

Aufgabe 1

Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet

$$d(X) := \sup_{x,y \in M} \|x - y\|_2$$

den Durchmesser von M . Zeigen Sie, dass der Durchmesser einer Box X mit ihrer Boxweite übereinstimmt.

Beweis: Sei $N := \{1, \dots, n\}$. Es gilt für die Boxweite w :

$$w(X) = \|\bar{x} - \underline{x}\|_2.$$

Da $Z := \{\bar{x}, \underline{x}\} \subseteq X$, gilt damit

$$d(X) = \sup_{x,y \in X} \|x - y\|_2 \geq \sup_{x,y \in Z} \|x - y\|_2 = w(X),$$

d.h. um die Behauptung zu zeigen bleibt $w(X) \geq d(X)$ offen. Angenommen dies gilt nicht, d.h.

$$w(X) < d(X). \tag{*}$$

Da die Box X aufgrund der Definition abgeschlossen ist, existieren $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$, sodass

$$d(X) = \sup_{x,y \in M} \|x - y\|_2 = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2$$

Damit folgt aus (*):

$$\|\bar{x} - \underline{x}\|_2 < \|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2,$$

was äquivalent ist zu

$$\sum_{i \in N} |\bar{x}_i - \underline{x}_i|^2 < \sum_{i \in N} |\tilde{x}_i - \tilde{y}_i|^2.$$

Damit diese Ungleichung erfüllt ist, muss mindestens für einen Summanden j

$$|\bar{x}_j - \underline{x}_j| < |\tilde{x}_j - \tilde{y}_j| \tag{**}$$

gelten. Sei nun $d_j := |\bar{x}_j - \underline{x}_j|$ die Breite und $m_j := \frac{1}{2}(\bar{x}_j + \underline{x}_j)$ die Mitte dieses eindimensionalen Intervalls $I_j = [\underline{x}_j, \bar{x}_j]$. Nach Konstruktion gilt $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$, was insbesondere

$\tilde{x}_j, \tilde{y}_j \in I_j$ impliziert. Nach (**) folgt mit der Abgeschlossenheit von I_j damit

$$\begin{aligned}
 d_j &= |\bar{x}_j - \underline{x}_j| \\
 &< |\tilde{x}_j - \tilde{y}_j| \\
 &\leq |\tilde{x}_j - m_j| + |m_j - \tilde{y}_j| \\
 &\leq \sup_{\bar{z} \in I_j} |\bar{z} - m_j| + \sup_{\underline{z} \in I_j} |m_j - \underline{z}| \\
 &= \frac{1}{2}d_j + \frac{1}{2}d_j,
 \end{aligned}$$

was einen Widerspruch darstellt, und somit gilt $w(X) = d(X)$.

□

Aufgabe 2

- a) Implementieren Sie eine Funktion *interval_hull*(*A*), die einer beschränkten Menge reeller Zahlen $A := [a_1, \dots, a_n]$ die Intervallhülle $[\inf A, \sup A]$ zuordnet.

Beweis:

□

```
import numpy as np

def interval_hull(A):
    result=np.array([min(A), max(A)] )
    return result
```

- b) Implementieren Sie die Intervall-Grundrechenarten (vgl. Skript S. 126 - 129) für die Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Intervalle $X, Y \in \mathbb{IR}$ in den Funktionen *interval_add*(*X*,*Y*), *interval_subtract*(*X*,*Y*) und *interval_multiply*(*X*,*Y*).

Beweis:

□

```
import numpy as np

def interval_add(x,y):
    result= np.array([x[0]+y[0],x[1]+y[1]])
    return result

def interval_subtract(x,y):
    result= np.array([x[0]-y[1],x[1]-y[0]])
    return result

def interval_multiply(x,y):
    A=np.array([x[0]*y[0],x[1]*y[1],x[0]*y[1],x[1]*y[0]])
    result= interval_hull(A)
    return result
```

- c) Implementieren Sie eine Funktion, die den Durchmesser einer eindimensionalen Box $X \in \mathbb{IR}$ berechnet.

Beweis:

□

```
import numpy as np

def boxweite(x):
    result = (x[1]-x[0])
    return result
```

- d) Implementieren Sie eine Funktion, die den Boxmittelpunkt einer eindimensionalen Box $X \in \mathbb{IR}$ berechnet.

Beweis:

□

```
import numpy as np

def mittelpunkt(x):
    result = ((x[0]+x[1])/2)
    return result
```

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x - x^2 = x - x \cdot x = x \cdot (1 - x)$ und die intervallwertigen Funktionen

$$F_1: \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}, F_1(X) = X - XX, \quad F_2: \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}, F_2(X) = X(1 - X)$$

a) Zeigen Sie, dass F_1 , als auch F_2 eine natürliche Intervallerweiterung von f ist.

Beweis: Zunächst gilt, dass $f(x)$ als Komposition von Grundrechenarten nach Definition 3.3.2 eine faktorisierte Funktion ist. Mit

$$F_1(X) = X - XX = X - X^2 = f(x)$$

gilt nach Definition 3.3.4, dass F_1 die natürliche Intervallerweiterung von f ist. Analog gilt mit

$$F_2(X) = X(1 - X) = X - XX = X - X^2 = f(X)$$

nach Definition 3.3.4, dass F_2 die natürliche Intervallerweiterung von f ist. □

b) Bestimmen Sie durch geschickte Fallunterscheidung

$$F_3: \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}, F_3(X) = \text{bild}(f, X)$$

für ein beliebiges Intervall $X \subseteq \mathbb{IR}$ explizit. Zeigen Sie, dass die von Ihnen definierte intervallwertige Funktion F_3 für ein beliebiges Intervall tatsächlich die Bildmenge $\text{bild}(f, X)$ liefert.

Beweis: Die Funktion f ist als Polynom in $C^1(\mathbb{R})$ und das Bild somit ein Intervall. Außerdem ist wegen

$$f'(x) = 1 - 2x$$

die Funktion f

- monoton steigend für $x < \frac{1}{2}$, und
- monoton fallend für $x > \frac{1}{2}$.

Damit ist für $X \subseteq (-\infty, \frac{1}{2})$ oder $X \subseteq (\frac{1}{2}, \infty)$ das Bild von f unter X , ein Intervall dessen Grenzen durch die Grenzen von X unter f gegeben ist. Somit ist

- für $\bar{x} < 1/2$ (d.h. $X \subseteq (-\infty, \frac{1}{2})$) $f(\underline{x}) < f(\bar{x})$, d.h.:

$$\text{bild}(f, X) = [f(\underline{x}), f(\bar{x})];$$

- für $\underline{x} > 1/2$ (d.h. $X \subseteq (\frac{1}{2}, \infty)$) $f(\bar{x}) < f(\underline{x})$, d.h.:

$$\text{bild}(f, X) = [f(\bar{x}), f(\underline{x})];$$

Ist hingegen $\frac{1}{2} \in X$, so folgt wegen

$$f''(x) = 2 < 0$$

und der Monotonie auf den Teilintervallen, dass $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ die Obergrenze der Bildmenge ist. Die Untergrenze ergibt sich aus der Vereinigung der Bildmenge des Intervalls links von $\frac{1}{2}$, auf dem f monoton steigend ist, und rechts von $\frac{1}{2}$, auf dem f monoton fallend ist. Nach Obigem folgt somit:

$$\text{bild}(f, X) = \left[\min \{f(\underline{x}), f(\bar{x})\}, f\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

□

c) Implementieren Sie die intervallwertigen Funktionen F_1 , F_2 und F_3 .

Beweis:

□

```
def f1(x):
    res1=interval_multiply(x,x)
    res2=interval_subtract(x,res1)
    return res2

def f2(x):
    res1=np.array([1-x[1], 1-x[0]])
    res2= interval_multiply(x,res1)
    return res2

def f3(x):
    if x[1]<1/2:
        result = np.array([x[0]-x[0]*x[0], x[1]-x[1]*x[1]])
    elif x[0]>1/2:
        result = np.array([x[1]-x[1]*x[1], x[0]-x[0]*x[0]])
    else:
        minimum= min([x[0]-x[0]*x[0], x[1]-x[1]*x[1]])
        result= np.array([minimum, 1/4])
    return result
```

- d) Berechnen Sie Boxweite und Boxmittelpunkt von $Y_i = F_i(X(\epsilon))$, $i = 1, 2, 3$, für das Intervall $X = [-10, -10 + \epsilon]$ für $\epsilon \in \{0.1, 0.2, \dots, 30\}$. Erstellen Sie zwei Plots, die Boxmittelpunkt und Boxweite der Funktionen über der Boxweite von $X(\epsilon)$ darstellen.

Beweis:

□

```
epsilon = np.arange(0.1,30.1,0.1)
X = epsilon-10

Y = np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range(0,len(epsilon)):
    Y[i]=np.array([-10,X[i]])

res_f1=np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range(0,len(epsilon)):
    res_f1[i]=f1(Y[i])

res_f2=np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range(0,len(epsilon)):
    res_f2[i]=f2(Y[i])

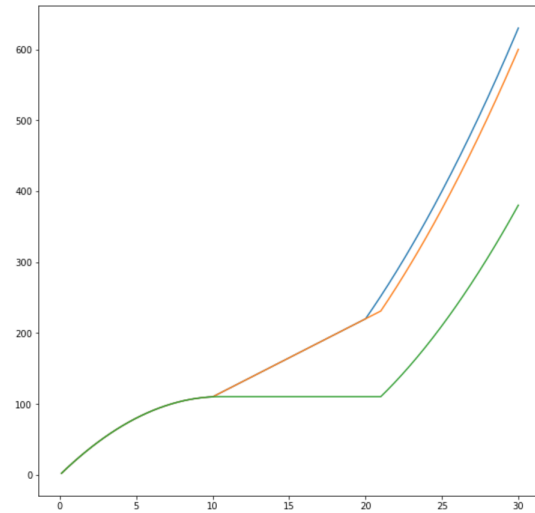
res_f3=np.zeros((len(epsilon),2),dtype=np.ndarray)
for i in range(0,len(epsilon)):
    res_f3[i]=f3(Y[i])

boxweite_f1=np.zeros(len(epsilon))
for i in range(0,len(epsilon)):
    boxweite_f1[i]=boxweite(res_f1[i])

boxweite_f2=np.zeros(len(epsilon))
for i in range(0,len(epsilon)):
    boxweite_f2[i]=boxweite(res_f2[i])

boxweite_f3=np.zeros(len(epsilon))
for i in range(0,len(epsilon)):
    boxweite_f3[i]=boxweite(res_f3[i])

import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(epsilon, boxweite_f1)
plt.plot(epsilon, boxweite_f2)
plt.plot(epsilon, boxweite_f3)
plt.show()
```



- e) Erklären Sie: Woraus resultiert das Verhalten von Boxweite und Boxmittelpunkt für $F_3(X(\epsilon))$? Untersuchen Sie hierzu genau das Verhalten von Unter- und Obergrenze von $F_3(X(\epsilon))$ für $\epsilon \in [0, 30]$. Welche der beiden Funktionen F_1 , F_2 approximiert $\text{bild}(f, X)$ besser? Warum?

Beweis: Verhalten der Boxweite:

- für $\epsilon < 10.5$: Untergrenze bleibt konstant bei $f(-10)$, Obergrenze steigt degressiv mit Funktionsgraph $f(-10 + \epsilon)$ bis $\text{Max}=1/4 \Rightarrow$ Boxweite zeichnet degressiven Verlauf
- für $10.5 \leq \epsilon \leq 21$ bleiben Untergrenze und Obergrenze von $F_3(X(\epsilon))$ konstant und damit auch die Boxweite

- für $\epsilon > 21$ Obergrenze konst. ($=1/4$) und Untergrenze sinkt mit Funktionsgraph und damit steigt die Boxweite weiter degressiv an bis $\epsilon = 30$

Verhalten des Boxmittelpunktes:

- für $\epsilon < 10.5$: Untergrenze bleibt konst. bei $f(-10)$, Obergrenze steigt degressiv mit Funktionsgraph $f(-10 + \epsilon)$ bis $\text{Max}=1/4 \Rightarrow$ Boxmittelpunkt zeichnet degressiv steigenden Verlauf
- für $10.5 \leq \epsilon \leq 21$ bleiben Untergrenze und Obergrenze von $F_3(X(\epsilon))$ konstant und damit auch der Boxmittelpunkt
- für $\epsilon > 21$ Obergrenze konst. ($=1/4$) und Untergrenze sinkt mit Funktionsgraph \Rightarrow der Boxmittelpunkt verschiebt sich wieder nach unten bis $\epsilon = 30$

$F_2(X)$ approximiert die Bildmenge $\text{bild}(f, X)$ am Besten, da sie sie im Sinne des Abhängigkeitseffektes am wenigsten verzerrt. Ihre Funktionsvorschrift $F_2(X) = X(1 - X)$ enthält offensichtlich nur 2 mal das Intervall X , $F_3(X) = X - XX$ dagegen 3 mal. \square