^n\| \leq \frac{M^n}{(n-1)!} \Rightarrow 0\leq r(A) = \lim\|V^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim\frac{M}{((n-1)!)^{\frac{1}{n}}} = 0$, da für n ungerade $(n-1)! \geq (\frac{n-1}{2})^{\frac{n-1}{2}}$

14 Spektrum kompakter Operatoren

Sei X BR und $T\in B(X)$. Spezialfall: $\dim(X) < \infty$. Dann gelten folgende Aussagen der Lösungstheorie linearer Gleichungen (+) $\lambda x - Tx = y$:

(i) Für $\lambda\in\mathbb{C}$ hat (+) für $y\in X$ eine (eind. best.) Lsg $\Leftrightarrow$ $\lambda x - Tx = 0$ hat nur die triv Lsg

(ii) Bis auf endl viele EW $\lambda\in\sigma(T)$ hat (+) stets eine eind. bestimmte Lsg

14.1 Satz Falls $K\in K(X)$ hat $Id - K$ ein abgeschlossenes Bild und $\infty > \dim\operatorname{Kern}(Id-K) = \operatorname{codim}(Id-K)(X)$ $(= \dim X/(Id-K)(X))$

Bew Wir setzen weiter voraus dass ein endl dim Operator $F\in B(X)$ ex. mit $\|K - F\| < 1$

14.2 Lemma Zu jedem endl dim $F\in B(X)$ gibt es eine Zerlegung $X = X_0\oplus X_1$ mit $\dim X_1 < \infty$ und $F(X_1)\subseteq X_1$, $F(X_0) = \{0\}$

Bew Wähle $Y\subseteq X$, $\dim Y < \infty$ so dass $F(Y) = F(X)$. Setze $X_1 = Y + F(X)$, $\dim(X_1) < \infty$

$\Rightarrow X = X_1 + \ker F$, denn zu jedem $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $F(x) = F(y)$, also $x = y + z$ mit $z = x - y \in \ker F$

also $F(z) = F(x) - F(y) = 0$, da $X_1 \cap \ker F$ ein endl. Teilraum von $\ker F$. Dann gibt es einen abg. Teilraum

$X_0 \subseteq \ker F$ mit $\ker F = (X_1 \cap \ker F) \oplus X_0 \Rightarrow X = X_0 \oplus X_1$, $F(X_1) \subseteq F_1$ da $F(X) = X_1$

<u>Bew 14.1</u> a) Sei K ein endl dim Op auf X. $\overset{14.2}{\Rightarrow}$ Es ex eine Zerlegung $X = X_0 \oplus X_1$ mit X_0, X_1 abg und

$K(X_1) \subseteq X_1$, $K|_{X_0} \equiv 0$, $\dim(X_1) < \infty$. Def $K_1 := K|_{X_1}$. Nach der Dimensionsformel der LA gilt:

(*) $\dim(\ker(Id_{X_1} - K_1)) = \dim(X_1) - \dim(K_1(X_1)) = \operatorname{codim}_{X_1}(K_1(X_1))$. Mit (1) $\ker(Id_X - K) = \ker(Id_{X_1} - K_1)$,

(2) $Bild(Id_X - K) = Bild(Id_{X_1} - K_1) \oplus X_0$ und (3) $Bild(Id_X - K)$ abg in X folgt die Beh aus (*)

Zu (1): Schreibe $x \in X$ als $x = x_0 + x_1 \in X_0 \oplus X_1$. "$\supseteq$" klar, da $K_1 = K|_{X_1}$

"$\subseteq$" $0 = (Id - K)x = (Id - K)x_1 + x_0 - \overset{=0}{Kx_0} \Rightarrow x_0 = K_1 x_1 - x_1 \in X_1 \cap X_0 = \{0\} \Rightarrow x_0 = 0$

$\Rightarrow K_1 x_1 - x_1 = 0$, also $x_1 \in \ker(Id - K_1) \Rightarrow \ker(Id - K) \subseteq \ker(Id - K_1)$

Zu (2): $Bild(Id - K) \ni (Id - K)x = (Id - K)x_1 + x_0 - \overset{=0}{Kx_0} \in Bild(Id - K_1) \oplus X_0$

Zu (3): Sei $(x_n) \subseteq Bild(Id - K)$ mit $x_n \to x \in X$. Da $Bild(Id - K) = Bild(Id_{X_1} - K_1) \oplus X_0$, schreibe $x_n = y_n + z_n$

mit $z_n \in Bild(Id_{X_1} - K_1)$, $y_n \in X_0$. Nach Satz 11.4 gilt für $z \in Bild(Id - K_1)$, $y \in X_0$ für ein $C \in \mathbb{R}$:

$\|z\| + \|y\| \geq \|z + y\| \geq \frac{1}{C}(\|z\| + \|y\|) \Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{C}(\|z_n - z_m\| + \|y_n - y_m\|) \Rightarrow (y_n), (z_n)$ CF

Da $(Id - K_1)(X)$ und X_0 abg folgt $y_n \to y \in X_0$ und $z_n \to z \in Bild(Id - K_1) \Rightarrow x = z + y \in Bild(Id - K_1) \oplus X_0 = Bild(Id - K)$

b) Sei $F \in B(X)$ endl. dim mit $\|K - F\| < 1$. $T := Id - K + F$ ist invbar nach dem Satz über die Neumannsche Reihe.

$\Rightarrow Id - K = T - F = (Id - FT^{-1})T$ mit FT^{-1} endl dim. Da T invbar ist gilt insbesondere

$Bild(Id - K) = Bild(Id - FT^{-1})$ und $\ker(Id - K) = T^{-1}(\ker(Id - FT^{-1})) \Rightarrow \dim(Id - K) = \dim(\ker(Id - FT^{-1}))$

und $\operatorname{codim}(Bild(Id - K)) = \operatorname{codim}(Bild(Id - FT^{-1}))$. Wende (a) auf den endl dim Op FT^{-1} an für die Beh

<u>Satz 14.3</u> Sei $\dim(X) = \infty$ und $K \in B(X)$ kompakt. Dann ist $0 \in \sigma(K)$ und $\sigma(K)$ ist endl. oder

besteht aus einer Nullfolge. Jedes $\lambda \in \sigma(K)$, $\lambda \neq 0$, ist ein Eigenwert mit endl. dim Eigenraum

Bew Wäre $0 \in \rho(K)$, wär $Id = K \circ K^{-1}$ kompakt $\Rightarrow U_X$ kompakt $\Rightarrow \dim(X) < \infty$ ↯, also $0 \in \sigma(K)$

Sei $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$. $\overset{14.1}{\Rightarrow} \infty > \dim(\ker(Id - \lambda^{-1}K)) = \operatorname{codim}(Bild(Id - \lambda^{-1}K))$ (*). Da $\lambda \in \sigma(K)$ ist entweder

$(Id - \lambda^{-1}K)$ nicht inj oder nicht surj. Nach (*) ist in jedem Fall $\ker(Id - \lambda^{-1}K) \neq \{0\}$, d.h. λ ist ein

EW mit endlich dim. Eigenraum $\ker(Id - \lambda^{-1}K)$. Wir zeigen durch einen indirekten Beweis, dass $\forall \varepsilon > 0$

in $\{\lambda : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ höchstens endl viele Spektralwerte liegen und somit nur 0 der einzige HP von $\sigma(K)$ sein kann

Zu einem $\varepsilon > 0$ gebe es eine Folge von verschiedenen EW (λ_n) mit EV (u_n), d.h. $Ku_n = \lambda_n u_n$, $n \in \mathbb{N}$

und $|\lambda_n| \geq \varepsilon$. Setze $U_n := span\{u_1 \dots u_n\} \Rightarrow U_{n-1} \subsetneq U_n$. Nach 6.3 (Riesz) gibt es $v_n \in U_n$ mit

$\|v_n\| = 1$, $\|v_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall x \in U_{n-1}$. Für $m < n$ gilt: $Kv_n - Kv_m = \lambda_n(v_n - x)$, mit $x = \lambda_n^{-1}(\overbrace{\lambda_n v_n - Kv_n}^{\in U_{n-1}} + \overbrace{Kv_m}^{\in U_m})$

$K(U_n) \subseteq U_n$, d.h. $Kv_m \in U_m \subseteq U_{n-1}$. $v_n \in U_n$ lässt sich schreiben als $v_n = \alpha u_n + y$, $y \in U_{n-1}$, $\alpha \in K$

$\Rightarrow \lambda_n v_n - Kv_n = \lambda_n \alpha u_n + \lambda_n y - K(\alpha u_n) - K(y) = \alpha \lambda_n u_n - \alpha \lambda_n u_n + \lambda_n y - K(y) \in U_{n-1}$. Also $x \in U_{n-1}$

$\Rightarrow \|Kv_n - Kv_m\| = \overbrace{|\lambda_n|}^{\geq \varepsilon} \overbrace{\|v_n - x\|}^{\geq \frac{1}{2}} \geq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n,m \Rightarrow Kv_n$ hat keine Cauchy TF ↯ zu $K \in K(X)$

Bsp 14.4 a) $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|\lambda_n| \to 0$. Def $Ax_n := (\lambda_n x_n)$ für $(x_n) \in \ell^p$

Da $|\lambda_n| \to 0$ gilt $A \in K(\ell^p)$ ($A(U_{\ell^p})$ kompakt). λ_n sind EW mit endl dim ER $\operatorname{span}\{e_m : e_m = \lambda_m\}$

$0 \in \sigma(A)$ aber kein Eigenwert, da A injektiv ist

b) $X = C[0,1]$, $k : \{(s,t) \in [0,1]^2 : s \leq t\} \to \mathbb{R}$ stetig. Volterraop: $Vx(t) := \int_0^t k(t,s)\, x(s)\, ds$ kompakt

$\overset{13.10}{\Rightarrow} \sigma(V) = \{0\}$. Falls z.B. $k(s,t) \equiv 1$, dann ist 0 kein EW, denn

$Vx(t) = \int_0^t x(s)\, ds \overset{!}{=} 0 \cdot x(t) \overset{abl.}{\Rightarrow} x(t) = 0$, $t \in [0,1]$, d.h. V ist injektiv

Satz 14.5 Sei $X \supseteq D(A) \xrightarrow{A} X$ abg und linear mit $\rho(A) \neq \emptyset$. Falls $i : (D(A), \|.\|_A) \hookrightarrow X$ kompakt, besteht $\sigma(A)$ aus endl. vielen EV oder eine Folge von EW (λ_n) mit $|\lambda_n| \to \infty$ und die ER sind endl. dim.

III Operatoren auf Hilberträumen

15 Hilberträume

15.1 Def Sei X ein $\mathbb{K}$-VR. Eine Abb $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, falls für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

i) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$, $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$

ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

15.2 Prop Sei X ein VR mit SKP $\langle .,. \rangle$

a) Für $x, y \in X$ gilt die CSU: $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

b) $\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ def eine Norm auf X. Insb: $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Bem $\langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ $(*)$

Bew a) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle x, y \rangle) + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle$

Für $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ folgt: $0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}$ $\Rightarrow$ Beh

15.3 Bem Man kann aus der in b) def Norm das SKP zurückgewinnen.

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i \|x+iy\|^2 - i \|x-iy\|^2 \right)$

15.4 Def Ein nVR $(X, \|.\|)$ heißt Prä-Hilbertraum, falls es ein SKP $\langle .,. \rangle$ auf X gibt mit $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$

Falls $(X, \|.\|)$ außerdem noch vollständig, dann heißt X ein Hilbertraum

15.5 Bsp a) $\mathbb{C}^n$ mit $\langle x, y \rangle = x^T \cdot \bar{y}$ ist ein Hilbertraum

b) $X = \ell^2$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \bar{y}_i$ $\Rightarrow$ $\|x\| = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{\ell^2}$

$X = \ell^p$ ist kein Hilbertraum für $p \neq 2$

c) $X = C(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ beschr, abg. mit $\langle x, y \rangle := \int_\Omega x(u) \overline{y(u)} \, du$ ist ein Prä-Hilbertraum

$L^p(\Omega)$ ist kein Hilbertraum für $p \neq 2$

15.6 Satz Ein norm. Raum $(X, \|.\|)$ ist genau dann ein Prä-Hilbertraum, falls die sogenannte Parallelogramm-Gleichung gilt, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (P)

Bew „$\Rightarrow$" ✓, „$\Leftarrow$" Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Def $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$. Das ist ein SKP:

i) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 \right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{4} \left(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2 \right) = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

$(*)$ nach (P) gilt $\|x_1 + x_2 + y\|^2 = 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 - x_2 + y\|^2$, $\|x_1 + x_2 + y\|^2 = 2\|x_2 + y\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|-x_1 + x_2 + y\|^2$

$\Rightarrow \|x_1 + x_2 + y\|^2 = \|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \frac{1}{2} \left(\|x_1 - x_2 + y\|^2 + \|-x_1 + x_2 + y\|^2 \right)$ und

$\|x_1+x_2-y\|^2 = \|x_1-y\|^2 + \|x_2-y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \frac{1}{2}(\|x_1-x_2-y\|^2 + \|-x_1+x_2-y\|^2$

$\Rightarrow \|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2 = \|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_1-y\|^2 - \|x_2-y\|^2$. Damit gilt (A)

iii) klar, da $\mathbb{R}=\mathbb{R}$. Ebenso $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$ also insb iv). Es bleibt ii) zu zeigen. Nach i) gilt für $\lambda \in \mathbb{N}$:

$\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle$. Nach Def gilt die Gleichheit auch für $\lambda=0$ und $\lambda=-1$. Für $\lambda = \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ gilt.

$n\langle \lambda x,y\rangle = \langle n\lambda x,y\rangle = \langle mx,y\rangle = m\langle x,y\rangle \Leftrightarrow \langle \lambda x,y\rangle = \frac{m}{n}\langle x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$. Betrachte zum Schluss

die Abben $\lambda\in\mathbb{R}\mapsto \lambda\langle x,y\rangle$, $\lambda\in\mathbb{R}\mapsto\langle\lambda x,y\rangle$. Diese sind stetig und stimmen auf $\mathbb{Q}$ überein, sind also identisch

15.7 Satz (Beste Approximation) Sei X HR und K eine konvexe und abg Teilmenge von X

a) $\forall x\in X$ gibt es genau ein $y_0\in K$ so dass $\|x-y_0\| = \inf\{\|x-y\| : y\in K\}$

b) Dieses $y_0\in K$ ist charakterisiert durch die Ungl $\mathrm{Re}(\langle x-y_0, y-y_0\rangle)\le 0$ für alle $y\in K$ (W)

Bew a) OE sei $x=0$ und $0\notin K$. Existenz: Setze $d=\inf\{\|y\| : y\in K\}$. Wähle $y_n\in K$ mit $\lim\|y_n\| = d$

Da K konvex ist, ist $\frac{y_n+y_m}{2}\in K$, also $\|\frac{y_n+y_m}{2}\|\ge d$. Mit (P) folgt:

$d^2 \le \|\frac{y_n+y_m}{2}\|^2 + \|\frac{y_n-y_m}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\|y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m\|^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} d^2$. Also $\|y_n-y_m\|\to 0$, d.h. (y_n) ist eine CF

mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ exist in X. Da K abg ist $y_0\in K$ und $\|y_0\| = \lim\limits_n \|y_n\| = d = \inf\{\|y\| : y\in K\}$

Eindeutigkeit: Seien $y_1, y_0\in K$, $\|y_1\| = \|y_0\| = d$, $y_1\ne y_0$. Mit (P) gilt:

$\|\frac{y_0+y_1}{2}\|^2 < \|\frac{y_0+y_1}{2}\|^2 + \|\frac{y_0-y_1}{2}\|^2 \overset{(P)}{=} \frac{1}{2}\|y_0\|^2 + \frac{1}{2}\|y_1\|^2 = d^2 \Rightarrow \frac{y_0+y_1}{2}\in K$ mit $\|\frac{y_0+y_1}{2}\| < d$ ↯

Sprechweise: Das Element $y_0\in K$ im Satz heißt das Element bester Approximation von x zu K

b) Ann: $y_0\in K$ erfüllt (W). $\|x-y\|^2 = \|x-y_0+y_0-y\|^2 = \|x-y_0\|^2 + \|y_0-y\|^2 + 2\overbrace{\mathrm{Re}\langle x-y_0, y_0-y\rangle}^{\ge 0} \ge \|x-y_0\|^2$

Also ist y_0 Element bester Approx. Sei umgekehrt y_0 das Element beste Approx. und $y\in K$. Für $\epsilon\in(0,1)$

setze $\underset{\in K}{y_\epsilon} = (1-\epsilon)y_0 + \epsilon y$. $\|x-y_0\|^2 \le \|x-y_\epsilon\|^2 = \langle x-y_0+\epsilon(y_0-y), x-y_0+\epsilon(y_0-y)\rangle$

$= \|x-y_0\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x-y_0, \epsilon(y_0-y)\rangle + \epsilon^2\|y_0-y\|^2$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\langle x-y_0, y-y_0\rangle \le \frac{\epsilon}{2}\|y_0-y\|^2$ für $\epsilon\in(0,1)$. Für $\epsilon\to 0$ folgt (W)

15.8 Bem (Winkel zw Vektoren). Seien $u,v\in H\setminus\{0\}$, $u_1 = \frac{u}{\|u\|}$, $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$

$\Rightarrow 1 \ge \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\|v\|} = |\langle u_1,v_1\rangle| = \cos\alpha$, wobei $\alpha\in[0,\pi)$ eind gewählt

16 Orthogonalität u. Orthonormalbasen

16.1 Def Sei X ein Prähilbertraum

a) $x,y\in X$ heißen orthogonal, falls $\langle x,y\rangle = 0$. Schreibweise $x\perp y$

b) $A,B\subseteq X$ sind orthogonal, falls $\langle x,y\rangle = 0$ für alle $x\in A$, $y\in B$. Schreibweise $A\perp B$

c) $A\subset X$. Setze $A^\perp = \{y\in X \mid \langle y,x\rangle = 0\ \forall x\in A\}$, orthogonales Komplement von A in X.

16.2 Bem a) (Pythagoras) $x\perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

b) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$ c) $A^\perp$ ist stets ein abg UR von X

d) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$, $A^\perp = \overline{\mathrm{span}(A)}^\perp$

16.3 Satz (Orthogonalzerlegung) Sei U abg TR von X. Dann gilt $X = U \oplus U^\perp$ (X HR)

Bew Falls $x \in U \cap U^\perp$, dann $x \perp x \Rightarrow x = 0$. Sei $x \in X$. Zu x gibt es ein Element bester Approx $x_1 \in U$

Setze $x_2 = x - x_1$ (also $x = x_1 + x_2$). Zz: $x_2 \in U^\perp$. Nach (w) gilt für alle $y \in U$: $\mathrm{Re}\langle x_2, y - x_1\rangle \leq 0$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\langle x_2, y\rangle \leq 0 \ \forall y \in U$ denn mit y durchläuft auch $y - x_1$ ganz U. $\Rightarrow \langle x_2, y\rangle = 0 \ \forall y \in U$ denn mit

y durchläuft auch $-y$, iy und $-iy$ ganz U $\Rightarrow x_2 \in U^\perp$

16.4 Folg u. Def X HR, $U \subseteq X$ abg, $X = U \oplus U^\perp$, $X \ni x = x_1 + x_2$

Definiere $P_U : X \to U$, $Px = x_1$. P_U heißt Orthogonalprojektion von X auf U

Eigenschaften: a) Bild $P_U = U$, $\mathrm{Ker}\, P_U = U^\perp$ b) $\|P_U\| = 1$, denn $\|x\|^2 = \|P_U x\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|P_U x\|^2$

c) $P_U + P_{U^\perp} = id_X$

16.5 Def X HR. Eine Folge $(h_n) \subseteq X$ heißt Orthogonalsystem, falls $h_n \perp h_m$ für $n \neq m$. (h_n) heißt Orthonormalfolge, falls zusätzlich $\|h_n\| = 1$ für alle n. Ein ONS $(h_n) \subseteq X$ heißt Orthonormalbasis von X, falls $\overline{\mathrm{span}(h_n)} = X$

16.6. Bsp $X = \ell^2$, $h_n = e_n$ = Einheitsvektor $(h_n) = (\delta_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$. $X = (x_n) \in \ell^2$, $\langle x, e_n\rangle = x_n$

Also $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n$. $\|x\|^2 = \sum |x_n|^2 = \sum |\langle x, e_n\rangle|^2$

Für $y = (y_n) \in \ell^2$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum_n x_n \overline{y_n} = \sum \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}$

16.7 Satz Sei (h_n) ein ONS. Für $U = \overline{\mathrm{span}(h_n)}$ gilt dann: $P_U x = \sum_n \langle x, h_n\rangle h_n \quad \forall x \in X$

Weiter ist $\|P_U x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in X$ (Besselsche Ungl)

16.8 Korollar Sei (h_n) eine ONB von X. Dann $x = \sum_n \langle x, h_n\rangle h_n$, $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, h_n\rangle|^2$ (Parseval)

$$\langle x, y\rangle = \sum_n \langle x, h_n\rangle \overline{\langle y, h_n\rangle}$$

Bew $U = \overline{\mathrm{span}(h_n)} = X$, also $P_U = \mathrm{Id}_X$. Für $x, y \in X$: $\langle x, y\rangle = \langle \sum_n \langle x, h_n\rangle h_n, \sum_m \langle y, h_m\rangle h_m\rangle$

Bew 16.7 a) J endl. Indexmenge. Geg $(h_n)_{n \in J}$, $U = \overline{\mathrm{span}\{(h_n), n \in J\}}$. Sei $x \in X$. Setze $y_0 = \sum_{n \in J} \langle x, h_n\rangle h_n$, $y_1 := x - y_0$. Für $j \in J$ gilt: $\langle y_1, h_j\rangle = \langle x, h_j\rangle - \sum_{n \in J} \langle x, h_n\rangle \langle h_n, h_j\rangle = 0 \Rightarrow y_1 \in U^\perp$

$\Rightarrow x = y_0 + y_1$ mit $y_0 \in U$, $y_1 \in U^\perp \Rightarrow P_U x = y_0 = \sum_{j \in J} \langle x, h_j\rangle h_j$

$$\sum_{j \in J} |\langle x, h_j\rangle|^2 = \sum_{j \in J} \|\langle x, h_j\rangle h_j\|^2 \overset{Pyth}{=} \|\sum_{j \in J} \langle x, h_j\rangle h_j\|^2 = \|P_U x\|^2 \leq \|x\|^2$$

b) $J = \mathbb{N}$. Def $J_m = \{1, \dots, m\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, h_j\rangle|^2 = \sup_m \sum_{j=1}^{m} |\langle x, h_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (+) Sei $U_m = \overline{\mathrm{span}\{h_1, \dots, h_m\}}$

$\|P_{U_n} x - P_{U_m} x\|^2 = \|\sum_{j=m+1}^{n} \langle x, h_j\rangle h_j\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |\langle x, h_j\rangle|^2 \to 0$ für $n, m \to \infty$ wegen (+)

Da X vollst: $\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, h_j\rangle h_j = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \langle x, h_j\rangle h_j$ existiert. Setze $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, h_j\rangle h_j$ und $y_1 := x - y_0$.

Dann ist wie oben $\langle y_1, h_j\rangle = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$, also $y_1 \in U^\perp \Rightarrow x = y_0 + y_1$, $P_U x = y_0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle x, h_j\rangle h_j$

16.9 Korollar Ein ONS $(h_n)_{n\in J}$ ist genau dann ONB, wenn $\langle x,h_n\rangle = 0\ \forall n\in J \Rightarrow x=0$

Bew $\langle x,h_n\rangle = 0\ \forall n\in J \Rightarrow x\in U^\perp = \{0\}$, $U=\overline{\text{span}}(h_j) \Rightarrow U=\{h_j\}^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = X$

16.10 Bsp $X=L^2(\Omega,\Sigma,P)$, (Ω,Σ,P) W-Raum. Sei $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$ eine Partition von Ω mit

$P(U_j)>0$, $U_j\cap U_i = \emptyset$. Def $h_j := \frac{1}{P(U_j)^{\frac12}} 1\!\!1_{U_j}$, $\|h_j\|_{L^2}=1$, $h_j \perp h_i$ da $U_i\cap U_j=\emptyset$

$\Rightarrow \{h_j\}$ ist ein ONS in X. Nach 16.7: $U:=\overline{\text{span}}\{1\!\!1_{U_j}, i=1,\dots,n\}$

$\Rightarrow P_U x = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{P(U_j)^{\frac12}}\int_{U_j} x(\omega)\,dP(\omega)\right)\left(\frac{1}{P(U_j)^{\frac12}}1\!\!1_{U_j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{P(U_j)}\int_{U_j} x\,dP\right)1\!\!1_{U_j} = \mathbb{E}[x\,|\,U_1,\dots,U_n]$ bed Erwartung

16.11 Bsp $X=L^2[-\pi,\pi]$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, Fourierreihen $h_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$, $t\in[-\pi,\pi]$. $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine ONB

von $L^2[-\pi,\pi]$, denn: $\|h_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{int}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1$. Für $n\neq m$ gilt weiter

$\langle h_n,h_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)}\left[e^{i(n-m)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$1\!\!1_{[0,a]}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ für $t\notin\{0,a\}$ ($\Rightarrow$ konv in L^2) wobei $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-ikt}\,dt = \frac{i}{2\pi k}(e^{-ika}-1)$ für

$k\neq 0$ und $c_0 = \frac{a}{2\pi}$. Da Linearkomb von $1\!\!1_{[0,a]}$, $a\in(0,\pi]$, dicht in $L^2[-\pi,\pi]$ liegen folgt $\overline{\text{span}}(e^{in\cdot}) = L^2[-\pi,\pi]$

16.12 Bsp $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}; n\in\mathbb{N}\right\}$ ist eine ONB von $L^2[-\pi,\pi]$

Bew $2\cos(nx)\cos(mx) = \cos((n+m)x)+\cos((n-m)x)$, $2\sin(nx)\sin(mx) = \cos((n-m)x)-\cos((n+m)x)$

$2\cos(nx)\sin(mx) = \sin((n+m)x)-\sin((n-m)x) \Rightarrow$ Orthogonalität folgt durch Integration u. Periodizität von sin.

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}1\,dx = 2\pi$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx \Rightarrow S$ ist ein ONS

Vollständigkeit folgt wegen $e^0=1$, $e^{inx} = \cos(nx)+i\sin(nx)$

16.13 (Gram-Schmidt-Verfahren) X HR und $(y_n)\subset X$ linear unabh. Dann ist die Folge (h_n) def durch

$h_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$, $U_1 = \text{span}\{h_1\} = \text{span}\{y_1\}$, $\tilde h_2 := y_2 - P_{U_1}y_2 = y_2 - \langle y_2,h_1\rangle h_1 \perp U_1$, $h_2 := \frac{\tilde h_2}{\|\tilde h_2\|}$

$U_2 = \text{span}\{h_1,h_2\} = \text{span}\{y_1,y_2\}$. Seien $h_1\dots h_n$ gefunden mit $\{h_1\dots h_n\}$ ONS, $U_n = \text{span}\{h_1\dots h_n\} = \text{span}\{y_1\dots y_n\}$

Setze $\tilde h_{n+1} = y_{n+1} - P_{U_n}y_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n}\langle y_{n+1},h_j\rangle h_j$ und $h_{n+1} := \frac{\tilde h_{n+1}}{\|\tilde h_{n+1}\|}$, ein ONS mit $\overline{\text{span}}\{h_j\} = \overline{\text{span}}\{y_j\}$

16.14 Satz Jeder separable unendlich dim. HR X hat eine ONB $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese ONB definiert eine

Isometrie $\Phi: \ell^2\to X$, $\Phi((\alpha_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n h_n$, $(\alpha_n)\in\ell^2$, mit $\Phi(e_j) = h_j$, $\|\Phi((\alpha_j))\|_X = \|(\alpha_n)\|_{\ell^2}$

und $\langle\Phi(\alpha_j),\Phi(\beta_j)\rangle = \langle(\alpha_j),(\beta_j)\rangle_{\ell^2} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\alpha_j\overline{\beta_j}$. $\Phi^{-1}: X\to\ell^2$, $\Phi^{-1}(x) = (\langle x,h_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}}\in\ell^2$

Bew Es gibt eine Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\overline{\text{span}}\{y_j\} = X$ und (y_j) lin. unabh. Wende 16.13 auf (y_j) an

und erhalte ONS (h_j) mit $\overline{\text{span}}(h_j) = \overline{\text{span}}(y_j) = X$. Setze $\Phi((\alpha_j)) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\alpha_j h_j$

17 Der Darstellungssatz von Riesz

17.1 Bem Sei X HR. Für jedes $x \in X$ erhält man ein stetiges lineares Funktional $x' : X \to \mathbb{K}$ durch $x'(y) := \langle y, x \rangle$ für $y \in X$ mit $\|x'\|_{X'} = \sup\{|x'(y)| : \|y\| = 1\} = \|x\|_X$

Bew x' offenbar linear. $|x'(y) - x'(y_n)| = \langle y - y_n, x \rangle \le \|y - y_n\| \cdot \|x\| \Rightarrow x'$ stetig

Außerdem $\|x'\|_{X'} \le \|x\|_X$. Da $x'\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} \langle x, x \rangle = \|x\|$ folgt $\|x'\|_{X'} = \|x\|_X$

17.2 Satz (Riesz) Zu jedem $x' \in X'$ gibt es ein $x \in X$ mit $x'(y) = \langle y, x \rangle$ für $y \in X$ und $\|x'\|_{X'} = \|x\|_X$

Bew Sei $x' \in X'$. Setze $U = \mathrm{Kern}(x')$ abg TR von $X \Rightarrow X = U \oplus U^\perp$, $\dim(U^\perp) = 1$. Wähle $x_0 \in U^\perp$ mit $x_0 \neq 0$ und $x'(x_0) = 1$. Jedes $y \in X$ hat die Form $y = u + \lambda x_0$ mit $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow x'(y) = x'(u) + \lambda x'(x_0) = \lambda$, $\langle y, x_0 \rangle = \overbrace{\langle u, x_0 \rangle}^{=0} + \lambda \langle x_0, x_0 \rangle = \lambda \|x_0\|^2$. Setze $x := \frac{x_0}{\|x_0\|}$

Dann folgt $\langle y, x \rangle = \frac{1}{\|x_0\|^2} \langle y, x_0 \rangle = x'(y)$. Aus 17.1 folgt $\|x'\|_{X'} = \|x\|_X$

Bem Damit gibt es eine bij Abb $\Phi : X \to X'$ mit $\langle \Phi x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ für $y \in X$, $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$, $\Phi(\lambda x) = \bar{\lambda} \Phi(x)$ für $x_1, x_2, x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\|\Phi(x)\|_{X'} = \|x\|_X$

$\Rightarrow \Phi$ ist eine anti-lineare Isometrie von X auf X'. In diesem Sinne $X \cong X'$

17.3 Kor Sei X HR und $M \subseteq X$ ein UVR, $y' \in M'$. Dann ex $x' \in X'$ mit $x'|_M = y'$, $\|y'\| = \|x'\|$

Bew Sei $P_M : X \to M$ OLP auf M. Setze $x' = y' \circ P_M$. Dann gilt für $y \in X$ bzw $y \in M$

$x'(y) = y'(P_M y) \le \|y'\| \cdot \|P_M y\| \le \|y'\| \cdot \|y\|$, $x'(y) = y'(P_M y) = y'(y)$, d.h. $x'|_M = y'$

18 Schwache Konv und Kompaktheit

18.1 Def: Sei X HR und $x_n, x \in X$. x_n konv schwach gegen x, falls $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle \ \forall y \in X$

Notation: $x_n \xrightarrow{w} x$

Bem: Der schwache Limes ist eind. best. und linear. Sei $x_n \xrightarrow{w} x$, $x_n \xrightarrow{w} \tilde{x}$

$\Rightarrow \langle x - \tilde{x}, y \rangle = \lim \langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y \rangle = 0$ für alle $y \in X$. Insb für $y = x - \tilde{x}$

18.3 Prop (Vgl von Norm- u. schwacher Konv) a) Normkonv impliziert schwache Konv

b) $x_n \xrightarrow{w} x$, dann $\|x\| \le \underline{\lim} \|x_n\|$

c) Falls $x_n \xrightarrow{w} x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$, dann $\|x - x_n\| \to 0$

Bew a) Sei $\|x_n - x\| \to 0$. Dann gilt für $y \in X$: $|\langle x_n - x, y \rangle| \le \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0$

Umgekehrt: (h_j) ONS $\Rightarrow h_j \xrightarrow{w} 0$, aber $\|h_j\| = 1 \not\to 0$

b) Sei $x_n \xrightarrow{w} x \neq 0$. Für $y = \frac{x}{\|x\|}$ gilt: $\|x_n\| \ge \langle x_n, \frac{x}{\|x\|} \rangle \to \langle x, x \rangle \frac{1}{\|x\|} = \|x\|$

c) Sei $x_n \xrightarrow{w} x$ und $\|x_n\| \to \|x\| \Rightarrow \|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x_n, x \rangle + \|x\|^2 \to 0$

18.4 Prop Jede schwach konv Folge ist normbeschränkt

Bew Sei $x_n \xrightarrow{w} x$. Setze $l_n \in B(X,\mathbb{K}) = X'$: $l_n(y) := \langle y, x_n\rangle$. Für jedes $y \in X$ gilt:

$\|l_n(y)\| = |\langle y, x_n\rangle| \leq C_y < \infty \Rightarrow \|x_n\| \overset{17.1}{=} \|l_n\|_{X'} < \infty$ nach Banach-Steinhaus.

18.5 Bsp $X = l^2$, $x_n = (a_{n,j})_j$, $x = (a_j)$. Dann $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow a_{n,j} \to a_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$

Bew $a_{n,j} = \langle x_n, e_j\rangle \to \langle x, e_j\rangle = a_j$. Umkehrung folgt aus 18.6

18.6 Prop Sei X ein HR mit ONB (h_j). Dann gilt $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \langle x_n, h_j\rangle \to \langle x, h_j\rangle \ \forall j \in \mathbb{N}$

Bew „$\Rightarrow$" ✓ „$\Leftarrow$" Nach 18.3: $\exists C < \infty$: $\|x_n\|, \|x\| \leq C$. Für bel $y \in X$ folgt

$$|\langle x_n - x, y\rangle| = |\langle x_n - x, \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, h_j\rangle h_j\rangle| \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{N} |\underbrace{\langle x_n - x, h_j\rangle}_{\to 0} \langle y, h_j\rangle|}_{\to 0} + \underbrace{|\langle x_n - x, \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle y, h_j\rangle h_j\rangle|}_{\leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\leq 2C} \cdot \underbrace{\|\sum_{j=N+1}^{\infty} \langle y, h_j\rangle h_j\|}_{\leq \varepsilon \text{ für } N \text{ groß}}}$$

$\Rightarrow \overline{\lim} |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \varepsilon$ für N groß und $\varepsilon > 0$ bel

18.7 Def Eine TM M eines HR X heißt relativ schwach kompakt, falls jede Folge $(x_n) \subseteq M$ eine schwach konvergente Teilfolge besitzt

18.8 Satz Eine beschr. TM eines HR ist relativ schwach kompakt

Bew Sei $(x_n) \subseteq M \Rightarrow \|x_n\| \leq C$. Def $X_0 = \overline{\operatorname{span}(x_n)} \subseteq X$ separable HR mit ONB (h_j)

$\sup |\langle x_n, h_j\rangle| \leq C \Rightarrow \langle x_n, h_j\rangle \in \mathbb{K}$ hat eine konv TF nach BW. Mit Hilfe des Cantor'schen Diagonalverfahrens wähle TF $M_{j+1} \subseteq M_j$, $|M_j| = \infty$ mit $\lim\limits_{n \in M_j} \langle x_n, h_j\rangle = \alpha_j$. Wähle $n_k \in M_k$ mit $n_k \geq k$.

Dann ist $n_k \in M_j$ für k groß genug und $n_k \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} \langle x_{n_k}, h_j\rangle = \alpha_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$

Zz $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j h_j \in X$. $\sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2 = \lim\limits_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{N} |\langle x_{n_k}, h_j\rangle|^2 = \lim\limits_{k \to \infty} \|\sum_{j=1}^{N} \langle x_{n_k}, h_j\rangle h_j\|^2$

$\overset{\text{Bessel}}{\leq} \overline{\lim_k} \|x_{n_k}\|^2 \leq C^2 \ \forall N \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \leq C^2 < \infty \Rightarrow x \in X_0$

19 Duale Operatoren auf Hilberträumen

19.1 Satz Seien X, Y HR und $T \in B(X,Y)$. Dann gibt es genau ein $T^* \in B(Y,X)$ mit

$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \ \forall x \in X, y \in Y$ und $\|T^*\| = \|T\|$, $(T^*)^* = T$

Bew Für $y \in Y$ fest, setze $l_y(x) := \langle Tx, y\rangle$ für alle $x \in X$. $\Rightarrow l_y \in X'$, denn

$|l_y(x)| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \|y\| \cdot \|x\|$, also $\|l_y\| \leq \|T\| \|y\|$. Nach Riesz gibt es ein $z \in X$ mit

$l_y(x) = \langle x, z\rangle$ und $\|z\|_X = \|l_y\|_{X'}$. Def $T^*y := z$. Dann gilt: $T^* : Y \to X$ linear und

$\langle x, T^*y\rangle = l_y(x) = \langle Tx, y\rangle$. Weiter ist $\|T^*y\| = \|z\| = \|l_y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|T^*\| \leq \|T\|$

Nach Def ist $(T^*)^* = T \Rightarrow \|T\| = \|(T^*)^*\| \leq \|T^*\| \Rightarrow \|T^*\| = \|T\|$

19.2 Eigenschaften d. Adjungierten: Seien $S, T \in B(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

a) $(S+T)^* = S^* + T^*$ b) $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} \cdot S^*$ c) $(S \cdot T)^* = T^* \cdot S^*$ d) $\|S \cdot S^*\| = \|S\|^2$

Bew d) „$\leq$" ✓ „$\geq$" $\|S\|^2 = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Sx\|^2 = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \langle Sx, Sx\rangle = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \langle x, S^*Sx\rangle \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|x\| \|S^*Sx\| \leq \|S^*S\|$

19.3 Korollar Für $S \in B(X)$ gilt: $\operatorname{Ker} S = (\operatorname{Bild} S^*)^\perp$, $\operatorname{Ker} S^* = (\operatorname{Bild} S)^\perp$

Bew $x \in \operatorname{Ker} S \iff Sx = 0 \iff \langle Sx, y\rangle = 0 \ \forall y \in X \iff \langle x, S^* y\rangle = 0 \ \forall y \in X \iff x \in (\operatorname{Bild} S^*)^\perp$

19.4 Bsp a) $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $(T_k x)(u) := \int_\Omega k(u,v) x(v)\, dv$, $T_k \in B(L^2(\Omega))$

$\langle T_k x, y\rangle = \int_\Omega \left(\int_\Omega k(u,v) x(v) dv\right) \overline{y(u)}\, du \overset{\text{Fub}}{=} \int_\Omega x(v) \left(\int_\Omega k(u,v) \overline{y(u)} du\right) dv$

$= \int x(v) \overline{\left(\int \overline{k(u,v)} y(u) du\right)} dv = \langle x, T_{k^*} y\rangle$, wobei $(T_{k^*} y)(u) = \int \overline{k(u,v)} y(u)\, du$

$\Rightarrow (T_k)^* = T_{k^*}$ mit $k^*(u,v) = \overline{k(v,u)}$

19.5 Def Seien X, Y HR und $T \in B(X,Y)$

a) T heißt unitär, falls T invertierbar ist und $T^{-1} = T^*$, d.h. T bij und $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$

b) Sei $X = Y$. T ist selbstadj, falls $T^* = T$

c) Sei $X = Y$. T heißt normal, falls $TT^* = T^*T$, d.h. $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$

Bem unitäre und selbstadj Operatoren sind normal

19.6 Bsp a) Integralop: T_k s.a. $\iff T_{k^*} = T_k \iff \overline{k(u,v)} = k(v,u)$

Falls $k \in L^2([0,1]^2)$, so ist T_k kompakt und damit nicht unitär, da T_k keine Isometrie ist

b) $X = \ell^2$, Verschiebungsop: $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots) := (\alpha_2, \alpha_3, \dots) \Rightarrow T^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$

Es gilt $TT^* = id$ und $T^*T(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \Rightarrow T^*T = P_U$, $U = \{(\alpha_j) \in \ell^2 : \alpha_1 = 0\}$

c) $U \leq X$ UVR, $P_U : X \to U$ Orthogonalproj. Dann ist P_U s.a. Seien $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2 \in X = U \oplus U^\perp$

$\Rightarrow \langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x, Py\rangle$

19.7 Satz $T \in B(X)$ ist s.a $\iff \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in X$ (Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Bew „$\Rightarrow$" $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \Rightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$

„$\Leftarrow$" Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in X$. $\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \bar\lambda \langle Tx, y\rangle + \lambda \langle Ty, x\rangle + |\lambda|^2 \langle Ty, y\rangle$

konj liefert: $\langle T(x+\lambda y), x + \lambda y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \lambda\langle x, Ty\rangle + \bar\lambda \langle y, Tx\rangle + |\lambda|^2 \langle Ty, y\rangle$

Subtr und $\lambda = 1$: $\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle$

Subtr und $\lambda = i$: $\langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle = -\langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle$

$\overset{+}{\Rightarrow} 2\langle Tx, y\rangle = 2\langle x, Ty\rangle$

19.8 Prop Für $T \in B(X)$ s.a. gilt $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$

Bew „$\geq$" $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\|$ falls $\|x\| \leq 1$

„$\leq$" $M = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$. $\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle =$

$= 2(\langle Tx, y\rangle + \overline{\langle Tx, y\rangle}) = 4 \operatorname{Re}\langle Tx, y\rangle$. Es gilt $\langle Tz, z\rangle \leq M \|z\|^2$

$\Rightarrow |4 \operatorname{Re}\langle Tx, y\rangle| \leq |\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle| \leq M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2 = M(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$

Für $\|x\|, \|y\| \leq 1$ folgt: $|\operatorname{Re}\langle Tx, y\rangle| \leq M$. Wähle $\theta \in (-\pi, \pi]$: Dann gilt für $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$

$|\langle Tx,y\rangle| = e^{i\theta} \operatorname{Re}\langle Tx,y\rangle = \operatorname{Re}\langle Tx, e^{i\theta}y\rangle \le M \Rightarrow \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} \langle Tx,y\rangle = \|T\| \le M$

19.9 Prop Sei $T\in B(X)$ normal

a) $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(T)\} = \|T\|$ b) $\ker T = \ker T^*$

Bew a) Es gilt $\|T\|^2 = \|T^2\|$, denn $\|T^2\|^2 \underset{19.2}{=} \|T^2(T^2)^*\| = \|(TT^*)(TT^*)^*\| \overset{19.2}{=} \|TT^*\|^2 \overset{19.2}{=} (\|T\|^2)^2$

T normal $\Rightarrow T^n$ normal. Also $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$

$\Rightarrow r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} (\|T\|^{2^k})^{\frac{1}{2^k}} = \|T\|$

b) $\|Tx\|^2 = \langle Tx,Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$

19.10 Lemma Sei $T\in B(X)$ normal und kompakt. Dann gilt:

a) $Tx = \lambda x \iff T^*x = \bar\lambda x$

b) $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$ und $\lambda\ne\mu \Rightarrow x\perp y$

Bew a) $Tx = \lambda y \iff x\in\operatorname{Ker}(T-\lambda) \iff x\in\operatorname{Ker}((T-\lambda)^*) \iff x\in\operatorname{Ker}(T^*-\bar\lambda) \iff T^*x = \bar\lambda x$

b) $\lambda\langle x,y\rangle = \langle\lambda x,y\rangle = \langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle = \langle x,\bar\mu y\rangle = \mu\langle x,y\rangle \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0$

19.10 Lemma (forts) c) Falls $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ gibt es ein $\lambda\in\sigma(T)$ mit $|\lambda| = \|T\|$

d) Falls $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ist $\sigma(T)\subseteq\mathbb{R}$ und $\|T\|\in\sigma(T)$ oder $-\|T\|\in\sigma(T)$ (falls T s.a.)

Bew c) Nach 19.9a ist $\sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(T)\} = \|T\|$. Wähle $\lambda_j\in\sigma(T)$ mit $|\lambda_j|\to\|T\|$. Für eine

TF (λ_n) von (λ_j) gilt: $\lambda_n\to\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda_n|\to|\lambda| = \|T\|$. Da $\sigma(T)$ abg folgt $\lambda\in\sigma(T)$ mit $|\lambda| = \|T\|$

d) $Tx = \lambda x$, $x\ne 0 \Rightarrow \lambda\langle x,x\rangle = \langle Tx,x\rangle = \langle x,Tx\rangle = \bar\lambda\langle x,x\rangle \Rightarrow \lambda = \bar\lambda\in\mathbb{R}$

Nach Prop 19.8 ist $\|T\| = \sup\{\langle x,Tx\rangle : \|x\|\le 1\}$. Wähle (x_j) mit $\|x_j\|=1$ und $|\langle Tx_j,x_j\rangle|\to\|T\|$

Wähle TF (x_n) von (x_j) so dass $\lambda := \lim\langle Tx_n,x_n\rangle$, $y := \lim Tx_n$. Dann gilt:

$\|Tx_n - \lambda_n x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda_n\langle Tx_n,x_n\rangle + \lambda_n^2 \overbrace{\|x_n\|^2}^{=1} \longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = 0$

$\Rightarrow y = \lim(\lambda_n x_n)$ und $Ty = \lambda\lim Tx_n = \lambda y \Rightarrow \lambda\in\sigma(T)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ und $|\lambda| = \|T\|$

19.11 Theorem (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren). Sei X HR, $T\in B(X)$ kompakt u. normal.

Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, die entweder endl oder eine Nullfolge ist. Weiter gibt es ein ONS (h_n) in X, das endl ist falls (λ_n) endl ist so dass $Tx = \sum_n \lambda_n\langle x,h_n\rangle h_n$, $\forall x\in X$

Insbesondere: • $\sigma(T)\setminus\{0\} = \{\lambda_n\}$, $Th_n = \lambda_n h_n$ • $X = \operatorname{Ker}T \oplus \overline{\operatorname{span}\{h_n\}}$ orthog. Kompl.

• $\|T\| = \sup|\lambda_n|$

Bem: Falls X separabel, so gibt es eine ONB (e_n) von X, die diese (h_n) und eine ONB von $\operatorname{Ker}T$

enthält, so dass $Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n\langle x,e_n\rangle e_n$ wobei $\mu_n = \begin{cases} 0, & e_n\in\operatorname{Ker}(T) \\ \lambda_m, & e_n = h_m\end{cases}$

Bew Behauptung: $\sigma(T)\setminus\{0\}$ besteht aus endl. vielen oder eine Nullfolge von EW (ν_k) mit $\overbrace{\dim(X_k)}^{=:d_k} < \infty$

wobei $X_k = \operatorname{Ker}(T - \nu_k Id)$. Sei (λ_n) eine Folge, die jeden EW ν_k entsprechend seiner Vielfachheit d_k enthält.

Sei $e_1^k \dots e_{d_k}^k$ ONS von X_k. Wegen $X_k \perp X_l$ für $k \neq l$ ist $(h_n) := ((e_j^k)_j)_k$ ein ONS in X

$\Rightarrow Th_n = \lambda_n h_n$, $h_n \perp \operatorname{Ker} T$ (nach 19.10b). Beh $X = \operatorname{Ker} T \oplus X_0$, $X_0 = \overline{\operatorname{span}}(h_n)$. Daraus folgt die Beh

Für alle $x \in X$ gilt: $x = y + \sum_n \langle x, h_n \rangle h_n$ (da (h_n) ONB von X_0). Daraus folgt dann:

$Tx = \overset{=0}{\widetilde{Ty}} + \sum_n \langle x, h_n \rangle Th_n = \sum \lambda_n \langle x, h_n \rangle h_n$. Also bleibt zu zeigen: $X_0^\perp = \operatorname{Ker} T$

Für $x \in X_0^\perp$ ist $\langle Tx, h_n \rangle = \langle x, Th_n \rangle = \lambda_n \overbrace{\langle x, h_n \rangle}^{=0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow Tx \in X_0^\perp \Rightarrow T(X_0^\perp) \subseteq X_0^\perp$.

Setze $S = T|_{X_0^\perp} \in B(X_0^\perp)$. S ist kompakt und normal. Nach 19.10 c)/d) gibt es einen EW μ von S

mit $|\mu| = \|S\| \Rightarrow \mu = \lambda_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{Ker}(S - \mu) \subseteq \operatorname{Ker}(T - \lambda_n) = X_n \subseteq X_0 \Rightarrow \operatorname{Eig}(S - \mu) \subseteq X_0 \cap X_0^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow S = 0 \Rightarrow X_0^\perp \subseteq \operatorname{Ker} T$. Andererseits: $\operatorname{Ker} T \perp X_k$, also $\operatorname{Ker} T \subset X_0^\perp \Rightarrow X_0^\perp = \operatorname{Ker} T$

Kap IV Dualität in Banachräumen

20 Der Fortsetzungssatz v. Hahn-Banach

20.1 Def Sei X VR über $\mathbb{R}$. $p: X \to \mathbb{R}$ heißt sublinear, falls $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ und $p(\lambda x) = \lambda p(y)$ für alle $x, y \in X$, $\lambda \ge 0$

20.2 Satz (Hahn-Banach für VR). Sei X VR, $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear. Zu jeder linearen Abb $l: U \to \mathbb{K}$ mit $Re(lx) \le p(x)$ $\forall x \in U$, wobei $U \le X$ UVR, gibt es eine lineare Abb $L: X \to \mathbb{R}$ mit $L|_U = l$, $Re L(x) \le p(x)$

Bew (i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\dim X/U = 1$ (ii) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allg U (iii) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(i) Wähle $x_0 \in X \setminus U \Rightarrow X = \text{span}(x_0) \oplus U \Rightarrow$ zu $x \in X$ ex $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = u + \lambda x_0$. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine lineare Abb $L_r: X \to \mathbb{R}$, $L_r(x) = l(u) + \lambda r \Rightarrow L_r|_U = l$. Weiter soll gelten $L_r(x) \le p(x)$ $\forall x \in X \Leftrightarrow l(u) + \lambda r \le p(u + \lambda x_0)$ $\forall u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ (1). Für $\lambda > 0$ bedeutet (1) das folgende: $r \le p(\frac{u}{\lambda} + x_0) - l(\frac{u}{\lambda})$ $\forall u \in U \overset{(2)}{\Leftrightarrow} r \le \inf\{p(v + x_0) - l(v) \mid v \in U\}$. Für $\lambda < 0$ bedeutet (1) das folgende: $-r \le p(\frac{u}{-\lambda} - x_0) - l(\frac{u}{-\lambda})$ $\forall u \in U \overset{(3)}{\Leftrightarrow} r \ge \sup\{l(w) - p(w - x_0) \mid w \in U\}$. Um (2) und (3) und damit (1) zu erfüllen, benötigt man $l(w) - p(w - x_0) \le p(v + x_0) - l(v)$ $\forall v, w \in U \Leftrightarrow l(w) + l(v) \le p(v + x_0) + p(w - x_0)$ $\forall v, w \in U$

Diese Ungl gilt wegen $l(v) + l(w) = l(v+w) \le p(v+w) \le p(v) + p(w)$ $\forall v, w \in U$

(ii) $A := \{(V, L_V) : U \le V \le X \text{ UVR}, L_V: V \to \mathbb{R} \text{ linear}, L_V|_U = l, Re L_V(x) \le p(x) \; \forall x \in V\}$. Definiere eine Ordnung auf A: $(V_1, L_1) \le (V_2, L_2) \Leftrightarrow V_1 \le V_2$, $L_2|_{V_1} = L_1$. Zz: A hat ein max Element (V_{max}, L_{max})

Dann ist $V_{max} = X$, denn andernfalls wende (i) an für einen Widerspruch. Zz: Jede total geordnete TM von A hat eine obere Schranke. Sei $A_0 \le A$ total geordnet. Setze $V_0 = \bigcup_{V \in A_0} V$. Dann ist V_0 ein UVR von X.

Def $L_0(x) = L_{V_j}(x)$ falls $x \in V_j \in A_0$. Dann ist L_0 wohldef, linear und erfüllt die Abschätzung $\Rightarrow (V_0, L_0) \in A$ und $(\tilde{V}, \tilde{L}) \le (V_0, L_0)$ für alle $(\tilde{V}, \tilde{L}) \in A_0$. $\Rightarrow (V_0, L_0)$ ist eine obere Schranke für A_0 in A

(iii) Sei $X_{\mathbb{R}}$ der zu X gehörige reelle VR. Def $l_{\mathbb{R}}(x) = Re\, l(x) = \frac{1}{2}(l(x) + \overline{l(x)})$. Nach (ii) gibt es ein reelles lineares Funktional $L_{\mathbb{R}}: X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ mit $L_{\mathbb{R}}|_U = l_{\mathbb{R}}$ und $L_{\mathbb{R}}(x) \le p(x)$ $\forall x \in X_{\mathbb{R}}$. Setze $L(x) = L_{\mathbb{R}}(x) - i L_{\mathbb{R}}(ix)$

Dann ist L additiv und es gilt $L(ix) = L_{\mathbb{R}}(ix) - i L_{\mathbb{R}}(-x) = i(-i L_{\mathbb{R}}(ix) + L_{\mathbb{R}}(x)) = i L(x) \Rightarrow L$ ist linear

Weiter ist $Re L(x) = L_{\mathbb{R}}(x) \le p(x)$ $\forall x \in X$ und $L|_U = l$

20.3 Satz (H-B f nVR) Sei X nVR und $U \le X$ UVR. Zu jedem stetigen Funktional $u': U \to \mathbb{K}$ gibt es ein stetiges lin. Funktional $x': X \to \mathbb{K}$ mit $\|x'\|_{X'} = \|u'\|_{U'}$ und $x'|_U = u'$

Bew Setze $l = u'$ und $p(x) = \|u'\| \cdot \|x\|$. Dann gilt $Re\, l(x) \le |u'(x)| \le \|u'\|_{U'} \cdot \|x\| = p(x)$ $\forall x \in U$

$\overset{20.2}{\Rightarrow}$ Es gibt eine Fortsetzung x' von l auf X mit $Re\, x'(x) \le \|u'\| \cdot \|x\|$ und $x'|_U = u'$. Zu $x' \in X'$ und $x \in X$ wähle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $|x'(x)| = \alpha\, Re\, x'(x) \le \|u'\| \|\alpha x\| = \|u'\| \|x\| \Rightarrow \|x'\| \le \|u'\|$

20.4 Korollar Sei X nVR. Zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$, gibt es ein $x' \in X'$ mit $\|x'\|_{X'} = 1$ und $x'(x) = \|x\|$

Bew $U = \operatorname{span}\{x\}$, $u'(\lambda x) := \lambda \|x\|$. Dann ist u' linear, $\|u\| \leq 1$, $u'\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 1$, also $\|u'\| = 1$. Sei x' die Fortsetzung von u' auf X wie in 20.3 $\Rightarrow \|x'\| = \|u'\| = 1$ und $x'(x) = u'(x) = \|x\|$

20.5 Folgerung a) $x \in X$, $x'(x) = 0 \ \forall x' \in X' \Rightarrow x = 0$

b) Zu $x_1, x_2 \in X$ gibt es $x' \in X'$ mit $x'(x_1) \neq x'(x_2)$ (Folgt aus (a) mit $x = x_1 - x_2$)

c) $\|x\| = \sup\{x'(x) : \|x'\| = 1, x' \in X'\}$ (vgl mit $\|x'\| = \sup\{|x'(x)| : \|x\| \leq 1, x \in X\}$)

Bew $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ für $\|x'\| \leq 1$. Für die Umkehrung wähle x' wie in 20.4

20.6 Korollar Sei X nVR, $U \subseteq X$ abg UVR und $x \in X \setminus U$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit $x'|_U \equiv 0$ und $x'(x) \neq 0$

Bew Sei $q : X \to X/U$ Quotientenabb. $\Rightarrow q(x) \in X/U$, $q(x) \neq 0 \overset{20.4}{\Rightarrow}$ Wähle $\ell \in (X/U)'$ mit $\ell(q(x)) \neq 0$. Setze $x' = \ell \circ q : X \to \mathbb{R} \Rightarrow x' \in X'$ und $x'(x) = \ell(q(x)) \neq 0$

20.7 Def Sei X nVR, $U \subseteq X$ und $V \subseteq X'$. Setze $U^\perp = \{x' \in X' : x'(x) = 0 \ \forall x \in U\}$ und

$V_\perp = \{x \in X : x'(x) = 0 \ \forall x' \in V\}$. Beachte: $X'' \supseteq V^\perp \neq V_\perp \subseteq X$

20.8 Eigenschaften a) $U^\perp$ ist ein lin. abg UVR von X', $V_\perp$ ist ein lin. abg. UVR von X

b) $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$, $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow (V_2)_\perp \subseteq (V_1)_\perp$

c) $(U^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}(U)$

Bew c) „$\supseteq$" Nach Def. „$\subseteq$" Sei $x \notin \overline{\operatorname{span}}(U) \overset{20.6}{\Rightarrow} \exists x' \in X'$ mit $x'|_{\overline{\operatorname{span}}(U)} \equiv 0$ und $x'(x) \neq 0 \Rightarrow x' \in U^\perp$ aber wegen $x'(x) \neq 0$ gilt $x' \notin (U^\perp)_\perp$

20.9 Proposition Sei X BR, $U \subseteq X$ abg. Dann gilt $(X/U)' \cong U^\perp$ und $U' \cong X'/U^\perp$

21 Trennungssätze für konvexe Mengen

21.1 Def Sei X VR und $A \subseteq X$. Die Abb $p_A : X \to [0, \infty]$, $x \mapsto \inf\{\lambda > 0 : \lambda x \in A\}$ heißt Minkowski-Funktional von A. A heißt absorbierend, falls $p_A(x) < \infty \ \forall x \in X$, d.h. $\forall x \in X \ \exists \lambda \geq 0$ so dass $x \in \lambda A$

21.2 Bsp Für $A = U_X$ ist $p_A(x) = \|x\|$ ($\|x\| \leq \lambda \Leftrightarrow x \in \lambda U_X$)

21.3 Prop $U \subseteq X$ konv, $0 \in \mathring{U}$. Dann gilt

a) Falls $\varepsilon U_X \subseteq U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$

b) p_U ist sublinear c) Ist U offen, so ist $U = p_U^{-1}([0,1))$

Bew a) $x \in \varepsilon U_X \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} x \in U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$

b) $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$ für $\lambda > 0$, denn $(r\lambda) x \in U \Leftrightarrow r(\lambda x) \in U$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda, \mu > 0$ mit

$\lambda \leq p_U(x) + \varepsilon$, $\mu \leq p_U(x) + \varepsilon$. Dann $\frac{x}{\lambda} \in U$, $\frac{y}{\mu} \in U \overset{\text{konv}}{\Rightarrow} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\mu + \lambda}\left(\frac{y}{\mu}\right) = \frac{x+y}{\lambda + \mu} \in U$

$\Rightarrow p_U(x+y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$

c) $x \in p_U^{-1}([0,1)) \Rightarrow p_U(x) < 1$. Dann ex $\lambda < 1$ mit $\frac{x}{\lambda} \in U$. Da $0 \in U$, U konvex folgt

$x = \lambda\left(\frac{x}{\lambda}\right) + (1-\lambda)\cdot 0 \in U$. Sei umgekehrt $x \in U$. Da U offen gibt es $\varepsilon > 0$ mit $x + \varepsilon x \in U$

$\Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$

<u>21.4 Satz</u> (1. Trennungssatz) X nVR, $V_1, V_2 \subseteq X$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, V_1, V_2 konvex und V_1 offen

Dann gibt es ein $x' \in X'$ so dass $\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2)$ für alle $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$

<u>Bew</u> (i) Sei $V_2 = \{0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wähle bel. $x_0 \in V_1$ und setze $y_0 = -x_0$. $U := \{v - x_0 : v \in V_1\}$ ist offen, konvex

Außerdem: $0 \in U$, $y_0 \notin U$. Nach Prop 21.3 gilt: $p_U(y_0) \geq 1$ und $p_U(y) \leq C\|y\|$. Auf dem UVR

$Y = \operatorname{span}\{y_0\}$ def $y' : Y \to \mathbb{R}$, $y'(ty_0) := t p_U(y_0)$ für $t \in \mathbb{R}$ ein Funktional. Dann gilt

$y'(ty_0) \leq 0 \leq p_U(ty_0)$ für $t < 0$, $y'(ty_0) = t p_U(y_0) = p_U(ty_0)$ für $t \geq 0 \Rightarrow y'(y) \leq p_U(y)$ $\forall y \in Y$

Nach HB gibt es eine Fortsetzung $x' : X \to \mathbb{R}$ mit $x'(x) \leq p(x)$ $\forall x \in X$. x' ist linear und stetig, denn

$|x'(x)| = \max(|x'(x)|, |x'(-x)|) \leq \max\{p(x), p(-x)\} \leq C\|x\|$.

Für $x \in V_1$ gilt $x + y_0 \in U$ und $x'(x) = x'(x+y_0) - x'(y_0) < 0$, denn mit Prop 21.3 folgt

$x'(y_0) = p(y_0) \geq 1$ und $p(x+y_0) < 1$, da $x + y_0 \in U$, $x'(0) = 0$

(ii) Sei $V_2 = \{0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $X_\mathbb{R}$ der VR X aufgefasst als reeller VR. Nach (i) ex $x'_\mathbb{R} \in X'_\mathbb{R}$ mit $x'_\mathbb{R}(v_1) < \overbrace{x'_\mathbb{R}(v_2)}^{=0}$

Wie im Beweis des Satzes v. H-B: $x'(x) := x'_\mathbb{R}(x) - i x'_\mathbb{R}(-x) \Rightarrow x'$ $\mathbb{C}$-linear, stetig und $\operatorname{Re} x'(x) = x'_\mathbb{R}(x)$

(iii) V_1, V_2 allg. Setze $W_1 := V_1 - V_2$ konvex und offen $\left(W_1 = \bigcup_{v_2 \in V_2} \{V_1 - v_2\}\right)$. Weiter ist $0 \notin W_1$, denn $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Nach (ii) gibt es ein $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(v_1 - v_2) < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2)$ für $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$

<u>21.5 Satz</u> (2. Trennungssatz) X nVR, $V \subseteq X$ abg, konvex. Sei $x \notin V$. Dann ex $x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(x) < \inf\{\operatorname{Re} x'(v)\}$

<u>22 Schwache Konvergenz u. Reflexivität</u>

<u>Notation</u> X nVR, X' Dualraum. Für $x \in X$, $x' \in X'$, setze $x'(x) =: (x, x') \leq \|x\|\,\|x'\|$

Dann ist $X \times X' \ni (x, x') \longmapsto (x, x')$ eine Bilinearform auf $X \times X'$. Ist X HR mit SKP $\langle .,. \rangle$ so ex.

nach Riesz $J : X \to X'$: $J'(x)(y) = \langle y, x \rangle$. Für $x' = J(x)$ gilt $(y, x') = (x, J(x)) = \langle y, x \rangle = \langle y, J^{-1}x' \rangle$

<u>22.2 Def</u> Sei X nVR, X' Dualraum

a) Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ konv schwach gegen $x \in X$, falls $(x_n, x') \to (x, x')$ für alle $x' \in X'$ $(x_n \xrightarrow{w} x)$

b) Eine Folge $(x_n') \subseteq X'$ konv schwach* gegen $x' \in X'$ falls $(x, x_n') \to (x, x')$ für alle $x \in X$ $(x_n' \xrightarrow{w^*} x')$

<u>22.3 Eigenschaften</u> a) Der schwache u. schwach* Limes sind eind. bestimmt

b) Normkonv in X (oder X') impliziert schwache (bzw schwach*) Konvergenz

c) Falls $x_k \xrightarrow{w} x$ dann $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$, Falls $x_k' \xrightarrow{w^*} x'$ dann $\|x'\| \leq \liminf \|x_k'\|$

d) Ist X BR und (x_n) konv schwach, so ist (x_n) beschr. Ebenso: $x_n' \xrightarrow{w^*} x' \Rightarrow (x_n')$ in X' beschr.

Bew a) $x_n \xrightarrow{w} y_1$, $x_n \xrightarrow{w} y_2 \Rightarrow x'(y_1) = \lim x'(x_n) = x'(y_2)$ für alle $x' \in X'$

$\Rightarrow x'(y_1 - y_2) = 0$ für alle $x' \in X' \Rightarrow y_1 = y_2$ (Kor. Ende §20)

b) $|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$

c) $x_n \xrightarrow{w} x$. Nach §20 ex $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$ und $x'(x) = \|x\|$

$\Rightarrow \|x\| = x'(x) = \lim x'(x_n) \leq \underbrace{\|x'\|}_{=1} \|x_n\| \Rightarrow \|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

d) x_n sei schwach konv. Def $T_n : X' \to \mathbb{K}$, $T_n(x') = x'(x_n)$. Für alle x' ist $\{T_n(x')\}$ beschr in $\mathbb{K}$

Banach-Steinhaus $\Rightarrow \sup \|T_n\| < \infty$. Wg $\|T_n\| = \|x_n\|$ folgt: (x_n) ist beschr.

Für die zweite Beh def $T_n : X \to \mathbb{K}$, $T_n x := x_n'(x)$ (erst hier wird Vollst von X gebraucht)

22.4 Lemma Sei $(x_n') \subseteq X'$ beschr und $D \subseteq X$ mit $\overline{span(D)} = X$. Falls $x_n'(x)$ eine CF ist für alle $x \in D$,

dann konv x_n' schwach* gegen ein $x' \in X'$

Bew Sei $Y = span(D)$. Def $y' : Y \to \mathbb{K}$, $y'(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \lim_{n \to \infty} (\sum_{i=1}^n \alpha_i x_n'(x_i))$. y' ist beschr, da

$|y'(x)| \leq \sup \|x_n'\| \, \|\underbrace{\sum \alpha_i x_i}_{=x}\| \overset{§3}{\Rightarrow}$ Es gibt eine stetige Fortsetzung x' von y' auf ganz X.

$\Rightarrow x_n' \xrightarrow{w^*} x'$, $\|y'\| = \|x'\|$ denn $x'|_Y = y'$ und $\overline{Y} = X$

22.5 Prop (Kan Einb. von X nach X'') Setze $J : X \to X''$, $J : X \to X''$, $J(x)(x') = x'(x)$ für alle $x' \in X'$

Dann ist J eine isometrische Einbettung von X nach X''

Bew $J(x)$ linear, $|J(x)(x')| = |x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|$ $\forall x' \in X' \Rightarrow J(x) \in X''$, $\|J(x)\|_{X''} \leq \|x\|$

Zu $x \in X$ gibt es ein x_0' mit $\|x_0'\| = 1$, $x_0'(x) = \|x\| \Rightarrow \|J(x)\|_{X''} \geq |J(x)(x_0')| = |x_0'(x)| = \|x\|$

22.6 Def Ein BR heißt reflexiv, falls $J : X \to X''$ (22.5) surjektiv ist ($X \cong X''$)

22.7 Bsp a) $X = H$ HR, $X' = X$ (Riesz) $\Rightarrow X'' = X' = X$ reflexiv. Schwache Konv. im obigen Sinne

stimmt überein mit d. schwachen Konv in Hilbertraum-Sinne

b) $X = \ell^p$, $1 < p < \infty$. Dann ist $(\ell^p)' = \ell^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (\ell^p)'' = \ell^p$ reflexiv

$x_n = (\alpha_{nk})_k \xrightarrow{w} x = (\alpha_k)_k \Leftrightarrow \alpha_{nk} \to \alpha_k \ \forall k \in \mathbb{N}$

c) $(c_0)' = \ell^1$, $(\ell^1)' = \ell^\infty \Rightarrow (c_0)'' = \ell^\infty \Rightarrow J_{c_0} : c_0 \hookrightarrow \ell^\infty$ nicht reflexiv

d) $X = L^p(\Omega)$, $L^1(\Omega)' = L^\infty(\Omega)$, $L^p(\Omega)' = L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \in (1, \infty)$

$\Rightarrow L^p(\Omega)$ reflexiv für $p \in (1, \infty)$

Für $x, x_n \in L^p(\Omega)$ gilt $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \int_A x_n \, d\mu \to \int_A x \, d\mu \ \forall A \in \mathcal{A}$ (falls (x_n) beschr)

e) $X = C(K)$, K kompakt. Sei $(x_k) \subseteq C(K)$ beschr. und $x \in C(K)$. Dann gilt:

$x_k \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x_k(u) \to x(u)$ für alle $u \in K$

22.8 Def a) $U \subseteq X$ nVR heißt schwach-kompakt, falls zu jeder Folge $(x_n) \subseteq U$ eine TF x_{n_k} und ein $x \in U$ existiert mit $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$

b) $V \subseteq X'$ heißt schwach*-kompakt, falls jede Folge $(x_n') \subseteq V$ eine TF (x_{n_k}') besitzt, so dass ein $x' \in V$ existiert mit $x_{n_k}' \xrightarrow{w^*} x'$

22.9 Satz (Alaoglu-Bourbaki). Sei X separabel. Dann ist $U_{X'}$ w^*-kompakt

Bew Sei D eine dichte und abzählbare TM von X und $(x_n') \subseteq U_{X'}$. Wähle nach dem Cantor'schen Diagonalverfahren eine TF x_{n_k}' mit $x_{n_k}'(x)$ ist eine CF $\forall x \in D$. Anwendung von Lemma 22.4 liefert die Beh.

22.10 Prop a) Ein abg UVR U eines reflexiven Raumes X ist reflexiv

b) Ein BR X ist genau dann reflexiv, falls sein Dualraum X' reflexiv ist.

Bew a) Zz: $\forall u'' \in U''$ gibt es ein $x \in U$ mit $J_U(x) = u''$. Setze $x''(x') := u''(x'|_U)$. Dann ist $x'' \in X''$, denn $|x''(x')| = |u''(x'|_U)| \le \|u''\| \cdot \|x'|_U\|_{U'} \le \|u''\| \, \|x'\|_{X'}$. Da X reflexiv ist, ex ein $x \in X$ mit $J_X(x) = x''$. Ann: $x \notin U$. Dann gibt es nach einem Korollar zu H-B ein $x' \in X'$ mit $x'|_U = 0$, $x'(x) \neq 0$

$\Rightarrow 0 \neq x'(x) = x''(x') = u''(x'|_U) = 0$ ↯ $\Rightarrow x \in U$. Jedes $u' : U \to \mathbb{K}$ lässt sich nach H-B fortsetzen zu $x' : X \to \mathbb{K}$ mit $x'|_U = u'$ $\Rightarrow u''(u') = u''(x'|_U) = x''(x') = x'(x) = u'(x)$, da $x \in U$ $\Rightarrow J_U(x) = u''$

b) „⇒" Sei X reflexiv. Zz $(X')'' = X'$, d.h. zu $x''' \in X'''$ gibt es $x' \in X'$ mit $J_{X'}(x') = x'''$

Kandidat: $x' : X \to \mathbb{K}$, $x'(x) = x'''(J_X(x))$. Es gilt $x' \in X'$. Da X reflexiv ist, gibt es zu jedem $x'' \in X''$ ein $x \in X$ mit $J_X(x) = x''$. Also gilt für $x'' \in X''$: $x'''(x'') = x'''(J_X(x)) = x'(x) = x''(x') \Rightarrow J_{X'}(x') = x'''$

„⇐" Sei X' reflexiv $\Rightarrow X''$ reflexiv, $J_X : X \hookrightarrow X''$ $\Rightarrow$ X reflexiv nach a)

22.11 Lemma Sei X reflexiv. Dann: X ist separabel $\Leftrightarrow$ X' ist separabel

Bew „⇐" Sei X' separabel. Sei (x_k') dicht in $\partial U_{X'}$. Wähle $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$, $x_k'(x_k) \ge \frac{1}{2}\|x_k'\|$

Bch: $U = \overline{\text{span}}(x_k) = X$. Andernfalls ex $x' \in U_{X'}$ mit $x'|_U = 0$ und $x' \neq 0$. Wähle ein x_k' mit $\|x_k' - x'\| \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \ge \|x_k' - x'\| \ge (x_k' - x)(x_k) = x_k'(x_k) \ge x_k'(x_k) \ge \frac{1}{2}$ ↯.

„⇒" Sei X separabel. Wegen $(X')' = X'' = X$ folgt, dass X' separabel ist

22.12 Satz Sei X reflexiv. Dann ist U_X schwach folgenkompakt (und umgekehrt)

Bew (i) X separabel. Setze $Y = X'$, d.h. $Y' = X'' = X \overset{22.11}{\Rightarrow} Y$ sep und reflexiv $\overset{22.9}{\Rightarrow} U_{Y'}$ ist w^*-kompakt

Also ist U_X w-kompakt, d.h. für $(x_n) \subseteq U_X = U_{Y'}$ $\exists n_k, x \in Y' = X$ mit $(y, x_{n_k}) \to (y, x)$ $\forall y \in Y = X'$

(ii) X nicht separabel. Zu $(x_n) \subseteq X$ bilde $X_0 = \overline{\text{span}}(x_n)$, X_0 sep. Also gibt es nach (i) eine TF (x_{n_k}) und $x \in X_0$ mit $(x_{n_k}, x_0') \to (x, x_0')$ $\forall x_0' \in X_0'$. Für $x' \in X'$ ist $x_0' = x'|_{X_0} \in X_0'$ mit

$x'(x_{n_k}) = (x'|_{X_0})(\overset{\in X_0}{x_{n_k}}) = x_0'(x_{n_k}) \to x_0'(x) = x'(x)$. Also $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ in X

22.13 Satz Sei X ein nVR und $V \subseteq X$ konv und abg. Sei $(x_n) \subseteq V$ und $x_n \xrightarrow{w} x$. Dann ist $x \in V$

Bew Ann $x \notin V$. Dann ex nach dem 2. Trennungssatz ein $x' \in X'$ und $\varepsilon > 0$ so dass

$\operatorname{Re} x'(x) + \varepsilon < \inf\{\operatorname{Re} x'(v) : v \in V\}$. Damit folgt für $x_n \in V$: $\operatorname{Re} x'(x) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(x_n)$

$\Rightarrow \operatorname{Re} x'(x_n - x) \geq \varepsilon$ ↯ zu $x_n \xrightarrow{w} x$

22.14 Korollar (Satz von Mazur) Falls $(x_n) \subset X$ nVR mit $x_n \xrightarrow{w} x$, dann gibt es eine Folge von Linearkombinationen $y_n = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j x_j$ mit $\sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j = 1$ und $\lambda_j \geq 0$, so dass $\|y_n - x\| \to 0$

Bew $V := \overline{\operatorname{conv}(x_n)}$ abg und konvex, $x_n \xrightarrow{w} x \overset{13}{\Rightarrow} x \in V \Rightarrow y_n \in \operatorname{conv}(x_n) \xrightarrow{\|.\|} x$

23 Adjungierte Operatoren

23.1 Satz u Def Seien X, Y, Z nVR. Zu jedem $T \in B(X,Y)$ gibt es genau einen Operator $T' \in B(Y', X')$

mit $(T'y')(x) = y'(Tx)$ und folgende Eigenschaften:

(i) $\|T'\| = \|T\|$ (ii) $(\lambda T)' = \lambda T'$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ (iii) $(S+T)' = S' + T'$ (iv) $(S \circ T)' = T' \circ S'$

T' heißt der duale Operator von T

Bew T' lin nach Def. Für $y' \in Y'$, $x \in X$ gilt $|(T'y')x| = |y'(Tx)| \leq \|y'\|_{Y'} \|Tx\|_X \leq (\|y'\| \cdot \|T\|) \|x\|$

$\Rightarrow T'y' \in X'$ und $\|T'y'\| \leq \|T\| \cdot \|y'\|$, d.h. $T' \in B(X', Y')$

(i) $\|T'\| = \sup_{\|y'\|=1} \|T'y'\|_{X'} = \sup_{\|y'\|=1} \sup_{\|x\| \leq 1} |(T'y')x| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y'\|=1} |y'(Tx)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|$

(ii)+(iii) nach Def (iv) $((ST)'z')(x) = z'(STx) = S'z'(Tx) = ((T' \circ S')(z'))(x)$

23.2 Bem Analogon zu Hilbertraumadjungierten: Notation: Für $x' \in X'$, $x \in X$ sei $x'(x) = (x, x')$. Außerdem sei X ein HR mit SKP $\langle .,. \rangle$. Nach Def von T': $(x, T'y') = (Tx, y')$, $x \in X$, $y' \in X'$. Beachte $T' \in B(X')$, $T^* \in B(X)$

Formel leben T', T^* auf versch. Räumen, also nach Riesz ex. $J: X \to X'$ mit $(Jy)(x) = \langle x, y \rangle$. Dann ist für

$x \in X$, $y' = Jy$, $x, y \in X$ und $y' \in X'$: $(x, T'y') = (T'y')(x) = y'(Tx) = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$

$\Rightarrow J(T'y') = T^*y \Rightarrow J(T'J^{-1}y) = T^*y$ $\forall y \in X \Rightarrow T^* = J T' J^{-1}$. Beachte: $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$, $(\lambda T)' = \lambda T'$

23.3 Bsp a) $X = Y = L^p[0,1]$, $k: [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ stetig. $Tx(u) := \int_0^1 k(u,v) x(v)\,dv$, $(T'x)(v) = \int_0^1 k(u,v) x(u)\,du$

Bew Sei $x \in L^p$, $y \in (L^p)' = L^q \Rightarrow (T'y)(x) = y(Tx) = \int_0^1 y(u)(Tx)(u)\,du = \int_0^1 \int_0^1 y(u) k(u,v) x(v)\,dv\,du$

$(T'y)(x) = \int_0^1 [T'y(v)] x(v)\,dv$ $\quad = \int_0^1 \left(\int_0^1 k(u,v) y(u)\,du\right) x(v)\,dv \Rightarrow T'y(v) = \int_0^1 k(u,v) y(u)\,du$

b) $X = Y = \ell^p$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $T \in B(\ell^p)$, $T(s_1, s_2, \ldots) = (s_2, s_3, \ldots)$, $S \in B(\ell^q)$, $S(s_1, s_2, \ldots) = (0, s_1, s_2, \ldots)$

Dann ist $T' = S$

23.4 Prop Für $T \in B(X,Y)$ gilt:

(i) $(\operatorname{Bild} T)^\perp = \operatorname{Ker} T'$ (ii) $\overline{\operatorname{Bild}(T)} = (\operatorname{Ker} T')_\perp$ (iii) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Bild} T')_\perp$ (iv) $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \overline{\operatorname{Bild} T'}$

Bew (i) $y' \in \operatorname{Ker} T' \Leftrightarrow T'y' = 0 \Leftrightarrow y'(Tx) = 0$ $\forall x \in X \Leftrightarrow y' \in \operatorname{Bild}(T)^\perp$

(ii) „$\subseteq$" Sei $y = Tx \in \text{Bild } T$. Für $y' \in \text{Ker } T'$ folgt $y'(y) = y'(Tx) = (T'y')(x) = 0$. Also $y \in (\text{Ker } T')_\perp$

$\Rightarrow \text{Bild}(T) \subseteq (\text{Ker } T')_\perp = \overline{(\text{Ker } T')_\perp} \Rightarrow \overline{\text{Bild}(T)} \subseteq (\text{Ker } T')_\perp$

„$\supseteq$" Sei $y \notin \overline{\text{Bild}(T)}$. Da $\overline{\text{Bild}(T)}$ abg UVR gibt es nach H-B ein $y' \in Y'$ mit $y'(y) \neq 0$ und $y'|_{\overline{\text{Bild}(T)}} = 0$

Dann ist $y' \in \text{Ker } T'$, da $(T'y')(x) = y'(Tx) = 0 \ \forall x \in X$. Da $y'(y) \neq 0$ gilt $y \notin (\text{Ker } T')_\perp$

23.5 Prop Für $T \in B(X,Y)$ gilt: $J_Y T = T'' J_X$. Insb, falls X refl. ist, so ist für $X = Y$, $T = T''$

Bew Für $x \in X$, $y' \in Y'$ gilt: $J_Y(Tx)(y') = y'(Tx) = (T'y')(x) = (J_X(x))(T'y') = (T'' J_X x)(y') \ \forall y' \in Y'$

23.6 Satz $T \in B(X,Y)$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $T' \in B(Y',X')$ invertierbar. Insb $\sigma(T') = \sigma(T)$ für $X = Y$

Bew „$\Rightarrow$" $\exists S \in B(Y,X)$ mit $TS = id_Y$, $ST = id_X$ $\Rightarrow$ $S'T' = id_{Y'}$, $T'S' = id_{X'}$ $\Rightarrow$ $T'^{-1} = S' \in B(X',Y')$

„$\Leftarrow$" Nach ($\Rightarrow$) gilt: $T'' \in B(X'',Y'')$ inv. Sei $S = (T'')^{-1} \in B(Y'',X'')$. Da $\text{Bild}(T'')$ abg, folgt mit 23.7:

$\exists C > 0$ mit $\|T''x''\| \geq C\|x''\|$ $\Rightarrow$ $T = T''|_X$ (nach 23.7) injektiv und $T(X)$ ist abg. Da $\text{Ker}(T') = \{0\}$

nach 23.4 ist Bild T dicht in Y $\Rightarrow$ $T(X) = X$, T inj $\Rightarrow$ T inv

Insb: $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda - T$ nicht inv $\Leftrightarrow \lambda - T' = (\lambda - T)'$ nicht inv $\Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T')$

23.7 Satz (v. abg. Bild) Für $T \in B(X,Y)$ sind äquivalent: (X, Y BR)

(i) Bild T abg   ii) $\exists C > 0: \|y\| \geq C\|x\| \ \forall y \in T(X), x \in X$ mit $Tx = y$ iii) Bild T' abg

Bew „i $\Rightarrow$ ii" $(T(X), \|\cdot\|_Y)$ BR. Nach dem Satz v. d. offenen Abb gibt es ein $\delta > 0$ mit $\delta U_Y \subseteq T(U_X)$.

Für ein $y \in T(X)$ ist $y_0 = \delta(2\|y\|)^{-1} y \in \delta U_Y$. Wähle ein $x_0 \in U_X$ mit $T(x_0) = y_0$. Setze $x = \delta^{-1} 2\|y\| x_0$.

$\Rightarrow Tx = \delta^{-1} 2\|y_0\| y_0 = y$, $\|x\| \leq \delta^{-1} 2\|y\| \cdot \overbrace{\|x_0\|}^{\leq 1}$. Mit $C^{-1} = \frac{2}{\delta}$ gilt $\|x\| \leq C^{-1}\|y\|$

„ii $\Rightarrow$ i" Sei $(y_n) \subseteq T(X)$ mit $y_n \to y \in Y$. Wähle (n_k) mit $\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$. Setze $z_0 = y_{n_1}$ und

$z_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$ für $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\|z_k\| \leq 2^{-k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$. Zu z_k wähle x_k mit $Tx_k = z_k$

und $\|x_k\| \leq C\|z_k\| \leq \frac{C}{2^k}$. $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \in X$, da X BR $\Rightarrow$ $Tx = \sum_{k=0}^{\infty} Tx_k = \sum_{k=0}^{\infty} z_k = y$ $\Rightarrow$ $y \in T(X)$

„ii $\Rightarrow$ iii" Nach 23.4 gilt Bild $T' \subseteq (\text{Ker } T)^\perp$ abg. Also reicht es $(\text{Ker } T)^\perp \subseteq$ Bild T' zu zeigen.

Zu $x' \in \text{Ker } T'$ def $y_0': T(X) \to \mathbb{K}$ durch $y_0'(y) = x'(x)$, falls $y = Tx$. Für x_1, x_2 mit $Tx_1 = y = Tx_2$

ist $0 = x'(x_1) - x'(x_2) = x'(x_1 - x_2)$ da $x' \in (\text{Ker } T)^\perp$ und $T(x_1 - x_2) = Ty - Ty = 0$ $\Rightarrow$ $x_1 - x_2 \in \text{Ker } T = \{0\}$

$\Rightarrow$ y_0' wohldef. Weiter ist $|y_0'(y)| = |x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\| \leq (\|x'\|C)\|y\|$ $\Rightarrow$ y_0' stetig. Nach H-B gibt es

$y' \in Y'$ mit $y'|_{T(X)} = y_0'$. Nun ist $T'y' = x'$, denn $\forall x \in X$ gilt: $T'y'(x) = y'(Tx) = y_0'(Tx) = x'(x)$

„iii $\Rightarrow$ i" Falls X reflexiv ist, ist die Aussage klar. Für X nicht reflexiv ist halt doof.

23.8 Satz (Schauder) X, Y BR. $T \in K(X,Y) \Leftrightarrow T' \in K(Y',X')$

Bew „$\Rightarrow$" Setze $K = \overline{T(U_X)}$ und $d_Y(y_1,y_2) = \|y_1 - y_2\|$ $\Rightarrow$ (K, d_Y) komp. metr. Raum. Für $y' \in Y'$ ist

$f = y'|_K \in C(K)$. Sei $(y_n') \subseteq Y'$ beschr. Setze $f_n = y_n'|_K \in C(K)$. f_n hat eine glm konv TF f_{n_k} in $C(K)$

denn: • (f_n) glm beschr., $\|f_n\| = \sup_{y \in K} |f_n(y)| = \sup_{x \in U_X} |f_n(Tx)| = \sup_{\|x\| \le 1} |y_n'(Tx)| \le \|T\| \cdot \|y_n'\| \le \|T\| C < \infty$

• (f_n) gleichgr. stetig, $|f_n(y_1) - f_n(y_2)| \le \sup_n \|y_n'\| \cdot \|y_1 - y_2\| \le C \|y_1 - y_2\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Mit der TF folgt nun:

$$\|T' y_{n_k}' - T' y_{n_l}'\|_{X'} = \sup_{\|x\| \le 1} |T' y_{n_k}'(x) - T' y_{n_l}'(x)| = \sup_{\|x\| \le 1} |y_{n_k}'(Tx) - y_{n_l}'(Tx)| \le \|f_{n_k} - f_{n_l}\| \to 0 \quad (k, l \to \infty)$$

„$\Leftarrow$" Nach ($\Rightarrow$) gilt $T'': X'' \to Y''$ ist komp. $J_Y \circ T = \overbrace{T''}^{\text{kompakt}} J_X$ nach Lemma 23.5. Da J_Y Isometrie ist,

ist damit auch T kompakt