Norm

Halbnorm

Einheitskugel

Definition: im nVR konvergente Folge

umgekehrte Dreiecksungleichung

äquivalente Normen

äquivalente Normen + endlich dimensionalen Vektorraum

äquivalente Normen + endlich dimensionalen Vektorraum

 # 2 *Antwort*

Falls $\|\cdot\|$ all die Eigenschaften einer Norm erfüllt außer $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, dann heißt $\|\cdot\|$ **Halbnorm**.

 # 1 *Antwort*

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_+$ heißt **Norm**, falls

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

 # 4 *Antwort*

Eine Folge (x_n) des normierten Raums X **konvergiert** gegen ein $x \in X$, falls

$$\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

 # 3 *Antwort*

Die Menge $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ heißt **Einheitskugel**.

 # 6 *Antwort*

Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ heißen **äquivalent** auf X, falls es $0 < m, M < \infty$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

 # 5 *Antwort*

Für zwei Elemente $x, y \in (X, \|\cdot\|)$ in normierten Räumen gilt auch die **umgekehrte Dreiecksungleichung** $(|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|)$

 # 8 *Antwort*

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

 # 7 *Antwort*

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Äquivalenzen zu äquivalente Norm

Folgenraum

Minkowski-Ungleichung

Hölder-Ungleichung

äquivalente Normen + unendlich dimensionale Räume

Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen

Quotientenraum

Beschränkte Menge

10 *Antwort*

$\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_i = 0$ bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}\}$ ist der **Folgenraum** und $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der j-te Einheitsvektor in $\mathbb{F}$, wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

9 *Antwort*

Für zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf X sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind äquivalent

b) Für alle $(x_n)_n \subset X$, $x \in X$ gilt $\|x_n - x\|_1 \to 0 \iff \|x_n - x\|_2 \to 0$

c) Für alle $(x_n)_n \subset X$ gilt $\|x_n\|_1 \to 0 \iff \|x_n\|_2 \to 0$

d) Es gibt Konstanten $0 < m, M < \infty$, so dass $mU_{(X,\|\cdot\|_1)}$ $U_{(X,\|\cdot\|_2)} \subseteq MU_{(X,\|\cdot\|_1)}$

12 *Antwort*

Hölder-Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt;

$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$

11 *Antwort*

Minkowski-Ungleichung:

$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

14 *Antwort*

$$C_b^m(\Omega) \coloneqq \{f \colon \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha f \text{ sind für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ stetig}$$
$$\text{und beschränkt auf } \Omega, |\alpha| \leq m\}.$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|f\|_{C_b^m} \coloneqq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Äquivalent dazu ist die Norm

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

13 *Antwort*

Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{F}$ nicht äquivalent.

Bsp.: sei o.B.d.A. $p > q$ und setze $x_n \coloneqq \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j$, $e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$.

16 *Antwort*

Eine Teilmenge V eines normierten Raums $(X, \|\cdot\|)$ heißt **beschränkt**, falls

$$c \coloneqq \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X,\|\cdot\|)}.$$

15 *Antwort*

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset X$ sei abgeschlossener (d.h. für alle $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x \in M$), linearer Unterraum. Definiere $\hat{X} \coloneqq {}^X\!/_M$, dann ist $\hat{x} \in {}^X\!/_M$:

$$\hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$$

Dabei gilt unter anderem $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \widehat{x_1 + x_2}$ und $\lambda \hat{x}_1 = \widehat{\lambda x_1}$; $\hat{X}$ bildet somit einen Vektorraum.
Definieren wir eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels

$$n\|\hat{x}\|_{\hat{X}} \coloneqq \inf\{\|x - y\|_X : y \in M\} \eqqcolon d(x, Y)$$

$(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$ ein normierter Raum.

Beschränkte Folge

Äquivalenzen zu T stetig

Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren

Isometrie

stetige Einbettung

isomorphe Einbettung

Isomorphismus

Dualraum

18 *Antwort*

Seien X, Y normierte Räume. Für einen linearen Operator $S : X \to Y$ sind äquivalent:

a) T stetig, d.h. $x_n \to x$ impliziert $Tx_n \to Tx$

b) T stetig in 0

c) $T(U_{(X,\|\cdot\|)})$ ist beschränkt in Y

d) Es gibt ein $c < \infty$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$

17 *Antwort*

Eine konvergente Folge $(x_n) \in X, x_n \to x$ ist beschränkt, denn $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$ für fast alle m.

20 *Antwort*

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

T heißt **Isometrie**, falls

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \ \forall x \in X$$

19 *Antwort*

Seien X, Y normierte Räume. Mit $B(X, Y)$ bezeichnen wir den **Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren** $T : X \to Y$. Ist $X = Y$ schreiben wir auch kurz $B(X) := B(X, X)$.

$(B(X, Y), \|\cdot\|)$ ist ebenfalls ein normierter Raum und für $X = Y$ gilt für $S, T \in B(X)$:

$$S \cdot T \in B(X) \quad \text{und} \quad \|S \cdot T\| \leq \|S\|\|T\|$$

22 *Antwort*

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

T heißt **isomorphe Einbettung**, falls T injektiv ist und ein $c > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_x$$

In diesem Fall identifizieren wir oft X mit dem Bild von T in Y, $X \cong T(X) \subset Y$

21 *Antwort*

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

T heißt **stetige Einbettung**, falls T stetig und injektiv ist.

24 *Antwort*

Sei X ein normierter Vektorraum. Der Raum

$$X' = B(X, \mathbb{K})$$

heißt **Dualraum** von X oder Raum der linearen Funktionalen.

23 *Antwort*

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

T heißt **Isomorphismus**, falls T bijektiv und stetig ist und $T^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

$$\text{d.h. falls } \exists c > 0 : \frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

(daraus folgt dann auch für $T^{-1} : Y \to X$ aus der ersten Un

$$\|T^{-1}y\|_X \leq c\|T(T^{-1}y)\|_Y = c\|y\|_Y, \text{d.h. } T^{-1} \text{ ist stetig.})$$

In diesem Fall Identifizieren wir $X \cong Y$ und sagen X und Y sind isomorph.

Metrik

Konvergente Folge im metrischen Raum

Durch Halbnorm induzierte Metrik

Abgeschlossen Menge

Offene Menge

Offene bzw. abgeschlossene Kugel

Offene Menge bezüglich diskreter Metrik

Vereinigungen/Schnitte
offener/abgeschlossener Mengen

26 *Antwort*

Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset M$ konvergiert gegen $x \in M$, falls

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Notation: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (in M)

25 *Antwort*

Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf M, falls $\forall x, y, z \in M$:

$(M1)$ $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (positive Definitheit)

$(M2)$ $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

$(M3)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

28 *Antwort*

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **abgeschlossen** (in M), falls für alle in M konvergenten Folgen $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ der Grenzwert von (x_n) in A liegt

27 *Antwort*

Sei X ein Vektorraum und p_j für $j \in \mathbb{N}$ Halbnormen auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_K > 0$. Dann definiert

$$d(x,y) \coloneqq \sum_{j\geq 1} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}, \qquad x, y \in X$$

eine Metrik auf X mit

$$d(x_n, x) \to 0 \iff p_j(x_n - x) \to 0 \;\; (n \to \infty) \;\; \forall j \in \mathbb{N}$$

30 *Antwort*

Wir benutzen die Bezeichnungen

- **offene Kugel**: $K(x,r) \coloneqq \{y \in M : d(x,y) < r\}$
- **abgeschlossene Kugel**: $\bar{K}(x,r) \coloneqq \{y \in M : d(x,y) \leq r\}$

mit $x \in M, r > 0$. Man sieht leicht, dass $K(x,r)$ offen und $\bar{K}(x,r)$ abgeschlossen ist.

29 *Antwort*

Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen** (in M), falls zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$\{y \in M : d(x,y) < \epsilon\} \subset U$$

$A \subset M$ ist offen in M genau dann, wenn $U = M \setminus A$ abgeschlossen ist

32 *Antwort*

Für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen $(A_i)_{i\in I}$ sind

$$A \coloneqq \bigcap_{i\in I} A_i \quad \text{und} \quad A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_N} \;\; (i_1, \ldots, i_N \in I)$$

abgeschlossen in M.

Für eine beliebige Familie offenere Mengen $(U_i)_{i\in I}$ sind

$$U \coloneqq \bigcup_{i\in I} U_i \quad \text{und} \quad U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_N} \qquad (i_1, \ldots, i_N \in I)$$

offen in M.

31 *Antwort*

Bezüglich der diskreten Metrik d aus Beispiel 4.2 b) ist $\{x\} \subset M$ offen für jedes $x \in M$, da

$$K(x,r) = \{x\} \subset \{x\} \text{ für } r \in (0,1]$$

Abschluss, Innere und Rand

Dicht

Separabel

Stetige Abbildung

Ist ℓ^p separabel?

Äquivalenzen zur Stetigkeit einer Abbildungen

Metrik

34 Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $V \subset M$ heißt **dicht** in M, falls $\bar{V} = M$, d.h. jeder Punkt in M ist Grenzwert einer Folge aus V.

33 Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $V \subset M$. Dann heißt

$\bar{V} := \bigcap\{A \subset M : A \text{ ist abgeschlossen mit } V \subset A\}$ der **Abschluss** von V.

$\mathring{V} := \bigcup\{U \subset M : U \text{ ist offen mit } U \subset V\}$ das **Innere** von V.

$\partial V := \bar{V} \setminus \mathring{V}$ der **Rand** von V.

36 Antwort

Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f \colon M \to N$ heißt **stetig in** $x_0 \in M$, falls für alle $(x_n) \subset M$ gilt

$$x_n \to x_0 \text{ in } M \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \text{ in } N$$

$$d_M(x_n, x_0) \to 0 (n \to \infty) \;\Rightarrow\; d_N(f(x_n), f(x_0)) \to 0$$

Die Abbildung f heißt **stetig auf** M, falls f in jedem Punkt von M stetig ist.

35 Antwort

Sei (M, d) ein metrischer Raum, M heißt **separabel**, falls es eine abzählbare Teilmenge $V \subset M$ gibt, die dicht in M liegt.

38 Antwort

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist stetig auf M

(ii) Ist $U \subset N$ offen, so ist auch $f^{-1}(U)$ offen in M

(iii) Ist $A \subset N$ abgeschlossen, so ist auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in M.

37 Antwort

Die Räume $\ell^p, p \in [1, \infty)$ und c_0 sind separabel, da

$$D = lin\{e_k, k \in \mathbb{K}\} \text{ dicht in allen Räumen liegt.}$$

Der Raum ℓ^∞ ist nicht separabel: Die Menge Ω der $\{0,1\}$-wertigen Folgen ist überabzählbar. Für $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt $\|x - y\|_\infty = 1$

39 Antwort

a