

Aufgabe S. 2.1 (2 + 2 + 3 + 3)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P : \min_{w \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2} \|w\|_2^2 \text{ s.t. } Aw \geq e$$

mit einer (d, m) -Matrix A und

$$e := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.$$

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass ein \tilde{w} existiert, für das gilt

$$A\tilde{w} \geq e.$$

a) Zeigen Sie, dass P lösbar ist.

Beweis: Nach Korollar 1.2.40 gilt:

Es sei M nicht-leer, und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und koerziv auf M .

Dann ist S nicht-leer und kompakt.

Nach Aufgabenstellung ist mit $f(w) = \frac{1}{2} \|w\|_2^2$ und $g(w) = e - Aw$, sodass

$$M = \{w \in \mathbb{R}^m : g(w) \leq 0\}$$

und damit:

$$P : \min_{w \in \mathbb{R}^m} f(w) \text{ s.t. } w \in M.$$

Nach Voraussetzung existiert ein $\tilde{w} \in M$, sodass M nicht-leer ist. Weiter ist die Funktion f stetig, da für $\|x - y\|_2 < \delta$ und $\epsilon := \frac{\delta^2}{2}$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt:

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2} \left| \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 \right| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 \leq \epsilon.$$

Behauptung: die Menge M ist abgeschlossen bzw. das Komplement

$$\mathbb{R}^m \setminus M = \{w \in \mathbb{R}^m : Aw < e\}.$$

ist offen. Betrachte hierfür $w \in \mathbb{R}^m \setminus M$, dann gilt mit dem Radius

$$\epsilon := \min_{i=1, \dots, d} \frac{1}{2} |(Aw - e)_i| > 0,$$

dass alle

$$x \in B_\epsilon(w) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|w - x\| < \epsilon\}$$

in M liegen, da für alle $i = 1, \dots, d$

$$|(e - Ax)_i| \geq \left| |(e - Aw)_i| - |(Aw - Ax)_i| \right| > \frac{2\epsilon - \epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2},$$

womit $Ax < e$ bzw. $x \in \mathbb{R}^m \setminus M$. Somit ist M abgeschlossen, woraus folgt, dass die Funktion f koerziv ist, denn nach Definition 1.2.37 müssen nur alle Folgen $(x^\nu) \subseteq M$ mit $\|x^\nu\| \rightarrow \infty$ betrachtet werden und für die gilt mit der Äquivalenz der Normen im \mathbb{R}^m :

$$f(x^\nu) = \frac{1}{2} \|x^\nu\|_2^2 \longrightarrow +\infty.$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Korollar 1.2.40 erfüllt, S ist somit nicht-leer und kompakt und somit P lösbar. \square

b) Zeigen Sie, dass P ein konvexes Optimierungsproblem ist.

Beweis: Nach Beispiel 2.1.9 gilt:

Falls f, g_i für $i \in I$ auf \mathbb{R}^m konvexe Funktionen sind, dann ist

$$P : \quad \min f(x) \text{ s.t. } g_i(x) \leq 0, \quad i \in I$$

ein konvexes Optimierungsproblem.

Beim gegebenen Problem ist $g_i(w) = -(Aw)_i + 1$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ eine lineare und somit konvexe Funktion. Da $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$ mit $f(w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1, \dots, m} w_i^2$ folgt $\nabla_w f(w) = w$ und

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \succ 0,$$

womit f insbesondere konvex und damit P ein konvexes Optimierungsproblem ist.

\square

c) Stellen Sie das Wolfe-Dual D zu P auf.

Beweis: Die Lagrange Funktion zum (nach b)) restringierten, konvexen Optimierungsproblem P lautet:

$$L(w, \lambda) = f(w) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(w) = \frac{1}{2} \|w\|_2^2 + \lambda^T (e - Aw)$$

mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)^T$ heißt. Das Dualproblem lässt sich dadurch folgendermaßen umformulieren:

$$D : \max_{w, \lambda} L(w, \lambda) \text{ s.t. } \nabla_w L(w, \lambda) = 0, \lambda \geq 0,$$

mit der zulässigen Menge

$$M_D = \left\{ (w, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d : \nabla_w L(w, \lambda) = 0, \lambda \geq 0 \right\}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \nabla_w L(w, \lambda) &= w - \nabla_w \left(\sum_{i=1, \dots, d} \lambda_i \sum_{k=1, \dots, m} A_{ik} w_k \right) \\ &= w - \nabla_w \left(\sum_{k=1, \dots, m} \sum_{i=1, \dots, d} \lambda_i A_{ik} w_k \right) \\ &= \begin{pmatrix} w_1 - \sum_{i=1, \dots, d} \lambda_i A_{i1} \\ \vdots \\ w_m - \sum_{i=1, \dots, d} \lambda_i A_{im} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

d) Formulieren Sie, ausgehend von Aufgabenteil b), ein duales Optimierungsproblem, das nur von der Dualvariabel λ abhängt.

Beweis: Aus der Forderung aus c):

$$\begin{pmatrix} w_1 - \sum_{i=1, \dots, d} \lambda_i A_{i1} \\ \vdots \\ w_m - \sum_{i=1, \dots, d} \lambda_i A_{im} \end{pmatrix} = 0$$

folgt $w_1 - \sum_{i=1,\dots,d} \lambda_i A_{i1} = 0, \dots, w_m - \sum_{i=1,\dots,d} \lambda_i A_{im} = 0$ und damit ist

$$w_1 = \sum_{i=1,\dots,d} \lambda_i A_{i1}, \dots, w_m = \sum_{i=1,\dots,d} \lambda_i A_{im}.$$

Somit reduziert sich das Dualproblem zu

$$\begin{aligned} P_{red} : \quad & \max_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1,\dots,m} \left(\sum_{j=1,\dots,d} \lambda_j A_{ji} \right)^2 + \sum_{i=1,\dots,d} \lambda_i \left(1 - \left(\sum_{k=1,\dots,m} A_{ik} \sum_{j=1,\dots,d} \lambda_j A_{jk} \right) \right) \\ & \Longleftrightarrow \max_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \|\lambda^T A\|_2^2 + \lambda^T (e - AA^T \lambda) \end{aligned}$$

□

Aufgabe S. 2.2 (3 + 4 + 5)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 \text{ s.t. } x_1 + x_2 \leq \alpha$$

für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, ohne P explizit zu lösen, dass P einen **eindeutigen** globalen Minimalpunkt besitzt.
- b) Lösen Sie P mit Hilfe der KKT-Bedingungen (*Hinweis: die Lösung ist abhängig von α*).
- c) Es sei $v(\alpha)$ die Optimalwertfunktion von P abhängig vom Parameter α . Schreiben Sie v explizit und zeigen Sie, dass v eine konvexe Funktion ist.

Aufgabe S. 2.3 (13 + 4)

- a) Implementieren Sie das Schnittebenenverfahren von Kelley (vgl. Algorithmus 2.1 im Skript), das eine Approximation eines globalen Minimalpunktes eines konvexen Optimierungsproblems

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ s.t. } g_i(x) \leq 0, \ i \in I, \ Ax \leq b$$

mit der nicht-leeren kompakten Mengen $M^0 := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ berechnet. Die in jeder Iteration auftretenden linearen Optimierungsprobleme sollen mit dem Solver Gurobi gelöst werden. Ihr Algorithmus erhält folgende Inputs:

- Das Gurobi-Modell zu Hilfsproblemen

$$LP^0 : \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ s.t. } x \in M^0.$$

- Die Restriktionsfunktionen $g_1(x), \dots, g_p(x)$.
- Die Gradienten (bzw. Ableitungen) der Restriktionsfunktionen.
- Eine Toleranz ϵ .

- b) Testen Sie Ihren Algorithmus an dem Optimierungsproblem

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^2} x_2 \text{ s.t.}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ e^{x_1} - x_2 \leq 0, \ x_1 - x_2 \leq 0, \ x_1 \in [-1, -\frac{1}{2}], \ x_2 \in [-1, 1]$$

für $\epsilon := 10^{-7}$.