

# Höhere Mathematik I

G. Herzog, C. Schmoeger

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

# Inhaltsverzeichnis

1	Reelle Zahlen	2
2	Folgen und Konvergenz	14
3	Unendliche Reihen	35
4	Potenzreihen	49
5	q-adische Entwicklung	54
6	Grenzwerte bei Funktionen	58
7	Stetigkeit	64
8	Funktionenfolge und -reihen	74
9	Differentialrechnung	80
10	Das Riemann-Integral	96
11	Uneigentliche Integrale	112
12	Die komplexe Exponentialfunktion	117
13	Fourierreihen	124
14	Der Raum $\mathbb{R}^n$	132
	Stichwortverzeichnis	136

# Kapitel 1

## Reelle Zahlen

Grundmenge der Analysis ist die Menge  $\mathbb{R}$ , die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen  $\mathbb{R}$  als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von  $\mathbb{R}$  aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.

**Körperaxiome:** in  $\mathbb{R}$  seien zwei Verknüpfungen “+” und “ $\cdot$ ” gegeben, die jedem Paar  $a, b \in \mathbb{R}$  genau ein  $a + b \in \mathbb{R}$  und genau ein  $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$  zuordnen. Dabei soll gelten:

$$(A1) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$(A5) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(A2) \quad \exists 0 \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a \quad (\text{Null})$$

$$(A6) \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \text{ und } 1 \neq 0 \quad (\text{Eins})$$

$$(A3) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$$

$$(A7) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$$

$$(A4) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(A8) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(A9) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{Distributivgesetz})$$

**Schreibweisen:** für  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a - b := a + (-b)$  und für  $b \neq 0$ :  $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$ .

**Alle** bekannten Regeln der Grundrechnungsarten lassen sich aus (A1)–(A9) herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

**Beispiele:**

a) Beh.:  $\exists_1 0 \in \mathbb{R}$  mit  $\forall a \in \mathbb{R} \ a + 0 = a$

*Beweis:* Sei  $\tilde{0} \in \mathbb{R}$  mit  $\forall a \in \mathbb{R} \ a + \tilde{0} = a$ . Mit  $a = 0$  folgt:  $0 + \tilde{0} = 0$ .  
Mit  $a = \tilde{0}$  in (A2) folgt:  $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ . Dann  $0 = 0 + \tilde{0} \stackrel{(A4)}{=} \tilde{0} + 0 = \tilde{0} \quad \square$

b) Beh.:  $\forall a \in \mathbb{R} \ a \cdot 0 = 0$

*Beweis:* Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $b := a \cdot 0$ . Dann:  $b \stackrel{(A2)}{=} a(0 + 0) \stackrel{(A9)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b + b$ .  
 $0 \stackrel{(A3)}{=} b + (-b) = (b + b) + (-b) \stackrel{(A1)}{=} b + (b + (-b)) = b + 0 \stackrel{(A2)}{=} b \quad \square$

**Anordnungsaxiome:** in  $\mathbb{R}$  ist eine Relation “ $\leq$ ” gegeben.

Dabei sollen gelten:

(A10) für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $a \leq b$  oder  $b \leq a$

(A11) aus  $a \leq b$  und  $b \leq a$  folgt  $a = b$

(A12) aus  $a \leq b$  und  $b \leq c$  folgt  $a \leq c$

(A13) aus  $a \leq b$  folgt  $\forall c \in \mathbb{R} \ a + c \leq b + c$

(A14) aus  $a \leq b$  und  $0 \leq c$  folgt  $ac \leq bc$

**Schreibweisen:**  $b \geq a \iff a \leq b$ ;  $a < b \iff a \leq b$  und  $a \neq b$ ;  
 $b > 0 \iff a < b$

Aus (A1) – (A14) lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

**Beispiele** (ohne Beweis):

a) aus  $a < b$  und  $0 < c$  folgt  $ac < bc$

b) aus  $a \leq b$  und  $c \leq 0$  folgt  $ac \geq bc$

c) aus  $a \leq b$  und  $c \leq d$  folgt  $a + c \leq b + d$

**Intervalle:** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  (abgeschlossenes Intervall)

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  (offenes Intervall)

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  (halboffenes Intervall)

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  (halboffenes Intervall)

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ ,  $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

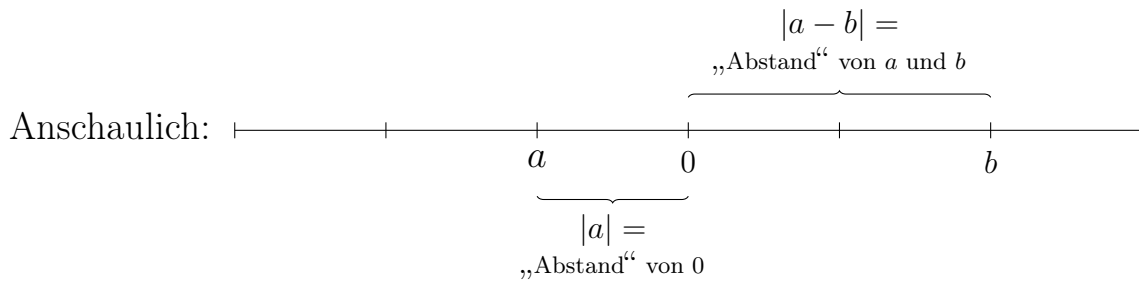
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ,  $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

## Der Betrag

Für  $a \in \mathbb{R}$  heißt  $|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$  der Betrag von  $a$ .

**Beispiele:**  $|1| = 1$ ,  $|-7| = -(-7) = 7$ .



Es ist  $|-a| = |a|$  und  $|a - b| = |b - a|$

**Regeln:**

- a)  $|a| \geq 0$
- b)  $|a| = 0 \iff a = 0$
- c)  $|ab| = |a||b|$
- d)  $\pm a \leq |a|$
- e)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)
- f)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$

*Beweis:*

a) - d) leichte Übung.

e) Fall 1:  $a + b \geq 0$ . Dann:  $|a + b| = a + b \stackrel{d)}{\leq} |a| + |b|$ .

Fall 2:  $a + b < 0$ . Dann:  $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \stackrel{d)}{\leq} |a| + |b|$ .

f)  $c := |a| - |b|$ ;  $|a| = |a - b + b| \stackrel{d)}{\leq} |a - b| + |b|$

$\Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a - b|$ . Analog:  $-c = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$

Also:  $\pm c \leq |a - b|$ .

□

**Definition:** Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ .

- a)  $M$  heißt **nach oben beschränkt**  $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall x \in M x \leq \gamma$   
In diesem Fall heißt  $\gamma$  eine **obere Schranke** (OS)
- b) Ist  $\gamma$  eine obere Schranke von  $M$  und gilt  $\gamma \leq \delta$  für jede weitere obere Schranke  $\delta$  von  $M$ , so heißt  $\gamma$  das **Supremum** von  $M$  (kleinste obere Schranke von  $M$ )
- c)  $M$  heißt **nach unten beschränkt**  $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall x \in M \gamma \leq x$   
In diesem Fall heißt  $\gamma$  eine **untere Schranke** (US)
- d) Ist  $\gamma$  eine untere Schranke von  $M$  und gilt  $\gamma \geq \delta$  für jede weitere untere Schranke  $\delta$  von  $M$ , so heißt  $\gamma$  das **Infimum** von  $M$  (größte untere Schranke von  $M$ )

**Bez.:** in dem Fall:  $\gamma = \sup M$  bzw.  $\gamma = \inf M$ .

Aus (A11) folgt: ist  $\sup M$  bzw.  $\inf M$  vorhanden, so ist  $\sup M$  bzw.  $\inf M$  eindeutig bestimmt.

Ist  $\sup M$  bzw.  $\inf M$  vorhanden und gilt  $\sup M \in M$  bzw.  $\inf M \in M$ , so heißt  $\sup M$  das Maximum bzw.  $\inf M$  das Minimum von  $M$  und wird mit  $\max M$  bzw.  $\min M$  bezeichnet.

**Beispiele:**

- a)  $M = (1, 2)$ .  $\sup M = 2 \notin M$ ,  $\inf M = 1 \notin M$ .  $M$  hat kein Maximum und kein Minimum.
- b)  $M = (1, 2]$ .  $\sup M = 2 \in M$ ,  $\max M = 2$
- c)  $M = (3, \infty)$ .  $M$  ist nicht nach oben beschränkt,  $3 = \inf M \notin M$ .

d)  $M = (-\infty, 0]$ .  $M$  ist nach unten unbeschränkt,  $0 = \sup M = \max M$ .

**Vollständigkeitsaxiom:**

(A15) Ist  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  und ist  $M$  nach oben beschränkt, so ist  $\sup M$  vorhanden.

**Satz 1.1:** Ist  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  und ist  $M$  nach unten beschränkt, so ist  $\inf M$  vorhanden.

*Beweis:* i. d. Übungen. □

**Definition:** Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ .  $M$  heißt beschränkt  $\iff M$  ist nach oben und nach unten beschränkt ( $\iff \exists c \geq 0 \forall x \in M |x| \leq c \iff \exists c \geq 0 \forall x \in M -c \leq x \leq c$ )

**Satz 1.2:** Es sei  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$

- a) Ist  $A$  beschränkt  $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$
- b) Ist  $A$  nach oben bzw. unten beschränkt  $\Rightarrow B$  ist nach oben beschränkt und  $\sup B \leq \sup A$  bzw. nach unten beschränkt und  $\inf B \geq \inf A$
- c)  $A$  sei nach oben beschränkt und  $\gamma$  eine obere Schranke von  $A$ . Dann:

$$\gamma = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x = x(\varepsilon) \in A : x > \gamma - \varepsilon$$

- d)  $A$  sei nach unten beschränkt und  $\gamma$  eine untere Schranke von  $A$ . Dann:

$$\gamma = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x = x(\varepsilon) \in A : x < \gamma + \varepsilon$$

*Beweis:*

- a)  $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$ . Dann  $\inf A \leq x, x \leq \sup A$  (A12)

$$\Rightarrow \inf A \leq \sup A$$



- b) Sei  $x \in B$ . Dann:  $x \in A$ , also  $x \leq \sup A$ .  $B$  ist also nach oben beschränkt und  $\sup A$  ist eine obere Schranke von  $B$

$$\Rightarrow \sup B \leq \sup A$$

Analog der Fall für  $A$  nach unten beschränkt.

- c) “  $\Rightarrow$  “ Sei  $\gamma = \sup A$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann:  $\gamma - \varepsilon < \varepsilon$ .  $\gamma - \varepsilon$  ist also keine obere Schranke von  $A$ . Also:  $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon$

“  $\Leftarrow$  “ Sei  $\tilde{\gamma} \leq \gamma$ . Annahme:  $\gamma \neq \tilde{\gamma}$ . Dann  $\tilde{\gamma} < \gamma$ , also  $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$ .  
 $\xRightarrow{Vor.} \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$ . Widerspruch zu  $x \leq \tilde{\gamma}$ .

- d) Analog zu c)

□

## Natürliche Zahlen

### Definition:

- a)  $A \subseteq \mathbb{R}$  heißt eine Induktionsmenge (IM)

$$\iff \begin{cases} 1. & 1 \in A; \\ 2. & \text{aus } x \in A \text{ folgt stets } x + 1 \in A \end{cases}$$

Beispiele:  $\mathbb{R}$ ,  $[1, \infty)$ ,  $\{1\} \cup [2, \infty)$  sind Induktionsmengen

- b)  $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ gehört zu jeder IM}\} = \text{Durchschnitt aller IMn.}$

Also:  $\mathbb{N} \subseteq A$  für jede Induktionsmenge  $A$ .

### Satz 1.3:

- a)  $\mathbb{N}$  ist eine Induktionsmenge

b)  $\mathbb{N}$  ist nicht nach oben beschränkt

c) Ist  $x \in \mathbb{R}$ , so ex. ein  $n \in \mathbb{N} : N > x$

Von nun an sei  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  bekannt.

#### 1.4 Prinzip der vollständigen Induktion:

Ist  $A \subseteq \mathbb{N}$  und  $A$  eine Induktionsmenge, so ist  $A = \mathbb{N}$ .

*Beweis:*  $A \subseteq \mathbb{N}$  (nach Vor.) und  $\mathbb{N} \subset A$  (nach Def.), also  $A = \mathbb{N}$  □

### Beweisverfahren durch vollständige Induktion

$A(n)$  sei eine Aussage, die für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definiert ist. Für  $A(n)$  gelte:

$$\begin{cases} (I) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (II) & \text{ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch } A(n+1) \text{ wahr;} \end{cases}$$

Dann ist  $A(n)$  wahr für **jedes**  $n \in \mathbb{N}$ !

*Beweis:* Sei  $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$ . Dann:

$A \subseteq \mathbb{N}$  und wegen (I), (II) ist  $A$  eine Induktionsmenge  $\xrightarrow{1.4} A = \mathbb{N}$  □

**Beispiel:** Beh.:  $\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{A(n)} = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

*Beweis:* (induktiv)

I.A.:  $1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$ ,  $A(1)$  ist also wahr.

I.V.: Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gelte  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

I.S.:  $n \leadsto n + 1$ :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &\stackrel{I.V.}{=} \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= (n + 1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A(n + 1)$  ist wahr. □

### Definition:

- a)  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
- b)  $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$  (ganze Zahlen)
- c)  $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$  (rationale Zahlen)

**Satz 1.5:** Sind  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

*Beweis:* i. d. Übungen. □

## Einige Definitionen und Formeln

- a) Für  $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, a^0 := 1$  und ist  $a \neq 0 : a^{-n} := \frac{1}{a^n}$   
Es gelten die bekannten Rechenregeln.
- b) Für  $n \in \mathbb{N} : n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, 0! := 1$  (**Fakultäten**)
- c) **Binomialkoeffizienten** (BK): für  $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$  und  $k \leq n$ :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

z.B.  $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ . Es gilt (nachrechnen!):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

d) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a - b) (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \end{aligned}$$

e) **Binomischer Satz:**  $a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

*Beweis:* i. d. Übungen. □

f) **Bernoullische Ungleichung:** Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $x \geq -1$ . Dann:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

*Beweis:* (induktiv)

I.A.:  $n = 1$ :  $1 + x \geq 1 + x$

I.V.: Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gelte  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

I.S.:  $n \leadsto n + 1$ :  $\xRightarrow{I.V.} (1 + x)^n \geq 1 + nx$  und da  $1 + x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &\geq (1 + nx)(1 + x) \\ &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + nx + x \\ &= 1 + (n + 1)x \end{aligned}$$

□

**Hilfssatz (HS):** Für  $x, y \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $x \leq y \iff x^n \leq y^n$

*Beweis:* i. d. Übungen. □

**Satz 1.6:** Sei  $a \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es genau ein  $x \geq 0$  mit:  $x^n = a$ .  
Dieses  $x$  heißt **n-te Wurzel aus a**; Bez.:  $x = \sqrt[n]{a}$ . ( $\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$ )

*Beweis:* Existenz: später in §7.

Eindeutigkeit: seien  $x, y \geq 0$  und  $x^n = a = y^n$ .  $\xrightarrow{HS} x = y$  □

**Bemerkungen:**

a)  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  (s. Schule)

b) Für  $a \geq 0$  ist  $\sqrt[n]{a} \geq 0$ . Bsp.:  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{4} \neq -2$ . Die Gleichung  $x^2 = 4$  hat zwei Lösungen:  $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ .

c)  $\sqrt{x^2}|x| \forall x \in \mathbb{R}$

## Rationale Exponenten

a) Sei zunächst  $a > 0$  und  $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ . Dann ex.  $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$ . Wir wollen definieren:

$$a^r := (\sqrt[n]{a})^m \quad (*)$$

Problem: gilt auch noch  $r = \frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$ , gilt dann  $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$ ?

Antwort: ja (d.h. obige Def. (\*) ist sinnvoll).

*Beweis:*  $x := (\sqrt[n]{a})^m$ ,  $y := (\sqrt[q]{a})^p$ , dann:  $x, y \geq 0$  und  $mq = np$ , also

$$\begin{aligned} x^q &= (\sqrt[n]{a})^{mq} = (\sqrt[n]{a})^{np} = ((\sqrt[n]{a})^n)^p = a^p \\ &= ((\sqrt[q]{a})^q)^p = ((\sqrt[q]{a})^p)^q = y^q \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{HS} x = y. \quad \square$$

b) Sei  $a > 0, r \in \mathbb{Q}$  und  $r < 0$ .  $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$ . Es gelten die bekannten Rechenregeln:

$$(a^r a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, \dots)$$

# Kapitel 2

## Folgen und Konvergenz

**Definition:** Es sei  $X$  eine Menge,  $X \neq \emptyset$ . Eine Funktion  $a: \mathbb{N} \rightarrow X$  heißt eine **Folge in  $X$** . Ist  $X = \mathbb{R}$ , so heißt  $a$  eine **reelle Folge**.

**Schreibweisen:**  $a_n$  statt  $a(n)$  ( $n$ -tes Folgenglied)  
 $(a_n)$  oder  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  oder  $(a_1, a_2, \dots)$  statt  $a$

**Beispiele:**

a)  $a_n := \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), also  $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

b)  $a_{2n} := 0, a_{2n-1} := 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), also  $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$

**Bemerkung:** Ist  $p \in \mathbb{Z}$  und  $a: \{p, p+1, \dots\} \rightarrow X$  eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in  $X$ . Bez.:  $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ . Meist  $p = 0$  oder  $p = 1$ .

**Definition:** Sei  $X$  eine Menge,  $X \neq \emptyset$ .

a)  $X$  heißt **abzählbar**  $\iff \exists$  Folge  $(a_n)$  in  $X$ :  $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

b)  $X$  heißt **überabzählbar**  $\iff X$  ist nicht abzählbar

**Beispiele:**

a) Ist  $X$  endlich, so ist  $X$  abzählbar.

b)  $\mathbb{N}$  ist abzählbar, denn  $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  mit  $a_n := n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

c)  $\mathbb{Z}$  ist abzählbar, denn  $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  mit  $a_1 := 0, a_2 := 1, a_3 := -1, a_4 := 2, a_5 := -2, \dots$  also

$$a_{2n} := n, \quad a_{2n+1} := -n \quad (n \in \mathbb{N})$$

d)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar!

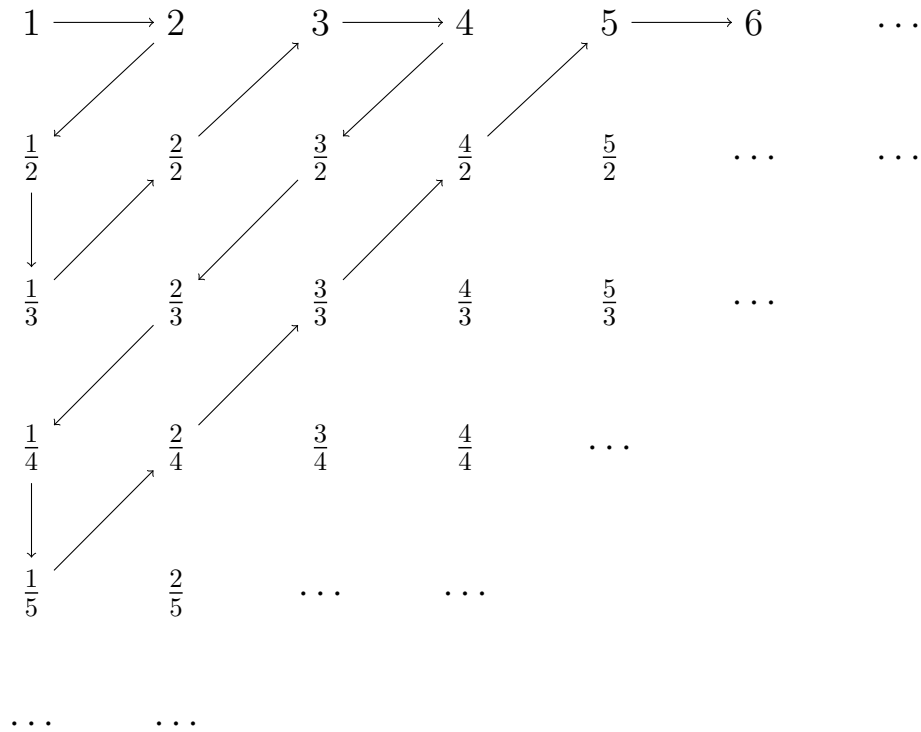


Abbildung 2.1: Zum Beweis der Abzählbarkeit von  $\mathbb{Q}$ .

Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert:

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann:

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$



e)  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar (Beweis in §5).

**Vereinbarung:** Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in  $\mathbb{R}$ .

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form  $(a_n)_{n=1}^\infty$ . Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form  $(a_n)_{n=p}^\infty$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ).

**Definition:** Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $M := \{a_1, a_2, \dots\}$ .

a)  $(a_n)$  heißt **nach oben beschränkt**  $\iff M$  ist nach oben beschränkt.  
I.d. Fall:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^\infty a_n := \sup M$ .

b)  $(a_n)$  heißt **nach unten beschränkt**  $\iff M$  ist nach unten beschränkt. I.d. Fall:  $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^\infty a_n := \inf M$ .

c)  $(a_n)$  heißt **beschränkt**  $\iff M$  ist beschränkt

$$\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Definition:** Sei  $A(n)$  eine für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definierte Aussage.

$A(n)$  gilt **für fast alle** (ffa)  $n \in \mathbb{N} \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : A(n)$  ist wahr  $\forall n \geq n_0$

**Definition:** Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

heißt  **$\varepsilon$ -Umgebung von  $a$** .

**Definition:** Eine Folge  $(a_n)$  heißt **konvergent**

$$\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ ex. } n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \\ |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \end{cases}$$

I. d. Fall heißt  $a$  **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von  $(a_n)$  und man schreibt

$$a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \text{ oder } a_n \rightarrow a \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Ist  $(a_n)$  nicht konvergent, so heißt  $(a_n)$  **divergent**. Beachte:

$$a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \ \forall n \geq n_0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ fa } n \in \mathbb{N}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}$$

**Satz 2.1:**  $(a_n)$  sei konvergent und  $a = \lim a_n$

a) Gilt auch noch  $a_n \rightarrow b$ , so ist  $a = b$

b)  $(a_n)$  ist beschränkt

*Beweis:*

a) Annahme  $a \neq b$ . Dann ist  $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$ .

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n_0} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

$N := \max\{n_0, n_1\}$ . Dann:

$$2\varepsilon = |a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\varepsilon$$

Widerspruch! Also  $a = b$

b) Zu  $\varepsilon = 1 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \ \forall n \geq n_0$ . Dann:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \geq n_0$$

$c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$ . Dann:  $|a_n| \leq c \ \forall n \geq 1$ .

□

### Beispiele:

a) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $a_n := c \ \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann:

$$|a_n - c| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also:  $a_n \rightarrow c$ .

b)  $a_n := \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Beh:  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

*Beweis:* Sei  $\varepsilon > 0$ :  $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\xrightarrow{\text{1.3 c)}} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Für  $n \geq n_0$  ist  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , also  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Somit  $|a_n - 0| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$  □

c)  $a_n := (-1)^n$ . Es ist  $\forall n \in \mathbb{N}$ :  $|a_n| = 1$ ,  $(a_n)$  ist also beschränkt. Behauptung:  $(a_n)$  ist divergent.

*Beweis:* Für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n| (1 - (-1)) = 2$$

Annahme:  $(a_n)$  konvergiert. Definiere  $a := \lim a_n$ , dann

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für  $n \geq n_0$  gilt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Widerspruch! □

d)  $a_n := n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).  $(a_n)$  ist nicht beschränkt  $\xRightarrow{2.1\ b)}$   $(a_n)$  ist divergent.

e)  $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Beh.:  $a_n \rightarrow 0$

*Beweis:* Sei  $\varepsilon > 0$ .

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$\xRightarrow{1.3\ c)}$   $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ . Ist  $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$   
 $\square$

f)  $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .

*Beweis:*

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Also  $a_n \rightarrow 0$ .  $\square$

**Definition:**  $(a_n)$  und  $(b_n)$  seien Folgen und  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n); \quad \alpha(a_n) := (\alpha a_n); \quad (a_n)(b_n) := (a_n b_n)$$

Gilt  $\forall n \geq m \quad b_n \neq 0$ , so ist die Folge  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$  definiert.

**Satz 2.2:**  $(a_n), (b_n), (c_n)$  und  $(\alpha_n)$  seien Folge und  $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$

a)  $a_n \rightarrow a \iff |a_n - a| \rightarrow 0$

b) Gilt  $|a_n - a| \leq \alpha_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und  $\alpha_n \rightarrow 0$ , so gilt  $a_n \rightarrow a$

c) Es gelte  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann:

(i)  $|a_n| \rightarrow |a|$

(ii)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$

(iii)  $\alpha a_n \rightarrow \alpha a$

(iv)  $a_n b_n \rightarrow ab$

(v) ist  $a \neq 0$ , so ex. ein  $m \in \mathbb{N}$ :

$$a_n \neq 0 \forall n \geq m \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

d) Es gelte  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  und  $a_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$

e) Es gelte  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow a$  und  $a_n \leq c_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Dann  $c_n \rightarrow a$ .

### Beispiele:

a) Sei  $p \in \mathbb{N}$  und  $a_n := \frac{1}{n^p}$ . Es ist  $n \leq n^p \forall n \in \mathbb{N}$ .

Dann:  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ , also  $\frac{1}{n^p} \rightarrow 0$ .

b)  $a_n := \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2} = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{2.2} \frac{5}{4}$

*Beweis:* (von 2.2)

a) folgt aus der Definition der Konvergenz

b)  $\exists m \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \alpha_m \forall n \geq m$ . Sei  $\varepsilon > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \alpha_n < \varepsilon \forall n \geq n_1.$$

$n_0 := \max\{m, n_1\}$ . Für  $n \geq n_0$ :  $|a_n - a| \leq \alpha_n < \varepsilon$

c) (i)  $\overset{\S 1}{||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \quad \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{a), b)} |a_n| \rightarrow |a|}$

(ii) Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_2$   
 $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ . Für  $n \geq n_0$ :

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iii) Übung

(iv)  $c_k := |a_n b_n - ab|$ . z. z.:  $c_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{2.1 \quad b)} \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } c \geq |b|. \text{ Dann:}$$

$$c_n \leq c(|b_n - b| + |a_n - a|) =: \alpha_n \xrightarrow[c)(ii), c)(iii)]{a)} \alpha_n \rightarrow 0$$

Also:  $|c_n - 0| = c_n \leq \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha_n \rightarrow 0 \xRightarrow{b)} c_n \rightarrow 0$ .

(v)  $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$ ; aus (i):  $|a_n| \rightarrow |a| \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ :

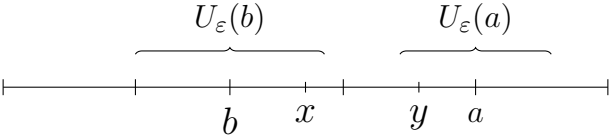
$$|a_n| \in U_\varepsilon(|a|) = (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon) = \left(\frac{|a|}{2}, \frac{3}{2}|a|\right) \quad \forall n \geq m$$

$$\Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2} > 0 \quad \forall n \geq m \Rightarrow a_n \neq 0 \quad \forall n \geq m.$$

Für  $n \geq m$ :

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} =: \alpha_n$$

$$\alpha_n \rightarrow 0 \xRightarrow{b)} \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}.$$

- d) Annahme  $b < a$ ,  $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$
- 
- Dann:  $x < y \quad \forall x \in U_\varepsilon(b) \quad \forall y \in U_\varepsilon(a)$ .

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : b_n \in U_\varepsilon(b) \quad \forall n \geq n_0$$

$$\exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \quad \forall n \geq m$$

$m_0 := \max\{n_0, m\}$ . Für  $n \geq m_0$ :  $a_n \leq b_n < b + \varepsilon$ , also  $a_n \notin U_\varepsilon(a)$ .  
Widerspruch!

- e)  $\exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq m$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ :

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$$

$n_0 := \max\{n_1, n_2, m\}$ . Für  $n \geq n_0$ :

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

Also:  $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ .

□

### Definition:

- a)  $(a_n)$  heißt **monoton wachsend**  $\iff a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .
- b)  $(a_n)$  heißt **streng monoton wachsend**  $\iff a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .
- c) Entsprechend definiert man **monoton fallend** und **streng monoton fallend**.

- d)  $(a_n)$  heißt **monoton**  $\iff (a_n)$  ist monoton wachsend oder monoton fallend.

### 2.3 Monotoniekriterium:

- a)  $(a_n)$  sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist  $(a_n)$  konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n$$

- b)  $(a_n)$  sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist  $(a_n)$  konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n=1}^{\infty} a_n$$

*Beweis:*  $a := \sup_{n=1}^{\infty} a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $a - \varepsilon$  keine obere Schranke von  $\{a_1, a_2, \dots\}$ , also existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$ . Für  $n \geq n_0$ :

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a \leq a + \varepsilon$$

also  $|a_n - a| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ . □

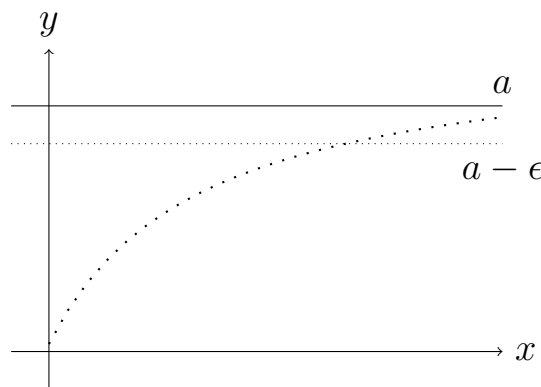


Abbildung 2.2: Zum Beweis des Monotonie-Kriteriums.



**Beispiel:**  $a_1 := \sqrt[3]{6}$ ,  $a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n}$  ( $n \geq 2$ ).

$$a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2;$$

$$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6} = a_1;$$

Behauptung:  $0 < a_n < 2$  und  $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$

*Beweis:* (induktiv)

I.A.: s.o.

I.V.: Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 < a_n < 2$  und  $a_{n+1} > a_n$ .

$$n \curvearrowright n + 1: a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} >_{I.V.} 0$$

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} <_{I.V.} \sqrt[3]{6 + 2} = 2; \quad a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} >_{I.V.} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}$$

Also:  $(a_n)$  ist nach oben beschränkt und monoton wachsend.

$\xrightarrow{2.3} (a_n)$  ist konvergent.  $a := \lim a_n$ ,  $a_n \geq 0 \forall n \xrightarrow{2.2} a \geq 0$ . Es ist

$$a_{n+1}^3 = 6 + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\xrightarrow{2.2} a^3 = 6 + a \Rightarrow 0 = a^3 - a + 6 = (a - 2) \underbrace{(a^2 - 2a + 3)}_{\geq 3} \Rightarrow a = 2. \quad \square$$

## Wichtige Beispiele:

Vorbemerkung: Seien  $x, y \geq 0$  und  $p \in \mathbb{N}$ : es ist (s. §1)

$$x^p - y^p = (x - y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x - y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x - y|$$

**Beispiel 2.4:** Sei  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ :  $a_n \rightarrow a \geq 0$  und  $p \in \mathbb{N}$ . Dann  $\sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a}$

*Beweis:*

Fall 1:  $a = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon^p \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n}| = \sqrt[p]{|a_n|} < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

Also  $\sqrt[p]{a_n} \rightarrow 0$ .

Fall 2:  $a \neq 0$ .

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - (\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y})^p| = |x^p - y^p| \\ &\geq_{s.o.} \underbrace{y^{p-1}}_{:=c} |x - y| = c |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}|, \quad c > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{1}{c} |a_n - a| =: \alpha_n. \alpha_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a} \quad \square$$

**Beispiel 2.5:** Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $(x^n)$  ist konvergent  $\iff x \in (-1, 1]$ , i. d. Fall:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

*Beweis:*

Fall 1:  $x = 0$ . Dann  $x^k \rightarrow 0$ . Fall 2:  $x = 1$ . Dann  $x^k \rightarrow 1$ .

Fall 3:  $x = -1$ . Dann  $(x^k) = ((-1)^k)$ , ist divergent.

Fall 4:  $|x| > 1$ .  $\exists \delta > 0 : |x| = 1 + \delta \Rightarrow |x^k| = |x|^k = (1 + \delta)^k \geq 1 + n\delta \geq n\delta$   
 $\Rightarrow$  ist nicht beschränkt  $\xrightarrow{2.1} (x^k)$  ist divergent. Fall 5:  $0 < |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} > 1 \Rightarrow \exists \eta > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + \eta$ .

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} \right| = \left( \frac{1}{|x|} \right)^n = (1 + \eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta$$

$$\Rightarrow |x^n| \leq \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow x^n \rightarrow 0. \quad \square$$

**Beispiel 2.6:** Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $s_n := 1 + x + x^n + \dots x^n = \sum_{k=0}^n x^k$

Fall 1:  $x = 1$ . Dann:  $x_n = n + 1$ ,  $(s_n)$  ist also divergent.

Fall 2:  $x \neq 1 \Rightarrow s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ . Aus 2.5:

$$(s_n) \text{ konvergent} \iff |x| < 1$$

i.d. Fall:  $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$

**Beispiel 2.7:** Behauptung:  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ .

*Beweis:* Es ist  $\sqrt[n]{n} \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ , also  $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Z. z.:  $a_n \rightarrow 0$ .

Für  $n \geq 2$ :

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (a_n + 1)^n \stackrel{\S 1}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

$\Rightarrow \frac{n-1}{2} a_n^2 \leq 1$ . Also  $\xrightarrow{a_n \geq 0} 0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} (n \geq 2) \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ . □

**Beispiel 2.8:** Sei  $c > 0$ . Beh.:  $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$ .

*Beweis:* Fall 1:  $c \geq 1$ .  $\exists m \in \mathbb{N} : 1 \leq c \leq m$

$$\Rightarrow 1 \leq c \leq n \forall n \geq m \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n} \forall n \geq m \Rightarrow \text{Beh.}$$

Fall 2:  $0 < c < 1 \Rightarrow \frac{1}{c} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \xrightarrow[\text{Fall 1}]{} 1 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \text{Beh.}$  □

**Beispiel 2.9:**  $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ;  $b_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

Beh.:  $(a_n)$  und  $(b_n)$  sind konvergent und  $\lim a_n = \lim b_n$

*Beweis:* I. d. gr. Übungen wird gezeigt:  $2 \leq a_n < a_{n+1} < 3 \forall n \in \mathbb{N}$

$$\xrightarrow{2.3} (a_n) \text{ konvergiert, } a := \lim a_n$$

Es ist  $b_n > 0$  und  $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n$ .  $(b_n)$  ist also monoton wachsend.  
Für  $n > 3$ :

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 2}}_{< (\frac{1}{2})^2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{< (\frac{1}{2})^3} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \dots \cdot n}}_{< (\frac{1}{2})^{n-1}} \\
&< 1 + \left( 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\
&< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$\xrightarrow{2.3} (b_n)$  konvergiert.  $b := \lim b_n$ . Für  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\S 1}{=} \sum_{k=0}^n n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{< 1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{< 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{< 1} \\
&\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = b_n
\end{aligned}$$

Also  $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 2$ . Z. z.:  $\Rightarrow a \leq b$

Sei  $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$  (zunächst fest). Für  $n \in \mathbb{N}, n \geq j$ :

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{s.o.}{=} 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\rightarrow 1 + 1 + 1 \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Also  $a \geq b_j \quad \forall j \geq 2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a \geq b$ . □

**Definition:**

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!})$$

heißt **Eulersche Zahl**. Übung:  $2 < e < 3$ .

$e \approx 2,718\dots$

**Definition:** Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$  eine Folge in  $\mathbb{N}$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  setze

$$b_k := a_{n_k}$$

also  $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, \dots$ . Dann heißt  $(b_k) = (a_{n_k})$  eine **Teilfolge** (TF) von  $(a_n)$ .

**Beispiele:**

a)  $(a_2, a_4, a_6, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ ; hier:  $n_k = 2k$

b)  $(a_1, a_4, a_9, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ ; hier:  $n_k = k^2$

c)  $(a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, a_{14}, \dots)$  ist keine Teilfolge von  $(a_n)$ .

**Definition:**  $(a_n)$  sei eine Folge und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\alpha$  heißt ein **Häufungswert** (HW) von  $(a_n)$

$$\iff \exists \text{ Teilfolge } (a_{n_k}) \text{ von } (a_n) : a_{n_k} \rightarrow \alpha \ (k \rightarrow \infty)$$

$$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}.$$

**Satz 2.10:**  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungswert von  $(a_n)$

$$\iff \forall \epsilon > 0 : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha) \quad (*)$$

für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis:*

“  $\Rightarrow$  “ Sei  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge mit  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$ . Sei  $\epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha)$  für  $k \geq k_0 \Rightarrow (*)$

“  $\Leftarrow$  “  $\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in U_1(\alpha)$ .  $\exists n_2 \in \mathbb{N} : a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$  und  $n_2 > n_1$ .  $\exists n_3 \in \mathbb{N} : a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$  und  $n_3 > n_2$ . Etc. ... Man erhält eine Teilfolge  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  mit

$$a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha) \ \forall k \in \mathbb{N}, \text{ also } |a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \ \forall k$$

Somit:  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$ . □

**Beispiele:**

a)  $a_n = (-1)^n$ ,  $a_{2k} = 1 \rightarrow 1$ ,  $a_{2k+1} \rightarrow -1$ , also  $1, -1 \in H(a_n)$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1, \alpha \neq -1$

Wähle  $\epsilon > 0$  so, dass  $1, -1 \notin U_\epsilon(\alpha)$ . Dann  $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$  für kein  $n \in \mathbb{N}$   
 $\xRightarrow{2.10} \alpha \notin H(a_n)$ . Fazit:  $H(a_n) = \{1, -1\}$ .

b)  $a_n = n$ . Ist  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\epsilon > 0$ , so gilt:  $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$  für höchstens endlich viele  $n$ , also  $\alpha \notin H(a_n)$ . Fazit:  $H(a_n) = \emptyset$ .

- c)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar. Sei  $(a_n)$  eine Folge mit  $Q = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\epsilon > 0 \xrightarrow{1.5} U_\epsilon(\alpha) = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$  enthält unendlich viele verschiedene rationale Zahlen  $\xrightarrow{2.10} \alpha \in H(a_n)$ . Fazit:  $H(a_n) = \mathbb{R}$ .

**folgerung\*:** Ist  $x \in \mathbb{R}$ , so existieren Folgen  $(r_m)$  in  $\mathbb{Q} : r_m \rightarrow \alpha$ .

**Satz 2.11:**  $(a_n)$  sei konvergent,  $a := \lim a_n$  und  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ . Dann:

$$a_{n_k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$$

Insbesondere:  $H(a_n) = \{\lim a_n\}$

*Beweis:* Sei  $\epsilon > 0$ . Dann:  $a_n \in U_\epsilon(a)$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , also auch  $a_{n_k} \in U_\epsilon(a)$  ffa  $k \in \mathbb{N}$ . Somit:  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$ .  $\square$

**Definition:** Sei  $(a_n)$  eine Folge.

a)  $m \in \mathbb{N}$ .  $m$  heißt **niedrig** (für  $(a_n)$ )  $\iff a_n \geq a_m \forall n \geq m$

b)  $m \in \mathbb{N}$  heißt nicht niedrig  $\iff \exists n \geq m : a_n < a_m \Rightarrow n > m : a_n < a_m$

**Hilfssatz:**  $(a_n)$  sei eine Folge. Dann enthält  $(a_n)$  eine monotone Teilfolge.

*Beweis:*

Fall 1: es existieren höchstens endlich viele niedrige Indizes. Also existiert  $n_1 \in \mathbb{N}$ : jedes  $n \geq n_1$  ist nicht niedrig.

$n_1$  nicht niedrig  $\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} < a_{n_1}$

$n_2$  nicht niedrig  $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$

Etc...

Wir erhalten so eine streng monoton fallende Teilfolge  $(a_{n_k})$ .

Fall 2: es existieren unendlich viele niedrige Indizes  $n_1, n_2, \dots$ , etwa  $n_1 < n_2 < \dots$

$n_1$  ist niedrig und  $n_2 > n_1 \rightarrow a_{n_2} \geq a_{n_1}$

$n_2$  nicht niedrig  $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} \geq a_{n_2}$

Etc...

Wir erhalten so eine monoton wachsende Teilfolge  $(a_{n_k})$ . □

**Satz 2.12** (Bolzano-Weierstraß):

$(a_n)$  sei beschränkt, dann:  $H(a_n) \neq \emptyset$ .  $(a_n)$  enthält also eine konvergente Teilfolge

*Beweis:*  $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\xrightarrow{\text{hilfssatz*}} (a_n)$  enthält eine monotone Teilfolge  $(a_{n_k})$ . Dann:  $|a_{n_k}| \leq c \ \forall k \in \mathbb{N}$

$(a_{n_k})$  ist also beschränkt  $\xrightarrow{2.3} (a_{n_k})$  ist konvergent. Also  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in H(a_n)$ .

□

**Satz 2.13:**  $(a_n)$  sei beschränkt  $\left( \xrightarrow{2.12} H(a_n) \neq \emptyset \right)$

a)  $H(a_n)$  ist beschränkt

b)  $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$ ; es existieren also

$$\max H(a_n), \min H(a_n)$$

**Definition:** Ist  $(a_n)$  beschränkt, so nennen wir

a)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \limsup a_n := \overline{\lim} a_n := \max H(a_n)$  heißt **Limes superior** oder **oberer Limes** von  $(a_n)$ .



b)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \liminf a_n := \underline{\lim} a_n := \min H(a_n)$  heißt **Limes inferior** oder **unterer Limes** von  $(a_n)$ .

*Beweis:*

a)  $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\alpha \in H(a_n)$ . Es existiert eine Teilfolge  $(a_{n_k})$  mit  $a_{n_k} \rightarrow \alpha \ (k \rightarrow \infty)$ . Es ist

$$|a_{n_k}| \leq c \quad \forall k, \text{ also } -c \leq a_{n_k} \leq c \quad \forall k$$

$$\Rightarrow -c \leq \alpha \leq c. \text{ Also } |\alpha| \leq c \ \forall \alpha \in H(a_n).$$

b) ohne Beweis.

□

**Satz 2.14:**  $(a_n)$  sei beschränkt.

a)  $\liminf a_n \leq \alpha \leq \limsup a_n \ \forall \alpha \in H(a_n)$

b) Ist  $(a_n)$  konvergent  $\Rightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$

c)  $\limsup(\alpha a_n) = \alpha \limsup a_n \ \forall \alpha \geq 0$

d)  $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$

*Beweis:* a) klar, b) folgt aus 2.11, c) und d) Übung.

□

**Motivation:**  $(a_n)$  sei konvergent und  $\lim a_n =: a$ . Sei  $\epsilon > 0$ ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für  $n, m \geq n_0$ :

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

D.h.:  $(a_n)$  hat die folgende Eigenschaft:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad (c)$$

$$(\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+k}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall k \in \mathbb{N})$$

**Definition:** Eine Folge  $(a_n)$  heißt eine **Cauchyfolge** (CF)

$$\iff (a_n) \text{ hat die Eigenschaft } (c)$$

Konvergente Folgen sind also Cauchy-Folgen!

**2.15 Cauchy Kriterium:**  $(a_n)$  ist konvergent  $\iff (a_n)$  ist eine Cauchyfolge.

*Beweis:* “  $\Rightarrow$  “ s.o. “  $\Leftarrow$  “ ohne Beweis □

**Beispiel:**  $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Mit Induktion folgt:

1)  $0 < a_n \leq 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) Damit:

2)  $a_n \geq \frac{1}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

Für  $n \geq 2, k \in \mathbb{N}$  gilt daher:

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &= \left| \frac{1}{1+a_{n+k-1}} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \right| = \frac{|a_{n-1} - a_{n+k-1}|}{(1+a_{n+k-1})(1+a_{n-1})} \\ &\leq \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| = \frac{4}{9} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |a_{n-k-2} - a_{n-2}| \leq \dots \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_{k+1} - a_1| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} (|a_{k+1}| + |a_1|) \leq 2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}: 2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} < \epsilon \ (n \geq n_0)$ . Damit:

$$|a_{n+k} - a_n| < \epsilon \quad (n \geq n_0, k \in \mathbb{N}).$$

Also ist  $(a_n)$  eine Cauchyfolge.  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Klar:

$$a \geq \frac{1}{2} \text{ und } a = \frac{1}{1+a}$$

Also  $a^2 + a - 1 = 0 \iff a = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Wegen  $a \geq \frac{1}{2}$  folgt  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

# Kapitel 3

## Unendliche Reihen

**Definition:**  $(a_n)$  sei eine Folge;

- a)  $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) (also  $a_1 = a_1, a_2 = a_1 + a_2, \dots$ ).  $(s_n)$  heißt **(unendliche) Reihe** und wird mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bezeichnet. Weitere Bezeichnungen:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- b)  $s_n$  heißt **n-te Teilsumme** von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- c)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt konvergent bzw. divergent  $\iff (s_n)$  ist konvergent bzw. divergent.
- d) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, so heißt  $\lim s_n$  der Reihenwert und wird ebenfalls mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bezeichnet (schlecht, aber so üblich)

**Bemerkung:** Ist  $p \in \mathbb{Z}$  und  $(a_n)_{n=p}^{\infty}$  eine Folge, so definiert man entsprechend

$$s_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n \quad (n \geq p)$$

und  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  (meist:  $p = 1$  oder  $p = 0$ )

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nun für Reihen der Form  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Diese Sätze und Definitionen gelten entsprechend für Reihen der Form  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  ( $p \in \mathbb{Z}$ )

**Beispiele:**

a) Sei  $x \in \mathbb{R}$ .  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$  heißt **geometrische Reihe**.  
 $s_m = 1 + x + \dots + x^m \xrightarrow{2.6} (s_n)$  konvergiert  $\iff |x| < 1$  und  $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$   
für  $|x| < 1$ . Also:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergent  $\iff |x| < 1$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$   
für  $|x| < 1$ .

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ;  $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_n &= a_1 + \dots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Also  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  konvergent und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ ;  $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \xrightarrow{2.9} s_n \rightarrow e$ .  
Also:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  konvergiert und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ .

d) Die **harmonischen Reihe**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Dann ist  $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ,  
 $s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = s_n + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq$   
 $s_n + \frac{1}{2}$

Annahme:  $(s_n)$  ist konvergent.  $s := \lim s_n \xrightarrow[2.11:satz]{2.11} s_{2n} \rightarrow s \Rightarrow s \geq$   
 $s + \frac{1}{2} \rightarrow 0 \geq \frac{1}{2}$ . Widerspruch! Also:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent!

**Satz 3.1:**  $(a_n)$  sei eine Folge und  $s_n = a_1 + \dots + a_n$ .

a) **Monotoniekriterium:** Sind alle  $a_n \geq 0$  und ist  $(s_n)$  beschränkt, so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent.

b) **Cauchy Kriterium:**  $\sum a_n$  konvergiert  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ :

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m > n \geq n_0$$

c) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent  $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$ .

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei konvergent. Dann ist für jedes  $\nu \in \mathbb{N}$  die Reihe  $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$  konvergent und für  $r_\nu := \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$  gilt:  $r_\nu \rightarrow 0$ .

*Beweis:*

a)  $s_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ .  $(s_n)$  ist also wachsend und beschränkt  $\xrightarrow{2.3} (s_n)$  konvergent.

b) Für  $m > n$ :  $|s_m - s_n| = |a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_m - (a_1 + \dots + a_n)| = |a_{n+1} + \dots + a_m| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right|$ . Behauptung folgt aus 2.15.

c)  $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$ . Ist  $(s_n)$  konvergent, so folgt  $a_{n+1} \rightarrow 0$

d) ohne Beweis!

□

**Bemerkung:** Ist  $(a_n)$  eine Folge und gilt  $a_n \not\rightarrow 0$ , so ist  $\sum a_n$  divergent!

**Satz 3.2:** Die Reihen  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  seien konvergent und es seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann konvergiert

$$\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$$

und  $\sum (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$

*Beweis:* 2.2

□

**3.3 Leibnitzkriterium:** Sei  $(b_n)$  eine Folge mit:

$$b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, (b_n) \text{ ist monoton fallend und } b_n \rightarrow 0$$

Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$  konvergent.

**Beispiel:** Aus 3.3 folgt:

Die **alternierende harmonische Reihe**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  ist konvergent.

*Beweis:* (von 3.3)  $a_n := (-1)^{n+1} b_n$ ,

$$s_n := a_1 + \dots + a_n. \quad s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{b_{2n+1} - b_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n}.$$

$(s_{2n})$  ist also monoton fallend. Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} = s_{2n-1} - b_{2n} \leq s_{2n-1} \quad (*)$$

Also:

$$s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \stackrel{(*)}{\leq} s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1$$

$(s_{2n})$  und  $(s_{2n+1})$  sind also beschränkt  $\stackrel{2.3}{\implies} (s_{2n})$  und  $(s_{2n+1})$  sind konvergent.

$$s := \lim s_{2n} \stackrel{(*)}{=} s = \lim s_{2n+1}.$$

Sei  $\epsilon > 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} s_{2n} \in U_{\epsilon}(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ s_{2n-1} \in U_{\epsilon}(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow s_n \in U_{\epsilon}(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$$

Also:  $s_n \rightarrow s$ . □

**Definition:**  $\sum a_n$  heißt **absolut konvergent**  $\iff \sum |a_n|$  ist konvergent.

**Beispiel:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

**Satz 3.4:**  $\sum a_n$  sei absolut konvergent. Dann:

- a)  $\sum a_n$  ist konvergent
- b)  $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  ( $\Delta$ -Ungleichung für Reihen)

*Beweis:*

- a) Seien  $m, n \in \mathbb{N}, m > n$

$$\underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right|}_{=: \sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^m |a_k|}_{=: \tau_{m,n}} \quad (*)$$

Sei  $\epsilon > 0$ , Voraussetzung nach 3.1 b)  $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \tau_{m,n} < \epsilon$  für  $m > n > n_0 \xRightarrow{(*)} \sigma_{m,n} < \epsilon$  für  $m > n \geq n_0 \xRightarrow{3.1 b)} \sum a_n$  konvergiert

- b) Sei  $s_k := a_1 + \dots + a_k$ ,  $s := \lim s_n$ ,  $\sigma_k := |a_1| + \dots + |a_k|$  und  $\sigma = \lim \sigma_n$ .  
Dann:  $|s_n| \rightarrow |s|$  und

$$|s| \leq \sigma \quad \forall n$$

$\Rightarrow |s| \leq \sigma \Rightarrow \Delta$ -Ungleichung

□

### Satz 3.5:

- a) **Majorantenkriterium:** Gilt  $|a_n| \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum b_n$  konvergent, so ist  $\sum a_n$  absolut konvergent.
- b) **Minorantenkriterium:** Gilt  $a_n \geq b_n \geq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum b_n$  divergent, so ist  $\sum a_n$  divergent.

*Beweis:*



a)  $\exists j \in \mathbb{N}: |a_n| \leq b_n \forall n \geq j$ . Sei  $m > n \geq j$ , dann

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^m |a_k|}_{=: \sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^m b_k}_{=: \tau_{m,n}}$$

Sei  $\epsilon > 0$  Voraussetzung nach 3.1 b)  $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 \geq j$  und  $\tau_{m,n} < \epsilon$  für  $m > n \geq n_0$ . Dann:  $\sigma_{m,n} < \epsilon$  für  $m > n \geq n_0 \xrightarrow{3.1 b)} \sum |a_n|$  konvergiert.

b) Annahme:  $\sum a_n$  konvergent  $\stackrel{a)}{\Rightarrow} \sum b_n$  konvergent, Widerspruch.

□

### Beispiele:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}, \forall n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = |a_n| = \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$$

Bekannt:  $\sum b_n$  konvergiert  $\xrightarrow{3.5 a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$  konvergiert

b) Aus Beispiel a):  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergent.

c) Sei  $\alpha > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{Q}$ : Betrachte:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .

Fall 1:  $\alpha \in (0, 1]$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \xrightarrow{3.5 b)} \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ divergiert.}$$

Fall 2:  $\alpha \geq 2$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow{3.5 a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert.}$$

Fall 3:  $\alpha \in (1, 2)$ : vgl. Übungsblatt,  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  konvergiert.

**Fazit:** Ist  $\alpha > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , so gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konvergiert  $\Leftrightarrow \alpha > 1$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+1}$ ;  $|a_n| = \frac{n+2}{n^3+1} \leq \frac{n+2}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2n}{n^2} =: b_n$ . Für  $n \geq 2$   $\sum b_n$  konvergiert  $\xrightarrow{3.5 a)}$   $\sum a_n$  konvergiert absolut

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ ;  $a_n = |a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}_{\geq 0} =: b_n$ .

$\sum b_n$  divergiert  $\xrightarrow{3.5 b)}$   $\sum a_n$  divergiert

**Bemerkung:** Ist später später (in §7) die allgemeine Potenz  $a^x$  ( $a > 0, x \in \mathbb{R}$ ) eingeführt, so zeigt man analog:

Für  $\alpha > 0$  gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konvergiert  $\Leftrightarrow \alpha > 1$

**Hilfssatz:**  $(c_n)$  sei beschränkt

a) Ist  $\alpha := \limsup c_n$  und  $x > \alpha$ , so gilt:  $c_n < x$  ffa  $n$

b) Ist  $\alpha := \liminf c_n$  und  $x < \alpha$ , so gilt:  $c_n > x$  ffa  $n$

c) Ist  $c_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  und  $\limsup c_n = 0$ , so gilt  $c_n \rightarrow 0$

*Beweis:*

b) Sei  $\epsilon > 0$ .  $x := \epsilon \xrightarrow{a)} -\epsilon < 0 \leq c_n < \epsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , also  $c_n \in U_\epsilon(0)$  ffa  $n$ .

a) Annahme:  $c_n \geq x$  für unendlich viele  $n$ , etwa für  $n_1, n_2, n_3, \dots$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , Die Teilfolge  $(c_{n_k})$  ist beschränkt  $\xrightarrow{2.11}$   $(c_{n_k})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(c_{n_{k_j}})$ .  $\beta := \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_{k_j}}$ . Es ist  $c_{n_{k_j}} \geq x \forall j \Rightarrow \beta \geq x > \alpha$ ;  $(c_{n_{k_j}})$  ist eine Teilfolge von  $(c_n) \Rightarrow \beta \in H(a_n) \Rightarrow \beta \leq \alpha$ , Widerspruch.

□

**3.6 Wurzelkriterium (WK):** Sei  $(a_n)$  eine Folge,  $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$ .

- a) Ist  $(c_n)$  unbeschränkt, so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.
- b) Sei  $(c_n)$  beschränkt und  $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n$ 
  - (i) Ist  $\alpha < 1$ , so ist  $\sum a_n$  absolut konvergent.
  - (ii) Ist  $\alpha > 1$ , so ist  $\sum a_n$  divergent

Im Falle  $\alpha = 1$  ist keine allgemeine Aussage möglich.

*Beweis:*

- a)  $(c_n)$  unbeschränkt  $\Rightarrow c_n \geq 1$  für unendlich viele  $n \Rightarrow |a_n| \geq 1$  für unendlich viele  $n \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \xrightarrow{3.1\ c)} \text{Beh.}$
- b) (i) Sei  $\alpha < 1$ , sei  $x \in (\alpha, 1) \xrightarrow{\text{hilfssatz}^*} c_n \leq x \text{ ffa } n \Rightarrow |a_n| \leq x^n \text{ ffa } n$ .  
 $\sum x^n$  konvergiert  $\xrightarrow{3.5\ a)} \sum a_n$  konvergiert absolut
- (ii) Sei  $\alpha > 1$ , wähle  $\epsilon > 0$  so, dass  $\alpha - \epsilon > 1$ . Es gilt  $c_n U_\epsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n$ . Dann:  $c_n > \alpha - \epsilon > 1$  für unendlich viele  $n$ . Wie bei a):  $\sum a_n$  divergiert

□

**Beispiele:**

- a)  $a_n := \frac{1}{n}$ ;  $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = 1$  und  $\sum a_n$  divergiert.
- b)  $a_n := \frac{1}{n^2}$ ;  $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = 1$  und  $\sum a_n$  konvergiert.

c) Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n = 2k \\ nx^n, & \text{falls } n = 2k - 1 \end{cases}$   
 Frage: Wann ist  $\sum a_n$  (abs.) konvergent? Es ist

$$c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } n = 2k \\ \sqrt[n]{n}|x|, & \text{falls } n = 2k - 1 \end{cases}$$

$(c_n)$  ist also beschränkt,  $H(c_n) = \{\frac{1}{2}, |x|\}$ .

Fall 1:  $|x| < 1$ . Dann:  $\alpha = \limsup c_n < 1$ , also ist  $\sum a_n$  absolut konvergent.

Fall 2:  $|x| > 1$ . Dann:  $\alpha = \limsup c_n < 1$ , also ist  $\sum a_n$  divergent.

Fall 3:  $|x| = 1$ . Dann:  $\alpha = \limsup c_n = 1$ . Es ist  $|a_n| = n$  falls  $n = 2k - 1$ .

Also:  $a_n \not\rightarrow 0$ .  $\sum a_n$  ist also divergent.

**3.7 Quotientenkriterium (QK):** Es sei  $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$  und  $c_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

a) Ist  $c_n \geq 1$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\sum a_n$  divergent

b) Sei  $(c_n)$  beschränkt,  $\alpha := \limsup c_n$  und  $\beta := \liminf c_n$

(i) Ist  $\alpha < 1$ , so ist  $\sum a_n$  absolut konvergent

(ii) Ist  $\beta > 1$ , so ist  $\sum a_n$  divergent.

**Folgerung 3.8:**  $(a_n)$  und  $(c_n)$  seien wie in 3.7,  $(c_n)$  sei konvergent und  $\alpha := \lim c_n$ .

$$\sum a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konv.}, & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent}, & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}$$

Im Falle  $\alpha = 1$  ist keine allg. Aussage möglich.

### Beispiele:

a)  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ ,  $\sum a_n$  divergiert

b)  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$ ,  $\sum a_n$  konvergiert

**3.9 Die Exponentialreihe:** Für  $x \in \mathbb{R}$  betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Frage: für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Reihe (absolut).

Klar, die Reihe konvergiert für  $x = 0$ . Sei  $x \neq 0$  und  $a_n := \frac{x^n}{n!}$ .

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Aus 3.8 folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ konv. absolut für jedes } x \in \mathbb{R}$$

Damit ist auf  $\mathbb{R}$  eine Funktion  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{Exponentialfunktion}$$

Es ist  $E(0) = 1$ ,  $E(1) \stackrel{\S 2}{=} e$ .

Später zeigen wir:  $E(r) = e^r$  für  $r \in \mathbb{Q}$ . Des Weiteren definieren wir später  $e^x := E(x)$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann:  $e^x = E(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

**Definition:** Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Bijektion. Setze  $b_n := a_{\varphi(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). also

$$b_1 = a_{\varphi(1)}, b_2 = a_{\varphi(2)}, \dots$$

Dann heißt  $(b_n)$  eine **Umordnung** von  $(a_n)$ .

**Beispiel:**  $(a_2, a_4, a_1a_3, a_6, a_8, a_5, a_7, \dots)$  ist eine Umordnung von  $(a_n)$ .

**Satz 3.10:**  $(b_n)$  sei eine Umordnung von  $(a_n)$ .

- a) Ist  $(a_n)$  konvergent, so ist  $(b_n)$  konvergent und  $\lim b_n = \lim a_n$ .
- b) Ist  $\sum a_n$  absolut konvergent, so ist  $\sum b_n$  absolut konvergent und  $\sum a_n = \sum b_n$

*Beweis:*

- a)  $a := \lim a_n$ ; Sei  $\epsilon > 0$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq n_0$ . Dann:  
 $|a_{\varphi(n)} - a| < \epsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) ohne Beweis.

□

**Bemerkung** (ohne Beweis):  $\sum a_n$  sei konvergent, aber nicht absolut konvergent.

- a) Ist  $s \in \mathbb{R}$ , so existiert eine Umordnung  $\sum b_n$  von  $\sum a_n$  mit:  $\sum b_n$  ist konvergent und  $\sum b_n = s$ .
- b) Es existiert eine Umordnung  $\sum c_n$  von  $\sum a_n$  mit:  $\sum c_n$  ist divergent.

**Definition:** Gegeben seien die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ .

Setze für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}, \text{ also:}$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  heißt das **Cauchyprodukt** (CP) von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$ .

**Satz 3.11** (ohne Beweis):  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  seien absolut konvergent. Für ihr Cauchyprodukt  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  gilt dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ ist absolut konvergent und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

**Beispiel:** Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $|x| < 1$ .

Bekannt:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergiert absolut und  $\sum_{k=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ . Also

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \stackrel{3.11}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit  $c_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$ . Also:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1)$$

z.B.:  $(x = \frac{1}{2}) : 4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n}$ . Weiter:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

z.B.:  $(x = \frac{1}{2}) : 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ , also  $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$

**3.12 Exponentialfunktion:**  $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

a)  $E(0) = 1, E(1) = e$

b)  $E(x+y) = E(x)E(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

c)  $E(x_1 + \dots + x_m) = E(x_1) \cdot \dots \cdot E(x_m) \quad \forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$

d)  $E(x) > 1 \quad \forall x > 0; E(X) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; E(-x) = E(x)^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

e)  $E(rx) = E(x)^r \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$

f)  $E(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

g)  $E$  ist auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend, d.h. aus  $x < y$  folgt stets  $E(x) < E(y)$

*Beweis:*

a) klar.

b)  $E(x)E(y) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}) \stackrel{3.11}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k} \stackrel{\S 1}{=} \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

Also:  $E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y)$

c) folgt aus b)

d) Für  $x > 0$ :  $E(x) = 1 + x + \underbrace{x^2/2! + x^3/3! + \dots}_{>0} > 1$

$1 = E(x + (-x)) \stackrel{b)}{=} E(x)E(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ; Insb.:  $E(x) > 0$  ( $x < 0$ ) und  $E(-x) = E(x)^{-1}$ .

e) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$E(nx) = E(x + \dots + x) \stackrel{c)}{=} E(x)^n$$

$E(x) = (En(\frac{x}{n})) = E(\frac{x}{n})^n$ , also  $E(\frac{1}{n}x) = E(x)^{\frac{1}{n}}$ .

Für  $m, n \in \mathbb{N}$ :  $E(\frac{m}{n}x) = E(m\frac{x}{n}) = E(\frac{x}{n})^m = (E(x)^{\frac{1}{n}})^m = E(x)^{\frac{m}{n}}$  Also  $E(rx) = E(x)^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$  mit  $r > 0$ . Sei  $r \in \mathbb{Q}$  und  $r < 0$ . Dann:  $-r > 0$ , also

$$\underbrace{E(-rx)}_{\stackrel{d)}{=} \frac{1}{E(rx)}} = e(x)^{-r} = \frac{1}{E(x)^r}$$



Also  $E(rx) = E(x)^r$

f) folgt aus d) mit  $x = 1$ .

g) Sei  $x < y \Rightarrow y - x > 0 \xRightarrow{d)} E(y - x) > 1$

$$\Rightarrow 1 < E(y - x) \stackrel{b)}{=} E(y)E(-x) \stackrel{d)}{=} \frac{E(y)}{E(x)} \xRightarrow{d)} E(x) < E(y)$$

□

# Kapitel 4

## Potenzreihen

**Definition:**  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  sei eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

heißt **Potenzreihe** (PR).

Frage: für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die Potenzreihe (absolut)? Klar: die Potenzreihe konvergiert absolut für  $x = x_0$ .

**Beispiele:**

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Hier:  $a_n = \frac{1}{n!}, x_0 = 0$ . Bekannt: die Potenzreihe konvergiert absolut in jedem  $x \in \mathbb{R}$ .
- b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n$ . Hier:  $a_n = 1$ . Setze  $q := x - x_0$ . Bekannt:  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  konvergiert absolut  $\iff |q| < 1$ . D.g. die Potenzreihe konvergiert absolut  $\iff |x - x_0| < 1$
- c)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x - x_0)^n$ . Hier:  $a_n = n^n$ . Sei  $x \neq x_0$  und  $b_n := n^n (x - x_0)^n$ ;  $\sqrt[n]{|b_n|} = n|x - x_0| \xrightarrow{x \neq x_0} \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right)$  ist unbeschränkt  $\xrightarrow{3.6} \sum n^n (x - x_0)^n$  ist divergent.  
Also:  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x - x_0)^n$  konvergiert nur für  $x = x_0$ .

**Definition:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  sei eine Potenzreihe. Setze

$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \left( \sqrt[n]{|b_n|} \right) \text{ unbeschränkt;} \\ \limsup \sqrt[n]{|b_n|}, & \text{falls } \left( \sqrt[n]{|b_n|} \right) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0, \infty) \end{cases}$$

(kurz: „ $r = \frac{1}{\rho}$ “).  $r$  heißt der **Konvergenzradius** (KR) der Potenzreihe.

**Satz 4.1:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  sei eine Potenzreihe und  $\rho$  und  $r$  seien wie oben.

- a) Ist  $r = 0$ , so konvergiert die Potenzreihe nur für  $x = x_0$ .
- b) Ist  $r = \infty$ , so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .
- c) Ist  $r \in (0, \infty)$ , so konvergiert die Potenzreihe absolut für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < r$ , sie divergiert für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| > r$ . Für  $x = x_0 \pm r$  ist keine allg. Aussage möglich.

*Beweis:* Für  $x \in \mathbb{R}$  sei  $b_n := a_n(x - x_0)^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ).

Damit:  $\sqrt[n]{|b_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0|$

- a) Sei  $x \neq x_0$ .  $r = 0 \iff \rho = 0 \iff \left( \sqrt[n]{|b_n(x)|} \right)$  unbeschränkt  
 $\xRightarrow{3.6} \sum b_n(x)$  divergiert.

- b)  $r = \infty \iff \rho = 0 \iff \limsup \sqrt[n]{|b_n(x)|} = 0 \forall x \in \mathbb{R} \xRightarrow{3.6} \text{Beh.}$

- c)  $\limsup \sqrt[n]{|b_n(x)|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \rho|x - x_0| = \frac{1}{r}|x - x_0| < 1$   
 $\iff |x - x_0| < r$

Analog für  $|x - x_0| > r$ . Behauptung folgt aus 3.6.

□

**folgerung\*:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

*Beweis:*  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  hat den Konvergenzradius  $r = \infty$ ;  $a_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow{4.1} \rho = 0$ , also  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  Hilfssatz vor 3.6  $\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ . □

**Beispiele:**

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ;  $a_n = 1$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ),  $x_0 = 1$ ;  $\rho = 1, r = 1$ . Die Potenzreihe konvergiert für  $|x| < 1$  absolut; sie divergiert für  $|x| > 1$ .  $|x| = 1$ : die Potenzreihe divergiert.
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ,  $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ),  $x_0 = 0$ ;  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow r = 1$ . Die Potenzreihe konvergiert absolut für  $|x| < 1$  und sie divergiert für  $|x| > 1$ .  $x = 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert;  $x = -1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  konvergiert.
- c)  $\sum \frac{x^n}{n^2}$ ;  $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n^2}$  ( $n \geq 1$ ),  $x_0 = 0$ ;  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow r = 1$ . Die Potenzreihe konvergiert absolut für  $|x| < 1$ , sie divergiert für  $|x| > 1$ .  $x = 1$ :  $\sum \frac{1}{n^2}$  konvergiert absolut;  $x = -1$ :  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  konvergiert absolut.

**4.2 Cosinus:** Betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

hier:  $x_0 = 0, a_{2n+1} = 0, a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Mit  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$  folgt

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}} \rightarrow 0 \quad \text{Folgerung nach 4.1}$$

Also  $H(\sqrt[n]{|a_n|}) = \{0\}$ . Also:  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \xrightarrow{4.1}$  obige Potenzreihe hat den Konvergenzradius  $r = \infty$ , konvergiert also absolut in jedem  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Cosinus: } \begin{cases} \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

**4.3 Sinus:** Ähnlich wie bei 4.2 sieht man: die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \dots$$

konvergiert absolut für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\textbf{Sinus:} \quad \begin{cases} \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$$

Klar:  $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Ähnlich wie in 3.12 zeigt man (mit Cauchyprodukt) die **Additionstheoreme**  
 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Für  $x \in \mathbb{R}$ :

$$1 = \cos(0) = \cos(x+(-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $\cos^2 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , also  $|\cos x| \leq 1$  und  
 $\sin^2 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , also  $|\sin x| \leq 1$ .

**Satz 4.4:** Es ist  $a_n \neq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , die Folge  $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$  sei konvergent und  $L := \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ . Dann hat die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  den Konvergenzradius  $L$ .

*Beweis:* Sei  $x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$  und  $b_n := a_n(x-x_0)^n$ . Dann:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-x_0| \tag{*}$$

Fall 1:  $L = 0$ .  $|x - x_0| > 0 \Rightarrow \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq |x - x_0|$  ffa  $n$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \geq \text{ffa } n \stackrel{3.7}{\Rightarrow} \sum b_n \text{ divergiert}$$

Die Potenzreihe konvergiert also nur für  $x = x_0$ , also  $r = 0 = L$ .

Fall 2:  $L > 0$ .  $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{1}{L} |x - x_0|$

$$\stackrel{3.8}{\Rightarrow} \begin{cases} \text{Die Potenzreihe konv. absolut für } |x - x_0| < L \\ \text{Die Potenzreihe divergiert für } |x - x_0| > L \end{cases}$$

$\stackrel{4.1}{\Rightarrow} r = L$ .

□

# Kapitel 5

## q-adische Entwicklung

**Definition:** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann existiert genau eine Zahl  $k \in \mathbb{Z}$ :  $k \leq x < k+1$ ;

$$[x] := k = \text{größte ganze Zahl} \leq x$$

**Vereinbarung:** In diesem § sei stets  $a \geq 0, q \in \mathbb{N}$  und  $q > 1$ .

Setze  $z_0 := [a]$ , dann:  $z_0 \leq a < z_0 + 1$ .

Setze  $z_1 := [(a - z_0)q]$ , dann:  $z_1 \leq aq - z_0q < z_1 + 1$ .

Also

$$z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{1}{q}$$

Es ist  $z_1 \in \mathbb{N}_0$ : Annahme:  $z_1 \geq 1 \Rightarrow \frac{z_1}{q} \geq 1$

$$\Rightarrow z_0 + 1 \leq z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + 1$$

Widerspruch! Also:  $z_1 \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ .

Setze  $z_2 := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2]$ , dann (wie oben)

$$z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} + \frac{1}{q^2}$$

und  $z_2 \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ .

Allgemein (induktiv): sind  $z_0, \dots, z_n$  schon definiert, so setze

$$z_{n+1} := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q} - \dots - \frac{z_n}{q^n})q^{n+1}]$$

Wir erhalten so eine Folge  $(z_n)_{n=0}^\infty$  mit:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} z_0 \in \mathbb{N}_0, z_n \in \{0, 1, \dots, q-1\} \quad \forall n \geq 1 \\ \text{und} \\ \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \dots + \frac{z_n}{q^n}}_{=: S_n} \leq a < \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \dots + \frac{z_n}{q^n} + \frac{1}{q^n}}_{=: S_n + \frac{1}{q^n}} \end{array} \right.$$

In den großen Übungen wird gezeigt:

**Satz 5.1:** Ist  $(\tilde{z}_n)_0^\infty$  eine weitere Folge mit den Eigenschaften in  $(*)$ , so gilt:

$$z_n = \tilde{z}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Es ist

$$0 \leq \frac{z_n}{q^n} \leq \frac{q-1}{q^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} \text{ konvergiert.}$$

$\xRightarrow{3.5 \ a)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{z_n} q^n$  konvergiert. Also ist  $(s_n)$  konvergent.

$$\xRightarrow{(*)} a = \lim s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n}$$

Dafür schreibt man:  $a = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$  (**q-adische Entwicklung von  $a$** )

$q = 10$ : Dezimalentwicklung;  $q = 2$ : Dualentwicklung;

(Gilt mit einem  $m \in \mathbb{N}$ :  $z_n = 0 \quad \forall n > m$ , so schreibt man auch:  $a = z_0, z_1 \dots z_m$ ).

**Beispiele:**

- a)  $q = 10, a = 1$ .  $z_0 = 1, z_1 = [(a - z_0)q] = 0$ ;  
 $z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = 0, \dots$  allg.:  $z_n = 0 \quad \forall n \geq 1$ .  
 Also  $1 = 1,000\dots$



b)  $q = 10, a = \frac{1}{2}$ .  $z_0 = 0, z_1 = [(a - z_0)q] = [\frac{1}{2}10] = 5$ ;  
 $z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = [(\frac{1}{2} - \frac{5}{10})100] = 0, \dots$  allg.:  $z_n = 0 \ \forall n \geq 2$ .  
Also  $\frac{1}{2} = 0,5000\dots = 0,5$

**Definition:** Sei  $b \in \mathbb{R}$  und  $b < 0$ . Weiter sei

$$-b = z_0, z_1 z_2 \dots$$

die q-adische Entwicklung von  $-b$ . Dann ist  $b = -z_0, z_1 z_2 \dots$  die q-adische Entwicklung von  $b$ .

**Satz 5.2:** Sei  $a = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$  die q-adische Entwicklung von  $a$ . Dann ist  $z_n = q-1$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  nicht möglich.

*Beweis:* Annahme:  $\exists m \in \mathbb{N}: z_n = q-1 \ \forall n \geq m$ . Dann

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{q^n}}_{=S_{m-1}} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^n}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} &= (q-1) \left( \frac{1}{q^m} + \frac{1}{q^{m+1}} + \dots \right) \\ &= \frac{q-1}{q^m} \left( 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \right) \\ &= \frac{q-1}{q^m} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q^{m-1}} \end{aligned}$$

Also  $a = S_{m-1} + \frac{1}{q^{m-1}} \stackrel{(*)}{>} a$ . Widerspruch!

□

**Satz 5.3:**  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar.

*Beweis:* es genügt zu zeigen:  $[0, 1)$  ist überabzählbar. Annahme  $[0, 1)$  abzählbar, also  $[0, 1) = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Für  $j \in \mathbb{N}$  sei

$$a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$$

die 3-adische Entwicklung von  $a_j$ , also  $z_k^{(j)} \in \{0, 1, 2\}$ . Setze

$$z_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } z_k^{(k)} = 0 \text{ oder } z_k^{(k)} = 2 \\ 0, & \text{falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

Dann:  $z_k \neq z_k^k \forall k \in \mathbb{N}$  (\*\*)

Setze  $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n}$ . Dann:

$$0 \leq a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}, \text{ also } a \in [0, 1)$$

Übung:  $0, z_1 z_2 z_3 \dots$  ist die 3-adische Entwicklung von  $a$ .  $a \in [0, 1) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a = a_m$ , also

$$0, z_1 z_2 z_3 \dots = 0, z_1^{(m)} z_2^{(m)} \dots$$

und  $z_j = z_j^{(m)} \forall j \in \mathbb{N} \xrightarrow{j=m} z_m = z_m^{(m)}$ . Widerspruch zu (\*\*). □

# Kapitel 6

## Grenzwerte bei Funktionen

**Definition:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von  $D \iff \exists$  Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .

**Beispiele:** a)  $D = (0, 1]$

$x_0$  ist Häufungspunkt von  $D \iff x_0 \in [0, 1]$

b)  $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$D$  hat genau einen Häufungspunkt:  $x_0 = 0$ .

c) Ist  $D$  endlich, so hat  $D$  keine Häufungspunkte.

**Hilfssatz 6.1:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D \iff \forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ .

*Beweis:*

“  $\Rightarrow$  ”  $\exists$  Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\} : x_n \rightarrow x_0$ . Sei  $\epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \forall n \geq n_0$

“  $\Leftarrow$  ”  $\exists x_1 \in U_1(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$ , also  $|x_1 - x_0| < 1 \exists x_2 \in U_{\frac{1}{2}}(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$ , also  $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$ , etc.

Wir erhalten eine Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \forall n$ , also  $x_n \rightarrow x_0$ .

□

**Vereinbarung:** ab jetzt sei stets in den §en:

- $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$  und

- $f := D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

**Bezeichnung:**

- a)  $D_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$
- b) Sei  $M \subseteq D$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Funktion mit  $f \leq g$  auf  $M \iff f(x) \leq g(x) \forall x \in M$ .

**Definition:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert  $\iff \exists a \in \mathbb{R}$ : für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \in \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$ . In diesem Fall ist  $a$  eindeutig bestimmt und wir schreiben:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) \rightarrow a \ (x \rightarrow x_0)$$

**Bemerkung:** sollte  $x_0 \in D$  sein, so ist der Wert  $f(x_0)$  in obiger Definition nicht relevant. Relevant ist allein das Verfahren von  $f$  in das „Nähe“ von  $x_0$ .

**Beispiele:**

- a)  $D := [0, \infty), p \in \mathbb{N}; f(x) := \sqrt[p]{x}$ . Sei  $x_0 \in D$  (dann ist  $x_0$  eine Häufungspunkt von  $D$ ). Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  und  $x_n \rightarrow x_0 \xrightarrow{2.4} \sqrt[p]{x_n} \rightarrow \sqrt[p]{x_0}$ . Also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt[p]{x_0}$$

- b)  $D = (0, 1]$

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Klar:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

$$x_n := \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, z_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad (n \geq 3)$$

Dann:  $x_n \rightarrow \frac{1}{2}, z_n \rightarrow \frac{1}{2}$ , aber  $f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{4} \neq 1 \leftarrow f(z_n)$ .

D.h.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  existiert nicht, aber  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x \in (0, \frac{1}{2})}} f(x) = \frac{1}{4}$ , dafür schreibt

man  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} f(x) = \frac{1}{4}$  (linksseitiger Grenzwert)

Analog:  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x \in (\frac{1}{2}, \infty)}} f(x) = 1$  (rechtsseitiger Grenzwert)

c)  $D = \mathbb{R}, f = E$ , also  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; x_0 = 0$ . Sei  $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} |E(x) - E(0)| &= |E(x) - 1| = \left| x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right| \\ &= |x| \left| 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right| \\ &\leq |x| \left( 1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \dots \right) \\ &\leq |x| \left( 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) \\ &= |x|(e - 1) \end{aligned}$$

Sei  $(x_n)$  Folge in  $\mathbb{R}: x_n \rightarrow 0$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |E(x_n) - 1| \leq |x_n|(e - 1) \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow E(x_n) \rightarrow 1$

Also:  $\lim_{x \rightarrow 0} E(x) = 1 = E(0)$ . Somit:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{n!} \right)$ .

### Satz 6.2:

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\epsilon)) :$

$$(*) |f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x \in D_\delta(x_0)$$

b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert

$\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  ist  $(f(x_n))$  konvergent.

c) **Cauchy Kriterium:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert

$\iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \forall x_1, x_2 \in D_\delta(x_0)$

**Satz 6.3:**  $f, g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$  seien Funktionen. (Erinnerung:  $D_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$ ). Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und es gelte  $f(x) \rightarrow a, g(x) \rightarrow b$  ( $x \rightarrow x_0$ ). Dann:

a)  $\alpha f(x) + \beta g(x) \rightarrow \alpha a + \beta b; f(x)g(x) \rightarrow ab,$   
 $|f(x)| \rightarrow |a|$  ( $x \rightarrow x_0$ )

b) Ist  $a \neq 0$ , so existiert ein  $\delta > 0$ :  $f(x) \neq 0 \forall x \in D_\delta(x_0)$ . Für  $\frac{1}{f}: D_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{a}$  ( $x \rightarrow x_0$ ).

c) Für ein  $\delta > 0$  gelte:  $f \leq g$  auf  $D_\delta(x_0)$ . Dann:  $a \leq b$

d) Für ein  $\delta > 0$  gelte:  $f \leq h \leq g$  auf  $D_\delta(x_0)$ . Ist  $a = b$ , so gilt:  $h(x) \rightarrow a$  ( $x \rightarrow x_0$ ).

*Beweis:* z. B.: c) Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  und  $x_n \rightarrow x_0$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$x_n \in D_\delta(x_0) \forall n \geq n_0$$

Dann:  $f(x_n) \leq g(x_n) \forall n \geq n_0 \xrightarrow{2.2} a = \lim f(x_n) \leq \lim g(x_n) = b.$   $\square$

**Definition:**

a) Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .

$$x_n \rightarrow \infty \iff \forall c > 0 \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : x_n > c \forall n \geq n_0$$

$$x_n \rightarrow -\infty \iff \forall c < 0 \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : x_n < c \forall n \geq n_0$$

Übung:  $x_n \rightarrow \infty \iff x_n > 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und  $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$  und

$$x_n \rightarrow -\infty \iff x_n < 0 \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$

b) Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0$  Häufungspunkt von  $D$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \iff \forall (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ gilt: } f(x_n) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ gilt: } f(x_n) \rightarrow -\infty$$

c)  $D$  sei nicht nach oben beschränkt,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion und  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \iff \forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow \infty \text{ gilt: } f(x_n) \rightarrow a$$

d)  $D$  sei nicht nach unten beschränkt,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion und  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \iff \forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow -\infty \text{ gilt: } f(x_n) \rightarrow a$$

**Beispiel 6.4:**  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow 0+0$ ),  $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow 0-0$ ),  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ )

**6.5 Exponentialfunktionen:**  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Sei  $p \in \mathbb{N}_0$ : für  $x > 0$ :

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \dots \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$$

Also:  $\forall x > 0: \frac{E(x)}{x^p} > \frac{x}{(p+1)!}$ . Somit:

$$\frac{E(x)}{x^p} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

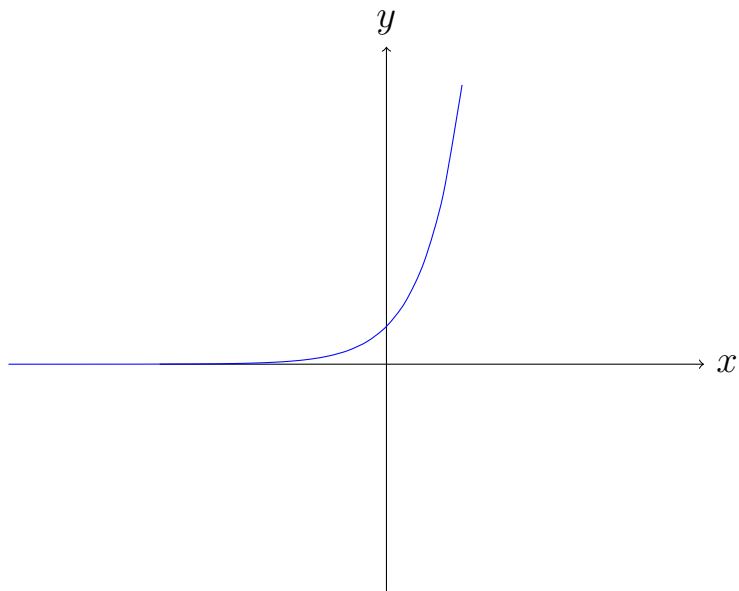


Abbildung 6.1: Exponentialfunktion.

Insbes. ( $p = 0$ ):  $E(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ). Es ist  $E(-x) = \frac{1}{E(x)} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ),  
also:  $(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow -\infty$ ).



# Kapitel 7

## Stetigkeit

**Definition:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in D$ .

a)  $f$  heißt **in  $x_0$  stetig**  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  
 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

b)  $f$  heißt **auf  $D$  stetig**  $\iff$   $f$  ist in jedem  $x \in D$  stetig.

**Beispiele:** a)  $D = [0, \infty)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = \sqrt[p]{x}$ . Bekannt: ist  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0 \in D$ , so gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Also:  $f \in C([0, \infty))$

$$\text{b) } D = [0, 1] \cup \{2\}, f(x) := \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Klar:  $f$  ist stetig in jedem  $x \in [0, 1)$ .

- $x_0 := 1$ ,  $x_n := 1 - \frac{1}{n}$ . Dann ist  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow 1$ , aber  $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow 0 \neq 1 = f(1)$ .  $f$  ist also in  $x_0 = 1$  nicht stetig.
- $x_0 := 2$ , sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow 2$ . Dann:  $x_n = 2$  ffa  $n$ , also  $f(x_n) = 1$  ffa  $n$ . Somit:  $f(x_n) \rightarrow 1 \neq 1 = f(2)$ .  $f$  ist also in  $x_0 = 2$  nicht stetig.

**Satz 7.1:**  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0 \in D$ .

a)  $f$  ist in  $x_0$  stetig  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ :

$$\forall x \in D_\delta(x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

b) Ist  $x_0$  Häufungspunkt von  $D$ , so gilt:

$$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

*Beweis:*

a) fast wörtlich wie bei 6.2.

b) Übung.

□

**Satz 7.2:**

a)  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig in  $x_0 \in D$  und es seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , Dann sind  
stetig in  $x_0$ ;

$$\alpha f + \beta g, fg \text{ und } |f|$$

Ist  $x_0 \in \tilde{D} := \{x \in D : f(x) \neq 0\}$ , so ist  $\frac{1}{f}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .

b) Sind  $f, g \in C(D)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so gilt:

$$\alpha f + \beta g, fg \text{ und } |f| \in C(D)$$

*Beweis:* a) Mit 2.2; b) folgt aus a). □

**Satz 7.3:** Es seien  $D, D_0 \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, g: D_0 \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen,  $f(D) \subseteq D_0, x_0 \in D$  und  $y_0 := f(x_0)$ . Ist  $f$  in  $x_0$  stetig und ist  $g$  in  $y_0$  stetig, so ist

$$g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in  $x_0$ , wobei  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ .

*Beweis:* Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .  $f$  stetig in  $x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) = y_0$ .  $g$  stetig in  $y_0 \Rightarrow \underbrace{g(f(x_n))}_{=(g \circ f)(x_n)} \rightarrow g(x_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$  □

**Satz 7.4:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ . Es sei  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ , falls  $r < \infty$  und  $D := \mathbb{R}$  falls  $r = \infty$ . Weiter sei

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad (x \in D)$$

Dann:  $f \in C(D)$ .

*Beweis:* später, nach 8.3. □

**Beispiele:** Exponentialfunktionen, Sinus und Cosinus sind also auf  $\mathbb{R}$  stetig.

**Beispiel 7.5:** Beh.:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

*Beweis:* Für  $x \neq 0$ :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \right) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

□

**Beispiel 7.6:** Beh.:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E(x)-1}{x} = 1$ .

*Beweis:* Für  $x \neq 0$ :

$$\frac{E(x) - 1}{x} = \frac{1}{x} \left( \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) - 1 \right) = \underbrace{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

□

**folgerung\*:**  $\forall x_0 \in \mathbb{R}: \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(x_0+h)-E(x_0)}{h} = E(x_0)$

*Beweis:*  $\frac{E(x_0+h)-E(x_0)}{h} = \frac{E(x_0)E(h)-E(x_0)}{h} = E(x_0) \frac{E(h)-1}{h} \xrightarrow{7.6} E(x_0) \quad (h \rightarrow 0)$  □

**7.7 Zwischenwertsatz:** Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a, b])$  und  $y_0$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$ .

Dann existiert ein  $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$ .

*Beweis:* Fall 1:  $f(a) = y_0$  oder  $f(b) = y_0$ , fertig.

Fall 2:  $f(a) \neq y_0 \neq f(b)$ . o.B.d.A.:  $f(a) < f(b)$ , also  $f(a) < y_0 < f(b)$ .

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}; a \in M \Rightarrow M \neq \emptyset;$$

$M \subseteq [a, b] \Rightarrow M$  ist beschränkt  $\xrightarrow{(A15)} \exists x_0 := \sup M \in [a, b]$ .

Ist  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $x_0 - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $M$ , also ex.  $x_n \in M : x_n > x_0 - \frac{1}{n}$ .

Also:  $\forall n \in \mathbb{N} : x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_n$ . Somit  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $f$  stetig in  $x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \xrightarrow{\text{Def. von } M} \forall n \in \mathbb{N} : f(x_n) \leq y_0 \Rightarrow f(x_0) \leq y_0$ .

Es ist  $x_0 < b$  (andernfalls:  $x_0 = b \Rightarrow f(b) = f(x_0) \leq y_0 < f(b)$ , Wid!).

$z_n := x_0 + \frac{1}{n}$ . Es gilt  $z_n \in [a, b]$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  $z_n > x_0 \Rightarrow z_n \notin M \Rightarrow f(z_n) > y_0$ .

$z_n \rightarrow x_0$ ,  $f$  stetig  $\Rightarrow f(z_n) \rightarrow f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \geq y_0$ .  $\square$

**folgerung\*** (vgl. 1.6): Ist  $\alpha > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ , so existiert ein  $x_0 > 0 : x_0^n = \alpha$ .

*Beweis:*  $b := 1 + \alpha, f(x) := x^n (x \in [a, b])$ .

Dann:  $f \in C[a, b], f(0) = 0 < \alpha, f(b) = (1 + \alpha)^n \stackrel{BK}{\geq} 1 + n\alpha > \alpha \xrightarrow{7.7} \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = \alpha$ , also  $x_0^n = \alpha$ . Klar:  $x_0 > 0$ , denn  $\alpha > 0$ .  $\square$

**Bemerkung:** Erst jetzt ist 1.6 vollständig bewiesen!

Aus 7.7 folgt mit  $y_0 = 0$ :

**7.8 Nullstellensatz von Bolzano:** Ist  $f \in C([a, b])$  und  $f(a)f(b) \leq 0$ , so existiert ein  $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$ .

**7.9 Exponentialfunktion:**  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Beh.:  $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ .

Beweis:  $\xRightarrow{3.12} \forall x \in \mathbb{R} E(x) > 0$ , also  $E(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$ . Sei  $y_0 \in (0, \infty)$ .

$$\xRightarrow{6.5} E(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty) \Rightarrow \exists b > 0 : E(b) > y_0$$

$$\xRightarrow{6.5} E(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow -\infty) \Rightarrow \exists a < 0 : E(a) < y_0$$

$\xRightarrow{7.7} \exists x_0 \in [a, b] : E(x_0) = y_0$ . Also:  $y_0 \in E(\mathbb{R})$ . Somit:  $(0, \infty) \in E(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Definition:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

- a)  $D$  heißt **abgeschlossen**  $\iff$  für jede konvergente Folge  $(x_n)$  in  $D$  gilt  $\lim x_n \in D$ .
- b)  $D$  heißt **kompakt**  $\iff$  jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D$ .

**Satz 7.10:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

- a)  $D$  ist abgeschlossen  $\iff$  jeder Häufungspunkt von  $D$  gehört zu  $D$ .
- b)  $D$  ist kompakt  $\iff D$  ist beschränkt und abgeschlossen.
- c) Ist  $D$  kompakt und  $D \neq \emptyset$ , so existieren  $\max D$  und  $\min D$ .

**Beispiele:**

- a)  $[a, b]$  ist kompakt, also auch abgeschlossen.
- b) endliche Mengen sind kompakt.
- c)  $[a, \infty), (-\infty, a], \mathbb{R}$  sind abgeschlossen, aber nicht kompakt.
- d)  $\emptyset$  ist abgeschlossen.
- e)  $(a, b], [a, b), (a, b)$  sind nicht abgeschlossen.

*Beweis:* (7.10)

a) i. d. großen Übung.

b) “ $\Leftarrow$ ” Folgt direkt aus 2.12, “ $\Rightarrow$ ” Übung.

c) Seis  $s := \sup D$ .  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D : x_n > s - \frac{1}{n}$ , also  $\forall n \in \mathbb{N} s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$ . Somit:  $x_n \rightarrow s \stackrel{b)}{\Rightarrow} D$  ist abgeschlossen  $\Rightarrow s \in D \Rightarrow s = \max D$ . Analog zeigt man:  $\inf D \in D$ .

□

**Definition:**  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt beschränkt  $\iff f(D)$  ist **beschränkt**

$$(\iff \exists c \geq 0: |f(x)| \leq c \forall x \in D)$$

**Satz 7.11:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  kompakt und  $f \in C(D)$ . Dann ist  $f(D)$  kompakt. Insbesondere ist  $f$  beschränkt und es ex.  $x_1, x_2 \in D$ :

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in D$$

*Beweis:* Sei  $(y_n)$  eine Folge in  $f(D)$ .  $\exists$  Folge  $(x_n)$  in  $D$ :  $\forall n \in \mathbb{N} f(x_n) = y_n$ .  $D$  kompakt  $\Rightarrow (x_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D$ .  $f$  stetig

$$\Rightarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \in f(D)$$

□

**Satz 7.12:**

a) Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ( $I = \mathbb{R}$  ist zugelassen!) und  $f \in C(I)$ , so ist  $f(I)$  ein Intervall.

b) Sei  $f \in C([a, b])$ ,  $A := \lim f([a, b])$  und  $B := \max f([a, b])$  (7.11!), so ist  $f[a, b] = [A, b]$ .

*Beweis:* a) ohne Beweis. b) folgt aus a) und 7.7. □

### Definition:

a)  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **monoton wachsend**  $\iff$  aus  $x_1, x_2 \in D$  und  $x_1 < x_2$  folgt stets  $f(x_1) \leq f(x_2)$   
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **streng monoton wachsend**  $\iff$  aus  $x_1, x_2 \in D$  und  $x_1 < x_2$  folgt stets  $f(x_1) < f(x_2)$

b) Entsprechend definiert man **(streng) monoton fallend**.

c)  $f$  heißt (streng) monoton  $\iff f$  ist (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend.

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ( $I = \mathbb{R}$  ist zugelassen) und  $f: I \Rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend bzw. fallend. Dann ist  $f$  auf  $I$  injektiv, es existiert also die **Umkehrfunktion**  $f^{-1}: F(I) \Rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$  und  $f^{-1}$  ist streng monoton wachsend bzw. fallend.

Es gilt  $\forall x \in I: f^{-1}(f(x)) = x$  und  $\forall y \in F(I): f(f^{-1}) = y$

Bem.:  $f(I)$  ist i.A. kein Intervall

**Satz 7.13:** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f \in C(I)$  und  $f$  sei auf  $I$  streng monoton. Dann:

$$f^{-1} \in C(f(I))$$

**7.14 Der Logarithmus:** Bekannt:  $E$  ist auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend und  $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ . Es existiert also  $E^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\log x := \ln x := E^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty))$$

**Logarithmus.**

### Eigenschaften:

- a)  $\log 1 = 0, \log e = 1$
- b)  $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und streng monoton wachsend
- c)  $\log((0, \infty)) = \mathbb{R}$
- d)  $\log x \rightarrow \infty \ (x \rightarrow \infty), \log x \rightarrow -\infty \ (x \rightarrow 0)$
- e)  $\log x + \log y = \log(xy) \ \forall x, y > 0$
- f)  $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \ \forall x, y > 0$

*Beweis:*

- a) klar
- b) folgt aus 7.13
- c)  $E(\mathbb{R}) = (0, \infty) \Rightarrow$  Beh.
- d) folgt aus  $E(x) \rightarrow \infty \ (x \rightarrow \infty)$  bzw.  $E(x) \rightarrow 0 \ (x \rightarrow -\infty)$ .
- e)  $z := \log x + \log y$ . Dann:  $E(z) = E(\log x + \log y) = E(\log x)E(\log y) = xy \Rightarrow \log(xy) = \log E(z) = z \Rightarrow$  Beh.
- f) Analog.

□

**Motivation:**  $\xRightarrow{3.12} E(rx) = E(x)^r \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall r \in \mathbb{Q}$ .

Sei  $a > 0$ . Mit  $x := \log$ :

$$\forall r \in \mathbb{Q}: \quad E(r \log a) = E(\log a)^r = a^r$$



### 7.15 Die allgemeine Potenz: Sei $a > 0$ :

$$a^x := E(x \log a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ist speziell  $a = e$ :  $e^x = E(x \log e) = E(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Also:

$$a^x = e^{x \log a} \quad (x \in \mathbb{R}, a > 0).$$

**Eigenschaften:** Sei  $a > 0$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ .

a)  $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

b) Die Funktion  $x \mapsto a^x$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig.

c)  $a^{x+y} = e^{(x+y) \log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y$

d)  $a^{-x} = e^{-x \log a} = \frac{1}{e^{x \log a}} = \frac{1}{a^x}$

e)  $\log(a^x) = \log(e^{x \log a}) = x \log a$

f)  $(a^x)^y = e^{y \log a^x} \stackrel{e)}{=} e^{xy \log a} = a^{xy}$ .

g) Ist  $x > 0$ , so ist  $a^{x^y} := a^{(x^y)}$ .

**Erinnerung an 7.1:** Sei  $f \in C(D)$ ,  $x_0 \in D$  und  $\epsilon > 0$ . Dann ex.  $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ :

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

$\delta$  hängt i.A. von  $\epsilon$  und  $x_0$  ab!

**Definition:**  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $D$  **gleichmäßig stetig**  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0: |f(x) - f(z)| < \epsilon \quad \forall x, z \in D: |x - z| < \delta$ .

Klar:  $f$  gleichmäßig stetig  $\Rightarrow f$  stetig. (" $\Leftarrow$ " ist i.A. falsch!).

Ohne Beweis.

**Satz 7.16:** Ist  $D \subseteq \mathbb{R}$  kompakt und  $f \in C(D)$ , so ist  $f$  auf  $D$  gleichmäßig stetig.

**Definition:**  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $D$  **Lipschitz-stetig**  $\iff \exists L \geq 0$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D$$

Übung:  $f$  Lips.-stetig  $\Rightarrow f$  glm. stetig.

**Beispiel:**  $D = [0, 1]$ ,  $f(x) = x^2$ .

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| = |x + y||x - y| \\ &\leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2|x - y| \quad \forall x, y \in [0, 1] \end{aligned}$$

**Bemerkung:**  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$  ist nicht glm. stetig, insbesondere nicht Lips.-stetig.

# Kapitel 8

## Funktionenfolge und -reihen

I. d. §en sei stets:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $s_n := f_1 + f_2 + \cdots + f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

### Definition:

- a) Die Funktionenfolge  $(f_n)$  heißt **auf D punktweise konvergent**  $\iff$  für jedes  $x \in D$  ist die Folge  $(f_n(x))$  konvergent.  
In diesem Fall setze  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ( $x \in D$ ). Die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt die **Grenzfunktion** von  $(f_n)$ .
- b) Die Funktionenreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  heißt **auf D punktweise konvergent**  $\iff$  für jedes  $x \in D$  ist die Folge  $(s_n(x))$  konvergent.  
In diesem Fall setze  $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  ( $x \in D$ ). Die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt die **Summenfunktion** von  $(f_n)$ .

### Beispiele:

- a)  $D = [0, 1]$ ,  $f_n(x) := x^n$

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$(f_n)$  konvergiert auf  $[0, 1]$  punktweise gegen  $f$ .

- b) Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $r > 0$  und  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $D := \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ). Hier:  $f_n(x) =$

$a_n(x - x_0)^n \xrightarrow{4.1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  konvergiert auf  $D$  punktweise gegen  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ .

c)  $D = [0, \infty, f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n}+x^2} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ . Also konvergiert  $(f_n)$  auf  $D$  punktweise gegen  $f \equiv 0$ . Es ist  $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$

Punktweise Konvergenz von  $(f_n)$  auf  $D$  gegen  $f$  bedeutet: ist  $\epsilon > 0$  und  $x \in D$ , so existiert eine  $n_0$   $n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ :

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

### Definition:

a)  $(f_n)$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig(glm) gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ :

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \forall x \in D.$$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig(glm) gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ :

$$|s_n(x) - s(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \forall x \in D.$$

Klar: gleichmäßige Konvergenz  $\Rightarrow$  punktweise Konvergenz (“ $\Leftarrow$ “ ist i. A. falsch, siehe Beispiele unten).

Anschaulich:  $(f_n)$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$  bedeutet: zu  $\epsilon > 0$  existiert ein  $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ : für  $n \geq n_0$  liegt der Graph von  $f_n$  im “ $\epsilon$ -Schlauch“ um  $f$ .

### Beispiele:

a) Sei  $D = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x^n$ .  $(f_n)$  konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, 1], \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Sei  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ . Es ist  $f_n(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$  und damit

$$|f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) - f(\frac{1}{\sqrt[n]{2}})| = \frac{1}{2} > \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(f_n)$  konvergiert also nicht gleichmäßig auf  $[0, 1]$  gegen  $f$ .

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ,  $D = (-1, 1)$ ,

$$s_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \rightarrow \frac{1}{1 - x} =: f(x) \quad \forall x \in D.$$

Beh.:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergiert auf  $D$  nicht gleichmäßig gegen  $f$ .

Bew.: Annahme:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , also  $(s_n)$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$ . Zu  $\epsilon = 1$  existiert dann ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$|s_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < 1 \quad n \geq n_0, \quad \forall x \in D$$

Aber:  $\frac{|x|^{n+1}}{1-x} \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow 1-$ ), Widerspruch!

c)  $D = [0, \infty)$ ,  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ .  $f_n(x) \rightarrow 0 := f(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Sei  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ :

$$|f_n(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})| = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$(f_n)$  konvergiert also auf  $D$  nicht gleichmäßig gegen  $f$ .

**Satz 8.1:**

- a)  $(f_n)$  konvergiere auf  $D$  punktweise gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiter sei  $(\alpha_n)$  eine Folge,  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \forall n \geq m \quad \forall x \in D$$

Dann konvergiert  $(f_n)$  auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$ .

- b) **Kriterium von Weierstraß:** Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $(c_n)$  eine Folge in  $[0, \infty)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  konvergent und

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall n \geq m \quad \forall x \in D$$

Dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  auf  $D$  gleichmäßig.

*Beweis:*

- a) Sei  $\epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \geq m: \alpha_n < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$ . Dann:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D$$

- b) Sei  $x \in D$ .  $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall n \geq m \xrightarrow{3.5 a)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konvergiert (absolut).

□

**Satz 8.2:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ , es sei  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $D := \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ).

Ist  $[a, b] \subseteq D$ , so konvergiert die Potenzreihe auf  $[a, b]$  gleichmäßig

*Beweis:* Sei o. B. d. A.  $x_0 = 0$

Wähle  $\delta > 0$  so, dass  $-r < -\delta < a < b < \delta < r$ . Sei  $x \in [a, b]$ . Dann  $|x| \leq \delta$ , also

$$|a_n x^n| = |a_n| |x|^n \leq |a_n| \delta^n := c_n \quad (*)$$

$\xrightarrow{4.1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n$  konvergiert absolut; also ist  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergent. Aus  $(*)$  und 8.1 b) folgt die Behauptung. □

**Satz 8.3:**  $(f_n)$  bzw.  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergiere auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

a) Sind alle  $f_n$  in  $x_0 \in D$  stetig, so ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

b) Sind alle  $f_n \in C(D)$ , so ist  $f \in C(D)$ .

**Folgerungen:**

a) Konvergiert  $(f_n)$  auf  $D$  punktweise gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und gilt  $f_n \in C(D) \forall n$  aber  $f \notin C(D)$ , so ist Konvergenz nicht gleichmäßig!

b) Voraussetzung wie in 8.3 a);  $x_0$  sei Häufungspunkt von  $D$ . Dann:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{8.3 a)}{=} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) \end{aligned}$$

*Beweis:* (von 8.3) b) folgt aus a)

a) Sei  $\epsilon > 0$ .  $\exists m \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \forall x \in D$ .  $f_m$  stetig in  $x_0 \stackrel{7.1}{\implies} \exists \delta > 0 : |f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ . Für  $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

$\stackrel{7.1}{\implies}$  Beh.

□

*Beweis:* (von 7.4)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $D = \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in D).$

Sei  $z_0 \in D$ . Wähle  $a, b \in \mathbb{R}$  so, dass  $z_0 \in (a, b) \subseteq [a, b] \subseteq D \xrightarrow{8.2}$  die Potenzreihe konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig  $\xrightarrow{8.3} f \in C([a, b])$ .  $f$  ist also in  $z_0$  stetig.  $z_0 \in D$  beliebig  $\Rightarrow f \in C(D)$ .  $\square$

**8.4 Identitätssatz für Potenzreihen:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $D := \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in D)$ .

Weiter sei  $(x_k)$  eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_k \rightarrow x_0$  und  $f(x_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .  
Dann:

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$



# Kapitel 9

## Differentialrechnung

I.d. §en sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

**Definition:**  $f$  heißt in  $x_0 \in I$  **differenzierbar** (db)  $\iff$  es existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und ist  $\in \mathbb{R}$  ( $\iff$  es existiert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  und ist  $\in \mathbb{R}$ ).

I.d. Fall heißt obiger Grenzwert die **Ableitung von  $f$  in  $x_0$**  und wir mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.

Ist  $f$  in jedem  $x \in I$  differenzierbar, so heißt  $f$  **auf  $I$  differenzierbar** und die **Ableitung  $f'$  von  $f$  auf  $I$**  gegeben durch  $x \mapsto f'(x)$ .

**Beispiele:**

a) Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $f(x) := c$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Dann ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $f' \equiv 0$ .

b)  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$f$  ist also in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar.

c)  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$  ( $x \in \mathbb{N}$ ). Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq x_0$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &\stackrel{\S}{=} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1} \rightarrow nx_0^{n-1} \quad (x \rightarrow x_0) \end{aligned}$$

Also  $f$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(x) = nx^{n-1}$ , kurz:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ auf } \mathbb{R}.$$

d)  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ . Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $x \neq x_0$ .

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \stackrel{7.6}{\rightarrow} e^{x_0} \quad (h \rightarrow 0).$$

Also:  $f$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(x) = e^x$ , kurz:

$$(e^x)' = e^x \text{ auf } \mathbb{R}$$

**Satz 9.1:** Ist  $f$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar, so ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

*Beweis:* Sei  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad (x \rightarrow x_0)$$

Also:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . □

**9.2 Differentiationsregeln:**  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine weitere Funktion.  $f, g$  seien differenzierbar in  $x_0 \in I$ .

a) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g$  differenzierbar in  $x_0$  und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b)  $fg$  ist differenzierbar in  $x_0$  und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so existiert ein  $\delta > 0$  mit  $g(x) \neq 0$  ( $x \in J := I \cap U_\delta(x_0)$ ).

Die Funktion  $\frac{f}{g}: J \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar in  $x_0$  und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

*Beweis:*

a) leichte Übung.

b) Übung (man orientiere sich an c)).

c)  $g$  stetig in  $x_0$  (s. 9.1).  $g(x_0) \neq 0 \xrightarrow{6.3 \text{ b)}} \exists \delta > 0$ :

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \cap U_\delta(x_0) =: J.$$

$h := \frac{f}{g}$ . Für  $x \neq x_0$  mit  $x \rightarrow x_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)} - f(x_0) \frac{\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)}}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\rightarrow \frac{1}{g(x_0)^2}} \left( \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} g(x_0) - f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \right) \end{aligned}$$

□

**Satz 9.3:** Es sei  $f \in C(I)$  streng monoton, in  $x_0 \in I$  differenzierbar und es sei  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist

$$f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } y_0 := f(x_0)$$

und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

*Beweis:*  $\xrightarrow{7.12}$   $f(I)$  ist ein Intervall; sei  $(y_n)$  eine Folge in  $f(I)$  mit  $y_n \rightarrow y_0$  und  $y_n \neq y_0 \ \forall n$ .  $x_n := f^{-1}(y_n) \xrightarrow{7.13} x_n \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$ , also

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad (x \rightarrow x_0)$$

□

**9.4 Kettenregel:**  $J \subseteq \mathbb{R}$  sei ein weiteres Intervall,  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $f(I) \subseteq J$ .  $f$  sei in  $x_0 \in I$  differenzierbar und  $g$  sei in  $y_0 := f(x_0)$  differenzierbar. Dann ist

$$g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } x_0$$

und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

*Beweis:* Für  $y \in J$ :

$$\tilde{g}(y) := \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0), & y = y_0 \end{cases}$$

$g$  ist differenzierbar in  $y_0 \Rightarrow \tilde{g}$  ist stetig in  $y_0$  d.h.  $\tilde{g}(y) \rightarrow \tilde{g}(y_0) = g'(y_0) = g'(f(x_0)) \ (y \rightarrow y_0)$

$$\Rightarrow \tilde{g}(f(x)) \rightarrow g'(f(x_0)) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Es ist  $g(y) - g(y_0) = \tilde{g}(y)(y - y_0) \ \forall y \in J$ , daraus folgt:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \tilde{g}(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

□

### Beispiele:

- a) Sei  $a > 0$  und  $h(x) := a^x = e^{x \log a} = g(f(x))$ , wobei  $g(x) = e^x$  und  $f(x) = x \log a$ . Dann:  $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$ .  
Kurz:

$$(a^x)' = a^x \log a \quad (x \in \mathbb{R})$$

- b)  $f(x) = e^x$ ,  $f^{-1}(y) = \log y$  ( $y > 0$ )  $\xrightarrow{9.3} f^{-1}$  ist auf  $(0, \infty)$  differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

Kurz:  $(\log x)' = \frac{1}{x}$  auf  $(0, \infty)$ .

- c) Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$  ( $x > 0$ ).

$$f'(x) = e^{\alpha \log x} (\alpha \log x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Kurz:  $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$  auf  $(0, \infty)$ .

- d) aus Bsp. c):  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  auf  $(0, \infty)$ .

**Anwendung 9.5:** Sei  $a \in \mathbb{R}$  und o.B.d.A.  $a \neq 0$ .  $f(t) := \log(1+t)$  ( $t > -1$ ).  
Dann:  $f'(t) = \frac{1}{1+t}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = \frac{1}{a} x \log(1 + \frac{a}{x}) = \frac{1}{a} \log(1 + \frac{a}{x})^x$$

$$\Rightarrow \log(1 + \frac{a}{x})^x \rightarrow a \quad (x \rightarrow \infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$$

**Definition:** Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  und  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

- a)  $x_0 \in M$  heißt ein **innerer Punkt von M**  $\iff \exists > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq M$

b)  $g$  hat in  $x_0 \in M$  ein **relatives Maximum**  $\iff \exists \delta > 0: g(x) \leq g(x_0) \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M$ .

c)  $g$  hat in  $x_0 \in M$  ein **relatives Minimum**  $\iff \exists \delta > 0: g(x) \geq g(x_0) \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M$ .

relatives Extremum = relative Max. oder Min.

**Satz 9.6:**  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  habe in  $x_0$  ein relatives Extremum und sei in  $x_0 \in I$  differenzierbar. Ist  $x_0$  ein innerer Punkt von  $I$ , so ist  $f'(x_0) = 0$ .

*Beweis:* Sei o.B.d.A.  $x_0$  ein relatives Maximum von Funktion  $f$ .  $\exists \delta > 0: U_\delta(x_0) \subseteq I$  und  $f(x) \leq f(x_0) \ (x \in U_\delta(x_0))$

$$D(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, x > x_0 \\ \geq 0, x < x_0 \end{cases} \quad (x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

Also:  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} D(x) \leq 0$  und  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} D(x) \geq 0$ .  $\square$

## 9.7 Mittelwertsatz: (MWS) der Differentialrechnung.

Es sei  $f \in C[a, b]$  und  $f$  sei auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$ :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

*Beweis:*  $g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \ (x \in [a, b])$ . Dann:  $g \in C[a, b]$ ,  $g$  ist differenzierbar auf  $(a, b)$ ,  $g(a) = g(b) = 0$  und

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (x \in (a, b)).$$

Z.z.:  $\exists \xi \in (a, b): g'(\xi) = 0$ .

Fall 1:  $g \equiv 0$  ✓

Fall 2:  $g \not\equiv 0 \xrightarrow{7.11} \exists x_1, x_2 \in [a, b]: g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2) \ (x \in [a, b])$ .

Da  $g \not\equiv 0: x_1 \in (a, b)$  oder  $x_2 \in (a, b) \xrightarrow{9.6} g'(x_1) = 0$  oder  $g'(x_2) = 0$ .  $\square$

**Folgerung 9.8:**  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar auf  $I$ .  $f$  ist auf  $I$  konstant  
 $\iff f' \equiv 0$  auf  $I$ .

*Beweis:* “ $\Rightarrow$ ” ✓, “ $\Leftarrow$ ” Seien  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \xrightarrow{MWS} \exists \xi \in (x_1, x_2)$ :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

also  $f(x_1) = f(x_2)$ . □

**Anwendung 9.9:**  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar. Dann:

$$f' = f \text{ auf } I \iff \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x \ (x \in I)$$

*Beweis:* “ $\Rightarrow$ ” ✓, “ $\Leftarrow$ ”  $g(x) := \frac{f(x)}{e^x}$ . Dann:

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{e^{2x}} = 0 \quad \forall x \in I.$$

$\xrightarrow{9.8} \exists c \in \mathbb{R} : g(x) = c \ \forall x \in I \Rightarrow \text{Beh.}$  □

**Satz 9.10:**  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  seien auf  $I$  differenzierbar.

- a) Ist  $f' = g'$  auf  $I$ , so  $\exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$  auf  $I$ .
- b) Ist  $' \geq 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  monoton wachsend auf  $I$ .  
 Ist  $f' > 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  streng monoton wachsend auf  $I$ .
- c) Ist  $' \leq 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  monoton fallend auf  $I$ .  
 Ist  $f' < 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  streng monoton fallend auf  $I$ .

*Beweis:*

a)  $(f - g)' = 0$  auf  $I \xrightarrow{9.8} \text{Beh.}$

b) Sei  $g' \geq 0$  auf  $I$ . Seien  $x_1, x_2 \in I$  und  $x_1 < x_2 \xrightarrow{MWS} \exists \xi \in (x_1, x_2)$ :  
 $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}(x_2 - x_1) \geq 0$ , also  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

c) Analog zur b).

□

Ohne Beweis:

**9.11 Die Regeln von de l'Hospital:** Es sei  $I = (a, b)$ , wobei  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  zugelassen ist.  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  seien auf  $I$  differenzierbar und  $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$ . Es existiere

$$L := \lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$$

Gilt (I)  $\lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} g(x) = 0$

oder (II)  $\lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} g(x) = \pm\infty$ ,

so ist

$$\lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

**Beispiele:**

a)  $a, b > 0$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \log x} \stackrel{c)}{=} e^0 = 1$ .

**Satz 9.12:** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I = (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $I = \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  ( $x \in I$ ).

a) Die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$  hat den Konvergenzradius  $r$ .



b)  $f$  ist auf  $I$  differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I$$

*Beweis:*

a)  $\sum [n] n |a_n| = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} \sqrt[n]{|a_n|}$ ;  $r > 0 \xRightarrow{4.1} \sqrt[n]{|a_n|}$  ist beschränkt  $\Rightarrow \sqrt[n]{n |a_n|}$  ist beschränkt  $\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{n |a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ , da  $H(\sqrt[n]{|a_n|}) = H(\sqrt[n]{n |a_n|}) \Rightarrow \text{Beh.}$

b) später, nach 10.18.

□

**9.13 Sinus/Cosinus:**  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \xRightarrow{9.12} \sin$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und

$$(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

Analog:  $\cos$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $(\cos x)' = -\sin x$ .

**9.14 Definition von  $\pi$ :**

a) Für  $x \in (0, 2)$  ist

$$\sin x = \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right)}_{>0} + \dots > x - \frac{x^3}{3!} > 0$$

Speziell:  $\sin 1 > 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .

b)  $\exists \xi_0 \in (0, 2)$ :  $\cos \xi_0 = 0$  und  $\cos x > 0 \quad \forall x \in [0, \xi_0)$

*Beweis:*  $\cos 0 = 1 > 0$ ;

$$\begin{aligned}\cos 2 &= \cos(1+1) \stackrel{4.3}{=} \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos^2 1 + \sin^2 1 - 2\sin^2 1 = 1 - 2\sin^2 1 \\ &\leq 1 - 2\frac{25}{36} < 0\end{aligned}$$

$\stackrel{7.7}{\Rightarrow} \exists \xi_0 \in (0, 2) : \cos \xi_0 = 0$ . Auf  $(0, 2)$ :

$$(\cos x)' = -\sin x \stackrel{a)}{<} 0 \Rightarrow \cos x > 0 \quad \forall x \in [0, \xi_0)$$

□

c) Sei  $\xi_0$  wie in b).  $\pi := 2\xi_0$  (Pi).

$$\xi_0 \in (0, 2) \Rightarrow \pi \in (0, 4) \quad (\pi \approx 3,14\dots)$$

$\frac{\pi}{2} = \xi_0$ , also  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow |\sin \frac{\pi}{2}| = 1 \stackrel{a)}{\Rightarrow} \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$\cos$  hat in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  genau eine Nullstelle.

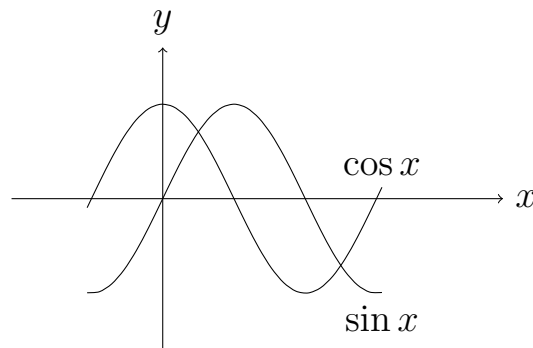


Abbildung 9.1: Sinus und Cosinus.

**9.15 Weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus:** a) Aus 4.3:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$$

Analog:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

b)  $\cos$  hat in  $[0, \pi]$  genau eine Nullstelle.

c) I. d. gr. Übungen:

$$\cos x = 0 \iff x \in \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sin x = 0 \iff x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

**Definition:**  $\tan: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}; \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$  **Tangens**

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

$\tan$  ist also auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  streng wachsend.

**Übung:**  $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$ . Es ex. also

$$\arctan := \tan^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

**Arkustangens.**

I.d. Übungen wird gezeigt:  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$  auf  $\mathbb{R}$ .

Ohne Beweis:

**9.16 Abelscher Grenzwertsatz:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$  und  $r < \infty$ . Die Potenzreihe konvergiere auch noch in  $\frac{x_0+r}{x_0-r}$ . Es sei

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ für } x \in \begin{matrix} (x_0 - r, x_0 + r) \\ [x_0 - r, x_0 + r) \end{matrix}$$

Dann ist  $f$  stetig in  $\frac{x_0+r}{x_0-r}$ .

### Anwendungen 9.17:

a)  $f(x) := \log(1+x)$  für  $x \in (-1, 1) =: I$ . Dann:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \forall x \in I.$$

$g := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$  für  $x \in (-1, 1] \xrightarrow{9.12} g$  ist differenzierbar auf  $I$  und

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = f'(x) \quad \forall x \in I$$

Damit ex.  $c \in \mathbb{R}$ :  $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in I$ . Mit  $x = 0$  folgt:  $c = 0$ . Also

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in I$$

$\xrightarrow[9.16]{x \rightarrow 1} f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-1, 1]$ . Fazit:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1]$$

Für  $x=1$ :  $\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

b) Vgl. Übungsblatt:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Speziell:  $\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{4} &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \stackrel{9.15}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots\end{aligned}$$

### Definition:

- a)  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf  $I$  differenzierbar. Ist  $f'$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar, so heißt  $f$  in  $x_0$  **zweimal differenzierbar** und

$$f''(x_0) := (f')'(x_0) \text{ die 2. Ableitung von } f \text{ in } x_0.$$

- b) Ist  $f'$  auf  $I$  differenzierbar, so heißt  $f$  **auf  $I$  zweimal differenzierbar** und  $'' := (f')'$  die 2. Ableitung von  $f$  auf  $I$ .

Entsprechend definiert man, falls vorhanden:  $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \dots$  und  $f''', f^{(4)}, \dots$

- c)  $C^0(I) := C(I); f^0 := f$ ; Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $f$  heißt **auf  $I$  n-mal stetig differenzierbar**  $\iff f$  ist auf  $I$  n-mal differenzierbar  $f, f', \dots, f^{(n)} \in C(I)$ .

$$C^\infty := \bigcap_{n \geq 0} C^n(I).$$

### Beispiele:

- a)  $(e^x)'' = e^x, (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

- b)  $f(x) := x|x|$

$$\text{Für } x > 0: f(x) = x^2, f'(x) = 2x$$

$$\text{Für } x < 0: f(x) = -x^2, f'(x) = -2x$$

Für  $x = 0$ :  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x| \rightarrow 0 \ (x \rightarrow 0)$

$f$  ist also auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(x) = 2|x| \ (x \in \mathbb{R})$ .  $f$  ist also in  $x_0 = 0$  nicht zweimal differenzierbar.

**Beispiel 9.18:**  $f(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Auf  $(0, 1]$ :

$$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Für  $x_0 = 0$  betrachte:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{beschr.}} \rightarrow 0$$

$f$  ist also auf  $[0, 1]$  differenzierbar ( $f'(0) = 0$ ).  $x_n := \frac{1}{n\pi}$ . Dann:  $x_n \rightarrow 0$ ,

$$f'(x_n) = \sqrt{n\pi} \cos(n\pi) = \sqrt{n\pi}(-1)^{n+1} \not\rightarrow 0 = f'(0).$$

D.h.:  $f$  ist auf  $[0, 1]$  differenzierbar, aber  $f \notin C^1[0, 1]$ .  $|f'(x_n)| = \sqrt{n\pi} \Rightarrow f'$  ist auf  $[0, 1]$  nicht beschränkt.

Aus 9.12 folgt (induktiv):

**Satz 9.19:** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $I = \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \ (x \in I)$ . Dann:  $f \in C^{\infty}(I)$  und

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-k} \quad \forall x \in I \ \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Insbes.:  $(x = x_0)$ :  $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$ , also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Ohne Beweis:

**Satz 9.20:** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und sei  $f$  auf  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar (insb.  $f \in C^n(I)$ ),  $x, x_0 \in I$  und  $x \neq x_0$ . Dann existiert ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ ,  $x \neq \xi \neq x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

**Bemerkung:** Im Fall  $n = 0$  vgl. [MWS](#).

**Satz 9.21:** Sei  $n \geq 2$ ,  $f \in C^n(I)$ ,  $x_0 \in I$  sei ein innerer Punkt von  $I$  und

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

- a) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Maximum.
- b) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  ein relatives Minimum.
- c) Ist  $n$  ungerade, so hat  $f$  in  $x_0$  kein relatives Extremum.

*Beweis:*  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ,  $f^{(n)}$  stetig  $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I$ .

Sei  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \xrightarrow{9.20} \exists \xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=f(x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n}_{=:R(x)}$$

- a) Sei  $f^{(n)}(x_0) < 0 \xrightarrow{(*)} f^{(n)}(\xi) < 0$ ,  $n$  gerade  $\Rightarrow (x-x_0)^n > 0$ . Also:  
 $R(x) < 0$ ; somit:  $f(x) < f(x_0)$ .
- b) Sei  $f^{(n)}(x_0) > 0 \xrightarrow{(*)} f^{(n)}(\xi) > 0$ ,  $n$  gerade  $\Rightarrow (x-x_0)^n > 0$ . Also:  
 $R(x) > 0$ ; somit:  $f(x) > f(x_0)$ .

c) Sei o.B.d.A.  $f^{(n)}(x_0) > 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} f^{(n)}(\xi) > 0$ ,  $n$  ungerade

$$\Rightarrow (x - x_0)^n \begin{cases} > 0, & x > x_0 \\ < 0, & x < x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(x) \begin{cases} > 0, & x > x_0 \\ < 0, & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \begin{cases} > f(x_0), & x > x_0 \\ < f(x_0), & x < x_0 \end{cases}$$

□



# Kapitel 10

## Das Riemann-Integral

**Vereinbarung:** I. d. §en sei stets  $a < b$ ,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $f$  beschränkt auf  $[a, b]$ ;  $m := \inf f([a, b])$ ,  $M := \sup f([a, b])$ .

$Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  heißt eine **Zerlegung** von  $[a, b]$   $\iff a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .  $\mathcal{J} := \{Z : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$ . Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$ . Definiere  $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ ,  $|I_j| := x_j - x_{j-1}$  “Länge“ von  $I_j$  und  $m_j := \inf f(I_j)$ ,  $M_j := \sup f(I_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ )

$$s_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j |I_j| \text{Untersumme von } f \text{ bzgl. } Z.$$

$$S_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j |I_j| \text{Obersumme von } f \text{ bzgl. } Z.$$

Es ist  $m \leq m_j \leq M_j \leq M$ , also  $m|I_j| \leq m_j|I_j| \leq M_j|I_j| \leq M|I_j|$ , somit

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n |I_j|}_{=b-a} \leq s_f(Z) \leq S_f(Z) \leq M \sum_{j=1}^n |I_j| = M(b-a) \quad (*)$$

**Definition:** Seien  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{J}$ .  $Z_2$  heißt eine Verfeinerung von  $Z_1$   $\iff Z_1 \subseteq Z_2$ .

Ohne Beweis:

**Satz 10.1:** Seien  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{J}$ .

a)  $s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$

b) Ist  $Z_1 \leq Z_2$  so gilt:  $s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2)$  und  $S_f(Z_1) \geq S_f(Z_2)$ . Aus (\*) folgt: es existieren

$$s_f := \sup\{s_f(Z) : Z \in \mathcal{J}\}$$

und

$$S_f := \inf\{S_f(Z) : Z \in \mathcal{J}\}.$$

Aus (\*) und 10.1 a) mit  $Z \in \mathcal{J}$ :

$$m(b-a) \leq s_f \leq S_f(Z) \leq S_f \leq M(b-a). \quad (**)$$

**Definition:**  $f$  heißt (Riemann-)integrierbar (ib) über  $[a, b] \iff s_f = S_f$ .

I. d. Fall heißt

$$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := S_f (= s_f)$$

das (Riemann-)Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und wir schreiben:  $f \in R[a, b]$ .

**Beispiele:**

a) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = c$  ( $x \in [a, b]$ )  $\xrightarrow{(**)} c(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq c(b-a) \Rightarrow f \in R[a, b]$  und  $\int_a^b c dx = c(b-a)$ .

b) Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[0, 1]$ . definiere

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

$m_j, M_j$  seien wie immer, dann:  $m_j = \inf f(I_j) = 0, M_j = \sup f(I_j) = 1;$   
 $s_f(Z) = 0, S_f(Z) = 1$ . Also:  $s_f = 0 \neq 1 = S_f; f \notin R[0, 1]$ .

**Satz 10.2:** Es seien  $f, g \in R[a, b]$ .

a) Ist  $f \leq g$  auf  $[a, b]$ , so ist  $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ .

b) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$  und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

*Beweis:* nur a) ( b) Übung): Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$ ,  $I_j$  und  $m_j$  wie immer.  
 $\tilde{m}_j := \int g(I_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ).  $f \leq g$  auf  $I_j$

$$\Rightarrow m_j \leq \tilde{m}_j \Rightarrow s_f(Z) \leq s_g(Z) \leq s_g \stackrel{Vor.}{=} \int_a^b g dx$$

$$\Rightarrow s_f \leq \int_a^b g dx \stackrel{Vor.}{\Rightarrow} \text{Beh.}$$

□

**10.3 Riemannsches Integrabilitätskriterium:**  $f \in R[a, b]$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists Z = Z(\epsilon) \in \mathcal{J} : S_f(Z) - s_f(Z) < \epsilon.$$

**Satz 10.4:** Ist  $f$  auf  $[a, b]$  monoton, so ist  $f \in R[a, b]$ .

*Beweis:* Sei  $\epsilon > 0$ . Wähle  $n \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon.$$

Für  $j = 0, \dots, n$  sei  $x_j := a + j \frac{b-a}{n}$  und  $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$ . Seien  $I_j, m_j$  und  $M_j$  wie immer, dann  $|I_j| = \frac{b-a}{n}$ ,  $m_j = f(x_{j-1})$ ,  $M_j = f(x_j)$ . Also:

$$\begin{aligned} S_f(Z) - s_f(Z) &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |I_j| \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \epsilon \end{aligned}$$

$\xRightarrow{10.3}$  Beh. □

**Satz 10.5:**  $C[a, b] \subseteq R[a, b]$ .

*Beweis:* Sei  $f \in C[a, b]$  und  $\epsilon > 0 \xRightarrow{7.16} \exists \delta > 0$ :

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \forall t, s \in [a, b] \text{ mit } |t - s| < \delta. \quad (*)$$

Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$ ,  $I_j, M_j, m_j$  wie immer und  $Z$  sei so gewählt, dass  $|I_j| < \delta$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Betrachte  $I_j$ :

$$\xRightarrow{7.11} \exists \xi, \eta \in I_j : \quad f(\xi) = m_j, f(\eta) = M_j$$

$$|I_j| < \delta \Rightarrow |\xi - \eta| < \delta \xRightarrow{(*)}$$

$$M_j - m_j = f(\eta) - f(\xi) = |f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Dann:  $S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |I_j| < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n |I_j| = \epsilon \xRightarrow{10.3}$  Beh. □

**Definition:**  $I \subseteq \mathbb{R}$  sei ein Intervall und  $G, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen.  $G$  heißt eine **Stammfunktion** von  $g$  auf  $I \iff G$  ist auf  $I$  differenzierbar und  $G' = g$  auf  $I$ .

Beachte: Sind  $G, H$  Stammfunktionen von  $g$  auf  $I \Rightarrow G' = g = H'$  auf  $I \xRightarrow{9.10} \exists c \in \mathbb{R} : G = H + c$  auf  $I$ .

**10.6 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:** Ist  $f \in R[a, b]$  und besitzt  $f$  auf  $[a, b]$  eine Stammfunktion  $F$ , so ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b =: [F(x)]_a^b$$

*Beweis:* Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$ ,  $I_j, m_j, M_j$  wie immer.

$$F(x_j) - f(x_{j-1}) \stackrel{MWS}{=} F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j) \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{=|I_j|}$$

mit  $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ .  $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j \Rightarrow m_j |I_j| \leq f(\xi_j) |I_j| \leq M_j |I_j| \Rightarrow$

$$\begin{aligned} s_f(Z) &\leq \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |I_j| \\ &= \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1})) \\ &= F(b) - F(a) \\ &\leq S_f(Z) \end{aligned}$$

Also:  $s_f(Z) \leq F(b) - F(a) \leq S_f(Z) \quad \forall Z \in \mathcal{J}$ .

$f \in R[a, b] \Rightarrow \int_a^b f dx = s_f \leq F(b) - F(a) \leq S_f = \int_a^b f dx.$

□

### Beispiele:

a)  $0 < a < b$ ,  $f(x) := \frac{1}{x}$ ;  $f \in C[a, b] \stackrel{10.5}{\implies} f \in R[a, b]$ .  $F(x) := \log x$ ;  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$  auf  $[a, b]$ .

$$\stackrel{10.6}{\implies} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_a^b = \log b - \log a.$$

b) Sei  $a < b$ .  $\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$ .

Warnungen:

- a) Es gibt integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen!
- b) Es gibt nicht integrierbare Funktionen, die Stammfunktionen besitzen!

### Beispiele:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}. f \text{ ist monoton} \xRightarrow{10.4} f \in R[0, 1].$$

Annahme:  $f$  besitzt auf  $[0, 1]$  eine Stammfunktion  $F$ . Dann:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow F'(x) = 1 = (x)' \text{ auf } (0, 1]$$

$\xRightarrow{9.10} \exists c \in \mathbb{R} : F(x) = x + c$  auf  $(0, 1]$ .  $F$  ist differenzierbar in  $0 \Rightarrow F$  stetig in  $0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0) = c$ . Also:  $F(x) = xc \quad \forall x \in [0, 1]$ . Aber:

$$0 = f(0) = F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + c - c}{x} = 1,$$

Widerspruch!

$$\text{b) } F(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases} \xRightarrow{9.18} F \text{ ist auf } [0, 1] \text{ differenzierbar; } f :=$$

$F'$ . Dann ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $[0, 1] \xRightarrow{9.18} f$  ist auf  $[0, 1]$  nicht beschränkt, also  $f \notin R[a, b]$ .

Ohne Beweis:

**Satz 10.7:** Sei  $c \in (a, b)$ .

$$f \in R[a, b] \iff f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b]$$

I. d. Fall:  $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$ .

**Motivation** Für  $n \geq 2$  sei  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ n - (x - \frac{1}{n})n^2, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$

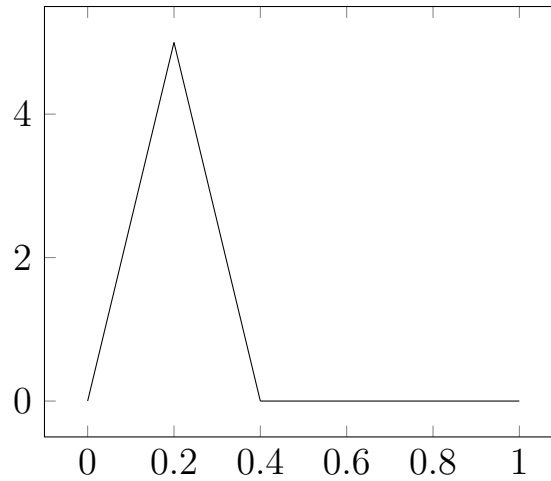


Abbildung 10.1:  $f_n$  für  $n = 5$ .

$$f_n \in C[0, 1] \xRightarrow{10.5} f_n \in R[0, 1] \xRightarrow[10.7]{10.6} \int_0^1 f_n dx = 1 \quad \forall n \geq 2.$$

Übung:  $(f_n)$  konvergiert auf  $[0, 1]$  punktweise gegen  $f \equiv 0$ . Aber:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f dx = \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

Ohne Beweis:

**Satz 10.8:** Sei  $(f_n)$  eine Folge in  $R[a, b]$  und  $f_n$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann:  $f \in R[a, b]$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

**Satz 10.9:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $I := \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in I)$$

Dann hat die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$  den Konvergenzradius  $r$  und für

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \quad (x \in I) \quad (*)$$

gilt  $G' = g$  auf  $I$ .

*Beweis:* Sei  $\tilde{r}$  der Konvergenzradius der Potenzreihe in  $(*) \xrightarrow{9.12} r = \tilde{r}$  und  $G' = g$  auf  $I$ .  $\square$

**Satz 10.10:** Es seien  $f, g \in R[a, b]$ .

a) Sei  $D := f([a, b])$  und mit einem  $L \geq 0$  gelte für  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$|h(s) - h(t)| \leq L|s - t| \quad \forall t, s \in D$$

Dann:  $h \circ f \in R[a, b]$ .

b)  $|f| \in R[a, b]$  und  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$  ( $\Delta$ -Ungleichung für Integrale).

c)  $fg \in R[a, b]$ .

d) Ist  $g(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$  und  $\frac{1}{g}$  auf  $[a, b]$  beschränkt, so ist  $\frac{1}{g} \in R[a, b]$ .

*Beweis:*

a) c) und d) ohne Beweis.

b)  $D := f([a, b]); h(t) := |t|$  ( $t \in D$ ). Dann:  $|f| = h \circ f$ . Für  $t, s \in D$ :

$$|h(t) - h(s)| = ||t| - |s|| \stackrel{\S 1}{=} |t - s|.$$

Aus a):  $|f| \in R[a, b]$ . Es ist  $\pm f \leq |f|$  auf  $[a, b]$

$$\stackrel{10.2}{\implies} \pm \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx$$

$\Rightarrow \Delta$ -Ungleichung.



□

**Definition:** Sei  $f \in R[a, b]$  und  $\alpha, \beta \in [a, b]$ .  $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx =: 0$ . Sei  $\alpha < \beta \xRightarrow{10.7} f \in R[\alpha, \beta]$ .

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx := - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

**10.11 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:** Sei  $f \in R[a, b]$  und

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

Dann gilt:

- a)  $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \quad \forall x, y \in [a, b]$ .
- b)  $F \in C[a, b]$ .
- c) Ist  $f \in C[a, b]$ , so ist  $F \in C^1[a, b]$  und  $F' = f$  auf  $[a, b]$ .

*Beweis:*

- a) Seien  $x, y \in [a, b]$ . Fall 1:  $x \leq y$

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &\stackrel{10.7}{=} \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t) - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^y f(t)dt \end{aligned}$$

Fall 2:  $x > y$ :

$$F(y) - F(x) = -(F(x) - F(y)) \stackrel{Fall 1}{=} - \int_y^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt.$$

b)  $L := \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$ . Seien  $x, y \in [a, b]$ . O.B.d.A.:  $x \leq y$ , dann:

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &\stackrel{a)}{=} \left| \int_x^y f(t) dt \right| \stackrel{10.10}{\leq} \int_x^y |f(t)| dt \stackrel{10.2}{\leq} \int_x^y L dt \\ &= L(y - x) = L|y - x|. \end{aligned}$$

c) Wir zeigen für  $x_0 \in [a, b]$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

(analog zeigt man für  $x_0 \in (a, b]$ :  $\lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$ ).

Sei also  $x_0 \in [a, b]$ ,  $h > 0$  und  $x_0 + h \in [a, b]$ . Es ist

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = f(x_0)$$

und

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \stackrel{a)}{=} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Dann:

$$\begin{aligned} L(h) &:= \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\stackrel{10.10}{\leq} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt. \end{aligned}$$

$\stackrel{7.11}{\implies} \exists \xi_h \in [x_0, x_0 + h]: |f(t) - f(x_0)| \leq |f(\xi_h) - f(x_0)| \quad \forall t \in [x_0, x_0 + h]$ .

Dann:

$$L(h) \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(\xi_h) - f(x_0)| dt = |f(\xi_h) - f(x_0)|.$$

Für  $h \rightarrow 0$ :  $\xi_h \rightarrow x_0$ ;  $f$  stetig  $\implies f(\xi_h) \rightarrow f(x_0)$ . Also:  $L(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ).

□

Aus 10.10 folgt (Übung):

**Folgerung 10.12:** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $g \in C(I)$  und  $\xi \in I$  (fest).  
Definiere  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G(x) := \int_{\xi}^x f(t) dt.$$

Dann:  $G \in C^1(I)$  und  $G' = g$  auf  $I$ .

**Definition:** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Besitzt  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  eine Stammfunktion, so schreibt man für eine solche auch  $\int g(x) dx$  (**unbestimmtes Integral**).

**Beispiel 10.13:**  $\int \cos x dx = \sin x (+c)$  ( $c \in \mathbb{R}$ ).

**10.14 Partielle Integration:** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f, g \in C^1(I)$ .  
Dann:

a)  $\int f' g dx = f g - \int f g' dx$  auf  $I$ .

b) Ist  $I = [a, b]$ ,  $\int_a^b f' g dx = f g \Big|_a^b - \int_a^b f g' dx$ .

*Beweis:*  $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$   
 $\Rightarrow$  a), sowie

$$\int_a^b f' g dx = \int_a^b (fg)' dx - \int_a^b f g' dx \stackrel[1.HS]{10.6} = fg \Big|_a^b - \int_a^b f g' dx.$$

□

**Beispiele:**

$$\text{a) } \int \sin^2 x dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_g dx = -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x dx$$

$$\begin{aligned} &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx \\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ &= x - \cos x \sin x - \int \sin^2 x dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x).$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx &= \frac{1}{2} x^2 e^x - \int \frac{1}{2} x^2 e^x dx \rightarrow \text{komplizierter} \\ \int \underbrace{x}_g \underbrace{e^x}_{f'} &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \log x dx = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_g dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x.$$

**Bez.:** Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\alpha \neq \beta$ .

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \begin{cases} [\alpha, \beta], & \text{falls } \alpha < \beta \\ [\beta, \alpha], & \text{falls } \alpha > \beta \end{cases}$$

**10.15 Substitutionsregeln:**  $I$  und  $J$  seien Intervalle in  $\mathbb{R}$ , es sei  $f \in C(I)$ ,  $g \in C^1(J)$  und  $g(J) \subseteq I$ .

$$\text{a) } \int f(g(t)) g'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=g(t)} \text{ auf } J.$$

b) Sei  $g'(t) \neq 0 \forall t \in J$  ( $\Rightarrow g' > 0$  auf  $J$  oder  $g' < 0$  auf  $J \Rightarrow g$  ist streng monoton). Dann:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} \text{ auf } I$$

c) Ist  $I = \langle a, b \rangle$ ,  $J = \langle \alpha, \beta \rangle$ ,  $g(\alpha) = a$  und  $g(\beta) = b$ , so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

*Beweis:*  $\xRightarrow{10.2}$   $f$  hat auf  $I$  eine Stammfunktion  $F$ .  $G(t) := F(g(t))$  ( $t \in J$ ). Kettenregel  $\Rightarrow G \in C^1(J)$  und

$$G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \quad \forall t \in J.$$

$$\text{a) } \int f(g(t))g'(t)dt = \int G'(t)dt = G(t) = F(x) \Big|_{x=g(t)}.$$

$$\text{b) } \int f(g(t))g'(t)dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = G(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x))) = F(x).$$

$$\text{c) } \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt \stackrel{10.6}{=} G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

$$= F(b) - F(a) \stackrel{10.6}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

□

**Merkregel:** Ist  $y = y(x)$  eine differenzierbare Funktion, so schreibt man für  $y'$  auch  $\frac{dy}{dx}$ .

Zu 10.15: substituiere  $x = g(t)$ , fasse also  $x$  als Funktion von  $t$  auf. Dann:

$\frac{dx}{dt} = g'(t)$ , also

$$“dx = g'(t)dt”$$

**Beispiele:**

$$\begin{aligned}
\text{a) } \int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x} dx &= \begin{cases} x = \log t, e^x = t \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, dx = \frac{1}{t} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = e \end{cases} \\
&= \int_1^e \frac{t^2+1}{t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{t^2+1}{t^2} = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\
&= \left[ t - \frac{1}{t} \right]_1^e = e - \frac{1}{e} - (1 - 1) = e - \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) Berechne } \beta &:= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{dx}{dt} = \cos t, dx = \cos t dt \end{cases} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) dt \\
&\stackrel{s.o.}{=} \left[ t - \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Ohne Beweis:

**Satz 10.16:**  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien beschränkt.

a) Ist  $\{x \in [a, b] : f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}$  höchstens endlich, so ist  $f \in R[a, b]$ .

b) Sei  $f \in R[a, b]$  und  $M := \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$  höchstens endlich, so ist  $g \in R[a, b]$  und

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b g(x) dx.$$

**Satz 10.17:** Es seien  $f, g \in R[a, b]$ ,  $g \geq 0$  auf  $[a, b]$ ,  $m := \inf f([a, b])$  und  $M := \sup f([a, b])$ .

a)  $\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx.$

b)  $\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f dx = \mu(b - a).$

Ist  $f \in C[a, b]$ , so existiert ein  $\xi \in [a, b]$ : für die Zahl  $\mu$  in a) bzw. b):  $\mu = f(\xi)$ .

*Beweis:*

a)  $g \geq 0$  auf  $[a, b] \Rightarrow mg \leq fg \leq Mg$  auf  $[a, b]$

$$\stackrel{10.2}{\implies} m \underbrace{\int_a^b g dx}_{=:A} \leq \underbrace{\int_a^b fg dx}_{=:B} \leq M \int_a^b g dx.$$

Also:  $mA \leq B \leq MA$ .

Fall 1:  $A = 0$ . Dann ist  $B = 0$  und jedes  $\mu \in [m, M]$  leistet das Verlangte.

Fall 2:  $A \neq 0$ .  $g \geq 0 \stackrel{10.2}{\implies} A > 0 \Rightarrow m \leq \frac{B}{A} \leq M$ .  $\mu := \frac{B}{A}$ .

b) folgt aus a) mit  $g \equiv 1$ . Der Zusatz folgt aus 7.7 und 7.11.

□

**Satz 10.18:** Sei  $(f_n)$  eine Folge mit:

i)  $f_n \in C^1[a, b] \forall n \in \mathbb{N}$ ,

ii)  $(f_n(a))$  ist konvergent und

iii)  $(f'_n)$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dann konvergiert  $(f_n)$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig und für  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) gilt:

$$f \in C^1[a, b] \text{ und } g' = g \text{ auf } [a, b]$$

Also:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) = f'(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$  auf  $[a, b]$ .

*Beweis:*  $\alpha_n := \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt \xrightarrow{\text{iii)}} (|f'_n - g|)$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen 0  $\xrightarrow{10.8} \alpha_n \rightarrow 0$ . o.B.d.A.  $(f_n(a))$  ist eine Nullfolge. Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in [a, b]$ :

$$f_n(x) \stackrel{10.6}{=} \underbrace{f_n(a)}_{\rightarrow 0} + \int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{10.8} \int_a^x g(t) dt =: f(x).$$

Also:  $(f_n)$  konvergiert auf  $[a, b]$  punktweise gegen  $f$ .

$$\xrightarrow{8.3 \text{ a)}} g \in C[a, b] \xrightarrow{10.11} f \in C^1[a, b] \text{ und } f' = g.$$

Noch zu zeigen:  $(f_n)$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f$ .

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(a) - \int_a^x g(t) dt + f_n(a)| \\ &\stackrel{10.6}{=} \left| \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt + f_n(a) \right| \\ &\leq \int_a^x |f'_n(t) - g(t)| dt + |f_n(a)| \\ &\leq \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt + |f_n(a)| \\ &= \underbrace{\alpha_n + |f_n(a)|}_{\rightarrow 0} \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

$\xrightarrow{8.1}$  Gleichmäßige Konvergenz. □

**Bemerkung:** Der Beweis von 9.12 folgt aus 10.18.



# Kapitel 11

## Uneigentliche Integrale

**Vereinbarung:** Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so soll stets gelten:  $f \in R(J)$  für jedes kompakte Intervall  $J \subseteq I$ .

**Definition:**

- a) Sei  $a \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, a < \beta$  und  $f: [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das **uneigentliche Integral**  $\int_a^\beta f(x)dx$  heißt **konvergent**  $\iff$  der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \beta-0} \int_a^t f(x)dx$$

existiert und ist  $\in \mathbb{R}$ . In diesem Fall:

$$\int_a^\beta f(x)dx := \lim_{t \rightarrow \beta-0} \int_a^t f(x)dx.$$

- b) Sei  $b \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \alpha < b$  und  $f: (\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das **uneigentliche Integral**  $\int_\alpha^b f(x)dx$  heißt **konvergent**  $\iff$  der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \alpha+0} \int_t^b f(x)dx$$

existiert und ist  $\in \mathbb{R}$ . In diesem Fall:

$$\int_\alpha^b f(x)dx := \lim_{t \rightarrow \alpha+0} \int_t^b f(x)dx.$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt divergent.

### Beispiele:

a)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx$  ( $\gamma > 0$ ) ( $a = 1, \beta = \infty$ ). Sei  $t > 1$ ,

$$\int_1^t \frac{1}{x^\gamma} dx = \begin{cases} \log t, & \text{falls } \gamma = 1 \\ \frac{1}{1-\gamma}(t^{1-\gamma} - 1), & \text{falls } \gamma \neq 1. \end{cases}$$

Also:  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx$  konvergiert  $\iff \gamma > 1$ . In diesem Fall:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx = \frac{1}{\gamma - 1}$$

b)  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$  ( $a = 0, \beta = \infty$ ).

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan t \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Also ist  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$  konvergent und  $= \frac{\pi}{2}$ .

c)  $\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx$  ( $\gamma > 0$ ) ( $\alpha = 0, b = 1$ ). Wie in Beispiel a) sieht man:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx \text{ konvergiert } \iff \gamma < 1$$

d)  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$  ( $\alpha = -\infty, b = 0$ ). Wie in Beispiel b) sieht man:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ konvergiert und } = \frac{\pi}{2}.$$

e)  $\int_0^\infty \sin x dx$ . Sei  $t_n := (2n+1)\pi$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$$\int_0^{t_n} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{t_n} = 1 - \cos t_n = 1 - \cos(2n\pi + \pi) = 1 - \cos \pi = 2$$

Definiere  $s_n := 2n\pi$ , dann:

$$\int_0^{s_n} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{s_n} = 1 - \cos s_n = 0$$

$\int_0^\infty \sin x dx$  ist also divergent.

**Definition:** Sei  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Das **uneigentliche Integral**  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$  ist **konvergent**  $\iff \exists c \in (\alpha, \beta)$ :  $\int_{\alpha}^c f(x)dx$  und  $\int_c^{\beta} f(x)dx$  sind beide konvergent. In diesem Fall:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx := \int_{\alpha}^c f(x)dx + \int_c^{\beta} f(x)dx$$

(divergent = nicht konvergent).

**Übung:** obige Definition ist unabhängig von  $c \in (\alpha, \beta)$ !

**Beispiele:**

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$  ist divergent, denn  $\int_0^{\infty} x dx$  ist divergent. (Aber:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x dx = 0$ ).

b) Sei  $\gamma > 0$ . Obige Beispiele a) und c) zeigen:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\gamma}} dx \text{ ist divergent.}$$

c) Obige Beispiele b) und d) zeigen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ist konvergent und } = \pi.$$

Die folgenden Definitionen und Sätze formulieren wir nur für Funktionen  $f: [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  (wie in der ersten Definition dieses Kapitels). Diese Definitionen und Sätze gelten sinngemäß auch für die beiden anderen Typen uneigentlicher Integrale.

**Beachte:** Für  $t \in (a, \beta)$ :  $g(t) := \int_a^t f(x)dx$ . Dann:

$$\int_a^{\beta} f(x)dx \text{ konvergiert} \iff \lim_{t \rightarrow \beta} g(t) \text{ existiert.}$$

Aus 6.2 c) folgt:

**11.1 Cauchy Kriterium:**  $\int_a^\beta f(x)dx$  konvergiert

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists c \in (a, \beta) : \left| \int_u^v f(x)dx \right| < \epsilon \quad \forall u, v \in (c, \beta).$$

**Beispiel:** Beh.:  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  konvergiert.

*Beweis:* Seien  $c \leq u < v$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_u^v \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \int_u^v \underbrace{\frac{1}{x}}_g \underbrace{\sin x}_{f'} dx \right| \\ &= \left| \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_v^u - \int_u^v -\frac{1}{x^2} (-\cos x) dx \right| \\ &= \left| \frac{\cos v}{v} - \frac{\cos u}{u} - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \int_u^v \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{u} \end{aligned}$$

(für  $\epsilon > 0$ :  $\frac{2}{u} < \epsilon \iff u > \frac{2}{\epsilon}$ ). Sei  $\epsilon > 0, c := \frac{2}{\epsilon}$ . Seien  $\frac{2}{\epsilon} < u < v$ . Dann:

$$\left| \int_u^v \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{u} < \epsilon$$

$\xRightarrow{11.1}$  Beh. □

**Definition:**  $\int_a^\beta f(x)dx$  heißt **absolut konvergent**  $\iff \int_a^\beta |f(x)|dx$  ist konvergent.

Den folgenden Satz beweist man mit 11.1 ähnlich wie bei Reihen:

**Satz 11.2:**

a) Ist  $\int_a^\beta f(x)dx$  absolut konvergent, so ist  $\int_a^\beta f(x)dx$  konvergent und

$$\left| \int_a^\beta f(x)dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx.$$

b) **Majorantenkriterium:** Ist  $|f| \leq h$  auf  $[a, \beta)$  und  $\int_a^\beta h(x)dx$  konvergiert, so ist  $\int_a^\beta f(x)dx$  konvergent.

c) **Minorantenkriterium:** Ist  $f \geq h \geq 0$  auf  $[a, \beta)$  und  $\int_a^\beta h(x)dx$  divergiert, so ist  $\int_a^\beta f(x)dx$  divergent.

### Beispiele:

$$\text{a) } \int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^5}}}_{=:f(x)} dx. \quad |f(x)| = f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =: g(x).$$

$$\int_1^\infty g(x)dx \text{ konvergiert} \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergiert.}$$

$$\text{b) } \int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7x}}_{=:f(x)} dx, \quad g(x) := \frac{1}{x}; \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2+7x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty).$$

$$\Rightarrow \exists c \geq 1 : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \geq c \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}g(x) \quad \forall x \geq c.$$

$$\int_c^\infty g(x)dx \text{ divergiert} \Rightarrow \int_1^\infty g(x)dx \text{ divergiert} \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ divergiert.}$$

# Kapitel 12

## Die komplexe Exponentialfunktion

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \text{ Betrag von } z.$$

$$\bar{z} := x - iy.$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

Ist  $z = x \in \mathbb{R}$ :  $e^z = e^x$ ; ist  $z = it$  ( $t \in \mathbb{R}$ ):  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ .

**Satz 12.1:** Es gilt  $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ ,  $z \neq 1$ .

a)  $e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ .

b)  $|e^{it}| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-it} = \overline{e^{it}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

c)  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .

d)  $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$ .

e) Für  $t \in \mathbb{R}$ :  $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ ,  $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ .

*Beweis:*

a) Übung (Add. von  $e$ -Funktionen,  $\sin$ ,  $\cos$ ).

b)  $e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow |e^{it}| = (\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1$ ,

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t = \overline{\cos t + i \sin t} = \overline{e^{it}}.$$

c)  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ .

d)  $e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 \stackrel{a)}{\Rightarrow} \text{Beh.}$

e)  $e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t$ .

□

**Definition:** Für  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

**Übung:**  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ :

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

**Satz 12.2:** Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

$$e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$$

*Beweis:* “ $\Leftarrow$ ”: 12.1 d).

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $e^z = 1$ , also  $1 = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y \Rightarrow e^x \cos y = 1, e^x \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : y = j\pi \Rightarrow \cos y = (-1)^j$  somit  $1 = e^x(-1)^j \Rightarrow j = 2k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) und  $x = 0$ . Also:  $z = 2k\pi i$ . □

**Polarkoordinaten:** Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $z \neq 0$ .

$$r := |z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Die Gerade durch 0 und  $z$  schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  ein.

$\varphi$  heißt das **Argument von  $z$** ;  $\phi = \arg z$ . Es ist

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

also

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = re^{i\varphi} = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i \arg z}$$

Ist weiter  $w \in \mathbb{C}$  und  $\psi := \arg w$ , so gilt:

$$zw = |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$$

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N} \xrightarrow{12.1} (e^z)^n = e^{nz}$ ; Es gilt:

$$\begin{aligned} e^z = e^w &\iff e^z e^{-w} = e^w e^{-w} \\ &\iff e^{z-w} = e^{w-w} = e^0 = 1 \\ &\xrightarrow{12.2} \exists k \in \mathbb{Z} : z = w + 2k\pi i \end{aligned}$$

Ohne Beweis:

**12.3 Fundamentalsatz der Algebra:** Sei  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  ein Polynom mit  $n \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  und  $a_n \neq 0$ . Dann existieren  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  (eind. bestimmt) mit  $p(z) = a_n(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).  $z_1, \dots, z_n$  sind genau die Nullstellen von  $p$ .

**Definition:** Sei  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^n = a$  heißt eine **n-te Wurzel aus  $a$** .

$\sqrt[n]{a}$  bez. eine n-te Wurzel aus  $a$  ( $n = 2$  kurz: Wurzel)



**Satz 12.4:** Sei  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r := |a|$  und  $\varphi := \arg a$ . (also  $a = |a|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$ ). Für  $k = 0, 1, \dots, n-1$  sei

$$z_k := \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

Dann:

- a)  $z_j \neq z_k$  für  $j \neq k$ .
- b)  $z$  ist eine  $n$ -te Wurzel aus  $a \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ .

*Beweis:*

- a) Seien  $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $z_j = z_k$  und  $k \geq j$ . Also:  $e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = e^{i \frac{\varphi + 2j\pi}{n}} \xrightarrow{s.o.} \exists l \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} i \frac{\varphi + 2k\pi}{n} &= i \frac{\varphi + 2j\pi}{n} + 2e\pi i \Rightarrow \frac{\varphi}{2\pi} + k = \frac{\varphi}{2\pi} + j + ln \\ \Rightarrow \frac{k-j}{n} &= l \Rightarrow |l| = \frac{|k-j|}{n} = \frac{k-j}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \\ \Rightarrow l &= 0 \Rightarrow k = j. \end{aligned}$$

- b)  $p(z) := z^n - a$ . Dann:  $z$  ist eine  $n$ -te Wurzel aus  $a \iff p(z) = 0$ . Es gilt

$$z_k^n \stackrel{s.o.}{=} re^{i(\varphi + 2k\pi)} = re^{i\varphi} e^{2k\pi i} = re^{i\varphi} = a.$$

Also:  $p(z_k) = 0$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ). Aus a) und 12.3 folgt die Beh.

□

**Bezeichnung:** Ist  $a = 1$ , so heißen die Zahlen  $z_0, \dots, z_{n-1}$  aus 12.4 die  **$n$ -ten Einheitswurzeln**. Also  $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ).

**Bemerkung:**  $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k)$ .

### Beispiele:

- a) Im Rahmen ist  $\sqrt{4} = 2$ ; Im Komplexen sind die Wurzeln aus 4:  $2, -2$ .
- b) Die 4. Wurzeln aus 16 sind  $2, -2, 2i, -2i$ .
- c) Die 4. Einheitswurzeln sind  $1, -1, i, -i$ .

**Beispiel:** Man kann  $\sqrt{-3 + 4i}$  mittels verschiedener Ansätze berechnen:

1. Möglichkeit:  $w = u + iv, w^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = -3 + 4i$

$$\iff u^2 - v^2 = -3, 2uv = 4$$

Löse Gleichungssystem.

2. Möglichkeit:  $z = 3 + 4i$ . Bestimme  $|z|, \varphi = \arg z$ . Dann sind

$$\pm \sqrt{|z|} = e^{i \frac{\arg z}{2}} \text{ die Wurzeln von } z.$$

3. Möglichkeit: Ist  $z \in (-\infty, 0]$ , so sind  $w = \pm \sqrt{-z}$  die Wurzeln von  $z$ . Ist  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , so sind

$$w = \pm \sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||}$$

die Wurzeln von  $z$ ; Beweis:

*Beweis:* Betrachte:

$$\begin{aligned} \left( \sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||} \right)^2 &= |z| \frac{(z + |z|)(z + |z|)}{(z + |z|)(\bar{z} + |z|)} = |z| \frac{(z + |z|)}{(\bar{z} + |z|)} \\ &= \frac{(|z|z + z\bar{z})}{(\bar{z} + |z|)} = z \frac{(|z| + \bar{z})}{(\bar{z} + |z|)} = z \end{aligned}$$

□

Also:  $\sqrt{-3+4i} = \pm \sqrt{5 \frac{-3+4i+5}{|-3+4i+5|}} = \sqrt{5 \frac{2+4i}{\sqrt{20}}} = \pm(1+2i)$ .

**Satz 12.5:** Seien  $p, q \in \mathbb{C}$ . Für  $z \in \mathbb{C}$ :

$$z^2 + pz + q = 0 \iff z = -\frac{p}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}_{\text{doppeldeutig!}}.$$

*Beweis:* “ $\Leftarrow$ ” nachrechnen. Rest mit 12.3. □

**Beispiel 12.6:** Löse  $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$  (\*).

$$\begin{aligned} z &= \frac{2i-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2i-1)^2}{4} + 2i} = i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-4-4i+1}{4} + 2i} \\ &= i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{-3-3i+8i} = i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{12}\sqrt{-3+4i}. \end{aligned}$$

Also sind

$$z_1 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+2i) = 2i$$

und

$$z_2 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1-2i) = -1$$

die Lösungen von (\*). Es gilt  $z^2 + (1-2i)z - 2i = (z-z_1)(z-z_2) = (z-2i)(z+1)$ .

**Definition:** Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $e^z = w$  heißt ein **Logarithmus von  $w$** .

**Satz 12.7:** Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $r := |w|$  und  $\varphi = \arg w$ , also  $w = re^{i\varphi}$ . Sei  $z \in \mathbb{C}$ .

$$z \text{ ist ein Logarithmus von } w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \underbrace{\log |w|}_{\log \text{ in } \mathbb{R}} + i\varphi + 2k\pi i.$$

*Beweis:* “  $\Leftarrow$  “  $e^z = e^{\log|w|} e^{i\varphi} e^{2k\pi i} = |w| e^{i\varphi} = w$ .

“  $\Rightarrow$  “ Sei  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) und  $w = e^z = e^x e^{iy} \Rightarrow |w| = e^x \Rightarrow x = \log|w|$ . Es ist

$$|w| e^{i\varphi} = w = e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{iy}$$

$$\Rightarrow e^{i\varphi} = e^{iy} \xrightarrow{s.o.} \exists k \in \mathbb{Z} : iy = i\varphi + 2k\pi i \Rightarrow z = \log|w| + i\varphi + 2k\pi i. \quad \square$$

### Beispiele:

a)  $w = -1$ ;  $|w| = 1$ ,  $\arg w = \pi$ . Alle Logarithmen von  $-1$ :

$$i\pi + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b)  $w = 1$ ;  $|w| = 1$ ,  $\arg w = 0$ . Alle Logarithmen von  $1$ :

$$2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c)  $w = 1 + i$ ;  $|w| = \sqrt{2}$ ,  $\arg w = \frac{\pi}{4}$ . Alle Logarithmen von  $1 + i$ :

$$\log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

# Kapitel 13

## Fourierreihen

I. d. §-en sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit:

$$(V) \quad \begin{cases} f \in R[-\pi, \pi] \text{ und } f \text{ ist auf } \mathbb{R} \text{ } 2\pi\text{-periodisch,} \\ \text{d.h. } f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Definition:** Es seien  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  und  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  Folge in  $\mathbb{R}$ . Eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

heißt eine **trigonometrische Reihe** (TR).

**Fragen:** Wann ist  $f$  durch eine trigonometrisch Reihe darstellbar? Wie hängt dann  $f$  mit  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  zusammen?

**Satz 13.1:**

- a) Ist  $a \in \mathbb{R}$ , so gilt:  $f \in R[a, a + 2\pi]$  und  $\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ .
- b) **Orthogonalitätsrelationen:** für  $k, n \in \mathbb{N}$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0$$

und

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx \\ &= \begin{cases} \pi, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases}\end{aligned}$$

*Beweis:* Übung. □

**Motivation:** Es seien  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  und  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  Folgen und es gelte

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Weiter sei diese trigonometrisch Reihe auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig konvergent. Sei  $k \in \mathbb{N}$ , dann:

$$f(x) \sin(kx) = \frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \sin(kx) + b_n \sin(nx) \sin(kx)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Übung: die letzte Reihe konvergiert auf  $\mathbb{R}$  ebenfalls gleichmäßig.

$$\begin{aligned}\stackrel{10.8}{\implies} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx}_{=0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx}_{\stackrel{13.1}{=} 0} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx}_{\stackrel{13.1}{=} \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{falls } k \neq n \end{cases}} \\ &= b_k \pi\end{aligned}$$

Also:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Analog zeigt man:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

$$\text{d.h. } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx.$$

**Definition:**  $f$  erfülle (V). Setze

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

und

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Zahlen  $a_n, b_n$  heißen die **Fourierkoeffizienten** (FK) von  $f$  und die mit  $a_n$  und  $b_n$  gebildete Fourierreihe heißt **die zu  $f$  gehörenden Fourierreihe**. Man schreibt:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

**Frage:** wann, bzw. für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die zu  $f$  gehörige Fourierreihe gegen  $f(x)$ ?

**Satz 13.2:** Für  $f$  gelte (V).

- a) Ist  $f$  gerade, also  $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , so gilt für die Fourierkoeffizienten von  $f$ :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{und } b_n = 0$$

- b) Ist  $f$  ungerade, also  $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ , so gilt für die Fourierkoeffizienten von  $f$ :

$$a_n = 0 \text{ und } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

*Beweis:* Übung. □

**Definition:**

- a) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$  und  $g: (x_0, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

$$g(x_0+) := \lim_{x \rightarrow x_0+0} g(x), \text{ falls dieser Grenzwert existiert und } \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

- b) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$  und  $g: (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

$$g(x_0-) := \lim_{x \rightarrow x_0-0} g(x), \text{ falls dieser Grenzwert existiert und } \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

**Definition:** Für  $f$  gelte (V).  $f$  heißt **stückweise glatt**  $\iff$  es existiert eine Zerlegung  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  von  $[-\pi, \pi]$  (also  $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \pi$ ) mit:

- i)  $f \in C^1((t_{j-1}, t_j))$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

- ii) Es existieren die folgenden Grenzwerte:

$$f(\pi-), f'(\pi-), f(-\pi+), f'(-\pi+)$$

und

$$f(t_j+), f'(t_j+), f(t_j-), f'(t_j-) \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

**Beachte:**



a) In den Punkten  $t_j$  muss  $f$  nicht stetig sein (aber:  $f(t_0) = f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(\pi) = f(t_n)$ )

b)  $f$   $2\pi$ -per  $\Rightarrow f(x-), f(x+)$  existiert in jedem  $x \in \mathbb{R}$ .

$$s_f(x) := \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ohne Beweis:

**Satz 13.3:** Für  $f$  gelte (V) und  $f$  sei stückweise glatt. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  in jedem  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $s_f(x)$ . Ist in diesem Fall  $f$  in  $x \in \mathbb{R}$  stetig, so konvergiert die Fourierreihe von  $f$  also gegen  $f(x)$ .

**Beispiel 13.4:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch und auf  $(-\pi, \pi]$  definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

$\xRightarrow{10.16} f \in R[-\pi, \pi]$ ,  $f$  erfüllt also (V).  $f$  ist stückweise glatt und  $s_f(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .  $f$  ist ungerade  $\xRightarrow{13.2} a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$  und

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \stackrel{10.16}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \stackrel{bung}{=} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\xRightarrow{13.3} f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad \forall x \in (-\pi, \pi).$$

$$x = \frac{\pi}{2}: \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots \quad (\text{vgl. 9.17 b}).$$

**Beispiel 13.5:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch und auf  $[-\pi, \pi]$  definiert durch  $f(x) = x^2$ .

Klar:  $f$  erfüllt (V),  $f$  ist stückweise glatt,  $f$  ist gerade und  $f(x) = s_f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\stackrel{13.2}{\implies} b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3}, & n = 0 \\ 4 \frac{(-1)^n}{n^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der Rechnung in 13.3 folgt:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots \right) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

$$x = 0 : \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (1)$$

$$x = \pi : \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

$$\text{Addition von (1), (2): } \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^n}.$$

Ohne Beweis:

**Satz 13.6:** Es gelte (V), es sei  $f \in C(\mathbb{R})$  und  $f$  sei stückweise glatt.

- a) Die Fourierreihe von  $f$  konvergiert in jedem  $x \in \mathbb{R}$  absolut.
- b) Die Fourierreihe von  $f$  konvergiert auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig (gegen  $f$ ).
- c) Sind  $a_n, b_n$  die Fourierkoeffizienten von  $f$ , so konvergieren die Reihen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

die zu  $g$  gehörige Fourierreihe.

**Definition:** Sei  $g \in R[-\pi, \pi]$ . Setze

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

und

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Auch in diesem Fall heißen die Zahlen  $a_n, b_n$  die Fourierkoeffizienten von  $g$  und die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

die zu  $g$  gehörige Fourierreihe.

**Satz 13.7:**  $g, a_n$  und  $b_n$  seien wie in der obigen Definition.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  ist konvergent.
- b)  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx$  Besselsche Ungleichung.
- c)  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$ .

*Beweis:* Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in [-\pi, \pi]$ :

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Dann:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - s_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (g(x)^2 - 2g(x)s_n + s_n(x)^2) dx$$

$$\stackrel{\substack{13.1 \\ \text{nachr.}}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx - \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_n := \frac{a_0^2}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^b (a_k^2 + b_k^2)}_{=: \beta_n} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx =: \alpha.$$

Also ist  $(\alpha_n)$  monoton und beschränkt, somit ist  $(\alpha_n)$  konvergent. Damit ist  $(\beta_n)$  konvergent  $\Rightarrow$  (1).

$\alpha_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  (2).

(3)  $a_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2$ . Aus (1) und 3.1:  $a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0 \Rightarrow a_n^2 \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ .

Genauso:  $b_n \rightarrow 0$ .  $\square$

**13.8 Satz von Riemann-Lebesgue:** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$  und  $g \in R[a, b]$ . Dann:

$$\int_a^b g(x) \sin(nx) dx \rightarrow 0 \text{ und } \int_a^b g(x) \cos(nx) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Ohne Beweis. Für  $[a, b] = [-\pi, \pi]$  vgl. 13.7 c).

# Kapitel 14

## Der Raum $\mathbb{R}^n$

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ .  $\mathbb{R}^n$  ist mit der bekannten Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ,  $\dim \mathbb{R}^n = n$ .

**Einheitsvektoren:**

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0), e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n := (0, \dots, 0, 1)$$

$\{e_1, \dots, e_n\}$  ist ein Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Ist  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , so ist

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

**Definition:** Seien  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

a)  $xy := x \dots y := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  **Skalarprodukt** oder **Innenprodukt** von  $x$  und  $y$ . Beachte:  $xy \in \mathbb{R}$ .

b)  $\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$  **Norm** oder Länge von  $x$ . Beachte:  $\|x\|^2 = x \cdot x$  (Im Fall  $n = 1$ :  $\|x\| = |x|$ ).

c)  $\|x - y\|$  heißt Abstand von  $x$  und  $y$ . Beachte:  $\|x - y\| = \|y - x\|$ .

**Beispiele:**

a)  $(1, 2, -1) \cdot (1, 3, 4) = 1 + 6 - 4 = 3$ .

b)  $\|(1, 2, -1)\| = (1 + 4 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$ .

c)  $\|e_j\| = 1$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

**Satz 14.1:** Seien  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y, z \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- a)  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ ;  $x \cdot y = y \cdot x$ .
- b)  $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y)$ .
- c)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0 \iff x = 0 = (0, \dots, 0)$ .
- d)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ .
- e)  $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$  **Cauchy-Schwarz Ungleichung** (CSU).
- f)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  **Dreiecksungleichung**.
- g)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .
- h) Für  $j \in \{1, \dots, n\}$ :  $|x_j| \leq \|x\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$

*Beweis:* a) - d): Nachrechnen.

- e) o.B.d.A.  $y \neq 0$ , also  $\|y\| > 0$ .  $A := \|x\|^2 = x \cdot x$ ,  $B := x \cdot y$ ,  $C := \|y\|^2 = y \cdot y$ ,  $\alpha := \frac{B}{C}$ . Dann:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2) \\ &= A - 2\alpha B + \alpha^2 C = A - 2\frac{B^2}{C} + \frac{B^2}{C} = A - \frac{B^2}{C} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B^2 \leq AC \Rightarrow (x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

- f)  $\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$ .

Damit:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \stackrel{e)}{=} \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

- g) Übung.

h) Es ist  $|x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |x_j| \leq \|x\|$ . Es ist

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \|x\| \stackrel{d)}{=} |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

□

**Definition:** Seien  $l, m, n \in \mathbb{N}$  und  $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  eine reelle  $m \times n$ -Matrix.

$$\|A\| := \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Norm von } A$$

Sei  $B$  eine reelle  $n \times l$ -Matrix, dann existiert  $AB$ . Übungsblatt:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (*)$$

Sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

$$Ax := A \cdot x^T = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{Matrix-Vektorprodukt})$$

Aus (\*) folgt:  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ .

**Definition:** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $\epsilon > 0$ .

a)  $U_\epsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \epsilon\}$  heißt **offene Kugel um  $x_0$  mit Radius  $\epsilon$** .

b)  $\overline{U_\epsilon(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \epsilon\}$  heißt **abgeschlossene Kugel um  $x_0$  mit Radius  $\epsilon$** .

$U_\epsilon(x_0)$  heißt auch  $\epsilon$ -Umgebung von  $x_0$ .

**Definition:** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- a)  $A$  heißt **beschränkt**  $\iff \exists c \geq 0 : \|a\| \leq c \ \forall a \in A$ .
- b)  $A$  heißt **offen**  $\iff \forall a \in A \ \exists \epsilon = \epsilon(a) > 0 : U_\epsilon(a) \subseteq A$ .
- c)  $A$  heißt **abgeschlossen**  $\iff \mathbb{R}^n \setminus A$  ist offen.
- d)  $A$  heißt **kompakt**  $\iff A$  ist beschränkt und abgeschlossen.

**Beispiele:**

- a) Offene Kugeln sind offen, abgeschlossene Kugeln sind nicht offen.
- b)  $\mathbb{R}^n$  ist offen,  $\emptyset$  ist offen,  $\mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen,  $\emptyset$  ist abgeschlossen.
- c) Abgeschlossene Kugeln sind kompakt.
- d)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ .  $A$  ist nicht beschränkt, also auch nicht kompakt.  $A$  ist nicht offen, aber  $A$  ist abgeschlossen.
- e)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x > 0\}$ .  $A$  ist nicht offen und auch nicht abgeschlossen.



# Stichwortverzeichnis

- abzählbar, 14
- Additionstheoreme, 49
- Axiome
  - Anordnungs-, 4
  - Körper-, 2
  - Vollständigkeits-, 7
- Bernoullische Ungleichung, 10
- beschränkt, 7
  - Folge, 16
  - Menge, 6
- Betrag, 5
- Binomialkoeffizient, 10
- Binomischer Satz, 10
- Cauchyfolge, 33
- Cauchy Kriterium, 33, 36
- Cauchyprodukt, 44
- Cosinus, 49
- divergent, 16, 35
- Eulersche Zahl, 28
- Exponentialfunktion, 42
- Exponentialreihe, 42
- für fast alle, 16
- Fakultät, 10
- Folge, 14
- ganze Zahlen, 10
- Grenzwert, 16
  - linksseitiger, 56
  - rechtsseitiger, 56
- Häufungspunkt, 55
- Induktionsmenge, 9
- Infimum, 6
- Intervalle, 4
- konvergent, 16, 35
  - absolut, 38
- Konvergenzkriterium
  - Cauchy, 57
  - Reihen
    - Leibnitz, 37
    - Majoranten, 38
    - Minoranten, 38
    - Quotienten, 42
    - Wurzel, 41
- Konvergenzradius, 47
- Limes, 16
- Limes inferior, 32
- Limes superior, 32

- monoton, 22
  - fallend, 22
  - streng fallend, 22
  - streng wachsend, 22
  - wachsend, 22
- Monotoniekriterium, 23, 36
- Natürliche Zahlen, 9
- niedrig, 30
- oberer Limes, 32
- Potenzreihe, 47
- q-adische Entwicklung, 52
- rationale Zahlen, 10
- Reihe
  - alternierende harmonische Reihe, 37
  - geometrische, 35
  - harmonische, 35
  - unendliche, 35
- Reihenwert, 35
- Satz
  - Bolzano-Weierstraß, 31
- Schranke, 6
- Sinus, 49
- stetig, 61
- Supremum, 6
- Teilfolge, 28
- Teilsumme, 35
- überabzählbar, 14
- Umgebung, 16
- Umordnung, 43
- unterer Limes, 32
- vollständige Induktion, 9
- Wurzel, 12
- Zwischenwertsatz, 63