Höhere Mathematik I

G. Herzog, C. Schmoeger

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen

Grundmenge der Analysis is die Menge $\mathbb{R}$, die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen $\mathbb{R}$ als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von $\mathbb{R}$ aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.

Körperaxiome: in $\mathbb{R}$ seien zwei Verknüpfungen „ $+$ “ und „ $\cdot$ “ gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a + b \in \mathbb{R}$ und genau ein $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei soll gelten:

(A1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz)

(A5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(A2) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\ a + 0 = a$ (Null)

(A6) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot 1 = a$ **und** $1 \neq 0$ (Eins)

(A3) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists -a \in \mathbb{R}\ a + (-a) = 0$

(A7) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}\ a \cdot a^{-1} = 1$

(A4) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)

(A8) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)

(A9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

Schreibweisen: für $a, b \in \mathbb{R}$: $a - b := a + (-b)$ und für $b \neq 0$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

Alle bekannten Regeln der Grundrechnungsarten lassen sich aus (A1) – (A9) herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele:

a) Beh.: $\exists_1 0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a + 0 = a$

Beweis: Sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\ a + \tilde{0} = a$. Mit $a = 0$ folgt: $0 + \tilde{0} = 0$. Mit $a = \tilde{0}$ in (A2) folgt: $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Dann $0 = 0 + \tilde{0} =_{(A4)} \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$

b) Beh.: $\forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot 0 = 0$

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b := a \cdot 0$. Dann: $b =_{(A2)} a(0+0) =_{(A9)} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b + b$.
$0 =_{(A3)} b + (-b) = (b+b) + (-b) =_{(A1)} b + (b + (-b)) = b + 0 =_{(A2)} b$

Anordnungsaxiome: in $\mathbb{R}$ ist eine Relation „ $\leq$ “ gegeben.
Dabei sollen gelten:

$(A10)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$

$(A11)$ aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$

$(A12)$ aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$

$(A13)$ aus $a \leq b$ folgt $\forall c \in \mathbb{R}\ a + c \leq b + c$

$(A14)$ aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $ac \leq bc$

Schreibweisen: $b \geq a :\iff a \leq b$; $a < b :\iff a \leq b$ und $a \neq b$; $b > 0 :\iff a < b$

Aus $(A1) - (A14)$ lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele (ohne Beweis)**:**

a) aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$

b) aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$

c) aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \geq b + d$

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

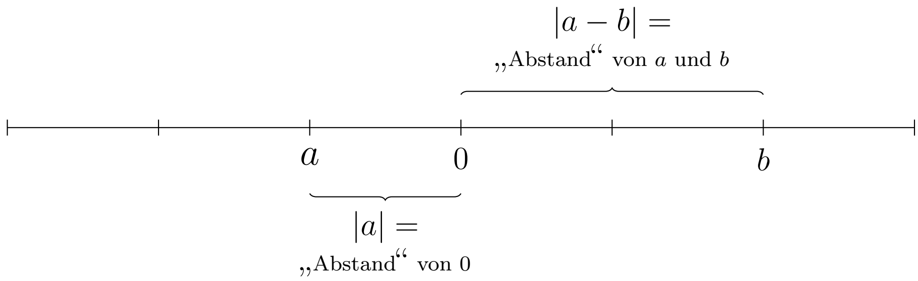
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Der Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ der Betrag von a.

Beispiele: $|1| = 1, \ \ |-7| = -(-7) = 7.$

Anschaulich: 

Es ist $|-a| = |a|$ und $|a-b| = |b-a|$

Regeln:

a) $|a| \geq 0$

b) $|a| = 0 \iff a = 0$

c) $|ab| = |a||b|$

d) $\pm a \leq |a|$

e) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

f) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Beweis:

$a) - d)$ leichte Übung

$e)$ Fall 1: $a + b \geq 0$. Dann: $|a+b| = a+b \leq_{d)} |a| + |b|$.
Fall 2: $a + b < 0$. Dann: $|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) \leq_{d)} |a| + |b|$.

$f)$ $c := |a| - |b|$; $|a| = |a - b + b| \leq_{d)} |a-b| + |b|$

$$\Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a-b|. \text{ Analog: } -c = |b| - |a| \leq |b-a| = |a-b|$$

Also: $\pm c \leq |a-b|$.

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

a) M heißt **nach oben beschränkt** $:\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ x \leq \gamma$
In diesem Fall heißt γ eine **obere Schranke**

b) Ist γ eine obere Schranke von M und gilt $\gamma \leq \delta$ für jede weitere obere Schranke δ von M, so heißt γ das **Supremum** von M (kleinste obere Schranke von M)

c) M heißt **nach unten beschränkt** $:\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ \gamma \leq x$
In diesem Fall heißt γ eine **untere Schranke** (US)

d) Ist γ eine untere Schranke von M und gilt $\gamma \geq \delta$ für jede weitere untere Schranke δ von M, so heißt γ das **Infimum** von M (größte untere Schranke von M)

Bez.: in dem Fall: $\gamma = \sup M$ bzw. $\gamma = \inf M$.

Aus $(A11)$ folgt: ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden, so ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ eindeutig bestimmt.

Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden und gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so heißt $\sup M$ das Maximum bzw. $\inf M$ das Minimum von M und wird mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet.

Beispiele: a) $M = (1, 2)$. $\sup M = 2 \notin M$, $\inf M = 1 \notin M$. M hat kein Maximum und kein Minimum.

b) $M = (1, 2]$. $\sup M = 2 \in M$, $\max M = 2$

c) $M = (3, \infty)$. M ist nicht nach oben beschränkt, $3 = \inf M \notin M$.

d) $M = (-\infty, 0]$. M ist nach unten unbeschränkt, $0 = \sup M = \max M$.

Vollständigkeitsaxiom:

$(A15)$ Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach oben beschränkt, so ist $\sup M$ vorhanden.

Satz 1.1: Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach unten beschränkt, so ist $\inf M$ vorhanden.

Beweis: i. d. Übungen.

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt beschränkt $:\iff$ M ist nach oben und nach unten beschränkt ($\iff \exists c \geq 0\ \forall x \in M |x| \leq c \iff \exists c \geq 0\ \forall x \in M -c \leq x \leq c$)

Satz 1.2: Es sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$

a) Ist A bechränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$

b) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt $\Rightarrow B$ ist nach oben beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ bzw. nach unten beschränkt und $\inf B \geq \inf A$

c) A sei nach oben bzw. unten beschränkt und γ eine obere bzw. untere Schranke von A. Dann

$$\gamma = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x = x(\varepsilon) \in A : x > \gamma - \varepsilon$$

bzw.

$$\gamma = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x = x(\varepsilon) \in A : x < \gamma + \varepsilon$$

Beweis:

a) $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$. Dann $\inf A \leq x$, $x \leq \sup A$ $(A12)$

$$\Rightarrow \inf A \leq \sup A$$

b) Sei $x \in B$. Dann: $x \in A$, also $x \leq \sup A$. B ist also nach oben beschränkt und $\sup A$ ist eine obere Schranke von B

$$\Rightarrow \sup B \leq \sup A$$

Analog der Fall für A nach unten beschränkt.

c) „ $\Rightarrow$ “ Sei $\gamma = \sup A$ und $\varepsilon > 0$. Dann: $\gamma - \varepsilon < \varepsilon$. $\gamma - \varepsilon$ ist also keine obere Schranke von A. Also: $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon$
„ $\Leftarrow$ “ Sei $\tilde{\gamma} \leq \gamma$. Annahme: $\gamma \neq \tilde{\gamma}$. Dann $\tilde{\gamma} < \gamma$, also $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$.
$\overset{Vor.}{\Longrightarrow} \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Widerspruch zu $x \leq \tilde{\gamma}$.

Natürliche Zahlen

Definition:

a) $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine Induktionsmenge (IM)

$$:\iff \begin{cases} 1. & 1 \in A; \\ 2. & \text{aus } x \in A \text{ folgt stets } x + 1 \in A \end{cases}$$

Beispiele: $\mathbb{R}, [1, \infty), \{1\} \cup [2, \infty)$ sind Induktionsmengen

b) $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x$ gehört zu **jeder** IM $\}$ = Durchschnitt aller IMn
Also: $\mathbb{N} \subseteq A$ für jede Induktionsmenge A.

Satz 1.3:

a) $\mathbb{N}$ ist eine Induktionsmenge

b) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt

c) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ex. ein $n \in \mathbb{N} : N > x$

Von nun an sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bekannt.

Proposition 1.4 (Prinzip der vollständigen Induktion)**:** Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und A eine Induktionsmenge, so ist $A = N$.

Beweis: $A \subseteq \mathbb{N}$ (nach Vor.) und $\mathbb{N} \subset A$ (nach Def.), also $A = \mathbb{N}$

Beweisverfahren durch vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Für $A(n)$ gelte:

$$\begin{cases} (I) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (II) & \text{ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch A(n + 1) wahr;} \end{cases}$$

Dann ist $A(n)$ wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$!

Beweis: Sei $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\}$. Dann:
$A \subseteq \mathbb{N}$ und, wg. (I), (II), A ist eine Induktionsmenge $\overset{(1.4)}{\Longrightarrow} A = \mathbb{N}$

Beispiel: Beh.: $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis (induktiv)**:** I.A.: $1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$, $A(1)$ ist also wahr.

I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
I.S.: $n \curvearrowright n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) &=_{I.V.} \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) \\ &= (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A(n + 1)$ ist wahr.

Definition: a) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

b) $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (ganze Zahlen)

c) $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (rationale Zahlen)

Satz 1.5: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$:

$$x < r < y$$

Beweis: i. d. Übungen.

Einige Definitionen und Formeln

a) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} : a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$, $a^0 := 1$ und ist $a \neq 0 : a^{-n} := \frac{1}{a^n}$

Es gelten die bekannten Rechenregeln.

b) Für $n \in \mathbb{N} : n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! := 1$ (**Fakultäten**)

c) **Binomialkoeffizienten**: für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

z.B. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. Es gilt (nachrechnen!):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \end{aligned}$$

e) **Binomischer Satz**: $a, b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$

Beweis: i. d. Übungen.

f) **Bernoullische Ungleichung**: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$. Dann:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis (induktiv)**:** I.A.: $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$
I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $(1+x)^n \geq 1 + nx$
I.S.: $n \curvearrowright n+1$: $\overset{I.V.}{\Longrightarrow} (1+x)^n \geq 1 + nx$ und da $1 + x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\
&= 1 + nx + x + \underbrace{nx^n}_{\geq 0} \\
&\geq 1 + nx + x \\
&= 1 + (n+1)x
\end{aligned}$$

Hilfssatz (HS)**:** Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$

Beweis: i. d. Übungen.

Satz 1.6: Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$ mit: $x^n = a$.
Dieses x heißt **n-te Wurzel aus a**; Bez.: $x = \sqrt[n]{a}$. ($\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$)

Beweis: Existenz: später in §7.
Eindeutigkeit: seien $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n$. $\overset{HS}{\Longrightarrow} x = y$

Bemerkungen:

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (s. Schule)

b) Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Bsp.: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{4} \neq -2$. Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

c) $\sqrt{x^2}|x| \; \forall x \in \mathbb{R}$

Rationale Exponenten

a) Sei zunächste $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Dann ex. $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$. Wir wollen definieren:

$$a^r := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad (*)$$

Problem: gilt auch noch $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, gilt dann $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = (\sqrt[q]{a})^p$?
Antwort: ja (d.h. obige Def. $(*)$ ist sinnvoll).

Beweis: $x := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, $y := (\sqrt[q]{a})^p$, dann: $x, y \geq 0$ und $mq = np$, also

$$\begin{aligned}
x^q = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mq} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^p = a^p \\
&= \left((\sqrt[q]{a})^q\right)^p = \left((\sqrt[q]{a})^p\right)^q = y^q
\end{aligned}$$

$\overset{HS}{\Longrightarrow} x = y$.

b) Sei $a > 0, r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$. Es gelten die bekannten Rechenregeln:

$$\big(\ a^r a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, \dots\big)$$

2 Folgen und Konvergenz

Definition: Es sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$ heißt eine **Folge in X**. Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt a eine **reelle Folge**.

Schreibweisen: a_n statt $a(n)$ (n-tes Folgenglied)
(a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$ statt a

Beispiele:

a) $a_n \coloneqq \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

b) $a_{2n} \coloneqq 0$, $a_{2n-1} \coloneqq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a\colon \{p, p+1, \dots\} \to X$ eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in X. Bez.: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$. Meist $p = 0$ oder $p = 1$.

Definition: Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$.

a) X heißt **abzählbar** $:\Longleftrightarrow$ $\exists$ Folge (a_n) in X: $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

b) X heißt **überabzählbar** $:\Longleftrightarrow$ X ist nicht abzählbar

Beispiele:

a) Ist X endlich, so ist X abzählbar.

b) $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_n \coloneqq n$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_1 \coloneqq 0, a_2 \coloneqq 1, a_3 \coloneqq -1, a_4 \coloneqq 2, a_5 \coloneqq -2, \dots$ also

$$a_{2n} \coloneqq n, \quad a_{2n+1} \coloneqq -n \quad (n \in \mathbb{N})$$

d) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar!

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[dl] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[dl] & 5 \arrow[r] & 6 & \cdots \\
\frac{1}{2} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \frac{5}{2} & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots & \\
\frac{1}{4} \arrow[d] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots & & \\
\frac{1}{5} \arrow[ur] & \frac{2}{5} & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \cdots & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n \ (n \in \mathbb{N})$. Dann:

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

e) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (Beweis in §5).

Vereinbarung: Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in $\mathbb{R}$.
Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ $(p \in \mathbb{Z})$.

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $M := \{a_1, a_2, \dots\}$.

a) (a_n) heißt **nach oben beschränkt** $:\iff$ M ist nach oben beschränkt. I.d. Fall: $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup M$.

b) (a_n) heißt **nach unten beschränkt** $:\iff$ M ist nach unten beschränkt. I.d. Fall: $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf M$.

c) (a_n) heißt **beschränkt** $:\iff M$ ist beschränkt

$$\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition: Sei $A(n)$ eine für jedes $n \in \mathbb{N}$ definierte Aussage.
$A(n)$ gilt **für fast alle** (ffa) $n \in \mathbb{N} :\iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq n_0$

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(a) \coloneqq (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

heißt **ε-Umgebung von a**.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **konvergent**

$$:\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ ex. } n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \\ |a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0 \end{cases}$$

I. d. Fall heißt a **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von (a_n) und man schreibt

$$a_n \to a \; (n \to \infty) \text{ oder } a_n \to a \text{ oder } \lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) **divergent**. Beachte:

$$\begin{aligned} a_n \to a \; (n \to \infty) &\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \; \forall n \geq n_0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Satz 2.1: (a_n) sei konvergent und $a = \lim a_n$

a) Gilt auch noch $a_n \to b$, so ist $a = b$

b) (a_n) ist beschränkt

Beweis:

a) Annahme $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon \coloneqq \frac{|a-b|}{2} > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n_0} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

$N \coloneqq \max\{n_0, n_1\}$. Dann:

$$2\varepsilon = |a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\varepsilon$$

Widerspruch! Also $a = b$

b) Zu $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1$ $\forall n \geq n_0$. Dann:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \geq n_0$$

$c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0 - 1}|\}$. Dann: $|a_n| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq 1$.

Beispiele:

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n := c$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$|a_n - c| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also: $a_n \to c$.

b) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Beh: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0 : |a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\xRightarrow{1.3\text{ c)}} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Für $n \geq n_0$ ist $n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Somit $|a_n - 0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

c) $a_n := (-1)^n$. Es ist $|a_n| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, (a_n) ist also beschränkt. Behauptung: (a_n) ist divergent.

Beweis: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n|\,(1 - (-1)) = 2$. Annahme: (a_n) konvergiert. Definiere $a := \lim a_n$, dann

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n \geq n_0$ gilt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Widerspruch!

d) $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$. (a_n) ist nicht beschränkt $\xRightarrow{2.1b)}$ (a_n) ist divergent.

e) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} (n \in \mathbb{N})$. Beh.: $a_n \to 0$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$.

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$\overset{1.3c)}{\Longrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Ist $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

f) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Beweis:

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$, nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Also $a_n \to 0$.

Definition: (a_n) und (b_n) seien Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n);\ \alpha(a_n) := (\alpha a_n);\ (a_n)(b_n) := (a_n b_n)$$

Gilt $b_n \neq 0$ $\forall n \geq m$, so ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$ definiert.

Satz 2.2: $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (α_n) seien Folge und $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$

a) $a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0$

b) Gilt $|a_n - a| \leq \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0$, so gilt $a_n \to a$

c) Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann:

   (i) $|a_n| \to |a|$

   (ii) $a_n + b_n \to a + b$

   (iii) $\alpha a_n \to \alpha a$

   (iv) $a_n b_n \to ab$

   (v) ist $a \neq 0$, so ex. ein $m \in \mathbb{N}$:

$$a_n \neq 0 \ \forall n \geq m \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$$

d) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$

e) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dann $c_n \to a$.

Beispiele:

a) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $a_n := \frac{1}{n^p}$. Es ist $n \leq n^p$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dann: $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \xRightarrow{2.2e)} a_n \to 0$, also $\frac{1}{n^p} \to 0$.

b) $a_n := \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2} = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \to \frac{5}{4}$

Beweis (von 2.2)**:**

a) folgt aus der Definition der Konvergenz

b) $\exists m \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \alpha_m$ $\forall n \geq m$. Sei $\varepsilon > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \alpha_n < \varepsilon \ \forall n \geq n_1.$$

$n_0 := \max\{m, n_1\}$. Für $n \geq n_0$: $|a_n - a| \leq \alpha_n < \varepsilon$

c) (i) $||a_n| - |a|| \leq_{\S 1} |a_n - a|$ $\forall n \in \mathbb{N} \underset{a)}{\overset{b)}{\Rightarrow}} |a_n| \to |a|$

(ii) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_2$
$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Für $n \geq n_0$:

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iii) Übung

(iv) $c_k := |a_n b_n - ab|$. z. z.: $c_n \to 0$

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |an(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned}$$

$\xRightarrow{2.1b)} \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $c \geq |b|$. Dann:

$$c_n \leq c(|b_n - b| + |a_n - a|) =: \alpha_n \xrightarrow[c)(ii),c)(iii)]{a)} \alpha_n \to 0$$

Also: $|c_n - 0| = c_n \leq \alpha_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \overset{b)}{\Rightarrow} c_n \to 0$.

(v) $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$; aus (i): $|a_n| \to |a| \Rightarrow \exists n \in N$:

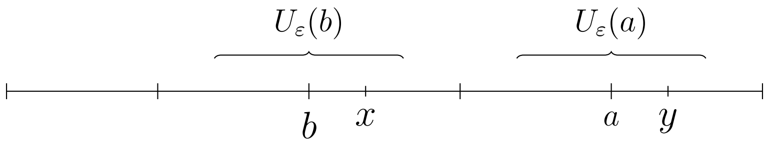
$$|a_n| \in U_\varepsilon(|a|) = (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon) = (\frac{|a|}{2}, \frac{3}{2}|a|) \quad \forall n \geq m$$

$\Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2} > 0 \ \forall n \geq m \Rightarrow a_n \neq 0 \ \forall n \geq m$.
Für $n \geq m$:

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} =: \alpha_n$$

$\alpha_n \to 0 \overset{b)}{\Rightarrow} \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.

d) Annahme $b < a, \varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$



Dann: $x < y \ \forall x \in U_\varepsilon(b) \ \forall y \in U_\varepsilon(a)$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : b_n \in U_\varepsilon(b) \ \forall n \geq n_0$$
$$\exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \ \forall n \geq m$$

$m_0 := \max\{n_0, m\}$. Für $n \geq m_0$: $a_n \leq b_n < b + \varepsilon$, also $a_n \notin U_\varepsilon(a)$. Widerspruch!

e) $\exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \geq m$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \ \forall n \geq n_1$$
$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \ \forall n \geq n_2$$

$n_0 := \max\{n_1, n_2, m\}$. Für $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

Also: $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$.

Definition:

a) (a_n) heißt **monoton wachsend** $:\Longleftrightarrow \ a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) (a_n) heißt **streng monoton wachsend** $:\Longleftrightarrow \ a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Entsprechend definiert man **monoton fallend** und **streng monoton fallend**.

d) (a_n) heißt **monoton** $:\iff$ (a_n)n ist monoton wachsend oder monoton fallend.

Proposition 2.3 (Monotoniekriterium)**:**

a) (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n$$

b) (a_n) sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n=1}^{\infty} a_n$$

Beweis: $a := \sup_{n=1}^{\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_1, a_2, \cdots\}$, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$. Für $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a \leq a + \varepsilon$$

also $|a_n - a| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

Beispiel: $a_1 := \sqrt[3]{6}$, $a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n} (n \geq 2)$.

$a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2;$

$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6+2} = 2;$

$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6} = a_1;$

Behauptung: $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis (induktiv)**:**
I.A.: s.o.
I.V.: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$. $n \curvearrowright n+1$: $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} >_{I.V.} 0$

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} <_{I.V.} \sqrt[3]{6+2} = 2; \quad a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} >_{I.V.} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}$$

Also: (a_n) ist nach oben beschränkt und monoton wachsend.
$\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (a_n) ist konvergent. $a := \lim a_n$, $a_n \geq 0 \ \forall n \overset{2.2}{\Longrightarrow} a \geq 0$. Es ist

$$a_{n+1}^3 = 6 + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\overset{2.2}{\Longrightarrow} a^3 = 6 + a \Rightarrow 0 = a^3 - a + 6 = (a-2)(\underbrace{a^2 - 2a + 3}_{\geq 3})$$

$\Rightarrow a = 2.$

Wichtige Beispiele:

Vorbemerkung: Seien $x, y \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$: es ist (s. §1)

$$x^p - y^p = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x-y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x-y|$

Beispiel 2.4: Sei $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a (\geq 0)$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$

Beweis:
Fall 1: $a = 0$. Sei $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon^p \; \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{|a_n|} < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$$

Also $\sqrt[p]{a_n} \to 0$.

Fall 2: $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - |\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y}|^p| = |x^p - y^p| \\ &\geq_{s.o.} \underbrace{y^{p-1}}_{:=c} |x-y| = c|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}|, \quad c > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{1}{c} |a_n - a| =: \alpha_n$. $\alpha_n \to 0 \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$

Beispiel 2.5: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt (x^n) ist konvergent $\iff$ $x \in (-1, 1]$, i. d. Fall:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in (-1,1) \end{cases}$$

Beweis:
Fall 1: $x = 0$. Dann $x^k \to 0$. Fall 2: $x = 1$. Dann $x^k \to 1$.
Fall 3: $x = -1$. Dann $(x^k) = ((-1)^k)$, ist divergent.

Fall 4: $|x| > 1$. $\exists \delta > 0 : |x| = 1 + \delta \Rightarrow |x^k| = |x|^k = (1+\delta)^k \geq 1 + n\delta \geq n\delta$ $\Rightarrow$ ist nicht beschränkt $\overset{2.1}{\Longrightarrow}$ (x^k) ist divergent. Fall 5: $0 < |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} > 1 \Rightarrow$ $\exists \eta > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + \eta$.

$$\Rightarrow |\frac{1}{x^n}| = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1+\eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta$$

$\Rightarrow |x^n| \leq \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow x^n \to 0$.

Beispiel 2.6: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $s_n := 1 + x + x^n + \ldots x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$
Fall 1: $x = 1$. Dann: $x_n = n + 1$, (s_n) ist also divergent.
Fall 2: $x \neq 1 \Rightarrow s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Aus (2.5):

$$(s_n) \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 1$$

i.d. Fall: $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$

Beispiel 2.7: Behauptung: $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Beweis: Es ist $\sqrt[n]{n} \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, also $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Z. z.: $a_n \to 0$.
Für $n \geq 2$:

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (a_n + 1)^n =_{\S 1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

$\Rightarrow \frac{n-1}{2} a_n^2 \leq 1$. Also $\underset{a_n \geq 0}{\Longrightarrow} 0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} (n \geq 2)$. $\Rightarrow a_n \to 0$.

Beispiel 2.8: Sei $c > 0$. Beh.: $\sqrt[n]{c} \to 1$.

Beweis: Fall 1: $c \geq 1$. $\exists m \in \mathbb{N} : 1 \leq c \leq m$

$$\Rightarrow 1 \leq c \leq n\ \forall n \geq m \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}\ \forall n \geq m \Rightarrow \text{Beh.}$$

Fall 2: $0 < c < 1 \Rightarrow \frac{1}{c} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \xrightarrow[Fall 1]{} 1 (n \to \infty) \Rightarrow$ Beh.

Beispiel 2.9: $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$
Beh.: (a_n) und (b_n) sind konvergent und $\lim a_n = \lim b_n$

Beweis: I. d. gr. Übungen wird gezeigt: $2 \leq a_n < a_{n+1} < 3\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\overset{2.3}{\Longrightarrow} (a_n) \text{ konvergiert, } a := \lim a_n$$

Es ist $b_n > 0$ und $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n$. (b_n) ist also monoton wachsend. Für $n > 3$:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 2}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2\cdot \ldots \cdot n}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \ldots + (\frac{1}{2})^{n-1}\right) = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (b_n) konvergiert. $b := \lim b_n$. Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &=_{§1} \sum_{k=0} n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{(1 - \frac{1}{n})}_{<1} \underbrace{(1 - \frac{2}{n})}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1 - \frac{k-1}{n})}_{<1} \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = b_n \end{aligned}$$

Also $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq 2$. Z. z.: $\Rightarrow a \leq b$
Sei $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$ (zunächst fest). Für $n \in \mathbb{N}, n \geq j$:

$$\begin{aligned} a_n &=_{s.o.} 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) \\ &\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} \underbrace{(1 - \frac{1}{n})}_{\to 1} \underbrace{(1 - \frac{2}{n})}_{\to 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1 - \frac{k-1}{n})}_{\to 1} \\ &\to 1 + 1 + 1 \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

Also $a \geq b_j$ $\forall j \geq 2 \xRightarrow{j \to \infty} a \geq b$.

Definition:

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$$

heißt **Eulersche Zahl**. Übung: $2 < e < 3$.
$e \approx 2,718\ldots$

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$b_k := a_{n_k}$$

also $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, \ldots$. Dann heißt $(b_k) = (a_{n_k})$ eine **Teilfolge** (TF) von (a_n).

Beispiele:

a) $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = 2k$

b) $(a_1, a_4, a_9, \ldots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = k^2$

c) $(a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, a_{14}, \ldots)$ ist keine Teilfolge von (a_n).

Definition: (a_n) sei eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. α heißt ein **Häufungswert** (HW) von (a_n)

$$:\iff \exists (TF)(a_{n_k}) \text{ von } (a_n) : a_{n_k} \to \alpha (k \to \infty)$$

$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}$.

Satz 2.10: $\alpha \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungswert von (a_n)

$$\iff \forall \epsilon > 0 : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha) \quad (*)$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:
„ $\Rightarrow$ “ Sei (a_{n_k}) eine Teilfolge mit $a_{n_k} \to \infty$. Sei $\epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha)$ für $k \geq k_0 \Rightarrow (*)$
„ $\Leftarrow$ “ $\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in U_1(\alpha)$. $\exists n_2 \in \mathbb{N} : a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ und $n_2 > n_1$. $\exists n_3 \in \mathbb{N} : a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$ und $n_3 > n_2$. Etc. ... Man erhält eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit

$$a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha) \ \forall k \in \mathbb{N}, \text{ also } |a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \ \forall k$$

Somit: $a_{n_k} \to \alpha$.

Beispiele:

a) $a_n = (-1)^n$, $a_{2k} = 1 \to 1, a_{2k+1} \to -1$, also $1, -1 \in H(a_n)$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1, \alpha \neq -1$
Wähle $\epsilon > 0$ so, dass $1, -1 \notin U_\epsilon(\alpha)$. Dann $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$ für kein $n \in \mathbb{N}$ $\stackrel{2.10}{\Longrightarrow} \alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \{1, -1\}$.

b) $a_n = n$. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$, so gilt: $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$ für höchstens endlich viele n, also $\alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \emptyset$.

c) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Sei (a_n) eine Folge mit $Q = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0 \stackrel{1.5}{\Longrightarrow} U_\epsilon(\alpha) = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ enthält unendlich viele verschiedene rationale Zahlen $\stackrel{2.10}{\Longrightarrow} \alpha \in H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \mathbb{R}$.

Folgerung: Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_m) in $\mathbb{Q} : r_n \to \alpha$.

Satz 2.11: (a_n) sei konvergent, $a := \lim a_n$ und (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n). Dann:

$$a_{n_k} \to a (k \to \infty)$$

Insbesondere: $H(a_n) = \{\lim a_n\}$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann: $an \in U_\epsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also auch $a_{n_k} \in U_\epsilon(a)$ ffa $k \in \mathbb{N}$. Somit: $a_{n_k} \to \alpha$.

Definition: Sei (a_n) eine Folge.

a) $m \in \mathbb{N}$. m heißt **niedrig** (für (a_n))

$$:\Longleftrightarrow \quad a_n \geq a_m \quad \forall n \geq m$$

b) $m \in \mathbb{N}$ heißt nicht niedrig

$$:\Longleftrightarrow \quad \exists n \geq m : a_n < a_m \Rightarrow n > m : a_n < a_m$$

Hilfssatz: (a_n) sei eine Folge. Dann enthält (a_n) eine monotone Teilfolge.

Beweis:
Fall 1: es existieren höchstens endlich viele niedrige Indizes. Also existiert $n_1 \in \mathbb{N}$: jedes $n \geq n_1$ ist nicht niedrig.

n_1 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} < a_{n_1}$

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$

Etc…

Wir erhalten so eine streng monoton fallende Teilfolge (a_{n_k}).

Fall 2: es existieren unendlich viele niedrige Indizes $n_1, n_2, \dots$, etwa $n_1 < n_2 < \dots$

n_1 ist niedrig und $n_2 > n_1 \to a_{n_2} \geq a_{n_1}$

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} \geq a_{n_2}$

Etc…

Wir erhalten so eine monoton wachsende Teilfolge (a_{n_k}).

Satz 2.12 (Bolzano-Weierstraß)**:**
(a_n) sei beschränkt, dann: $H(a_n) \neq \emptyset$. (a_n) enthält also eine konvergente Teilfolge

Beweis: $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\xRightarrow{Hilfssatz}$ (a_n) enthält eine monotone Teilfolge (a_{n_k}). Dann: $|a_{n_k}| \leq c \forall k \in \mathbb{N}$
(a_{n_k}) ist also beschränkt $\xRightarrow{2.3}$ (a_{n_k}) ist konvergent. Also $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in H(a_n)$.

Satz 2.13: (a_n) sei beschränkt ($\xRightarrow{2.12}$ $H(a_n) \neq \emptyset$)

a) $H(a_n)$ ist beschränkt

b) $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$; es existieren also

$$\max H(a_n), \min H(a_n)$$

Definition: Ist (a_n) beschränkt, so nennen wir

a) $\limsup_{n\to\infty} a_n := \limsup a_n := \overline{\lim} a_n := \max H(a_n)$ heißt **Limes superior** oder **oberer Limes** von (a_n).

b) $\liminf_{n\to\infty} a_n := \liminf a_n := \underline{\lim} a_n := \min H(a_n)$ heißt **Limes inferior** oder **unterer Limes** von (a_n).

Beweis:

a) $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\alpha \in H(a_n)$. Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. Es ist

$$|a_{n_k}| \leq c \quad \forall k, \text{ also } -c \leq a_{n_k} \leq c \quad \forall k$$

$\Rightarrow -c \leq \alpha \leq c$. Also $|\alpha| \leq c \ \forall \alpha \in H(a_n)$.

b) ohne Beweis.

Satz 2.14: (a_n) sei beschränkt.

a) $\liminf a_n \leq \alpha \leq \limsup a_n \; \forall \alpha \in H(a_n)$

b) Ist (a_n) konvergent $\Rightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$

c) $\limsup(\alpha a_n) = \alpha \limsup a_n \; \forall \alpha \geq 0$

d) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$

Beweis: a) klar, b) folgt aus 2.11 , c) und d) Übung.

Motivation: (a_n) sei konvergent und $\lim a_n =: a$. Sei $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

D.h.: (a_n) hat die folgende Eigenschaft:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \tag{c}$$

$(\iff \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+k}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \; \forall k \in \mathbb{N})$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt eine **Cauchyfolge** (CF)

$$:\iff (a_n) \text{ hat die Eigenschaft } (c)$$

Konvergente Folgen sind also Cauchy-Folgen!

Proposition 2.15 (Cauchykriterium)**:**

$$(a_n) \text{ ist konvergent } \iff (a_n) \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “ s.o. „ $\Leftarrow$ “ ohne Beweis

Beispiel: $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit Induktion folgt:

1) $0 < a_n \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ Damit:

2) $a_n \geq \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$

Für $n \geq 2, k \in \mathbb{N}$ gilt daher:

$$
\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| = \left|\frac{1}{1+a_{n+k-1}} - \frac{1}{1-a_{n-1}}\right| &= \frac{|a_{n-1} - a_{n+k-1}|}{(1+a_{n+k-1})(1+a_{n-1})} \\
&\leq \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2}|a_{n+k-1}a_{n-1}| = \frac{4}{9}|a_{n+k-1} - a_{n-1}| \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |a_{n-k-2} - a_{n-2}| \leq \ldots \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_{k+1} - a_1| \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} (|a_{k+1}| + |a_1|) \leq 2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$: $2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} < \epsilon$ $(n \geq n_0)$. Damit: $|a_{n+k} - a_n| < \epsilon$ $(n \geq n_0, k \in \mathbb{N})$. Also ist (a_n) Cauchyfolge. $a \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n$. Klar: $a \geq \frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{1+a}$. Also $a^2 + a - 1 = 0 \iff a = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Wegen $a \geq \frac{1}{2}$ folgt $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3 Unendliche Reihen

Stichwortverzeichnis