

<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 1</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Norm</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 2</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Halbnorm</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 3</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Einheitskugel</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 4</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Im normierten Vektorraum konvergente Folge</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 5</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>umgekehrte Dreiecksungleichung</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 6</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>äquivalente Normen</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 7</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>äquivalente Normen + endlich dimensionalen Vektorraum</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 8</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>äquivalente Normen + endlich dimensionalen Vektorraum</div> </div>

# 2

Antwort

Falls  $\|\cdot\|$  all die Eigenschaften einer Norm erfüllt außer  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ , dann heißt  $\|\cdot\|$  **Halbnorm**.

# 1

Antwort

Sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Eine Abbildung  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}_+$  heißt **Norm**, falls

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

# 4

Antwort

Eine Folge  $(x_n)$  des normierten Raums  $X$  **konvergiert** gegen ein  $x \in X$ , falls

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

# 3

Antwort

Die Menge  $U_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  heißt **Einheitskugel**.

# 6

Antwort

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  heißen **äquivalent** auf  $X$ , falls es  $0 < m, M < \infty$  gibt, so dass für alle  $x \in X$  gilt:

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

# 5

Antwort

Für zwei Elemente  $x, y \in (X, \|\cdot\|)$  in normierten Räumen gilt auch die **umgekehrte Dreiecksungleichung** ( $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ )

# 8

Antwort

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

# 7

Antwort

Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 9</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Äquivalenzen zu äquivalente Norm</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 10</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Folgenraum</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 11</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Minkowski-Ungleichung</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 12</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Hölder-Ungleichung</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 13</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>äquivalente Normen + unendlich dimensionale Räume</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 14</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Raum der beschränkten, m-fach stetig differenzierbaren Funktionen</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 15</div> <div>2 - Normierte Räume</div> </div> <div>Quotientenraum</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 16</div> <div>3 - Beschr. und lin. Op.</div> </div> <div>Beschränkte Menge</div> </div>

---

# 10

Antwort

---

$\mathbb{F} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_i = 0 \text{ bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$  ist der **Folgenraum** und  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der j-te Einheitsvektor in  $\mathbb{F}$ , wobei die 1 an j-ter Stelle steht.

---

# 12

Antwort

---

**Hölder-Ungleichung** mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  gilt;

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| |y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

---

# 14

Antwort

---

$C_b^m(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : D^\alpha f \text{ sind für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ stetig und beschränkt auf } \Omega, |\alpha| \leq m\}.$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|f\|_{C_b^m} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Äquivalent dazu ist die Norm

$$\|f\|_0 = \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)| + \|f^{(m)}\|_\infty$$

---

# 16

Antwort

---

Eine Teilmenge  $V$  eines normierten Raums  $(X, \|\cdot\|)$  heißt **beschränkt**, falls

$$c := \sup_{x \in V} \|x\| < \infty, \text{ und damit auch } V \subset cU_{(X, \|\cdot\|)}.$$

---

# 9

Antwort

---

Für zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  auf  $X$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  sind äquivalent
- Für alle  $(x_n)_n \subset X, x \in X$  gilt  $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$
- Für alle  $(x_n)_n \subset X$  gilt  $\|x_n\|_1 \rightarrow 0 \iff \|x_n\|_2 \rightarrow 0$
- Es gibt Konstanten  $0 < m, M < \infty$ , so dass  $mU_{(X, \|\cdot\|_1)} U_{(X, \|\cdot\|_2)} \subseteq MU_{(X, \|\cdot\|_1)}$

---

# 11

Antwort

---

**Minkowski-Ungleichung:**

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

---

# 13

Antwort

---

Im unendlich dimensionalen Fall sind die Normen  $\|\cdot\|_p$  auf  $\mathbb{F}$  nicht äquivalent.

Bsp.: sei o.B.d.A.  $p > q$  und setze  $x_n := \sum_{j=2^{n+1}}^{2^{n+1}} j^{-\frac{1}{p}} e_j$ ,  $e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$ .

---

# 15

Antwort

---

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $M \subset X$  sei abgeschlossener (d.h. für alle  $(x_n) \in M, \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x \in M$ ), linearer Unterraum. Definiere  $\hat{X} := X/M$ , dann ist  $\hat{x} \in X/M$ :

$$\hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\} = x + M$$

Dabei gilt unter anderem  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = \widehat{x_1 + x_2}$  und  $\lambda \hat{x}_1 = \widehat{\lambda x_1}$ ;  $\hat{X}$  bildet somit einen Vektorraum.

Definieren wir eine Norm für die Äquivalenzklassen mittels

$$n\|\hat{x}\|_{\hat{X}} := \inf\{\|x - y\|_X : y \in M\} =: d(x, Y)$$

$(\hat{X}, \|\cdot\|_{\hat{X}})$  ein normierter Raum.

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 17</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

## Beschränkte Folge

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 18</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>

Äquivalenzen zu  $T$  stetig

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 19</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

Vektorraum der beschränkten, linearen  
Operatoren

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 20</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

## Isometrie

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 21</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

stetige Einbettung

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 22</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

isomorphe Einbettung

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 23</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

## Isomorphismus

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 24</u>	<u>3 - Beschr. und lin. Op.</u>
------------------------	-------------	---------------------------------

## Dualraum

# 18

Antwort

Seien  $X, Y$  normierte Räume. Für einen linearen Operator  $S : X \rightarrow Y$  sind äquivalent:

- a)  $T$  stetig, d.h.  $x_n \rightarrow x$  impliziert  $Tx_n \rightarrow Tx$
- b)  $T$  stetig in 0
- c)  $T(U_{(X, \|\cdot\|)})$  ist beschränkt in  $Y$
- d) Es gibt ein  $c < \infty$  mit  $\|Tx\| \leq c\|x\|$

# 20

Antwort

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume und  $T : X \rightarrow Y$  linear.

$T$  heißt **Isometrie**, falls

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

# 22

Antwort

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume und  $T : X \rightarrow Y$  linear.

$T$  heißt **isomorphe Einbettung**, falls  $T$  injektiv ist und ein  $c > 0$  existiert mit

$$\frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

In diesem Fall identifizieren wir oft  $X$  mit dem Bild von  $T$  in  $Y$ ,  $X \cong T(X) \subset Y$

# 24

Antwort

Sei  $X$  ein normierter Vektorraum. Der Raum

$$X' = B(X, \mathbb{K})$$

heißt **Dualraum** von  $X$  oder Raum der linearen Funktionalen.

# 17

Antwort

Eine konvergente Folge  $(x_n) \in X, x_n \rightarrow x$  ist beschränkt, denn  $x_m \in \{y : \|x - y\| \leq 1\}$  für fast alle  $m$ .

# 19

Antwort

Seien  $X, Y$  normierte Räume. Mit  $B(X, Y)$  bezeichnen wir den **Vektorraum der beschränkten, linearen Operatoren**  $T : X \rightarrow Y$ . Ist  $X = Y$  schreiben wir auch kurz  $B(X) := B(X, X)$ .

$(B(X, Y), \|\cdot\|)$  ist ebenfalls ein normierter Raum und für  $X = Y$  gilt für  $S, T \in B(X)$ :

$$S \cdot T \in B(X) \quad \text{und} \quad \|S \cdot T\| \leq \|S\| \|T\|$$

# 21

Antwort

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume und  $T : X \rightarrow Y$  linear.

$T$  heißt **stetige Einbettung**, falls  $T$  stetig und injektiv ist.

# 23

Antwort

Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume und  $T : X \rightarrow Y$  linear.

$T$  heißt **Isomorphismus**, falls  $T$  bijektiv und stetig ist und  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  ebenfalls stetig ist.

$$\text{d.h. falls } \exists c > 0 : \frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$$

(daraus folgt dann auch für  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  aus der ersten Um-

$$\|T^{-1}y\|_X \leq c\|T(T^{-1}y)\|_Y = c\|y\|_Y, \text{ d.h. } T^{-1} \text{ ist stetig.})$$

In diesem Fall identifizieren wir  $X \cong Y$  und sagen  $X$  und  $Y$  sind isomorph.

<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 25</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
	Metrik	
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 27</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
	Durch Halbnorm induzierte Metrik	
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 29</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
	Offene Menge	
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 31</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
	Offene Menge bezüglich diskreter Metrik	
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 26</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
	Konvergente Folge im metrischen Raum	
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 28</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
	Abgeschlossen Menge	
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 30</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
	Offene bzw. abgeschlossene Kugel	
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 32</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
	Vereinigungen/Schnitte offener/abgeschlossener Mengen	

# 26

Antwort

Eine Folge  $(x_n)_{n \geq 1} \subset M$  konvergiert gegen  $x \in M$ , falls

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Notation:  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  (in  $M$ )

# 28

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt **abgeschlossen** (in  $M$ ), falls für alle in  $M$  konvergenten Folgen  $(x_n)_{n \geq 1} \subset A$  der Grenzwert von  $(x_n)$  in  $A$  liegt

# 30

Antwort

Wir benutzen die Bezeichnungen

- **offene Kugel:**  $K(x, r) := \{y \in M : d(x, y) < r\}$
- **abgeschlossene Kugel:**  $\bar{K}(x, r) := \{y \in M : d(x, y) \leq r\}$

mit  $x \in M, r > 0$ . Man sieht leicht, dass  $K(x, r)$  offen und  $\bar{K}(x, r)$  abgeschlossen ist.

# 32

Antwort

Für eine beliebige Familie von abgeschlossenen Mengen  $(A_i)_{i \in I}$  sind

$$A := \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{und} \quad A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_N} \quad (i_1, \dots, i_N \in I)$$

abgeschlossen in  $M$ .

Für eine beliebige Familie offener Mengen  $(U_i)_{i \in I}$  sind

$$U := \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{und} \quad U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_N} \quad (i_1, \dots, i_N \in I)$$

offen in  $M$ .

# 25

Antwort

Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Eine Abbildung  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Metrik** auf  $M$ , falls  $\forall x, y, z \in M$ :

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{positive Definitheit})$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

# 27

Antwort

Sei  $X$  ein Vektorraum und  $p_j$  für  $j \in \mathbb{N}$  Halbnormen auf  $X$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $x \in X \setminus \{0\}$  ein  $K \in \mathbb{N}$  existiert mit  $p_K > 0$ . Dann definiert

$$d(x, y) := \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \frac{p_j(x - y)}{1 + p_j(x - y)}, \quad x, y \in X$$

eine Metrik auf  $X$  mit

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \iff p_j(x_n - x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

# 29

Antwort

Eine Teilmenge  $U \subset M$  heißt **offen** (in  $M$ ), falls zu jedem  $x \in U$  ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass

$$\{y \in M : d(x, y) < \epsilon\} \subset U$$

$A \subset M$  ist offen in  $M$  genau dann, wenn  $U = M \setminus A$  abgeschlossen ist

# 31

Antwort

Bezüglich der diskreten Metrik  $d$  aus Beispiel 4.2 b) ist  $\{x\} \subset M$  offen für jedes  $x \in M$ , da

$$K(x, r) = \{x\} \subset \{x\} \quad \text{für } r \in (0, 1]$$



<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 33</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Abschluss, Innere und Rand		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 35</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Separabel		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 37</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Ist $\ell^p$ separabel?		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 39</u>	<u>5 - Vollständigkeit</u>
Cauchy-Folge		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 34</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Dicht		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 36</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Stetige Abbildung		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 38</u>	<u>4 - Metrische Räume</u>
Äquivalenzen zur Stetigkeit einer Abbildungen		
<u>Lin. Op. auf BR</u>	<u># 40</u>	<u>5 - Vollständigkeit</u>
Vollständigkeit		

# 34

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $V \subset M$  heißt **dicht** in  $M$ , falls  $\bar{V} = M$ , d.h. jeder Punkt in  $M$  ist Grenzwert einer Folge aus  $V$ .

# 36

Antwort

Seien  $(M, d_M), (N, d_N)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt **stetig in**  $x_0 \in M$ , falls für alle  $(x_n) \subset M$  gilt

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ in } M \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ in } N$$

$$d_M(x_n, x_0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow d_N(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0$$

Die Abbildung  $f$  heißt **stetig auf**  $M$ , falls  $f$  in jedem Punkt von  $M$  stetig ist.

# 38

Antwort

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist stetig auf  $M$
- (ii) Ist  $U \subset N$  offen, so ist auch  $f^{-1}(U)$  offen in  $M$
- (iii) Ist  $A \subset N$  abgeschlossen, so ist auch  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $M$ .

# 40

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum, dann heißt  $(M, d)$  **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge  $(x_n) \subset M$  einen Grenzwert in  $M$  hat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad x \in M$$

Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  der vollständig ist bezüglich  $d(x, y) = \|x - y\|$  heißt **Banachraum**.

# 33

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $V \subset M$ . Dann heißt  $\bar{V} := \bigcap \{A \subset M : A \text{ ist abgeschlossen mit } V \subset A\}$  der **Abschluss** von  $V$ .

$\mathring{V} := \bigcup \{U \subset M : U \text{ ist offen mit } U \subset V\}$  das **Innere** von  $V$ .

$\partial V := \bar{V} \setminus \mathring{V}$  der **Rand** von  $V$ .

# 35

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $M$  heißt **separabel**, falls es eine abzählbare Teilmenge  $V \subset M$  gibt, die dicht in  $M$  liegt.

# 37

Antwort

Die Räume  $\ell^p, p \in [1, \infty)$  und  $c_0$  sind separabel, da

$$D = \text{lin}\{e_k, k \in \mathbb{K}\} \text{ dicht in allen Räumen liegt.}$$

Der Raum  $\ell^\infty$  ist nicht separabel: Die Menge  $\Omega$  der  $\{0, 1\}$ -wertigen Folgen ist überabzählbar. Für  $x, y \in \Omega$  mit  $x \neq y$  gilt  $\|x - y\|_\infty = 1$

# 39

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

$x_n \in M$  heißt **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $\forall m, n \geq n_0$  gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 41</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Cauchy-Folge vs. konvergente Folge</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 42</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Raum der Abbildungen zwischen metrischen und Banachraum</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 43</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Vollständigkeit vs. äquivalente Normen</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 44</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Abg. Teilmengen von BR vs metrische Räume</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 45</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Raum der beschränkten Operatoren vollständig</div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 46</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Neumann'sche Reihe</div> </div>
<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 47</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div> <div>J (surjektiver) Isomorphismus, A beschränkt mit <math>\ A\  &lt; \ J^{-1}\ ^{-1}</math>:</div> <div><math>J - A</math></div> </div> </div>	<div> <div> <div>Lin. Op. auf BR</div> <div># 48</div> <div>5 - Vollständigkeit</div> </div> <div>Fortsetzung von Operatoren</div> </div>

# 42

Antwort

Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $Y$  ein Banachraum.

$$C(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y : f \text{ stetig}\}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$$

Dann ist  $C(X, Y)$  ein (linearer) Banachraum.

# 44

Antwort

Abgeschlossene Teilmengen von Banachräumen sind vollständige metrische Räume bezüglich

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

# 46

Antwort

Sei  $A \in B(X)$ ,  $X$  ein Banachraum mit  $\|A\| < 1$ .  
Dann ist  $Id - A$  invertierbar und

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

# 48

Antwort

Sei  $X$  ein normierter Raum,  $Y$  ein Banachraum und  $D \subset X$  ein dichter Teilraum.

Jeder lineare Operator  $T: X \rightarrow Y$  mit

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \text{für alle } x \in D$$

lässt sich zu einem eindeutig bestimmten Operator  $\tilde{T} \in B(X, Y)$  mit  $\|\tilde{T}\| \leq M$  fortsetzen.

# 41

Antwort

Jede konvergente Folge in  $(M, d)$  ist eine Cauchy-Folge:

$$\text{Sei } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x : d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \rightarrow 0$$

Aber: nicht jede Cauchy-Folge eines normierten Raums  $X$  konvergiert in  $C[0, 2]$ :

$$\|f\|_1 = \int_0^2 |f(t)| dt, \quad f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$$

# 43

Antwort

Sind  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  äquivalente Normen auf  $X$ , ist dann  $X$  bezüglich  $\|\cdot\|_1$  vollständig, so auch bezüglich  $\|\cdot\|_2$ ; da äquivalente Normen haben gleiche Cauchy-Folgen.

Bsp.:  $C^1[0, 1]$ ,  $\|f\| = |f(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$ . Früher:  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty \Rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|)$  ist vollständig.

# 45

Antwort

Sei  $X$  ein normiert Raum,  $Y$  ein Banachraum. Dann ist  $B(X, Y)$  mit der Operatornorm vollständig.

Insbesondere:  $X' = B(X, \mathbb{K})$  ist immer vollständig.

# 47

Antwort

Sei  $X$  ein Banachraum und  $J: X \rightarrow X$  ein (surjektiver) Isomorphismus.

Für  $A \in B(X)$  und  $\|A\| < \|J^{-1}\|^{-1}$  ist auch  $J - A$  ein Isomorphismus

Insbesondere:  $G = \{T \in B(X) : T \text{ stetig und invertierbar}\}$  ist eine offene Menge in  $B(X)$ .

<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 49</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 50</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>
Operatorgrenzwert auf dichter Menge	Äquivalenz zur Vollständigkeit eines normierten Raums
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 51</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 52</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>
Vollständigkeit des Quotientenraums	Lipschitz
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 53</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 54</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>
Isometrische Einbettung in den Raum der Lipschitz-Funktionen	Vervollständigung
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 55</u> <u>5 - Vollständigkeit</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 56</u> <u>6 - Kompakte Mengen</u>
Existenz einer Vervollständigung	kompakt, folgenkompakt und relativ kompakt

# 50

Antwort

Für einen normierten Raum  $(X, \|\cdot\|)$  sind äquivalent:

- $X$  ist vollständig
- Jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{n \geq 1} x_n$  mit  $x_n \in X$  hat einen Limes in  $X$ .

# 52

Antwort

Sei  $X$  ein normierter Vektorraum,  $M \subset X$  beliebig,  $d(x, y) := \|x - y\|$ , wobei  $x, y \in M$  und damit  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

Eine Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Lipschitz**, falls

$$\sup_{x, y \in M, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} = \underbrace{\|f\|_L}_{\text{Lipschitz-Konstante}} < \infty$$

Dann ist  $X = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Lipschitz und } f(x_0) = 0\}$  bezüglich  $\|\cdot\|_L$  ein normierter Raum und  $X' = B(X, \mathbb{R})$  ist vollständig.

# 54

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Ein vollständiger metrischer Raum  $(\hat{M}, \hat{d})$  heißt **Vervollständigung** von  $(M, d)$ , falls es eine Einbettung  $J: M \rightarrow \hat{M}$  gibt mit:

- $\hat{d}(J(x), J(y)) = d(x, y)$  für alle  $x, y \in M$  (Isometrie)
- $J(M)$  ist dicht in  $\hat{M}$

# 56

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $K \subseteq M$  heißt (folgen-) **kompakt**, falls es in jeder Folge  $(x_n) \subset M$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  und ein  $x \in K$  gibt, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

$K \subseteq M$  heißt **relativ kompakt**, falls  $\overline{K}$  in  $M$  kompakt ist.

# 49

Antwort

Sei  $X$  ein normierter Banachraum,  $D \subset X$  dicht in  $X$  und sei eine Folge  $T_n \in B(X, Y)$ , wobei  $(T_n x)$  eine Cauchy-Folge für jedes  $x \in D$  sei.

Dann gibt es genau einen Operator  $T \in B(X, Y)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = T x$$

# 51

Antwort

Sei  $X$  ein Banachraum und  $M \subset X$  ein abgeschlossener, linearer Teilraum.

Dann  $\hat{X} = X/M$  ist vollständig.

# 53

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $x_0 \in M$  fest,  $X$  definiert wie in 5.15:

Zu  $x \in M$  definiere  $F_x \in X'$  durch  $F_x(f) = f(x)$  für  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  in  $X$ .

Dann ist  $x \in M \rightarrow F_x \in X'$  eine Abbildung, die eine isometrische Einbettung von  $M$  nach  $X'$  gibt, d.h.

$$d(x, y) = \|F_x - F_y\|_{X'}$$

# 55

Antwort

Zu jedem metrischen Raum  $(M, d)$  gibt es eine Vervollständigung, die bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist.

<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 57</u> <u>6 - Kompakte Mengen</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 58</u> <u>6 - Kompakte Mengen</u>
Kompaktheit der Einheitskugel	Satz von Riesz
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 59</u> <u>6 - Kompakte Mengen</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 60</u> <u>6 - Kompakte Mengen</u>
Äquivalenzen zur Kompaktheit	4x abgeschlossene bzw. kompakte Mengen
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 61</u> <u>6 - Kompakte Mengen</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 62</u> <u>6 - Kompakte Mengen</u>
Arzelà-Ascoli	Äquivalenzen zur relativen Kompaktheit
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 63</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 64</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>
kompakter Operator	$K(X, Y)$

# 58

Antwort

Sei  $Y$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X$  und  $X \neq Y$ . Zu  $\delta \in (0, 1)$  existiert ein  $x_\delta \in X \setminus Y$ , sodass

$$\|x\| = 1, \quad \|x_\delta - y\| \geq 1 - \delta \quad \text{für alle } y \in Y$$

# 60

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

- Eine kompakte Teilmenge  $K \subset M$  ist immer vollständig und abgeschlossen in  $M$ .
- Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums ist kompakt.
- Jede kompakte Menge in  $M$  ist separabel.
- Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raums ist beschränkt.

# 62

Antwort

Sei  $X$  ein Banachraum. Für  $K \subseteq X$  sind äquivalent

- $K$  relativ kompakt (d.h.  $\overline{K}$  ist kompakt)
- Jede Folge  $(x_k) \subseteq K$  hat eine Cauchy-Teilfolge
- $\forall \epsilon > 0 \exists y_1, \dots, y_m \in K$  mit  $K \subseteq K(y_1, \epsilon) \cup \dots \cup K(y_m, \epsilon)$

# 64

Antwort

$K(X, Y)$  = Raum der linearen, kompakten Operatoren von  $X$  nach  $Y$ .

Bemerkung:

- $T \in K(X, Y) \iff$  jede beschränkte Folge  $(x_n) \subset X$  besitzt eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $T(x_{n_k})$  ist Cauchy-Folge in  $Y$ .
- $K(X, Y) \subset B(X, Y)$ , da die kompakte Menge  $\overline{T(U_X)}$  beschränkt in  $Y$  ist.

# 57

Antwort

Sei  $X$  ein normierter Vektorraum. Dann ist

$$\overline{U_x} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

genau dann kompakt, wenn  $\dim X < \infty$ .

# 59

Antwort

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Für  $K \subset M$  sind folgende Aussagen äquivalent zu  $K$  ist (folgen-)kompakt:

- $K$  ist vollständig und total beschränkt, d.h. für alle  $\epsilon > 0$  gibt es endlich viele  $x_1, \dots, x_m \in M$  so dass  $K \subset \bigcup_{j=1}^m K(x_j, \epsilon)$
- Jede Überdeckung von  $K$  durch offene Mengen  $U_j, j \in J$  mit  $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d.h.  $j_1, \dots, j_m$  mit  $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{j_k}$

# 61

Antwort

Sei  $(S, d)$  ein kompakter, metrischer Raum. Definiere  $C(S) := \{d: S \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig}\}$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|$ . Eine Teilmenge  $M \subset C(S)$  ist kompakt, genau dann wenn gilt

- $M$  ist beschränkt in  $C(S)$ ,
- $M$  ist abgeschlossen in  $C(S)$  und
- $M$  ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : d(s, t) < \delta \Rightarrow |x(s) - x(t)| < \epsilon$$

# 63

Antwort

Sei  $X$  ein normierter Raum,  $Y$  ein Banachraum. Ein linearer Operator  $T: X \rightarrow Y$  heißt kompakt, falls  $T(U_X)$  relativ kompakt ist in  $Y$ .



<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 65</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 66</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>
Eigenschaften von $K(X, Y)$	Folge endlich dimensionaler beschränkter Operatoren
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 67</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 68</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>
Folge der Approximationseigenschaft	Approximative Eins
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 69</u> <u>7 - Kompakte Op.</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 70</u> <u>8 - Approx. von <math>L^p</math> Fkt</u>
Konvergenz der Approximativen Eins	Beschränkter Kern definiert beschränkten Operator
<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 71</u> <u>8 - Approx. von <math>L^p</math> Fkt</u>	<u>Lin. Op. auf BR</u> <u># 72</u> <u>8 - Approx. von <math>L^p</math> Fkt</u>
Bedingter Erwartungsoperator	Young

Seien  $X, Y$  Banachräume,  $T \in B(X, Y)$ .

Falls es endlich dimensionale Operatoren  $T_n \in B(X, Y)$  gibt, dann ist  $T \in K(X, Y)$ .

Beweis: Bemerkung nach 7.1, 7.5 a)

Sei  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$  mit  $\phi \geq 0$  und  $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(u) du = 1$ . Dann heißt  $\phi_\epsilon(u) = \epsilon^{-d} \phi(\epsilon^{-1}u)$ ,  $\epsilon > 0$ , **approximative Eins**.

Notation:  $\phi_\epsilon * f(u) = \int \phi_\epsilon(u - v) f(v) dv$ .

Sei  $k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  messbar und

$$\sup_{u \in \Omega} \int_{\Omega} |k(u, v)| dv \leq C_1 < \infty \text{ und}$$

$$\sup_{v \in \Omega} \int_{\Omega} |k(u, v)| du \leq C_2 < \infty$$

Dann wird durch (\*) ein beschränkter Operator  $T: L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$  mit

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C_1^{\frac{1}{p'}} C_2^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

und  $1 \leq p \leq \infty$ .

Für  $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$  setze für  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$(k * f)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} k(u - v) f(v) dv \quad (*)$$

$k * f$  heißt **Faltung** von  $k$  und  $f$ .

Dann definiert (\*) einen beschränkten Operator  $Tf = k * f$  von  $L^p(\mathbb{R}^d)$  nach  $L^p(\mathbb{R}^d)$  für  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq \|k\|_{L^1}$ .

Seien  $X, Y$  und  $Z$  Banachräume.

- $K(X, Y)$  ist ein linearer, abgeschlossener Teilraum von  $B(X, Y)$ .
- Seien  $T \in B(X, Y)$ ,  $S \in B(Y, Z)$  und entweder  $T$  oder  $S$  kompakt. Dann ist  $S \circ T \in K(X, Z)$ .  
Insbesondere:  $K(X) = K(X, X)$  ist ein Ideal in  $B(X)$ .

Seien  $X, Y$  Banachräume und  $X$  habe die **Approximationseigenschaft** (d.h. es existieren endlich dimensionale Operatoren  $S_n \in B(X) : S_n x \rightarrow x, \quad \forall x \in X$ ).

Dann gilt:  $K(X, Y) = \overline{F(X, Y)}$  in der Operatornorm, wobei  $F(X, Y) = \{T \in B(X, Y) : \dim T(X) < \infty\}$ .

Sei  $(\phi_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  eine approximative Eins. Dann gilt für alle  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$

$$\|f - \phi_\epsilon * f\|_{L^p} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

Sei  $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Partition von  $\Omega$  in paarweise disjunkte, messbare Mengen  $A_n$  mit  $0 < \mu(A_n) < \infty$ . Setze

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}}(f)(s) = \sum_n \left[ \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f(t) dt \right] \mathbb{1}_{A_n}(s)$$