Globale Optimierung - Sonderübung IV
Nadine Kostorz (1972005), Leon Talenberg (1957966), Martin Belica (1775706)

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Hessematrix $D^2 f$ der Funktion

$$f(x) = x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + x_1 x_2.$$

Beweis: Da f als Polynom in C^2 liegt, folgt:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 + 2x_2^2 + x_2 \\ x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_1 \end{pmatrix} \text{ und damit } D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 + 4x_2 + 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1 & 4x_1 \end{pmatrix}$$

$\square$

b) Implementieren Sie eine Funktion $DsqF(X)$, die zu gegebenem Interval $X \in \mathbb{IR}^2$ die (eintragsweise) natürliche Intervallerweiterung $D^2 F$ von $D^2 f$ zurück gibt.

$DsqF$ soll ein $(2, 2, 2)$-Array zurück geben, deren Einträge $(i, j, 1)$ die Unter- und $(i, j, 2)$ die Obergrenze von $F_{i,j}(X)$ enthalten, $i, j \in \{1, 2\}$. Die Box X soll als $(2, 2)$-Array übergeben werden, deren Einträge $(i, 1)$ die Untergrenze $\underline{x}_i$ und $(i, 2)$ die Obergrenze $\overline{x}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ der jeweiligen Intervalle enthalten. Nutzen Sie für die Grundrechenarten der Intervallarithmetik die Funktionen aus Aufgabe S. 3.2.

```python
import numpy as np
from math import sqrt

def interval_hull(A):
    result=np.array([min(A), max(A)] )
    return result

def interval_add(x,y):
    result= np.array([x[0]+y[0],x[1]+y[1]])
    return result

def interval_subtract(x,y):
    result= np.array([x[0]-y[1],x[1]-y[0]])
    return result

def interval_multiply(x,y):
    A=np.array([x[0]*y[0],x[1]*y[1],x[0]*y[1],x[1]*y[0]])
    result= interval_hull(A)
    return result

def boxweite(x):
    result = (x[1]-x[0])
    return result

def mittelpunkt(x):
    result =((x[0]+x[1])/2)
    return result
```

```python
def DsqF(X):
    result1=np.array(2*X[1,:])
    result2= interval_add(2*X[0,:],4*X[1,:])+1
    result3=interval_add(2*X[0,:],4*X[1,:])+1
    result4=np.array(4*X[0,:])
    res=np.array([[result1,result2],[result3,result4]])
    return res
```

Aufgabe 2

Es seien $A(x) = D^2 f(x)$ die (n,n)-Hessematrix einer Funktion f und alle Einträge a_{ij} faktorisierbar. Für eine Box $X \in \mathbb{IR}^n$ bezeichne $A(X)$ diejenige Matrix, deren Einträge A_{ij} natürliche Intervallerweiterung von a_{ij} sind.

Implementieren Sie eine Funktion *lambda_min* die für eine Box X und die Matrix $A(X)$ eine Unterschranke β des kleinsten Eigenwertes $\lambda_{\min}(D^2 f(x))$ auf X berechnet. Verwenden sie hierfür die Formel aus Skript S. 146.

Die intervallwertige Hessematrix A soll dabei als $(n,n,2)$-Array übergeben werden, deren Einträge $(i,j,1)$ die Unter- und $(i,j,2)$ die Obergrenze von $F_{i,j}(X)$ enthalten, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Die Box X soll als $(n,2)$-Array übergeben werden, deren Einträge $(i,1)$ die Untergrenze $\underline{x}_i$ und $(i,2)$ die Obergrenze $\overline{x}_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ der jeweiligen Intervalle enthalten.

```
def lambda_min(A):
    n=np.size(A[:,0,0])
    b=np.zeros(n)
    for i in range (0,n):
        R=np.zeros(n)
        for j in range (0,n):
            if j!=i :
                R[j]=max(A[i,j,0],A[i,j,1])
                print(R[j])
        print(R)
        b[i]=A[i,i,0]-sum(R)
    print(b)
    res=min(b)
    return res
```

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Gegeben seien stetige Funktionen $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, auf einer konvexen und kompakten Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, die nicht notwendigerweise eine Box ist. Darüber hinaus sei f nicht konvex und

$$\hat{f} \coloneqq f + g$$

eine konvexe Relaxierung von f auf X.
Sei o.B.d.A X nicht-leer, dann sonst ist in den folgenden Teilaufgaben nichts zu zeigen.

a) Folgt hieraus, dass g eine konvexe Funktion ist? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Beweis: Die gilt im Allgemeinen nicht. Betrachtet man den Fall $n = 2$ und $X = [-1, 1]^2$, so folgt mit

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(3x_1^2 - x_2^2\right) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(-x_1^2 + 3x_2^2\right),$$

dass X konvex ist, und f und g als Polynome in $C^1(X)$. Außerdem sind f, g nicht konvex, da mit Satz 2.2.2 (C^1-Charakterisierung von Konvexität) folgt

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 1 \leq 1 + 2 = f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) + \left\langle \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$
$$g\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = 1 \leq 1 + 2 = g\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right) + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Allerdings hat $\hat{f}$ die Form $\hat{f}(x) = x_1^2 + x_2^2$, ist in $C^2(X)$ als Polynom und damit

$$D^2\hat{f} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \succ 0$$

wodurch $\hat{f}$ nach Satz 2.5.3 (C^2-Charakterisierung von Konvexität) konvex ist. □

b) Nun gelte $g(x) \geq -2$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass für die Minimalwerte v bzw. $\hat{v}$ von f bzw. $\hat{f}$ auf X gilt:

$$0 \leq v - \hat{v} \leq 2.$$

Beweis: Da f und g nach Aufgabe stetig sind, ist $\hat{f}$ auch stetig. Somit nehmen, $f, \hat{f}$ und g als stetige Funktionen auf der kompakten Menge X nach dem Satz von Weierstraß (Satz 1.2.10) ihr Minimum an. Nach a) bzw. Definition 3.2.2 (Konvex relaxierte Funktion), ist $\hat{f}(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$, und damit auch

$$\min_{x\in X} \hat{f}(x) \leq \min_{x\in X} f(x) \iff 0 \leq \min_{x\in X} f(x) - \min_{x\in X} \hat{f}(x) = v - \hat{v}$$

Nach Voraussetzung ist

$$g(x) \geq -2 \iff -g(x) \leq 2.$$

Es folgt mit Übung 1.3.1 (Skalare Vielfache und Summen):

$$\min_{x\in X} \hat{f}(x) = \min_{x\in X} (f(x) + g(x)) \geq \min_{x\in X} f(x) + \min_{x\in X} g(x)$$

$$\iff \min_{x\in X} \hat{f}(x) - \min_{x\in X} f(x) \geq \min_{x\in X} g(x) \iff v - \hat{v} \leq -\min_{x\in X} g(x) = \max_{x\in X} -g(x) \leq 2,$$

wobei wir im letzten Schritt Ausgenutzt haben, dass 2 eine Oberschranke von $-g$ ist, d.h.

$$0 \leq v - \hat{v} \leq 2$$

$\square$

c) Nun seien $X \in \mathbb{IR}$, $f \in C^2(X, \mathbb{R})$, $D^2 f$ faktorisierbar und $g = \alpha\psi(x)$ per αBB Methode bestimmt. Zeigen Sie, dass für die Minimalwerte v bzw. $\hat{v}$ von f bzw. $\hat{f}$ auf X die folgende Abschätzung gilt

$$v - \hat{v} \leq \frac{\alpha}{8} w(X)^2$$

Beweis: Da die Voraussetzungen von a) und b) gelten und nach Übung 3.4.1

$$\psi(x) \geq \min_{x\in X} \psi(x) = -\frac{1}{8} w(X)^2,$$

folgt die Behauptung aus b), indem man

$$g(x) := \alpha\psi(x) \quad \forall x \in X$$

setzt, damit nicht $g(x) \geq -2$ sondern $g(x) \geq \alpha \min_{x\in X} \psi(x) = -\frac{\alpha}{8} w(X)^2$, und da nach Satz 3.4.3 folgt, dass $\hat{f} = f + \psi$ eine konvexe Relaxierung von f auf X ist. $\square$

d) Geben Sie eine Funktion f, eine Box X und ein $\alpha \geq 0$ an, sodass das die Voraussetzungen aus c) erfüllt und die Ungleichung aus c) mit Gleichheit erfüllt ist.

Beweis: a $\square$