

## Aufgabe 1

Für eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  bezeichnet

$$d(X) := \sup_{x,y \in M} \|x - y\|_2$$

den Durchmesser von  $M$ . Zeigen Sie, dass der Durchmesser einer Box  $X$  mit ihrer Boxweite übereinstimmt.

*Beweis:* Sei  $N := \{1, \dots, n\}$ . Es gilt für die Boxweite  $w$ :

$$w(X) = \|\bar{x} - \underline{x}\|_2.$$

Da  $Z := \{\bar{x}, \underline{x}\} \subseteq X$ , gilt damit

$$d(X) = \sup_{x,y \in X} \|x - y\|_2 \geq \sup_{x,y \in Z} \|x - y\|_2 = \|\bar{x} - \underline{x}\|_2 = w(X),$$

d.h. um die Behauptung zu zeigen bleibt  $w(X) \geq d(X)$  offen. Angenommen dies gilt nicht, d.h.

$$w(X) < d(X). \tag{*}$$

Da die Box  $X$  aufgrund der Definition abgeschlossen ist, existieren  $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ , sodass

$$d(X) = \sup_{x,y \in M} \|x - y\|_2 = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2$$

Damit folgt aus (\*):

$$\|\bar{x} - \underline{x}\|_2 < \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2,$$

was äquivalent ist zu

$$\sum_{i \in N} |\bar{x}_i - \underline{x}_i|^2 < \sum_{i \in N} |\tilde{x}_i - \tilde{y}_i|^2.$$

Damit diese Ungleichung erfüllt ist, muss mindestens für einen Summanden  $j$

$$|\bar{x}_j - \underline{x}_j| < |\tilde{x}_j - \tilde{y}_j| \tag{**}$$

gelten. Sei nun  $d_j := |\bar{x}_j - \underline{x}_j|$  die Breite und  $m_j := \frac{1}{2}(\bar{x}_j + \underline{x}_j)$  die Mitte dieses eindimensionalen Intervalls  $I_j = [\underline{x}_j, \bar{x}_j]$ . Nach Konstruktion gilt  $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ , was insbesondere

$\tilde{x}_j, \tilde{y}_j \in I_j$  impliziert. Nach (\*\*) folgt mit der Abgeschlossenheit von  $I_j$  damit

$$\begin{aligned}
 d_j &= |\bar{x}_j - \underline{x}_j| \\
 &< |\tilde{x}_j - \tilde{y}_j| \\
 &\leq |\tilde{x}_j - m_j| + |m_j - \tilde{y}_j| \\
 &\leq \sup_{\bar{z} \in I_j} |\bar{z} - m_j| + \sup_{\underline{z} \in I_j} |m_j - \underline{z}| \\
 &= \frac{1}{2}d_j + \frac{1}{2}d_j,
 \end{aligned}$$

was einen Widerspruch darstellt, und somit gilt  $w(X) = d(X)$  .

□

## Aufgabe 2

- a) Implementieren Sie eine Funktion *interval\_hull*(*A*), die einer beschränkten Menge reeller Zahlen  $A := [a_1, \dots, a_n]$  die Intervallhülle  $[\inf A, \sup A]$  zuordnet.

*Beweis:*

□

```
import numpy as np

def interval_hull(A):
    result=np.array([min(A), max(A)] )
    return result
```

- b) Implementieren Sie die Intervall-Grundrechenarten (vgl. Skript S. 126 - 129) für die Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Intervalle  $X, Y \in \mathbb{IR}$  in den Funktionen *interval\_add*(*X*,*Y*), *interval\_subtract*(*X*,*Y*) und *interval\_multiply*(*X*,*Y*).

*Beweis:*

□

```
import numpy as np

def interval_add(x,y):
    result= np.array([x[0]+y[0],x[1]+y[1]])
    return result

def interval_subtract(x,y):
    result= np.array([x[0]-y[1],x[1]-y[0]])
    return result

def interval_multiply(x,y):
    A=np.array([x[0]*y[0],x[1]*y[1],x[0]*y[1],x[1]*y[0]])
    result= interval_hull(A)
    return result
```

- c) Implementieren Sie eine Funktion, die den Durchmesser einer eindimensionalen Box  $X \in \mathbb{R}$  berechnet.

*Beweis:*

□

```
import numpy as np

def boxweite(x):
    result = (x[1]-x[0])
    return result
```

- d) Implementieren Sie eine Funktion, die den Boxmittelpunkt einer eindimensionalen Box  $X \in \mathbb{R}$  berechnet.

*Beweis:*

□

```
import numpy as np

def mittelpunkt(x):
    result = ((x[0]+x[1])/2)
    return result
```

### Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x - x^2 = x - x \cdot x = x \cdot (1 - x)$  und die intervallwertigen Funktionen

$$F_1: \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}, F_1(X) = X - XX, \quad F_2: \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}, F_2(X) = X(1 - X)$$

a) Zeigen Sie, dass  $F_1$ , als auch  $F_2$  eine natürliche Intervallerweiterung von  $f$  ist.

*Beweis:* Zunächst gilt, dass  $f(x)$  als Komposition von Grundrechenarten nach Definition 3.3.2 eine faktorisierte Funktion ist. Mit

$$F_1(X) = X - XX = X - X^2 = f(X)$$

gilt nach Definition 3.3.4, dass  $F_1$  die natürliche Intervallerweiterung von  $f$  ist. Analog gilt mit

$$F_2(X) = X(1 - X) = X - XX = X - X^2 = f(X)$$

nach Definition 3.3.4, dass  $F_2$  die natürliche Intervallerweiterung von  $f$  ist. □

b) Bestimmen Sie durch geschickte Fallunterscheidung

$$F_3: \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}, F_3(X) = \text{bild}(f, X)$$

für ein beliebiges Intervall  $X \subseteq \mathbb{IR}$  explizit. Zeigen Sie, dass die von Ihnen definierte intervallwertige Funktion  $F_3$  für ein beliebiges Intervall tatsächlich die Bildmenge  $\text{bild}(f, X)$  liefert.

*Beweis:* Die Funktion  $f$  ist als Polynom in  $C^1(\mathbb{R})$  und das Bild somit ein Intervall. Außerdem ist wegen

$$f'(x) = 1 - 2x$$

die Funktion  $f$

- monoton steigend für  $x < \frac{1}{2}$ , und
- monoton fallend für  $x > \frac{1}{2}$ .

Damit ist für  $X \subseteq (-\infty, \frac{1}{2})$  oder  $X \subseteq (\frac{1}{2}, \infty)$  das Bild von  $f$  unter  $X$ , ein Intervall dessen Grenzen durch die Grenzen von  $X$  unter  $f$  gegeben ist. Somit ist

- für  $\bar{x} < 1/2$  (d.h.  $X \subseteq (-\infty, \frac{1}{2})$ )  $f(\underline{x}) < f(\bar{x})$ , d.h.:

$$\text{bild}(f, X) = [f(\underline{x}), f(\bar{x})];$$

- für  $\underline{x} > 1/2$  (d.h.  $X \subseteq (\frac{1}{2}, \infty)$ )  $f(\bar{x}) < f(\underline{x})$ , d.h.:

$$\text{bild}(f, X) = [f(\bar{x}), f(\underline{x})];$$

Ist hingegen  $\frac{1}{2} \in X$ , so folgt wegen

$$f''(x) = 2 < 0$$

und der Monotonie auf den Teilintervallen, dass  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$  die Obergrenze der Bildmenge ist. Die Untergrenze ergibt sich aus der Vereinigung der Bildmenge des Intervalls links von  $\frac{1}{2}$ , auf dem  $f$  monoton steigend ist, und rechts von  $\frac{1}{2}$ , auf dem  $f$  monoton fallend ist. Nach Obigem folgt somit:

$$\text{bild}(f, X) = \left[ \min \{f(\underline{x}), f(\bar{x})\}, f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \left[ \min \{f(\underline{x}), f(\bar{x})\}, \frac{1}{4} \right]$$

□

c) Implementieren Sie die intervallwertigen Funktionen  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$ .

*Beweis:*

□

```
def f1(x):
    res1=interval_multiply(x,x)
    res2=interval_subtract(x,res1)
    return res2

def f2(x):
    res1=np.array([1-x[1], 1-x[0]])
    res2= interval_multiply(x,res1)
    return res2

def f3(x):
    if x[1]<1/2:
        result = np.array([x[0]-x[0]*x[0], x[1]-x[1]*x[1]])
    elif x[0]>1/2:
        result = np.array([x[1]-x[1]*x[1], x[0]-x[0]*x[0]])
    else:
        minimum= min([x[0]-x[0]*x[0], x[1]-x[1]*x[1]])
        result= np.array([minimum, 1/4])
    return result
```

- d) Berechnen Sie Boxweite und Boxmittelpunkt von  $Y_i = F_i(X(\epsilon))$ ,  $i = 1, 2, 3$ , für das Intervall  $X = [-10, -10 + \epsilon]$  für  $\epsilon \in \{0.1, 0.2, \dots, 30\}$ . Erstellen Sie zwei Plots, die Boxmittelpunkt und Boxweite der Funktionen über der Boxweite von  $X(\epsilon)$  darstellen.

*Beweis:*

□

```
epsilon = np.arange(0.1,30.1,0.1)
X = epsilon-10

y = np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range(0,len(epsilon)):
    Y[i]=np.array([-10,X[i]])

res_f1=np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range(0,len(epsilon)):
    res_f1[i]=f1(Y[i])

res_f2=np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range(0,len(epsilon)):
    res_f2[i]=f2(Y[i])

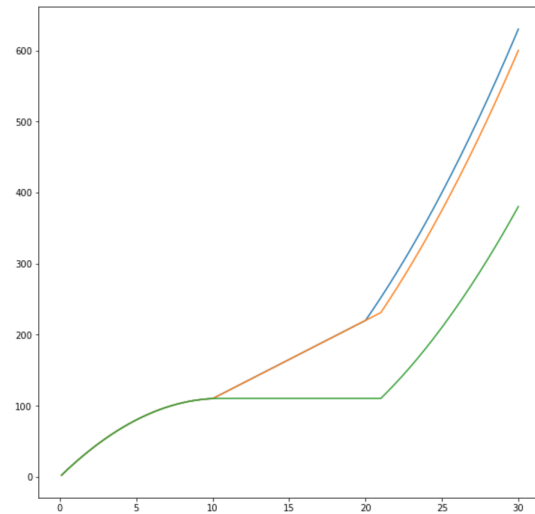
res_f3=np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range(0,len(epsilon)):
    res_f3[i]=f3(Y[i])

boxweite_f1=np.zeros(len(epsilon))
for i in range(0,len(epsilon)):
    boxweite_f1[i]=boxweite(res_f1[i])

boxweite_f2=np.zeros(len(epsilon))
for i in range(0,len(epsilon)):
    boxweite_f2[i]=boxweite(res_f2[i])

boxweite_f3=np.zeros(len(epsilon))
for i in range(0,len(epsilon)):
    boxweite_f3[i]=boxweite(res_f3[i])

import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(epsilon, boxweite_f1)
plt.plot(epsilon, boxweite_f2)
plt.plot(epsilon, boxweite_f3)
plt.show()
```



- e) Erklären Sie: Woraus resultiert das Verhalten von Boxweite und Boxmittelpunkt für  $F_3(X(\epsilon))$ ? Untersuchen Sie hierzu genau das Verhalten von Unter- und Obergrenze von  $F_3(X(\epsilon))$  für  $\epsilon \in [0, 30]$ . Welche der beiden Funktionen  $F_1$ ,  $F_2$  approximiert  $\text{bild}(f, X)$  besser? Warum?

*Beweis:* Verhalten der Boxweite:

- für  $\epsilon < 10.5$  gilt  $\epsilon - 10 = \bar{x} < \frac{1}{2}$ : nach b) ist die Funktion in diesem Intervall monoton steigend, d.h.  $f(\underline{x})$  bestimmt die Untergrenze, und bleibt konstant bei  $f(-10)$ , die Obergrenze ist aufgrund der Monotonie

$$f(-10 + \epsilon) \leq \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$  die Boxweite ist streng monoton wachsend

- für  $\epsilon \geq 10.5$  ist  $\frac{1}{2} \in X$ . Nach b) ist damit

$$\text{bild}(f, X) = \left[ \min \{f(-10), f(-10 + \epsilon)\}, \frac{1}{4} \right].$$

Für alle  $\epsilon$  für die  $f(-10 + \epsilon) \geq f(-10)$  gilt, ist die untere Grenze des Intervalls und damit auch die Intervallbreite konstant. Die obige Bedingung bedeutet:

$$(-10 + \epsilon)(1 - (-10 + \epsilon)) > -110 \iff \epsilon \leq 21,$$

d.h.

- für  $10.5 \leq \epsilon \leq 21$  bleiben Untergrenze und Obergrenze von  $F_3(X(\epsilon))$  konstant und damit auch die Boxweite;
- für  $21 < \epsilon \leq 30$  folgt mit b) und obigem, dass

$$\text{bild}(f, X) = \left[ f(-10 + \epsilon), \frac{1}{4} \right]$$

Da nach b)  $f$  in diesem Fall monoton fallend ist, vergrößert sich für wachsendes  $\epsilon$  das Intervall aufgrund der kleiner werdenden Untergrenze.

Verhalten des Boxmittelpunktes:

- für  $\epsilon < 10.5$ : Untergrenze ist konstant  $f(-10)$ , Obergrenze steigt degressiv mit Funktionsgraph  $f(-10 + \epsilon) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$  Boxmittelpunkt zeichnet degressiv steigenden Verlauf
- für  $10.5 \leq \epsilon \leq 21$ : Untergrenze und Obergrenze von  $F_3(X(\epsilon))$  bleiben konstant und damit auch der Boxmittelpunkt
- für  $\epsilon > 21$ : Obergrenze ist konstant gleich  $\frac{1}{4}$  und Untergrenze sinkt mit Funktionsgraph  $\Rightarrow$  der Boxmittelpunkt verschiebt sich wieder nach unten bis  $\epsilon = 30$

$F_2(X)$  approximiert die Bildmenge  $\text{bild}(f, X)$  am Besten, da sie sie im Sinne des Abhängigkeitseffektes am wenigsten verzerrt. Ihre Funktionsvorschrift

$$F_2(X) = X(1 - X)$$

enthält offensichtlich nur 2 mal das Intervall  $X$ , dagegen

$$F_1(X) = X - XX$$

3 mal. Grafisch sieht man dies dadurch, dass der Graph von  $F_2$  näher an dem von  $F_3$  liegt.  $\square$