

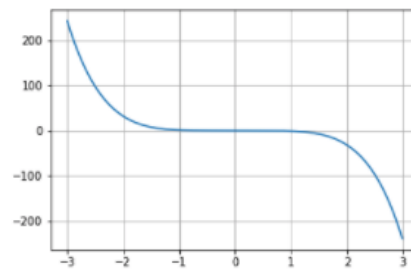
```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f_1(x):
    result = - x**5

    return result

d = 3.0 # radius within which the function will be plotted
x = np.arange(-d, d, 0.01)
y = f_1(x)

plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.grid()
plt.show()
```



```
In [2]: from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from matplotlib import cm
%matplotlib notebook

def f_2(x):
    result = 9 * x[0]**2 - 6 * x[0] * x[1]**2 + x[1]**4

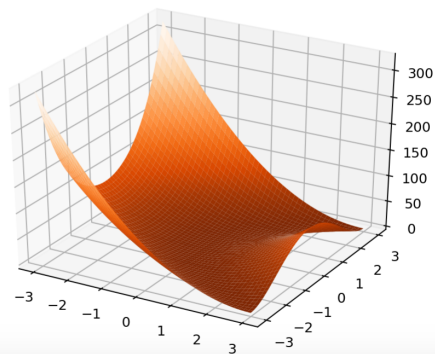
    return result

d = 3.0 # radius within which the function will be plotted
X = np.arange(-d, d, 0.01)
Y = np.arange(-d, d, 0.01)

X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = f_2(X,Y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.Oranges_r)
```

Figure 1



Aufgabe S.2

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P : \quad \min f(x), \text{ s.t. } x \in M$$

mit

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$.

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$

c) $f(x) = \frac{x^T A x}{\|x - b\|_2 + 1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $M = \mathbb{R}^n$.

Begründen Sie jeweils: ist f koerziv auf M ? Ist P lösbar?

Hinweis: Nutzen Sie für Aufgabenteil c) die Äquivalenz der Normen im \mathbb{R}^n

Nach Vorlesung (Definition 1.2.37) gilt:

Gegeben seien eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Falls für alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_\nu \|x^\nu\| \rightarrow \infty$ und alle konvergenten Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_\nu x^\nu \notin M$ die Bedingung

$$\lim_\nu f(x^\nu) = +\infty$$

gilt, dann heißt f koerziv auf M .

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$:

Proof: Beachte $M \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt $\overline{M} = (-\infty, 1]$, d.h. $\partial M = \{1\}$. Für die Koerzitivität sind demnach alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ zu betrachten für die entweder

$$x^\nu \longrightarrow \infty \quad \text{oder} \quad x^\nu \longrightarrow 1$$

gilt. Sei nun (x^ν) eine Folge für die gilt $x^\nu \rightarrow 1$. Für alle $\epsilon > 0$ existiert demnach ein m , sodass:

$$\|x^{\nu_m} - 1\| < \epsilon, \quad \forall \nu_m > m.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{\nu} f(x^{\nu}) &= \lim_{\nu} \left(- \left(x^{\nu} \hat{A} \right)^5 \right) = - \lim_{\nu} \left(\left(x^{\nu} \hat{A} - 1 + 1 \right)^5 \right) \\ &\leq - \lim_{\nu} \left(- \left(\|x^{\nu} - 1\| + 1 \right)^5 \right) \\ &< \lim_{\nu} (\epsilon + 1)^5.\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung im Grenzwert für alle $\epsilon > 0$ gilt, ist f nicht koerziv.

Die Funktion f ist monoton fallend auf M und streng monoton fallend auf $(0, 1)$, da

$$f'(x) = -5x^4 \leq 0$$

mit strikter Ungleichung für $x \neq 0$. Damit ist

$$\inf_{x \in M} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1.$$

Da das Infimum aber nicht in der Menge angenommen wird (M offen, damit wg. strenger Monotonie ist $f(x) > -1$ für alle $x \in M$), ist das Problem nach Definition 1.2.3 nicht lösbar. \square

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$:

Proof: Es gilt

$$f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4 = (3x_1 - x_2^2)^2.$$

Für jede Folge für die für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt dass $\sqrt{3x_1^{\nu}} = x_2^{\nu}$ folgt:

$$f(x^{\nu}) = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

z.B. $x^{\nu} = (\nu, \sqrt{3\nu}) \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{\nu} f(x^{\nu}) = 0$. Da wir eine Folgen gefunden haben für die $\|x^{\nu}\| \rightarrow \infty$ und $\lim_{\nu} f(x^{\nu}) = 0$ gilt, ist die Funktion nicht koerziv.

Es gilt $f(x) = (3x_1 - x_2^2)^2 \geq 0 = \inf_{x \in M} f(x)$, wobei

$$f(x) = 0 \iff (3x_1 - x_2^2)^2 = 0 \iff x_1 = \frac{x_2^2}{3}$$

Da es $(x_1, x_2) \in M$ gibt, die die obige Bedingung erfüllen, z.B. $x = (1/3, 1)$, nimmt f auf M sein Infimum an, und das Problem ist nach Definition 1.2.3. lösbar. \square

c) $f(x) = \frac{x^T A x}{\|x-b\|_2+1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $M = \mathbb{R}^n$:

Proof: Da $M = \mathbb{R}^{n \times n}$ sei (x^ν) eine beliebige divergente Folge. Aufgrund der positiven Definitheit von A ist $x^T A x > 0$ und damit ist

$$f(x) = \frac{x^T A x}{\|x-b\|_2+1} > 0. \quad (*)$$

In der Übung wurde die Norm

$$\|x\|_{\tilde{A}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\tilde{A}}} = \sqrt{x^T \tilde{A} x}$$

eingeführte, mit einer positiv definite, symmetrische Matrix \tilde{A} . Sei

$$B := \frac{A^T + A}{2},$$

dann ist B eine positiv definite, symmetrische Matrix und es gilt nach Übung

$$x^T A x = x^T B x.$$

Damit folgt:

$$|f(x^\nu)| = \left| \frac{(x^\nu)^T A x^\nu}{\|x^\nu - b\|_2 + 1} \right| = \frac{\|x^\nu\|_B^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1}.$$

Aufgrund der Divergenz der Folge (x^ν) gilt für ν groß genug unter Verwendung der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x^\nu)| &= \frac{\|x^\nu\|_B^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1} \geq \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2\|x^\nu - b\|_2} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2(\|x^\nu\|_2 + \|b\|_2)} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_{BB}^2}{2(\|x^\nu\|_2 + \|x^\nu\|_2)} \end{aligned}$$

Durch die Äquivalenz der Normen im \mathbb{R}^n existiert nun eine Konstante c so, dass

$$|f(x^\nu)| \geq \frac{c}{2} \cdot \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2(\|x^\nu\|_B + \|x^\nu\|_B)} = \frac{c}{4} \cdot \frac{\|x^\nu\|_B^2}{\|x^\nu\|_B} = \frac{c}{4} \cdot \|x^\nu\|_B \longrightarrow \infty, \quad (**)$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Äquivalenz der Normen verwendet haben, da somit x^ν in allen Normen divergiert. (*) zusammen mit (**) liefert für alle divergenten Folgen (x^ν) , dass

$$f(x^\nu) \longrightarrow \infty,$$

d.h. f ist koerziv.

Da M nicht-leer und abgeschlossen, und f stetig und koerziv ist, ist das Problem nach Korollar 1.2.30 lösbar. \square

Aufgabe S.3

Gegeben sei das unrestringierte Optimierungsproblem

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^2} \exp(-\min -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20).$$

- a) Geben Sie die verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung P_{epi} von P an (siehe Übung 1.3.9. im Skript). Begründen Sie, welche Funktionen f , g , F und G Sie für die Umformulierung verwenden.

Proof: Da es sich um ein unrestringiertes Problem handelt, ist $X = \mathbb{R}^2$, $G \equiv 0$, $g \equiv 0$. Definiere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x, \\ f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\}. \end{aligned}$$

Damit ist das unrestringierte Optimierungsproblem äquivalent zu

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^2} F(f(x)) \text{ s.t. } G(g(x)) \leq 0, x \in X$$

Nach Übung 1.3.9 (Verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung) ist somit folgende Epigraph-Umformulierung äquivalent zu P :

$$\begin{aligned} P_{epi} : \min_{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} F(\alpha) \text{ s.t. } G(\beta) \leq 0, f(x) \leq \alpha, g(x) \leq \beta, x \in X \\ \iff \min_{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^\alpha \text{ s.t. } -\min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\} \leq \alpha, x \in X \end{aligned}$$

Wobei wir im letzten Schritt β aufgrund der trivialen Bedingung $G(\beta) \equiv 0 \stackrel{!}{=} 0$ zur Vereinfachung fallen gelassen haben. \square

- b) Formulieren Sie, aufbauend auf Aufgabenteil a), ein lineares Optimierungsproblem P_{lin} , welches die selben Optimalpunkte wie P_{epi} besitzt.

Proof: Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -\min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\} \\ &= \max \left\{ x_1 + 3, |x_2 - 4|, -(x_1 + x_2) + 20 \right\}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $f(x) \leq \alpha$ aus der Epigraph-Formulierung bedeutet, dass jede Komponente des Maximums kleiner gleich α sein muss, d.h. das folgende Problem ist äquivalent zu P_{epi} :

$$\tilde{P}_{epi} : \min_{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^\alpha \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, \quad x_2 - 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton ist, ist jedes Minimum der Identität auf dieser Menge gleich dem Minimum der Exponentialfunktion. Ein lineares Optimierungsproblem P_{lin} , welches die selben Optimalpunkte wie P_{epi} besitzt, lautet somit

$$P_{lin} : \min_{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \alpha \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, \quad x_2 - 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

□

- c) Zeigen Sie, mit Hilfe des verschärften Satz von Weierstraß, dass das Problem P_{lin} lösbar ist.

Proof: Das Problem P_{lin} ist auf der Menge

$$M \subseteq \left\{ (\alpha, x) = (\alpha, (x_1, x_2)) : \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

definiert, die die folgenden Nebenbedingungen hält:

$$\begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, \quad x_2 - 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

Die Funktion $f(\alpha) = \alpha$ ist als Identität stetig. Für den verschärften Satz von Weierstraß bleibt zu zeigen, dass für ein $\beta \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\text{lev}_{\leq}^{\beta}(f, M) = \{(\alpha, x) \in M \mid f(\alpha) = \alpha \leq \beta\}$$

nicht-leer und kompakt ist. Für $\alpha < 0$ existiert kein x_2 , sodass $x_2 - 4 \leq \alpha$ und $x_2 - 4 \geq -\alpha$. Für $\alpha = 0$, ist $x_2 = 4$ und damit $\nexists x_1: x_1 + 3 \leq 0$ und $-(x_1 + 4) + 20 \leq 0$. Für $\alpha > 0$ ist

$$x_2 \in [4 - \alpha, 4 + \alpha], \quad (*)$$

d.h. x_2 liegt in einer nicht-leeren, abgeschlossenen Menge. Aus den Restriktionen erhalten wir außerdem

$$x_1 \in [20 - x_2 - \alpha, \alpha - 3], \quad (**)$$

Diese Menge ist für $\alpha > \frac{19}{3}$ nicht leer und abgeschlossen, da für $x_2 = 4 + \alpha$:

$$20 - x_2 - \alpha < \alpha - 3 \iff 23 - (4 + \alpha) < 2\alpha \iff \alpha > \frac{19}{3}.$$

Somit liefert ein $\beta > \frac{19}{3}$, dass $f(\alpha) = \alpha \in [\frac{19}{3}, \beta]$ beschränkt ist. Das in Kombination mit (*) bzw. (**) liefert die Beschränktheit von x_1, x_2 . Zusammengefasst ist für ein $\beta > \frac{19}{3}$ die Menge

$$\{(\alpha, x) \in M \mid f(\alpha) = \alpha \leq \beta\}$$

nicht-leer und kompakt und der verschärfte Satz von Weierstraß garantiert die Lösbarkeit des Problems. \square

- d) Modellieren Sie das Problem in Matlab/ Jupyter Notebook und geben Sie den globalen Minimalpunkt von P_{lin} aus.

```
In [1]: from scipy.optimize import minimize
import numpy as np

In [2]: def f(x):
result = x[2]
return result
def g_1(x):
result= np.array(x[2]-x[0]-3)
return result
def g_2(x):
result = np.array(x[2]-x[1]+4)
return result
def g_3(x):
result = np.array(x[2]+x[1]-4)
return result
def g_4(x):
result = np.array(x[2]+(x[0]+x[1])-20)
return result

In [3]: cons = ({'type': 'ineq',
'fun': g_1
},
{'type': 'ineq',
'fun': g_2
},
{'type': 'ineq',
'fun': g_3
},
{'type': 'ineq',
'fun': g_4}
)

In [4]: x0=np.array([0,0,10])

res = minimize (f, x0, constraints=cons, options ={'disp': True})

Optimization terminated successfully. (Exit mode 0)
Current function value: 6.33333333333
Iterations: 7
Function evaluations: 35
Gradient evaluations: 7

In [5]: res.x
Out[5]: array([ 3.33333333, 10.33333333,  6.33333333])

In [ ]: res.x
```

- e) Bestimmen Sie einen globalen Optimalpunkt und den Optimalwert von P.

Proof: Die Minimalpunkte von P und P_{lin} stimmen nach Konstruktion überein (siehe 3b), also folgt aus d) für die Optimalpunkte $x^* = (\frac{10}{3}, \frac{31}{3})$.

Einsetzen in das Ursprungsproblem ergibt:

$$f(x^*) = \exp(-\min\{-x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20\})$$

$$\iff \exp(-\min\{\frac{1}{3}, -\frac{19}{3}, -\frac{19}{3}\}) = \exp(\frac{19}{3}) = 563.0302 \quad \square$$

Aufgabe S.4

Gegeben seien eine (p, n) -Matrix A , sowie Vektoren $b \in \mathbb{R}^p$ und $a \in \mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe geht es um die Projektion von a auf die Menge

$$\hat{M} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Dieses Problem tritt in ähnlicher Form in der Gemischt-Ganzzahligen Optimierung im Rahmen eines Ansatzes zur heuristischen Bestimmung von Punkten in

$$M = \{x \in \mathbb{Z}^m : Ax \leq b\}$$

auf (Feasibility Pump, [1]). Wählt man für die Projektion die ℓ_1 -Norm, so lässt sich das Optimierungsproblem formulieren als

$$FP: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |x_j - a_j| \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b.$$

Bestimmen Sie ein äquivalentes lineares Optimierungsproblem FP_{lin} , indem Sie die verallgemeinerte Epigraph Umformulierung (vgl. Übung 1.3.9 im Skript) anwenden. Begründen Sie, welche Funktionen f , g , F und G Sie für die Umformulierung verwenden.

Proof: Wir definieren

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x - a$$

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_1$$

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, x \mapsto Ax - b$$

$$G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

Damit gilt für $X = \mathbb{R}^n$, dass das obiges Optimierungsproblem äquivalent dargestellt werden kann durch

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(f(x)) \quad \text{s.t.} \quad G(g(x)) \leq 0, x \in X$$

$$\iff \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x - a\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \max_i \{(Ax - b)_i\} \leq 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei wir ausnutzen, dass $Ax \leq b \iff Ax - b \leq 0 \iff \max_i \{(Ax - b)_i\} \leq 0$.
Damit sind die Voraussetzungen der verallgemeinerten Epigraph-Formulierung gegeben und diese lautet:

$$P_{epi} : \min_{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l} F(\alpha) \quad \text{s.t.} \quad G(\beta) \leq 0, \quad f(x) \leq \alpha, \quad g(x) \leq \beta, \quad x \in X$$

$$\iff \min_{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \quad \text{s.t.} \quad x \in X, \quad \begin{cases} \beta_i \leq 0, \\ (x - a)_i \leq \alpha_i, \\ (Ax - b)_i \leq \beta_i, \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

was ein lineares Problem darstellt. □

Aufgabe S.5

Skizzieren Sie folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$ und zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Konvexität von M .

Definition 2.1.1.: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt konvex, falls folgendes gilt

$$\forall x, y \in M, \lambda \in (0, 1) : (1 - \lambda)x + \lambda y \in M$$

(d.h. die Verbindungsstrecke von je zwei beliebigen Punkten in M gehört komplett zu M).

a) $M: \{x \in \mathbb{R}^2: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4\}$

Proof: Sei $f(x) := (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4$, dann ist

$$M = f_{\leq}^0.$$

Da f als Polynom zweimal stetig differenzierbar ist, können wir die Hesse-Matrix aufstellen:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

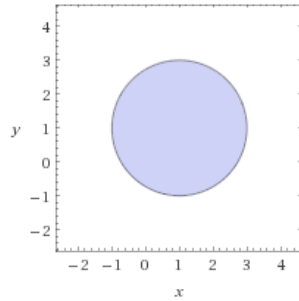
Die Eigenwerte erhalten wir durch die charakteristische Gleichung

$$\det(D^2 f(x) - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Das heißt $\lambda = 2$ ist zweifacher Eigenwert und f ist somit konvex. Nach Übung 4.4 ist M damit eine konvexe Menge. \square

b) $M: \{x \in \mathbb{R}^2: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1\}$

Proof: Behauptung: M ist nicht konvex, da $x, y \in M$ existieren, deren konvexe Verbindungsstrecke nicht komplett in der Menge liegt.



Sei hierfür $x = (\frac{11}{4}, 1 - \frac{\sqrt{15}}{4})$ und $y = (\frac{11}{4}, 1 + \frac{\sqrt{15}}{4})$, dann gilt $x, y \in M$. Wähle konkret $\lambda = 0,5$ und definiere $z := (1 - \lambda)x + \lambda y$. Wäre M konvex, so müsste folgen $z \in M$. Einsetzen der obigen Werte ergibt:

$$z_1 = 0,5 * \frac{11}{4} + (1 - 0,5) \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$$

$$z_2 = (0,5 * (1 - \frac{\sqrt{15}}{4}) + (1 - 0,5)(1 + \frac{\sqrt{15}}{4})) = 1$$

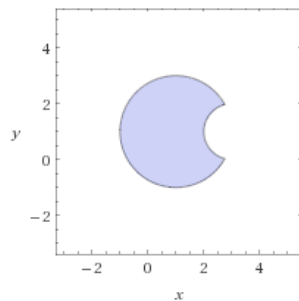
Einsetzen der Werte in die Ungleichungen ergibt:

$$(z_1 - 1)^2 + (z_2 - 1)^2 = \frac{49}{16} \leq 4$$

$$(z_1 - 3)^2 + (z_2 - 1)^2 = \frac{1}{16} \leq 1$$

Aufgrund der 2. Ungleichung gilt $z \notin M$ und damit ist M nicht konvex.

□



c) $M: \{x \in \mathbb{R}^2: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 16\}$

Proof: Behauptung: Die Menge M enthält nur den Punkt $(-1, 1)$ und ist damit trivialerweise konvex. Betrachte hierfür die Randbedingungen

$$(x_2 - 1)^2 \leq 4 - (x_1 - 1)^2 \text{ und } (x_2 - 1)^2 \geq 16 - (x_1 - 3)^2. \quad (*)$$

Einsetzen ineinander liefert

$$4 - (x_1 - 1)^2 \geq 16 - (x_1 - 3)^2 \iff 8 - 4x_1 \geq 12 \iff x_1 \leq -1$$

Da allerdings

$$4 \geq (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq (x_1 - 1)^2,$$

die zwei Möglichkeiten $x_1 \leq 3$ und $-1 \geq x_1$ liefert, erfüllt nur $x_1 = -1$ die Bedingung. Aus $(*)$ folgt damit direkt

$$4 - (x_1 - 1)^2 = 0 \geq (x_2 - 1)^2 \geq 0 \iff x_2 = 1$$

und somit die Behauptung. □

