Aufgabe S.2

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P: \quad \min f(x), \text{ s.t. } x \in M$$

mit

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$.

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$

c) $f(x) = \frac{x^T Ax}{\|x-b\|_2+1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $M = \mathbb{R}^n$.

Begründen Sie jeweils: ist f koerziv auf M? Ist P lösbar?
Hinweis: Nutzen Sie für Aufgabenteil c) die Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^n$

Nach Vorlesung (Definition 1.2.37) gilt:
Gegeben seien eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$. Falls für alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_{\nu\to\infty} \|x^\nu\| \to \infty$ und alle konvergenten Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_\nu x^\nu \notin M$ die Bedingung

$$\lim_{\nu\to\infty} f(x^\nu) = +\infty$$

gilt, dann heißt f koerziv auf M.

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$:

Proof: Behauptung: f ist nicht koerziv auf M.
Beweis: Sei $x^\nu = 1 - \frac{1}{\nu} \subseteq M, \nu \in \mathbb{N}$. Es gillt

$$\lim_{\nu\to\infty} x^\nu = \lim_{\nu\to\infty} 1 - \frac{1}{\nu} = 1 \notin M$$

Da $f(x^\nu) = -\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^5 \to -1 < \infty \Rightarrow [Def.1.2.37] f$ ist nicht koerziv.

Behauptung: P ist nicht lösbar auf M.
Beweis: $f'(x) = -5x^4 \leq 0 \Rightarrow f$ ist monoton fallend. Da $f'(x) < 0$ für $x > 0$:

$$f(x) \geq -1^5,$$

aber $1 \notin M \Rightarrow$ Behauptung. $\square$

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$

Proof: Behauptung: f ist nicht koerziv. Beweis: Betrachte $x^\nu = \left(\frac{1}{3}\nu^2, v\right)$. Damit gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} (|x^\nu|) = \left|\frac{1}{3}r^2\right| + |r|\infty \text{ und } \lim_{\nu\to\infty} f(x^\nu) = \lim \left(3\left(\frac{1}{3}\nu^2 - \nu^2\right)\right)^2 = 0$$

Betrachtet man die Lösbarkeit des Problems, so gilt dass $f(x) \geq 0$ und für $\overline{x} = (0,0)$:

$$f(\overline{x}) = 0$$

$\square$

c) Behauptung f ist koerziv auf $M = \mathbb{R}^n$.
Sei $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\|x^\nu\| \to \infty$. Aus Übung 2 ist bekannt, dass

$$x^TAx = \|x\|_{\tilde{A}}^2$$

mit $\tilde{A}$ aus Übung 2. Wegen der Äquivalenz der Normen im $\mathbb{R}^n$ existiert ein $c > 0$ sodass:

$$\|x\|_2 \leq c\|x\|_{\tilde{A}}$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^TAx}{\|x-b\|_2+1} = \frac{\|x\|_{\tilde{A}}^2}{\|x-b\|_2+1}$

$$\Rightarrow \frac{\|x\|_{\tilde{A}}^2}{\|x-b\|_2+1} \geq \frac{\|x\|_{\tilde{A}}^2}{c\|x\|_{\tilde{A}} + \|b\|_2 + 1}$$

daher gilt insbesondere

$$f(x^\nu) = \frac{\|x^\nu\|_{\tilde{A}^2}}{c\|x^\nu\|_{\tilde{A}} + \|b\|_2 + 1} \to \infty$$

für $\nu \to \infty$. Da $M = \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, ist f nach Definition 1.2.23 koerziv. Da außerdem M nicht leer und abgeschlossen und f koerziv und stetig:

$$\Rightarrow P \text{ lösbar nach 1.2.30}$$

Aufgabe S.2

beginenumerate

Es ist

$$P_{epi}: \quad \min_{x,\alpha)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}} F(\alpha) \text{ s.t. } f(x) \leq \alpha$$

Definiere $F(\alpha) \coloneqq e^{\alpha}$, $f(x) = -\min\Big\{ -x-1-3, -|x_2-4|\,, x_1+x_2-20\Big\}$. Damit ist

$$P_{epi}: \quad \min_{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}} e^{\alpha} s.t. -\min\{-x_1-3, -|x_2-4|\,, x_1+x_2-20\} \leq \alpha$$

Übung 3.2.: $\min e^{\alpha}$ ist äquivalent zu $\min \alpha$

$$-\min\{\dots\} \leq \alpha \iff \min\{\dots\} \geq -\alpha$$

Aufspalten des Minimums liefert:

$$P_{lin} \min_{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}} \alpha \text{ s.t.}$$

$$-x_1-3 \geq -\alpha, -x_2+4 \geq -\alpha, x_2-4 \geq -\alpha, x_1+x_2-20 \geq -\alpha$$