# Höhere Mathematik I

G. Herzog, C. Schmoeger

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Reelle Zahlen

Grundmenge der Analysis is die Menge $\mathbb{R}$, die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen $\mathbb{R}$ als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von $\mathbb{R}$ aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.

**Körperaxiome:** in $\mathbb{R}$ seien zwei Verknüpfungen „ $+$ “ und „ $\cdot$ “ gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a + b \in \mathbb{R}$ und genau ein $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei soll gelten:

$(A1)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz)

$(A5)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$(A2)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\ a + 0 = a$ (Null)

$(A6)$ $\exists 1 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot 1 = a$ **und** $1 \neq 0$ (Eins)

$(A3)$ $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists - a \in \mathbb{R}\ a + (-a) = 0$

$(A7)$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}\ a \cdot a^{-1} = 1$

$(A4)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)

$(A8)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)

$(A9)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

**Schreibweisen:**
für $a, b \in \mathbb{R}$: $a - b := a + (-b)$ und für $b \neq 0$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

**Alle** bekannten Regeln der Grundrechnungsarten lassen sich aus $(A1) - (A9)$ herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

**Beispiele**

a) Beh.: $\exists_1 0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a + 0 = a$

**Beweis**
Sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\ a + \tilde{0} = a$. Mit $a = 0$ folgt: $0 + \tilde{0} = 0$. Mit $a = \tilde{0}$ in $(A2)$ folgt: $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Dann $0 = 0 + \tilde{0} =_{(A4)} \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ □

b) Beh.: $\forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot 0 = 0$

**Beweis**
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b := a \cdot 0$. Dann: $b =_{(A2)} a(0 + 0) =_{(A9)} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b + b$.
$0 =_{(A3)} b + (-b) = (b + b) + (-b) =_{(A1)} b + (b + (-b)) = b + 0 =_{(A2)} b$ □

**Anordnungsaxiome:** in $\mathbb{R}$ ist eine Relation „ $\leq$ “ gegeben.
Dabei sollen gelten:

$(A10)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$

$(A11)$ aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$

$(A12)$ aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$

$(A13)$ aus $a \leq b$ folgt $\forall c \in \mathbb{R}\; a + c \leq b + c$

$(A14)$ aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $ac \leq bc$

**Schreibweisen:**
$b \geq a :\Longleftrightarrow a \leq b$; $a < b :\Longleftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$; $b > 0 :\Longleftrightarrow a < b$

Aus $(A1) - (A14)$ lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

**Beispiele (ohne Beweis)**

a) aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$

b) aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$

c) aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \geq b + d$

**Intervalle:** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$
$[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
$(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)
$(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)
$[a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)
$[a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(a, \infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
$(-\infty, a] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, $(-\infty, a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
$(-\infty, \infty) \coloneqq \mathbb{R}$

## Der Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| \coloneqq \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ der Betrag von $a$.

**Beispiele**
$|1| = 1$, $|-7| = -(-7) = 7$.
$|a| =$ „ Abstand “ von 0 und $a$
$|a - b| =$ „ Abstand “ von $a$ und $b$
Es ist $|-a| = |a|$ und $|a - b| = |b - a|$

**Regeln:**

a) $|a| \geq 0$

b) $|a| = 0 \iff a = 0$

c) $|ab| = |a||b|$

d) $\pm a \leq |a|$

e) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

f) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

**Beweis**

*a) – d)* leichte Übung

*e)* Fall 1: $a + b \geq 0$. Dann: $|a + b| = a + b \leq_{d)} |a| + |b|$.
Fall 2: $a + b < 0$. Dann: $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq_{d)} |a| + |b|$.

*f)* $c := |a| - |b|$; $|a| = |a - b + b| \leq_{d)} |a - b| + |b|$

$$\Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a - b|. \text{ Analog: } -c = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$$

Also: $\pm c \leq |a - b|$. $\square$

**Definition**
Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

a) $M$ heißt **nach oben beschränkt** $:\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ x \leq \gamma$
In diesem Fall heißt $\gamma$ eine **obere Schranke**

b) Ist $\gamma$ eine obere Schranke von $M$ und gilt $\gamma \leq \delta$ für jede weitere obere Schranke $\delta$ von $M$, so heißt $\gamma$ das **Supremum** von $M$ (kleinste obere Schranke von $M$)

c) $M$ heißt **nach unten beschränkt** $:\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ \gamma \leq x$
In diesem Fall heißt $\gamma$ eine **untere Schranke** (US)

d) Ist $\gamma$ eine untere Schranke von $M$ und gilt $\gamma \geq \delta$ für jede weitere untere Schranke $\delta$ von $M$, so heißt $\gamma$ das **Infimum** von $M$ (größte untere Schranke von $M$)

**Bez.**: in dem Fall: $\gamma = \sup M$ bzw. $\gamma = \inf M$.

Aus (*A*11) folgt: ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden, so ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ eindeutig bestimmt.

Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden und gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so heißt $\sup M$ das Maximum bzw. $\inf M$ das Minimum von $M$ und wird mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet.

**Beispiele**

a) $M = (1, 2)$. $\sup M = 2 \notin M$, $\inf M = 1 \notin M$. $M$ hat kein Maximum und kein Minimum.

b) $M = (1, 2]$. $\sup M = 2 \in M$, $\max M = 2$

c) $M = (3, \infty)$. $M$ ist nicht nach oben beschränkt, $3 = \inf M \notin M$.

d) $M = (-\infty, 0]$. $M$ ist nach unten unbeschränkt, $0 = \sup M = \max M$.

**Vollständigkeitsaxiom:**

($A15$) Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist $M$ nach oben beschränkt, so ist $\sup M$ vorhanden.

**Satz 1.1**

Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist $M$ nach unten beschränkt, so ist $\inf M$ vorhanden.

**Beweis**

i. d. Übungen. $\square$

**Definition**

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. $M$ heißt beschränkt $:\iff$ $M$ ist nach oben und nach unten beschränkt ($\iff \exists c \geq 0\ \forall x \in M\ |x| \leq c \iff \exists c \geq 0\ \forall x \in M\ -c \leq x \leq c$)

**Satz 1.2**

Es sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$

a) Ist $A$ bechränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$

b) Ist $A$ nach oben bzw. unten beschränkt $\Rightarrow B$ ist nach oben beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ bzw. nach unten beschränkt und $\inf B \geq \inf A$

c) $A$ sei nach oben bzw. unten beschränkt und $\gamma$ eine obere bzw. untere Schranke von $A$. Dann
$$\gamma = \sup A \iff \forall \epsilon > 0\ \exists x = x(\epsilon) \in A : x > \gamma - \epsilon$$
bzw.
$$\gamma = \inf A \iff \forall \epsilon > 0\ \exists x = x(\epsilon) \in A : x < \gamma + \epsilon$$

**Beweis**

a) $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$. Dann $\inf A \leq x$, $x \leq \sup A$ $(A12)$

$$\Rightarrow \inf A \leq \sup A$$

b) Sei $x \in B$. Dann: $x \in A$, also $x \leq \sup A$. $B$ ist also nach oben beschränkt und $\sup A$ ist eine obere Schranke von $B$

$$\Rightarrow \sup B \leq \sup A$$

Analog der Fall für $A$ nach unten beschränkt.

c) „ $\Rightarrow$ “ Sei $\gamma = \sup A$ und $\epsilon > 0$. Dann: $\gamma - \epsilon < \epsilon$. $\gamma - \epsilon$ ist also keine obere Schranke von $A$. Also: $\exists x \in A : x > \gamma - \epsilon$
„ $\Leftarrow$ “ Sei $\tilde{\gamma} \leq \gamma$. Annahme: $\gamma \neq \tilde{\gamma}$. Dann $\tilde{\gamma} < \gamma$, also $\epsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$.
$\Rightarrow_{Vor.}$ $\exists x \in A : x > \gamma - \epsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Widerspruch zu $x \leq \tilde{\gamma}$. □

## Natürliche Zahlen

**Definition**

a) $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine Induktionsmenge (IM) $:\Longleftrightarrow \begin{cases} 1. \quad 1 \in A; \\ 2. \quad \text{aus } x \in A \text{ folgt stets } x+1 \in A \end{cases}$

Beispiele: $\mathbb{R}, [1, \infty), \{1\} \cup [2, \infty)$ sind Induktionsmengen

b) $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x$ gehört zu **jeder** IM $\}$ = Durchschnitt aller IMn
Also: $\mathbb{N} \subseteq A$ für jede Induktionsmenge $A$.

**Satz 1.3**

a) $\mathbb{N}$ ist eine Induktionsmenge

b) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt

c) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ex. ein $n \in \mathbb{N} : N > x$

Von nun an sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bekannt.

**Proposition 1.4 (Prinzip der vollständigen Induktion)**
Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und $A$ eine Induktionsmenge, so ist $A = N$.

**Beweis**
$A \subseteq \mathbb{N}$ (nach Vor.) und $\mathbb{N} \subset A$ (nach Def.), also $A = \mathbb{N}$ □

## Beweisverfahren durch vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Für $A(n)$ gelte:

$$\begin{cases} (I) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (II) & \text{ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch A(n + 1) wahr;} \end{cases}$$

Dann ist $A(n)$ wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$!

**Beweis**
Sei $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr }\}$. Dann:
$A \subseteq \mathbb{N}$ und, wg. $(I)$, $(II)$, $A$ ist eine Induktionsmenge, (1.4) $\Rightarrow A = \mathbb{N}$ □

**Beispiel**
Beh.: $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},}_{A(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis (induktiv)**
I.A.: $1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$, $A(1)$ ist also wahr.

I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
I.S.: $n \curvearrowright n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &=_{I.V.} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr. □

**Definition**

a) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

b) $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (ganze Zahlen)

c) $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (rationale Zahlen)

**Satz 1.5**
Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$:

$$x < r < y$$

**Beweis**
i. d. Übungen. □

## Einige Definitionen und Formeln

a) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}: a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$, $a^0 := 1$ und ist $a \neq 0: a^{-n} := \frac{1}{a^n}$
Es gelten die bekannten Rechenregeln.

b) Für $n \in \mathbb{N}: n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! := 1$ (**Fakultäten**)

c) **Binomialkoeffizienten**: für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

z.B. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. Es gilt (nachrechnen!):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \end{aligned}$$

e) **Binomischer Satz**: $a, b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

**Beweis**
i. d. Übungen. □

f) **Bernoullische Ungleichung**: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$. Dann:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

**Beweis (induktiv)**
I.A.: $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$
I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $(1+x)^n \geq 1 + nx$
I.S.: $n \curvearrowright n+1$: $\Rightarrow_{I.V.} (1+x)^n \geq 1 + nx$ und da $1 + x \geq 0$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^n}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + nx + x \\ &= 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

□

**Hilfssatz (HS)**
Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$

**Beweis**
i. d. Übungen. $\square$

**Satz 1.6**
Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$ mit: $x^n = a$.
Dieses $x$ heißt **n-te Wurzel aus a**; Bez.: $x = \sqrt[n]{a}$. ($\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$)

**Beweis**
Existenz: später in §7.
Eindeutigkeit: seien $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n$. $\Rightarrow_{HS} x = y$ $\square$

**Bemerkungen**

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (s. Schule)

b) Fpr $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Bsp.: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{4} \neq -2$. Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

c) $\sqrt{x^2}|x| \ \forall x \in \mathbb{R}$

## Rationale Exponenten

a) Sei zunächste $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Dann ex. $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$. Wir wollen definieren:
$$a^r := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad (*)$$
Problem: gilt auch noch $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, gilt dann $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = (\sqrt[q]{a})^p$?
Antwort: ja (d.h. obige Def. $(*)$ ist sinnvoll).

**Beweis**
$x := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, $y := (\sqrt[q]{a})^p$, dann: $x, y \geq 0$ und $mq = np$, also
$$\begin{aligned} x^q &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mq} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^p = a^p \\ &= \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^q\right)^p = \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^p\right)^q = y^q \end{aligned}$$
$\Rightarrow_{HS} x = y$. $\square$

b) Sei $a > 0, r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$. Es gelten die bekannten Rechenregeln:
$$\left( a^r a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, \dots \right)$$

# 2 Folgen und Konvergenz

**Definition**
Es sei $X$ eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$ heißt eine **Folge in X**. Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt $a$ eine **reelle Folge**.

**Schreibweisen:**
$a_n$ statt $a(n)$ (n-tes Folgenglied)
$(a_n)$ oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$ statt $a$

**Beispiele**

a) $a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

b) $a_{2n} := 0$, $a_{2n-1} := 1 \quad (n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$

**Bemerkung**
Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a\colon \{p, p+1, \dots\} \to X$ eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in $X$. Bez.: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$. Meist $p = 0$ oder $p = 1$.

**Definition**
Sei $X$ eine Menge, $X \neq \emptyset$.

a) $X$ heißt **abzählbar** $:\Longleftrightarrow \exists$ Folge $(a_n)$ in $X$: $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

b) $X$ heißt **überabzählbar** $:\Longleftrightarrow$ $X$ ist nicht abzählbar

**Beispiele**

a) Ist $X$ endlich, so ist $X$ abzählbar.

b) $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_1 := 0, a_2 := 1, a_3 := -1, a_4 := 2, a_5 := -2, \dots$ also
$$a_{2n} := n, \quad a_{2n+1} := -n \quad (n \in \mathbb{N})$$

d) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar!

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[dl] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[dl] & 5 \arrow[r] & 6 & \cdots \\
\frac{1}{2} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \frac{5}{2} & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} \arrow[d] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\frac{1}{5} \arrow[ur] & \frac{2}{5} & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann:

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

e) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (Beweis in §5).

**Vereinbarung:**
Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in $\mathbb{R}$.
c Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ $(p \in \mathbb{Z})$.

**Definition**
Sei $(a_n)$ eine Folge und $M := \{a_1, a_2, \dots\}$.

a) $(a_n)$ heißt **nach oben beschränkt** $:\iff$ $M$ ist nach oben beschränkt. I.d. Fall: $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup M$.

b) $(a_n)$ heißt **nach unten beschränkt** $:\iff$ $M$ ist nach unten beschränkt. I.d. Fall: $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf M$.

c) $(a_n)$ heißt **beschränkt** $:\iff M$ ist beschränkt

$$\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \; \forall n \in \mathbb{N}$$

**Definition**
Sei $A(n)$ eine für jedes $n \in \mathbb{N}$ definierte Aussage.
$A(n)$ gilt **für fast alle** (ffa) $n \in \mathbb{N} :\iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq n_0$

**Definition**
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$

$$U_\epsilon(a) := (a - \epsilon, a + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\}$$

heißt **$\epsilon$-Umgebung von a**.

**Definition**
Eine Folge $(a_n)$ heißt **konvergent**

$$:\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{zu jedem } \epsilon > 0 \text{ ex. } n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : \\ |a_n - a| < \epsilon \; \forall n \geq n_0 \end{cases}$$

I. d. Fall heißt $a$ **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von $(a_n)$ und man schreibt

$$a_n \to a \; (n \to \infty) \text{ oder } a_n \to a \text{ oder } \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Ist $(a_n)$ nicht konvergent, so heißt $(a_n)$ **divergent**

Beachte: $$a_n \to a \; (n \to \infty) \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U_\epsilon(a) \; \forall n \geq n_0$$
$$\iff \forall \epsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\epsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$$
$$\iff \forall \epsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\epsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}$$

**Satz 2.1**
$(a_n)$ sei konvergent und $a = \lim a_n$

a) Gilt auch noch $a_n \to b$, so sit $a = b$

b) $(a_n)$ ist beschränkt

**Beweis**

a) Annahme $a \neq b$. Dann ist $\epsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n_0} - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \epsilon \quad \forall n \geq n_1$$

$N := \max\{n_0, n_1\}$. Dann:

$$2\epsilon = |a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\epsilon$$

Widerspruch! Also $a = b$

b) Zu $\epsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1$ $\forall n \geq n_0$. Dann:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \geq n_0$$

$c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$. Dann: $|a_n| \leq \epsilon$ $\forall n \geq 1$. $\square$

**Beispiele**

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n := c$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$|a_n - c| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also: $a_n \to c$.

b) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Beh: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

**Beweis**
Sei $\epsilon > 0 : |a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$

$$\xRightarrow{\text{1.3 c)}} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\epsilon}$$

Für $n \geq n_0$ ist $n > \frac{1}{\epsilon}$, also $\frac{1}{n} < \epsilon$. Somit $|a_n - 0| < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\square$

c) $a_n := (-1)^n$. Es ist $|a_n| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_n)$ ist also beschränkt. Behauptung: $(a_n)$ ist divergent.

**Beweis**
$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n| (1 - (-1)) = 2$.
Annahme: $(a_n)$ konvergiert. Definiere $a := \lim a_n$, dann

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n \geq n_0$ gilt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Widerspruch! $\square$

d) $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$. $(a_n)$ ist nicht beschränkt $\xRightarrow{2.1b)}$ $(a_n)$ ist divergent.

e) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} (n \in \mathbb{N})$. Beh.: $a_n \to 0$

**Beweis**
Sei $\epsilon > 0$.

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\epsilon^2}$$

$\overset{1.3c)}{\Longrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$. Ist $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \epsilon$ $\square$

f) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

**Beweis**

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\epsilon > 0$, nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Also $a_n \to 0$. $\square$

**Definition**
$(a_n)$ und $(b_n)$ seien Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n);\ \ \alpha(a_n) := (\alpha a_n);\ \ (a_n)(b_n) := (a_n b_n)$$

Gilt $b_n \neq 0$ $\forall n \geq m$, so ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$ definiert.

**Satz 2.2**
$(a_n), (b_n), (c_n)$ und $(\alpha_n)$ seien Folge und $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$

a) $a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0$

b) Gilt $|a_n - a| \leq \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0$, so gilt $a_n \to a$

c) Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann:
   (i) $|a_n| \to |a|$
   (ii) $a_n + b_n \to a + b$
   (iii) $\alpha a_n \to \alpha a$
   (iv) $a_n b_n \to ab$
   (v) ist $a \neq 0$, so ex. ein $m \in \mathbb{N}$:

$$a_n \neq 0\ \forall n \geq m \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$$

d) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $a_n \le b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \le b$

e) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to a$ und $a_n \le c_n \le b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dann $c_n \to a$.

**Beispiele**

a) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $a_n := \frac{1}{n^p}$. Es ist $n \le n^p \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann: $0 \le a_n \le \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N} \overset{2.2e)}{\Longrightarrow} a_n \to 0$, also $\frac{1}{n^p} \to 0$.

b) $a_n := \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2} = \frac{5+3/n+1/n2}{4-1/n+2/n^2} \to \frac{5}{4}$

**Beweis (von 2.2)**

a) folgt aus der Definition der Konvergenz

b) $\exists m \in \mathbb{N} : |a_n - a| \le \alpha_m \ \forall n \ge m$. Sei $\epsilon > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \alpha_n < \epsilon \ \forall n \ge n_1.$$

$n_0 := \max\{m, n_1\}$. Für $n \ge n_0$: $|a_n - a| \le \alpha_n < \epsilon$

c) (i) $||a_n| - |a|| \le_{\S 1} |a_n - a| \ \forall n \in \mathbb{N} \underset{a)}{\overset{b)}{\Rightarrow}} |a_n| \to |a|$

(ii) Sei $\epsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}; |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall n \ge n_1$, $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall n \ge n_2$
$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Für $n \ge n_0$:

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(iii) Übung

(iv) $c_k := |a_n b_n - ab|$. z. z.: $c_n \to 0$

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |an(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned}$$

$\overset{2.1b)}{\Longrightarrow} \exists c \ge 0 : |a_n| \le c \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $c \ge |b|$. Dann:

$$c_n \le c(|b_n - b| + |a_n - a|) =: \alpha_n \xRightarrow[c)(ii),c)(iii)]{a)} \alpha_n \to 0$$

Also: $|c_n - 0| = c_n \le \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \overset{b)}{\Rightarrow} c_n \to 0$.

(v) $\epsilon := \frac{|a|}{2}$; (aus (i): $|a_n| \to |a| \Rightarrow \exists n \in N$:

$\Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2} > 0 \ \forall n \ge m \Rightarrow a_n \ne 0 \ \forall n \ge m$. $\square$

# Stichwortverzeichnis