# Funktionalanalysis

Prof. Dr. Lutz Weis

Wintersemester 2015

Martin Belica

# Einleitung

Die Funktionalanalysis liefert den begrifflichen Rahmen sowie allgemeine Methoden, die in weiten Teilen der modernen Analysis verwendet werden. Zum Beispiel ist es möglich Integral- und Differentialgleichungen als lineare Gleichungen in einem geeigneten unendlichdimensionalen Vektorraum (wie z.B. einem Raum stetiger oder integrierbarer Funktionen) aufzufassen. Will man nun auf diese unendlichdimensionalen Gleichungen Ideen der linearen Algebra anwenden, so treten Konvergenz- und Kompaktheitsprobleme auf, die wir in dieser Vorlesung behandeln wollen. Zu den Themen gehören:

- Beschränkte und abgeschlossene Operatoren auf normierten Räumen
- Stetigkeit und Kompaktheit auf metrischen Räumen
- Geometrie und Operatorentheorie in Hilberträumen
- Der Satz von Hahn-Banach und Dualität von Banachräumen

Die allgemeinen Aussagen werden durch konkrete Beispiele von Räumen und Operatoren der Analysis illustriert.

# Erforderliche Vorkenntnisse

Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Lineare Operatoren auf Banachräumen

## 1.1 Einführung

### 1.1.1 Räume

Sei $X$ ein Vektorraum, $dimX < \infty$ und sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_i^2\|\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Diese Normen sind äquivalent, denn: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$

Nicht Heine-Borel!?

**Satz (Heine-Borel)**
$A \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann hat jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Teilfolge.

**Beispiel**
$X = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \text{ stetig auf } [0,1]\}$

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_2 &:= \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|f\|_\infty &:= \max_{t \in [0,1]} \|f(t)\| \end{aligned}\right\} \text{ dabei gilt } \|f\|_\infty \leq \|f\|_2 \leq \dots$$

Aber: $\quad f_n(t) = BILD, \quad \|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$
$\|f_n - f_m\| = 1$ für $n \neq m \Rightarrow$ Satz von Heine-Borel gilt im $\infty$-dimensionalen i.A. nicht!

### 1.1.2 Operatoren

Sei $N = dimX, M = dimY$ und seien $(e_n)$ bzw. $(f_n)$ Basen von $X$ bzw. $Y$. Für $T : X \to Y$ gegeben durch:

$$Komm.Diagramm$$

Daraus folgt:

- $T$ ist stetig
- X = Y $\iff$ T injektiv $\iff$ T surjektiv (Dimensionsformel)
  (Die Gleichung $Tx = y$ ist eindeutig lösbar $\iff$ Gleichung hat für alle $y \in Y$ eine Lösung.)

- Falls A selbstadjungiert ist, d.h. $A = A^*$, gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(e_n)$ von $A$, d.h. $T(\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n) = \sum n = 1^N \lambda_n \alpha_n e_n$, wobei $\lambda_n$ Eigenwerte sind $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

**Beispiel (1)**
$X = C^1[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \text{ stetig auf } [0,1]\}$ $Tf = f', T : X \to Y$ stetig.
(Aber: $T : C[0,1] \to C[0,1]$, hier ist $T$ nicht definiert.)
$T$ ist nicht stetig bzgl. $\|.\|_\infty$-Norm, da:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{int}, \qquad \text{dann: } \|f_n\| \to 0 \text{ für } t \to \infty$$

$$Tf_n(t) = i\sqrt{n}e^{int}, \qquad \text{mit: } \|Tf_n\|_\infty \to \infty, \text{ für } n \to \infty$$

**Beispiel (2)**
$X = L_2 = \{(a_n : \left(\sum_{n\geq 1}^\infty \|a_n\|\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$
$T(a_1, a_2, a_3, ...) = (0, a_1, a_2, a_3, ...)$
$T$ ist injektiv, aber nicht surjektiv

### 1.1.3 Anwendungen

(1) Fredholm'sche Integralgleichungen

(2) Dirichletproblem

(3) Sturm-Liouville Problem

## 1.2 Normierte Räume

**Definition**
Sei $X$ ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
Eine Abbildung $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ heißt eine Norm, wenn

(1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

(2) $|\lambda x\| = |\lambda\|x\|$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Bemerkung:** Falls $\|.\|$ all die oben genannten Eigenschaften erfüllt außer $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, dann heißt $\|.\|$ Halbnorm

Die Menge $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ heißt **Einheitskugel**.

Eine Folge $(x_n)$ des normierten Raums $X$ **konvergiert** gegen ein $x \in X$, falls $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

**Bemerkung:** Für zwei Elemente $x, y \in (X, \|.\|)$ ... gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung $(|\|x\| + \|y\|| \leq \|x+y\|)$

**Beispiel**
Sei $X = \mathbb{K}^n, \quad X = (X_1, \ldots, X_n), \quad X_i = \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^p|\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty (p = 2: \text{ Euklidische Norm}) \\ \|x\|_\infty &= \sup_{j=1}^{n} |x_j| \end{aligned}$$

Beh: $\|.\|$ ist Norm auf $\mathbb{K}^n$ für $1 \leq p \leq \infty$

$\|x+y\|_\infty = sup_{j=1}^{k}|x_j + y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ Für $p \in (1, \infty), p \neq 2$ : siehe Übungsaufgabe (Fall $p = 2$ läuft über Cauchy-Schwarz)

Beachte: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \leq n\|x\|_\infty$

**Definition**
Zwei Normen $\|.\|_1, \|.\|_2$ heißen äquivalent auf $X$, falls es $0 < m, M < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

**Satz 1.1**
Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

**Beweis**
Wähle eine algebraische Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von X, wobei $n = dimX < \infty$.
Definiere $|||x||| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

z. z. die gegeben Norm $|||.|||$ist äquivalent zu $\|.\|$ ∎

# Bildquellen

Abb. **??** Tag: Name, URL-Name

# Abkürzungsverzeichnis

**Beh.** Behauptung

**Bew.** Beweis

**bzgl.** bezüglich

**bzw.** beziehungsweise

**ca.** circa

**d. h.** das heißt

**Def.** Definition

**etc.** et cetera

**ex.** existieren

**Hom.** Homomorphismus

**i. A.** im Allgemeinen

**o. B. d. A.** ohne Beschränkung der Allgemeinheit

**Prop.** Proposition

**sog.** sogenannte

**Vor.** Voraussetzung

**vgl.** vergleiche

**z. B.** zum Beispiel

**zhgd.** zusammenhängend

**z. z.** zu zeigen

# Symbolverzeichnis

## Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ Ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\} = \{\frac{z}{n} \text{ mit } z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ Rationale Zahlen
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, -\sqrt[3]{3}, \dots\}$ Reele Zahlen
$\mathbb{R}_+$ Echt positive reele Zahlen
$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$ Komplexe Zahlen
$I = [0, 1] \subsetneq \mathbb{R}$ Einheitsintervall