

Aufgabe S. 2.1

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P : \min_{w \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2} \|w\|_2^2 \text{ s.t. } Aw \geq e$$

mit einer (d, m) -Matrix A und

$$e := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.$$

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass ein \tilde{w} existiert, für das gilt

$$A\tilde{w} \geq e.$$

a) Zeigen Sie, dass P lösbar ist.

Proof: Nach Korollar 1.2.40 gilt:

Es sei M nicht-leer, und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und koerziv auf M .

Dann ist S nicht-leer und kompakt.

Nach Aufgabenstellung ist mit $f(w) = \frac{1}{2} \|w\|_2^2$ und $g(w) = e - Aw$, sodass $M = \{w \in \mathbb{R}^m : g(w) \leq 0\}$:

$$P : \min_{w \in \mathbb{R}^m} f(w) \text{ s.t. } w \in M.$$

Nach Voraussetzung existiert ein $\tilde{w} \in M$, sodass M nicht-leer ist. Weiter ist die Funktion f stetig, da für $\|x - y\|_2 < \delta$ und $\epsilon := \frac{\delta^2}{2}$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt:

$$\|f(x) - f(y)\|_2 = \frac{1}{2} \left| \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 \right| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 \leq \epsilon.$$

Behauptung: die Menge M ist abgeschlossen bzw. das Komplement

$$\mathbb{R}^m \setminus M = \{w \in \mathbb{R}^m : Aw < e\}.$$

ist offen. Betrachte hierfür $w \in \mathbb{R}^m \setminus M$, dann gilt mit der Norm $\|w\|_\infty := \max_{i=1,\dots,m} |w_i|$ und dem Radius

$$\epsilon := \frac{1}{2} \|Aw - e\|_\infty > 0,$$

dass alle

$$x \in B_\epsilon(w) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|w - x\| < \epsilon\}$$

in M liegen, da folgt

$$\|e - Ax\|_\infty \leq \|e - Aw\|_\infty + \|Aw - Ax\|_\infty < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \implies Ax \leq e.$$

Somit ist M abgeschlossen, woraus folgt, dass die Funktion f koerziv ist, denn nach Definition 1.2.37 müssen nur alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\|x^\nu\| \rightarrow \infty$ betrachtet werden und für die gilt mit der Äquivalenz der Normen im \mathbb{R}^m :

$$f(x^\nu) = \frac{1}{2} \|x^\nu\|_2^2 \longrightarrow +\infty.$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Korollar 1.2.40 erfüllt, S ist somit nicht-leer und kompakt und somit P lösbar. \square

b) Zeigen Sie, dass P ein konvexes Optimierungsproblem ist.

Proof: Nach Beispiel 2.1.9 gilt:

Falls f, g_i für $i \in I$ auf \mathbb{R}^m konvexe Funktionen sind, dann ist

$$P : \quad \min f(x) \text{ s.t. } g_i(x) \leq 0, \quad i \in I$$

ein konvexes Optimierungsproblem.

Beim gegebenen Problem ist $g_i(w) = -(Aw)_i + 1$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ eine lineare und somit konvexe Funktion. Da $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$ und

$$D^2f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \succ 0,$$

ist f insbesondere konvex und damit P ein konvexes Optimierungsproblem. \square

- c) Stellen Sie das Wolfe-Dual D zu P auf.
- d) Formulieren Sie, ausgehend von Aufgabenteil b), ein duales Optimierungsproblem, das nur von der Dualvariabel λ abhängt.