

ToDo

- Aufgabe 2: Lösbarkeit bei allen 3 (a), b), c))
- Aufgabe 3: c) d) e)
- Aufgabe 4: Scheint mir nicht genügend zu sein! Ist das echt ein lineares Problem?
- Aufgabe 5: Konvexität zeigen

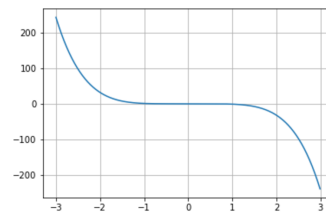
Aufgabe S.1

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f_1(x): # radius within which the function will be plotted
    result = -x**5
    return result

d = 3.0
x = np.arange(-d, d, 0.01)
y = f_1(x)

plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.grid()
plt.show()
```



```
In [2]: from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from matplotlib import cm
import matplotlib.pyplot as plt

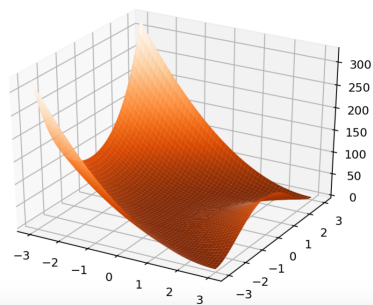
def f_2(x):
    result = 9 * x[0]**2 - 6 * x[0] * x[1]**2 + x[1]**4
    return result

d = 3.0 # radius within which the function will be plotted
X = np.arange(-d, d, 0.01)
Y = np.arange(-d, d, 0.01)

X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = f_2(X, Y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.Oranges_r)
```

Figure 1



Aufgabe S.2

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P : \quad \min f(x), \text{ s.t. } x \in M$$

mit

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$.

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$

c) $f(x) = \frac{x^T Ax}{\|x-b\|_2+1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $M = \mathbb{R}^n$.

Begründen Sie jeweils: ist f koerziv auf M ? Ist P lösbar?

Hinweis: Nutzen Sie für Aufgabenteil c) die Äquivalenz der Normen im \mathbb{R}^n

Proof: Nach Vorlesung (Definition 1.2.37) gilt:

Gegeben seien eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Falls für alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_\nu \|x^\nu\| \rightarrow \infty$ und alle konvergenten Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\lim_\nu x^\nu \notin M$ die Bedingung

$$\lim_\nu f(x^\nu) = +\infty$$

gilt, dann heißt f koerziv auf M .

a) $f(x) = -x^5$, $M = (-\infty, 1)$:

Beachte $M \subseteq \mathbb{R}$. Es gilt $\overline{M} = (-\infty, 1]$, d.h. $\partial M = \{1\}$. Für die Koerzitivität sind demnach alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ zu betrachten für die entweder

$$x^\nu \longrightarrow \infty \quad \text{oder} \quad x^\nu \longrightarrow 1$$

gilt. Sei nun (x^ν) eine Folge für die gilt $x^\nu \rightarrow 1$. Für alle $\epsilon > 0$ existiert demnach ein m , sodass:

$$\|x^{\nu_m} - 1\| < \epsilon, \quad \forall \nu_m > m.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{\nu} f(x^{\nu}) &= \lim_{\nu} \left(-(x^{\nu})^5 \right) = -\lim_{\nu} \left((x^{\nu} - 1 + 1)^5 \right) \\ &\leq -\lim_{\nu} \left(-(\|x^{\nu} - 1\| + 1)^5 \right) \\ &< \lim_{\nu} (\epsilon + 1)^5.\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung im Grenzwert für alle $\epsilon > 0$ gilt, ist f nicht koerziv.

b) $f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4$, $M = \mathbb{R}^2$:

Es gilt

$$f(x) = 9x_1^2 - 6x_1x_2^2 + x_2^4 = (3x_1 - x_2^2)^2.$$

Demnach ist für jede Folge für die gilt $\sqrt{3x_1^{\nu}} = x_2^{\nu}$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$:

$$f(x^{\nu}) = 0.$$

Da wir eine Menge von Folgen gefunden haben für die $\|x^{\nu}\| \rightarrow \infty$ gilt, allerdings gleichzeitig $\lim_{\nu} f(x^{\nu}) = f(x^{\tilde{\nu}}) = 0$, ist die Funktion nicht koerziv.

c) $f(x) = \frac{x^T A x}{\|x - b\|_2 + 1}$, mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $M = \mathbb{R}^n$:

Da $\mathbb{R}^{n \times n}$ unbeschränkt ist, betrachten wir lediglich eine beliebige divergente Folge (x^{ν}) . Aufgrund der positiven Definitheit von A ist $x^T A x > 0$ und damit ist

$$f(x) = \frac{x^T A x}{\|x - b\|_2 + 1} > 0.$$

In der Übung wurde die Norm

$$\|x\|_{\tilde{A}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\tilde{A}}} = \sqrt{x^T \tilde{A} x}$$

eingeführt, mit einer positiv definite, symmetrische Matrix \tilde{A} . Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die positiv definite Matrix A aus der Aufgabe auch symmetrisch ist, denn es gilt

$$x^T A x = x^T \left(\frac{A^T + A}{2} \right) x,$$

und $\frac{A^T+A}{2}$ ist symmetrisch (ansonsten ersetze A durch $\frac{A^T+A}{2}$). Damit folgt:

$$|f(x^\nu)| = \left| \frac{(x^\nu)^T A x^\nu}{\|x^\nu - b\|_2 + 1} \right| = \frac{\|x^\nu\|_A^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1}.$$

Aufgrund der Divergenz der Folge (x^ν) gilt für ν groß genug unter Verwendung der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x^\nu)| &= \frac{\|x^\nu\|_A^2}{\|x^\nu - b\|_2 + 1} \geq \frac{\|x^\nu\|_A^2}{2\|x^\nu - b\|_2} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_A^2}{2(\|x^\nu\|_2 + \|b\|_2)} \\ &\geq \frac{\|x^\nu\|_A^2}{2(\|x^\nu\|_2 + \|x^\nu\|_2)} \end{aligned}$$

Durch die Äquivalenz der Normen im \mathbb{R}^n existiert nun eine Konstante c so, dass

$$|f(x^\nu)| \geq \frac{c}{2} \cdot \frac{\|x^\nu\|_A^2}{2(\|x^\nu\|_A + \|x^\nu\|_A)} = \frac{c}{4} \cdot \frac{\|x^\nu\|_A^2}{\|x^\nu\|_A} = \frac{c}{4} \cdot \|x^\nu\|_A \rightarrow \infty,$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Äquivalenz der Normen verwendet haben, da somit x^ν in allen Normen divergiert. Das heißt, für alle divergenten Folgen (x^ν) , ist $f(x^\nu) > 0$ und

$$|f(x^\nu)| \rightarrow \infty,$$

d.h. f ist koerziv.

□

Aufgabe S.3

Gegeben sei das unrestringierte Optimierungsproblem

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^2} \exp(-\min -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20).$$

- a) Geben Sie die verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung P_{epi} von P an (siehe Übung 1.3.9. im Skript). Begründen Sie, welche Funktionen f , g , F und G Sie für die Umformulierung verwenden.

Proof: Da es sich um ein unrestringiertes Problem handelt, ist $X = \mathbb{R}^2$, $G \equiv 0$, $g \equiv 0$. Definiere

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}, \\ f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\}. \end{aligned}$$

Damit ist das unrestringierte Optimierungsproblem äquivalent zu

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^2} F(f(x)) \text{ s.t. } G(g(x)) \leq 0, x \in X$$

Nach Übung 1.3.9 (Verallgemeinerte Epigraph-Umformulierung) ist somit folgende Epigraph-Umformulierung äquivalent zu P :

$$\begin{aligned} P_{epi} : \min_{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} F(\alpha) \text{ s.t. } G(\beta) \leq 0, f(x) \leq \alpha, g(x) \leq \beta, x \in X \\ \iff \min_{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^{-\alpha} \text{ s.t. } \min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\} \leq \alpha, x \in X \end{aligned}$$

□

- b) Formulieren Sie, aufbauend auf Aufgabenteil a), ein lineares Optimierungsproblem P_{lin} , welches die selben Optimalpunkte wie P_{epi} besitzt.

Proof: Sei

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x, \\ \tilde{f} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\}. \end{aligned}$$

Dann ist $F(f(x)) = \tilde{F}(\tilde{f}(x))$ für alle $x \in X$. D.h. \tilde{F} , \tilde{f} beschreiben das gleiche Optimierungsproblem und es gilt

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= -\min \left\{ -x_1 - 3, -|x_2 - 4|, x_1 + x_2 - 20 \right\} \\ &= \max \left\{ x_1 + 3, |x_2 - 4|, -(x_1 + x_2) + 20 \right\}.\end{aligned}$$

Aus der Epigraph-Formulierung bedeutet die Bedingung $\tilde{f}(x) \leq \alpha$, dass jede Komponente des Maximums kleiner gleich α sein muss, d.h. das folgende Problem besitzt die selben Optimalpunkte wie P_{epi} :

$$\tilde{P}_{epi} : \min_{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} e^\alpha \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, -x_2 + 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton ist, ist jedes Minimum der Identität auf dieser Menge gleich dem Minimum der Exponentialfunktion. D.h. ein lineares Optimierungsproblem P_{lin} , welches die selben Optimalpunkte wie P_{epi} besitzt, lautet

$$\tilde{P}_{epi} : \min_{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \alpha \text{ s.t. } x \in X, \begin{cases} x_1 + 3 \leq \alpha \\ x_2 - 4 \leq \alpha, -x_2 + 4 \geq -\alpha \\ -(x_1 + x_2) + 20 \leq \alpha \end{cases}$$

□

- c) Zeigen Sie, mit Hilfe des verschärften Satz von Weierstraß, dass das Problem P_{lin} lösbar ist.
- d) Modellieren Sie das Problem in Matlab/ Jupyter Notebook und geben Sie den globalen Minimalpunkt von P_{lin} aus.
- e) Bestimmen Sie einen globalen Optimalpunkt und den Optimalwert von P.

Aufgabe S.4

Gegeben seien eine (p, n) -Matrix A , sowie Vektoren $b \in \mathbb{R}^p$ und $a \in \mathbb{R}^n$. In dieser Aufgabe geht es um die Projektion von a auf die Menge

$$\hat{M} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Dieses Problem tritt in ähnlicher Form in der Gemischt-Ganzzahligen Optimierung im Rahmen eines Ansatzes zur heuristischen Bestimmung von Punkten in

$$M = \{x \in \mathbb{Z}^m : Ax \leq b\}$$

auf (Feasibility Pump, [1]). Wählt man für die Projektion die ℓ_1 -Norm, so lässt sich das Optimierungsproblem formulieren als

$$FP: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |x_j - a_j| \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b.$$

Bestimmen Sie ein äquivalentes lineares Optimierungsproblem FP_{lin} , indem Sie die verallgemeinerte Epigraph Umformulierung (vgl. Übung 1.3.9 im Skript) anwenden. Begründen Sie, welche Funktionen f , g , F und G Sie für die Umformulierung verwenden.

Proof: Wir definieren

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x - a$$

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_1$$

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, x \mapsto Ax - b$$

$$G: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max\{x_1, \dots, x_p\}$$

Damit gilt für $X = \mathbb{R}^n$, dass das obiges Optimierungsproblem äquivalent dargestellt werden kann durch

$$P: \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(f(x)) \quad \text{s.t.} \quad G(g(x)) \leq 0, x \in X$$

$$\iff \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x - a\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \max_i \{(Ax - b)_i\} \leq 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei wir ausnutzen, dass $Ax \leq b \iff Ax - b \leq 0 \iff \max_i \{(Ax - b)_i\} \leq 0$. Damit sind die Voraussetzungen der verallgemeinerten Epigraph-Formulierung gegeben und die äquivalente Epigraph-Formulierung lautet:

$$P_{epi} : \min_{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l} F(\alpha) \quad \text{s.t.} \quad G(\beta) \leq 0, \quad f(x) \leq \alpha, \quad g(x) \leq \beta, \quad x \in X$$

$$\iff \min_{(x, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \quad \text{s.t.} \quad x \in X, \quad \begin{cases} \beta_i \leq 0, \\ (x - a)_i \leq \alpha_i, \\ (Ax - b)_i \leq \beta_i, \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

was ein lineares Problem darstellt. □

Aufgabe S.5

Skizzieren Sie folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$ und zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Konvexität von M .

Definition 2.1.1.: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt konvex, falls folgendes gilt

$$\forall x, y \in M, \lambda \in (0, 1) : (1 - \lambda)x + \lambda y \in M$$

(d.h. die Verbindungsstrecke von je zwei beliebigen Punkten in M gehört komplett zu M).

a) $M: \{x \in \mathbb{R}^2: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4\}$

Proof: Seien $x, y \in M$. Definiere für $\lambda \in (0, 1)$:

$$z := \lambda x + (1 - \lambda)y.$$

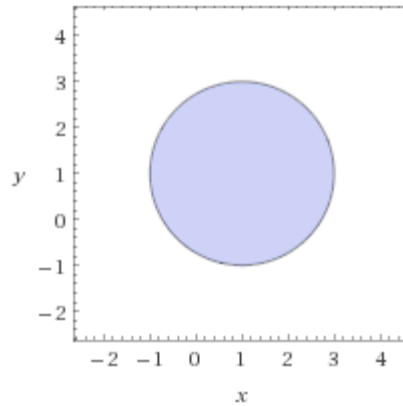
Somit gilt

$$\begin{aligned}(z_1 - 1)^2 &= (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 - 1)^2 = (\lambda(x_1 - 1) + (1 - \lambda)(y_1 - 1))^2 \\(z_2 - 1)^2 &= (\lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 - 1)^2 = (\lambda(x_2 - 1) + (1 - \lambda)(y_2 - 1))^2\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}(z_1 - 1)^2 + (z_2 - 1)^2 &= (\lambda(x_1 - 1) + (1 - \lambda)(y_1 - 1))^2 + (\lambda(x_2 - 1) + (1 - \lambda)(y_2 - 1))^2 \\&= \lambda^2 \left((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \right) + (1 - \lambda)^2 \left((y_1 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 \right) \\&\quad + 2\lambda(1 - \lambda)(y_1 - 1)(x_1 - 1) + 2\lambda(1 - \lambda)(y_2 - 1)(x_2 - 1) \\&\leq \lambda^2 4 + (1 - \lambda)^2 4 + 2\lambda(1 - \lambda) \left((y_1 - 1)(x_1 - 1) + (y_2 - 1)(x_2 - 1) \right) \\&\leq \lambda^2 4 + (1 - \lambda)^2 4 + 2\lambda(1 - \lambda) (x_1 y_1 - y_1 - x_1 - x_2 - y_2 + x_2 y_2 + 2) \\&\dots \text{Falscher Ansatz?}\end{aligned}$$

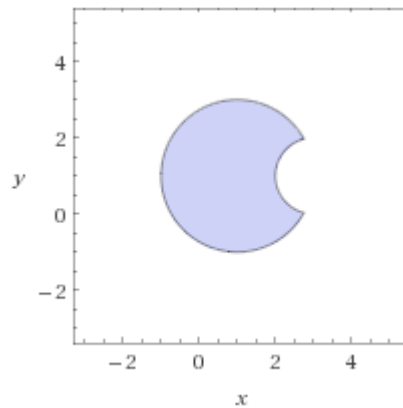
□



b) $M: \left\{ x \in \mathbb{R}^2: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1 \right\}$

Proof: Seien $x, y \in M$, dann gilt

□



c) $M: \left\{ x \in \mathbb{R}^2: (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 16 \right\}$

Proof: Behauptung: Die Menge M enthält nur den Punkt $(-1, 1)$ und ist damit trivialerweise konvex. Betrachte hierfür die Randbedingungen

$$(x_2 - 1)^2 \leq 4 - (x_1 - 1)^2 \text{ und } (x_2 - 1)^2 \geq 16 - (x_1 - 3)^2.$$

Einsetzen ineinander liefert

$$4 - (x_1 - 1)^2 \geq 16 - (x_1 - 3)^2 \iff 8 - 4x_1 \geq 12 \iff x_1 \leq -1$$

Da allerdings

$$4 \geq (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \geq (x_1 - 1)^2 \iff 3 \geq x_1$$

und $-1 \geq x_1$, folgt $x_1 = -1$. Daraus folgt direkt

$$0 \geq (x_2 - 1)^2 \geq 0 \iff x_2 = 1$$

und damit die Behauptung. □

