Globale Optimierung

Übung

Prof. Dr. Oliver Stein

Sommersemester 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe 1.1.

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| \cdot V \to [0, \infty)$ heißt Norm, wenn für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Definitheit: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) Absolute Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie dass für jede Norm in Bedingung 1) auch die Rückrichtung gilt

   Beweis: Zu zeigen: $\|0\| = 0$, wobei zu beachten ist, dass die erste 0 ein Element im Vektorraum V darstellt und die zweite einen Skalar im zugrunde liegendem Raum.

   Es gilt für alle $x \in V$:
$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0$$
□

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind:

   (i) $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$

   Beweis:

   - Nicht-Negativität: $\sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\geq 0} \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$
   - Definitheit: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \xRightarrow{|\cdot| \geq 0} |x_i| = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$
$$\xRightarrow{Definitheit} x_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$
   - Absolute Homogenität: $\|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^n |\alpha||x_i|$
$$= |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \|x\|_1$$

- Dreieckunsgleichung: $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i| + \leq \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$\square$

(ii) $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

Beweis:

- Nicht-Negativität: Wir definieren hierzu:

$$\begin{aligned} &f \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)^n,\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1^2,\dots,x_n^2) \\ &g \colon [0,\infty)^n \mapsto [0,\infty),\ y \mapsto \sum_{i=1}^n y_i \\ &h \colon [0,\infty) \mapsto [0,\infty),\ z \mapsto \sqrt{z} \end{aligned}$$

  Somit ist: $\|\cdot\|_2 = (h \circ g \circ f) : \mathbb{R}^n \to [0\infty)$

- Definitheit: $0 = \|x\|_2 \iff \|x\|_2^2 = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, wobei $x_i^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x_i = 0\ \forall i \in \{1,\dots,n\} \iff x = 0$$

- Absolute Homogenität: Analog zu $\|\cdot\|_1$.
- Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_2^2 = (x+y)^T\,(x+y) = x^T x x^T y + y^T x + y^T y$

$$\begin{aligned} &= \|x\|_2^2 + 2x^T y + \|y\|_2^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2|x^T y| + \|y\|_2^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 \\ &= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \end{aligned}$$

$\square$

(iii) $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max_{i=1}^n |x_i|$

Beweis:

- Nicht-Nevativität: Analog zu $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_2$

- Definitheit: $0 = \|x\|_\infty \iff \max_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff |x_i| = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

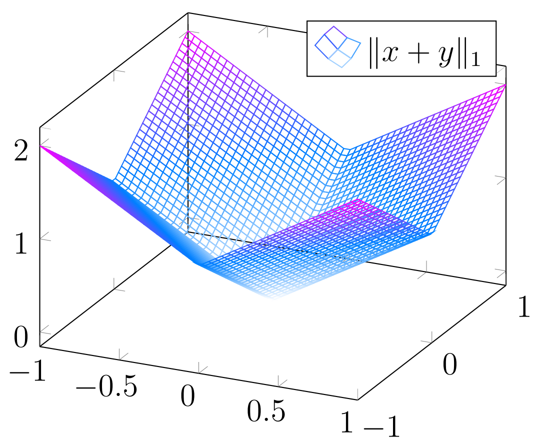
$$\iff x_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \iff x = 0.$$

- Absolute Homogenität: Analog zu $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_2$
- Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_\infty = \max_{i=1}^n (|x_i + y_i|) = \max_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)$

$$\leq \max_{i=1,\dots,n} \left(\max_{j=1}^n |x_j| + \max_{k=1}^n |y_k| \right) \leq \max_{j=1}^n |x_j| + \max_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\square$

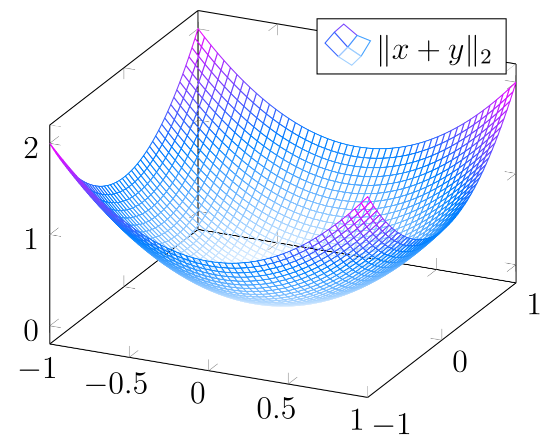
Aufgabe 1.2.

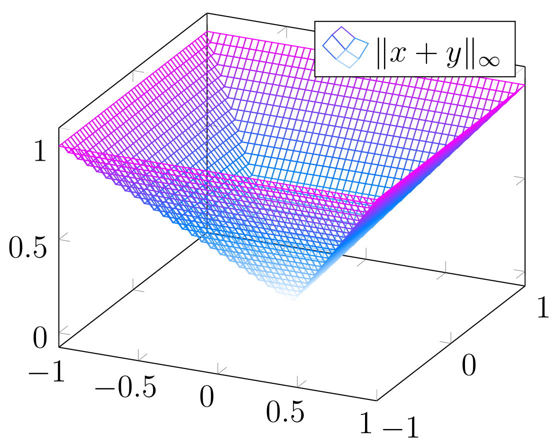


Aufgabe 1.3.

Gegeben seien eine Menge von zulässigen punkten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Zielfunktion $f\colon M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Die globalen Maximalpunkte von f auf M sind genau die globalen Minimalpunkte von $-f$ auf M.





Beweis: Es gilt: x^* ist globaler Maximalpunkt von f auf M:

$$\begin{aligned} &\iff f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in M \\ &\iff -f(x^*) \leq -f(x) \quad \forall x \in M \\ &\iff x^* \text{ ist globaler Minimalpunkt von } -f \text{ auf } M \end{aligned}$$

$\square$

b) Sofern f globale Maximalpunkte besitzt, gilt für den globalen Maximalwert

$$\max_{x \in M} f(x) = -\min_{x \in M} \left(-f(x)\right).$$

Beweis: todo $\square$

Aufgabe 2.1

a) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $M \coloneqq \{x \in R^n | (x) \leq 0\}$. Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist.

Beweis: $M = \{x \in R^n | g(x) \leq 0\}$, sei $(x_n)_n \subseteq M$, $\lim x_n = x^*$. Zu zeigen ist $x^* \in M$ bzw. $g(x^*) \leq 0$. Wir nutzen hierfür die Stetigkeit von g aus, denn damit ist:

$$g(x^*) = g(\lim x_n) = \lim \underbrace{g(x_n)}_{\leq 0} \leq 0$$

□

b) Zeigen Sie, dass die Menge M aus Aufgabenteil a) nicht beschränkt sein muss.

Beweis: Als Gegenbeispiel sei $g(x) = -x^2$. Damit ist $M = \mathbb{R}$, was nicht beschränkt ist. □

c) Es seien I eine beliebige Indexmenge, $n \in \mathbb{N}$, $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I$, stetige Abbildungen und $M_i \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq 0\}$. Zeigen Sie, dass

$$M \coloneqq \bigcap_{i \in I} M_i$$

abgeschlossen ist.

Beweis: Sei $(x_n)_n \subseteq M$ mit $\lim x_n = x{*}^*$. ZU zeigen ist $x^* \in M$. Da

$$(x_n)_n \subseteq M = \bigcap M_i$$

folgt $(x_n)_n \subseteq M_i$ für alle $i \in I$. Da M_i für alle $i \in I$ abgeschlossen ist, folgt somit:

$$x^* \in M_i \ \forall i \in I \iff x^* \in \bigcap_{i \in I} M_i \iff x^* \in M$$

□

Aufgabe 2.2

Zeigen oder widerlegen Sie die Koerzivität der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$

a) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2$,

Beweis: Sei $(x_n)_n = (0, \nu)$. Damit ist $\|x_\nu\| = \nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \infty$, allerdings

$$f(x_n) = -\nu \to -\infty$$

für $\nu \to \infty$. Ein anderes Beispiel wäre $(y_n)_n = (n, n^3)$, denn damit ist $\|y_n\| \to \infty$ und $f(y_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

b) $f(x_1, x_2) = (x_1^4 + x_2^4)\, e^{x_1^2 + x_2^2}$

Beweis: Wir können die Funktion nach unten hin abschätzen:

$$f(x) = \left(x_1^4 + x_2^4\right) \underbrace{e^{x_1^2+x_2^2}}_{\geq 1} \geq \left(x_1^4 + x_2^4\right) = \|x\|_4^4$$

Damit ist für $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_4 \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_4^4 \to \infty$$

$\square$

bzw. der folgenden Funktion auf $\mathbb{R}^n$

c) $f(x) = x^T A x$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit aber *nicht notwendigerweise symmetrisch.*

Beweis: Es ist $f(x) = \langle x, Ax \rangle$ und damit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle \\ &= \frac{1}{2}x^T A x + \frac{1}{2}x^T A^T x \\ &= x^T \underbrace{\left(\frac{A + A^T}{2}\right)}_{=:\tilde{A}} x \end{aligned}$$

Da aber $\tilde{A}$ symmetrisch ist per Konstruktion, so folgt mit dem Hinweis die Behauptung da:

$$f(x) = x^T \tilde{A} x = \|x\|_{\tilde{A}}^2$$

$\square$

Hinweis: Eine positiv definite *und symmetrische Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ induziert mit $\langle xy\rangle_A := x^T Ay$ ein Skalarprodukt, welches wiederum durch $\|x\|_A := \sqrt{\langle x, x\rangle_A}$ eine Norm induziert.

Aufgabe 2.3

Sei $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$p(x) = -\frac{1+4x_1^2}{1+2x_1^2} + 2x_2^2$$

Bestimmen Sie das Infimum von p auf der Menge $D = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 1, x_2 > 0\}$ und zeigen Sie, dass das Infimum nicht als Minimalwert angenommen wird.

Beweis: Zu zeigen: $\forall x \in D : p(x) \geq -2$, $\inf_{x\in D} f(x) = -2$, $\nexists x \in D : f(x) = -2$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1+4x_1^2}{1+2x_1^2} + 2x_2^2 \\ &= -\frac{2+4x_1^2-1}{1+2x_1^2} + 2x_2^2 \\ &= -\frac{2(1+2x_1^2)-1}{1+2x_1^2} + 2x_2^2 \\ &= -2 + \frac{1}{\underbrace{1+2x_1^2}_{\geq 0}} + \underbrace{2x_2^2}_{>0} \geq -2 \end{aligned}$$

Wählen wir nun $(x_n)_n \subseteq M$ mit $x_n = \left(n, \frac{1}{n}\right)$

$$f(x_n) = -2\frac{1}{1+2n^2} + 2\frac{1}{n^2} \to$$

$\square$