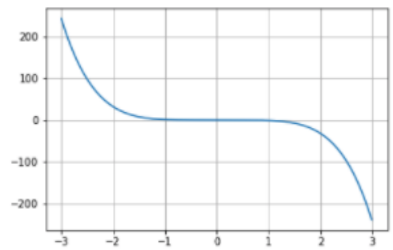
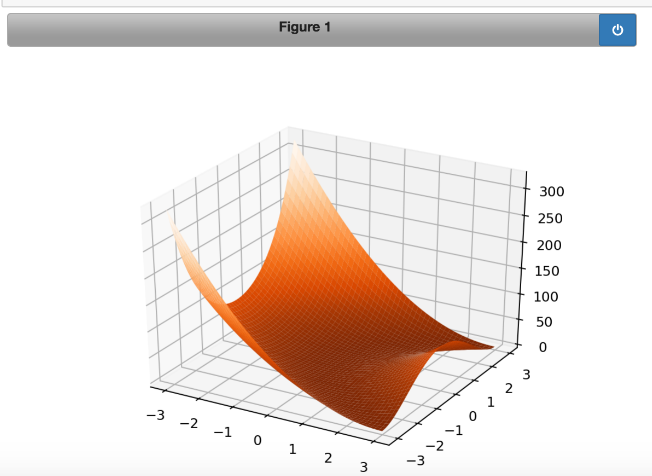
## Aufgabe S.1

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f_1(x):
    result = - x**5

    return result

d = 3.0 # radius within which the function will be plotted
x = np.arange(-d, d, 0.01)
y = f_1(x)

plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.grid()
plt.show()
```




In [2]:
```
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from matplotlib import cm
%matplotlib notebook

def f_2(x):
    result = 9* x[0]**2  - 6 * x[0] * x[1]**2 + x[1]**4

    return result

d = 3.0 # radius within which the function will be plotted
X = np.arange(-d, d, 0.01)
Y = np.arange(-d, d, 0.01)

X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z    = f_2((X,Y))

fig  = plt.figure()
ax   = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.Oranges_r)
```



**Aufgabe S.2**

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P: \quad \min f(x), \text{ s.t. } x \in M$$

mit

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$.

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$

c) $f(x) = \frac{x^TAx}{\|x-b\|_2+1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $M = \mathbb{R}^n$.

Begründen Sie jeweils: ist $f$ koerziv auf $M$? Ist $P$ lösbar?
**Hinweis**: Nutzen Sie für Aufgabenteil c) die Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^n$

*Nach Vorlesung (Definition 1.2.37) gilt:*
*Gegeben seien eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$. Falls für alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_{\nu\to\infty} \|x^\nu\| \to \infty$ und alle konvergenten Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_\nu x^\nu \notin M$ die Bedingung*

$$\lim_{\nu\to\infty} f(x^\nu) = +\infty$$

*gilt, dann heißt $f$ koerziv auf $M$.*

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$:

*Proof:* Beachte $M \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt $\overline{M} = (-\infty, 1]$, d.h. $\partial M = \{1\}$. Für die Koerzivität sind demnach alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ zu betrachten für die entweder

$$x^\nu \longrightarrow \infty \quad \text{oder} \quad x^\nu \longrightarrow 1$$

gilt. Sei nun $(x^\nu)$ eine Folge für die gilt $x^\nu \to 1$. Für alle $\epsilon > 0$ existiert demnach ein $m$, sodass:

$$\|x^{\nu_m} - 1\| < \epsilon, \quad \forall \nu_m > m.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{\nu} f(x^\nu) = \lim_{\nu\to\infty}\left(-\left(x^\nu\right)^5\right) &= -\lim_{\nu}\left(\left(x^\nu - 1 + 1\right)^5\right)\\ &\leq \left|-\lim_{\nu\to\infty}\left(\left(\|x^\nu - 1\| + 1\right)^5\right)\right|\\ &< \lim_{\nu\to\infty}\left(\epsilon + 1\right)^5.\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung im Grenzwert für alle $\epsilon > 0$ gilt, ist $f$ nicht koerziv.

Die Funktion $f$ ist monoton fallend auf $M$ und streng monoton fallend auf $(0, 1)$, da

$$f'(x) = -5x^4 \leq 0$$

mit strikter Ungleichung für $x \neq 0$. Damit ist

$$\inf_{x\in M} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = -1.$$

Da das Infimum aber nicht in der Menge angenommen wird ($M$ offen, damit ist aufgrund strenger Monotonie $f(x) > -1$ für alle $x \in M$), ist das Problem nach Definition 1.2.3 nicht lösbar. □

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$:

*Proof:* Es gilt

$$f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4 = (3x_1 - x_2^2)^2.$$

Für jede Folge für die für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt dass $\sqrt{3x_1^\nu} = x_2^\nu$ folgt:

$$f(x^\nu) = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

z.B. $x^\nu = (\nu, \sqrt{3\nu})\ \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} f(x^\nu) = 0$. Da wir eine Folge gefunden haben für die $\|x^\nu\| \to \infty$ aber $\lim_{\nu\to\infty} f(x^\nu) = 0$ gilt, ist $f$ nicht koerziv.

Es gilt $f(x) = (3x_1 - x_2^2)^2 \geq 0 = \inf_{x\in M} f(x)$, wobei

$$f(x) = 0 \iff (3x_1 - x_2^2)^2 = 0 \iff x_1 = \frac{x_2^2}{3}$$

Da es $(x_1, x_2) \in M$ gibt, die die obige Bedingung erfüllen (z.B. $x = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$), nimmt $f$ auf $M$ sein Infimum an, und das Problem ist nach Definition 1.2.3. lösbar. □

c) $f(x) = \frac{x^T A x}{\|x-b\|_2+1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $M = \mathbb{R}^n$:

*Proof:* Da $M = \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $(x^\nu)$ eine beliebige divergente Folge. Aufgrund der positiven Definitheit von $A$ ist $x^T A x > 0$ und damit ist

$$f(x) = \frac{x^T A x}{\|x-b\|_2+1} > 0. \tag{$*$}$$

In der Übung wurde die Norm

$$\|x\|_{\tilde{A}} = \sqrt{\langle x, x\rangle_{\tilde{A}}} = \sqrt{x^T \tilde{A} x}$$

eingeführte, mit einer positiv definite, symmetrische Matrix $\tilde{A}$. Sei

$$B := \frac{A^T + A}{2},$$

dann ist $B$ eine positiv definite, symmetrische Matrix und es gilt nach Übung

$$x^T A x = x^T B x.$$

Damit folgt:

$$|f(x^\nu)| = \left| \frac{(x^\nu)^T A x^\nu}{\|x^\nu - b\|_2 + 1} \right| = \frac{\|x^\nu\|_B^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1}.$$

Aufgrund der Divergenz der Folge $(x^\nu)$ gilt für $\nu$ groß genug unter Verwendung der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x^\nu)| = \frac{\|x^\nu\|_B^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1} &\geq \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2\|x^\nu - b\|_2} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2\left(\|x^\nu\|_2 + \|b\|_2\right)} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2\left(\|x^\nu\|_2 + \|x^\nu\|_2\right)} \end{aligned}$$

Durch die Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^n$ existiert nun eine Konstante $c$ so, dass

$$|f(x^\nu)| \geq \frac{c}{2} \cdot \frac{\|x^\nu\|_B^2}{2\left(\|x^\nu\|_B + \|x^\nu\|_B\right)} = \frac{c}{4} \cdot \frac{\|x^\nu\|_B^2}{\|x^\nu\|_B} = \frac{c}{4} \cdot \|x^\nu\|_B \longrightarrow \infty, \tag{$**$}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Äquivalenz der Normen verwendet haben, da somit $x^\nu$ in allen Normen divergiert. $(*)$ zusammen mit $(**)$ liefert für alle divergenten Folgen $(x^\nu)$, dass

$$f(x^\nu) \longrightarrow \infty,$$

d.h. $f$ ist koerziv.

Da $M$ nicht-leer und abgeschlossen, und $f$ stetig und koerziv ist, ist das Problem nach Korollar 1.2.30 lösbar. $\square$

**Aufgabe S.3**

Gegeben sei das unrestringierte Optimierungsproblem

$$P: \quad \min_{x\in\mathbb{R}^2} \exp\Big(-\min\Big\{-x_1-3,-|x_2-4|,x_1+x_2-20\Big\}\Big).$$

a) Geben Sie die verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung $P_{epi}$ von $P$ an (siehe Übung 1.3.9. im Skript). Begründen Sie, welche Funktionen $f$, $g$, $F$ und $G$ Sie für die Umformulierung verwenden.

*Proof:* Da es sich um ein unrestringiertes Problem handelt, ist $X = \mathbb{R}^2$, $G \equiv 0, g \equiv 0$. Definiere

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x, \\ &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto -\min\Big\{-x_1-3,-|x_2-4|,x_1+x_2-20\Big\}. \end{aligned}$$

Damit ist das unrestringierte Optimierungsproblem äquivalent zu

$$P: \quad \min_{x\in\mathbb{R}^2} F(f(x)) \text{ s.t. } G(g(x)) \le 0, x \in X$$

Nach Übung 1.3.9 (Verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung) ist somit folgende Epigraph-Umformulierung äquivalent zu $P$:

$$P_{epi}: \min_{(x,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(\alpha) \text{ s.t. } G(\beta) \le 0, f(x) \le \alpha, g(x) \le \beta, x \in X$$

$$\iff \min_{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}} e^\alpha \text{ s.t. } -\min\Big\{-x_1-3,-|x_2-4|,x_1+x_2-20\Big\} \le \alpha,\ x \in X$$

Wobei wir im letzten Schritt $\beta$ aufgrund der trivialen Bedingung $G(\beta) \equiv 0 \overset{!}{=} 0$ zur Vereinfachung fallen gelassen haben. □

b) Formulieren Sie, aufbauend auf Aufgabenteil a), ein lineares Optimierungsproblem $P_{lin}$, welches die selben Optimalpunkte wie $P_{epi}$ besitzt.

*Proof:* Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -\min\Big\{-x_1-3, -|x_2-4|, x_1+x_2-20\Big\} \\ &= \max\Big\{x_1+3, |x_2-4|, -(x_1+x_2)+20\Big\}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $f(x) \leq \alpha$ aus der Epigraph-Formulierung bedeutet, dass jede Komponente des Maximums kleiner gleich $\alpha$ sein muss, d.h. das folgende Problem ist äquivalent zu $P_{epi}$:

$$\tilde{P}_{epi}: \min_{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}} e^{\alpha} \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1+3 \leq \alpha \\ x_2-4 \leq \alpha,\ x_2-4 \geq -\alpha \\ -(x_1+x_2)+20 \leq \alpha \end{cases}$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton ist, ist jedes Minimum der Identität auf dieser Menge gleich dem Minimum der Exponentialfunktion. Ein lineares Optimierungsproblem $P_{lin}$, welches die selben Optimalpunkte wie $P_{epi}$ besitzt, lautet somit

$$P_{lin}: \min_{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}} \alpha \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1+3 \leq \alpha \\ x_2-4 \leq \alpha,\ x_2-4 \geq -\alpha \\ -(x_1+x_2)+20 \leq \alpha \end{cases}$$

□

c) Zeigen Sie, mit Hilfe des verschärften Satz von Weierstraß, dass das Problem $P_{lin}$ lösbar ist.

*Proof:* Das Problem $P_{lin}$ ist auf der Menge

$$M \subseteq \Big\{(\alpha, x) = (\alpha, (x_1, x_2)) : \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2\Big\}$$

definiert, die die folgenden Nebenbedingungen hält:

$$\begin{cases} x_1+3 \leq \alpha \\ x_2-4 \leq \alpha,\ x_2-4 \geq -\alpha \\ -(x_1+x_2)+20 \leq \alpha \end{cases}$$

Die Funktion $f(\alpha) = \alpha$ ist als Identität stetig. Für den verschärften Satz von Weierstraß bleibt zu zeigen, dass für ein $\beta \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\operatorname{lev}_{\leq}^{\beta}(f, M) = \Big\{(\alpha, x) \in M | f(\alpha) = \alpha \leq \beta\Big\}$$

nicht-leer und kompakt ist. Für $\alpha < 0$ existiert kein $x_2$, sodass $x_2 - 4 \leq \alpha$ und $x_2 - 4 \geq -\alpha$. Für $\alpha = 0$, ist $x_2 = 4$ und damit $\nexists x_1$: $x_1 + 3 \leq 0$ und $-(x_1 + 4) + 20 \leq 0$ Für $\alpha > 0$ ist

$$x_2 \in [4 - \alpha, 4 + \alpha], \tag{$*$}$$

d.h. $x_2$ liegt in einer nicht-leeren, abgeschlossenen Menge. Aus den Restriktionen erhalten wir außerdem

$$x_1 \in [20 - x_2 - \alpha, \alpha - 3], \tag{$**$}$$

Diese Menge ist für $\alpha > \frac{19}{3}$ nicht leer und abgeschlossen, da für $x_2 = 4 + \alpha$:

$$20 - x_2 - \alpha < \alpha - 3 \iff 23 - (4 + \alpha) < 2\alpha \iff \alpha > \frac{19}{3}.$$

Somit liefert ein $\beta > \frac{19}{3}$, dass $f(\alpha) = \alpha \in \left[\frac{19}{3}, \beta\right]$ beschränkt ist. Das in Kombination mit ($*$) bzw. ($**$) liefert die Beschränktheit von $x_1, x_2$. Zusammengefasst ist für ein $\beta > \frac{19}{3}$ die Menge

$$\Big\{(\alpha, x) \in M | f(\alpha) = \alpha \leq \beta\Big\}$$

nicht-leer und kompakt und der verschärfte Satz von Weierstraß garantiert die Lösbarkeit des Problems. $\square$

d) Modellieren Sie das Problem in Matlab/ Jupyter Notebook und geben Sie den globalen Minimalpunkt von $P_{lin}$ aus.

In [3]:
```
from scipy.optimize import minimize
import numpy as np

def f(x):
    result = x[2]
    return result
def g_1(x):
    result= np.array(x[2]-x[0]-3)
    return result
def g_2(x):
    result = np.array(x[2]-x[1]+4)
    return result
def g_3(x):
    result = np.array(x[2]+x[1]-4)
    return result
def g_4(x):
    result = np.array(x[2]+(x[0]+x[1])-20)
    return result

cons = ({'type' : 'ineq',
         'fun': g_1
        },
        { 'type': 'ineq',
          'fun': g_2
        },
        {'type' : 'ineq',
         'fun': g_3
        },
        { 'type': 'ineq',
          'fun': g_4}
       )
x0=np.array([0,0,10])

res = minimize (f, x0, constraints=cons, options ={'disp': True})
res.x
```

```
Optimization terminated successfully.    (Exit mode 0)
            Current function value: 6.33333333333
            Iterations: 7
            Function evaluations: 35
            Gradient evaluations: 7
```

Out[3]:
```
array([  3.33333333,  10.33333333,   6.33333333])
```

e) Bestimmen Sie einen globalen Optimalpunkt und den Optimalwert von P.

*Proof:* Die Minimalpunkte von $P$ und $P_{lin}$ stimmen nach Konstruktion überein (siehe 3b), also folgt aus d) für die Optimalpunkte $x^* = (\frac{10}{3}, \frac{31}{3})$.
Einsetzten in das Ursprungsproblem ergibt:

$$f(x^*) = \exp(-\min\{-x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20\})$$

$$\iff \exp\left(-\min\left\{\frac{1}{3}, -\frac{19}{3}, -\frac{19}{3}\right\}\right) = \exp(\tfrac{19}{3}) = 563.0302 \qquad \square$$

**Aufgabe S.4**

Gegeben seien eine $(p,n)$-Matrix $A$, sowie Vektoren $b \in \mathbb{R}^p$ und $a \in \mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe geht es um die Projektion von $a$ auf die Menge

$$\hat{M} \coloneqq \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\Big\}.$$

Dieses Problem tritt in ähnlicher Form in der Gemischt-Ganzzahligen Optimierung im Rahmen eines Ansatzes zur heuristischen Bestimmung von Punkten in

$$M = \Big\{x \in \mathbb{Z}^m \colon Ax \leq b\Big\}$$

auf (Feasibility Pump, [1]). Wählt man für die Projektion die $\ell_1$-Norm, so lässt sich das Optimierungsproblem formulieren als

$$FP\colon \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| \text{ s.t. } Ax \leq b.$$

Bestimmen Sie ein äquivalentes lineares Optimierungsproblem $FP_{lin}$, indem Sie die verallgemeinerte Epigraph Umformulierung (vgl. Übung 1.3.9 im Skript) anwenden. Begründen Sie, welche Funktionen $f$, $g$, $F$ und $G$ Sie für die Umformulierung verwenden.

*Proof:* Wir definieren

$$\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x - a\\
&F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_1\\
&g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax - b\\
&G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \max\{x_1, \dots, x_n\}
\end{aligned}$$

Damit gilt für $X = \mathbb{R}^n$, dass das obiges Optimierungsproblem äquivalent dargestellt werden kann durch

$$\begin{aligned}
P: \quad &\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(f(x)) \text{ s.t. } G(g(x)) \leq 0, x \in X\\
\iff &\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x - a\|_1 \text{ s.t. } \max_i\{(Ax - b)_i\} \leq 0, x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

wobei wir ausnutzen, dass $Ax \leq b \iff Ax - b \leq 0 \iff \max_i\{(Ax-b)_i\} \leq 0$. Damit sind die Voraussetzungen der verallgemeinerten Epigraph-Formulierung gegeben und diese lautet:

$$P_{epi}: \min_{(x,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l} F(\alpha) \text{ s.t. } G(\beta) \leq 0,\ f(x) \leq \alpha,\ g(x) \leq \beta,\ x \in X$$

$$\iff \min_{(x,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} \beta_i \leq 0, \\ (x-a)_i \leq \alpha_i, & \forall i \in \{1,\dots,n\} \\ (Ax-b)_i \leq \beta_i, \end{cases}$$

was ein lineares Problem darstellt. □

**Aufgabe S.5**

Skizzieren Sie folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$und zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Konvexität von $M$.

*Definition 2.1.1.: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt konvex, falls folgendes gilt*

$$\forall x, y \in M, \lambda \in (0,1) : (1-\lambda)x + \lambda y \in M$$

*(d.h. die Verbindungsstrecke von je zwei beliebigen Punkten in $M$ gehört komplett zu $M$).*

a) $M\colon \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon\ (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 4\right\}$

*Proof:* Sei $f(x) \coloneqq (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 4$, dann ist

$$M = f^0_{\leq}.$$

Da $f$ als Polynom zweimal stetig differenzierbar ist, ist die Hesse-Matrix wohldefiniert:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

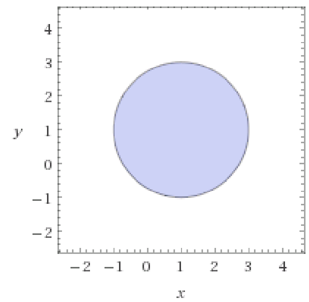
Die charakteristische Gleichung für $D^2 f(x)$ lautet somit:

$$\det(D^2 f(x) - \lambda I) = (2-\lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit ist $\lambda = 2$ zweifacher Eigenwert, womit $f$ konvex ist. Nach Übung 4.4 ist damit $M$ eine konvexe Menge. □

b) $M\colon \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon\ (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 4, (x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 \geq 1\right\}$

*Proof:* Behauptung: $M$ ist nicht konvex, da $x, y \in M$ existieren, deren konvexe Verbindungsstrecke nicht komplett in der Menge liegt.




Sei hierfür $x = (\frac{11}{4}, 1 - \frac{\sqrt{15}}{4})$ und $y = (\frac{11}{4}, 1 + \frac{\sqrt{15}}{4})$, dann gilt $x, y \in M$. Wähle konkret $\lambda = 0,5$ und definiere $z \coloneqq (1-\lambda)x + \lambda y$. Wäre $M$ konvex, so müsste folgen $z \in M$. Einsetzen der obigen Werte ergibt:

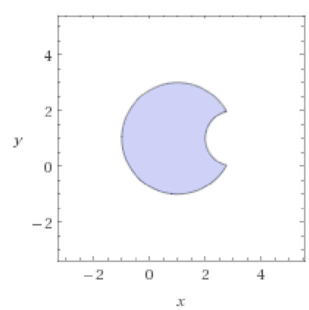
$$z_1 = 0,5 * \frac{11}{4} + (1 - 0.5)\frac{11}{4} = \frac{11}{4}$$
$$z_2 = (0,5 * (1 - \frac{\sqrt{15}}{4}) + (1 - 0.5)(1 + \frac{\sqrt{15}}{4}) = 1$$

Einsetzen der Werte in die Ungleichungen ergibt:

$$(z_1 - 1)^2 + (z_2 - 1)^2 = \frac{49}{16} \leq 4$$
$$(z_1 - 3)^2 + (z_2 - 1)^2 = \frac{1}{16} \leq 1$$

Aufgrund der 2. Ungleichung gilt $z \notin M$ und damit ist $M$ nicht konvex.

$\square$



c) $M\colon \left\{x \in \mathbb{R}^2\colon\ (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 4, (x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 \geq 16\right\}$

*Proof:* Behauptung: Die Menge $M$ enthält nur den Punkt $(-1,1)$ und ist damit trivialerweise konvex. Betrachte hierfür die Randbedingungen

$$(x_2-1)^2 \leq 4-(x_1-1)^2 \ \text{ und } \ (x_2-1)^2 \geq 16-(x_1-3)^2 . \tag{$*$}$$

Einsetzen ineinander liefert

$$4-(x_1-1)^2 \geq 16-(x_1-3)^2 \iff 8-4x_1 \geq 12 \iff x_1 \leq -1$$

Da allerdings

$$4 \geq (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \geq (x_1-1)^2,$$

die zwei Möglichkeiten $x_1 \leq 3$ und $-1 \geq x_1$ liefert, erfüllt nur $x_1 = -1$ die Bedingung. Aus $(*)$ folgt damit direkt

$$4-(x_1-1)^2 = 0 \geq (x_2-1)^2 \geq 0 \iff x_2 = 1$$

und somit die Behauptung.

□