

Höhere Mathematik I

G. Herzog, C. Schmoeger

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

| | |
|-------------------------|----|
| 1 Reelle Zahlen | 3 |
| 2 Folgen und Konvergenz | 11 |
| Stichwortverzeichnis | 17 |

1 Reelle Zahlen

Grundmenge der Analysis ist die Menge \mathbb{R} , die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen \mathbb{R} als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von \mathbb{R} aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.

Körperaxiome: in \mathbb{R} seien zwei Verknüpfungen „+“ und „ \cdot “ gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a + b \in \mathbb{R}$ und genau ein $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei soll gelten:

$$(A1) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + (b + c) = (a + b) + c \text{ (Assoziativgesetz)}$$

$$(A5) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(A2) \quad \exists 0 \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a \text{ (Null)}$$

$$(A6) \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a \text{ und } 1 \neq 0 \text{ (Eins)}$$

$$(A3) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R} \quad a + (-a) = 0$$

$$(A7) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

$$(A4) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a \text{ (Kommutativgesetz)}$$

$$(A8) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a \text{ (Kommutativgesetz)}$$

$$(A9) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ (Distributivgesetz)}$$

Schreibweisen:

für $a, b \in \mathbb{R}$: $a - b := a + (-b)$ und für $b \neq 0$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

Alle bekannten Regeln der Grundrechnungsarten lassen sich aus **(A1) – (A9)** herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele

a) Beh.: $\exists_! 0 \in \mathbb{R} \text{ mit } \forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a$

Beweis

Sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R} \quad a + \tilde{0} = a$. Mit $a = 0$ folgt: $0 + \tilde{0} = 0$. Mit $a = \tilde{0}$ in **(A2)** folgt: $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Dann $0 = 0 + \tilde{0} \stackrel{(A4)}{=} \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ □

b) Beh.: $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 0 = 0$

Beweis

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b := a \cdot 0$. Dann: $b \stackrel{(A2)}{=} a(0 + 0) \stackrel{(A9)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b + b$.
 $0 \stackrel{(A3)}{=} b + (-b) = (b + b) + (-b) \stackrel{(A1)}{=} b + (b + (-b)) = b + 0 \stackrel{(A2)}{=} b$ □

Anordnungsaxiome: in \mathbb{R} ist eine Relation „ \leq “ gegeben.

Dabei sollen gelten:

$$(A10) \text{ für } a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } a \leq b \text{ oder } b \leq a$$

$$(A11) \text{ aus } a \leq b \text{ und } b \leq a \text{ folgt } a = b$$

$$(A12) \text{ aus } a \leq b \text{ und } b \leq c \text{ folgt } a \leq c$$

$$(A13) \text{ aus } a \leq b \text{ folgt } \forall c \in \mathbb{R} \ a + c \leq b + c$$

$$(A14) \text{ aus } a \leq b \text{ und } 0 \leq c \text{ folgt } ac \leq bc$$

Schreibweisen:

$$b \geq a : \iff a \leq b; \ a < b : \iff a \leq b \text{ und } a \neq b; \ b > 0 : \iff a < b$$

Aus (A1) – (A14) lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele (ohne Beweis)

$$\text{a) aus } a < b \text{ und } 0 < c \text{ folgt } ac < bc$$

$$\text{b) aus } a \leq b \text{ und } c \leq 0 \text{ folgt } ac \geq bc$$

$$\text{c) aus } a \leq b \text{ und } c \leq d \text{ folgt } a + c \leq b + d$$

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ (abgeschlossenes Intervall)}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ (offenes Intervall)}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \text{ (halboffenes Intervall)}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \text{ (halboffenes Intervall)}$$

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \ (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \ (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$$

Der Betrag

$$\text{Für } a \in \mathbb{R} \text{ heißt } |a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases} \text{ der Betrag von } a.$$

Beispiele

$$|1| = 1, \ | -7| = -(-7) = 7.$$

$$|a| = \text{„Abstand“ von } 0 \text{ und } a$$

$$|a - b| = \text{„Abstand“ von } a \text{ und } b$$

$$\text{Es ist } | -a| = |a| \text{ und } |a - b| = |b - a|$$

Regeln:

- a) $|a| \geq 0$
- b) $|a| = 0 \iff a = 0$
- c) $|ab| = |a||b|$
- d) $\pm a \leq |a|$
- e) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
- f) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Beweis

a) – d) leichte Übung

e) Fall 1: $a + b \geq 0$. Dann: $|a + b| = a + b \leq_d |a| + |b|$.

Fall 2: $a + b < 0$. Dann: $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq_d |a| + |b|$.

f) $c := |a| - |b|$; $|a| = |a - b + b| \leq_d |a - b| + |b|$

$$\Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a - b|. \text{ Analog: } -c = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$$

Also: $\pm c \leq |a - b|$.

□

Definition

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

a) M heißt **nach oben beschränkt** : $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall x \in M x \leq \gamma$

In diesem Fall heißt γ eine **obere Schranke**

b) Ist γ eine obere Schranke von M und gilt $\gamma \leq \delta$ für jede weitere obere Schranke δ von M , so heißt γ das **Supremum** von M (kleinste obere Schranke von M)

c) M heißt **nach unten beschränkt** : $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall x \in M \gamma \leq x$

In diesem Fall heißt γ eine **untere Schranke** (US)

d) Ist γ eine untere Schranke von M und gilt $\gamma \geq \delta$ für jede weitere untere Schranke δ von M , so heißt γ das **Infimum** von M (größte untere Schranke von M)

Bez.: in dem Fall: $\gamma = \sup M$ bzw. $\gamma = \inf M$.

Aus (A11) folgt: ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden, so ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ eindeutig bestimmt.

Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden und gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so heißt $\sup M$ das Maximum bzw. $\inf M$ das Minimum von M und wird mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet.

Beispiele

- a) $M = (1, 2)$. $\sup M = 2 \notin M$, $\inf M = 1 \notin M$. M hat kein Maximum und kein Minimum.
- b) $M = (1, 2]$. $\sup M = 2 \in M$, $\max M = 2$
- c) $M = (3, \infty)$. M ist nicht nach oben beschränkt, $3 = \inf M \notin M$.
- d) $M = (-\infty, 0]$. M ist nach unten unbeschränkt, $0 = \sup M = \max M$.

Vollständigkeitsaxiom:

(A15) Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach oben beschränkt, so ist $\sup M$ vorhanden.

Satz 1.1

Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach unten beschränkt, so ist $\inf M$ vorhanden.

Beweis

i. d. Übungen. □

Definition

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt beschränkt : $\iff M$ ist nach oben und nach unten beschränkt
 ($\iff \exists c \geq 0 \forall x \in M |x| \leq c \iff \exists c \geq 0 \forall x \in M -c \leq x \leq c$)

Satz 1.2

Es sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$

- a) Ist A bechränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$
- b) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt $\Rightarrow B$ ist nach oben beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ bzw. nach unten beschränkt und $\inf B \geq \inf A$
- c) A sei nach oben bzw. unten beschränkt und γ eine obere bzw. untere Schranke von A . Dann

$$\gamma = \sup A \iff \forall \epsilon > 0 \exists x = x(\epsilon) \in A : x > \gamma - \epsilon$$

bzw.

$$\gamma = \inf A \iff \forall \epsilon > 0 \exists x = x(\epsilon) \in A : x < \gamma + \epsilon$$

Beweis

a) $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$. Dann $\inf A \leq x, x \leq \sup A$ (A12)

$$\Rightarrow \inf A \leq \sup A$$

b) Sei $x \in B$. Dann: $x \in A$, also $x \leq \sup A$. B ist also nach oben beschränkt und $\sup A$ ist eine obere Schranke von B

$$\Rightarrow \sup B \leq \sup A$$

Analog der Fall für A nach unten beschränkt.

c) „ \Rightarrow “ Sei $\gamma = \sup A$ und $\epsilon > 0$. Dann: $\gamma - \epsilon < \epsilon$. $\gamma - \epsilon$ ist also keine obere Schranke von A . Also: $\exists x \in A : x > \gamma - \epsilon$

„ \Leftarrow “ Sei $\tilde{\gamma} \leq \gamma$. Annahme: $\gamma \neq \tilde{\gamma}$. Dann $\tilde{\gamma} < \gamma$, also $\epsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$.

$\Rightarrow_{\text{Vor.}} \exists x \in A : x > \gamma - \epsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Widerspruch zu $x \leq \tilde{\gamma}$. \square

Natürliche Zahlen

Definition

a) $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine Induktionsmenge (IM) : $\Longleftrightarrow \begin{cases} 1. & 1 \in A; \\ 2. & \text{aus } x \in A \text{ folgt stets } x+1 \in A \end{cases}$

Beispiele: $\mathbb{R}, [1, \infty), \{1\} \cup [2, \infty)$ sind Induktionsmengen

b) $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ gehört zu **jeder** IM}\} = \text{Durchschnitt aller IMn}$

Also: $\mathbb{N} \subseteq A$ für jede Induktionsmenge A .

Satz 1.3

a) \mathbb{N} ist eine Induktionsmenge

b) \mathbb{N} ist nicht nach oben beschränkt

c) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ex. ein $n \in \mathbb{N} : N > x$

Von nun an sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bekannt.

Proposition 1.4 (Prinzip der vollständigen Induktion)

Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und A eine Induktionsmenge, so ist $A = \mathbb{N}$.

Beweis

$A \subseteq \mathbb{N}$ (nach Vor.) und $\mathbb{N} \subset A$ (nach Def.), also $A = \mathbb{N}$ \square

Beweisverfahren durch vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Für $A(n)$ gelte:

$$\begin{cases} (I) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (II) & \text{ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch } A(n+1) \text{ wahr;} \end{cases}$$

Dann ist $A(n)$ wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$!

Beweis

Sei $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$. Dann:

$A \subseteq \mathbb{N}$ und, wg. (I), (II), A ist eine Induktionsmenge, (1.4) $\Rightarrow A = \mathbb{N}$ □

Beispiel

Beh.: $\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{A(n)} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis (induktiv)

I.A.: $1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$, $A(1)$ ist also wahr.

I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

I.S.: $n \leadsto n+1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &=_{I.V.} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr. □

Definition

- a) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
- b) $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (ganze Zahlen)
- c) $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ (rationale Zahlen)

Satz 1.5

Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$:

$$x < r < y$$

Beweis

i. d. Übungen. □

Einige Definitionen und Formeln

- a) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$: $a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$, $a^0 := 1$ und ist $a \neq 0$: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$
Es gelten die bekannten Rechenregeln.

- b) Für $n \in \mathbb{N}$: $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, $0! := 1$ (**Fakultäten**)

- c) **Binomialkoeffizienten**: für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

z.B. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. Es gilt (nachrechnen!):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

- d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \end{aligned}$$

- e) **Binomischer Satz**: $a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Beweis

i. d. Übungen. □

- f) **Bernoullische Ungleichung**: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$. Dann:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Beweis (induktiv)

I.A.: $n = 1$: $1+x \geq 1+x$

I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $(1+x)^n \geq 1+nx$

I.S.: $n \leadsto n+1$: $\Rightarrow_{I.V.} (1+x)^n \geq 1+nx$ und da $1+x \geq 0$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+nx+x \\ &= 1+(n+1)x \end{aligned} \quad \square$$

Hilfssatz (HS)

Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$

Beweis

i. d. Übungen. □

Satz 1.6

Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$ mit: $x^n = a$.

Dieses x heißt **n-te Wurzel aus a**; Bez.: $x = \sqrt[n]{a}$. ($\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$)

Beweis

Existenz: später in §7.

Eindeutigkeit: seien $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n \Rightarrow_{HS} x = y$ □

Bemerkungen

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (s. Schule)

b) Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Bsp.: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{4} \neq -2$. Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

c) $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Rationale Exponenten

a) Sei zunächst $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Dann ex. $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$. Wir wollen definieren:

$$a^r := (\sqrt[n]{a})^m \quad (*)$$

Problem: gilt auch noch $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, gilt dann $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$?

Antwort: ja (d.h. obige Def. (*) ist sinnvoll).

Beweis

$x := (\sqrt[n]{a})^m, y := (\sqrt[q]{a})^p$, dann: $x, y \geq 0$ und $mq = np$, also

$$\begin{aligned} x^q &= (\sqrt[n]{a})^{mq} = (\sqrt[n]{a})^{np} = ((\sqrt[n]{a})^m)^p = a^p \\ &= ((\sqrt[q]{a})^q)^p = ((\sqrt[q]{a})^p)^q = y^q \end{aligned}$$

$\Rightarrow_{HS} x = y$. □

b) Sei $a > 0, r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$. Es gelten die bekannten Rechenregeln:

$$(a^r a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, \dots)$$

2 Folgen und Konvergenz

Definition

Es sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow X$ heißt eine **Folge in X** . Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt a eine **reelle Folge**.

Schreibweisen:

a_n statt $a(n)$ (n -tes Folgenglied)

(a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder (a_1, a_2, \dots) statt a

Beispiele

a) $a_n := \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

b) $a_{2n} := 0, a_{2n-1} := 1$ ($n \in \mathbb{N}$), also $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$

Bemerkung

Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a: \{p, p+1, \dots\} \rightarrow X$ eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in X . Bez.: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$. Meist $p = 0$ oder $p = 1$.

Definition

Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$.

a) X heißt **abzählbar** : $\iff \exists$ Folge (a_n) in X : $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

b) X heißt **überabzählbar** : $\iff X$ ist nicht abzählbar

Beispiele

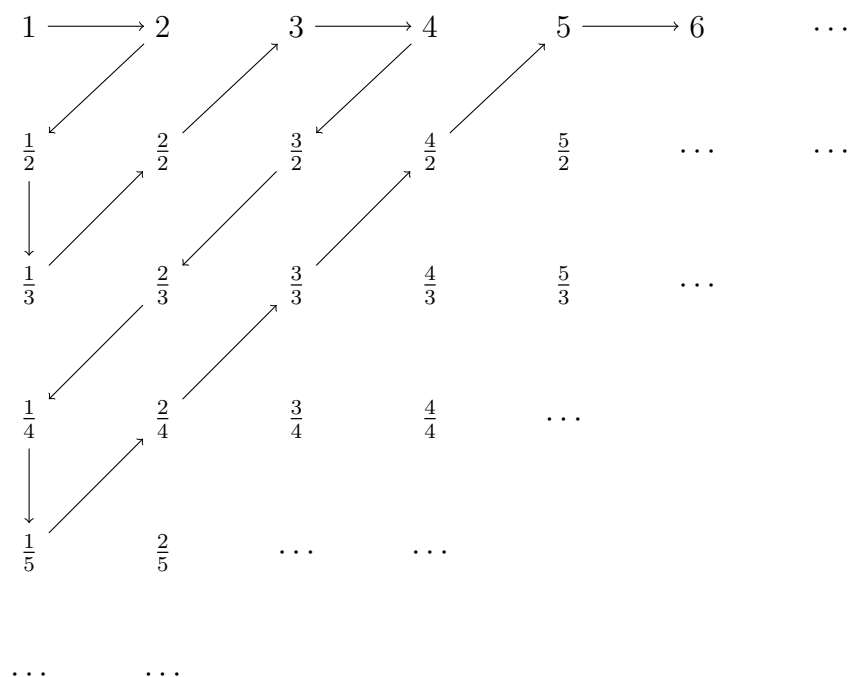
a) Ist X endlich, so ist X abzählbar.

b) \mathbb{N} ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_n := n$ ($n \in \mathbb{N}$)

c) \mathbb{Z} ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_1 := 0, a_2 := 1, a_3 := -1, a_4 := 2, a_5 := -2, \dots$ also

$$a_{2n} := n, \quad a_{2n+1} := -n \quad (n \in \mathbb{N})$$

d) \mathbb{Q} ist abzählbar!



Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann:

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

e) \mathbb{R} ist überabzählbar (Beweis in §5).

Vereinbarung:

Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in \mathbb{R} .

c Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ ($p \in \mathbb{Z}$).

Definition

Sei (a_n) eine Folge und $M := \{a_1, a_2, \dots\}$.

a) (a_n) heißt **nach oben beschränkt** : $\iff M$ ist nach oben beschränkt. I.d. Fall:
 $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup M$.

b) (a_n) heißt **nach unten beschränkt** : $\iff M$ ist nach unten beschränkt. I.d. Fall:
 $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf M$.

c) (a_n) heißt **beschränkt** : $\iff M$ ist beschränkt

$$\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition

Sei $A(n)$ eine für jedes $n \in \mathbb{N}$ definierte Aussage.

$A(n)$ gilt **für fast alle** (ffa) $n \in \mathbb{N} : \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq n_0$

Definition

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$

$$U_\epsilon(a) := (a - \epsilon, a + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\}$$

heißt **ϵ -Umgebung von a** .

Definition

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent**

$$: \iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{zu jedem } \epsilon > 0 \text{ ex. } n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : \\ |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \end{cases}$$

I. d. Fall heißt a **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von (a_n) und man schreibt

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \text{ oder } a_n \rightarrow a \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) **divergent**

Beachte: $a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U_\epsilon(a) \quad \forall n \geq n_0$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\epsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\epsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}$$

Satz 2.1

(a_n) sei konvergent und $a = \lim a_n$

a) Gilt auch noch $a_n \rightarrow b$, so ist $a = b$

b) (a_n) ist beschränkt

Beweis

a) Annahme $a \neq b$. Dann ist $\epsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n_0} - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \epsilon \quad \forall n \geq n_1$$

$N := \max\{n_0, n_1\}$. Dann:

$$2\epsilon = |a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\epsilon$$

Widerspruch! Also $a = b$

b) Zu $\epsilon = 1 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \forall n \geq n_0$. Dann:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \geq n_0$$

$$c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\}. \text{ Dann: } |a_n| \leq c \quad \forall n \geq 1. \quad \square$$

Beispiele

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n := c \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$|a_n - c| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also: $a_n \rightarrow c$.

b) $a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$. Beh: $a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Beweis

$$\text{Sei } \epsilon > 0 : |a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\xRightarrow{\text{1.3 c)}} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\epsilon}$$

Für $n \geq n_0$ ist $n > \frac{1}{\epsilon}$, also $\frac{1}{n} < \epsilon$. Somit $|a_n - 0| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \square$

c) $a_n := (-1)^n$. Es ist $|a_n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, (a_n) ist also beschränkt. Behauptung: (a_n) ist divergent.

Beweis

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n| (1 - (-1)) = 2.$$

Annahme: (a_n) konvergiert. Definiere $a := \lim a_n$, dann

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n \geq n_0$ gilt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Widerspruch! \square

d) $a_n := n \quad (n \in \mathbb{N})$. (a_n) ist nicht beschränkt $\xRightarrow{\text{2.1b)}} (a_n)$ ist divergent.

e) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$. Beh.: $a_n \rightarrow 0$

Beweis

Sei $\epsilon > 0$.

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\epsilon} \iff n > \frac{1}{\epsilon^2}$$

$\stackrel{1.3c)}{\implies} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$. Ist $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \epsilon$ □

f) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Beweis

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\epsilon > 0$, nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Also $a_n \rightarrow 0$. □

Definition

(a_n) und (b_n) seien Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n); \quad \alpha(a_n) := (\alpha a_n); \quad (a_n)(b_n) := (a_n b_n)$$

Gilt $b_n \neq 0 \forall n \geq m$, so ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$ definiert.

Satz 2.2

$(a_n), (b_n), (c_n)$ und (α_n) seien Folge und $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$

a) $a_n \rightarrow a \iff |a_n - a| \rightarrow 0$

b) Gilt $|a_n - a| \leq \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \rightarrow 0$, so gilt $a_n \rightarrow a$

c) Es gelte $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Dann:

(i) $|a_n| \rightarrow |a|$

(ii) $a_n + b_n \rightarrow a + b$

(iii) $\alpha a_n \rightarrow \alpha a$

(iv) $a_n b_n \rightarrow ab$

(v) ist $a \neq 0$, so ex. ein $m \in \mathbb{N}$:

$$a_n \neq 0 \forall n \geq m \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

- d) Es gelte $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ und $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$
- e) Es gelte $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dann $c_n \rightarrow a$.

Beispiele

- a) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $a_n := \frac{1}{n^p}$. Es ist $n \leq n^p \forall n \in \mathbb{N}$.
Dann: $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{2.2e)} a_n \rightarrow 0$, also $\frac{1}{n^p} \rightarrow 0$.
- b) $a_n := \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2} = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \rightarrow \frac{5}{4}$

Beweis (von 2.2)

- a) folgt aus der Definition der Konvergenz
- b) $\exists m \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \alpha_m \forall n \geq m$. Sei $\epsilon > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \alpha_n < \epsilon \forall n \geq n_1.$$

$$n_0 := \max\{m, n_1\}. \text{ Für } n \geq n_0: |a_n - a| \leq \alpha_n < \epsilon$$

- c) (i) $||a_n| - |a|| \leq_{§1} |a_n - a| \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow[a)]{b)} |a_n| \rightarrow |a|$
- (ii) Sei $\epsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}; |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq n_1, |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq n_2$
 $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Für $n \geq n_0$:

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(iii) Übung

- (iv) $c_k := |a_n b_n - ab|$. z. z.: $c_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{2.1b)} \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } c \geq |b|. \text{ Dann:}$$

$$c_n \leq c(|b_n - b| + |a_n - a|) =: \alpha_n \xrightarrow[c)(ii), c)(iii)]{a)} \alpha_n \rightarrow 0$$

$$\text{Also: } |c_n - 0| = c_n \leq \alpha_n \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha_n \rightarrow 0 \xrightarrow{b)} c_n \rightarrow 0.$$

- (v) $\epsilon := \frac{|a|}{2}$; (aus (i): $|a_n| \rightarrow |a| \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2} > 0 \forall n \geq m \Rightarrow a_n \neq 0 \forall n \geq m.$$

□

Stichwortverzeichnis

abzählbar, 11

Axiome

Anordnungs-, 4

Körper-, 3

Vollständigkeits-, 6

Bernoullische Ungleichung, 9

beschränkt, 6

Folge, 12

Menge, 5

Betrag, 4

Binomialkoeffizient, 9

Binomischer Satz, 9

divergent, 13

für fast alle, 13

Fakultäten, 9

Folge, 11

reelle, 11

ganze Zahlen, 8

Grenzwert, 13

Induktionsmenge, 7

Infimum, 5

Intervalle, 4

konvergent, 13

Limes, 13

Natürliche Zahlen, 7

rationale Zahlen, 8

Schranke, 5

Supremum, 5

überabzählbar, 11

Umgebung, 13

vollständige Induktion, 7

Wurzel, 10