

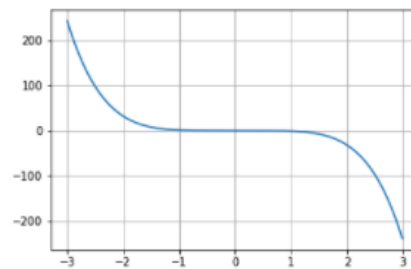
```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f_1(x):
    result = - x**5

    return result

d = 3.0 # radius within which the function will be plotted
x = np.arange(-d, d, 0.01)
y = f_1(x)

plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.grid()
plt.show()
```



```
In [2]: from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from matplotlib import cm
%matplotlib notebook

def f_2(x):
    result = 9 * x[0]**2 - 6 * x[0] * x[1]**2 + x[1]**4

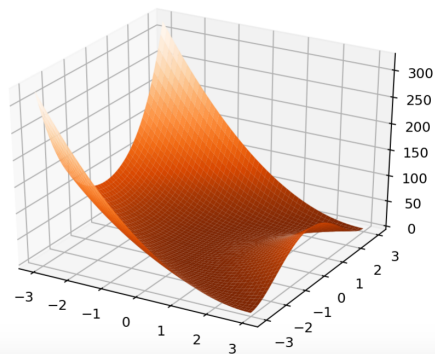
    return result

d = 3.0 # radius within which the function will be plotted
X = np.arange(-d, d, 0.01)
Y = np.arange(-d, d, 0.01)

X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = f_2(X,Y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.Oranges_r)
```

Figure 1



## Aufgabe S.2

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P : \quad \min f(x), \text{ s.t. } x \in M$$

mit

a)  $f(x) = -x^5$ ,  $M = (-\infty, 1)$ .

b)  $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$ ,  $M = \mathbb{R}^2$

c)  $f(x) = \frac{x^T A x}{\|x - b\|_2 + 1}$ , mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv definit,  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $M = \mathbb{R}^n$ .

Begründen Sie jeweils: ist  $f$  koerziv auf  $M$ ? Ist  $P$  lösbar?

**Hinweis:** Nutzen Sie für Aufgabenteil c) die Äquivalenz der Normen im  $\mathbb{R}^n$

*Nach Vorlesung (Definition 1.2.37) gilt:*

*Gegeben seien eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Falls für alle Folgen  $(x^\nu) \subseteq M$  mit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|x^\nu\| \rightarrow \infty$  und alle konvergenten Folgen  $(x^\nu) \subseteq M$  mit  $\lim_\nu x^\nu \notin M$  die Bedingung*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x^\nu) = +\infty$$

*gilt, dann heißt  $f$  koerziv auf  $M$ .*

a)  $f(x) = -x^5$ ,  $M = (-\infty, 1)$ :

*Proof:* Beachte  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Es gilt  $\overline{M} = (-\infty, 1]$ , d.h.  $\partial M = \{1\}$ . Für die Koerzivität sind demnach alle Folgen  $(x^\nu) \subseteq M$  zu betrachten für die entweder

$$x^\nu \longrightarrow \infty \quad \text{oder} \quad x^\nu \longrightarrow 1$$

gilt. Sei nun  $(x^\nu)$  eine Folge für die gilt  $x^\nu \rightarrow 1$ . Für alle  $\epsilon > 0$  existiert demnach ein  $m$ , sodass:

$$\|x^{\nu_m} - 1\| < \epsilon, \quad \forall \nu_m > m.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{\nu} f(x^{\nu}) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( -(x^{\nu})^5 \right) = -\lim_{\nu} \left( (x^{\nu} - 1 + 1)^5 \right) \\ &\leq \left| -\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left( (\|x^{\nu} - 1\| + 1)^5 \right) \right| \\ &< \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\epsilon + 1)^5.\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung im Grenzwert für alle  $\epsilon > 0$  gilt, ist  $f$  nicht koerziv.

Die Funktion  $f$  ist monoton fallend auf  $M$  und streng monoton fallend auf  $(0, 1)$ , da

$$f'(x) = -5x^4 \leq 0$$

mit strikter Ungleichung für  $x \neq 0$ . Damit ist

$$\inf_{x \in M} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1.$$

Da das Infimum aber nicht in der Menge angenommen wird ( $M$  offen, damit wg. strenger Monotonie ist  $f(x) > -1$  für alle  $x \in M$ ), ist das Problem nach Definition 1.2.3 nicht lösbar.  $\square$

b)  $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$ ,  $M = \mathbb{R}^2$ :

*Proof:* Es gilt

$$f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4 = (3x_1 - x_2^2)^2.$$

Für jede Folge für die für alle  $\nu \in \mathbb{N}$  gilt dass  $\sqrt{3x_1^{\nu}} = x_2^{\nu}$  folgt:

$$f(x^{\nu}) = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

z.B.  $x^{\nu} = (\nu, \sqrt{3\nu}) \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x^{\nu}) = 0$ . Da wir eine Folge gefunden haben für die  $\|x^{\nu}\| \rightarrow \infty$  aber  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x^{\nu}) = 0$  gilt, ist  $f$  nicht koerziv.

Es gilt  $f(x) = (3x_1 - x_2^2)^2 \geq 0 = \inf_{x \in M} f(x)$ , wobei

$$f(x) = 0 \iff (3x_1 - x_2^2)^2 = 0 \iff x_1 = \frac{x_2^2}{3}$$

Da es  $(x_1, x_2) \in M$  gibt, die die obige Bedingung erfüllen, z.B.  $x = (1/3, 1)$ , nimmt  $f$  auf  $M$  sein Infimum an, und das Problem ist nach Definition 1.2.3. lösbar.  $\square$

c)  $f(x) = \frac{x^T A x}{\|x-b\|_2+1}$ , mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv definit,  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $M = \mathbb{R}^n$ :

*Proof:* Da  $M = \mathbb{R}^{n \times n}$  sei  $(x^\nu)$  eine beliebige divergente Folge. Aufgrund der positiven Definitheit von  $A$  ist  $x^T A x > 0$  und damit ist

$$f(x) = \frac{x^T A x}{\|x-b\|_2+1} > 0. \quad (*)$$

In der Übung wurde die Norm

$$\|x\|_{\tilde{A}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\tilde{A}}} = \sqrt{x^T \tilde{A} x}$$

eingeführte, mit einer positiv definite, symmetrische Matrix  $\tilde{A}$ . Sei

$$B := \frac{A^T + A}{2},$$

dann ist  $B$  eine positiv definite, symmetrische Matrix und es gilt nach Übung

$$x^T A x = x^T B x.$$

Damit folgt:

$$|f(x^\nu)| = \left| \frac{(x^\nu)^T A x^\nu}{\|x^\nu - b\|_2 + 1} \right| = \frac{\|x^\nu\|_B^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1}.$$

Aufgrund der Divergenz der Folge  $(x^\nu)$  gilt für  $\nu$  groß genug unter Verwendung der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x^\nu)| &= \frac{\|x^\nu\|_B^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1} \geq \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2\|x^\nu - b\|_2} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2(\|x^\nu\|_2 + \|b\|_2)} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2(\|x^\nu\|_2 + \|x^\nu\|_2)} \end{aligned}$$

Durch die Äquivalenz der Normen im  $\mathbb{R}^n$  existiert nun eine Konstante  $c$  so, dass

$$|f(x^\nu)| \geq \frac{c}{2} \cdot \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2(\|x^\nu\|_B + \|x^\nu\|_B)} = \frac{c}{4} \cdot \frac{\|x^\nu\|_B^2}{\|x^\nu\|_B} = \frac{c}{4} \cdot \|x^\nu\|_B \longrightarrow \infty, \quad (**)$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Äquivalenz der Normen verwendet haben, da somit  $x^\nu$  in allen Normen divergiert. (\*) zusammen mit (\*\*) liefert für alle divergenten Folgen  $(x^\nu)$ , dass

$$f(x^\nu) \longrightarrow \infty,$$

d.h.  $f$  ist koerziv.

Da  $M$  nicht-leer und abgeschlossen, und  $f$  stetig und koerziv ist, ist das Problem nach Korollar 1.2.30 lösbar.  $\square$

### Aufgabe S.3

Gegeben sei das unrestringierte Optimierungsproblem

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^2} \exp \left( - \min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\} \right).$$

- a) Geben Sie die verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung  $P_{epi}$  von  $P$  an (siehe Übung 1.3.9. im Skript). Begründen Sie, welche Funktionen  $f$ ,  $g$ ,  $F$  und  $G$  Sie für die Umformulierung verwenden.

*Proof:* Da es sich um ein unrestringiertes Problem handelt, ist  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $G \equiv 0$ ,  $g \equiv 0$ . Definiere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x, \\ f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto - \min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\}. \end{aligned}$$

Damit ist das unrestringierte Optimierungsproblem äquivalent zu

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^2} F(f(x)) \text{ s.t. } G(g(x)) \leq 0, x \in X$$

Nach Übung 1.3.9 (Verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung) ist somit folgende Epigraph-Umformulierung äquivalent zu  $P$ :

$$\begin{aligned} P_{epi} : \min_{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} F(\alpha) \text{ s.t. } G(\beta) \leq 0, f(x) \leq \alpha, g(x) \leq \beta, x \in X \\ \iff \min_{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^\alpha \text{ s.t. } - \min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\} \leq \alpha, x \in X \end{aligned}$$

Wobei wir im letzten Schritt  $\beta$  aufgrund der trivialen Bedingung  $G(\beta) \equiv 0 \stackrel{!}{=} 0$  zur Vereinfachung fallen gelassen haben.  $\square$

- b) Formulieren Sie, aufbauend auf Aufgabenteil a), ein lineares Optimierungsproblem  $P_{lin}$ , welches die selben Optimalpunkte wie  $P_{epi}$  besitzt.

*Proof:* Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -\min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\} \\ &= \max \left\{ x_1 + 3, |x_2 - 4|, -(x_1 + x_2) + 20 \right\}. \end{aligned}$$

Die Bedingung  $f(x) \leq \alpha$  aus der Epigraph-Formulierung bedeutet, dass jede Komponente des Maximums kleiner gleich  $\alpha$  sein muss, d.h. das folgende Problem ist äquivalent zu  $P_{epi}$ :

$$\tilde{P}_{epi} : \min_{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^\alpha \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, \quad x_2 - 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton ist, ist jedes Minimum der Identität auf dieser Menge gleich dem Minimum der Exponentialfunktion. Ein lineares Optimierungsproblem  $P_{lin}$ , welches die selben Optimalpunkte wie  $P_{epi}$  besitzt, lautet somit

$$P_{lin} : \min_{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \alpha \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, \quad x_2 - 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

□

- c) Zeigen Sie, mit Hilfe des verschärften Satz von Weierstraß, dass das Problem  $P_{lin}$  lösbar ist.

*Proof:* Das Problem  $P_{lin}$  ist auf der Menge

$$M \subseteq \left\{ (\alpha, x) = (\alpha, (x_1, x_2)) : \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

definiert, die die folgenden Nebenbedingungen hält:

$$\begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, \quad x_2 - 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

Die Funktion  $f(\alpha) = \alpha$  ist als Identität stetig. Für den verschärften Satz von Weierstraß bleibt zu zeigen, dass für ein  $\beta \in \mathbb{R}$  die Menge

$$\text{lev}_{\leq}^{\beta}(f, M) = \{(\alpha, x) \in M \mid f(\alpha) = \alpha \leq \beta\}$$

nicht-leer und kompakt ist. Für  $\alpha < 0$  existiert kein  $x_2$ , sodass  $x_2 - 4 \leq \alpha$  und  $x_2 - 4 \geq -\alpha$ . Für  $\alpha = 0$ , ist  $x_2 = 4$  und damit  $\nexists x_1: x_1 + 3 \leq 0$  und  $-(x_1 + 4) + 20 \leq 0$ . Für  $\alpha > 0$  ist

$$x_2 \in [4 - \alpha, 4 + \alpha], \quad (*)$$

d.h.  $x_2$  liegt in einer nicht-leeren, abgeschlossenen Menge. Aus den Restriktionen erhalten wir außerdem

$$x_1 \in [20 - x_2 - \alpha, \alpha - 3], \quad (**)$$

Diese Menge ist für  $\alpha > \frac{19}{3}$  nicht leer und abgeschlossen, da für  $x_2 = 4 + \alpha$ :

$$20 - x_2 - \alpha < \alpha - 3 \iff 23 - (4 + \alpha) < 2\alpha \iff \alpha > \frac{19}{3}.$$

Somit liefert ein  $\beta > \frac{19}{3}$ , dass  $f(\alpha) = \alpha \in [\frac{19}{3}, \beta]$  beschränkt ist. Das in Kombination mit (\*) bzw. (\*\*) liefert die Beschränktheit von  $x_1, x_2$ . Zusammengefasst ist für ein  $\beta > \frac{19}{3}$  die Menge

$$\{(\alpha, x) \in M \mid f(\alpha) = \alpha \leq \beta\}$$

nicht-leer und kompakt und der verschärfte Satz von Weierstraß garantiert die Lösbarkeit des Problems.  $\square$



- d) Modellieren Sie das Problem in Matlab/ Jupyter Notebook und geben Sie den globalen Minimalpunkt von  $P_{lin}$  aus.

```
In [1]: from scipy.optimize import minimize
import numpy as np

In [2]: def f(x):
result = x[2]
return result
def g_1(x):
result= np.array(x[2]-x[0]-3)
return result
def g_2(x):
result = np.array(x[2]-x[1]+4)
return result
def g_3(x):
result = np.array(x[2]+x[1]-4)
return result
def g_4(x):
result = np.array(x[2]+(x[0]+x[1])-20)
return result

In [3]: cons = ({'type': 'ineq',
'fun': g_1
},
{'type': 'ineq',
'fun': g_2
},
{'type': 'ineq',
'fun': g_3
},
{'type': 'ineq',
'fun': g_4}
)

In [4]: x0=np.array([0,0,10])

res = minimize (f, x0, constraints=cons, options ={'disp': True})

Optimization terminated successfully. (Exit mode 0)
Current function value: 6.33333333333
Iterations: 7
Function evaluations: 35
Gradient evaluations: 7

In [5]: res.x
Out[5]: array([ 3.33333333, 10.33333333, 6.33333333])

In [ ]: res.x
```

- e) Bestimmen Sie einen globalen Optimalpunkt und den Optimalwert von P.

*Proof:* Die Minimalpunkte von  $P$  und  $P_{lin}$  stimmen nach Konstruktion überein (siehe 3b), also folgt aus d) für die Optimalpunkte  $x^* = (\frac{10}{3}, \frac{31}{3})$ .

Einsetzen in das Ursprungsproblem ergibt:

$$f(x^*) = \exp(-\min\{-x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20\})$$

$$\iff \exp\left(-\min\left\{\frac{1}{3}, -\frac{19}{3}, -\frac{19}{3}\right\}\right) = \exp\left(\frac{19}{3}\right) = 563.0302 \quad \square$$

## Aufgabe S.4

Gegeben seien eine  $(p, n)$ -Matrix  $A$ , sowie Vektoren  $b \in \mathbb{R}^p$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ . In dieser Aufgabe geht es um die Projektion von  $a$  auf die Menge

$$\hat{M} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Dieses Problem tritt in ähnlicher Form in der Gemischt-Ganzzahligen Optimierung im Rahmen eines Ansatzes zur heuristischen Bestimmung von Punkten in

$$M = \{x \in \mathbb{Z}^m : Ax \leq b\}$$

auf (Feasibility Pump, [1]). Wählt man für die Projektion die  $\ell_1$ -Norm, so lässt sich das Optimierungsproblem formulieren als

$$FP: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |x_j - a_j| \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b.$$

Bestimmen Sie ein äquivalentes lineares Optimierungsproblem  $FP_{lin}$ , indem Sie die verallgemeinerte Epigraph Umformulierung (vgl. Übung 1.3.9 im Skript) anwenden. Begründen Sie, welche Funktionen  $f$ ,  $g$ ,  $F$  und  $G$  Sie für die Umformulierung verwenden.

*Proof:* Wir definieren

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x - a$$

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_1$$

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, x \mapsto Ax - b$$

$$G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

Damit gilt für  $X = \mathbb{R}^n$ , dass das obiges Optimierungsproblem äquivalent dargestellt werden kann durch

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(f(x)) \quad \text{s.t.} \quad G(g(x)) \leq 0, x \in X$$

$$\iff \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x - a\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \max_i \{(Ax - b)_i\} \leq 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei wir ausnutzen, dass  $Ax \leq b \iff Ax - b \leq 0 \iff \max_i \{(Ax - b)_i\} \leq 0$ .  
Damit sind die Voraussetzungen der verallgemeinerten Epigraph-Formulierung gegeben und diese lautet:

$$P_{epi} : \min_{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l} F(\alpha) \quad \text{s.t.} \quad G(\beta) \leq 0, \quad f(x) \leq \alpha, \quad g(x) \leq \beta, \quad x \in X$$

$$\iff \min_{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \quad \text{s.t.} \quad x \in X, \quad \begin{cases} \beta_i \leq 0, \\ (x - a)_i \leq \alpha_i, \\ (Ax - b)_i \leq \beta_i, \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

was ein lineares Problem darstellt. □

## Aufgabe S.5

Skizzieren Sie folgende Mengen  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  und zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Konvexität von  $M$ .

*Definition 2.1.1.: Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt konvex, falls folgendes gilt*

$$\forall x, y \in M, \lambda \in (0, 1) : (1 - \lambda)x + \lambda y \in M$$

*(d.h. die Verbindungsstrecke von je zwei beliebigen Punkten in  $M$  gehört komplett zu  $M$ ).*

a)  $M: \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4\}$

*Proof:* Sei  $f(x) := (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4$ , dann ist

$$M = f_{\leq}^0.$$

Da  $f$  als Polynom zweimal stetig differenzierbar ist, ist die Hesse-Matrix wohldefiniert:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

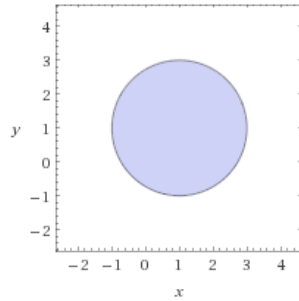
Die charakteristische Gleichung für  $D^2 f(x)$  lautet somit:

$$\det(D^2 f(x) - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit ist  $\lambda = 2$  zweifacher Eigenwert, womit  $f$  konvex ist. Nach Übung 4.4 ist damit  $M$  eine konvexe Menge.  $\square$

b)  $M: \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1\}$

*Proof:* Behauptung:  $M$  ist nicht konvex, da  $x, y \in M$  existieren, deren konvexe Verbindungsstrecke nicht komplett in der Menge liegt.



Sei hierfür  $x = (\frac{11}{4}, 1 - \frac{\sqrt{15}}{4})$  und  $y = (\frac{11}{4}, 1 + \frac{\sqrt{15}}{4})$ , dann gilt  $x, y \in M$ . Wähle konkret  $\lambda = 0,5$  und definiere  $z := (1 - \lambda)x + \lambda y$ . Wäre  $M$  konvex, so müsste folgen  $z \in M$ . Einsetzen der obigen Werte ergibt:

$$z_1 = 0,5 * \frac{11}{4} + (1 - 0,5) \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$$

$$z_2 = (0,5 * (1 - \frac{\sqrt{15}}{4}) + (1 - 0,5)(1 + \frac{\sqrt{15}}{4})) = 1$$

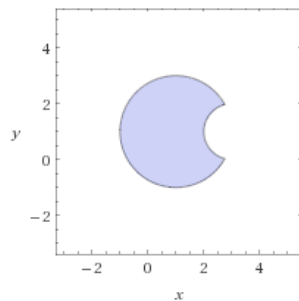
Einsetzen der Werte in die Ungleichungen ergibt:

$$(z_1 - 1)^2 + (z_2 - 1)^2 = \frac{49}{16} \leq 4$$

$$(z_1 - 3)^2 + (z_2 - 1)^2 = \frac{1}{16} \leq 1$$

Aufgrund der 2. Ungleichung gilt  $z \notin M$  und damit ist  $M$  nicht konvex.

□



c)  $M: \{x \in \mathbb{R}^2: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 16\}$

*Proof:* Behauptung: Die Menge  $M$  enthält nur den Punkt  $(-1, 1)$  und ist damit trivialerweise konvex. Betrachte hierfür die Randbedingungen

$$(x_2 - 1)^2 \leq 4 - (x_1 - 1)^2 \text{ und } (x_2 - 1)^2 \geq 16 - (x_1 - 3)^2. \quad (*)$$

Einsetzen ineinander liefert

$$4 - (x_1 - 1)^2 \geq 16 - (x_1 - 3)^2 \iff 8 - 4x_1 \geq 12 \iff x_1 \leq -1$$

Da allerdings

$$4 \geq (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq (x_1 - 1)^2,$$

die zwei Möglichkeiten  $x_1 \leq 3$  und  $-1 \geq x_1$  liefert, erfüllt nur  $x_1 = -1$  die Bedingung. Aus  $(*)$  folgt damit direkt

$$4 - (x_1 - 1)^2 = 0 \geq (x_2 - 1)^2 \geq 0 \iff x_2 = 1$$

und somit die Behauptung. □

