Globale Optimierung

Übung

Prof. Dr. Oliver Stein

Sommersemester 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe 1.1

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| \cdot V \to [0,\infty)$ heißt Norm, wenn für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Definitheit: $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) Absolute Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie dass für jede Norm in Bedingung 1) auch die Rückrichtung gilt

   Beweis: Zu zeigen: $\|0\| = 0$, wobei zu beachten ist, dass die erste 0 ein Element im Vektorraum V darstellt und die zweite einen Skalar im zugrunde liegendem Raum.

   Es gilt für alle $x \in V$:
$$\|0\| = \|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0$$

□

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind:

   (i) $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$

   Beweis:

   - Nicht-Negativität: $\sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\geq 0} \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$
   - Definitheit: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \xRightarrow{|\cdot|\geq 0} |x_i| = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$
$$\xRightarrow{Definitheit} x_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$
   - Absolute Homogenität: $\|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^n |\alpha||x_i|$
$$= |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha|\|x\|_1$$

- Dreieckunsgleichung: $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i| + \leq \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$\square$

(ii) $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

Beweis:

- Nicht-Negativität: Wir definieren hierzu:

$$\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)^n,\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1^2,\dots,x_n^2)\\
&g\colon [0,\infty)^n \mapsto [0,\infty),\ y \mapsto \sum_{i=1}^n y_i\\
&h\colon [0,\infty) \mapsto [0,\infty),\ z \mapsto \sqrt{z}
\end{aligned}$$

Somit ist: $\|\cdot\|_2 = (h \circ g \circ f) : \mathbb{R}^n \to [0\infty)$

- Definitheit: $0 = \|x\|_2 \iff \|x\|_2^2 = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, wobei $x_i^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x_i = 0\ \forall i \in \{1,\dots,n\} \iff x = 0$$

- Absolute Homogenität: Analog zu $\|\cdot\|_1$.
- Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_2^2 = (x+y)^T (x+y) = x^T x x^T y + y^T x + y^T y$

$$\begin{aligned}
&= \|x\|_2^2 + 2x^T y + \|y\|_2^2\\
&\leq \|x\|_2^2 + 2|x^T y| + \|y\|_2^2\\
&\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2\\
&= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2
\end{aligned}$$

$\square$

(iii) $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max_{i=1}^n |x_i|$

Beweis:

- Nicht-Nevativität: Analog zu $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_2$

- Definitheit: $0 = \|x\|_\infty \iff \max_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff |x_i| = 0 \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$

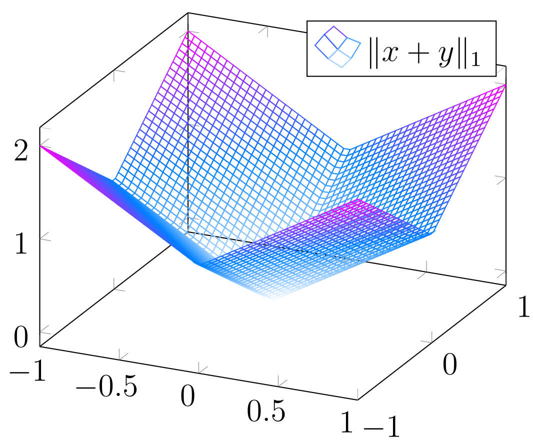
$$\iff x_i = 0 \ \forall i \in \{1,\dots,n\} \iff x = 0.$$

- Absolute Homogenität: Analog zu $\|\cdot\|_1$ oder $\|\cdot\|_2$
- Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_\infty = \max_{i=1}^n (|x_i + y_i|) = \max_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)$

$$\le \max_{i=1,\dots,n} \left(\max_{j=1}^n |x_j| + \max_{k=1}^n |y_k| \right) \le \max_{j=1}^n |x_j| + \max_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\square$

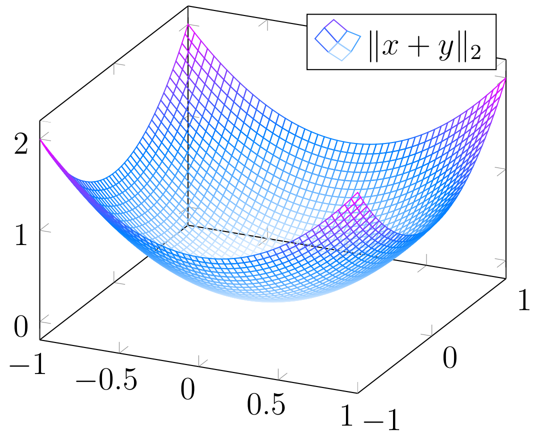
Aufgabe 1.2

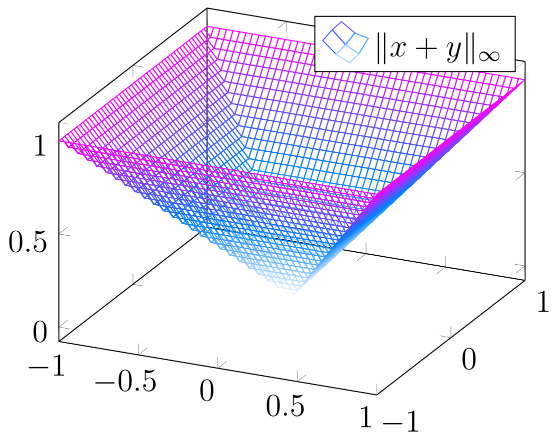


Aufgabe 1.3

Gegeben seien eine Menge von zulässigen punkten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Zielfunktion $f\colon M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Die globalen Maximalpunkte von f auf M sind genau die globalen Minimalpunkte von $-f$ auf M.





Beweis: Es gilt: x^* ist globaler Maximalpunkt von f auf M:

$$\begin{aligned}
&\iff f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in M \\
&\iff -f(x^*) \leq -f(x) \quad \forall x \in M \\
&\iff x^* \text{ ist globaler Minimalpunkt von } -f \text{ auf } M
\end{aligned}$$

□

b) Sofern f globale Maximalpunkte besitzt, gilt für den globalen Maximalwert

$$\max_{x \in M} f(x) = -\min_{x \in M} \left(-f(x)\right).$$

Beweis: todo □

Aufgabe 2.1

a) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $M \coloneqq \{x \in R^n | (x) \leq 0\}$. Zeigen Sie, dass M abgeschlossen ist.

Beweis: $M = \{x \in R^n | g(x) \leq 0\}$, sei $(x_n)_n \subseteq M$, $\lim x_n = x^*$. Zu zeigen ist $x^* \in M$ bzw. $g(x^*) \leq 0$. Wir nutzen hierfür die Stetigkeit von g aus, denn damit ist:

$$g(x^*) = g(\lim x_n) = \lim \underbrace{g(x_n)}_{\leq 0} \leq 0$$

$\square$

b) Zeigen Sie, dass die Menge M aus Aufgabenteil a) nicht beschränkt sein muss.

Beweis: Als Gegenbeispiel sei $g(x) = -x^2$. Damit ist $M = \mathbb{R}$, was nicht beschränkt ist. $\square$

c) Es seien I eine beliebige Indexmenge, $n \in \mathbb{N}$, $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I$, stetige Abbildungen und $M_i \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq 0\}$. Zeigen Sie, dass

$$M \coloneqq \bigcap_{i \in I} M_i$$

abgeschlossen ist.

Beweis: Sei $(x_n)_n \subseteq M$ mit $\lim x_n = x{*}^*$. ZU zeigen ist $x^* \in M$. Da

$$(x_n)_n \subseteq M = \bigcap M_i$$

folgt $(x_n)_n \subseteq M_i$ für alle $i \in I$. Da M_i für alle $i \in I$ abgeschlossen ist, folgt somit:

$$x^* \in M_i \ \forall i \in I \iff x^* \in \bigcap_{i \in I} M_i \iff x^* \in M$$

$\square$

Aufgabe 2.2

Zeigen oder widerlegen Sie die Koerzivität der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$

a) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2$,

Beweis: Sei $(x_n)_n = (0, \nu)$. Damit ist $\|x_\nu\| = \nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \infty$, allerdings

$$f(x_n) = -\nu \to -\infty$$

für $\nu \to \infty$. Ein anderes Beispiel wäre $(y_n)_n = (n, n^3)$, denn damit ist $\|y_n\| \to \infty$ und $f(y_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

b) $f(x_1, x_2) = (x_1^4 + x_2^4)\, e^{x_1^2 + x_2^2}$

Beweis: Wir können die Funktion nach unten hin abschätzen:

$$f(x) = \left(x_1^4 + x_2^4\right) \underbrace{e^{x_1^2+x_2^2}}_{\geq 1} \geq \left(x_1^4 + x_2^4\right) = \|x\|_4^4$$

Damit ist für $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_4 \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_4^4 \to \infty$$

□

bzw. der folgenden Funktion auf $\mathbb{R}^n$

c) $f(x) = x^T A x$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit aber *nicht notwendigerweise symmetrisch.*

Beweis: Es ist $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ und damit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle \\ &= \frac{1}{2}x^T A x + \frac{1}{2}x^T A^T x \\ &= x^T \underbrace{\left(\frac{A + A^T}{2}\right)}_{=:\tilde{A}} x \end{aligned}$$

Da aber $\tilde{A}$ symmetrisch ist per Konstruktion, so folgt mit dem Hinweis die Behauptung da:

$$f(x) = x^T \tilde{A} x = \|x\|_{\tilde{A}}^2$$

$\square$

Hinweis: Eine positiv definite *und symmetrische Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ induziert mit $\langle xy \rangle_A := x^T A y$ ein Skalarprodukt, welches wiederum durch $\|x\|_A := \sqrt{\langle x, x \rangle_A}$ eine Norm induziert.

Aufgabe 2.3

Sei $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$p(x) = -\frac{1 + 4x_1^2}{1 + 2x_1^2} + 2x_2^2$$

Bestimmen Sie das Infimum von p auf der Menge $D = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 1, x_2 > 0\}$ und zeigen Sie, dass das Infimum nicht als Minimalwert angenommen wird.

Beweis: Zu zeigen: $\forall x \in D : p(x) \geq -2$, $\inf_{x \in D} f(x) = -2$, $\nexists x \in D : f(x) = -2$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1 + 4x_1^2}{1 + 2x_1^2} + 2x_2^2 \\ &= -\frac{2 + 4x_1^2 - 1}{1 + 2x_1^2} + 2x_2^2 \\ &= -\frac{2(1 + 2x_1^2) - 1}{1 + 2x_1^2} + 2x_2^2 \\ &= -2 + \underbrace{\frac{1}{1 + 2x_1^2}}_{\geq 0} + \underbrace{2x_2^2}_{>0} \geq -2 \end{aligned}$$

Wählen wir nun $(x_n)_n \subseteq M$ mit $x_n = \left(n, \frac{1}{n}\right)$

$$f(x_n) = -2\frac{1}{1 + 2n^2} + 2\frac{1}{n^2} \rightarrow$$

$\square$

Im folgenden sind die Themen:

- „Rechenregeln“ für Optimierungsprobleme
- Konvexität

Aufgabe 3.1

a) $\alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$, zu zeigen:

$$\min_{x \in M} (\alpha f(x) + \beta) = \alpha \left(\min_{x \in M} f(x) \right) + \beta$$

$\overline{x} \in M$ globaler Minimalpunkt von f auf M

$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in M$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\alpha \geq 0}{\iff} \alpha f(\overline{x}) \leq \alpha f(x) \quad x \in M \\
&\overset{\beta \in \mathbb{R}}{\iff} \alpha f(\overline{x}) + \beta \leq \alpha f(x) + \beta \quad \forall x \in M \\
&\iff \overline{x} \text{ ist globales Minimum von } f \text{ in } M \\
&\Rightarrow \min_{x \in M} (\alpha f(x) + \beta) = \alpha f(\overline{x}) + \beta = \alpha \left(\min_{x \in M} f(x) \right) + \beta
\end{aligned}$$

b) Zu zeigen: $\min_{x \in M} (\alpha f(x) + \beta) = \alpha (\max_{x \in M} f(x)) + \beta$
$\overline{x} \in M$ ist globaler Maximalpunkt von f auf M

$$\begin{aligned}
&\iff f(\overline{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in M \\
&\overset{\alpha < 0}{\iff} \alpha f(\overline{x}) \leq \alpha f(x) \quad \forall x \in M \\
&\iff \alpha f(\overline{x}) + \beta \leq \alpha f(x) + \beta \quad \forall x \in M \\
&\iff \overline{x} \text{ globaler Minimalpunkt } \alpha f(x) + \beta \text{ auf } M \\
&\Rightarrow \min_{x \in M} (\alpha f(x) + \beta) = \alpha f(\overline{x}) + \beta = \alpha \left(\max_{x \in M} f(x) \right) + \beta
\end{aligned}$$

c) $\min_{x \in M} (f(x) + g(x)) \geq \min_{x \in M} f(x) + \min_{x \in M} g(x)$

$\overline{x}$ globaler Minimalpunkt von f auf M

$\hat{x}$ globaler Minimalpunkt von g auf M

Und damit gilt:

$$\begin{aligned}
f(\overline{x}) &\leq f(x) \quad \forall x \in M \\
g(\hat{x}) &\leq g(x) \quad \forall x \in M
\end{aligned}$$

Angewandt auf die Summe heißt das:

$$f(\overline{x}) + g(\hat{x}) \leq f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$$

Da diese Ungleichung für alle Elemente in M gilt, gilt sie auch für das Minimum:

$$\Rightarrow f(\overline{x}) + g(\hat{x}) \leq \min_{x \in M} (f(x) + g(x))$$

d) Zeigen Sie, dass in c) auch „>“ auftreten kann.

Beweis: Sei $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x+1)^2$, $M = \mathbb{R}$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(1) = 0 = g(-1) = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x)$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (f(x) + g(x)) = \min_{x \in \mathbb{R}} \left((x-1)^2 + (x+1)^2\right) = \min_{x \in \mathbb{R}} 2x^2 + 2 = 2$$

□

Aufgabe 3.2

Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon M \to Y$ mit $Y \subseteq \mathbb{R}$

a) Zeigen Sie für eine monoton wachsende Funktion $\psi\colon Y \to \mathbb{R}$ die Aussage

$$\min_{x \in M} \psi(f(x)) = \psi\left(\min_{x \in M} f(x)\right)$$

Beweis: Sei $\overline{x}$ globaler Minimalpunkt von f auf M, d.h.

$$\min_{x \in M} f(x) = f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in M$$

$$\Rightarrow \psi(f(\overline{x})) \leq \psi(f(x)) \quad \forall x \in M$$

$\Rightarrow$ $\overline{x}$ globaler Minimalpunkt von $\psi \circ f$ auf M

$$\min_{x \in M} \psi(f(x)) = \psi(f(\overline{x})) = \psi(\min_{x \in M} f(x))$$

□

b) Zeigen Sie für eine *streng* monoton wachsende Funktion $\psi \colon Y \to \mathbb{R}$ die Aussage, dass die Menge der globalen Minimalpunkte von F auf M gleich der Menge der globalen Minimalpunkte von $\psi \circ f$ auf M ist.

Beweis: $\psi^{-1} \circ \psi(y) \mapsto y$ streng monoton wachsend. $\overline{x}$ globaler Minimalpunkt von $\psi(f(x)) auf M$

$$\psi(f(\overline{x})) \leq \psi(f(x)) \forall x \in M$$
$$\iff \psi^{-1}\left(\psi(f(x))\right) \leq \psi^{-1}\left(\psi(f(x))\right) \quad \forall x \in M$$
$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in M$$

$\square$

Aufgabe 3.3

Gegeben sei das unrestringierte Optimierungsproblem

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^2} \exp\left(\max\left\{x_1 + 7, |x_2 - 4|, -x_1 - x_2\right\}\right)$$

Geben Sie eine äquivalente glatte Umformulierung P_{glatt} von P an (Hinweis: Nutzen Sie die verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung aus Übung 1.3.9 im Skript).

Beweis:

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(f(x)) \text{ s.t. } G(g(x)) \leq 0 \quad x \in M$$
$$P_{epi}: \quad \min_{x, \alpha \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l} F(\alpha) \text{ s.t. } G(\beta) \leq 0, f(x) \leq \alpha g(x) \leq \beta, x \in X$$

Nun unser Problem ist damit:

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = \max\left\{x_1 + 7, |x_2 - 4|, x_1 - x_2\right\}, \ F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(y) = e^y$$

Damit lautet die Epigraph-Formulierung unseres Problems:

$$P_{epi}: \quad \min_{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^{\alpha} \text{ s.t. } \max\left\{x_1 + 7, |x_2 - 4|, -x_1 - x_2\right\} \leq \alpha$$

Damit das Maximum kleiner als α ist, muss jede Komponente bereits diese Bedingung erfüllen:

$$\iff \min_{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^{\alpha} \text{ s.t. } \begin{cases} x_1 + 7 \leq \alpha \\ |x_2 - 4| \leq \alpha \\ -x_1 - x_2 \leq \alpha \end{cases}$$

$\square$

Aufgabe 3.4

a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $g\colon X \to \mathbb{R}$ konvex auf der konvexen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(x) \subseteq I$ sowie $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe und monoton wachsende Funktion. Beweisen Sie, dass die Komposition $f \circ g\colon X \to \mathbb{R}$ konvex ist!

Beweis: Für $x, y \in X$, $\lambda \in [0,1]$:

$$g\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

f ist monoton wachsend auf $g(X) \subseteq I$

$$\begin{aligned}(g\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right)) &\leq f\left(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)\right) \\ &\leq \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y))\end{aligned}$$

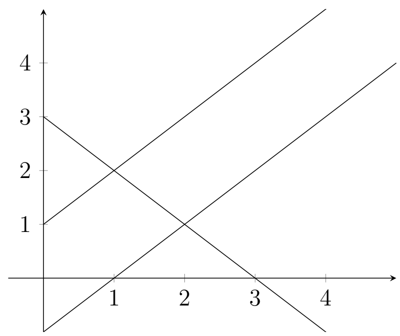
$$\Rightarrow f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

$\square$

Aufgabe 6.1

a) Skizzieren Sie M.

Beweis:



$$g_1(x) = -x_1 + x_2 - 1,\ g_2(x) = x_1 - x_2 - 1,\ h(x) = x_1 + x_2 - 3$$
$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) = 0,\ g_1(x) \leq 0,\ g_2(x) \leq 0\right\}$$

□

b) Erfüllt M die Slater-Bedinung? Was bedeut dies für die Menge der globalen Minimalpunkte?

Beweis: Es ist zu überprüfen, dass

$$\overline{x} \mid g_i(\overline{x}) < 0\ \forall i \in I, h(\overline{x}) = 0, \nabla h$$

linear unabhängig sind. Demnach:

$$\nabla h = (1,1)^T$$

ist trivialerweise uanabhängig; für $\overline{x} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ gilt $g_i(\overline{x}) = -1$ mit $i \in \{1,2\}$, $h(\overline{x}) = 0$.

$$\Rightarrow \text{ Menge der KKT-Punkte} = \text{Menge der globalen Minimalpunkte}\ .$$

Beachte: jeder KKT-Punkt ist globaler Minimalpunkt, gilt die Slater-Bedinungung, so gilt auch die Umkehrung. □

c) Bestimmen Sie $I_0(x) \subseteq \{1,2\}$ für alle $x \in M$.

Beweis:

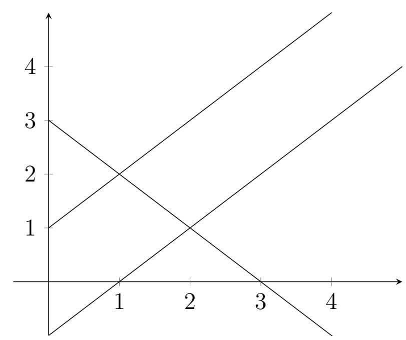
- Angenommen $I_0(\overline{x}) = \{1,2\}$, dann muss gelte dass $g_1(x) = 0 = g_2(x)$. Daraus folgt:
$$\iff -x_1 + x_2 - 1 = 0, x_1 - x_2 - 1 = 0$$
$$\implies -2 = 0,$$
was einen Widerspruch darstellt.
- Angenommen $I_0(\overline{x}) = \{1\}$.
$$\iff -x_1 + x_2 = 1, x_1 + x_2 = 3$$
$$\implies x = (1,2)^T$$
weiter gilt $g_2(x) = -2 < 0 \Rightarrow x \in M$ mit $I_0(\overline{x} = \{1\}$.
- Angenommen $I_0(\overline{x}) = \{2\}$.
$$\iff x_1 - x_2 = 1, x_1 + x_2 = 3$$
$$\implies x_= (2,1)^T$$
weiter gilt $g_1(x) = -2 < 0 \Rightarrow x \in M$ mit $I_0(x) = \{2\}$.
- Es gilt $I_0(x) = \emptyset$ für alle $x \in M \setminus \left\{(1,2)^T, (2,1)^T\right\}$

$\square$

d) Zeichnen Sie
$$K(x) \coloneqq \left\{ \sum_{i \in I_0(x)} \lambda_i \nabla g_i(x) + \mu \nabla h(x) \mid \lambda \geq 0, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$
und $-\nabla f(x)$ für $x \in \left\{(1,2)^T, (2,1)^T\right\}$ in Ihre Skizze von M. Ist einer der x KKT-Punkt? Begründen Sie.

Beweis: Es ist

$$\nabla f(x) = (2x_1, 8x_2)^T,\ \nabla g_1(x) = (-1,1)^T,\ \nabla g_2(x) = (1,-1)^T,\ \nabla h(x) = (1,1)^T$$



Zeichnung im Block

Es ist weiter

$$\Rightarrow -\nabla f(x^1) = (-2,-16)^T,\ -\nabla f(x^2) = (-4,-8)$$

Da $-\nabla f(x^1)$ nicht in die Menge $\{x^1 + K(x^1)\}$ ragt, so ist x^1 kein KKT Punkt und da $-\nabla f(x^2)$ in die Menge $\{x^2 + K(x^2)\}$ ragt, so ist x^2 ein KKT Punkt. □

e) Berechnen Sie alle KKT-Punkt von P.

Beweis: $\overline{x}$ ist KKT-Punkt mit Multiplikatoren $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$, wenn folgendes System erfüllt ist:

$$(2\overline{x}_1, 8\overline{x}_2)^T + \overline{\lambda}_1\,(-1,1)^T + \overline{\lambda}_2\,(1,-1)^T + \mu\,(1,1) = 0$$

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}_1\,(-\overline{x}_1 + \overline{x}_2 - 1) &= 0\\
\overline{\lambda}_2\,(\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - 1) &= 0\\
\overline{x}_1 + \overline{x}_2 - 3 &= 0\\
-\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - 1 &\le 0\\
\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - 1 &\le 0\\
\lambda_1, \lambda_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

- Für $I_0(\overline{x}) = \emptyset$:

$$(2x_1, 8x_2)^T + \mu\,(1,1)^T = 0$$

$$x_1 + x_2 - 3 = 0,\ -x_1 + x_2 - 1 < 0,\ x_1 - x_2 - 1 < 0$$

  $x = \left(\frac{12}{5}, \frac{3}{5}\right)^T$ erfüllt (1)-(3), aber $g_2(x) = \frac{4}{5} \geq 0$

$$\Rightarrow \text{ es existiert kein KKT-Punkt für } I_0(x) = \emptyset$$

- Für $I_0(x) = \{1\}$ weiß man aus c) $x = (1,2)^T$, woraus aus der d) folgt, dass dies kein KKT-Punkt ist.
- Für $I_0(x) = \{2\}$ weiß man aus c) $x = (2,1)^T$, woraus mit der d) folgt, dass die ein KKT-Punkt ist; äquivalent kann man auch das folgende Gleichungssystem lösen:

$$(4,8)^T + \mu(1,1) + \lambda_2(1,-1)^T = 0, \lambda_2 \geq 0$$

  Beachte: hier gehört eigentlich noch $h(x) = 0$, $g_2(x)0$ und $g_1(x) < 0$ allerdings haben wir dies in der c) bereits genutzt, um den Punkt zu ermitteln.

$$\Rightarrow \lambda_2 = 2,\ \mu = -6 \Rightarrow \lambda_2 \geq 0$$

  $\Rightarrow x = (2,1)^T$ ist KKT-Punkt und nach c) ist dies der einzige Punkt dessen Aktive-Indexmenge $I_0(x) = \{2\}$ und damit ist x einziger KKT-Punkt

$$\Rightarrow x \text{ ist einziger globaler Minimalpunkt}$$

□

Aufgabe 6.2

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P: \quad \min_{x\in\mathbb{R}^2} c^T x \text{ s.t.} g(x) \leq 0, Ax \leq b$$

mit $c = (-1,-1)$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, $A(-1, 0, , 0, -1)$, $b = (0, 0)$.

a) Prüfen Sie , ob die Voraussetzungen des Schnittebenenverfahrens von Kelley erfüllt sind.

Beweis: Es ist

$$D^2g(x) = (2, 0, , 0, 2) >, 0$$

alle anderen in P auftretenden Funktionen linear

$$\Rightarrow P \text{ ist ein konvexes Optimierungsproblem}$$

.... siehe Musterlösun $\square$

b)