Globale Optimierung - Sonderübung III
Nadine Kostorz (1972005), Leon Talenberg (1957966), Martin Belica (1775706)

Aufgabe 1

Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet

$$d(X) \coloneqq \sup_{x,y \in M} \|x-y\|_2$$

den Durchmesser von M. Zeigen Sie, dass der Durchmesser einer Box X mit ihrer Boxweite übereinstimmt.

Beweis: Sei $N \coloneqq \{1, \dots, n\}$. Es gilt für die Boxweite w:

$$w(X) = \|\overline{x} - \underline{x}\|_2.$$

Da $Z \coloneqq \{\overline{x}, \underline{x}\} \subseteq X$, gilt damit

$$d(X) = \sup_{x,y \in X} \|x-y\|_2 \geq \sup_{x,y \in Z} \|x-y\|_2 = \|\overline{x} - \underline{x}\|_2 = w(X),$$

d.h. um die Behauptung zu zeigen bleibt $w(X) \geq d(X)$ offen. Angenommen dies gilt nicht, d.h.

$$w(X) < d(X). \tag{$*$}$$

Da die Box X aufgrund der Definition abgeschlossen ist, existieren $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$, sodass

$$d(X) = \sup_{x,y \in M} \|x-y\|_2 = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2$$

Damit folgt aus $(*)$:

$$\|\overline{x} - \underline{x}\|_2 < \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2,$$

was äquivalent ist zu

$$\sum_{i \in N} |\overline{x}_i - \underline{x}_i|^2 < \sum_{i \in N} |\tilde{x}_i - \tilde{y}_i|^2.$$

Damit diese Ungleichung erfüllt ist, muss mindestens für einen Summanden j

$$|\overline{x}_j - \underline{x}_j| < |\tilde{x}_j - \tilde{y}_j| \tag{$**$}$$

gelten. Sei nun $d_j \coloneqq |\overline{x}_j - \underline{x}_j|$ die Breite und $m_j \coloneqq \frac{1}{2}\left(\overline{x}_j - \underline{x}_j\right)$ die Mitte dieses eindimensionalen Intervalls $I_j = \left[\underline{x}_j, \overline{x}_j\right]$. Nach Konstruktion gilt $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$, was insbesondere

$\tilde{x}_j, \tilde{y}_j \in I_j$ impliziert. Nach $(**)$ folgt mit der Abgeschlossenheit von I_j damit

$$\begin{aligned} d_j &= \left|\overline{x}_j - \underline{x}_j\right| \\ &< |\tilde{x}_j - \tilde{y}_j| \\ &\leq |\tilde{x}_j - m_j| + |m_j - \tilde{y}_j| \\ &\leq \sup_{\overline{z} \in I_j} |\overline{z} - m_j| + \sup_{\underline{z} \in I_j} |m_j - \underline{z}| \\ &= \frac{1}{2} d_j + \frac{1}{2} d_j, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch darstellt, und somit gilt $w(X) = d(X)$. $\square$

Aufgabe 2

a) Implementieren Sie eine Funktion $interval\_hull(A)$, die einer beschränkten Menge reeller Zahlen $A := [a_1, ..., a_n]$ die Intervallhülle $[\inf A, \sup A]$ zuordnet.

Beweis: $\square$

```
import numpy as np

def interval_hull(A):
    result=np.array([min(A), max(A)] )
    return result
```

b) Implementieren Sie die Intervall-Grundrechenarten (vgl. Skript S. 126 - 129) für die Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Intervalle $X, Y \in \mathbb{IR}$ in den Funktionen $interval\_add(X, Y)$, $interval\_subtract(X, Y)$ und $interval\_multiply(X, Y)$.

Beweis: $\square$

```
import numpy as np

def interval_add(x,y):
    result= np.array([x[0]+y[0],x[1]+y[1]])
    return result

def interval_subtract(x,y):
    result= np.array([x[0]-y[1],x[1]-y[0]])
    return result

def interval_multiply(x,y):
    A=np.array([x[0]*y[0],x[1]*y[1],x[0]*y[1],x[1]*y[0]])
    result= interval_hull(A)
    return result
```

c) Implementieren Sie eine Funktion, die den Durchmesser einer eindimensionalen Box $X \in \mathbb{IR}$ berechnet.

Beweis: $\square$

```
import numpy as np

def boxweite(x):
    result = (x[1]-x[0])
    return result
```

d) Implementieren Sie eine Funktion, die den Boxmittelpunkt einer eindimensionalen Box $X \in \mathbb{IR}$ berechnet.

Beweis: $\square$

```
import numpy as np

def mittelpunkt(x):
    result =((x[0]+x[1])/2)
    return result
```

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x - x^2 = x - x \cdot x = x \cdot (1 - x)$ und die intervallwertigen Funktionen

$$F_1\colon \mathbb{IR} \to \mathbb{IR},\ F_1(X) = X - XX, \quad F_2\colon \mathbb{IR} \to \mathbb{IR},\ F_2(X) = X(1 - X)$$

a) Zeigen Sie, dass F_1, als auch F_2 eine natürliche Intervallerweiterung von f ist.

Beweis: Zunächst gilt, dass $f(x)$ als Komposition von Grundrechenarten nach Definition 3.3.2 eine faktorisierbare Funktion ist. Mit

$$F_1(X) = X - XX = X - X^2 = f(X)$$

gilt nach Definition 3.3.4, dass F_1 die natürliche Intervallerweiterung von f ist. Analog gilt mit

$$F_2(X) = X(1 - X) = X \cdot (1 - X) = f(X)$$

nach Definition 3.3.4, dass F_2 die natürliche Intervallerweiterung von f ist. □

b) Bestimmen Sie durch geschickte Fallunterscheidung

$$F_3\colon \mathbb{IR} \to \mathbb{IR},\ F_3(X) = \operatorname{bild}(f, X)$$

für ein beliebiges Intervall $X \subseteq \mathbb{IR}$ explizit. Zeigen Sie, dass die von Ihnen definierte intervallwertige Funktion F_3 für ein beliebiges Intervall tatsächlich die Bildmenge $\operatorname{bild}(f, X)$ liefert.

Beweis: Die Funktion f ist als Polynom in $C^1(\mathbb{R})$ und das Bild somit ein Intevrall. Außerdem ist wegen

$$f'(x) = 1 - 2x$$

die Funktion f

- monoton steigend für $x < \frac{1}{2}$, und
- monoton fallend für $x > \frac{1}{2}$.

Damit ist für $X \subseteq \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ oder $X \subseteq \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ das Bild von f unter X, ein Intevrall dessen Grenzen durch die Grenzen von X unter f gegeben ist. Somit ist

- für $\overline{x} < 1/2$ (d.h. $X \subseteq \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$) $f(\underline{x}) < f(\overline{x})$, d.h.:

$$\text{bild}(f, X) = [f(\underline{x}), f(\overline{x})]\,;$$

- für $\underline{x} > 1/2$ (d.h. $X \subseteq \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$) $f(\overline{x}) < f(\underline{x})$, d.h.:

$$\text{bild}(f, X) = [f(\overline{x}), f(\underline{x})]\,;$$

Ist hingegen $\frac{1}{2} \in X$, so folgt wegen

$$f''(x) = 2 < 0$$

und der Monotonie auf den Teilintervallen, dass $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ die Obergrenze der Bildmenge ist. Die Untergrenze ergibt sich aus der Vereinigung der Bildmenge des Intervalls links von $\frac{1}{2}$, auf dem f monoton steigend ist, und rechts von $\frac{1}{2}$, auf dem f monoton fallend ist. Nach Obigem folgt somit:

$$\text{bild}(f, X) = \left[\min\left\{f(\underline{x}), f(\overline{x})\right\}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\min\left\{f(\underline{x}), f(\overline{x})\right\}, \frac{1}{4}\right]$$

$\square$

c) Implementieren Sie die intervallwertigen Funktionen F_1, F_2 und F_3.

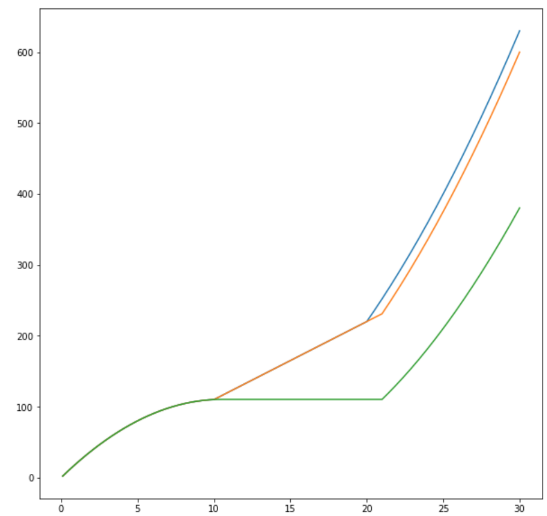
Beweis: $\square$

```python
def f1(x):
    res1=interval_multiply(x,x)
    res2=interval_subtract(x,res1)
    return res2

def f2(x):
    res1=np.array([1-x[1], 1-x[0]])
    res2= interval_multiply(x,res1)
    return res2

def f3(x):
    if x[1]<1/2:
        result = np.array([x[0]-x[0]*x[0], x[1]-x[1]*x[1]])
    elif x[0]>1/2:
        result = np.array([x[1]-x[1]*x[1], x[0]-x[0]*x[0]])
    else:
        minimum= min([x[0]-x[0]*x[0], x[1]-x[1]*x[1]])
        result= np.array([minimum, 1/4])
    return result
```

d) Berechnen Sie Boxweite und Boxmittelpunkt von $Y_i = F_i(X(\epsilon))$, $i = 1, 2, 3$, für das Intervall $X = [-10, -10 + \epsilon]$ für $\epsilon \in \{0.1, 0.2, \dots, 30\}$. Erstellen Sie zwei Plots, die Boxmittelpunkt und Boxweite der Funktionen über der Boxweite von $X(\epsilon)$ darstellen.

Beweis: □

```
epsilon = np.arange(0.1,30.1,0.1)
X = epsilon-10

Y = np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range(0,len(epsilon)):
    Y[i]=np.array([-10,X[i]])

res_f1=np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range (0,len(epsilon)):
    res_f1[i]=f1(Y[i])

res_f2=np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range (0,len(epsilon)):
    res_f2[i]=f2(Y[i])

res_f3=np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range (0,len(epsilon)):
    res_f3[i]=f3(Y[i])

boxweite_f1=np.zeros(len(epsilon))
for i in range (0,len(epsilon)):
    boxweite_f1[i]=boxweite(res_f1[i])

boxweite_f2=np.zeros(len(epsilon))
for i in range (0,len(epsilon)):
    boxweite_f2[i]=boxweite(res_f2[i])

boxweite_f3=np.zeros(len(epsilon))
for i in range (0,len(epsilon)):
    boxweite_f3[i]=boxweite(res_f3[i])

import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(epsilon, boxweite_f1)
plt.plot(epsilon, boxweite_f2)
plt.plot(epsilon, boxweite_f3)
plt.show()
```



e) Erklären Sie: Woraus resultiert das Verhalten von Boxweite und Boxmittelpunkt für $F_3(X(\epsilon))$? Untersuchen Sie hierzu genau das Verhalten von Unter- und Obergrenze von $F_3(X(\epsilon))$ für $\epsilon \in [0, 30]$.Welche der beiden Funktionen F_1, F_2 approximiert $\text{bild}(f, X)$ besser? Warum?

Beweis: Verhalten der Boxweite:

- für $\epsilon < 10.5$ gilt $\epsilon - 10 = \overline{x} < \frac{1}{2}$: nach b) ist die Funktion in diesem Intervall monoton steigend, d.h. $f(\underline{x})$ bestimmt die Untergrenze, und bleibt konstant bei $f(-10)$, die Obergrenze ist aufgrund der Monotonie

$$f(-10 + \epsilon) \leq \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ die Boxweite ist streng monoton wachsend

- für $\epsilon \geq 10.5$ ist $\frac{1}{2} \in X$. Nach b) ist damit

  $$\operatorname{bild}(f, X) = \left[\min\left\{f(-10), f(-10+\epsilon)\right\}, \frac{1}{4}\right].$$

  Für alle ϵ für die $f(-10+\epsilon) \geq f(-10)$ gilt, ist die untere Grenze des Intervalls und damit auch die Intervallbreite konstant. Die obige Bedingung bedeutet:

  $$(-10+\epsilon)(1-(-10+\epsilon)) > -110 \iff \epsilon \leq 21,$$

  d.h.

  - für $10.5 \leq \epsilon \leq 21$ bleiben Untergrenze und Obergrenze von $F_3(X(\epsilon))$ konstant und damit auch die Boxweite;
  - für $21 < \epsilon \leq 30$ folgt mit b) und obigem, dass

    $$\operatorname{bild}(f, X) = \left[f(-10+\epsilon), \frac{1}{4}\right]$$

    Da nach b) f in diesem Fall monoton fallend ist, vergrößert sich für wachsendes ϵ das Intervall aufgrund der kleiner werdenenden Untergrenze.

Verhalten des Boxmittelpunktes:

- für $\epsilon < 10.5$: Untergrenze ist konstant $f(-10)$, Obergrenze steigt degressiv mit Funktionsgraph $f(-10+\epsilon) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$ Boxmittelpunkt zeichnet degressiv steigenden Verlauf
- für $10.5 \leq \epsilon \leq 21$: Untergrenze und Obergrenze von $F_3(X(\epsilon))$ bleiben konstant und damit auch der Boxmittelpunkt
- für $\epsilon > 21$: Obergrenze ist konstant gleich $\frac{1}{4}$ und Untergrenze sinkt mit Funktionsgraph $\Rightarrow$ der Boxmittelpunkt verschiebt sich wieder nach unten bis $\epsilon = 30$

$F_2(X)$ approximiert die Bildmenge $\operatorname{bild}(f, X)$ am Besten, da sie sie im Sinne des Abhängigketseffektes am wenigsten verzerrt. Ihre Funktionsvorschrift

$$F_2(X) = X(1-X)$$

enthält offensichtlich nur 2 mal das Intervall X, dagegen

$$F_1(X) = X - XX$$

3 mal. Grafisch sieht man dies dadurch, dass der Graph von F_2 näher an dem von F_3 liegt. $\square$