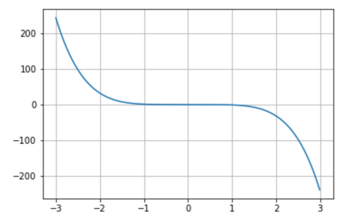
ToDo

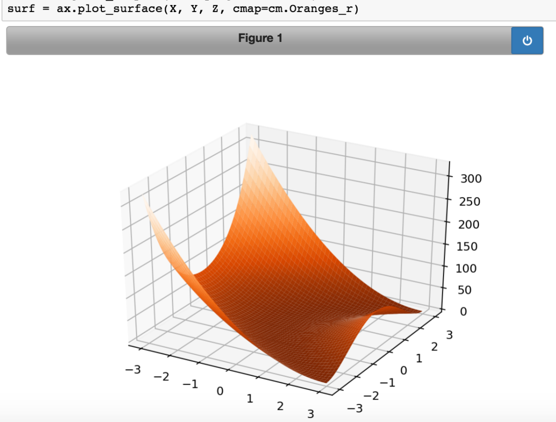
- Aufgabe 2: Lösbarkeit bei allen 3 (a), b), c))
- Aufgabe 3: c) d) e)
- Aufgabe 4: Scheint mir nicht genügend zu sein! Ist das echt ein lineares Problem?
- Aufgabe 5: Konvexität zeigen

Aufgabe S.1

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f_1(x):  # radius within which the function will be plotted
    result = - x**5

    return result

d = 3.0
x = np.arange(-d, d, 0.01)
y = f_1(x)

plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.grid()
plt.show()
```



In [2]:
```
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from matplotlib import cm
%matplotlib notebook

def f_2(x):
    result = 9* x[0]**2  - 6 * x[0] * x[1]**2 + x[1]**4

    return result

d = 3.0 # radius within which the function will be plotted
X = np.arange(-d, d, 0.01)
Y = np.arange(-d, d, 0.01)

X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z    = f_2((X,Y))

fig  = plt.figure()
ax   = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.Oranges_r)
```



Aufgabe S.2

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P: \quad \min f(x), \text{ s.t. } x \in M$$

mit

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$.

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$

c) $f(x) = \frac{x^TAx}{\|x-b\|_2+1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $M = \mathbb{R}^n$.

Begründen Sie jeweils: ist f koerziv auf M? Ist P lösbar?
Hinweis: Nutzen Sie für Aufgabenteil c) die Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^n$

Proof: Nach Vorlesung (Definition 1.2.37) gilt:
Gegeben seien eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$. Falls für alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_\nu \|x^\nu\| \to \infty$ und alle konvergenten Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_\nu x^\nu \notin M$ die Bedingung

$$\lim_\nu f(x^\nu) = +\infty$$

gilt, dann heißt f koerziv auf M.

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$:

Beachte $M \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt $\overline{M} = (-\infty, 1]$, d.h. $\partial M = \{1\}$. Für die Koerzivität sind demnach alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ zu betrachten für die entweder

$$x^\nu \longrightarrow \infty \quad \text{oder} \quad x^\nu \longrightarrow 1$$

gilt. Sei nun (x^ν) eine Folge für die gilt $x^\nu \to 1$. Für alle $\epsilon > 0$ existiert demnach ein m, sodass:

$$\|x^{\nu_m} - 1\| < \epsilon, \quad \forall \nu_m > m.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_\nu f(x^\nu) = \lim_\nu \left(-\left(x^\nu\right)^5\right) &= -\lim_\nu \left(\left(x^\nu - 1 + 1\right)^5\right) \\ &\leq -\lim_\nu \left(-\left(\|x^\nu - 1\| + 1\right)^5\right) \\ &< \lim_\nu \left(\epsilon + 1\right)^5 .\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung im Grenzwert für alle $\epsilon > 0$ gilt, ist f nicht koerziv.

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$:

Es gilt

$$f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4 = (3x_1 - x_2^2)^2.$$

Für jede Folge für die für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt dass $\sqrt{3x_1^\nu} = x_2^\nu$ folgt:

$$f(x^\nu) = 0.$$

Da wir eine Menge von Folgen gefunden haben für die $\|x^\nu\| \to \infty$ gilt, allerdings gleichzeitig $\lim_\nu f(x^\nu) = f(x^{\tilde{\nu}}) = 0$, ist die Funktion nicht koerziv.

c) $f(x) = \frac{x^T A x}{\|x-b\|_2 + 1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $M = \mathbb{R}^n$:

Da $\mathbb{R}^{n \times n}$ unbeschränkt ist, betrachten wir lediglich eine beliebige divergente Folge (x^ν). Aufgrund der positiven Definitheit von A ist $x^T A x > 0$ und damit ist

$$f(x) = \frac{x^T A x}{\|x - b\|_2 + 1} > 0.$$

In der Übung wurde die Norm

$$\|x\|_{\tilde{A}} = \sqrt{\langle x, x\rangle_{\tilde{A}}} = \sqrt{x^T \tilde{A} x}$$

eingeführte, mit einer positiv definite, symmetrische Matrix $\tilde{A}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die positiv definite Matrix A aus der Aufgabe auch symmetrisch ist, denn es gilt

$$x^T A x = x^T \left(\frac{A^T + A}{2}\right) x,$$

und $\frac{A^T+A}{2}$ ist symmetrisch (ansonsten ersetze A durch $\frac{A^T+A}{2}$). Damit folgt:

$$|f(x^\nu)| = \left|\frac{(x^\nu)^T Ax^\nu}{\|x^\nu - b\|_2 + 1}\right| = \frac{\|x^\nu\|_A^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1}.$$

Aufgrund der Divergenz der Folge (x^ν) gilt für ν groß genug unter Verwendung der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}|f(x^\nu)| = \frac{\|x^\nu\|_A^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1} &\geq \frac{\|x^\nu\|_A^2}{2\|x^\nu - b\|_2} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_A^2}{2\left(\|x^\nu\|_2 + \|b\|_2\right)} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_A^2}{2\left(\|x^\nu\|_2 + \|x^\nu\|_2\right)}\end{aligned}$$

Durch die Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^n$ existiert nun eine Konstante c so, dass

$$|f(x^\nu)| \geq \frac{c}{2} \cdot \frac{\|x^\nu\|_A^2}{2\left(\|x^\nu\|_A + \|x^\nu\|_A\right)} = \frac{c}{4} \cdot \frac{\|x^\nu\|_A^2}{\|x^\nu\|_A} = \frac{c}{4} \cdot \|x^\nu\|_A \to \infty,$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Äquivalenz der Normen verwendet haben, da somit x^ν in allen Normen divergiert. Das heißt, für alle divergenten Folgen (x^ν), ist $f(x^\nu) > 0$ und

$$|f(x^\nu)| \to \infty,$$

d.h. f ist koerziv.

$\square$

Aufgabe S.3

Gegeben sei das unrestringierte Optimierungsproblem

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} \exp\left(- \min -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20\right).$$

a) Geben Sie die verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung P_{epi} von P an (siehe Übung 1.3.9. im Skript). Begründen Sie, welche Funktionen f, g, F und G Sie für die Umformulierung verwenden.

Proof: Da es sich um ein unrestringiertes Problem handelt, ist $X = \mathbb{R}^2$, $G \equiv 0, g \equiv 0$. Definiere

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x},$$
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto \min\Big\{ - x_1 - 3, - |x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \Big\}.$$

Damit ist das unrestringierte Optimierungsproblem äquivalent zu

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} F(f(x)) \text{ s.t. } G(g(x)) \leq 0, x \in X$$

Nach Übung 1.3.9 (Verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung) ist somit folgende Epigraph-Umformulierung äquivalent zu P:

$$P_{epi}: \min_{(x,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \times R \times \mathbb{R}} F(\alpha) \text{ s.t. } G(\beta) \leq 0, f(x) \leq \alpha, g(x) \leq \beta, x \in X$$

$$\iff \min_{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times R} e^{-\alpha} \text{ s.t. } \min\Big\{ - x_1 - 3, - |x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \Big\} \leq \alpha, x \in X$$

□

b) Formulieren Sie, aufbauend auf Aufgabenteil a), ein lineares Optimierungsproblem P_{lin}, welches die selben Optimalpunkte wie P_{epi} besitzt.

Proof: Sei

$$\tilde{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{x},$$
$$\tilde{f} : R^2 \to R, x \mapsto - \min\Big\{ - x_1 - 3, - |x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \Big\}.$$

Dann ist $F(f(x)) = \tilde{F}(\tilde{f}(x))$ für alle $x \in X$. D.h. $\tilde{F}$, $\tilde{f}$ beschreiben das gleiche Optimierungsproblem und es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= -\min\Big\{-x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20\Big\} \\ &= \quad \max\Big\{x_1 + 3, |x_2 - 4|, -(x_1 + x_2) + 20\Big\}. \end{aligned}$$

Aus der Epigraph-Formulierung bedeutet die Bedingung $\tilde{f}(x) \leq \alpha$, dass jede Komponente des Maximums kleiner gleich α sein muss, d.h. das folgende Problem besitzt die selben Optimalpunkte wie P_{epi}:

$$\tilde{P}_{epi}: \min_{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2\times R} e^{\alpha} \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, \; -x_2 + 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton ist, ist jedes Minimum der Identität auf dieser Menge gleich dem Minimum der Exponentialfunktion. D.h. ein lineares Optimierungsproblem P_{lin}, welches die selben Optimalpunkte wie P_{epi} besitzt, lautet

$$\tilde{P}_{epi}: \min_{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2\times R} \alpha \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, \; -x_2 + 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

$\square$

c) Zeigen Sie, mit Hilfe des verschärften Satz von Weierstraß, dass das Problem P_lin lösbar ist.

d) Modellieren Sie das Problem in Matlab/ Jupyter Notebook und geben Sie den globalen Minimalpunkt von P_{lin} aus.

e) Bestimmen Sie einen globalen Optimalpunkt und den Optimalwert von P.

Aufgabe S.4

Gegeben seien eine (p, n)-Matrix A, sowie Vektoren $b \in \mathbb{R}^p$ und $a \in \mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe geht es um die Projektion von a auf die Menge

$$\hat{M} := \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\Big\}.$$

Dieses Problem tritt in ähnlicher Form in der Gemischt-Ganzzahligen Optimierung im Rahmen eines Ansatzes zur heuristischen Bestimmung von Punkten in

$$M = \Big\{x \in \mathbb{Z}^m \colon Ax \leq b\Big\}$$

auf (Feasibility Pump, [1]). Wählt man für die Projektion die ℓ_1-Norm, so lässt sich das Optimierungsproblem formulieren als

$$FP\colon \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| \text{ s.t. } Ax \leq b.$$

Bestimmen Sie ein äquivalentes lineares Optimierungsproblem FP_{lin}, indem Sie die verallgemeinerte Epigraph Umformulierung (vgl. Übung 1.3.9 im Skript) anwenden. Begründen Sie, welche Funktionen f, g, F und G Sie für die Umformulierung verwenden.

Proof: Wir definieren

$$\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x - a\\
&F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_1\\
&g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax - b\\
&G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \max\{x_1, \ldots, x_n\}
\end{aligned}$$

Damit gilt für $X = \mathbb{R}^n$, dass das obiges Optimierungsproblem äquivalent dargestellt werden kann durch

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(f(x)) \text{ s.t. } G(g(x)) \leq 0, x \in X$$

$$\iff \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x - a\|_1 \text{ s.t. } \max_i\{(Ax - b)_i\} \leq 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei wir ausnutzen, dass $Ax \leq b \iff Ax - b \leq 0 \iff \max_i\{(Ax-b)_i\} \leq 0$. Damit sind die Voraussetzungen der verallgemeinerten Epigraph-Formulierung gegeben und die äquivalente Epigraph-Formulierung lautet:

$$P_{epi} : \min_{(x,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l} F(\alpha) \;\text{ s.t. }\; G(\beta) \leq 0,\; f(x) \leq \alpha,\; g(x) \leq \beta,\; x \in X$$

$$\iff \min_{(x,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \;\text{ s.t. }\; x \in X, \begin{cases} \beta_i \leq 0, & \\ (x-a)_i \leq \alpha_i, & \forall i \in \{1,\dots,n\} \\ (Ax-b)_i \leq \beta_i, & \end{cases}$$

was ein lineares Problem darstellt. □

Aufgabe S.5

Skizzieren Sie folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$und zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Konvexität von M.

Definition 2.1.1.: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt konvex, falls folgendes gilt

$$\forall x, y \in M, \lambda \in (0,1) : (1-\lambda)x + \lambda y \in M$$

(d.h. die Verbindungsstrecke von je zwei beliebigen Punkten in M gehört komplett zu M).

a) $M\colon \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon\ (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 4\right\}$

Proof: Seien $x, y \in M$. Definiere für $\lambda \in (0,1)$:

$$z := \lambda x + (1-\lambda)y.$$

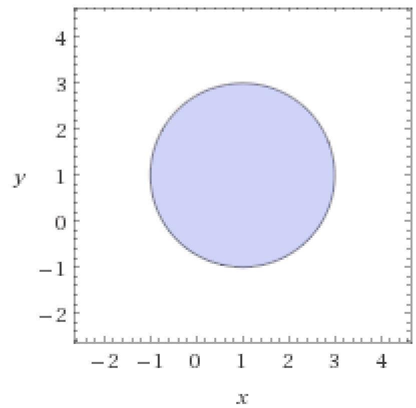
Somit gilt

$$\begin{aligned}(z_1-1)^2 &= (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 - 1)^2 = (\lambda(x_1-1) + (1-\lambda)(y_1-1))^2\\ (z_2-1)^2 &= (\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 - 1)^2 = (\lambda(x_2-1) + (1-\lambda)(y_2-1))^2\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}(z_1-1)^2 + (z_2-1)^2 &= (\lambda(x_1-1) + (1-\lambda)(y_1-1))^2 + (\lambda(x_2-1) + (1-\lambda)(y_2-1))^2\\ &= \lambda^2\left((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2\right) + (1-\lambda)^2\left((y_1-1)^2 + (y_2-1)^2\right)\\ &\quad\quad + 2\lambda(1-\lambda)(y_1-1)(x_1-1) + 2\lambda(x_2-1)(1-\lambda)(y_2-1)\\ &\leq \lambda^2 4 + (1-\lambda)^2 4 + 2\lambda(1-\lambda)\left((y_1-1)(x_1-1) + (x_2-1)(y_2-1)\right)\\ &\leq \lambda^2 4 + (1-\lambda)^2 4 + 2\lambda(1-\lambda)\left(x_1y_1 - y_1 - x_1 - x_2 - y_2 + x_2y_2 + 2\right)\\ &...Falscher Ansatz?\end{aligned}$$

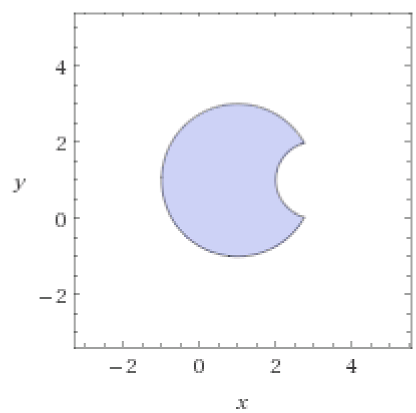
□



b) $M\colon \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon\ (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 4, (x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 \geq 1\right\}$

Proof: Seien $x, y \in M$, dann gilt

□



c) $M\colon \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon\ (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 4, (x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 \geq 16\right\}$

Proof: Behauptung: Die Menge M enthält nur den Punkt $(-1, 1)$ und ist damit trivialerweise konvex. Betrachte hierfür die Randbedingungen

$$(x_2-1)^2 \leq 4 - (x_1-1)^2 \text{ und } (x_2-1)^2 \geq 16 - (x_1-3)^2 .$$

Einsetzen ineinander liefert

$$4 - (x_1-1)^2 \geq 16 - (x_1-3)^2 \iff 8 - 4x_1 \geq 12 \iff x_1 \leq -1$$

Da allerdings

$$4 \geq (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq (x_1 - 1)^2 \iff 3 \geq x_1$$

und $-1 \geq x_1$, folgt $x_1 = -1$. Daraus folgt direkt

$$0 \geq +(x_2 - 1)^2 \geq 0 \iff x_2 = 1$$

und damit die Behauptung. $\square$