Aufgabe S. 2.1

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P: \quad \min_{w \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2}\|w\|_2^2 \text{ s.t. } Aw \geq e$$

mit einer (d, m)-Matrix A und

$$e := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.$$

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass ein $\tilde{w}$ existiert, für das gilt

$$A\tilde{w} \geq e.$$

a) Zeigen Sie, dass P lösbar ist.

Proof: Nach Korollar 1.2.40 gilt:

Es sei M nicht-leer, und $f\colon M \to R$ sei stetig und koerziv auf M.

Dann ist S nicht-leer und kompakt.

Nach Aufgabenstellung ist mit $f(w) = \frac{1}{2}\|w\|_2^2$ und $g(w) = e - Aw$, sodass $M = \{w \in \mathbb{R}^m \colon g(w) \leq 0\}$:

$$P: \quad \min_{w \in \mathbb{R}^m} f(w) \text{ s.t. } w \in M.$$

Nach Voraussetzung existiert ein $\tilde{w} \in M$, sodass M nicht-leer ist. Weiter ist die Funktion f stetig, da für $\|x - y\|_2 < \delta$ und $\epsilon := \frac{\delta^2}{2}$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt:

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}\left|\|x\|_2^2 - \|y\|_2^2\right| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2 \leq \epsilon.$$

Behauptung: die Menge M ist abgeschlossen bzw. das Komplement

$$\mathbb{R}^m \setminus M = \{w \in R^m \colon Aw < e\}.$$

ist offen. Betrachte hierfür $w \in \mathbb{R}^m \setminus M$, dann gilt mit dem Radius

$$\epsilon := \min_{i=1,\dots,d} \frac{1}{2} \left|(Aw - e)_i\right| > 0,$$

dass alle

$$x \in B_\epsilon(w) = \{x \in \mathbb{R}^m \colon \|w - x\| < \epsilon\}$$

in M liegen, da für alle $i = 1, \dots, d$

$$|(e - Ax)_i| \geq \Big| |(e - Aw)_i| - |(Aw - Ax)_i| \Big| > \frac{2\epsilon - \epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2},$$

womit $Ax < e$ bzw. $x \in \mathbb{R}^m \setminus M$. Somit ist M abgeschlossen, woraus folgt, dass die Funktion f koerziv ist, denn nach Definition 1.2.37 müssen nur alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\|x^\nu\| \to \infty$ betrachtet werden und für die gilt mit der Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^m$:

$$f(x^\nu) = \frac{1}{2}\|x^\nu\|_2^2 \longrightarrow +\infty.$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Korollar 1.2.40 erfüllt, S ist somit nicht-leer und kompakt und somit P lösbar. □

b) Zeigen Sie, dass P ein konvexes Optimierungsproblem ist.

Proof: Nach Beispiel 2.1.9 gilt:
Falls f, g_i für $i \in I$ auf R^m konvexe Funktionen sind, dann ist

$$P: \quad \min f(x) \text{ s.t. } g_i(x) \leq 0,\ i \in I$$

ein konvexes Optimierungsproblem.

Beim gegebenen Problem ist $g_i(w) = -(Aw)_i + 1$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ eine lineare und somit konvexe Funktion. Da $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$ und

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \succ 0,$$

ist f insbesondere konvex und damit P ein konvexes Optimierungsproblem. □

c) Stellen Sei das Wolfe-Dual D zu P auf.

Proof: Die Lagrange Funktion zu P lautet:

$$L(w, \lambda, \mu) = f(w) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(w) = \frac{1}{2}\|w\|_2^2 + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(w)$$

mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)^T$ heißt. □

d) Formulieren Sie, ausgehend von Aufgabenteil b), ein duales Optimierungsproblem, das nur von der Dualvariabel λ abhängt.