Globale Optimierung

Übung

Prof. Dr. Oliver Stein

Sommersemester 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe 1.1

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| \cdot V \to [0,\infty)$ heißt Norm, wenn für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Definitheit: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) Absolute Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie dass für jede Norm in Bedingung 1) auch die Rückrichtung gilt

   Beweis: Zu zeigen: $\|0\| = 0$, wobei zu beachten ist, dass die erste 0 ein Element im Vektorraum V darstellt und die zweite einen Skalar im zugrunde liegendem Raum.

   Es gilt für alle $x \in V$:
$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0$$
$\square$

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind:

   (i) $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$

   Beweis:

   - Nicht-Negativität: $\sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\geq 0} \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$
   - Definitheit: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \xRightarrow{|\cdot| \geq 0} |x_i| = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$
$$\xRightarrow{Definitheit} x_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$
   - Absolute Homogenität: $\|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^n |\alpha||x_i|$
$$= |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \|x\|_1$$

- Dreieckunsgleichung: $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$\square$

(ii) $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

Beweis:

- Nicht-Negativität: Wir definieren hierzu:

$$f \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)^n,\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1^2,\dots,x_n^2)$$
$$g \colon [0,\infty)^n \mapsto [0,\infty),\ y \mapsto \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$h \colon [0,\infty) \mapsto [0,\infty),\ z \mapsto \sqrt{z}$$

  Somit ist: $\|\cdot\|_2 = (h \circ g \circ f) : \mathbb{R}^n \to [0\infty)$
- Definitheit: $0 = \|x\|_2 \iff \|x\|_2^2 = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, wobei $x_i^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x_i = 0\ \forall i \in \{1,\dots,n\} \iff x = 0$$

- Absolute Homogenität: Analog zu $\|\cdot\|_1$.
- Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_2^2 = (x+y)^T (x+y) = x^T x x^T y + y^T x + y^T y$

$$\begin{aligned}
&= \|x\|_2^2 + 2x^T y + \|y\|_2^2 \\
&\leq \|x\|_2^2 + 2|x^T y| + \|y\|_2^2 \\
&\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 \\
&= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2
\end{aligned}$$

$\square$

(iii) $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max_{i=1}^n |x_i|$

Beweis:

- Nicht-Nevativität: Analog zu $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_2$

- Definitheit: $0 = \|x\|_\infty \iff \max_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff |x_i| = 0 \; \forall i \in \{1,\dots,n\}$

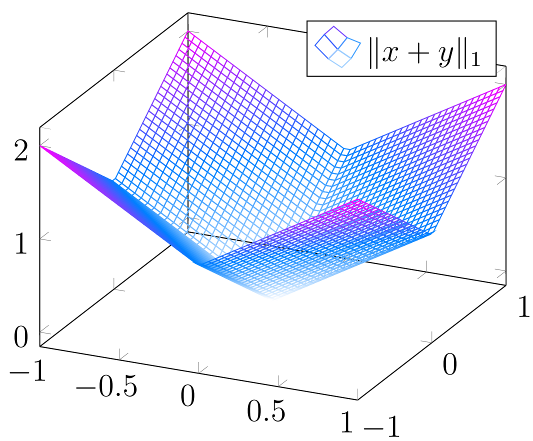
$$\iff x_i = 0 \; \forall i \in \{1,\dots,n\} \iff x = 0.$$

- Absolute Homogenität: Analog zu $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_2$
- Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_\infty = \max_{i=1}^n (|x_i + y_i|) = \max_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)$

$$\leq \max_{i=1,\dots,n} \left(\max_{j=1}^n |x_j| + \max_{k=1}^n |y_k| \right) \leq \max_{j=1}^n |x_j| + \max_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\square$

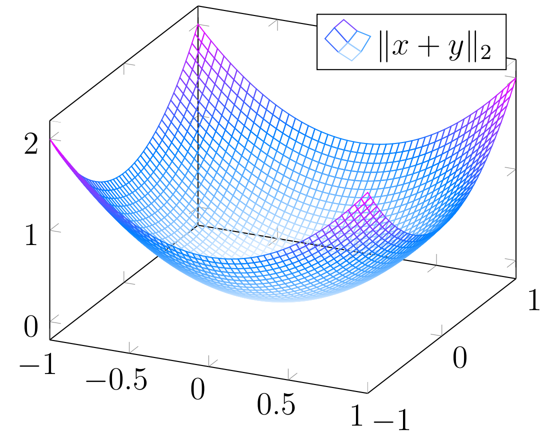
Aufgabe 1.2

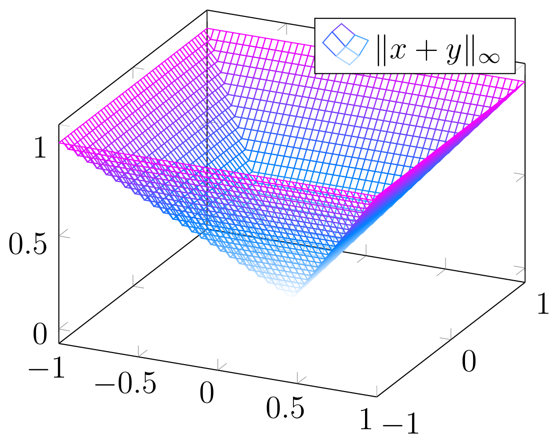


Aufgabe 1.3

Gegeben seien eine Menge von zulässigen punkten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Zielfunktion $f\colon M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Die globalen Maximalpunkte von f auf M sind genau die globalen Minimalpunkte von $-f$ auf M.





Beweis: Es gilt: x^* ist globaler Maximalpunkt von f auf M:

$$\begin{aligned}
&\iff f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in M \\
&\iff -f(x^*) \leq -f(x) \quad \forall x \in M \\
&\iff x^* \text{ ist globaler Minimalpunkt von } -f \text{ auf } M
\end{aligned}$$

$\square$

b) Sofern f globale Maximalpunkte besitzt, gilt für den globalen Maximalwert

$$\max_{x \in M} f(x) = -\min_{x \in M} \left(-f(x)\right).$$

Beweis: todo $\square$

Aufgabe 2.1

a) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $M \coloneqq \{x \in R^n | (x) \leq 0\}$. Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist.

Beweis: $M = \{x \in R^n | g(x) \leq 0\}$, sei $(x_n)_n \subseteq M$, $\lim x_n = x^*$. Zu zeigen ist $x^* \in M$ bzw. $g(x^*) \leq 0$. Wir nutzen hierfür die Stetigkeit von g aus, denn damit ist:

$$g(x^*) = g(\lim x_n) = \lim \underbrace{g(x_n)}_{\leq 0} \leq 0$$

$\square$

b) Zeigen Sie, dass die Menge M aus Aufgabenteil a) nicht beschränkt sein muss.

Beweis: Als Gegenbeispiel sei $g(x) = -x^2$. Damit ist $M = \mathbb{R}$, was nicht beschränkt ist. $\square$

c) Es seien I eine beliebige Indexmenge, $n \in \mathbb{N}$, $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I$, stetige Abbildungen und $M_i \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq 0\}$. Zeigen Sie, dass

$$M \coloneqq \bigcap_{i \in I} M_i$$

abgeschlossen ist.

Beweis: Sei $(x_n)_n \subseteq M$ mit $\lim x_n = x{*}^*$. ZU zeigen ist $x^* \in M$. Da

$$(x_n)_n \subseteq M = \bigcap M_i$$

folgt $(x_n)_n \subseteq M_i$ für alle $i \in I$. Da M_i für alle $i \in I$ abgeschlossen ist, folgt somit:

$$x^* \in M_i \; \forall i \in I \iff x^* \in \bigcap_{i \in I} M_i \iff x^* \in M$$

$\square$

Aufgabe 2.2

Zeigen oder widerlegen Sie die Koerzivität der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$

a) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2$,

Beweis: Sei $(x_n)_n = (0, \nu)$. Damit ist $\|x_\nu\| = \nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \infty$, allerdings

$$f(x_n) = -\nu \to -\infty$$

für $\nu \to \infty$. Ein anderes Beispiel wäre $(y_n)_n = (n, n^3)$, denn damit ist $\|y_n\| \to \infty$ und $f(y_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

b) $f(x_1, x_2) = (x_1^4 + x_2^4)\, e^{x_1^2 + x_2^2}$

Beweis: Wir können die Funktion nach unten hin abschätzen:

$$f(x) = \left(x_1^4 + x_2^4\right) \underbrace{e^{x_1^2+x_2^2}}_{\geq 1} \geq \left(x_1^4 + x_2^4\right) = \|x\|_4^4$$

Damit ist für $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_4 \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_4^4 \to \infty$$

□

bzw. der folgenden Funktion auf $\mathbb{R}^n$

c) $f(x) = x^T A x$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit aber *nicht notwendigerweise symmetrisch.*

Beweis: Es ist $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ und damit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle \\ &= \frac{1}{2}x^T A x + \frac{1}{2}x^T A^T x \\ &= x^T \underbrace{\left(\frac{A + A^T}{2}\right)}_{=:\tilde{A}} x \end{aligned}$$

Da aber $\tilde{A}$ symmetrisch ist per Konstruktion, so folgt mit dem Hinweis die Behauptung da:

$$f(x) = x^T \tilde{A} x = \|x\|_{\tilde{A}}^2$$

$\square$

Hinweis: Eine positiv definite *und symmetrische Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ induziert mit $\langle xy\rangle_A := x^T Ay$ ein Skalarprodukt, welches wiederum durch $\|x\|_A := \sqrt{\langle x, x\rangle_A}$ eine Norm induziert.

Aufgabe 2.3

Sei $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$p(x) = -\frac{1+4x_1^2}{1+2x_1^2} + 2x_2^2$$

Bestimmen Sie das Infimum von p auf der Menge $D = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 1, x_2 > 0\}$ und zeigen Sie, dass das Infimum nicht als Minimalwert angenommen wird.

Beweis: Zu zeigen: $\forall x \in D : p(x) \geq -2$, $\inf_{x\in D} f(x) = -2$, $\nexists x \in D : f(x) = -2$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1+4x_1^2}{1+2x_1^2} + 2x_2^2 \\ &= -\frac{2+4x_1^2-1}{1+2x_1^2} + 2x_2^2 \\ &= -\frac{2(1+2x_1^2)-1}{1+2x_1^2} + 2x_2^2 \\ &= -2 + \underbrace{\frac{1}{1+2x_1^2}}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2^2}_{>0} \geq -2 \end{aligned}$$

Wählen wir nun $(x_n)_n \subseteq M$ mit $x_n = \left(n, \frac{1}{n}\right)$

$$f(x_n) = -2\frac{1}{1+2n^2} + 2\frac{1}{n^2} \to$$

$\square$

Im folgenden sind die Themen:

- „Rechenregeln“ für Optimierungsprobleme
- Konvexität

Aufgabe 3.1

a) $\alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$, zu zeigen:

$$\min_{x\in M}(\alpha f(x)+\beta) = \alpha\left(\min_{x\in M} f(x)\right)+\beta$$

$\overline{x} \in M$ globaler Minimalpunkt von f auf M

$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in M$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\alpha\geq 0}{\iff} \alpha f(\overline{x}) \leq \alpha f(x) \quad x \in M \\
&\overset{\beta\in\mathbb{R}}{\iff} \alpha f(\overline{x}) + \beta \leq \alpha f(x) + \beta \quad \forall x \in M \\
&\iff \overline{x} \text{ ist globales Minimum von } f \text{ in } M \\
&\Rightarrow \min_{x\in M}(\alpha f(x)+\beta) = \alpha f(\overline{x}) + \beta = \alpha\left(\min_{x\in M} f(x)\right)+\beta
\end{aligned}$$

b) Zu zeigen: $\min_{x\in M}(\alpha f(x)+\beta) = \alpha(\max_{x\in M} f(x)) + \beta$
$\overline{x} \in M$ ist globaler Maximalpunkt von f auf M

$$\begin{aligned}
&\iff f(\overline{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in M \\
&\overset{\alpha\leq 0}{\iff} \alpha f(\overline{x}) \leq \alpha f(x) \quad \forall x \in M \\
&\iff \alpha f(\overline{x}) + \beta \leq \alpha f(x) + \beta \quad \forall x \in M \\
&\iff \overline{x} \text{ globaler Minimalpunkt } \alpha f(x) + \beta \text{ auf } M \\
&\Rightarrow \min_{x\in M}(\alpha f(x)+\beta) = \alpha f(\overline{x}) + \beta = \alpha\left(\max_{x\in M} f(x)\right)+\beta
\end{aligned}$$

c) $\min_{x\in M}(f(x)+g(x)) \geq \min_{x\in M} f(x) + \min_{x\in M} g(x)$

$\overline{x}$ globaler Minimalpunkt von f auf M

$\hat{x}$ globaler Minimalpunkt von g auf M

Und damit gilt:

$$\begin{aligned}
f(\overline{x}) &\leq f(x) \quad \forall x \in M \\
g(\hat{x}) &\leq g(x) \quad \forall x \in M
\end{aligned}$$

Angewandt auf die Summe heißt das:

$$f(\overline{x}) + g(\hat{x}) \leq f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$$

Da diese Ungleichung für alle Elemente in M gilt, gilt sie auch für das Minimum:

$$\Rightarrow f(\overline{x}) + g(\hat{x}) \leq \min_{x \in M} \left(f(x) + g(x)\right)$$

d) Zeigen Sie, dass in c) auch „>“ auftreten kann.

Beweis: Sei $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x+1)^2$, $M = \mathbb{R}$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(1) = 0 = g(-1) = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x)$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \left(f(x) + g(x)\right) = \min_{x \in \mathbb{R}} \left((x-1)^2 + (x+1)^2\right) = \min_{x \in \mathbb{R}} 2x^2 + 2 = 2$$

□

Aufgabe 3.2

Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon M \to Y$ mit $Y \subseteq \mathbb{R}$

a) Zeigen Sie für eine monoton wachsende Funktion $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$ die Aussage

$$\min_{x \in M} \psi\left(f(x)\right) = \psi\left(\min_{x \in M} f(x)\right)$$

Beweis: Sei $\overline{x}$ globaler Minimalpunkt von f auf M, d.h.

$$\min_{x \in M} f(x) = f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in M$$

$$\Rightarrow \psi(f(\overline{x})) \leq \psi(f(x)) \quad \forall x \in M$$

$\Rightarrow \overline{x}$ globaler Minimalpunkt von $\psi \circ f$ auf M

$$\min_{x \in M} \psi(f(x)) = \psi(f(\overline{x})) = \psi(\min_{x \in M} f(x))$$

□

b) Zeigen Sie für eine *streng* monoton wachsende Funktion $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$ die Aussage, dass die Menge der globalen Minimalpunkte von F auf M gleich der Menge der globalen Minimalpunkte von $\psi \circ f$ auf M ist.

Beweis: $\psi^{-1} \circ \psi(y) \mapsto y$ streng monoton wachsend. $\overline{x}$ globaler Minimalpunkt von $\psi(f(x)) auf M$

$$\psi(f(\overline{x})) \leq \psi(f(x)) \forall x \in M$$
$$\iff \psi^{-1}\left(\psi(f(x))\right) \leq \psi^{-1}\left(\psi(f(x))\right) \quad \forall x \in M$$
$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in M$$

□

Aufgabe 3.3

Gegeben sei das unrestringierte Optimierungsproblem

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} \exp\left(\max\left\{x_1 + 7, |x_2 - 4|, -x_1 - x_2\right\}\right)$$

Geben Sie eine äquivalente glatte Umformulierung P_{glatt} von P an (Hinweis: Nutzen Sie die verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung aus Übung 1.3.9 im Skript).

Beweis:

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(f(x)) \text{ s.t. } G(g(x)) \leq 0 \quad x \in M$$
$$P_{epi}: \quad \min_{x, \alpha \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l} F(\alpha) \text{ s.t. } G(\beta) \leq 0, f(x) \leq \alpha g(x) \leq \beta, x \in X$$

Nun unser Problem ist damit:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = \max\left\{x_1 + 7, |x_2 - 4|, x_1 - x_2\right\},\ F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(y) = e^y$$

Damit lautet die Epigraph-Formulierung unseres Problems:

$$P_{epi}: \quad \min_{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^{\alpha} \text{ s.t. } \max\left\{x_1 + 7, |x_2 - 4|, -x_1 - x_2\right\} \leq \alpha$$

Damit das Maximum kleiner als α ist, muss jede Komponente bereits diese Bedingung erfüllen:

$$\iff \min_{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^{\alpha} \text{ s.t. } \begin{cases} x_1 + 7 \leq \alpha \\ |x_2 - 4| \leq \alpha \\ -x_1 - x_2 \leq \alpha \end{cases}$$

□

Aufgabe 3.4

a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $g\colon X \to \mathbb{R}$ konvex auf der konvexen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(x) \subseteq I$ sowie $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe und monoton wachsende Funktion. Beweisen Sie, dass die Komposition $f \circ g\colon X \to \mathbb{R}$ konvex ist!

   Beweis: Für $x, y \in X$, $\lambda \in [0,1]$:

   $$g\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

   f ist monoton wachsend auf $g(X) \subseteq I$

   $$\begin{aligned}(g\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right)) &\leq f\left(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)\right) \\ &\leq \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y))\end{aligned}$$

   $$\Rightarrow f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

   $\square$