

Höhere Mathematik I

G. Herzog, C. Schmoeger

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1	Reelle Zahlen	3
2	Folgen und Konvergenz	13
3	Unendliche Reihen	31
4	Potenzreihen	43
5	q-adische Entwicklung	47
6	Grenzwerte bei Funktionen	50
7	Stetigkeit	55
8	Funktionenfolge und -reihen	63
9	Differentialrechnung	68
10	Das Riemann-Integral	82
11	Uneigentliche Integrale	96
12	Die komplexe Exponentialfunktion	101
13	Fourierreihen	107
14	Der Raum \mathbb{R}^n	114
	Stichwortverzeichnis	117

1 Reelle Zahlen

Grundmenge der Analysis ist die Menge \mathbb{R} , die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen \mathbb{R} als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von \mathbb{R} aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.

Körperaxiome: in \mathbb{R} seien zwei Verknüpfungen “+“ und “ \cdot “ gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a + b \in \mathbb{R}$ und genau ein $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei soll gelten:

$$(A1) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$(A5) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(A2) \quad \exists 0 \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a \quad (\text{Null})$$

$$(A6) \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \text{ und } 1 \neq 0 \quad (\text{Eins})$$

$$(A3) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$$

$$(A7) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$$

$$(A4) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(A8) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(A9) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{Distributivgesetz})$$

Schreibweisen: für $a, b \in \mathbb{R}$: $a - b := a + (-b)$ und für $b \neq 0$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

Alle bekannten Regeln der Grundrechnungsarten lassen sich aus **(A1) – (A9)** herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele:

a) Beh.: $\exists 10 \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a$

Beweis. Sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R} \quad a + \tilde{0} = a$. Mit $a = 0$ folgt: $0 + \tilde{0} = 0$. Mit $a = \tilde{0}$ in **(A2)** folgt: $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Dann $0 = 0 + \tilde{0} \stackrel{(A4)}{=} \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ \square

b) Beh.: $\forall a \in \mathbb{R} \ a \cdot 0 = 0$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b := a \cdot 0$. Dann: $b \stackrel{(A2)}{=} a(0+0) \stackrel{(A9)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b+b$.
 $0 \stackrel{(A3)}{=} b + (-b) = (b+b) + (-b) \stackrel{(A1)}{=} b + (b + (-b)) = b + 0 \stackrel{(A2)}{=} b \quad \square$

Anordnungsaxiome: in \mathbb{R} ist eine Relation " \leq " gegeben.

Dabei sollen gelten:

(A10) für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$

(A11) aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$

(A12) aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$

(A13) aus $a \leq b$ folgt $\forall c \in \mathbb{R} \ a + c \leq b + c$

(A14) aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $ac \leq bc$

Schreibweisen: $b \geq a \iff a \leq b$; $a < b \iff a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a \iff a < b$

Aus (A1) – (A14) lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele (ohne Beweis):

- a) aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$
- b) aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$
- c) aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

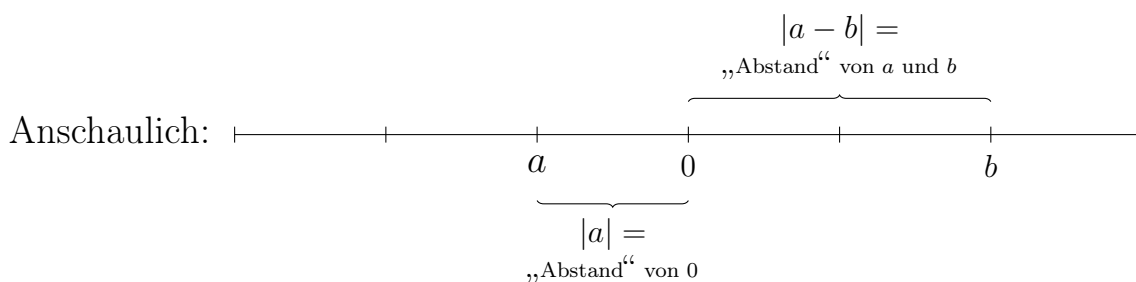
$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$$

Der Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ der Betrag von a .

Beispiele: $|1| = 1$, $|-7| = -(-7) = 7$.



Es ist $|-a| = |a|$ und $|a - b| = |b - a|$

Regeln:

- a) $|a| \geq 0$
- b) $|a| = 0 \iff a = 0$
- c) $|ab| = |a||b|$
- d) $\pm a \leq |a|$
- e) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
- f) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Beweis.

a) - d) leichte Übung.

e) Fall 1: $a + b \geq 0$. Dann: $|a + b| = a + b \stackrel{d)}{\leq} |a| + |b|$.

Fall 2: $a + b < 0$. Dann: $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \stackrel{d)}{\leq} |a| + |b|$.

$$f) \quad c := |a| - |b|; \quad |a| = |a - b + b| \stackrel{d)}{\leq} |a - b| + |b|$$

$$\Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a - b|. \text{ Analog: } -c = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$$

$$\text{Also: } \pm c \leq |a - b|.$$

□

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

- a) M heißt **nach oben beschränkt** $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall x \in M \ x \leq \gamma$
In diesem Fall heißt γ eine **obere Schranke** (OS)
- b) Ist γ eine obere Schranke von M und gilt $\gamma \leq \delta$ für jede weitere obere Schranke δ von M , so heißt γ das **Supremum** von M (kleinste obere Schranke von M)
- c) M heißt **nach unten beschränkt** $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall x \in M \ \gamma \leq x$
In diesem Fall heißt γ eine **untere Schranke** (US)
- d) Ist γ eine untere Schranke von M und gilt $\gamma \geq \delta$ für jede weitere untere Schranke δ von M , so heißt γ das **Infimum** von M (größte untere Schranke von M)

Bez.: in dem Fall: $\gamma = \sup M$ bzw. $\gamma = \inf M$.

Aus (A11) folgt: ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden, so ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ eindeutig bestimmt.

Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden und gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so heißt $\sup M$ das Maximum bzw. $\inf M$ das Minimum von M und wird mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet.

Beispiele:

- a) $M = (1, 2)$. $\sup M = 2 \notin M$, $\inf M = 1 \notin M$. M hat kein Maximum und kein Minimum.
- b) $M = (1, 2]$. $\sup M = 2 \in M$, $\max M = 2$
- c) $M = (3, \infty)$. M ist nicht nach oben beschränkt, $3 = \inf M \notin M$.

d) $M = (-\infty, 0]$. M ist nach unten unbeschränkt, $0 = \sup M = \max M$.

Vollständigkeitsaxiom:

(A15) Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach oben beschränkt, so ist $\sup M$ vorhanden.

Satz 1.1: Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach unten beschränkt, so ist $\inf M$ vorhanden.

Beweis. i. d. Übungen. □

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt beschränkt $\iff M$ ist nach oben und nach unten beschränkt ($\iff \exists c \geq 0 \forall x \in M |x| \leq c \iff \exists c \geq 0 \forall x \in M -c \leq x \leq c$)

Satz 1.2: Es sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$

- a) Ist A beschränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$
- b) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt $\Rightarrow B$ ist nach oben beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ bzw. nach unten beschränkt und $\inf B \geq \inf A$
- c) A sei nach oben beschränkt und γ eine obere Schranke von A . Dann:

$$\gamma = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x = x(\varepsilon) \in A : x > \gamma - \varepsilon$$

- d) A sei nach unten beschränkt und γ eine untere Schranke von A . Dann:

$$\gamma = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x = x(\varepsilon) \in A : x < \gamma + \varepsilon$$

Beweis.

- a) $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$. Dann $\inf A \leq x, x \leq \sup A$ (A12)

$$\Rightarrow \inf A \leq \sup A$$

- b) Sei $x \in B$. Dann: $x \in A$, also $x \leq \sup A$. B ist also nach oben beschränkt und $\sup A$ ist eine obere Schranke von B

$$\Rightarrow \sup B \leq \sup A$$

Analog der Fall für A nach unten beschränkt.

- c) “ \Rightarrow ” Sei $\gamma = \sup A$ und $\varepsilon > 0$. Dann: $\gamma - \varepsilon < \varepsilon$. $\gamma - \varepsilon$ ist also keine obere Schranke von A . Also: $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon$
 “ \Leftarrow ” Sei $\tilde{\gamma} \leq \gamma$. Annahme: $\gamma \neq \tilde{\gamma}$. Dann $\tilde{\gamma} < \gamma$, also $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$.
 $\xRightarrow{\text{Vor.}} \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Widerspruch zu $x \leq \tilde{\gamma}$.
 d) Analog zu c)

□

Natürliche Zahlen

Definition:

- a) $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine Induktionsmenge (IM)

$$\iff \begin{cases} 1. & 1 \in A; \\ 2. & \text{aus } x \in A \text{ folgt stets } x + 1 \in A \end{cases}$$

Beispiele: \mathbb{R} , $[1, \infty)$, $\{1\} \cup [2, \infty)$ sind Induktionsmengen

- b) $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ gehört zu jeder IM}\} = \text{Durchschnitt aller IMn.}$
 Also: $\mathbb{N} \subseteq A$ für jede Induktionsmenge A .

Satz 1.3:

- a) \mathbb{N} ist eine Induktionsmenge
 b) \mathbb{N} ist nicht nach oben beschränkt
 c) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ex. ein $n \in \mathbb{N} : N > x$

Von nun an sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bekannt.

1.4 Prinzip der vollständigen Induktion:

Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und A eine Induktionsmenge, so ist $A = \mathbb{N}$.

Beweis. $A \subseteq \mathbb{N}$ (nach Vor.) und $\mathbb{N} \subseteq A$ (nach Def.), also $A = \mathbb{N}$ □

Beweisverfahren durch vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Für $A(n)$ gelte:

$$\begin{cases} (I) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (II) & \text{ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch } A(n+1) \text{ wahr;} \end{cases}$$

Dann ist $A(n)$ wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$!

Beweis. Sei $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$. Dann:

$A \subseteq \mathbb{N}$ und wegen (I), (II) ist A eine Induktionsmenge $\xRightarrow{1.4} A = \mathbb{N}$ □

Beispiel: Beh.: $\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{A(n)} = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. (induktiv)

I.A.: $1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$, $A(1)$ ist also wahr.

I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

I.S.: $n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &\stackrel{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr. □

Definition:

- a) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
- b) $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (ganze Zahlen)
- c) $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (rationale Zahlen)

Satz 1.5: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$.

Beweis. i. d. Übungen. □

Einige Definitionen und Formeln

- a) Für $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, a^0 := 1$ und ist $a \neq 0 : a^{-n} := \frac{1}{a^n}$
Es gelten die bekannten Rechenregeln.
- b) Für $n \in \mathbb{N} : n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, 0! := 1$ (**Fakultäten**)
- c) **Binomialkoeffizienten** (BK): für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

z.B. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. Es gilt (nachrechnen!):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

- d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a - b) (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \end{aligned}$$

- e) **Binomischer Satz:** $a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Beweis. i. d. Übungen. □

f) **Bernoullische Ungleichung:** Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$. Dann:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Beweis. (induktiv)

I.A.: $n = 1$: $1+x \geq 1+x$

I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $(1+x)^n \geq 1+nx$

I.S.: $n \rightsquigarrow n+1$: $\xrightarrow{I.V.} (1+x)^{n+1} \geq 1+nx$ und da $1+x \geq 0$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+nx+x \\ &= 1+(n+1)x \end{aligned}$$

□

Hilfssatz (HS): Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$.

Beweis. i. d. Übungen.

□

Satz 1.6: Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$ mit: $x^n = a$. Dieses x heißt **n-te Wurzel aus a**; Bez.: $x = \sqrt[n]{a}$. ($\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$)

Beweis. Existenz: später in §7.

Eindeutigkeit: seien $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n \xrightarrow{HS} x = y$.

□

Bemerkungen:

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (s. Schule).

b) Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Bsp.: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{4} \neq -2$. Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

c) $\sqrt{x^2}|x| \forall x \in \mathbb{R}$.

Rationale Exponenten

- a) Sei zunächst $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Dann ex. $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$. Wir wollen definieren:

$$a^r := \left(\sqrt[n]{a} \right)^m. \quad (*)$$

Problem: gilt auch noch $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, gilt dann $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$?

Antwort: ja (d.h. obige Def. $(*)$ ist sinnvoll).

Beweis. $x := (\sqrt[n]{a})^m, y := (\sqrt[q]{a})^p$, dann: $x, y \geq 0$ und $mq = np$, also

$$\begin{aligned} x^q &= \left(\sqrt[n]{a} \right)^{mq} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a} \right)^m \right)^p = a^p \\ &= \left(\left(\sqrt[q]{a} \right)^q \right)^p = \left(\left(\sqrt[q]{a} \right)^p \right)^q = y^q \end{aligned}$$

$$\xRightarrow{HS} x = y.$$

□

- b) Sei $a > 0, r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$. Es gelten die bekannten Rechenregeln:

$$\left(a^r a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, \dots \right)$$

2 Folgen und Konvergenz

Definition: Es sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow X$ heißt eine **Folge in X** . Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt a eine **reelle Folge**.

Schreibweisen: a_n statt $a(n)$ (n -tes Folgenglied)
 (a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder (a_1, a_2, \dots) statt a .

Beispiele:

a) $a_n := \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

b) $a_{2n} := 0, a_{2n-1} := 1$ ($n \in \mathbb{N}$), also $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$.

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a: \{p, p+1, \dots\} \rightarrow X$ eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in X . Bez.: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$. Meist $p = 0$ oder $p = 1$.

Definition: Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$.

a) X heißt **abzählbar** $\iff \exists$ Folge (a_n) in X : $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

b) X heißt **überabzählbar** $\iff X$ ist nicht abzählbar

Beispiele:

a) Ist X endlich, so ist X abzählbar.

b) \mathbb{N} ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_n := n$ ($n \in \mathbb{N}$).

c) \mathbb{Z} ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_1 := 0, a_2 := 1, a_3 := -1, a_4 := 2, a_5 := -2, \dots$ also

$$a_{2n} := n, \quad a_{2n+1} := -n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

d) \mathbb{Q} ist abzählbar!

Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert:

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n \quad (n \in \mathbb{N}). \text{ Dann:}$$

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}.$$

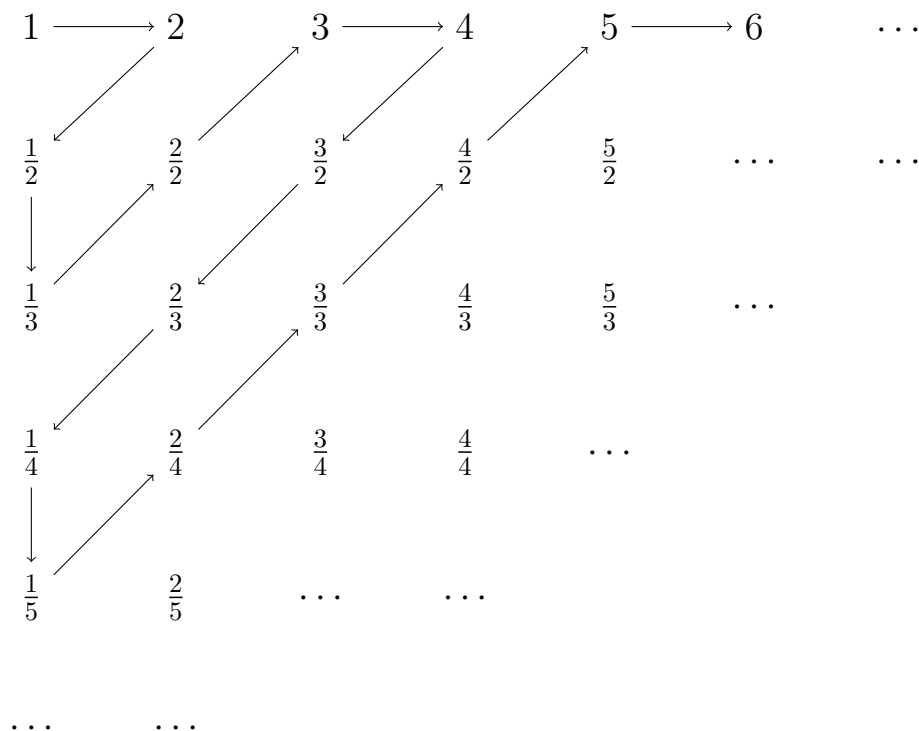


Abbildung 2.1: Zum Beweis der Abzählbarkeit von \mathbb{Q} .

e) \mathbb{R} ist überabzählbar (Beweis in §5).

Vereinbarung: Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in \mathbb{R} .

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ ($p \in \mathbb{Z}$).

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $M := \{a_1, a_2, \dots\}$.

- a) (a_n) heißt **nach oben beschränkt** $\iff M$ ist nach oben beschränkt.
I.d. Fall: $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup M$.
- b) (a_n) heißt **nach unten beschränkt** $\iff M$ ist nach unten beschränkt.
I.d. Fall: $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf M$.
- c) (a_n) heißt **beschränkt** $\iff M$ ist beschränkt

$$\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition: Sei $A(n)$ eine für jedes $n \in \mathbb{N}$ definierte Aussage.

$A(n)$ gilt **für fast alle** (ffa) $n \in \mathbb{N} \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq n_0$

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

heißt ε -**Umgebung von a**.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **konvergent**

$$\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ ex. } n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \\ |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \end{cases}$$

I. d. Fall heißt a **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von (a_n) und man schreibt

$$a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \text{ oder } a_n \rightarrow a \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) **divergent**. Beachte:

$$a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n \geq n_0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}$$

Satz 2.1: (a_n) sei konvergent und $a = \lim a_n$.

a) Gilt auch noch $a_n \rightarrow b$, so ist $a = b$.

b) (a_n) ist beschränkt.

Beweis.

a) Annahme $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n_0} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

$N := \max\{n_0, n_1\}$. Dann:

$$2\varepsilon = |a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\varepsilon$$

Widerspruch! Also $a = b$.

b) Zu $\varepsilon = 1 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \forall n \geq n_0$. Dann:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \geq n_0$$

$c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$. Dann: $|a_n| \leq \varepsilon \forall n \geq 1$.

□

Beispiele:

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n := c \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$|a_n - c| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also: $a_n \rightarrow c$.

b) $a_n := \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Beh: $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Beweis. Sei $\varepsilon > 0 : |a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\xRightarrow{\text{1.3 c)}} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Für $n \geq n_0$ ist $n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Somit $|a_n - 0| < \varepsilon \forall n \geq n_0$. □

c) $a_n := (-1)^n$. Es ist $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = 1$, (a_n) ist also beschränkt. Behauptung: (a_n) ist divergent.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n| (1 - (-1)) = 2$$

Annahme: (a_n) konvergiert. Definiere $a := \lim a_n$, dann

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n \geq n_0$ gilt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Widerspruch! □

d) $a_n := n$ ($n \in \mathbb{N}$). (a_n) ist nicht beschränkt $\xRightarrow{2.1 \text{ b)}} (a_n)$ ist divergent.

e) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Beh.: $a_n \rightarrow 0$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$.

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$\xRightarrow{1.3 \text{ c)}} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Ist $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$
 \square

f) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Beweis.

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$, nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Also $a_n \rightarrow 0$. \square

Definition: (a_n) und (b_n) seien Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n); \quad \alpha(a_n) := (\alpha a_n); \quad (a_n)(b_n) := (a_n b_n)$$

Gilt $\forall n \geq m \ b_n \neq 0$, so ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$ definiert.

Satz 2.2: $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (α_n) seien Folge und $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$.

a) $a_n \rightarrow a \iff |a_n - a| \rightarrow 0$

b) Gilt $|a_n - a| \leq \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \rightarrow 0$, so gilt $a_n \rightarrow a$

c) Es gelte $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Dann:

(i) $|a_n| \rightarrow |a|$

- (ii) $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- (iii) $\alpha a_n \rightarrow \alpha a$
- (iv) $a_n b_n \rightarrow ab$
- (v) ist $a \neq 0$, so ex. ein $m \in \mathbb{N}$:

$$a_n \neq 0 \quad \forall n \geq m \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n} \right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

- d) Es gelte $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ und $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- e) Es gelte $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dann $c_n \rightarrow a$.

Beispiele:

- a) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $a_n := \frac{1}{n^p}$. Es ist $n \leq n^p \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \rightarrow 0, \text{ also } \frac{1}{n^p} \rightarrow 0.$$

$$\text{b) } a_n := \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2} = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{\text{2.2}} \frac{5}{4}$$

Beweis. (von 2.2)

- a) folgt aus der Definition der Konvergenz.
- b) $\exists m \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \alpha_m \quad \forall n \geq m$. Sei $\varepsilon > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \alpha_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1.$$

$$n_0 := \max\{m, n_1\}. \text{ Für } n \geq n_0: |a_n - a| \leq \alpha_n < \varepsilon.$$

- c) (i) $\overset{\S 1}{||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \quad \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{a), b)} |a_n| \rightarrow |a|}$
- (ii) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_2$
 $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Für $n \geq n_0$:

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iii) Übung.

(iv) $c_k := |a_n b_n - ab|$. z. z.: $c_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned}$$

$\xRightarrow{2.1 \text{ b)}} \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $c \geq |b|$. Dann:

$$c_n \leq c(|b_n - b| + |a_n - a|) =: \alpha_n \xrightarrow[c)(ii), c)(iii)]{a)} \alpha_n \rightarrow 0$$

Also: $|c_n - 0| = c_n \leq \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \rightarrow 0 \xRightarrow{b)} c_n \rightarrow 0$.

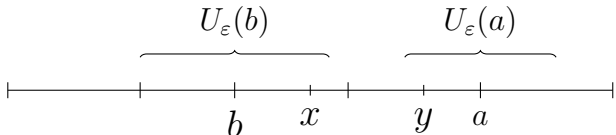
(v) $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$; aus (i): $|a_n| \rightarrow |a| \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| \in U_\varepsilon(|a|) = (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon) = \left(\frac{|a|}{2}, \frac{3}{2}|a|\right) \quad \forall n \geq m$$

$\Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2} > 0 \ \forall n \geq m \Rightarrow a_n \neq 0 \ \forall n \geq m$. Für $n \geq m$:

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} =: \alpha_n$$

$$\alpha_n \rightarrow 0 \xRightarrow{b)} \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}.$$

d) Annahme $b < a$, $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. 

Dann: $x < y \ \forall x \in U_\varepsilon(b) \ \forall y \in U_\varepsilon(a)$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : b_n \in U_\varepsilon(b) \ \forall n \geq n_0$$

$$\exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \ \forall n \geq m$$

$m_0 := \max\{n_0, m\}$. Für $n \geq m_0$: $a_n \leq b_n < b + \varepsilon$, also $a_n \notin U_\varepsilon(a)$.
Widerspruch!

e) $\exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \geq m$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$$

$n_0 := \max\{n_1, n_2, m\}$. Für $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

Also: $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

□

Definition:

- a) (a_n) heißt **monoton wachsend** $\iff a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- b) (a_n) heißt **streng monoton wachsend** $\iff a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- c) Entsprechend definiert man **monoton fallend** und **streng monoton fallend**.
- d) (a_n) heißt **monoton** $\iff (a_n)$ ist monoton wachsend oder monoton fallend.

2.3 Monotoniekriterium:

- a) (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n$$

- b) (a_n) sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n=1}^{\infty} a_n$$

Beweis. $a := \sup_{n=1}^{\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_1, a_2, \dots\}$, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$. Für $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a \leq a + \varepsilon$$

also $|a_n - a| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

□

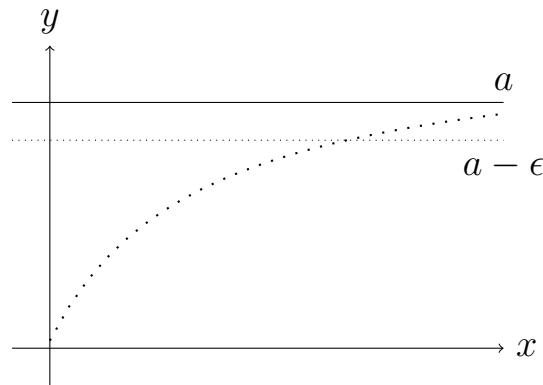


Abbildung 2.2: Zum Beweis des Monotonie-Kriteriums.

Beispiel: $a_1 := \sqrt[3]{6}$, $a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n}$ ($n \geq 2$).

$$a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2;$$

$$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6} = a_1;$$

Behauptung: $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. (induktiv)

I.A.: s.o.

I.V.: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$.

$n \curvearrowright n+1$: $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} >_{I.V.} 0$

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} <_{I.V.} \sqrt[3]{6 + 2} = 2; \quad a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} >_{I.V.} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}$$

Also: (a_n) ist nach oben beschränkt und monoton wachsend.

$\stackrel{2.3}{\Rightarrow} (a_n)$ ist konvergent. $a := \lim a_n$, $a_n \geq 0 \forall n \stackrel{2.2}{\Rightarrow} a \geq 0$. Es ist

$$a_{n+1}^3 = 6 + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\stackrel{2.2}{\Rightarrow} a^3 = 6 + a \Rightarrow 0 = a^3 - a + 6 = (a - 2) \underbrace{(a^2 - 2a + 3)}_{\geq 3} \Rightarrow a = 2. \quad \square$$

Wichtige Beispiele:

Vorbemerkung: Seien $x, y \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$: es ist (s. §1)

$$x^p - y^p = (x - y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x - y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x - y|$$

Beispiel 2.4: Sei $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \rightarrow a \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann $\sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a}$

Beweis.

Fall 1: $a = 0$. Sei $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon^p \forall n \geq n_0$. Daraus folgt:

$$|\sqrt[p]{a_n}| = \sqrt[p]{|a_n|} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Also $\sqrt[p]{a_n} \rightarrow 0$.

Fall 2: $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - (\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y})^p| = |x^p - y^p| \\ &\geq_{s.o.} \underbrace{y^{p-1}}_{:=c} |x - y| = c |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}|, \quad c > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{1}{c} |a_n - a| =: \alpha_n. \quad \alpha_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a} \quad \square$$

Beispiel 2.5: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt (x^n) ist konvergent $\iff x \in (-1, 1]$, i. d. Fall:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Beweis.

Fall 1: $x = 0$. Dann $x^k \rightarrow 0$. Fall 2: $x = 1$. Dann $x^k \rightarrow 1$.

Fall 3: $x = -1$. Dann $(x^k) = ((-1)^k)$, ist divergent.

Fall 4: $|x| > 1$. $\exists \delta > 0 : |x| = 1 + \delta \Rightarrow |x^k| = |x|^k = (1 + \delta)^k \geq 1 + n\delta \geq n\delta$

\Rightarrow ist nicht beschränkt $\xRightarrow{2.1} (x^k)$ ist divergent. Fall 5: $0 < |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} > 1 \Rightarrow \exists \eta > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + \eta$.

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} \right| = \left(\frac{1}{|x|} \right)^n = (1 + \eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta$$

$$\Rightarrow |x^n| \leq \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow x^n \rightarrow 0. \quad \square$$

Beispiel 2.6: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $s_n := 1 + x + x^n + \dots x^n = \sum_{k=0}^n x^k$.

Fall 1: $x = 1$. Dann: $x_n = n + 1$, (s_n) ist also divergent.

Fall 2: $x \neq 1 \Rightarrow s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Aus 2.5:

$$(s_n) \text{ konvergent} \iff |x| < 1$$

i.d. Fall: $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$.

Beispiel 2.7: Behauptung: $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

Beweis. Es ist $\sqrt[n]{n} \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, also $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Z. z.:

$$a_n \rightarrow 0.$$

Für $n \geq 2$:

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (a_n + 1)^n \stackrel{\S 1}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{2} a_n^2 \leq 1. \text{ Also } \xRightarrow{a_n \geq 0} 0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} (n \geq 2). \Rightarrow a_n \rightarrow 0. \quad \square$$

Beispiel 2.8: Sei $c > 0$. Beh.: $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$.

Beweis. Fall 1: $c \geq 1$. $\exists m \in \mathbb{N} : 1 \leq c \leq m$. Daraus folgt:

$$1 \leq c \leq n \forall n \geq m \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq m$$

\Rightarrow Beh.

$$\text{Fall 2: } 0 < c < 1 \Rightarrow \frac{1}{c} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \xrightarrow[\text{Fall 1}]{} 1 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \text{Beh.} \quad \square$$

Beispiel 2.9: $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; $b_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$
 Beh.: (a_n) und (b_n) sind konvergent und $\lim a_n = \lim b_n$

Beweis. I. d. gr. Übungen wird gezeigt: $2 \leq a_n < a_{n+1} < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\stackrel{2.3}{\Rightarrow} (a_n)$ konvergiert, $a := \lim a_n$

Es ist $b_n > 0$ und $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n$. (b_n) ist also monoton wachsend. Für $n > 3$:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 2}}_{< (\frac{1}{2})^2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{< (\frac{1}{2})^3} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \dots \cdot n}}_{< (\frac{1}{2})^{n-1}} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\stackrel{2.3}{\Rightarrow} (b_n)$ konvergiert. $b := \lim b_n$. Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\S 1}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{< 1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{< 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{< 1} \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = b_n \end{aligned}$$

Also $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 2$. Z. z.: $\Rightarrow a \leq b$

Sei $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$ (zunächst fest). Für $n \in \mathbb{N}, n \geq j$:

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{s.o.}{=} 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \\ &\rightarrow 1 + 1 + 1 \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Also $a \geq b_j \quad \forall j \geq 2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a \geq b$. □

Definition: Die Konstante

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!})$$

heißt **Eulersche Zahl**. Übung: $2 < e < 3$ ($e \approx 2,718\dots$).

Definition: Sei (a_n) eine Folge und (n_1, n_2, n_3, \dots) eine Folge in \mathbb{N} mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$b_k := a_{n_k}$$

also $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, \dots$.

Dann heißt $(b_k) = (a_{n_k})$ eine **Teilfolge** (TF) von (a_n) .

Beispiele:

- a) (a_2, a_4, a_6, \dots) ist eine Teilfolge von (a_n) ; hier: $n_k = 2k$
- b) (a_1, a_4, a_9, \dots) ist eine Teilfolge von (a_n) ; hier: $n_k = k^2$
- c) $(a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, a_{14}, \dots)$ ist keine Teilfolge von (a_n) .

Definition: (a_n) sei eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. α heißt ein **Häufungswert** (HW) von (a_n)

$$\iff \exists \text{ Teilfolge } (a_{n_k}) \text{ von } (a_n) : a_{n_k} \rightarrow \alpha \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}.$$

Satz 2.10: $\alpha \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungswert von (a_n)

$$\iff \forall \epsilon > 0 : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha) \quad (*)$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

“ \Rightarrow “ Sei (a_{n_k}) eine Teilfolge mit $a_{n_k} \rightarrow \alpha$. Sei $\epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha)$ für $k \geq k_0 \Rightarrow (*)$.

“ \Leftarrow “ $\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in U_1(\alpha)$. $\exists n_2 \in \mathbb{N} : a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ und $n_2 > n_1$. $\exists n_3 \in \mathbb{N} : a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$ und $n_3 > n_2$. Etc. ... Man erhält eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit

$$a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ also } |a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \quad \forall k$$

Somit: $a_{n_k} \rightarrow \alpha$. □

Beispiele:

a) $a_n = (-1)^n$, $a_{2k} = 1 \rightarrow 1$, $a_{2k+1} \rightarrow -1$, also $1, -1 \in H(a_n)$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1, \alpha \neq -1$

Wähle $\epsilon > 0$ so, dass $1, -1 \notin U_\epsilon(\alpha)$. Dann $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$ für kein $n \in \mathbb{N}$
 $\xRightarrow{2.10} \alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \{1, -1\}$.

b) $a_n = n$. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$, so gilt: $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$ für höchstens endlich viele n , also $\alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \emptyset$.

c) \mathbb{Q} ist abzählbar. Sei (a_n) eine Folge mit $Q = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0 \xRightarrow{1.5} U_\epsilon(\alpha) = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ enthält unendlich viele verschiedene rationale Zahlen $\xRightarrow{2.10} \alpha \in H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \mathbb{R}$.

Folgerung: Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_m) in $\mathbb{Q} : r_m \rightarrow \alpha$.

Satz 2.11: (a_n) sei konvergent, $a := \lim a_n$ und (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n) . Dann:

$$a_{n_k} \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty)$$

Insbesondere: $H(a_n) = \{\lim a_n\}$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann: $a_n \in U_\epsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also auch $a_{n_k} \in U_\epsilon(a)$ ffa $k \in \mathbb{N}$.
 Somit: $a_{n_k} \rightarrow a$. □

Definition: Sei (a_n) eine Folge.

a) $m \in \mathbb{N}$. m heißt **niedrig** (für (a_n)) $\iff a_n \geq a_m \ \forall n \geq m$

b) $m \in \mathbb{N}$ heißt nicht niedrig $\iff \exists n \geq m : a_n < a_m \Rightarrow n > m : a_n < a_m$

Hilfssatz (HS): (a_n) sei eine Folge. Dann enthält (a_n) eine monotone Teilfolge.

Beweis.

Fall 1: es existieren höchstens endlich viele niedrige Indizes. Also existiert $n_1 \in \mathbb{N}$: jedes $n \geq n_1$ ist nicht niedrig.

n_1 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} < a_{n_1}$

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$

Etc...

Wir erhalten so eine streng monoton fallende Teilfolge (a_{n_k}) .

Fall 2: es existieren unendlich viele niedrige Indizes n_1, n_2, \dots , etwa $n_1 < n_2 < \dots$

n_1 ist niedrig und $n_2 > n_1 \rightarrow a_{n_2} \geq a_{n_1}$

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} \geq a_{n_2}$

Etc...

Wir erhalten so eine monoton wachsende Teilfolge (a_{n_k}) . □

Satz 2.12 (Bolzano-Weierstraß):

(a_n) sei beschränkt, dann: $H(a_n) \neq \emptyset$. (a_n) enthält also eine konvergente Teilfolge.

Beweis. $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. \xrightarrow{HS} (a_n) enthält eine monotone Teilfolge (a_{n_k}) . Dann: $|a_{n_k}| \leq c \ \forall k \in \mathbb{N}$, (a_{n_k}) ist also beschränkt.

$\xrightarrow{2.3}$ (a_{n_k}) ist konvergent. Also $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in H(a_n)$. □

Satz 2.13: (a_n) sei beschränkt (nach 2.12 gilt damit $H(a_n) \neq \emptyset$).

a) $H(a_n)$ ist beschränkt.

b) $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$; es existieren also

$$\max H(a_n), \min H(a_n).$$

Definition: Ist (a_n) beschränkt, so nennen wir

- a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \limsup a_n := \overline{\lim} a_n := \max H(a_n)$ heißt **Limes superior** oder **oberer Limes** von (a_n) .
- b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \liminf a_n := \underline{\lim} a_n := \min H(a_n)$ heißt **Limes inferior** oder **unterer Limes** von (a_n) .

Beweis.

- a) $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\alpha \in H(a_n)$. Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \rightarrow \alpha \ (k \rightarrow \infty)$. Es ist

$$|a_{n_k}| \leq c \quad \forall k, \text{ also } -c \leq a_{n_k} \leq c \quad \forall k$$

$$\Rightarrow -c \leq \alpha \leq c. \text{ Also } |\alpha| \leq c \ \forall \alpha \in H(a_n).$$

- b) ohne Beweis.

□

Satz 2.14: (a_n) sei beschränkt.

- a) $\liminf a_n \leq \alpha \leq \limsup a_n \ \forall \alpha \in H(a_n)$.
- b) Ist (a_n) konvergent $\Rightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$.
- c) $\limsup(\alpha a_n) = \alpha \limsup a_n \ \forall \alpha \geq 0$.
- d) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$.

Beweis. a) klar, b) folgt aus 2.11, c) und d) Übung.

□

Motivation: (a_n) sei konvergent und $\lim a_n =: a$. Sei $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

D.h.: (a_n) hat die folgende Eigenschaft:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \quad (c)$$

$$(\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+k}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall k \in \mathbb{N})$$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt eine **Cauchyfolge** (CF)

$$\iff (a_n) \text{ hat die Eigenschaft } (c)$$

Konvergente Folgen sind also Cauchy-Folgen!

2.15 Cauchy Kriterium: (a_n) ist konvergent $\iff (a_n)$ ist eine Cauchyfolge.

Beweis. “ \Rightarrow ” s.o. “ \Leftarrow ” ohne Beweis. □

Beispiel: $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Mit Induktion folgt:

1) $0 < a_n \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) Damit:

2) $a_n \geq \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Für $n \geq 2, k \in \mathbb{N}$ gilt daher:

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &= \left| \frac{1}{1+a_{n+k-1}} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \right| = \frac{|a_{n-1} - a_{n+k-1}|}{(1+a_{n+k-1})(1+a_{n-1})} \\ &\leq \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| = \frac{4}{9} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |a_{n-k-2} - a_{n-2}| \leq \dots \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_{k+1} - a_1| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} (|a_{k+1}| + |a_1|) \leq 2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}: 2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} < \epsilon \ (n \geq n_0)$. Damit:

$$|a_{n+k} - a_n| < \epsilon \quad (n \geq n_0, k \in \mathbb{N}).$$

Also ist (a_n) eine Cauchyfolge. $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Klar:

$$a \geq \frac{1}{2} \text{ und } a = \frac{1}{1+a}$$

Also $a^2 + a - 1 = 0 \iff a = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Wegen $a \geq \frac{1}{2}$ folgt $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3 Unendliche Reihen

Definition: (a_n) sei eine Folge.

- a) $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) (also $a_1 = a_1, a_2 = a_1 + a_2, \dots$). (s_n) heißt **(unendliche) Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.
Weitere Bezeichnungen: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- b) s_n heißt **n-te Teilsumme** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent bzw. divergent $\iff (s_n)$ ist konvergent bzw. divergent.
- d) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim s_n$ der Reihenwert und wird ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet (schlecht, aber so üblich).

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ eine Folge, so definiert man entsprechend

$$s_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n \quad (n \geq p)$$

und $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ (meist: $p = 1$ oder $p = 0$).

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nun für Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Diese Sätze und Definitionen gelten entsprechend für Reihen der Form $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ ($p \in \mathbb{Z}$).

Beispiele:

- a) Sei $x \in \mathbb{R}$. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ heißt **geometrische Reihe**.
 $s_m = 1 + x + \dots + x^m \xrightarrow{2.6} (s_n)$ konvergiert $\iff |x| < 1$ und $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$
für $|x| < 1$. Also: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergent $\iff |x| < 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
für $|x| < 1$.

- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_n &= a_1 + \dots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$; $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \xrightarrow{2.9} s_n \rightarrow e$.
Also: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

d) Die **harmonischen Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dann ist $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$,

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = s_n + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq s_n + \frac{1}{2}$$

Annahme: (s_n) ist konvergent. $s := \lim s_n$

$$\xrightarrow{2.11} s_{2n} \rightarrow s \Rightarrow s \geq s + \frac{1}{2} \rightarrow 0 \geq \frac{1}{2}.$$

Widerspruch! Also: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent!

Satz 3.1: (a_n) sei eine Folge und $s_n = a_1 + \dots + a_n$.

- a) **Monotoniekriterium:** Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- b) **Cauchy-kriterium:** $\sum a_n$ konvergiert $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m > n \geq n_0$$

c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann ist für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ konvergent und für $r_\nu := \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ gilt: $r_\nu \rightarrow 0$.

Beweis.

- a) $s_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. (s_n) ist also wachsend und beschränkt $\xrightarrow{2.3} (s_n)$ konvergent.
- b) Für $m > n$: $|s_m - s_n| = |a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_m - (a_1 + \dots + a_n)| = |a_{n+1} + \dots + a_m| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right|$. Behauptung folgt aus 2.15.
- c) $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$. Ist (s_n) konvergent, so folgt $a_{n+1} \rightarrow 0$

d) ohne Beweis!

□

Bemerkung: Ist (a_n) eine Folge und gilt $a_n \not\rightarrow 0$, so ist $\sum a_n$ divergent!

Satz 3.2: Die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ seien konvergent und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert

$$\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$$

$$\text{und } \sum (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$$

Beweis. 2.2

□

3.3 Leibnizkriterium: Sei (b_n) eine Folge mit:

$$b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, (b_n) \text{ ist monoton fallend und } b_n \rightarrow 0$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konvergent.

Beispiel: Aus 3.3 folgt:

Die **alternierende harmonische Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent.

Beweis. (von 3.3) $a_n := (-1)^{n+1} b_n$,

$$s_n := a_1 + \dots + a_n. \quad s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{b_{2n+1} - b_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n}.$$

(s_{2n}) ist also monoton fallend. Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} = s_{2n-1} - b_{2n} \leq s_{2n-1} \quad (*)$$

Also:

$$s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \stackrel{(*)}{\leq} s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1$$

(s_{2n}) und (s_{2n+1}) sind also beschränkt $\stackrel{2.3}{\Rightarrow} (s_{2n})$ und (s_{2n+1}) sind konvergent.

$$s := \lim s_{2n} \stackrel{(*)}{=} s = \lim s_{2n+1}.$$

Sei $\epsilon > 0$:

$$\left. \begin{array}{l} s_{2n} \in U_{\epsilon}(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ s_{2n-1} \in U_{\epsilon}(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow s_n \in U_{\epsilon}(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$$

Also: $s_n \rightarrow s$.

□

Definition: $\sum a_n$ heißt **absolut konvergent** $\iff \sum |a_n|$ ist konvergent.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz 3.4: $\sum a_n$ sei absolut konvergent. Dann:

- a) $\sum a_n$ ist konvergent
- b) $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (Δ -Ungleichung für Reihen)

Beweis.

- a) Seien $m, n \in \mathbb{N}, m > n$

$$\underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right|}_{=:\sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^m |a_k|}_{=:\tau_{m,n}} \quad (*)$$

Sei $\epsilon > 0$, Voraussetzung nach **3.1 b)** $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \tau_{m,n} < \epsilon$ für $m > n > n_0$
 $\xRightarrow{(*)} \sigma_{m,n} < \epsilon$ für $m > n \geq n_0 \xRightarrow{\text{3.1 b)}} \sum a_n$ konvergiert.

- b) Sei $s_k := a_1 + \dots + a_k$, $s := \lim s_n$, $\sigma_k := |a_1| + \dots + |a_k|$ und $\sigma = \lim \sigma_n$.
 Dann: $|s_n| \rightarrow |s|$ und

$$|s| \leq \sigma \quad \forall n$$

$\Rightarrow |s| \leq \sigma \Rightarrow \Delta$ -Ungleichung.

□

Satz 3.5:

- a) **Majorantenkriterium:** Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum b_n$ konvergent, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.
- b) **Minorantenkriterium:** Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum b_n$ divergent, so ist $\sum a_n$ divergent.

Beweis.

a) $\exists j \in \mathbb{N}: |a_n| \leq b_n \forall n \geq j$. Sei $m > n \geq j$, dann

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^m |a_k|}_{=: \sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^m b_k}_{=: \tau_{m,n}}$$

Sei $\epsilon > 0$ Voraussetzung nach **3.1 b)** $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 \geq j$ und $\tau_{m,n} < \epsilon$ für $m > n \geq n_0$. Dann: $\sigma_{m,n} < \epsilon$ für $m > n \geq n_0 \xRightarrow{\text{3.1 b)}} \sum |a_n|$ konvergiert.

b) Annahme: $\sum a_n$ konvergent $\xRightarrow{a)}$ $\sum b_n$ konvergent. Widerspruch.

□

Beispiele:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = |a_n| = \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$$

Bekannt: $\sum b_n$ konvergiert $\xRightarrow{\text{3.5 a)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergiert.

b) Aus Beispiel a): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

c) Sei $\alpha > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$: Betrachte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Fall 1: $\alpha \in (0, 1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \xRightarrow{\text{3.5 b)}} \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ divergiert.}$$

Fall 2: $\alpha \geq 2$:

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \xRightarrow{\text{3.5 a)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert.}$$

Fall 3: $\alpha \in (1, 2)$: vgl. Übungsblatt, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert.

Fazit: Ist $\alpha > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+1}$; $|a_n| = \frac{n+2}{n^3+1} \leq \frac{n+2}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} =: b_n$. Für $n \geq 2$ $\sum b_n$ konvergiert $\xRightarrow{3.5 a)}$ $\sum a_n$ konvergiert absolut.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$; $a_n = |a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}_{\geq 0} =: b_n$.

$\sum b_n$ divergiert $\xRightarrow{3.5 b)}$ $\sum a_n$ divergiert.

Bemerkung: Ist später später (in §7) die allgemeine Potenz a^x ($a > 0, x \in \mathbb{R}$) eingeführt, so zeigt man analog:

$$\text{Für } \alpha > 0 \text{ gilt: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert} \iff \alpha > 1$$

Hilfssatz (HS): (c_n) sei beschränkt

- a) Ist $\alpha := \limsup c_n$ und $x > \alpha$, so gilt: $c_n < x$ ffa n
- b) Ist $\alpha := \liminf c_n$ und $x < \alpha$, so gilt: $c_n > x$ ffa n
- c) Ist $c_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und $\limsup c_n = 0$, so gilt $c_n \rightarrow 0$

Beweis.

b) Sei $\epsilon > 0$. $x := \epsilon \xRightarrow{a)}$ $-\epsilon < 0 \leq c_n < \epsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also $c_n \in U_\epsilon(0)$ ffa n .

a) Annahme: $c_n \geq x$ für unendlich viele n , etwa für n_1, n_2, n_3, \dots mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Die Teilfolge (c_{n_k}) ist beschränkt $\xRightarrow{2.11}$ (c_{n_k}) enthält eine konvergente Teilfolge $(c_{n_{k_j}})$. $\beta := \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_{k_j}}$. Es ist $c_{n_{k_j}} \geq x \forall j \Rightarrow \beta \geq x > \alpha$; $(c_{n_{k_j}})$ ist eine Teilfolge von $(c_n) \Rightarrow \beta \in H(a_n) \Rightarrow \beta \leq \alpha$, Widerspruch.

□

3.6 Wurzelkriterium (WK): Sei (a_n) eine Folge, $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$.

- a) Ist (c_n) unbeschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
- b) Sei (c_n) beschränkt und $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n$
 - (i) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\alpha > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.

Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis.

- a) (c_n) unbeschränkt $\Rightarrow c_n \geq 1$ für unendlich viele $n \Rightarrow |a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \xrightarrow{\text{3.1 c)}} \text{Beh.}$
- b) (i) Sei $\alpha < 1$, sei $x \in (\alpha, 1) \xrightarrow{HS} c_n \leq x$ ffa $n \Rightarrow |a_n| \leq x^n$ ffa n . $\sum x^n$ konvergiert $\xrightarrow{\text{3.5 a)}} \sum a_n$ konvergiert absolut.
- (ii) Sei $\alpha > 1$, wähle $\epsilon > 0$ so, dass $\alpha - \epsilon > 1$. Es gilt $c_n U_\epsilon(\alpha)$ für unendlich viele n . Dann: $c_n > \alpha - \epsilon > 1$ für unendlich viele n . Wie bei a): $\sum a_n$ divergiert.

□

Beispiele:

- a) $a_n := \frac{1}{n}$; $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$, also $\alpha = 1$ und $\sum a_n$ divergiert.
- b) $a_n := \frac{1}{n^2}$; $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow 1$, also $\alpha = 1$ und $\sum a_n$ konvergiert.
- c) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n = 2k \\ nx^n, & \text{falls } n = 2k - 1 \end{cases}$
Frage: Wann ist $\sum a_n$ (abs.) konvergent? Es ist

$$c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } n = 2k \\ \sqrt[n]{n}|x|, & \text{falls } n = 2k - 1 \end{cases}$$

(c_n) ist also beschränkt, $H(c_n) = \{\frac{1}{2}, |x|\}$.

Fall 1: $|x| < 1$. Dann: $\alpha = \limsup c_n < 1$, also ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Fall 2: $|x| > 1$. Dann: $\alpha = \limsup c_n < 1$, also ist $\sum a_n$ divergent.

Fall 3: $|x| = 1$. Dann: $\alpha = \limsup c_n = 1$. Es ist $|a_n| = n$ falls $n = 2k - 1$. Also: $a_n \not\rightarrow 0$. $\sum a_n$ ist also divergent.

3.7 Quotientenkriterium (QK): Es sei $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und definiere $c_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ($n \in \mathbb{N}$).

- a) Ist $c_n \geq 1$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum a_n$ divergent.
- b) Sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup c_n$ und $\beta := \liminf c_n$.
 - (i) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.
 - (ii) Ist $\beta > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.

Folgerung 3.8: (a_n) und (c_n) seien wie in 3.7, (c_n) sei konvergent und $\alpha := \lim c_n$.

$$\sum a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konv.,} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}$$

Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allg. Aussage möglich.

Beispiele:

- a) $a_n = \frac{1}{n}$, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$, $\sum a_n$ divergiert.
- b) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$, $\sum a_n$ konvergiert.

3.9 Die Exponentialreihe: Für $x \in \mathbb{R}$ betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Frage: für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe (absolut).

Klar, die Reihe konvergiert für $x = 0$. Sei $x \neq 0$ und $a_n := \frac{x^n}{n!}$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Aus 3.8 folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ konv. absolut für jedes } x \in \mathbb{R}$$

Damit ist auf \mathbb{R} eine Funktion $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{Exponentialfunktion}$$

Es ist $E(0) = 1$, $E(1) \stackrel{\S 2}{=} e$.

Später zeigen wir: $E(r) = e^r$ für $r \in \mathbb{Q}$. Des Weiteren definieren wir später $e^x := E(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann: $e^x = E(x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Setze $b_n := a_{\varphi(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$). Also

$$b_1 = a_{\varphi(1)}, b_2 = a_{\varphi(2)}, \dots$$

Dann heißt (b_n) eine **Umordnung** von (a_n) .

Beispiel: $(a_2, a_4, a_1 a_3, a_6, a_8, a_5, a_7, \dots)$ ist eine Umordnung von (a_n) .

Satz 3.10: (b_n) sei eine Umordnung von (a_n) .

- a) Ist (a_n) konvergent, so ist (b_n) konvergent und $\lim b_n = \lim a_n$.
- b) Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum b_n$ absolut konvergent und

$$\sum a_n = \sum b_n$$

Beweis.

- a) $a := \lim a_n$; Sei $\epsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq n_0$. Dann: $|a_{\varphi(n)} - a| < \epsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$.
- b) ohne Beweis.

□

Bemerkung (ohne Beweis): $\sum a_n$ sei konvergent, aber nicht absolut konvergent.

- a) Ist $s \in \mathbb{R}$, so existiert eine Umordnung $\sum b_n$ von $\sum a_n$ mit: $\sum b_n$ ist konvergent und $\sum b_n = s$.
- b) Es existiert eine Umordnung $\sum c_n$ von $\sum a_n$ mit: $\sum c_n$ ist divergent.

Definition: Gegeben seien die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
Setze für $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}, \text{ also:}$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das **Cauchyprodukt** (CP) von $\sum a_n$ und $\sum b_n$.

Satz 3.11 (ohne Beweis): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent. Für ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gilt dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ ist absolut konvergent und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Beispiel: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$. Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert absolut und $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Also

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \stackrel{3.11}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$. Also:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1)$$

z.B.: $(x = \frac{1}{2}) : 4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n}$. Weiter:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

z.B.: $(x = \frac{1}{2}) : 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, also $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$.

3.12 Exponentialfunktion: $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($x \in \mathbb{R}$)

a) $E(0) = 1, E(1) = e$

b) $E(x+y) = E(x)E(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

- c) $E(x_1 + \dots + x_m) = E(x_1) \cdot \dots \cdot E(x_m) \quad \forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$
d) $E(x) > 1 \quad \forall x > 0; E(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; E(-x) = E(x)^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
e) $E(rx) = E(x)^r \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$
f) $E(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$
g) E ist auf \mathbb{R} streng monoton wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt stets $E(x) < E(y)$.

Beweis.

a) klar.

b) $E(x)E(y) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}) \stackrel{3.11}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k} \stackrel{\S 1}{=} \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

$$\text{Also: } E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y).$$

c) folgt aus b).

$$\text{d) Für } x > 0: E(x) = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{>0} > 1$$

$$1 = E(x + (-x)) \stackrel{b)}{=} E(x)E(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Insb.: $E(x) > 0 \quad (x < 0)$ und $E(-x) = E(x)^{-1}$.

e) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$:

$$E(nx) = E(x + \dots + x) \stackrel{c)}{=} E(x)^n$$

$E(x) = (En(\frac{x}{n})) = E(\frac{x}{n})^n$, also $E(\frac{1}{n}x) = E(x)^{\frac{1}{n}}$. Für $m, n \in \mathbb{N}$:

$$E(\frac{m}{n}x) = E(m\frac{x}{n}) = E(\frac{x}{n})^m = (E(x)^{\frac{1}{n}})^m = E(x)^{\frac{m}{n}}.$$

Also $E(rx) = E(x)^r \forall r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$. Sei $r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. Dann:
 $-r > 0$, also

$$\underbrace{E(-rx)}_{\stackrel{d)}{=} \frac{1}{E(rx)}} = e(x)^{-r} = \frac{1}{E(x)^r}$$

Also $E(rx) = E(x)^r$.

f) folgt aus d) mit $x = 1$.

g) Sei $x < y \Rightarrow y - x > 0 \stackrel{d)}{\Rightarrow} E(y - x) > 1$

$$\Rightarrow 1 < E(y - x) \stackrel{b)}{=} E(y)E(-x) \stackrel{d)}{=} \frac{E(y)}{E(x)} \stackrel{d)}{\Rightarrow} E(x) < E(y)$$

□

4 Potenzreihen

Definition: $(a_n)_{n=0}^\infty$ sei eine Folge in \mathbb{R} und $x_0 \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

heißt **Potenzreihe** (PR).

Frage: für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe (absolut)? Klar: die Potenzreihe konvergiert absolut für $x = x_0$.

Beispiele:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Hier: $a_n = \frac{1}{n!}$, $x_0 = 0$. Bekannt: die Potenzreihe konvergiert absolut in jedem $x \in \mathbb{R}$.
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n$. Hier: $a_n = 1$. Setze $q := x - x_0$. Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert absolut $\iff |q| < 1$. D.g. die Potenzreihe konvergiert absolut $\iff |x - x_0| < 1$.
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x - x_0)^n$. Hier: $a_n = n^n$. Sei $x \neq x_0$ und $b_n := n^n (x - x_0)^n$; $\sqrt[n]{|b_n|} = n|x - x_0| \xrightarrow{x \neq x_0} \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right)$ ist unbeschränkt $\xrightarrow{3.6} \sum n^n (x - x_0)^n$ ist divergent.
Also: $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x - x_0)^n$ konvergiert nur für $x = x_0$.

Definition: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ sei eine Potenzreihe. Setze

$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right) \text{ unbeschränkt;} \\ \limsup \sqrt[n]{|b_n|}, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0, \infty) \end{cases}$$

(kurz: „ $r = \frac{1}{\rho}$ “). r heißt der **Konvergenzradius** (KR) der Potenzreihe.

Satz 4.1: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ sei eine Potenzreihe und ρ und r seien wie oben.

- a) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = x_0$.
- b) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.
- c) Ist $r \in (0, \infty)$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$, sie divergiert für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$. Für $x = x_0 \pm r$ ist keine allg. Aussage möglich.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $b_n := a_n(x - x_0)^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

Damit: $\sqrt[n]{|b_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0|$

- a) Sei $x \neq x_0$. $r = 0 \iff \rho = 0 \iff \left(\sqrt[n]{|b_n(x)|}\right)$ unbeschränkt $\xRightarrow{3.6} \sum b_n(x)$ divergiert.

- b) $r = \infty \iff \rho = 0 \iff \limsup \sqrt[n]{|b_n(x)|} = 0 \forall x \in \mathbb{R} \xRightarrow{3.6} \text{Beh.}$

- c) $\limsup \sqrt[n]{|b_n(x)|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \rho|x - x_0| = \frac{1}{r}|x - x_0| < 1$

$$\iff |x - x_0| < r$$

Analog für $|x - x_0| > r$. Behauptung folgt aus 3.6.

□

Folgerung: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Beweis. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$; $a_n = \frac{1}{n!} \xRightarrow{4.1} \rho = 0$, also $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ Hilfssatz vor 3.6 $\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. □

Beispiele:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $a_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}_0$), $x_0 = 1$; $\rho = 1, r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$ absolut; sie divergiert für $|x| > 1$. $|x| = 1$: die Potenzreihe divergiert.
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$), $x_0 = 0$; $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$ und sie divergiert für $|x| > 1$. $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert; $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert.

- c) $\sum \frac{x^n}{n^2}$; $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n^2}$ ($n \geq 1$), $x_0 = 0$; $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow r = 1$.
 Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$, sie divergiert für $|x| > 1$.
 $x = 1$: $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut; $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert absolut.

4.2 Cosinus: Betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

hier: $x_0 = 0, a_{2n+1} = 0, a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ ($n \in \mathbb{N}$). Mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ folgt

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}} \rightarrow 0 \quad \text{Folgerung nach 4.1}$$

Also $H(\sqrt[n]{|a_n|}) = \{0\}$. Also: $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \xrightarrow{4.1}$ obige Potenzreihe hat den Konvergenzradius $r = \infty$, konvergiert also absolut in jedem $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Cosinus: } \begin{cases} \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

4.3 Sinus: Ähnlich wie bei 4.2 sieht man: die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \dots$$

konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Sinus: } \begin{cases} \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$$

Klar: $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Ähnlich wie in 3.12 zeigt man (mit Cauchyprodukt) die **Additionstheoreme** $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$:

$$1 = \cos(0) = \cos(x + (-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\cos^2 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, also $|\cos x| \leq 1$ und $\sin^2 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, also $|\sin x| \leq 1$.

Satz 4.4: Es ist $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$, die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ sei konvergent und $L := \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ den Konvergenzradius L .

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ und $b_n := a_n(x - x_0)^n$. Dann:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x - x_0| \quad (*)$$

Fall 1: $L = 0$. $|x - x_0| > 0 \Rightarrow \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq |x - x_0|$ ffa n

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \geq \text{ffa } n \stackrel{3.7}{\Rightarrow} \sum b_n \text{ divergiert}$$

Die Potenzreihe konvergiert also nur für $x = x_0$, also $r = 0 = L$.

Fall 2: $L > 0$. $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \lim \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{L} |x - x_0|$

$$\stackrel{3.8}{\Rightarrow} \begin{cases} \text{Die Potenzreihe konv. absolut für } |x - x_0| < L \\ \text{Die Potenzreihe divergiert für } |x - x_0| > L \end{cases}$$

$\stackrel{4.1}{\Rightarrow} r = L$.

□

5 q-adische Entwicklung

Definition: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$: $k \leq x < k + 1$;

$$[x] := k = \text{größte ganze Zahl} \leq x$$

Vereinbarung: In diesem § sei stets $a \geq 0, q \in \mathbb{N}$ und $q > 1$.

Setze $z_0 := [a]$, dann: $z_0 \leq a < z_0 + 1$.

Setze $z_1 := [(a - z_0)q]$, dann: $z_1 \leq aq - z_0q < z_1 + 1$.

Also

$$z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{1}{q}$$

Es ist $z_1 \in \mathbb{N}_0$: Annahme: $z_1 \geq 1 \Rightarrow \frac{z_1}{q} \geq 1$

$$\Rightarrow z_0 + 1 \leq z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + 1$$

Widerspruch! Also: $z_1 \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Setze $z_2 := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2]$, dann (wie oben)

$$z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} + \frac{1}{q^2}$$

und $z_2 \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Allgemein (induktiv): sind z_0, \dots, z_n schon definiert, so setze

$$z_{n+1} := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q} - \dots - \frac{z_n}{q^n})q^{n+1}]$$

Wir erhalten so eine Folge $(z_n)_{n=0}^\infty$ mit:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} z_0 \in \mathbb{N}_0, z_n \in \{0, 1, \dots, q-1\} \quad \forall n \geq 1 \\ \text{und} \\ \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \dots + \frac{z_n}{q^n}}_{=: S_n} \leq a < \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \dots + \frac{z_n}{q^n} + \frac{1}{q^n}}_{=: S_n + \frac{1}{q^n}} \end{array} \right.$$

In den großen Übungen wird gezeigt:

Satz 5.1: Ist $(\tilde{z}_n)_0^\infty$ eine weitere Folge mit den Eigenschaften in $(*)$, so gilt:

$$z_n = \tilde{z}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Es ist

$$0 \leq \frac{z_n}{q^n} \leq \frac{q-1}{q^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} \text{ konvergiert.}$$

$\xRightarrow{3.5 \ a)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{z_n} q^n$ konvergiert. Also ist (s_n) konvergent.

$$\xRightarrow{(*)} a = \lim s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n}$$

Dafür schreibt man: $a = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$ (**q-adische Entwicklung von a**)

$q = 10$: Dezimalentwicklung; $q = 2$: Dualentwicklung;

(Gilt mit einem $m \in \mathbb{N}$: $z_n = 0 \quad \forall n > m$, so schreibt man auch: $a = z_0, z_1 \dots z_m$).

Beispiele:

a) $q = 10, a = 1$. $z_0 = 1, z_1 = [(a - z_0)q] = 0$;
 $z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = 0, \dots$ allg.: $z_n = 0 \quad \forall n \geq 1$.
 Also $1 = 1,000 \dots$

b) $q = 10, a = \frac{1}{2}$. $z_0 = 0, z_1 = [(a - z_0)q] = [\frac{1}{2}10] = 5$;
 $z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = [(\frac{1}{2} - \frac{5}{10})100] = 0, \dots$ allg.: $z_n = 0 \quad \forall n \geq 2$.
 Also $\frac{1}{2} = 0,5000 \dots = 0,5$

Definition: Sei $b \in \mathbb{R}$ und $b < 0$. Weiter sei

$$-b = z_0, z_1 z_2 \dots$$

die q-adische Entwicklung von $-b$. Dann ist $b = -z_0, z_1 z_2 \dots$ die q-adische Entwicklung von b .

Satz 5.2: Sei $a = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$ die q-adische Entwicklung von a . Dann ist $z_n = q - 1$ für $n \in \mathbb{N}$ nicht möglich.

Beweis. Annahme: $\exists m \in \mathbb{N}: z_n = q - 1 \ \forall n \geq m$. Dann

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{q^n}}_{=S_{m-1}} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^n}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} &= (q-1) \left(\frac{1}{q^m} + \frac{1}{q^{m+1}} + \dots \right) \\ &= \frac{q-1}{q^m} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \right) \\ &= \frac{q-1}{q^m} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q^{m-1}} \end{aligned}$$

Also $a = S_{m-1} + \frac{1}{q^{m-1}} \stackrel{(*)}{>} a$. Widerspruch! □

Satz 5.3: \mathbb{R} ist überabzählbar.

Beweis. es genügt zu zeigen: $[0, 1)$ ist überabzählbar. Annahme $[0, 1)$ abzählbar, also $[0, 1) = \{a_1, a_2, \dots\}$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$$

die 3-adische Entwicklung von a_j , also $z_k^{(j)} \in \{0, 1, 2\}$. Setze

$$z_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } z_k^{(k)} = 0 \text{ oder } z_k^{(k)} = 2 \\ 0, & \text{falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

Dann: $z_k \neq z_k^{(k)} \ \forall k \in \mathbb{N}$ (**). Setze $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n}$, dann:

$$0 \leq a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}, \text{ also } a \in [0, 1).$$

Übung: $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ ist die 3-adische Entwicklung von a . $a \in [0, 1) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a = a_m$, also

$$0, z_1 z_2 z_3 \dots = 0, z_1^{(m)} z_2^{(m)} \dots$$

und $z_j = z_j^{(m)} \ \forall j \in \mathbb{N} \xrightarrow{j=m} z_m = z_m^{(m)}$. Widerspruch zu (**). □

6 Grenzwerte bei Funktionen

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von $D \iff \exists$ Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$.

Beispiele: a) $D = (0, 1]$

x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff x_0 \in [0, 1]$

b) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

D hat genau einen Häufungspunkt: $x_0 = 0$.

c) Ist D endlich, so hat D keine Häufungspunkte.

Hilfssatz 6.1: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff \forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Beweis.

“ \Rightarrow “ \exists Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\} : x_n \rightarrow x_0$. Sei $\epsilon > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \quad \forall n \geq n_0.$$

“ \Leftarrow “ $\exists x_1 \in U_1(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$, also $|x_1 - x_0| < 1$;

$\exists x_2 \in U_{\frac{1}{2}}(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$, also $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$; etc.

Wir erhalten eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also $x_n \rightarrow x_0$. □

Vereinbarung: ab jetzt sei stets in den §en:

- $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D und
- $f := D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

Bezeichnung:

a) $D_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$

b) Sei $M \subseteq D$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit $f \leq g$ auf $M \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in M$.

Definition: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert $\iff \exists a \in \mathbb{R}$: für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt: $f(x_n) \rightarrow a$. In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt und wir schreiben:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) \rightarrow a \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)}$$

Bemerkung: sollte $x_0 \in D$ sein, so ist der Wert $f(x_0)$ in obiger Definition nicht relevant. Relevant ist allein das Verfahren von f in das „Nähe“ von x_0 .

Beispiele:

- a) $D := [0, \infty)$, $p \in \mathbb{N}$; $f(x) := \sqrt[p]{x}$. Sei $x_0 \in D$ (dann ist x_0 eine Häufungspunkt von D). Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ und $x_n \rightarrow x_0 \xRightarrow{2.4} \sqrt[p]{x_n} \rightarrow \sqrt[p]{x_0}$. Also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt[p]{x_0}$$

- b) $D = (0, 1]$

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Klar: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

$$x_n := \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, z_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad (n \geq 3)$$

Dann: $x_n \rightarrow \frac{1}{2}, z_n \rightarrow \frac{1}{2}$, aber $f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{4} \neq 1 \leftarrow f(z_n)$.

D.h. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ existiert nicht, aber $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x \in (0, \frac{1}{2})}} f(x) = \frac{1}{4}$, dafür schreibt

man

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} f(x) = \frac{1}{4} \text{ (linksseitiger Grenzwert)}$$

Analog:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x \in (\frac{1}{2}, \infty)}} f(x) = 1 \text{ (rechtsseitiger Grenzwert)}$$

c) $D = \mathbb{R}$, $f = E$, also $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $x_0 = 0$. Sei $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} |E(x) - E(0)| &= |E(x) - 1| = \left| x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right| \\ &= |x| \left| 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right| \\ &\leq |x| \left(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \dots \right) \\ &\leq |x| \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) \\ &= |x|(e - 1) \end{aligned}$$

Sei (x_n) Folge in \mathbb{R} : $x_n \rightarrow 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n| \leq 1 \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |E(x_n) - 1| \leq |x_n|(e - 1) \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow E(x_n) \rightarrow 1$

Also: $\lim_{x \rightarrow 0} E(x) = 1 = E(0)$. Somit: $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{n!} \right)$.

Satz 6.2:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(\epsilon)) :$

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x \in D_\delta(x_0) \quad (*)$$

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert

\iff für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ist $(f(x_n))$ konvergent.

c) **Cauchy Kriterium:** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert

$$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \ \forall x_1, x_2 \in D_\delta(x_0)$$

Satz 6.3: $f, g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen. (Erinnerung: $D_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und es gelte $f(x) \rightarrow a, g(x) \rightarrow b \ (x \rightarrow x_0)$. Dann:

- a) $\alpha f(x) + \beta g(x) \rightarrow \alpha a + \beta b$; $f(x)g(x) \rightarrow ab$,
 $|f(x)| \rightarrow |a|$ ($x \rightarrow x_0$)
- b) Ist $a \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$: $f(x) \neq 0 \forall x \in D_\delta(x_0)$. Für $\frac{1}{f}: D_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$
gilt: $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{a}$ ($x \rightarrow x_0$).
- c) Für ein $\delta > 0$ gelte: $f \leq g$ auf $D_\delta(x_0)$. Dann: $a \leq b$
- d) Für ein $\delta > 0$ gelte: $f \leq h \leq g$ auf $D_\delta(x_0)$. Ist $a = b$, so gilt: $h(x) \rightarrow a$ ($x \rightarrow x_0$).

Beweis. z. B.: c) Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ und $x_n \rightarrow x_0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$x_n \in D_\delta(x_0) \quad \forall n \geq n_0$$

Dann: $f(x_n) \leq g(x_n) \quad \forall n \geq n_0 \xRightarrow{2.2} a = \lim f(x_n) \leq \lim g(x_n) = b$. □

Definition:

- a) Sei (x_n) eine Folge in \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow \infty &\iff \forall c > 0 \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : x_n > c \quad \forall n \geq n_0 \\ x_n \rightarrow -\infty &\iff \forall c < 0 \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : x_n < c \quad \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Übung: $x_n \rightarrow \infty \iff x_n > 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ und
 $x_n \rightarrow -\infty \iff x_n < 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$

- b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty &\iff \forall (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ gilt: } f(x_n) \rightarrow \infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\iff \forall (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ gilt: } f(x_n) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

- c) D sei nicht nach oben beschränkt, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \iff \forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow \infty \text{ gilt: } f(x_n) \rightarrow a$$

d) D sei nicht nach unten beschränkt, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \iff \forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow -\infty \text{ gilt: } f(x_n) \rightarrow a$$

Beispiel 6.4: $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow 0 + 0$), $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow 0 - 0$), $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$)

6.5 Exponentialfunktionen: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Sei $p \in \mathbb{N}_0$: für $x > 0$:

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \dots \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$$

Also: $\forall x > 0: \frac{E(x)}{x^p} > \frac{x}{(p+1)!}$. Somit:

$$\frac{E(x)}{x^p} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$

Insbes. ($p = 0$): $E(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$). Es ist $E(-x) = \frac{1}{E(x)} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$), also: $(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow -\infty$).

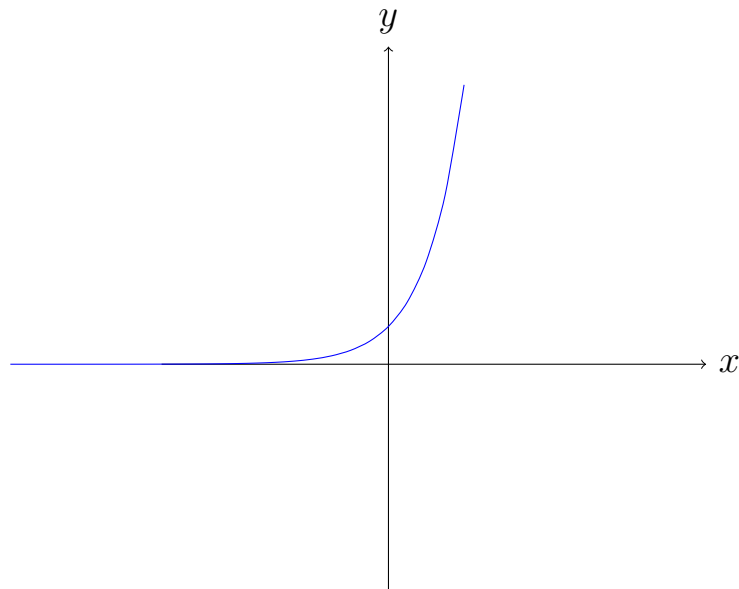


Abbildung 6.1: Exponentialfunktion.

7 Stetigkeit

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

- a) f heißt **in x_0 stetig** \iff für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt:
 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.
- b) f heißt **auf D stetig** \iff f ist in jedem $x \in D$ stetig.

Beispiele: a) $D = [0, \infty)$, $p \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sqrt[p]{x}$. Bekannt: ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \rightarrow x_0 \in D$, so gilt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Also: $f \in C([0, \infty))$

$$\text{b) } D = [0, 1] \cup \{2\}, f(x) := \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Klar: f ist stetig in jedem $x \in [0, 1)$.

- $x_0 := 1$, $x_n := 1 - \frac{1}{n}$. Dann ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \rightarrow 1$, aber $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow 1 \neq 0 = f(1)$. f ist also in $x_0 = 1$ nicht stetig.
- $x_0 := 2$, sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \rightarrow 2$. Dann: $x_n = 2$ ffa n , also $f(x_n) = 1$ ffa n . Somit: $f(x_n) \rightarrow 1 \neq f(2)$. f ist also in $x_0 = 2$ stetig.

Satz 7.1: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$.

- a) f ist in x_0 stetig $\iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in D_\delta(x_0)$$

- b) Ist x_0 Häufungspunkt von D , so gilt:

$$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Beweis.

- a) fast wörtlich wie bei 6.2.
- b) Übung.

□

Satz 7.2:

- a) $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in $x_0 \in D$ und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind stetig in x_0 :

$$\alpha f + \beta g, fg \text{ und } |f|$$

Ist $x_0 \in \tilde{D} := \{x \in D : f(x) \neq 0\}$, so ist $\frac{1}{f}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 .

- b) Sind $f, g \in C(D)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\alpha f + \beta g, fg \text{ und } |f| \in C(D)$$

Beweis. a) Mit 2.2; b) folgt aus a). □

Satz 7.3: Es seien $D, D_0 \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}, g: D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, $f(D) \subseteq D_0$, $x_0 \in D$ und $y_0 := (x_0)$. Ist f in x_0 stetig und ist g in y_0 stetig, so ist

$$g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig in x_0 , wobei $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \rightarrow x_0$. f stetig in $x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) = y_0$. g stetig in $y_0 \Rightarrow \underbrace{g(f(x_n))}_{=(g \circ f)(x_n)} \rightarrow g(x_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$ □

Satz 7.4: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $D := (x_0 - r, x_0 + r)$. falls $r < \infty$ und $D := \mathbb{R}$ falls $r = \infty$. Weiter sei

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in D)$$

Dann: $f \in C(D)$.

Beweis. später, nach 8.3. □

Beispiele: Exponentialfunktionen, Sinus und Cosinus sind also auf \mathbb{R} stetig.

Beispiel 7.5: Beh.: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Beweis. Für $x \neq 0$:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \right) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

□

Beispiel 7.6: Beh.: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E(x)-1}{x} = 1$.

Beweis. Für $x \neq 0$:

$$\frac{E(x) - 1}{x} = \frac{1}{x} \left((1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots) - 1 \right) = \underbrace{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

□

Folgerung: Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(x_0+h)-E(x_0)}{h} = E(x_0)$.

Beweis. $\frac{E(x_0+h)-E(x_0)}{h} = \frac{E(x_0)E(h)-E(x_0)}{h} = E(x_0) \frac{E(h)-1}{h} \xrightarrow{7.6} E(x_0) \quad (h \rightarrow 0)$ □

7.7 Zwischenwertsatz: Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a, b])$ und y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Dann existiert ein $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$.

Beweis. Fall 1: $f(a) = y_0$ oder $f(b) = y_0$, fertig.

Fall 2: $f(a) \neq y_0 \neq f(b)$. o.B.d.A.: $f(a) < f(b)$, also $f(a) < y_0 < f(b)$.

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}$$

$a \in M \Rightarrow M \neq \emptyset; M \subseteq [a, b] \Rightarrow M$ ist beschränkt $\xrightarrow{(A15)} \exists x_0 := \sup M \in [a, b]$.
Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $x_0 - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M , also ex. $x_n \in M$:

$$x_n > x_0 - \frac{1}{n}.$$

Also: $\forall n \in \mathbb{N}: x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_n$. Somit $x_n \rightarrow x_0, f$ stetig in $x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \xrightarrow{\text{Def. von } M} \forall n \in \mathbb{N} : f(x_n) \leq y_0 \Rightarrow f(x_0) \leq y_0$.

Es ist $x_0 < b$ (andernfalls: $x_0 = b \Rightarrow f(b) = f(x_0) \leq y_0 < f(b)$, Wid!).

$z_n := x_0 + \frac{1}{n}$. Es gilt $z_n \in [a, b]$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $z_n > x_0 \Rightarrow z_n \notin M \Rightarrow f(z_n) > y_0$.
 $z_n \rightarrow x_0, f$ stetig $\Rightarrow f(z_n) \rightarrow f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \geq y_0$. □

Folgerung (vgl. 1.6): Ist $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $x_0 > 0$: $x_0^n = \alpha$.

Beweis. $b := 1 + \alpha$, $f(x) := x^n$ ($x \in [a, b]$).

Dann: $f \in C[a, b]$, $f(0) = 0 < \alpha$, $f(b) = (1 + \alpha)^n \stackrel{BK}{\geq} 1 + n\alpha > \alpha \stackrel{7.7}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = \alpha$, also $x_0^n = \alpha$. Klar: $x_0 > 0$, denn $\alpha > 0$. \square

Bemerkung: Erst jetzt ist 1.6 vollständig bewiesen!

Aus 7.7 folgt mit $y_0 = 0$:

7.8 Nullstellensatz von Bolzano: Ist $f \in C([a, b])$ und $f(a)f(b) \leq 0$, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$: $f(x_0) = 0$.

7.9 Exponentialfunktion: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Beh.: $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Beweis. $\stackrel{3.12}{\Rightarrow} \forall x \in \mathbb{R} E(x) > 0$, also $E(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$. Sei $y_0 \in (0, \infty)$.

$$\stackrel{6.5}{\Rightarrow} E(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty) \Rightarrow \exists b > 0 : E(b) > y_0$$

$$\stackrel{6.5}{\Rightarrow} E(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow -\infty) \Rightarrow \exists a < 0 : E(a) < y_0$$

$\stackrel{7.7}{\Rightarrow} \exists x_0 \in [a, b] : E(x_0) = y_0$. Also: $y_0 \in E(\mathbb{R})$. Somit: $(0, \infty) \subseteq E(\mathbb{R})$. \square

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

- a) D heißt **abgeschlossen** \iff für jede konvergente Folge (x_n) in D gilt $\lim x_n \in D$.
- b) D heißt **kompakt** \iff jede Folge (x_n) in D enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D$.

Satz 7.10: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

- a) D ist abgeschlossen \iff jeder Häufungspunkt von D gehört zu D .
- b) D ist kompakt $\iff D$ ist beschränkt und abgeschlossen.
- c) Ist D kompakt und $D \neq \emptyset$, so existieren $\max D$ und $\min D$.

Beispiele:

- a) $[a, b]$ ist kompakt, also auch abgeschlossen.
- b) endliche Mengen sind kompakt.
- c) $[a, \infty), (-\infty, a], \mathbb{R}$ sind abgeschlossen, aber nicht kompakt.
- d) \emptyset ist abgeschlossen.
- e) $(a, b], [a, b), (a, b)$ sind nicht abgeschlossen.

Beweis. (7.10)

- a) i. d. großen Übung.
- b) “ \Leftarrow ” Folgt direkt aus 2.12, “ \Rightarrow ” Übung.
- c) Sei $s := \sup D$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D : x_n > s - \frac{1}{n}, \text{ also } \forall n \in \mathbb{N} : s - \frac{1}{n} < x_n \leq s.$$

Somit: $x_n \rightarrow s \stackrel{b)}{\Rightarrow} D$ ist abgeschlossen $\Rightarrow s \in D \Rightarrow s = \max D$.
 Analog zeigt man: $\inf D \in D$.

□

Definition: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt $\iff f(D)$ ist beschränkt

$$(\iff \exists c \geq 0 : |f(x)| \leq c \forall x \in D)$$

Satz 7.11: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$. Dann ist $f(D)$ kompakt. Insbesondere ist f beschränkt und es ex. $x_1, x_2 \in D$:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in D$$

Beweis. Sei (y_n) eine Folge in $f(D)$. \exists Folge (x_n) in D : $\forall n \in \mathbb{N} f(x_n) = y_n$. D kompakt $\Rightarrow (x_n)$ enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D$. f stetig

$$\Rightarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \in f(D)$$

□

Satz 7.12:

- a) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ($I = \mathbb{R}$ ist zugelassen!) und $f \in C(I)$, so ist $f(I)$ ein Intervall.
- b) Sei $f \in C([a, b])$, $A := \lim f([a, b])$ und $B := \max f([a, b])$ (7.11!), so ist $f[a, b] = [A, B]$.

Beweis. a) ohne Beweis. b) folgt aus a) und 7.7. □

Definition:

- a) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** \iff aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt stets $f(x_1) \leq f(x_2)$.
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend** \iff aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt stets $f(x_1) < f(x_2)$.
- b) Entsprechend definiert man **(streng) monoton fallend**.
- c) f heißt (streng) monoton $\iff f$ ist (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ($I = \mathbb{R}$ ist zugelassen) und $f: I \Rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend bzw. fallend. Dann ist f auf I injektiv, es existiert also die **Umkehrfunktion** $f^{-1}: F(I) \Rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ und f^{-1} ist streng monoton wachsend bzw. fallend.

Es gilt $\forall x \in I: f^{-1}(f(x)) = x$ und $\forall y \in F(I): f(f^{-1}(y)) = y$

Bemerkung: $f(I)$ ist i.A. kein Intervall.

Satz 7.13: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C(I)$ und f sei auf I streng monoton. Dann:

$$f^{-1} \in C(f(I))$$

7.14 Der Logarithmus: Bekannt: E ist auf \mathbb{R} streng monoton wachsend und $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Es existiert also $E^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\log x := \ln x := E^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty))$$

Logarithmus.

Eigenschaften:

- a) $\log 1 = 0, \log e = 1$
- b) $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend
- c) $\log((0, \infty)) = \mathbb{R}$
- d) $\log x \rightarrow \infty \ (x \Rightarrow \infty), \log x \rightarrow -\infty \ (x \rightarrow 0)$
- e) $\log x + \log y = \log(xy) \ \forall x, y > 0$
- f) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \ \forall x, y > 0$

Beweis.

- a) klar
- b) folgt aus 7.13
- c) $E(\mathbb{R}) = (0, \infty) \Rightarrow \text{Beh.}$
- d) folgt aus $E(x) \rightarrow \infty \ (x \rightarrow \infty)$ bzw. $E(x) \rightarrow 0 \ (x \rightarrow -\infty)$.
- e) $z := \log x + \log y$. Dann: $E(z) = E(\log x + \log y) = E(\log x)E(\log y) = xy \Rightarrow \log(xy) = \log E(z) = z \Rightarrow \text{Beh.}$
- f) Analog.

□

Motivation: $\stackrel{3.12}{\implies} E(rx) = E(x)^r \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall r \in \mathbb{Q}.$ Sei $a > 0$. Mit $x := \log a$:

$$\forall r \in \mathbb{Q} : \quad E(r \log a) = E(\log a)^r = a^r$$

7.15 Die allgemeine Potenz: Sei $a > 0$:

$$a^x := E(x \log a) \ (x \in \mathbb{R})$$

Ist speziell $a = e$: $e^x = E(x \log e) = E(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Also:

$$a^x = e^{x \log a} \ (x \in \mathbb{R}, a > 0).$$

Eigenschaften: Sei $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist auf \mathbb{R} stetig.

c) $a^{x+y} = e^{(x+y) \log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y$

d) $a^{-x} = e^{-x \log a} = \frac{1}{e^{x \log a}} = \frac{1}{a^x}$

e) $\log(a^x) = \log(e^{x \log a}) = x \log a$

f) $(a^x)^y = e^{y \log a^x} \stackrel{e)}{=} e^{xy \log a} = a^{xy}$.

g) Ist $x > 0$, so ist $a^{x^y} := a^{(x^y)}$.

Erinnerung an 7.1: Sei $f \in C(D)$, $x_0 \in D$ und $\epsilon > 0$. Dann ex. $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

δ hängt i.A. von ϵ und x_0 ab!

Definition: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf D **gleichmäßig stetig** $\iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0: |f(x) - f(z)| < \epsilon \quad \forall x, z \in D : |x - z| < \delta$.

Klar: f gleichmäßig stetig $\Rightarrow f$ stetig. (" \Leftarrow " ist i.A. falsch!).

Ohne Beweis.

Satz 7.16: Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$, so ist f auf D gleichmäßig stetig.

Definition: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf D **Lipschitz-stetig** $\iff \exists L \geq 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D$$

Übung: f Lips.-stetig $\Rightarrow f$ glm. stetig.

Beispiel: $D = [0, 1]$, $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| = |x+y||x-y| \\ &\leq (|x| + |y|)|x-y| \leq 2|x-y| \quad \forall x, y \in [0, 1] \end{aligned}$$

Bemerkung: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ ist nicht glm. stetig, insbesondere nicht Lips.-stetig.

8 Funktionenfolge und -reihen

I. d. §en sei stets: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $s_n := f_1 + f_n + \dots + f_n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Definition:

- a) Die Funktionenfolge (f_n) heißt **auf D punktweise konvergent** \iff für jedes $x \in D$ ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent.
In diesem Fall setze $f(x) := \lim f_n(x)$ ($x \in D$). Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die **Grenzfunktion** von (f_n) .
- b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **auf D punktweise konvergent** \iff für jedes $x \in D$ ist die Folge $(s_n(x))$ konvergent.
In diesem Fall setze $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ($x \in D$). Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die **Summenfunktion** von (f_n) .

Beispiele:

- a) $D = [0, 1]$, $f_n(x) := x^n$

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(f_n) konvergiert auf $[0, 1]$ punktweise gegen f .

- b) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$ und $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($D := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$). Hier: $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n \xrightarrow{4.1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D punktweise gegen $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.
- c) $D = [0, \infty)$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n}+x^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Also konvergiert (f_n) auf D punktweise gegen $f \equiv 0$. Es ist $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.
Punktweise Konvergenz von (f_n) auf D gegen f bedeutet: ist $\epsilon > 0$ und $x \in D$, so existiert eine n_0 mit $n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Definition:

- a) (f_n) konvergiert auf D gleichmäßig (glm) gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \forall x \in D.$$

- b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D gleichmäßig (glm) gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|s_n(x) - s(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \forall x \in D.$$

Klar: gleichmäßige Konvergenz \Rightarrow punktweise Konvergenz (“ \Leftarrow “ ist i. A. falsch, siehe Beispiele unten).

Anschaulich: (f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f bedeutet: zu $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$: für $n \geq n_0$ liegt der Graph von f_n im “ ϵ -Schlauch“ um f .

Beispiele:

- a) Sei $D = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$. (f_n) konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, 1], \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Es ist $f_n(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ und damit

$$|f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) - f(\frac{1}{\sqrt[n]{2}})| = \frac{1}{2} > \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(f_n) konvergiert also nicht gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f .

- b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $D = (-1, 1)$,

$$s_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \rightarrow \frac{1}{1 - x} =: f(x) \quad \forall x \in D.$$

Beh.: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert auf D nicht gleichmäßig gegen f .

Bew.: Annahme: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, also (s_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f . Zu $\epsilon = 1$ existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|s_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < 1 \quad n \geq n_0, \quad \forall x \in D$$

Aber: $\frac{|x|^{n+1}}{1-x} \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow 1-$), Widerspruch!

c) $D = [0, \infty)$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. $f_n(x) \rightarrow 0 := f(x)$ ($n \rightarrow \infty$). Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$:

$$|f_n(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})| = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(f_n) konvergiert also auf D nicht gleichmäßig gegen f .

Satz 8.1:

a) (f_n) konvergiere auf D punktweise gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Weiter sei (α_n) eine Folge, $\alpha_n \rightarrow 0$, $m \in \mathbb{N}$ und

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \forall n \geq m \quad \forall x \in D$$

Dann konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f .

b) **Kriterium von Weierstraß:** Sei $m \in \mathbb{N}$, (c_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall n \geq m \quad \forall x \in D$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig.

Beweis.

a) Sei $\epsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\epsilon) \geq m$: $\alpha_n < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$. Dann:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D$$

b) Sei $x \in D$. $|f_n(x)| \leq c_n$ $\forall n \geq m \xrightarrow{3.5 \text{ a)}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert (absolut).

□

Satz 8.2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, es sei $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($D := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$).

Ist $[a, b] \subseteq D$, so konvergiert die Potenzreihe auf $[a, b]$ gleichmäßig.

Beweis. Sei o. B. d. A. $x_0 = 0$

Wähle $\delta > 0$ so, dass $-r < -\delta < a < b < \delta < r$. Sei $x \in [a, b]$. Dann $|x| \leq \delta$, also

$$|a_n x^n| = |a_n| |x|^n \leq |a_n| \delta^n := c_n \quad (*)$$

$\xRightarrow{4.1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n$ konvergiert absolut; also ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent. Aus $(*)$ und **8.1 b)** folgt die Behauptung. \square

Satz 8.3: (f_n) bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere auf D gleichmäßig gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

- a) Sind alle f_n in $x_0 \in D$ stetig, so ist f in x_0 stetig.
- b) Sind alle $f_n \in C(D)$, so ist $f \in C(D)$.

Folgerungen:

- a) Konvergiert (f_n) auf D punktweise gegen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und gilt $f_n \in C(D) \forall n$ aber $f \notin C(D)$, so ist Konvergenz nicht gleichmäßig!
- b) Voraussetzung wie in **8.3 a)**; x_0 sei Häufungspunkt von D . Dann:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{8.3 a)}{=} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) \end{aligned}$$

Beweis. (von **8.3**) b) folgt aus a)

- a) Sei $\epsilon > 0$. $\exists m \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \forall x \in D$. f_m stetig in $x_0 \xRightarrow{7.1} \exists \delta > 0 : |f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$. Für $x \in U_\delta(x_0) \cap D$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

$\xRightarrow{7.1}$ Beh.

\square

Beweis. (von 7.4) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($D = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ($x \in D$).

Sei $z_0 \in D$. Wähle $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $z_0 \in (a, b) \subseteq [a, b] \subseteq D \xRightarrow{8.2}$ die Potenzreihe konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig $\xRightarrow{8.3} f \in C([a, b])$. f ist also in z_0 stetig. $z_0 \in D$ beliebig $\Rightarrow f \in C(D)$. \square

8.4 Identitätssatz für Potenzreihen: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($D := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ($x \in D$).

Weiter sei (x_k) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_k \rightarrow x_0$ und $f(x_k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann:

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

9 Differentialrechnung

I.d. §en sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition: f heißt in $x_0 \in I$ **differenzierbar** (db) \iff es existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und ist $\in \mathbb{R}$ (\iff es existiert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ und ist $\in \mathbb{R}$).

I.d. Fall heißt obiger Grenzwert die **Ableitung von f in x_0** und wir mit $f'(x_0)$ bezeichnen.

Ist f in jedem $x \in I$ differenzierbar, so heißt f **auf I differenzierbar** und die **Ableitung f' von f auf I** gegeben durch $x \mapsto f'(x)$.

Beispiele:

- a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) := c$ ($x \in \mathbb{R}$). Dann ist f auf \mathbb{R} differenzierbar und $f' \equiv 0$.
- b) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

f ist also in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

- c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{N}$). Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &\stackrel{\S}{=} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1} \rightarrow nx_0^{n-1} \quad (x \rightarrow x_0) \end{aligned}$$

Also f ist auf \mathbb{R} differenzierbar und $f'(x) = nx^{n-1}$, kurz:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ auf } \mathbb{R}.$$

d) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x \neq x_0$.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \xrightarrow{7.6} e^{x_0} \quad (h \rightarrow 0).$$

Also: f ist auf \mathbb{R} differenzierbar und $f'(x) = e^x$, kurz:

$$(e^x)' = e^x \text{ auf } \mathbb{R}$$

Satz 9.1: Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis. Sei $x \in I$, $x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad (x \rightarrow x_0)$$

Also: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. □

9.2 Differentiationsregeln: $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine weitere Funktion. f, g seien differenzierbar in $x_0 \in I$.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar in x_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ ($x \in J := I \cap U_\delta(x_0)$).
Die Funktion $\frac{f}{g}: J \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis.

a) leichte Übung.

b) Übung (man orientiere sich an c)).

c) g stetig in x_0 (s. 9.1). $g(x_0) \neq 0 \xrightarrow{6.3\ b)} \exists \delta > 0$:

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \cap U_\delta(x_0) =: J.$$

$h := \frac{f}{g}$. Für $x \neq x_0$ mit $x \rightarrow x_0$:

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)} - f(x_0) \frac{\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)}}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\rightarrow \frac{1}{g(x_0)^2}} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} g(x_0) - f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \right) \end{aligned}$$

□

Satz 9.3: Es sei $f \in C(I)$ streng monoton, in $x_0 \in I$ differenzierbar und es sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist

$$f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } y_0 := f(x_0)$$

und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis. $\xrightarrow{7.12} f(I)$ ist ein Intervall; sei (y_n) eine Folge in $f(I)$ mit $y_n \rightarrow y_0$ und $y_n \neq y_0 \quad \forall n$. $x_n := f^{-1}(y_n) \xrightarrow{7.13} x_n \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)$, also

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad (x \rightarrow x_0)$$

□

9.4 Kettenregel: $J \subseteq \mathbb{R}$ sei ein weiteres Intervall, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(I) \subseteq J$. f sei in $x_0 \in I$ differenzierbar und g sei in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist

$$g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } x_0$$

und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis. Für $y \in J$:

$$\tilde{g}(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0), & y = y_0 \end{cases}$$

g ist differenzierbar in $y_0 \Rightarrow \tilde{g}$ ist stetig in y_0 d.h. $\tilde{g}(y) \rightarrow \tilde{g}(y_0) = g'(y_0) = g'(f(x_0))$ ($y \rightarrow y_0$)

$$\Rightarrow \tilde{g}(f(x)) \rightarrow g'(f(x_0)) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Es ist $g(y) - g(y_0) = \tilde{g}(y)(y - y_0) \quad \forall y \in J$, daraus folgt:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \tilde{g}(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow g'(f(x_0)) f'(x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

□

Beispiele:

- a) Sei $a > 0$ und $h(x) := a^x = e^{x \log a} = g(f(x))$, wobei $g(x) = e^x$ und $f(x) = x \log a$. Dann: $h'(x) = g'(f(x)) f'(x) = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$.
Kurz:

$$(a^x)' = a^x \log a \quad (x \in \mathbb{R})$$

- b) $f(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \log y$ ($y > 0$) $\xrightarrow{9.3} f^{-1}$ ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

Kurz: $(\log x)' = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$.

- c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ ($x > 0$).

$$f'(x) = e^{\alpha \log x} (\alpha \log x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Kurz: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ auf $(0, \infty)$.

- d) aus Bsp. c): $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ auf $(0, \infty)$.

Anwendung 9.5: Sei $a \in \mathbb{R}$ und o.B.d.A. $a \neq 0$. $f(t) := \log(1+t)$ ($t > -1$).
Dann: $f'(t) = \frac{1}{1+t}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = \frac{1}{a} x \log(1 + \frac{a}{x}) = \frac{1}{a} \log(1 + \frac{a}{x})^x$$

$$\Rightarrow \log(1 + \frac{a}{x})^x \rightarrow a \quad (x \rightarrow \infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$$

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

- a) $x_0 \in M$ heißt ein **innerer Punkt von M** $\iff \exists > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq M$
- b) g hat in $x_0 \in M$ ein **relatives Maximum** $\iff \exists \delta > 0 : g(x) \leq g(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M$.
- c) g hat in $x_0 \in M$ ein **relatives Minimum** $\iff \exists \delta > 0 : g(x) \geq g(x_0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M$.

relatives Extremum = relative Max. oder Min.

Satz 9.6: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ habe in x_0 ein relatives Extremum und sei in $x_0 \in I$ differenzierbar. Ist x_0 ein innerer Punkt von I , so ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Sei o.B.d.A. x_0 ein relatives Maximum von Funktion f . $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I$ und $f(x) \leq f(x_0) \quad (x \in U_\delta(x_0))$

$$D(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, x > x_0 \\ \geq 0, x < x_0 \end{cases} \quad (x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

Also: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} D(x) \leq 0$ und $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} D(x) \geq 0$. □

9.7 Mittelwertsatz: (MWS) der Differentialrechnung.

Es sei $f \in C[a, b]$ und f sei auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis. $g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ($x \in [a, b]$). Dann: $g \in C[a, b]$, g ist differenzierbar auf (a, b) , $g(a) = g(b) = 0$ und

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (x \in (a, b)).$$

Z.z.: $\exists \xi \in (a, b): g'(\xi) = 0$.

Fall 1: $g \equiv 0$ ✓

Fall 2: $g \not\equiv 0 \xrightarrow{7.11} \exists x_1, x_2 \in [a, b]: g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2)$ ($x \in [a, b]$).

Da $g \not\equiv 0: x_1 \in (a, b)$ oder $x_2 \in (a, b) \xrightarrow{9.6} g'(x_1) = 0$ oder $g'(x_2) = 0$. □

Folgerung 9.8: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf I . f ist auf I konstant $\iff f' \equiv 0$ auf I .

Beweis. " \Rightarrow " ✓, " \Leftarrow " Seien $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \xrightarrow{MWS} \exists \xi \in (x_1, x_2):$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

also $f(x_1) = f(x_2)$. □

Anwendung 9.9: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann:

$$f' = f \text{ auf } I \iff \exists c \in \mathbb{R}: f(x) = ce^x \quad (x \in I)$$

Beweis. " \Rightarrow " ✓, " \Leftarrow " $g(x) := \frac{f(x)}{e^x}$. Dann:

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{e^{2x}} = 0 \quad \forall x \in I.$$

$\xrightarrow{9.8} \exists c \in \mathbb{R}: g(x) = c \quad \forall x \in I \Rightarrow \text{Beh.}$ □

Satz 9.10: $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ seien auf I differenzierbar.

- a) Ist $f' = g'$ auf I , so $\exists c \in \mathbb{R}: f = g + c$ auf I .
- b) Ist $f' \geq 0$ auf I , so ist f monoton wachsend auf I .
Ist $f' > 0$ auf I , so ist f streng monoton wachsend auf I .
- c) Ist $f' \leq 0$ auf I , so ist f monoton fallend auf I .
Ist $f' < 0$ auf I , so ist f streng monoton fallend auf I .

Beweis.

a) $(f - g)' = 0$ auf $I \xrightarrow{9.8}$ Beh.

b) Sei $g' \geq 0$ auf I . Seien $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2 \xrightarrow{MWS} \exists \xi \in (x_1, x_2):$
 $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}(x_2 - x_1) \geq 0$, also $f(x_1) \leq f(x_2)$.

c) Analog zur b).

□

Ohne Beweis:

9.11 Die Regeln von de l'Hospital: Es sei $I = (a, b)$, wobei $a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen ist. $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ seien auf I differenzierbar und $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$. Es existiere

$$L := \lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$$

Gilt (I) $\lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} g(x) = 0$

oder (II) $\lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} g(x) = \pm\infty$,

so ist

$$\lim_{x \rightarrow \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Beispiele:

a) $a, b > 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \log x} \stackrel{c)}{=} e^0 = 1$.

Satz 9.12: Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ ($I = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ($x \in I$).

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$ hat den Konvergenzradius r .

b) f ist auf I differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I$$

Beweis.

a) $\sum [n] n |a_n| = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} \sqrt[n]{|a_n|}$; $r > 0 \xRightarrow{4.1} \sqrt[n]{|a_n|}$ ist beschränkt $\Rightarrow \sqrt[n]{n|a_n|}$ ist beschränkt $\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, da $H(\sqrt[n]{|a_n|}) = H(\sqrt[n]{n|a_n|}) \Rightarrow$ Beh.

b) später, nach 10.18.

□

9.13 Sinus/Cosinus: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \xRightarrow{9.12} \sin$ ist auf \mathbb{R} differenzierbar und

$$(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

Analog: \cos ist auf \mathbb{R} differenzierbar und $(\cos x)' = -\sin x$.

9.14 Definition von π :

a) Für $x \in (0, 2)$ ist

$$\sin x = \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right)}_{>0} + \dots > x - \frac{x^3}{3!} > 0$$

Speziell: $\sin 1 > 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

b) $\exists \xi_0 \in (0, 2): \cos \xi_0 = 0$ und $\cos x > 0 \quad \forall x \in [0, \xi_0)$

Beweis. $\cos 0 = 1 > 0$;

$$\begin{aligned} \cos 2 &= \cos(1+1) \stackrel{4.3}{=} \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos^2 1 + \sin^2 1 - 2\sin^2 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 1 \leq 1 - 2\frac{25}{36} < 0 \end{aligned}$$

$\stackrel{7.7}{\Rightarrow} \exists \xi_0 \in (0, 2) : \cos \xi_0 = 0$. Auf $(0, 2)$:

$$(\cos x)' = -\sin x \stackrel{a)}{<} 0 \Rightarrow \cos x > 0 \quad \forall x \in [0, \xi_0)$$

□

c) Sei ξ_0 wie in b). $\pi := 2\xi_0$ (Pi).

$$\xi_0 \in (0, 2) \Rightarrow \pi \in (0, 4) \quad (\pi \approx 3,14\dots)$$

$\frac{\pi}{2} = \xi_0$, also $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow |\sin \frac{\pi}{2}| = 1 \stackrel{a)}{\Rightarrow} \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

\cos hat in $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle.

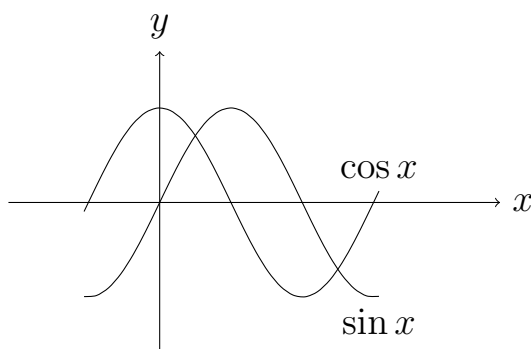


Abbildung 9.1: Sinus und Cosinus.

9.15 Weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus:

a) Aus 4.3:

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$$

Analog:

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

b) \cos hat in $[0, \pi]$ genau eine Nullstelle.

c) I. d. gr. Übungen:

$$\begin{aligned}\cos x = 0 &\iff x \in \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \\ \sin x = 0 &\iff x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Definition: $\tan: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}; \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ **Tangens**

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

\tan ist also auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng wachsend.

Übung: $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$. Es ex. also

$$\arctan := \tan^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Arkustangens.

I.d. Übungen wird gezeigt: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ auf \mathbb{R} .

Ohne Beweis:

9.16 Abelscher Grenzwertsatz: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und $r < \infty$. Die Potenzreihe konvergiere auch noch in x_0+r . Es sei

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ für } x \in \begin{matrix} (x_0-r, x_0+r] \\ [x_0-r, x_0+r) \end{matrix}$$

Dann ist f stetig in x_0+r .

Anwendungen 9.17:

a) $f(x) := \log(1+x)$ für $x \in (-1, 1) =: I$. Dann:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \forall x \in I.$$

$g := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ für $x \in (-1, 1]$ $\xRightarrow{9.12}$ g ist differenzierbar auf I und

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = f'(x) \quad \forall x \in I$$

Damit ex. $c \in \mathbb{R}$: $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in I$. Mit $x = 0$ folgt: $c = 0$. Also

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in I$$

$\xRightarrow[9.16]{x \rightarrow 1} f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-1, 1]$. Fazit:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1]$$

Für $x = 1$: $\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

b) Vgl. Übungsblatt:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Speziell: $\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \stackrel{9.15}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$

Definition:

- a) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf I differenzierbar. Ist f' in $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f in x_0 **zweimal differenzierbar** und

$$f''(x_0) := (f')'(x_0) \text{ die 2. Ableitung von } f \text{ in } x_0.$$

- b) Ist f' auf I differenzierbar, so heißt f **auf I zweimal differenzierbar** und $'' := (f')'$ die 2. Ableitung von f auf I .
Entsprechend definiert man, falls vorhanden: $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \dots$ und $f''', f^{(4)}, \dots$

- c) $C^0(I) := C(I)$; $f^0 := f$; Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt **auf I n -mal stetig differenzierbar** $\iff f$ ist auf I n -mal differenzierbar $f, f', \dots, f^{(n)} \in C(I)$.

$$C^\infty := \bigcap_{n \geq 0} C^n(I).$$

Beispiele:

a) $(e^x)'' = e^x$, $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

b) $f(x) := x|x|$

Für $x > 0$: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

Für $x < 0$: $f(x) = -x^2$, $f'(x) = -2x$

Für $x = 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x| \rightarrow 0 \ (x \rightarrow 0)$

f ist also auf \mathbb{R} differenzierbar und $f'(x) = 2|x| \ (x \in \mathbb{R})$. f ist also in $x_0 = 0$ nicht zweimal differenzierbar.

Beispiel 9.18: $f(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Auf $(0, 1]$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Für $x_0 = 0$ betrachte:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{beschr.}} \rightarrow 0$$

f ist also auf $[0, 1]$ differenzierbar ($f'(0) = 0$). $x_n := \frac{1}{n\pi}$. Dann: $x_n \rightarrow 0$,

$$f'(x_n) = \sqrt{n\pi} \cos(n\pi) = \sqrt{n\pi}(-1)^{n+1} \not\rightarrow 0 = f'(0).$$

D.h.: f ist auf $[0, 1]$ differenzierbar, aber $f \notin C^1[0, 1]$. $|f'(x_n)| = \sqrt{n\pi} \Rightarrow f'$ ist auf $[0, 1]$ nicht beschränkt.

Aus 9.12 folgt (induktiv):

Satz 9.19: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($I = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in I).$$

Dann: $f \in C^\infty(I)$ und

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot a_n(x - x_0)^{n-k} \quad \forall x \in I \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Insbes.: $(x = x_0): f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$, also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Ohne Beweis:

Satz 9.20: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei f auf I $(n+1)$ -mal differenzierbar (insb. $f \in C^n(I)$), $x, x_0 \in I$ und $x \neq x_0$. Dann existiert ein ξ zwischen x und x_0 , $x \neq \xi \neq x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Bemerkung: Im Fall $n = 0$ vgl. **MWS**.

Satz 9.21: Sei $n \geq 2$, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ sei ein innerer Punkt von I und

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

- a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein relatives Maximum.
- b) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein relatives Minimum.
- c) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein relatives Extremum.

Beweis. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f^{(n)}$ stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I$.

Sei $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \xrightarrow{9.20} \exists \xi$ zwischen x und x_0 :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{=f(x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n}_{=:R(x)}$$

- a) Sei $f^{(n)}(x_0) < 0 \xRightarrow{(*)} f^n(\xi) < 0$, n gerade $\Rightarrow (x - x_0)^n > 0$. Also: $R(x) < 0$;
somit: $f(x) < f(x_0)$.
- b) Sei $f^{(n)}(x_0) > 0 \xRightarrow{(*)} f^n(\xi) > 0$, n gerade $\Rightarrow (x - x_0)^n > 0$. Also: $R(x) > 0$;
somit: $f(x) > f(x_0)$.
- c) Sei o.B.d.A. $f^{(n)}(x_0) > 0 \xRightarrow{(*)} f^{(n)}(\xi) > 0$, n ungerade

$$\Rightarrow (x - x_0)^n \begin{cases} > 0, & x > x_0 \\ < 0, & x < x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(x) \begin{cases} > 0, & x > x_0 \\ < 0, & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \begin{cases} > f(x_0), & x > x_0 \\ < f(x_0), & x < x_0 \end{cases}$$

□

10 Das Riemann-Integral

Vereinbarung: I. d. §en sei stets $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und f beschränkt auf $[a, b]$; $m := \inf f([a, b])$, $M := \sup f([a, b])$.

$Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt eine **Zerlegung** von $[a, b] \iff a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. $\mathcal{J} := \{Z : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$. Definiere $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $|I_j| := x_j - x_{j-1}$ "Länge" von I_j und $m_j := \inf f(I_j)$, $M_j := \sup f(I_j)$ ($j = 1, \dots, n$)

$$s_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j |I_j| \text{Untersumme von } f \text{ bzgl. } Z.$$

$$S_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j |I_j| \text{Obersumme von } f \text{ bzgl. } Z.$$

Es ist $m \leq m_j \leq M_j \leq M$, also $m|I_j| \leq m_j|I_j| \leq M_j|I_j| \leq M|I_j|$, somit

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n |I_j|}_{=b-a} \leq s_f(Z) \leq S_f(Z) \leq M \sum_{j=1}^n |I_j| = M(b-a) \quad (*)$$

Definition: Seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{J}$. Z_2 heißt eine Verfeinerung von $Z_1 \iff Z_1 \subseteq Z_2$.

Ohne Beweis:

Satz 10.1: Seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{J}$.

a) $s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$

b) Ist $Z_1 \leq Z_2$ so gilt: $s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2)$ und $S_f(Z_1) \geq S_f(Z_2)$. Aus (*) folgt: es existieren

$$s_f := \sup\{s_f(Z) : Z \in \mathcal{J}\}$$

und

$$S_f := \inf\{S_f(Z) : Z \in \mathcal{J}\}.$$

Aus (*) und 10.1 a) mit $Z \in \mathcal{J}$:

$$m(b-a) \leq s_f \leq S_f(Z) \leq S_f \leq M(b-a). \quad (**)$$

Definition: f heißt (Riemann-)integrierbar (ib) über $[a, b] \iff s_f = S_f$. I. d. Fall heißt

$$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := S_f (= s_f)$$

das (Riemann-)Integral von f über $[a, b]$ und wir schreiben: $f \in R[a, b]$.

Beispiele:

- a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c$ ($x \in [a, b]$) $\xrightarrow{(**)} c(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq c(b-a) \Rightarrow f \in R[a, b]$ und $\int_a^b c dx = c(b-a)$.
- b) Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[0, 1]$. definiere

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

m_j, M_j seien wie immer, dann: $m_j = \inf f(I_j) = 0, M_j = \sup f(I_j) = 1$; $s_f(Z) = 0, S_f(Z) = 1$. Also: $s_f = 0 \neq 1 = S_f$; $f \notin R[0, 1]$.

Satz 10.2: Es seien $f, g \in R[a, b]$.

- a) Ist $f \leq g$ auf $[a, b]$, so ist $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$.
- b) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Beweis. nur a) (b) Übung): Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$, I_j und m_j wie immer.
 $\tilde{m}_j := \int g(I_j)$ ($j = 1, \dots, n$). $f \leq g$ auf I_j

$$\Rightarrow m_j \leq \tilde{m}_j \Rightarrow s_f(Z) \leq s_g(Z) \leq s_g \stackrel{\text{Vor.}}{=} \int_a^b g dx$$

$$\Rightarrow s_f \leq \int_a^b g dx \stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \text{Beh.}$$

□

10.3 Riemannsches Integrabilitätskriterium: $f \in R[a, b]$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists Z = Z(\epsilon) \in \mathcal{J} : S_f(Z) - s_f(Z) < \epsilon.$$

Satz 10.4: Ist f auf $[a, b]$ monoton, so ist $f \in R[a, b]$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon.$$

Für $j = 0, \dots, n$ sei $x_j := a + j \frac{b-a}{n}$ und $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$. Seien I_j, m_j und M_j wie immer, dann $|I_j| = \frac{b-a}{n}, m_j = f(x_{j-1}), M_j = f(x_j)$. Also:

$$\begin{aligned} S_f(Z) - s_f(Z) &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |I_j| \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \epsilon \end{aligned}$$

$\stackrel{10.3}{\Rightarrow} \text{Beh.}$

□

Satz 10.5: $C[a, b] \subseteq R[a, b]$.

Beweis. Sei $f \in C[a, b]$ und $\epsilon > 0 \stackrel{7.16}{\Rightarrow} \exists \delta > 0$:

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \forall t, s \in [a, b] \text{ mit } |t - s| < \delta. \quad (*)$$

Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$, I_j, M_j, m_j wie immer und Z sei so gewählt, dass $|I_j| < \delta$ ($j = 1, \dots, n$). Betrachte I_j :

$$\stackrel{7.11}{\implies} \exists \xi, \eta \in I_j : f(\xi) = m_j, f(\eta) = M_j$$

$$|I_j| < \delta \Rightarrow |\xi - \eta| < \delta \stackrel{(*)}{\implies}$$

$$M_j - m_j = f(\eta) - f(\xi) = |f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Dann: $S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |I_j| < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n |I_j| = \epsilon \stackrel{10.3}{\implies} \text{Beh.} \quad \square$

Definition: $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $G, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. G heißt eine **Stammfunktion** von g auf $I \iff G$ ist auf I differenzierbar und $G' = g$ auf I .

Beachte: Sind G, H Stammfunktionen von g auf $I \Rightarrow G' = g = H'$ auf $I \stackrel{9.10}{\implies} \exists c \in \mathbb{R} : G = H + c$ auf I .

10.6 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist $f \in R[a, b]$ und besitzt f auf $[a, b]$ eine Stammfunktion F , so ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b =: [F(x)]_a^b$$

Beweis. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$, I_j, m_j, M_j wie immer.

$$F(x_j) - f(x_{j-1}) \stackrel{MWS}{=} F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j) \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{=|I_j|}$$

mit $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$. $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j \Rightarrow m_j |I_j| \leq f(\xi_j) |I_j| \leq M_j |I_j| \Rightarrow$

$$\begin{aligned} s_f(Z) &\leq \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |I_j| \\ &= \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1})) \\ &= F(b) - F(a) \\ &\leq S_f(Z) \end{aligned}$$

Also: $s_f(Z) \leq F(b) - F(a) \leq S_f(Z) \forall Z \in \mathcal{J}$.

$f \in R[a, b] \Rightarrow \int_a^b f dx = s_f \leq F(b) - F(a) \leq S_f = \int_a^b f dx$. □

Beispiele:

- a) $0 < a < b$, $f(x) := \frac{1}{x}$; $f \in C[a, b] \xrightarrow{10.5} f \in R[a, b]$. $F(x) := \log x$; F ist eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$.

$$\xrightarrow{10.6} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_a^b = \log b - \log a.$$

- b) Sei $a < b$. $\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$.

Warnungen:

- a) Es gibt integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen!
 b) Es gibt nicht integrierbare Funktionen, die Stammfunktionen besitzen!

Beispiele:

- a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. f ist monoton $\xrightarrow{10.4} f \in R[0, 1]$.

Annahme: f besitzt auf $[0, 1]$ eine Stammfunktion F . Dann:

$$F'(x) = f(x) \forall x \in [0, 1] \Rightarrow F'(x) = 1 = (x)' \text{ auf } (0, 1]$$

$\xrightarrow{9.10} \exists c \in \mathbb{R} : F(x) = x + c$ auf $(0, 1]$. F ist differenzierbar in 0 $\Rightarrow F$ stetig in 0 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0) = c$. Also: $F(x) = xc \forall x \in [0, 1]$. Aber:

$$0 = f(0) = F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + c - c}{x} = 1,$$

Widerspruch!

- b) $F(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases} \xrightarrow{9.18} F$ ist auf $[0, 1]$ differenzierbar; $f := F'$.

Dann ist F eine Stammfunktion von f auf $[0, 1]$ $\xrightarrow{9.18} f$ ist auf $[0, 1]$ nicht beschränkt, also $f \notin R[a, b]$.

Ohne Beweis:

Satz 10.7: Sei $c \in (a, b)$.

$$f \in R[a, b] \iff f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b]$$

I. d. Fall: $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$.

Motivation Für $n \geq 2$ sei $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ n - (x - \frac{1}{n})n^2, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$

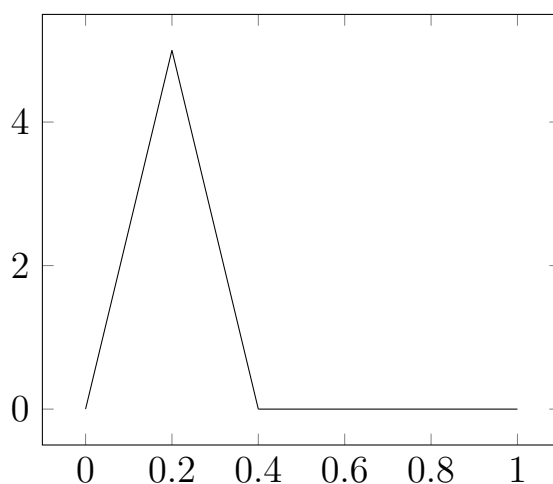


Abbildung 10.1: f_n für $n = 5$.

$$f_n \in C[0, 1] \xrightarrow{10.5} f_n \in R[0, 1] \xrightarrow[10.7]{10.6} \int_0^1 f_n dx = 1 \quad \forall n \geq 2.$$

Übung: (f_n) konvergiert auf $[0, 1]$ punktweise gegen $f \equiv 0$. Aber:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

Ohne Beweis:

Satz 10.8: Sei (f_n) eine Folge in $R[a, b]$ und f_n konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann: $f \in R[a, b]$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

Satz 10.9: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($I := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in I)$$

Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ den Konvergenzradius r und für

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} \quad (x \in I) \quad (*)$$

gilt $G' = g$ auf I .

Beweis. Sei \tilde{r} der Konvergenzradius der Potenzreihe in $(*) \xrightarrow{9.12} r = \tilde{r}$ und $G' = g$ auf I . \square

Satz 10.10: Es seien $f, g \in R[a, b]$.

a) Sei $D := f([a, b])$ und mit einem $L \geq 0$ gelte für $h: D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$|h(s) - h(t)| \leq L|s - t| \quad \forall t, s \in D$$

Dann: $h \circ f \in R[a, b]$.

b) $|f| \in R[a, b]$ und $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (Δ -Ungleichung für Integrale).

c) $fg \in R[a, b]$.

d) Ist $g(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ und $\frac{1}{g}$ auf $[a, b]$ beschränkt, so ist $\frac{1}{g} \in R[a, b]$.

Beweis.

a) c) und d) ohne Beweis.

b) $D := f([a, b]); h(t) := |t|$ ($t \in D$). Dann: $|f| = h \circ f$. Für $t, s \in D$:

$$|h(t) - h(s)| = ||t| - |s|| \stackrel{\S 1}{=} |t - s|.$$

Aus a): $|f| \in R[a, b]$. Es ist $\pm f \leq |f|$ auf $[a, b]$

$$\stackrel{10.2}{\implies} \pm \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx$$

$\Rightarrow \Delta$ -Ungleichung.

□

Definition: Sei $f \in R[a, b]$ und $\alpha, \beta \in [a, b]$. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx =: 0$. Sei $\alpha < \beta \xrightarrow{10.7} f \in R[\alpha, \beta]$.

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx := - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

10.11 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Sei $f \in R[a, b]$ und

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

Dann gilt:

- a) $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \quad \forall x, y \in [a, b]$.
- b) $F \in C[a, b]$.
- c) Ist $f \in C[a, b]$, so ist $F \in C^1[a, b]$ und $F' = f$ auf $[a, b]$.

Beweis.

- a) Seien $x, y \in [a, b]$. Fall 1: $x \leq y$

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &\stackrel{10.7}{=} \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^y f(t)dt \end{aligned}$$

Fall 2: $x > y$:

$$F(y) - F(x) = -(F(x) - F(y)) \stackrel{\text{Fall 1}}{=} - \int_y^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt.$$

- b) $L := \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$. Seien $x, y \in [a, b]$. O.B.d.A.: $x \leq y$, dann:

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &\stackrel{a)}{=} \left| \int_x^y f(t)dt \right| \stackrel{10.10}{\leq} \int_x^y |f(t)|dt \stackrel{10.2}{\leq} \int_x^y Ldt \\ &= L(y - x) = L|y - x|. \end{aligned}$$

c) Wir zeigen für $x_0 \in [a, b)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

(analog zeigt man für $x_0 \in (a, b]$: $\lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$).

Sei also $x_0 \in [a, b)$, $h > 0$ und $x_0 + h \in [a, b]$. Es ist

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = f(x_0)$$

und

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \stackrel{a)}{=} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Dann:

$$\begin{aligned} L(h) &:= \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\stackrel{10.10}{\leq} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt. \end{aligned}$$

$\stackrel{7.11}{\implies} \exists \xi_h \in [x_0, x_0 + h]: |f(t) - f(x_0)| \leq |f(\xi_h) - f(x_0)| \quad \forall t \in [x_0, x_0 + h].$

Dann:

$$L(h) \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(\xi_h) - f(x_0)| dt = |f(\xi_h) - f(x_0)|.$$

Für $h \rightarrow 0$: $\xi_h \rightarrow x_0$; f stetig $\Rightarrow f(\xi_h) \rightarrow f(x_0)$. Also: $L(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$).

□

Aus 10.10 folgt (Übung):

Folgerung 10.12: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g \in C(I)$ und $\xi \in I$ (fest). Definiere $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_{\xi}^x f(t) dt.$$

Dann: $G \in C^1(I)$ und $G' = g$ auf I .

Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Besitzt $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I eine Stammfunktion, so schreibt man für eine solche auch $\int g(x)dx$ (**unbestimmtes Integral**).

Beispiel 10.13: $\int \cos x dx = \sin x (+c)$ ($c \in \mathbb{R}$).

10.14 Partielle Integration: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g \in C^1(I)$. Dann:

a) $\int f'g dx = fg - \int fg' dx$ auf I .

b) Ist $I = [a, b]$, $\int_a^b f'g dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b fg' dx$.

Beweis. $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg' \Rightarrow$ a), sowie

$$\int_a^b f'g dx = \int_a^b (fg)' dx - \int_a^b fg' dx \stackrel[1.HS]{10.6} = fg \Big|_a^b - \int_a^b fg' dx.$$

□

Beispiele:

a) $\int \sin^2 x dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_g dx = -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x dx$

$$= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx$$

$$= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= x - \cos x \sin x - \int \sin^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x).$$

b) $\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx \rightarrow$ komplizierter

$$\int \underbrace{x}_g \underbrace{e^x}_{f'} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

c) $\int \log x dx = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_g dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x.$

Bez.: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq \beta$.

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \begin{cases} [\alpha, \beta], & \text{falls } \alpha < \beta \\ [\beta, \alpha], & \text{falls } \alpha > \beta \end{cases}$$

10.15 Substitutionsregeln: I und J seien Intervalle in \mathbb{R} , es sei $f \in C(I)$, $g \in C^1(J)$ und $g(J) \subseteq I$.

a) $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=g(t)} \text{ auf } J.$

b) Sei $g'(t) \neq 0 \forall t \in J$ ($\Rightarrow g' > 0$ auf J oder $g' < 0$ auf $J \Rightarrow g$ ist streng monoton). Dann:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} \text{ auf } I$$

c) Ist $I = \langle a, b \rangle$, $J = \langle \alpha, \beta \rangle$, $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Beweis. $\xRightarrow{10.2}$ f hat auf I eine Stammfunktion F . $G(t) := F(g(t))$ ($t \in J$). Kettenregel $\Rightarrow G \in C^1(J)$ und

$$G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \quad \forall t \in J.$$

a) $\int f(g(t))g'(t)dt = \int G'(t)dt = G(t) = F(x) \Big|_{x=g(t)}.$

b) $\int f(g(t))g'(t)dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = G(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x))) = F(x).$

c) $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt \stackrel{10.6}{=} G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$

$$= F(b) - F(a) \stackrel{10.6}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

□

Merkregel: Ist $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, so schreibt man für y' auch $\frac{dy}{dx}$.

Zu 10.15: substituiere $x = g(t)$, fasse also x als Funktion von t auf. Dann: $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, also

$$“dx = g'(t)dt”$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x} dx &= \begin{cases} x = \log t, e^x = t \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, dx = \frac{1}{t} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = e \end{cases} \\ &= \int_1^e \frac{t^2+1}{t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{t^2+1}{t^2} = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{t} \right]_1^e = e - \frac{1}{e} - (1 - 1) = e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Berechne } \beta &:= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{dx}{dt} = \cos t, dx = \cos t dt \end{cases} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) dt \\ &\stackrel{s.o.}{=} \left[t - \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ohne Beweis:

Satz 10.16: $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien beschränkt.

- a) Ist $\{x \in [a, b] : f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}$ höchstens endlich, so ist $f \in R[a, b]$.
- b) Sei $f \in R[a, b]$ und $M := \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ höchstens endlich, so ist $g \in R[a, b]$ und

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b g(x) dx.$$

Satz 10.17: Es seien $f, g \in R[a, b]$, $g \geq 0$ auf $[a, b]$, $m := \inf f([a, b])$ und $M := \sup f([a, b])$.

a) $\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx.$

b) $\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f dx = \mu(b - a).$

Ist $f \in C[a, b]$, so existiert ein $\xi \in [a, b]$: für die Zahl μ in a) bzw. b): $\mu = f(\xi)$.

Beweis.

a) $g \geq 0$ auf $[a, b] \Rightarrow mg \leq fg \leq Mg$ auf $[a, b]$

$$\stackrel{10.2}{\Rightarrow} m \underbrace{\int_a^b g dx}_{=:A} \leq \underbrace{\int_a^b fg dx}_{=:B} \leq M \int_a^b g dx.$$

Also: $mA \leq B \leq MA$.

Fall 1: $A = 0$. Dann ist $B = 0$ und jedes $\mu \in [m, M]$ leistet das Verlangte.

Fall 2: $A \neq 0$. $g \geq 0 \stackrel{10.2}{\Rightarrow} A > 0 \Rightarrow m \leq \frac{B}{A} \leq M$. $\mu := \frac{B}{A}$.

b) folgt aus a) mit $g \equiv 1$. Der Zusatz folgt aus 7.7 und 7.11.

□

Satz 10.18: Sei (f_n) eine Folge mit:

i) $f_n \in C^1[a, b] \forall n \in \mathbb{N}$,

ii) $(f_n(a))$ ist konvergent und

iii) (f'_n) konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann konvergiert (f_n) auf $[a, b]$ gleichmäßig und für $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in [a, b]$) gilt:

$$f \in C^1[a, b] \text{ und } g' = g \text{ auf } [a, b]$$

Also: $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) = f'(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$ auf $[a, b]$.

Beweis. $\alpha_n := \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt \xrightarrow{iii)} (|f'_n - g|)$ konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen 0 $\xrightarrow{10.8} \alpha_n \rightarrow 0$. o.B.d.A. $(f_n(a))$ ist eine Nullfolge. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [a, b]$:

$$f_n(x) \stackrel{10.6}{=} \underbrace{f_n(a)}_{\rightarrow 0} + \int_a^x f'_n(t) dt \stackrel{10.8}{\rightarrow} \int_a^x g(t) dt =: f(x).$$

Also: (f_n) konvergiert auf $[a, b]$ punktweise gegen f .

$$\stackrel{8.3 a)}{\implies} g \in C[a, b] \stackrel{10.11}{\implies} f \in C^1[a, b] \text{ und } f' = g.$$

Noch zu zeigen: (f_n) konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f .

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(a) - \int_a^x g(t) dt + f_n(a)| \\ &\stackrel{10.6}{=} \left| \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt + f_n(a) \right| \\ &\leq \int_a^x |f'_n(t) - g(t)| dt + |f_n(a)| \\ &\leq \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt + |f_n(a)| \\ &= \underbrace{\alpha_n + |f_n(a)|}_{\rightarrow 0} \quad \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

$\stackrel{8.1}{\implies}$ Gleichmäßige Konvergenz. □

Bemerkung: Der Beweis von 9.12 folgt aus 10.18.

11 Uneigentliche Integrale

Vereinbarung: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so soll stets gelten: $f \in R(J)$ für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$.

Definition:

- a) Sei $a \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, a < \beta$ und $f: [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **uneigentliche Integral** $\int_a^\beta f(x)dx$ heißt **konvergent** \iff der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \beta-0} \int_a^t f(x)dx$$

existiert und ist $\in \mathbb{R}$. In diesem Fall:

$$\int_a^\beta f(x)dx := \lim_{t \rightarrow \beta-0} \int_a^t f(x)dx.$$

- b) Sei $b \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \alpha < b$ und $f: (\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **uneigentliche Integral** $\int_\alpha^b f(x)dx$ heißt **konvergent** \iff der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \alpha+0} \int_t^b f(x)dx$$

existiert und ist $\in \mathbb{R}$. In diesem Fall:

$$\int_\alpha^b f(x)dx := \lim_{t \rightarrow \alpha+0} \int_t^b f(x)dx.$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt divergent.

Beispiele:

- a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx$ ($\gamma > 0$) ($a = 1, \beta = \infty$). Sei $t > 1$,

$$\int_1^t \frac{1}{x^\gamma} dx = \begin{cases} \log t, & \text{falls } \gamma = 1 \\ \frac{1}{1-\gamma}(t^{1-\gamma} - 1), & \text{falls } \gamma \neq 1. \end{cases}$$

Also: $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx$ konvergiert $\iff \gamma > 1$. In diesem Fall:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx = \frac{1}{\gamma - 1}$$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ ($a = 0, \beta = \infty$).

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan t \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Also ist $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ konvergent und $= \frac{\pi}{2}$.

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx$ ($\gamma > 0$) ($\alpha = 0, b = 1$). Wie in Beispiel a) sieht man:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx \text{ konvergiert} \iff \gamma < 1$$

d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$ ($\alpha = -\infty, b = 0$). Wie in Beispiel b) sieht man:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ konvergiert und } = \frac{\pi}{2}.$$

e) $\int_0^\infty \sin x dx$. Sei $t_n := (2n+1)\pi$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$\int_0^{t_n} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{t_n} = 1 - \cos t_n = 1 - \cos(2n\pi + \pi) = 1 - \cos \pi = 2$$

Definiere $s_n := 2n\pi$, dann:

$$\int_0^{s_n} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{s_n} = 1 - \cos s_n = 0$$

$\int_0^\infty \sin x dx$ ist also divergent.

Definition: Sei $\alpha < \beta$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Das **uneigentliche Integral** $\int_\alpha^\beta f(x) dx$ ist **konvergent** $\iff \exists c \in (\alpha, \beta)$: $\int_\alpha^c f(x) dx$ und $\int_c^\beta f(x) dx$ sind beide konvergent. In diesem Fall:

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx := \int_\alpha^c f(x) dx + \int_c^\beta f(x) dx$$

(divergent = nicht konvergent).

Übung: obige Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha, \beta)$!

Beispiele:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ ist divergent, denn $\int_0^{\infty} x dx$ ist divergent. (Aber: $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x dx = 0$).

b) Sei $\gamma > 0$. Obige Beispiele **a)** und **c)** zeigen:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\gamma}} dx \text{ ist divergent.}$$

c) Obige Beispiele **b)** und **d)** zeigen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ist konvergent und } = \pi.$$

Die folgenden Definitionen und Sätze formulieren wir nur für Funktionen $f: [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ (wie in der ersten Definition dieses Kapitels). Diese Definitionen und Sätze gelten sinngemäß auch für die beiden anderen Typen uneigentlicher Integrale.

Beachte: Für $t \in (a, \beta)$: $g(t) := \int_a^t f(x) dx$. Dann:

$$\int_a^{\beta} f(x) dx \text{ konvergiert} \iff \lim_{t \rightarrow \beta} g(t) \text{ existiert.}$$

Aus **6.2 c)** folgt:

11.1 Cauchy Kriterium: $\int_a^{\beta} f(x) dx$ konvergiert

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists c \in (a, \beta) : \left| \int_u^v f(x) dx \right| < \epsilon \quad \forall u, v \in (c, \beta).$$

Beispiel: Beh.: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert.

Beweis. Seien $c \leq u < v$.

$$\begin{aligned}
 \left| \int_u^v \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \int_u^v \underbrace{\frac{1}{x}}_g \underbrace{\sin x}_{f'} dx \right| \\
 &= \left| \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_v^u - \int_u^v -\frac{1}{x^2} (-\cos x) dx \right| \\
 &= \left| \frac{\cos v}{v} - \frac{\cos u}{u} - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \int_u^v \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{u}
 \end{aligned}$$

(für $\epsilon > 0$: $\frac{2}{u} < \epsilon \iff u > \frac{2}{\epsilon}$). Sei $\epsilon > 0$, $c := \frac{2}{\epsilon}$. Seien $\frac{2}{\epsilon} < u < v$. Dann:

$$\left| \int_u^v \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{u} < \epsilon$$

11.1 \implies Beh. □

Definition: $\int_a^\beta f(x) dx$ heißt **absolut konvergent** $\iff \int_a^\beta |f(x)| dx$ ist konvergent.

Den folgenden Satz beweist man mit 11.1 ähnlich wie bei Reihen:

Satz 11.2:

a) Ist $\int_a^\beta f(x) dx$ absolut konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x) dx$ konvergent und

$$\left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)| dx.$$

b) **Majorantenkriterium:** Ist $|f| \leq h$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta h(x) dx$ konvergiert, so ist $\int_a^\beta f(x) dx$ konvergent.

c) **Minorantenkriterium:** Ist $f \geq h \geq 0$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta h(x) dx$ divergiert, so ist $\int_a^\beta f(x) dx$ divergent.

Beispiele:

$$\text{a) } \int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^5}}}_{=:f(x)} dx. \quad |f(x)| = f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =: g(x).$$

$$\int_1^\infty g(x)dx \text{ konvergiert} \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergiert.}$$

$$\text{b) } \int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7x}}_{=:f(x)} dx, \quad g(x) := \frac{1}{x}; \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2+7x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty).$$

$$\Rightarrow \exists c \geq 1 : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \geq c \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}g(x) \quad \forall x \geq c.$$

$$\int_c^\infty g(x)dx \text{ divergiert} \Rightarrow \int_1^\infty g(x)dx \text{ divergiert} \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ divergiert.}$$

12 Die komplexe Exponentialfunktion

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ **Betrag** von z .

$\bar{z} := x - iy$.

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ ($z, w \in \mathbb{C}$).

$e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$.

Ist $z = x \in \mathbb{R}$: $e^z = e^x$; ist $z = it$ ($t \in \mathbb{R}$): $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Satz 12.1: Es gilt $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $z \neq 1$.

- a) $e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.
- b) $|e^{it}| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-it} = \overline{e^{it}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
- c) $e^{i\pi} + 1 = 0$.
- d) $e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$.
- e) Für $t \in \mathbb{R}$: $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

Beweis.

- a) Übung (Add. von e -Funktionen, \sin , \cos).
- b) $e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow |e^{it}| = (\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1$,

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t = \overline{\cos t + i \sin t} = \overline{e^{it}}.$$
- c) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.
- d) $e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 \xrightarrow{a)} \text{Beh.}$
- e) $e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t$.

□

Definition: Für $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Übung: $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \sin w \cos z \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \end{aligned}$$

Satz 12.2: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$$

Beweis. “ \Leftarrow ”: 12.1 d).

“ \Rightarrow ” Sei $e^z = 1$, also $1 = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y \Rightarrow e^x \cos y = 1, e^x \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : y = j\pi \Rightarrow \cos y = (-1)^j$ somit $1 = e^x(-1)^j \Rightarrow j = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) und $x = 0$. Also: $z = 2k\pi i$. \square

Polarkoordinaten: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$.

$$r := |z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Die Gerade durch 0 und z schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ein.

φ heißt das **Argument von** z ; $\phi = \arg z$. Es ist

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

also

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = re^{i\varphi} = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i \arg z}$$

Ist weiter $w \in \mathbb{C}$ und $\psi := \arg w$, so gilt:

$$zw = |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$$

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \xrightarrow{12.1} (e^z)^n = e^{nz}$; Es gilt:

$$\begin{aligned} e^z = e^w &\iff e^z e^{-w} = e^w e^{-w} \\ &\iff e^{z-w} = e^{w-w} = e^0 = 1 \\ &\xrightarrow{12.2} \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = w + 2k\pi i \end{aligned}$$

Ohne Beweis:

12.3 Fundamentalsatz der Algebra: Sei $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ein Polynom mit $n \geq 1$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Dann existieren $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (eind. bestimmt) mit $p(z) = a_n(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$ ($z \in \mathbb{C}$). z_1, \dots, z_n sind genau die Nullstellen von p .

Definition: Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ heißt eine **n-te Wurzel** aus a .

$\sqrt[n]{a}$ bez. eine n-te Wurzel aus a ($n = 2$ kurz: Wurzel)

Satz 12.4: Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $r := |a|$ und $\varphi := \arg a$. (also $a = |a|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$). Für $k = 0, 1, \dots, n-1$ sei

$$z_k := \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

Dann:

- a) $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$.
- b) z ist eine n-te Wurzel aus $a \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$.

Beweis.

- a) Seien $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$, $z_j = z_k$ und $k \geq j$. Also: $e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = e^{i \frac{\varphi + 2j\pi}{n}} \xrightarrow{s.o.} \exists l \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} i \frac{\varphi + 2k\pi}{n} &= i \frac{\varphi + 2j\pi}{n} + 2e\pi i \Rightarrow \frac{\varphi}{2\pi} + k = \frac{\varphi}{2\pi} + j + ln \\ \Rightarrow \frac{k-j}{n} &= l \Rightarrow |l| = \frac{|k-j|}{n} = \frac{k-j}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \\ \Rightarrow l &= 0 \Rightarrow k = j. \end{aligned}$$

- b) $p(z) := z^n - a$. Dann: z ist eine n-te Wurzel aus $a \iff p(z) = 0$. Es gilt

$$z_k^n \stackrel{s.o.}{=} re^{i(\varphi + 2k\pi)} = re^{i\varphi} e^{2k\pi i} = re^{i\varphi} = a.$$

Also: $p(z_k) = 0$ ($k = 0, \dots, n-1$). Aus a) und 12.3 folgt die Beh.

□

Bezeichnung: Ist $a = 1$, so heißen die Zahlen z_0, \dots, z_{n-1} aus 12.4 die **n-ten Einheitswurzeln**. Also $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ ($k = 0, \dots, n-1$).

Bemerkung: $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k)$.

Beispiele:

- a) Im Rahmen ist $\sqrt{4} = 2$; Im Komplexen sind die Wurzeln aus 4: $2, -2$.
- b) Die 4. Wurzeln aus 16 sind $2, -2, 2i, -2i$.
- c) Die 4. Einheitswurzeln sind $1, -1, i, -i$.

Beispiel: Man kann $\sqrt{-3 + 4i}$ mittels verschiedener Ansätze berechnen:

1. Möglichkeit: $w = u + iv$, $w^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = -3 + 4i$

$$\iff u^2 - v^2 = -3, 2uv = 4$$

Löse Gleichungssystem.

2. Möglichkeit: $z = 3 + 4i$. Bestimme $|z|, \varphi = \arg z$. Dann sind

$$\pm \sqrt{|z|} = e^{i \frac{\arg z}{2}} \text{ die Wurzeln von } z.$$

3. Möglichkeit: Ist $z \in (-\infty, 0]$, so sind $w = \pm \sqrt{-z}$ die Wurzeln von z . Ist $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, so sind

$$w = \pm \sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||}$$

die Wurzeln von z ; Beweis:

Beweis. Betrachte:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||} \right)^2 &= |z| \frac{(z + |z|)(z + |z|)}{(z + |z|)(\bar{z} + |z|)} = |z| \frac{(z + |z|)}{(\bar{z} + |z|)} \\ &= \frac{(|z|z + z\bar{z})}{(\bar{z} + |z|)} = z \frac{(|z| + \bar{z})}{(\bar{z} + |z|)} = z \end{aligned}$$

□

Also: $\sqrt{-3+4i} = \pm \sqrt{5} \frac{-3+4i+5}{|-3+4i+5|} = \sqrt{5} \frac{2+4i}{\sqrt{20}} = \pm(1+2i)$.

Satz 12.5: Seien $p, q \in \mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + pz + q = 0 \iff z = -\frac{p}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}_{\text{doppeldeutig!}}.$$

Beweis. “ \Leftarrow ” nachrechnen. Rest mit 12.3. □

Beispiel 12.6: Löse $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$ (*).

$$\begin{aligned} z &= \frac{2i-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2i-1)^2}{4} + 2i} = i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-4-4i+1}{4} + 2i} \\ &= i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{-3-3i+8i} = i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{12}\sqrt{-3+4i}. \end{aligned}$$

Also sind

$$z_1 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+2i) = 2i$$

und

$$z_2 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1-2i) = -1$$

die Lösungen von (*). Es gilt $z^2 + (1-2i)z - 2i = (z-z_1)(z-z_2) = (z-2i)(z+1)$.

Definition: Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt ein **Logarithmus von w** .

Satz 12.7: Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r := |w|$ und $\varphi = \arg w$, also $w = re^{i\varphi}$. Sei $z \in \mathbb{C}$.

$$z \text{ ist ein Logarithmus von } w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \underbrace{\log |w|}_{\log \text{ in } \mathbb{R}} + i\varphi + 2k\pi i.$$

Beweis. “ \Leftarrow ” $e^z = e^{\log |w|} e^{i\varphi} e^{2k\pi i} = |w| e^{i\varphi} = w$.

“ \Rightarrow ” Sei $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) und $w = e^z = e^x e^{iy} \Rightarrow |w| = e^x \Rightarrow x = \log |w|$.

Es ist

$$|w| e^{iy} = w = e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{iy}$$

$$\Rightarrow e^{iy} = e^{iy} \xrightarrow{s.o.} \exists k \in \mathbb{Z} : iy = i\varphi + 2k\pi i \Rightarrow z = \log |w| + i\varphi + 2k\pi i. \quad \square$$

Beispiele:

a) $w = -1$; $|w| = 1$, $\arg w = \pi$. Alle Logarithmen von -1 :

$$i\pi + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $w = 1$; $|w| = 1$, $\arg w = 0$. Alle Logarithmen von 1 :

$$2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $w = 1 + i$; $|w| = \sqrt{2}$, $\arg w = \frac{\pi}{4}$. Alle Logarithmen von $1 + i$:

$$\log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

13 Fourierreihen

I. d. §-en sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit:

$$(V) \quad \begin{cases} f \in R[-\pi, \pi] \text{ und } f \text{ ist auf } \mathbb{R} \text{ } 2\pi\text{-periodisch,} \\ \text{d.h. } f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definition: Es seien $(a_n)_{n=0}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ Folge in \mathbb{R} . Eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

heißt eine **trigonometrische Reihe** (TR).

Fragen: Wann ist f durch eine trigonometrisch Reihe darstellbar? Wie hängt dann f mit (a_n) , (b_n) zusammen?

Satz 13.1:

- a) Ist $a \in \mathbb{R}$, so gilt: $f \in R[a, a + 2\pi]$ und $\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.
- b) **Orthogonalitätsrelationen:** für $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx \\ &= \begin{cases} \pi, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis. Übung.

□

Motivation: Es seien $(a_n)_{n=0}^\infty$ und $(b_n)_{n=1}^\infty$ Folgen und es gelte

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Weiter sei diese trigonometrisch Reihe auf \mathbb{R} gleichmäßig konvergent. Sei $k \in \mathbb{N}$, dann:

$$f(x) \sin(kx) = \frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \sin(kx) + b_n \sin(nx) \sin(kx)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Übung: die letzte Reihe konvergiert auf \mathbb{R} ebenfalls gleichmäßig.

$$\begin{aligned} \stackrel{10.8}{\implies} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx}_{=0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx}_{\stackrel{13.1}{=} 0} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx}_{\stackrel{13.1}{=} \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{falls } k \neq n \end{cases}} \\ &= b_k \pi \end{aligned}$$

Also:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Analog zeigt man:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

$$\text{d.h. } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx.$$

Definition: f erfülle (V). Setze

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

und

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Zahlen a_n, b_n heißen die **Fourierkoeffizienten** (FK) von f und die mit a_n und b_n gebildete Fourierreihe heißt **die zu f gehörenden Fourierreihe**. Man schreibt:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Frage: wann, bzw. für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die zu f gehörige Fourierreihe gegen $f(x)$?

Satz 13.2: Für f gelte (V).

- a) Ist f gerade, also $f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ und } b_n = 0$$

- b) Ist f ungerade, also $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f :

$$a_n = 0 \text{ und } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Beweis. Übung. □

Definition:

- a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$ und $g: (x_0, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

$$g(x_0+) := \lim_{x \rightarrow x_0+0} g(x), \text{ falls dieser Grenzwert existiert und } \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

- b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$ und $g: (x_0 - \delta, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

$$g(x_0-) := \lim_{x \rightarrow x_0-0} g(x), \text{ falls dieser Grenzwert existiert und } \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

Definition: Für f gelte (V). f heißt **stückweise glatt** \iff es existiert eine Zerlegung $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ von $[-\pi, \pi]$ (also $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \pi$) mit:

- i) $f \in C^1((t_{j-1}, t_j))$ ($j = 1, \dots, n$).
- ii) Es existieren die folgenden Grenzwerte:

$$f(\pi-), f'(\pi-), f(-\pi+), f'(-\pi+)$$

und

$$f(t_j+), f'(t_j+), f(t_j-), f'(t_j-) \quad (j = 1, \dots, n-1)$$

Beachte:

- a) In den Punkten t_j muss f nicht stetig sein (aber: $f(t_0) = f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(\pi) = f(t_n)$)
- b) f 2π -per $\Rightarrow f(x-), f(x+)$ existiert in jedem $x \in \mathbb{R}$.

$$s_f(x) := \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ohne Beweis:

Satz 13.3: Für f gelte (V) und f sei stückweise glatt. Dann konvergiert die Fourierreihe von f in jedem $x \in \mathbb{R}$ gegen $s_f(x)$. Ist in diesem Fall f in $x \in \mathbb{R}$ stetig, so konvergiert die Fourierreihe von f also gegen $f(x)$.

Beispiel 13.4: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch und auf $(-\pi, \pi]$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

$\xRightarrow{10.16} f \in R[-\pi, \pi]$, f erfüllt also (V). f ist stückweise glatt und $s_f(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. f ist ungerade $\xRightarrow{13.2} a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \stackrel{10.16}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \stackrel{bung}{=} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\stackrel{13.3}{\implies} f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\implies \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad \forall x \in (-\pi, \pi).$$

$$x = \frac{\pi}{2}: \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots \quad (\text{vgl. 9.17 b}).$$

Beispiel 13.5: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch und auf $[-\pi, \pi]$ definiert durch $f(x) = x^2$.

Klar: f erfüllt (V), f ist stückweise glatt, f ist gerade und $f(x) = s_f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\stackrel{13.2}{\implies} b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3}, & n = 0 \\ 4 \frac{(-1)^n}{n^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der Rechnung in 13.3 folgt:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\implies x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots \right) \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

$$x = 0: \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (1)$$

$$x = \pi: \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

$$\text{Addition von (1), (2): } \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ohne Beweis:

Satz 13.6: Es gelte (V), es sei $f \in C(\mathbb{R})$ und f sei stückweise glatt.

- Die Fourierreihe von f konvergiert in jedem $x \in \mathbb{R}$ absolut.
- Die Fourierreihe von f konvergiert auf \mathbb{R} gleichmäßig (gegen f).

c) Sind a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von f , so konvergieren die Reihen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

die zu g gehörige Fourierreihe.

Definition: Sei $g \in R[-\pi, \pi]$. Setze

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

und

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Auch in diesem Fall heißen die Zahlen a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von g und die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

die zu g gehörige Fourierreihe.

Satz 13.7: g, a_n und b_n seien wie in der obigen Definition.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ ist konvergent.
- b) $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx$ Besselsche Ungleichung.
- c) $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-\pi, \pi]$:

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Dann:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - s_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (g(x)^2 - 2g(x)s_n(x) + s_n(x)^2) dx$$

$$\stackrel{\text{13.1}}{\underset{\text{nachr.}}{=}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_n := \frac{a_0^2}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^b (a_k^2 + b_k^2)}_{=: \beta_n} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx =: \alpha.$$

Also ist (α_n) monoton und beschränkt, somit ist (α_n) konvergent. Damit ist (β_n) konvergent \Rightarrow (1).

$\alpha_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (2).

(3) $a_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2$. Aus (1) und 3.1: $a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0 \Rightarrow a_n^2 \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$. Genauso: $b_n \rightarrow 0$. \square

13.8 Satz von Riemann-Lebesgue: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ und $g \in R[a, b]$. Dann:

$$\int_a^b g(x) \sin(nx) dx \rightarrow 0 \text{ und } \int_a^b g(x) \cos(nx) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Ohne Beweis. Für $[a, b] = [-\pi, \pi]$ vgl. 13.7 c).

14 Der Raum \mathbb{R}^n

Es sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. \mathbb{R}^n ist mit der bekannten Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über \mathbb{R} , $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Einheitsvektoren:

$e_1 := (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n := (0, \dots, 0, 1)$
 $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist eine Basis des \mathbb{R}^n . Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Definition: Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

- a) $xy := x \cdot y := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ **Skalarprodukt** oder **Innenprodukt** von x und y . Beachte: $xy \in \mathbb{R}$.
- b) $\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ **Norm** oder Länge von x . Beachte: $\|x\|^2 = x \cdot x$ (Im Fall $n = 1$: $\|x\| = |x|$).
- c) $\|x - y\|$ heißt Abstand von x und y . Beachte: $\|x - y\| = \|y - x\|$.

Beispiele:

- a) $(1, 2, -1) \cdot (1, 3, 4) = 1 + 6 - 4 = 3$.
- b) $\|(1, 2, -1)\| = (1 + 4 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$.
- c) $\|e_j\| = 1$ ($j = 1, \dots, n$).

Satz 14.1: Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$; $x \cdot y = y \cdot x$.
- b) $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y)$.
- c) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0 = (0, \dots, 0)$.
- d) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.
- e) $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$ **Cauchy-Schwarz Ungleichung** (CSU).

f) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **Dreiecksungleichung.**

g) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

h) Für $j \in \{1, \dots, n\}$: $|x_j| \leq \|x\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$

Beweis. a) - d): Nachrechnen.

e) o.B.d.A. $y \neq 0$, also $\|y\| > 0$. $A := \|x\|^2 = x \cdot x$, $B := x \cdot y$, $C := \|y\|^2 = y \cdot y$,
 $\alpha := \frac{B}{C}$. Dann:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2) \\ &= A - 2\alpha B + \alpha^2 C = A - 2\frac{B^2}{C} + \frac{B^2}{C} = A - \frac{B^2}{C} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B^2 \leq AC \Rightarrow (x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

f) $\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$.
Damit:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \stackrel{e)}{=} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

g) Übung.

h) Es ist $|x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |x_j| \leq \|x\|$. Es ist

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \|x\| \stackrel{d)}{=} |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \stackrel{f)}{=} |x_1| + \dots + |x_n|.$$

□

Definition: Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ eine reelle $m \times n$ -Matrix.

$$\|A\| := \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Norm von } A$$

Sei B eine reelle $n \times l$ -Matrix, dann existiert AB . Übungsblatt:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|. \quad (*)$$

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$Ax := A \cdot x^T = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{Matrix-Vektorprodukt})$$

Aus $(*)$ folgt: $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

Definition: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$.

- a) $U_\epsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ heißt **offene Kugel um x_0 mit Radius ϵ** .
- b) $\overline{U_\epsilon(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \epsilon\}$ heißt **abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius ϵ** .

$U_\epsilon(x_0)$ heißt auch ϵ -Umgebung von x_0 .

Definition: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- a) A heißt **beschränkt** $\iff \exists c \geq 0 : \|a\| \leq c \ \forall a \in A$.
- b) A heißt **offen** $\iff \forall a \in A \ \exists \epsilon = \epsilon(a) > 0 : U_\epsilon(a) \subseteq A$.
- c) A heißt **abgeschlossen** $\iff \mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen.
- d) A heißt **kompakt** $\iff A$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Beispiele:

- a) Offene Kugeln sind offen, abgeschlossene Kugeln sind nicht offen.
- b) \mathbb{R}^n ist offen, \emptyset ist offen, \mathbb{R}^n ist abgeschlossen, \emptyset ist abgeschlossen.
- c) Abgeschlossene Kugeln sind kompakt.
- d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. A ist nicht beschränkt, also auch nicht kompakt. A ist nicht offen, aber A ist abgeschlossen.
- e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x > 0\}$. A ist nicht offen und auch nicht abgeschlossen.

Stichwortverzeichnis

- Abelscher Grenzwertsatz, 77
- abgeschlossen, 58, 116
- Ableitung, 68
 - n-te, 78
- abzählbar, 13
- Additionstheoreme, 45
- Argument, 102
- Arkustangens, 77
- Axiome
 - Anordnungs-, 4
 - Körper-, 3
 - Vollständigkeits-, 7
- Bernoullische Ungleichung, 10
- beschränkt, 7, 59, 116
 - Folge, 14
 - Menge, 6
- Besselsche Ungleichung, 112
- Betrag, 5
 - einer komplexen Zahl, 101
- Binomialkoeffizient, 10
- Binomischer Satz, 10
- Cauchy-Schwarz Ungleichung, 114
- Cauchyfolge, 29
- Cauchy Kriterium, 29, 32, 98
- Cauchyprodukt, 39
- Cosinus, 45
- differenzierbar, 68
 - n-mal, 78
 - stetig, 78
- divergent, 15, 31
- Dreiecksungleichung, 114
- Einheitsvektoren, 114
- Einheitswurzeln
 - n-te, 104
- Eulersche Zahl, 25
- Exponentialfunktion, 38
- Exponentialreihe, 38
- für fast alle, 15
- Fakultät, 10
- Folge, 13
- Fourierkoeffizienten, 108
- Fourierreihe, 108
- Fundamentalsatz der Algebra, 103
- ganze Zahlen, 9
- Grenzfunktion, 63
- Grenzwert, 15
 - linksseitiger, 51, 109
 - rechtsseitiger, 51, 109
- Häufungspunkt, 50
- Hauptsätze der Diff.- und Integralrechnung
 - 1. Hauptsatz, 85
 - 2. Hauptsatz, 89
- Identitätssatz für Potenzreihen, 67
- Induktionsmenge, 8
- Infimum, 6
- Innenprodukt, 114
- Integral, 83
 - Riemann, 83
 - unbestimmtes, 91
- integrierbar, 83
 - Riemann, 83

Intervalle, 4
 Kettenregel, 70
 kompakt, 58, 116
 konvergent, 15, 31, 96
 absolut, 34, 99
 punktweise, 63
 Konvergenzkriterium
 Cauchy, 52
 Funktionen
 Weierstraß, 65
 Reihen
 Leibnitz, 33
 Majoranten, 34
 Minoranten, 34
 Quotienten, 37
 Wurzel, 36
 Konvergenzradius, 43
 Kugel, 116
 abgeschlossene, 116
 offene, 116
 Länge, 114
 Limes, 15
 Limes inferior, 28
 Limes superior, 28
 Logarithmus, 60, 105
 Majorantenkriterium, 99
 Minorantenkriterium, 99
 Mittelwertsatz, 72
 monoton, 20
 fallend, 20, 60
 streng fallend, 20, 60
 streng wachsend, 20, 60
 wachsend, 20, 60
 Monotoniekriterium, 20, 32
 Natürliche Zahlen, 8
 niedrig, 27
 Norm, 114
 Matrizen, 115
 Nullstellensatz, 58
 oberer Limes, 28
 offen, 116
 Orthogonalitätsrelationen, 107
 Partielle Integration, 91
 Polarkoordinaten, 102
 Potenzreihe, 43
 q-adische Entwicklung, 48
 rationale Zahlen, 9
 Reihe, 31
 alternierende harmonische Reihe, 33
 geometrische, 31
 harmonische, 31
 unendliche, 31
 Reihenwert, 31
 Riemannsches Integritätskriterium, 84
 Satz
 Bolzano-Weierstraß, 27
 Schranke, 6
 Sinus, 45
 Skalarprodukt, 114
 Stammfunktion, 85
 stetig, 55
 gleichmäßig, 62
 Substitutionsregeln, 92
 Summenfunktion, 63
 Supremum, 6

Tangens, 77
Teilfolge, 25
Teilsumme, 31
trigonometrische Reihe, 107

überabzählbar, 13
Umgebung, 15, 116
Umordnung, 39
uneigentliche Integral, 96
 konvergiert, 97
unterer Limes, 28

vollständige Induktion, 8

Wurzel, 11
 n-te, 103

Zerlegung, 82
Zwischenwertsatz, 57