Funktionalanalysis

Prof. Dr. Lutz Weis

Wintersemester 2015

Martin Belica

Vorwort

Dieses Skript wurde im Wintersemester 2015/2016 von Martin Belica geschrieben. Es beinhaltet die Mitschriften aus der Vorlesung von Prof. Dr. Weis sowie die Mitschriften einiger Übungen.

Einleitung

Die Funktionalanalysis liefert den begrifflichen Rahmen sowie allgemeine Methoden, die in weiten Teilen der modernen Analysis verwendet werden. Zum Beispiel ist es möglich Integral- und Differentialgleichungen als lineare Gleichungen in einem geeigneten unendlichdimensionalen Vektorraum (wie z.B. einem Raum stetiger oder integrierbarer Funktionen) aufzufassen. Will man nun auf diese unendlichdimensionalen Gleichungen Ideen der linearen Algebra anwenden, so treten Konvergenz- und Kompaktheitsprobleme auf, die wir in dieser Vorlesung behandeln wollen. Zu den Themen gehören:

- Beschränkte und abgeschlossene Operatoren auf normierten Räumen
- Stetigkeit und Kompaktheit auf metrischen Räumen
- Geometrie und Operatorentheorie in Hilberträumen
- Der Satz von Hahn-Banach und Dualität von Banachräumen

Die allgemeinen Aussagen werden durch konkrete Beispiele von Räumen und Operatoren der Analysis illustriert.

Erforderliche Vorkenntnisse

Analysis I-III, Lineare Algebra I-II

Inhaltsverzeichnis

1 Räume

1.1 Einführung

Sei X ein Vektorraum, $dimX < \infty$

$$\|x\|_2 := \max_{z \leq r}\{u(z),\, v(z)\}.$$
$$\|x\|_\infty := \max_{z \leq r}\{u(z),\, v(z)\}.$$

Diese Normen sind äquivalent, denn: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}}\|x\|_\infty$

Satz 1.1 (Satz von Heine Borel)
$A \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann hat jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 1.2 (vgl. Analysis 1, Theorem 4.12)
Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,\ z \in B(c,\rho),$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f \in H(B(c,\rho))$ und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1} =: g(z)\ (\forall z \in B(c,\rho)),$$

Wie in Analysis 1 zeigt man: g hat Konvergenzradius

- $p_n(w)0,\ wz$ (für jedes feste n)
- $|p_n(w)|\}$

(1) $f(z) = \bar{z},\ z,$ ist nirgends komplex differenzierbar, obwohl $f(x,y) = x{-}y$ reell C^∞ ist. Denn $u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y$; also

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

was $(\textbf{??})_1$ widerspricht.

(2) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, z, ist nur in $z = 0$ komplex differenzierbar, denn hier ist $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$ und somit:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x \overset{!}{=} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0 \iff x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y \overset{!}{=} -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0 \iff y = 0.$$

(3) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{=u} + \text{ß} \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{=v}$ ist holomorph für $z \neq 0$ (Bem. **??**).

Bildquellen

Abb. **??** Tag: Name, URL-Name

Abkürzungsverzeichnis

Beh. Behauptung

Bew. Beweis

bzgl. bezüglich

bzw. beziehungsweise

ca. circa

d. h. das heißt

Def. Definition

etc. et cetera

ex. existieren

Hom. Homomorphismus

o. B. d. A. ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Prop. Proposition

sog. sogenannte

Vor. Voraussetzung

vgl. vergleiche

z. B. zum Beispiel

zhgd. zusammenhängend

z. z. zu zeigen

Symbolverzeichnis

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$ Natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup 0, -1, -2, \ldots$ Ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ Rationale Zahlen
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \sqrt{2}, -\sqrt[3]{3}, \ldots$ Reele Zahlen
$\mathbb{R}_+$ Echt positive reele Zahlen
$\mathbb{C} = a + ib | a, b \in \mathbb{R}$ Komplexe Zahlen
$I = [0, 1] \subsetneq \mathbb{R}$ Einheitsintervall

$=$