

# Höhere Mathematik I

G. Herzog, Ch. Schmoeger

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

# Inhaltsverzeichnis

1	Reelle Zahlen	2
2	Folgen und Konvergenz	12
3	Unendliche Reihen	31
4	Potenzreihen	45
5	q-adische Entwicklung	49
6	Grenzwerte bei Funktionen	53
7	Stetigkeit	59
8	Funktionenfolgen und -reihen	70
9	Differentialrechnung	76
10	Das Riemann-Integral	91
11	Uneigentliche Integrale	106
12	Die komplexe Exponentialfunktion	111
13	Fourierreihen	118
14	Der Raum $\mathbb{R}^n$	124

# Kapitel 1

## Reelle Zahlen

Die Grundmenge der Analysis ist die Menge  $\mathbb{R}$ , die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen  $\mathbb{R}$  als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von  $\mathbb{R}$  aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.

**Körperaxiome:** In  $\mathbb{R}$  sind zwei Verknüpfungen “+“ und “ $\cdot$ “ gegeben, die jedem Paar  $a, b \in \mathbb{R}$  genau ein  $a + b \in \mathbb{R}$  und genau ein  $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$  zuordnen. Dabei gilt:

$$(A1) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c \text{ (Assoziativgesetz für “+“)}$$

$$(A5) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ (Assoziativgesetz für “ $\cdot$ “)}$$

$$(A2) \quad \exists 0 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a \text{ (Existenz einer Null)}$$

$$(A6) \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \text{ und } 1 \neq 0 \text{ (Existenz einer Eins)}$$

$$(A3) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0 \text{ (Inverse bzgl. “+“)}$$

$$(A7) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1 \text{ (Inverse bzgl. “ $\cdot$ “)}$$

$$(A4) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \text{ (Kommutativgesetz für “+“)}$$

$$(A8) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a \text{ (Kommutativgesetz für “ $\cdot$ “)}$$

$$(A9) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ (Distributivgesetz)}$$

**Schreibweisen:** Für  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a - b := a + (-b)$  und für  $b \neq 0$ :  $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$ .

**Alle** bekannten Regeln der Grundrechenarten lassen sich aus (A1) – (A9) herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

**Beispiele:**

a) Behauptung:  $\exists_1 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ .

*Beweis:* Sei  $\tilde{0} \in \mathbb{R}$  und es gelte  $\forall a \in \mathbb{R} : a + \tilde{0} = a$ . Mit  $a = 0$  folgt:  $0 + \tilde{0} = 0$ . Mit  $a = \tilde{0}$  in (A2) folgt:  $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ . Damit ist  $0 = 0 + \tilde{0} \stackrel{(A4)}{=} \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ .  $\square$

b) Behauptung:  $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 0 = 0$ .

*Beweis:* Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $b := a \cdot 0$ . Es gilt  $b \stackrel{(A2)}{=} a \cdot (0 + 0) \stackrel{(A9)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b + b$ , und damit  $0 \stackrel{(A3)}{=} b + (-b) = (b + b) + (-b) \stackrel{(A1)}{=} b + (b + (-b)) = b + 0 \stackrel{(A2)}{=} b$ .  $\square$

**Anordnungsaxiome:** In  $\mathbb{R}$  ist eine Relation “ $\leq$ ” gegeben. Für diese gilt:

$$(A10) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ oder } b \leq a$$

$$(A11) \quad a \leq b \text{ und } b \leq a \Rightarrow a = b$$

$$(A12) \quad a \leq b \text{ und } b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$(A13) \quad a \leq b \text{ und } c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$(A14) \quad a \leq b \text{ und } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$$

**Schreibweisen:**  $b \geq a : \iff a \leq b$ ;  $a < b : \iff a \leq b \text{ und } a \neq b$ ;  $b > a : \iff a < b$ .

Aus (A1) – (A14) lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

**Beispiele (Übung):**

$$\text{a) } a < b \text{ und } 0 < c \Rightarrow ac < bc$$

$$\text{b) } a \leq b \text{ und } c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$$

$$\text{c) } a \leq b \text{ und } c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$$

**Intervalle:** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$ . Wir setzen:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ (abgeschlossenes Intervall)}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ (offenes Intervall)}$$

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  (halboffenes Intervall)

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  (halboffenes Intervall)

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ ,  $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ,  $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

## Der Betrag

Für  $a \in \mathbb{R}$  heißt  $|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$  der **Betrag** von  $a$ . Für  $a, b \in \mathbb{R}$  heißt die Zahl  $|a - b|$  der **Abstand** von  $a$  und  $b$ .

**Beispiele:**  $|1| = 1$ ,  $|-7| = -(-7) = 7$ .

**Regeln:** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

a)  $|-a| = |a|$  und  $|a - b| = |b - a|$

b)  $|a| \geq 0$

c)  $|a| = 0 \iff a = 0$

d)  $|ab| = |a||b|$

e)  $\pm a \leq |a|$

f)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)

g)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$

*Beweis:*

a) - e) leichte Übung.

f) Fall 1:  $a + b \geq 0$ . Dann gilt:  $|a + b| = a + b \stackrel{e)}{\leq} |a| + |b|$ .

Fall 2:  $a + b < 0$ . Dann gilt:  $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \stackrel{e)}{\leq} |a| + |b|$ .

g) Es sei  $c := |a| - |b|$ . Es gilt

$$|a| = |a - b + b| \stackrel{f)}{\leq} |a - b| + |b| \Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Analog zeigt man

$$-c = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

Also gilt  $\pm c \leq |a - b| \Rightarrow |c| \leq |a - b|$ .

□

**Definition:** Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .

a)  $M$  heißt **nach oben beschränkt** :  $\Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq \gamma$ .

In diesem Fall heißt  $\gamma$  eine **obere Schranke** (OS) von  $M$ .

b) Ist  $\gamma$  eine obere Schranke von  $M$  und gilt  $\gamma \leq \delta$  für jede weitere obere Schranke  $\delta$  von  $M$ , so heißt  $\gamma$  das **Supremum** (oder **die kleinste obere Schranke**) von  $M$ .

c)  $M$  heißt **nach unten beschränkt** :  $\Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall x \in M : \gamma \leq x$ .

In diesem Fall heißt  $\gamma$  eine **untere Schranke** (US) von  $M$ .

d) Ist  $\gamma$  eine untere Schranke von  $M$  und gilt  $\gamma \geq \delta$  für jede weitere untere Schranke  $\delta$  von  $M$ , so heißt  $\gamma$  das **Infimum** (oder **die größte untere Schranke**) von  $M$ .

**Bezeichnung in diesem Fall:**  $\gamma = \sup M$  bzw.  $\gamma = \inf M$ .

Aus (A11) folgt: Ist  $\sup M$  bzw.  $\inf M$  vorhanden, so ist  $\sup M$  bzw.  $\inf M$  eindeutig bestimmt.

Ist  $\sup M$  bzw.  $\inf M$  vorhanden und gilt  $\sup M \in M$  bzw.  $\inf M \in M$ , so heißt  $\sup M$  das **Maximum** bzw.  $\inf M$  das **Minimum** von  $M$  und wird mit  $\max M$  bzw.  $\min M$  bezeichnet.

**Beispiele:**

a)  $M = (1, 2)$ .  $\sup M = 2 \notin M$ ,  $\inf M = 1 \notin M$ .  $M$  hat kein Maximum und kein Minimum.

b)  $M = (1, 2]$ .  $\sup M = 2 \in M$ ,  $\max M = 2$ .

- c)  $M = (3, \infty)$ .  $M$  ist nicht nach oben beschränkt,  $3 = \inf M \notin M$ .
- d)  $M = (-\infty, 0]$ .  $M$  ist nach unten unbeschränkt,  $0 = \sup M = \max M$ .
- e)  $M = \emptyset$ . Jedes  $\gamma \in \mathbb{R}$  ist eine obere Schranke und eine untere Schranke von  $M$ .

**Vollständigkeitsaxiom:**

(A15) Ist  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  und ist  $M$  nach oben beschränkt, so ist  $\sup M$  vorhanden.

**Satz 1.1:** Ist  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  und ist  $M$  nach unten beschränkt, so ist  $\inf M$  vorhanden.

*Beweis:* In den Übungen. □

**Definition:** Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .  $M$  heißt beschränkt :  $\iff M$  ist nach oben und nach unten beschränkt. Äquivalent ist:

$$\exists c \geq 0 \forall x \in M : |x| \leq c.$$

**Satz 1.2:** Es sei  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ .

- a) Ist  $A$  beschränkt, so ist  $\inf A \leq \sup A$ .
- b) Ist  $A$  nach oben bzw. unten beschränkt, so ist  $B$  nach oben beschränkt und  $\sup B \leq \sup A$  bzw. nach unten beschränkt und  $\inf B \geq \inf A$ .
- c)  $A$  sei nach oben beschränkt und  $\gamma$  eine obere Schranke von  $A$ . Dann gilt:

$$\gamma = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x = x(\varepsilon) \in A : x > \gamma - \varepsilon$$

- d)  $A$  sei nach unten beschränkt und  $\gamma$  eine untere Schranke von  $A$ . Dann gilt:

$$\gamma = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x = x(\varepsilon) \in A : x < \gamma + \varepsilon$$

*Beweis:*

- a)  $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$ . Es gilt:  $\inf A \leq x$  und  $x \leq \sup A \Rightarrow \inf A \leq \sup A$ .
- b) Es sei  $x \in B$ . Dann:  $x \in A$ , also  $x \leq \sup A$ . Also ist  $B$  oben beschränkt und  $\sup A$  ist eine obere Schranke von  $B$ . Somit ist  $\sup B \leq \sup A$ . Analog falls  $A$  nach unten beschränkt ist.

c) “ $\Rightarrow$ ”: Es sei  $\gamma := \sup A$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $\gamma - \varepsilon < \gamma$ . Also ist  $\gamma - \varepsilon$  keine obere Schranke von  $A$ . Es folgt:  $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Es sei  $\tilde{\gamma} := \sup A$ . Dann ist  $\tilde{\gamma} \leq \gamma$ . Annahme:  $\gamma \neq \tilde{\gamma}$ . Dann ist  $\tilde{\gamma} < \gamma$ , also  $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$ . Nach Voraussetzung gilt:  $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$ . Widerspruch zu  $x \leq \tilde{\gamma}$ .

d) Analog zu c).

□

## Natürliche Zahlen

### Definition:

a) Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$  heißt **Induktionsmenge** (IM)

$$: \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & 1 \in A; \\ (ii) & \text{aus } x \in A \text{ folgt stets } x + 1 \in A. \end{cases}$$

Beispiele:  $\mathbb{R}$ ,  $[1, \infty)$ ,  $\{1\} \cup [2, \infty)$  sind Induktionsmengen.

b)  $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ gehört zu jeder IM}\} = \text{Durchschnitt aller Induktionsmengen.}$

Also:  $\mathbb{N} \subseteq A$  für jede Induktionsmenge  $A$ .

Beispiele:  $1, 2, 3, 4, 17 \in \mathbb{N}$ ;  $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$ .

### Satz 1.3:

a)  $\mathbb{N}$  ist eine Induktionsmenge.

b)  $\mathbb{N}$  ist nicht nach oben beschränkt.

c) Ist  $x \in \mathbb{R}$ , so existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > x$ .

Beweis:

a) Es gilt  $1 \in A$  für jede IM  $A$ , also  $1 \in \mathbb{N}$ . Sei  $x \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $x \in A$  für jede IM  $A$ , somit  $x + 1 \in A$  für jede IM  $A$ . Also gilt  $x + 1 \in \mathbb{N}$ .



- b) Annahme:  $\mathbb{N}$  ist beschränkt. Nach (A15) existiert  $s := \sup \mathbb{N}$ . Mit 1.2 folgt:  
 $\exists n \in \mathbb{N} : n > s - 1$ . Nun ist  $n + 1 > s$ . Wegen  $n + 1 \in \mathbb{N}$  ist aber  $n + 1 \leq s$ , ein Widerspruch.
- c) Folgt aus 1.3 b).

□

**Satz 1.4** (Prinzip der vollständigen Induktion):

Ist  $A \subseteq \mathbb{N}$  und ist  $A$  eine Induktionsmenge, so ist  $A = \mathbb{N}$ .

*Beweis:* Es gilt  $A \subseteq \mathbb{N}$  (nach Voraussetzung) und  $\mathbb{N} \subseteq A$  (nach Definition), also ist  $A = \mathbb{N}$ . □

## Beweisverfahren durch vollständige Induktion

Es sei  $A(n)$  eine Aussage, die für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definiert ist. Für  $A(n)$  gelte:

$$\begin{cases} (i) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (ii) & \text{ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch } A(n+1) \text{ wahr.} \end{cases}$$

Dann ist  $A(n)$  wahr für **jedes**  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis:* Sei  $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$ . Dann ist  $A \subseteq \mathbb{N}$  und wegen (i), (ii) ist  $A$  eine Induktionsmenge. Nach 1.4 ist  $A = \mathbb{N}$ . □

**Beispiel:** Behauptung:  $\forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{A(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$ .

*Beweis:* (induktiv)

Induktionsanfang (I.A.): Es gilt  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ,  $A(1)$  ist also wahr.

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Für ein  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A(n)$  wahr, es gelte also

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsschluß ( $n \rightsquigarrow n+1$ ): Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &\stackrel{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Also ist  $A(n+1)$  wahr. □

**Definition:** Wir setzen:

a)  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

b)  $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$  (Menge der ganzen Zahlen).

c)  $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$  (Menge der rationalen Zahlen).

**Satz 1.5:** Sind  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x < y$ , so gilt:  $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$ .

*Beweis:* In den Übungen. □

## Einige Definitionen und Formeln

a) **Ganzzahlige Potenzen.**

Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N} : a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, a^0 := 1$ .

Für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N} : a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ .

Es gelten die bekannten Rechenregeln.

b) **Fakultäten.**

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad 0! := 1.$$

c) **Binomialkoeffizienten.** Für  $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$  und  $k \leq n$ :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Es gilt (nachrechnen):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

d) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a - b) (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k}b^k = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}. \end{aligned}$$

e) **Binomischer Satz.** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

*Beweis:* In den Übungen. □

f) **Bernoullische Ungleichung.** Es sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $x \geq -1$ . Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

*Beweis:* (induktiv)

I.A.:  $n = 1$ :  $1 + x \geq 1 + x$  ist wahr.

I.V.: Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gelte  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

I.S.:  $n \leadsto n + 1$ : Wegen  $1 + x \geq 0$  folgt aus der I.V.:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &\geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + nx + x = 1 + (n + 1)x. \end{aligned}$$

□

**Hilfssatz 1.6:** Für  $x, y \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $x \leq y \iff x^n \leq y^n$ .

*Beweis:* In den Übungen. □

**Satz 1.7:** Es sei  $a \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es genau ein  $x \geq 0$  mit  $x^n = a$ .

Dieses  $x$  heißt **die  $n$ -te Wurzel aus  $a$** . Bezeichnung:  $x = \sqrt[n]{a}$  ( $\sqrt[n]{a} =: \sqrt[n]{a}$ ,  $\sqrt[n]{a} = a$ ).

*Beweis:* Existenz: Später in §7. Eindeutigkeit: Es seien  $x, y \geq 0$  und  $x^n = a = y^n$ . Mit 1.6 folgt  $x = y$ . □

### Bemerkungen:

- a) Bekannt (Schule):  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .
- b) Für  $a \geq 0$  ist  $\sqrt[n]{a} \geq 0$ . Bsp.:  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{4} \neq -2$ . Die Gleichung  $x^2 = 4$  hat zwei Lösungen:  $x = 2$  und  $x = -2$ .
- c)

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|.$$

### Rationale Exponenten

- a) Es sei zunächst  $a \geq 0$  und  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r > 0$ . Dann existieren  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $r = \frac{m}{n}$ . Wir wollen definieren:

$$(*) \quad a^r := \left( \sqrt[n]{a} \right)^m.$$

Problem: Gilt auch noch  $r = \frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$ , gilt dann  $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$ ?

Antwort: Ja (d.h. obige Definition  $(*)$  ist sinnvoll).

*Beweis:* Setze  $x := (\sqrt[n]{a})^m$ ,  $y := (\sqrt[q]{a})^p$ . Dann gilt  $x, y \geq 0$  und  $mq = np$ , also

$$\begin{aligned} x^q &= \left( \sqrt[n]{a} \right)^{mq} = \left( \sqrt[n]{a} \right)^{np} = \left( \left( \sqrt[n]{a} \right)^n \right)^p = a^p \\ &= \left( \left( \sqrt[q]{a} \right)^q \right)^p = \left( \left( \sqrt[q]{a} \right)^p \right)^q = y^q. \end{aligned}$$

Mit 1.6 folgt  $x = y$ . □

- b) Es seien  $a > 0$ ,  $r \in \mathbb{Q}$  und  $r < 0$ . Wir definieren:

$$a^r := \frac{1}{a^{-r}}.$$

Es gelten die bekannten Rechenregeln:  $a^r a^s = a^{r+s}$ ,  $(a^r)^s = a^{rs}$ .

# Kapitel 2

## Folgen und Konvergenz

**Definition:** Es sei  $X$  eine Menge,  $X \neq \emptyset$ . Eine Funktion  $a: \mathbb{N} \rightarrow X$  heißt eine **Folge** in  $X$ . Ist  $X = \mathbb{R}$ , so heißt  $a$  eine **reelle Folge**.

**Schreibweisen:**  $a_n$  statt  $a(n)$  ( $n$ -tes Folgenglied)  
 $(a_n)$  oder  $(a_n)_{n=1}^\infty$  oder  $(a_1, a_2, \dots)$  statt  $a$ .

**Beispiele:**

a)  $a_n := \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), also  $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ .

b)  $a_{2n} := 0, a_{2n-1} := 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), also  $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ .

**Bemerkung:** Ist  $p \in \mathbb{Z}$  und  $a: \{p, p+1, p+2, \dots\} \rightarrow X$  eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in  $X$ . Bezeichnung:  $(a_n)_{n=p}^\infty$ . Meistens ist  $p = 0$  oder  $p = 1$ .

**Definition:** Es sei  $X$  eine Menge,  $X \neq \emptyset$ .

a)  $X$  heißt **abzählbar** :  $\iff$  Es gibt eine Folge  $(a_n)$  in  $X$  mit  $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ .

b)  $X$  heißt **überabzählbar** :  $\iff X$  ist nicht abzählbar.

**Beispiele:**

a) Ist  $X$  endlich, so ist  $X$  abzählbar.

b)  $\mathbb{N}$  ist abzählbar, denn  $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  mit  $a_n := n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

c)  $\mathbb{Z}$  ist abzählbar, denn  $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  mit

$$a_1 := 0, a_2 := 1, a_3 := -1, a_4 := 2, a_5 := -2, \dots$$

also

$$a_1 := 0, \quad a_{2n} := n, \quad a_{2n+1} := -n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

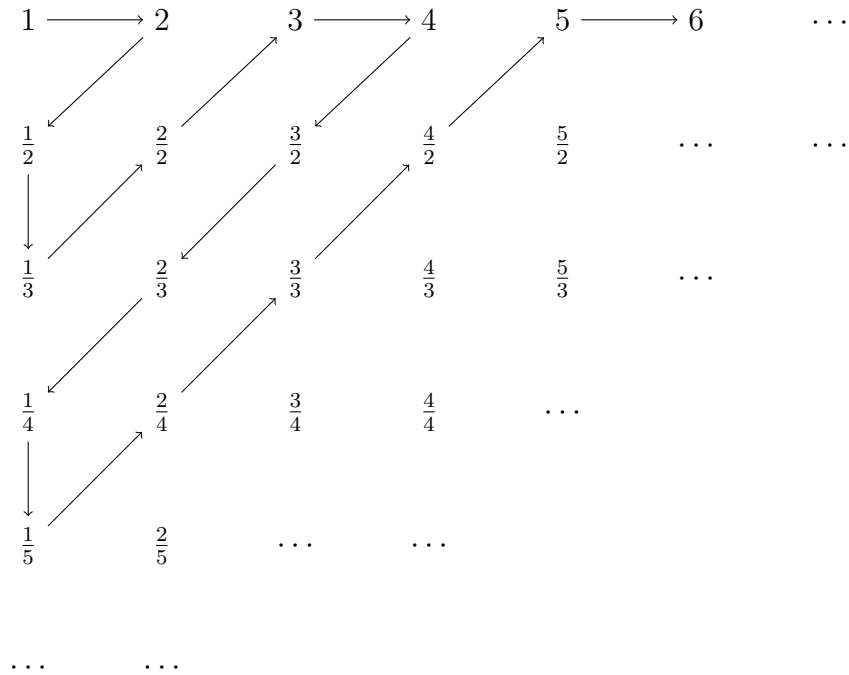


Abbildung 2.1: Zum Beweis der Abzählbarkeit von  $\mathbb{Q}$ .

d)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.

Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert:

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Setze  $b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt:

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}.$$

e)  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar (Beweis in §5).

**Vereinbarung:** Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in  $\mathbb{R}$ . Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form  $(a_n)_{n=1}^\infty$ . Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form  $(a_n)_{n=p}^\infty$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ).

**Definition:** Es sei  $(a_n)$  eine Folge und  $M := \{a_1, a_2, \dots\}$ .

a)  $(a_n)$  heißt **nach oben beschränkt** :  $\iff M$  ist nach oben beschränkt.

In diesem Fall:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup M.$$

b)  $(a_n)$  heißt **nach unten beschränkt** :  $\iff M$  ist nach unten beschränkt.

In diesem Fall:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf M.$$

c)  $(a_n)$  heißt **beschränkt** :  $\iff M$  ist beschränkt. Äquivalent ist:

$$\exists c \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$$

**Definition:** Es sei  $A(n)$  eine für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definierte Aussage.

$A(n)$  gilt **für fast alle** (ffa)  $n \in \mathbb{N} : \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : A(n)$  ist wahr.

**Definition:** Es sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ . Das Intervall

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

heißt  **$\varepsilon$ -Umgebung von  $a$** .

**Definition:** Eine Folge  $(a_n)$  heißt **konvergent**

$$: \iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ so,} \\ \text{daß für jedes } n \geq n_0 \text{ gilt : } |a_n - a| < \varepsilon. \end{cases}$$

In diesem Fall heißt  $a$  **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von  $(a_n)$  und man schreibt

$$a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \text{ oder } a_n \rightarrow a \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Ist  $(a_n)$  nicht konvergent, so heißt  $(a_n)$  **divergent**. Beachte:

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \in U_\varepsilon(a) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

**Satz 2.1:** Es sei  $(a_n)$  konvergent und  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Dann gilt:

a) Gilt auch noch  $a_n \rightarrow b$ , so ist  $a = b$ .

b)  $(a_n)$  ist beschränkt.

*Beweis:*

a) Annahme  $a \neq b$ . Dann ist  $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$ . Nun gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \text{ und } \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 : |a_n - b| < \varepsilon.$$

Es sei  $N := \max\{n_0, n_1\}$ . Dann gilt:

$$2\varepsilon = |a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\varepsilon.$$

Widerspruch. Also ist  $a = b$ .

b) Es sei  $\varepsilon = 1$ . Es gilt:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1$ . Damit folgt:

$$\forall n \geq n_0 : |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

Setze  $c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$ . Dann:  $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$ .

□

**Beispiele:**

a) Es sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $a_n := c$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - c| = 0.$$

Also:  $a_n \rightarrow c$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

b)  $a_n := \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Behauptung:  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

*Beweis:* Es sei  $\varepsilon > 0$ . Es gilt:  $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Mit 1.3 c) erhalten wir:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Für  $n \geq n_0$  ist damit  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , also  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Somit ist  $|a_n - 0| < \varepsilon$  ( $n \geq n_0$ ).

□



- c)  $a_n := (-1)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es gilt  $|a_n| = 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), also ist  $(a_n)$  beschränkt.  
Behauptung:  $(a_n)$  ist divergent.

*Beweis:* Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n| |1 - (-1)| = 2.$$

Annahme:  $(a_n)$  konvergiert. Definiere  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Es gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \frac{1}{2}.$$

Für  $n \geq n_0$  folgt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ein Widerspruch. □

- d)  $a_n := n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).  $(a_n)$  ist nicht beschränkt. Nach 2.1 b) ist  $(a_n)$  also divergent.  
e)  $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Behauptung:  $a_n \rightarrow 0$ .

*Beweis:* Es sei  $\varepsilon > 0$ . Es gilt:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Mit 1.3 c) erhalten wir:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Für  $n \geq n_0$  gilt damit:  $n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ , also  $|a_n - 0| < \varepsilon$ . □

- f)  $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Behauptung:  $a_n \rightarrow 0$ .

*Beweis:* Es gilt

$$0 \leq a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also  $|a_n - 0| = a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon, \text{ somit gilt } \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Also gilt:  $a_n \rightarrow 0$ . □

**Definition:** Es seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Folgen und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n); \quad \alpha(a_n) := (\alpha a_n); \quad (a_n)(b_n) := (a_n b_n).$$

Gilt  $b_n \neq 0$  ( $n \geq m$ ), so ist die Folge  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$  definiert.

**Satz 2.2:** Es seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  und  $(\alpha_n)$  Folgen und  $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- a)  $a_n \rightarrow a \iff |a_n - a| \rightarrow 0$ .
- b) Gilt  $|a_n - a| \leq \alpha_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und  $\alpha_n \rightarrow 0$ , so gilt  $a_n \rightarrow a$ .
- c) Es gelte  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Dann gilt:
  - (i)  $|a_n| \rightarrow |a|$ ;
  - (ii)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ ;
  - (iii)  $\alpha a_n \rightarrow \alpha a$ ;
  - (iv)  $a_n b_n \rightarrow ab$ ;
  - (v) ist  $a \neq 0$ , so existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit:

$$a_n \neq 0 \quad (n \geq m) \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}.$$

- d) Es gelte  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  und  $a_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $a \leq b$ .
- e) Es gelte  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow a$  und  $a_n \leq c_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $c_n \rightarrow a$ .

**Beispiele:**

- a) Es sei  $p \in \mathbb{N}$  und  $a_n := \frac{1}{n^p}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es gilt  $n \leq n^p$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Also:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \xrightarrow{2.2 \text{ e)}} a_n \rightarrow 0.$$

- b) Es sei  $a_n := \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es gilt:  $a_n = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{2.2} \frac{5}{4}$ .

*Beweis:* (von 2.2)

- a) Folgt aus der Definition der Konvergenz.

b) Es gilt:  $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : |a_n - a| \leq \alpha_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen  $\alpha_n \rightarrow 0$  gilt:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 : \alpha_n < \varepsilon.$$

Setze  $n_0 := \max\{m, n_1\}$ . Für  $n \geq n_0$  gilt nun:  $|a_n - a| \leq \alpha_n < \varepsilon$ .

c) (i)  $\forall n \in \mathbb{N} : ||a_n| - |a|| \stackrel{\S 1}{\leq} |a_n - a| \xrightarrow{a), b)} |a_n| \rightarrow |a|.$

(ii) Es sei  $\varepsilon > 0$ . Es gilt:  $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  mit

$$\forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setze  $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ . Für  $n \geq n_0$  erhalten wir:

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iii) Übung.

(iv) Es sei  $c_n := |a_n b_n - ab|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Wir zeigen:  $c_n \rightarrow 0$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|. \end{aligned}$$

Mit 2.1 b) folgt:  $\exists c \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$ . Damit erhalten wir:

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_n \leq c|b_n - b| + |b||a_n - a| =: \alpha_n.$$

Mit c) (ii), c) (iii) und a) folgt:  $\alpha_n \rightarrow 0$ .

Also:  $|c_n - 0| = c_n \leq \alpha_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Mit b) folgt nun  $c_n \rightarrow 0$ .

(v) Setze  $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$ . Aus (i) folgt:  $|a_n| \rightarrow |a|$ . Damit gilt:

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : |a_n| \in U_\varepsilon(|a|) = (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon) = \left(\frac{|a|}{2}, \frac{3}{2}|a|\right).$$

Insbesondere ist  $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$  ( $n \geq m$ ), also  $a_n \neq 0$  ( $n \geq m$ ). Für  $n \geq m$  gilt nun:

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} =: \alpha_n.$$

Es gilt  $\alpha_n \rightarrow 0$ . Mit b) folgt  $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$ .

d) Annahme:  $b < a$ . Setze  $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$ . Dann gilt:

$$\forall x \in U_\varepsilon(b) \forall y \in U_\varepsilon(a) : x < y.$$

Weiter gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : b_n \in U_\varepsilon(b),$$

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : a_n \leq b_n.$$

Setze  $m_0 := \max\{n_0, m\}$ . Für  $n \geq m_0$  ist  $a_n \leq b_n < b + \varepsilon$ , also  $a_n \notin U_\varepsilon(a)$ . Widerspruch.

e) Es gilt:  $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m : a_n \leq c_n \leq b_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Es existieren  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  mit:

$$\forall n \geq n_1 : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

$$\forall n \geq n_2 : a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon.$$

Setze  $n_0 := \max\{n_1, n_2, m\}$ . Für  $n \geq n_0$  gilt nun:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon.$$

Also:  $|a_n - a| < \varepsilon$  ( $n \geq n_0$ ).

□

### Definition:

a)  $(a_n)$  heißt **monoton wachsend** :  $\iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$ .

b)  $(a_n)$  heißt **streng monoton wachsend** :  $\iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$ .

c) Entsprechend definiert man **monoton fallend** und **streng monoton fallend**.

d)  $(a_n)$  heißt **[streng] monoton** :  $\iff (a_n)$  ist [streng] monoton wachsend oder [streng] monoton fallend.

### Satz 2.3 (Monotoniekriterium):

a) Die Folge  $(a_n)$  sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist  $(a_n)$  konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

b) Die Folge  $(a_n)$  sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist  $(a_n)$  konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

*Beweis:*

a) Setze  $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $a - \varepsilon$  keine obere Schranke von  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Also existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_{n_0} > a - \varepsilon$ . Für  $n \geq n_0$  gilt:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon,$$

$$\text{also } |a_n - a| < \varepsilon \quad (n \geq n_0).$$

b) Zeigt man analog.

□

**Beispiel:**  $a_1 := \sqrt[3]{6}$ ,  $a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n}$  ( $n \geq 1$ ).

Behauptung:  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_n < 2$  und  $a_{n+1} > a_n$ .

*Beweis:* (induktiv)

I.A.:  $n = 1$ .

$$0 < a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} > \sqrt[3]{6} = a_1.$$

I.V.: Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 < a_n < 2$  und  $a_{n+1} > a_n$ .

I.S.  $n \rightsquigarrow n + 1$ : Es gilt  $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} >_{I.V.} 0$ . Weiter ist

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} <_{I.V.} \sqrt[3]{6 + 2} = 2; \quad a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} >_{I.V.} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}.$$

□

Also ist  $(a_n)$  nach oben beschränkt und monoton wachsend. Nach 2.3 ist  $(a_n)$  konvergent. Setze  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Es gilt  $a_n \geq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), also  $a \geq 0$ . Weiter ist

$$a_{n+1}^3 = 6 + a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mit 2.2 folgt  $a^3 = 6 + a \Rightarrow 0 = a^3 - a - 6 = (a - 2) \underbrace{(a^2 + 2a + 3)}_{\geq 3}$ . Also ist  $a = 2$ .

**Wichtige Beispiele:**

Vorbemerkung: Es seien  $x, y \geq 0$  und  $p \in \mathbb{N}$ : Es ist (vgl. §1)

$$x^p - y^p = (x - y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x - y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x - y|.$$

**Beispiel 2.4:** Es sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge in  $[0, \infty)$  mit Grenzwert  $a$  (bea.  $a \geq 0$ ) und  $p \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a}$ .

*Beweis:*

Fall 1:  $a = 0$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : 0 \leq a_n < \varepsilon^p$ . Daraus folgt:

$$\forall n \geq n_0 : 0 \leq \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon.$$

Also gilt:  $\sqrt[p]{a_n} \rightarrow 0 = \sqrt[p]{a}$ .

Fall 2:  $a \neq 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - (\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y})^p| = |x^p - y^p| \\ &\geq_{s.o.} \underbrace{y^{p-1}}_{:=c} |x - y| = c |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}|, \quad c > 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{1}{c} |a_n - a| =: \alpha_n. \text{ Es gilt } \alpha_n \rightarrow 0, \text{ also } \sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a}. \quad \square$$

**Beispiel 2.5:** Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $(x^n)$  ist konvergent  $\iff x \in (-1, 1]$ . In diesem Fall:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

*Beweis:*

Fall 1:  $x = 0$ . Dann gilt  $x^n \rightarrow 0$ . Fall 2:  $x = 1$ . Dann gilt  $x^n \rightarrow 1$ .

Fall 3:  $x = -1$ . Dann ist  $(x^n) = ((-1)^n)$  divergent.

Fall 4:  $|x| > 1$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $|x| = 1 + \delta$ . Damit gilt:

$$|x^n| = |x|^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist  $(x^n)$  nicht beschränkt und somit divergent.

Fall 5:  $0 < |x| < 1$ . Dann ist  $\frac{1}{|x|} > 1$  und es gibt ein  $\eta > 0$  mit  $\frac{1}{|x|} = 1 + \eta$ . Damit gilt:

$$\left| \frac{1}{x^n} \right| = \left( \frac{1}{|x|} \right)^n = (1 + \eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist

$$|x^n| \leq \frac{1}{n\eta} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Damit folgt  $x^n \rightarrow 0$ . □

**Beispiel 2.6:** Es sei  $x \in \mathbb{R}$  und

$$s_n := 1 + x + x^n + \dots x^n = \sum_{k=0}^n x^k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Fall 1:  $x = 1$ . Dann ist  $s_n = n + 1$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ),  $(s_n)$  ist also divergent.

Fall 2:  $x \neq 1$ . Dann ist

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Aus 2.5 folgt:

$$(s_n) \text{ ist konvergent} \iff |x| < 1.$$

In diesem Fall gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-x}$ .

**Beispiel 2.7:** Behauptung: Es gilt  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ .

*Beweis:* Es ist  $\sqrt[n]{n} \geq 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), also  $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Wir zeigen:  $a_n \rightarrow 0$ .

Für jedes  $n \geq 2$  gilt:

$$n = \left( \sqrt[n]{n} \right)^n = (a_n + 1)^n \stackrel{\S 1}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Es folgt

$$\forall n \geq 2 : 0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

Wegen  $\sqrt{2}/\sqrt{n-1} \rightarrow 0$  folgt  $a_n \rightarrow 0$ . □

**Beispiel 2.8:** Es sei  $c > 0$ . Behauptung: Es gilt  $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$ .

*Beweis:* Fall 1:  $c \geq 1$ . Dann gilt:  $\exists m \in \mathbb{N} : 1 \leq c \leq m$ . Daraus folgt:

$$1 \leq c \leq n \ (n \geq m) \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n} \ (n \geq m).$$

Mit 2.7 folgt die Behauptung.

Fall 2:  $0 < c < 1$ . Dann ist  $\frac{1}{c} > 1$ . Also gilt

$$\sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \xrightarrow{\text{Fall 1}} 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

**Beispiel 2.9:** Es sei

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Behauptung:  $(a_n)$  und  $(b_n)$  sind konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

*Beweis:* In der großen Übungen wird gezeigt:  $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \leq a_n < a_{n+1} < 3$ . Nach 2.3 ist  $(a_n)$  also konvergent;  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Weiter ist  $b_n > 0$  und  $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n \ (n \in \mathbb{N})$ . Also ist  $(b_n)$  monoton wachsend.

Für jedes  $n > 3$  gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{< (\frac{1}{2})^2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{< (\frac{1}{2})^3} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \dots \cdot n}}_{< (\frac{1}{2})^{n-1}} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Nach 2.3 ist  $(b_n)$  konvergent;  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .



Weiter gilt für jedes  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\S 1}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{<1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{<1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{<1} \\
&\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = b_n.
\end{aligned}$$

Also gilt  $a_n \leq b_n$  ( $n \geq 2$ ) und damit folgt  $a \leq b$ .

Weiter sei  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j \geq 2$  (zunächst fest). Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq j$  gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &\stackrel{s.o.}{=} 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
&\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \\
&\rightarrow 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Also gilt  $a \geq b_j$  für jedes  $j \geq 2$ . Wegen  $b_j \rightarrow b$  ( $j \rightarrow \infty$ ) folgt  $a \geq b$ . □

**Definition:** Die gemeinsame Grenzwert der Folgen in 2.9

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

heißt **Eulersche Zahl**. ( $e \approx 2,718\dots$ ).

Übung: Es gilt:  $2 < e < 3$ .

**Definition:** Es sei  $(a_n)$  eine Folge und  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$  eine Folge in  $\mathbb{N}$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  setze

$$b_k := a_{n_k},$$

also  $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, b_3 = a_{n_3}, \dots$ .

Dann heißt  $(b_k) = (a_{n_k})$  eine **Teilfolge** (TF) von  $(a_n)$ .

### Beispiele:

- a)  $(a_2, a_4, a_6, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ ; hier:  $n_k = 2k$ .
- b)  $(a_1, a_4, a_9, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ ; hier:  $n_k = k^2$ .
- c)  $(a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, a_{14}, \dots)$  ist keine Teilfolge von  $(a_n)$ .

**Definition:** Es sei  $(a_n)$  eine Folge. Eine Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  heißt ein **Häufungswert** (HW) von  $(a_n)$ , wenn eine Teilfolge  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  existiert mit  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Weiter sei

$$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}.$$

**Satz 2.10:** Es gilt:

$$\alpha \in H(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0 : a_n \in U_\varepsilon(\alpha) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis:*

“ $\Rightarrow$ “: Es sei  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge mit  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$  und es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$  für  $k \geq k_0$ .

“ $\Leftarrow$ “: Es gilt:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in U_1(\alpha),$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha) \text{ und } n_2 > n_1,$$

$$\exists n_3 \in \mathbb{N} : a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha) \text{ und } n_3 > n_2, \text{ etc...}$$

So entsteht eine Teilfolge  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  mit  $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Also gilt:  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$ .  $\square$

### Beispiele:

- a)  $a_n = (-1)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es gilt:  $a_{2k} \rightarrow 1, a_{2k+1} \rightarrow -1$ , also  $1, -1 \in H(a_n)$ . Es sei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  so, daß  $1, -1 \notin U_\varepsilon(\alpha)$ . Dann gilt  $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für kein  $n \in \mathbb{N}$ . Nach 2.10 ist  $\alpha \notin H(a_n)$ . Fazit:  $H(a_n) = \{1, -1\}$ .
- b)  $a_n = n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Ist  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ , so gilt:  $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für höchstens endlich viele  $n$ , also  $\alpha \notin H(a_n)$ . Fazit:  $H(a_n) = \emptyset$ .
- c)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar. Es sei  $(a_n)$  eine Folge mit  $\mathbb{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Es sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ . Nach 1.5 enthält  $U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$  unendlich viele verschiedene rationale Zahlen. Nach 2.10 folgt  $\alpha \in H(a_n)$ . Fazit:  $H(a_n) = \mathbb{R}$ .

**Folgerung:** Ist  $x \in \mathbb{R}$ , so existieren Folgen  $(r_n)$  in  $\mathbb{Q}$  mit  $r_n \rightarrow x$ .

**Satz 2.11:** Die Folge  $(a_n)$  sei konvergent,  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ . Dann gilt:

$$a_{n_k} \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty).$$

Insbesondere gilt:  $H(a_n) = \{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\}$ .

*Beweis:* Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $a_n \in U_\varepsilon(a)$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , also auch  $a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$  ffa  $k \in \mathbb{N}$ . Somit gilt  $a_{n_k} \rightarrow a$ .  $\square$

**Definition:** Es sei  $(a_n)$  eine Folge und  $m \in \mathbb{N}$ .

$m$  heißt **niedrig** (für  $(a_n)$ ) :  $\iff \forall n \geq m : a_n \geq a_m$ .

**Bemerkung:** Es gilt also:

$m \in \mathbb{N}$  ist nicht niedrig  $\iff \exists n \geq m : a_n < a_m \Rightarrow \exists n > m : a_n < a_m$ .

**Hilfssatz 2.12:** Es sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann enthält  $(a_n)$  eine monotone Teilfolge.

*Beweis:*

Fall 1: Es existieren höchstens endlich viele niedrige Indizes. Also existiert  $n_1 \in \mathbb{N}$  so, daß jedes  $n \geq n_1$  nicht niedrig ist.

$$n_1 \text{ nicht niedrig} \Rightarrow \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} < a_{n_1},$$

$$n_2 \text{ nicht niedrig} \Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2},$$

etc...

Wir erhalten so eine streng monoton fallende Teilfolge  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$ .

Fall 2: Es existieren unendlich viele niedrige Indizes  $n_1, n_2, n_3 \dots$ ; o.B.d.A. sei

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

$$n_1 \text{ ist niedrig und } n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} \geq a_{n_1},$$

$$n_2 \text{ ist niedrig und } n_3 > n_2 \Rightarrow a_{n_3} \geq a_{n_2},$$

etc...

Wir erhalten so eine monoton wachsende Teilfolge  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$ .  $\square$

**Satz 2.13** (Bolzano-Weierstraß):

Die Folge  $(a_n)$  sei beschränkt. Dann gilt:  $H(a_n) \neq \emptyset$ , d.h.  $(a_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge.

*Beweis:* Es gilt:  $\exists c \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$ . Nach 2.12 enthält  $(a_n)$  eine monotone Teilfolge  $(a_{n_k})$ . Wegen  $|a_{n_k}| \leq c$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ist  $(a_{n_k})$  auch beschränkt.

Nach 2.3 ist  $(a_{n_k})$  konvergent. Damit ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in H(a_n)$ .  $\square$

**Satz 2.14:** Die Folge  $(a_n)$  sei beschränkt (nach 2.13 gilt damit  $H(a_n) \neq \emptyset$ ). Es gilt:

a)  $H(a_n)$  ist beschränkt.

b)  $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$ ; es existieren also  $\max H(a_n)$  und  $\min H(a_n)$ .

*Beweis:*

a) Es gilt:  $\exists c \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$ . Es sei  $\alpha \in H(a_n)$ . Dann existiert eine Teilfolge  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  mit  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Es ist  $|a_{n_k}| \leq c$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), also  $|\alpha| \leq c$ . Somit gilt

$$\forall \alpha \in H(a_n) : |\alpha| \leq c.$$

b) ohne Beweis.  $\square$

**Definition:** Die Folge  $(a_n)$  sei beschränkt.

a) Die Zahl

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \max H(a_n)$$

heißt **Limes superior** oder **oberer Limes** von  $(a_n)$ .

b) Die Zahl

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \min H(a_n)$$

heißt **Limes inferior** oder **unterer Limes** von  $(a_n)$ .

**Satz 2.15:** Die Folge  $(a_n)$  sei beschränkt. Dann gilt:

- a)  $\forall \alpha \in H(a_n) : \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \alpha \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- b) Ist  $(a_n)$  konvergent, so ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- c)  $\forall \alpha \geq 0 : \limsup_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n) = \alpha \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- d)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Beweis:* a) ist klar, b) folgt aus 2.11, c) und d) Übung. □

**Vorbemerkung:** Die Folge  $(a_n)$  sei konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für  $n, m \geq n_0$  gilt damit:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Folge  $(a_n)$  hat also die folgende Eigenschaft:

$$(c) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Äquivalent ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

**Definition:** Eine Folge  $(a_n)$  heißt eine **Cauchyfolge** (CF)

$$: \iff (a_n) \text{ hat die Eigenschaft (c).}$$

Konvergente Folgen sind also Cauchyfolgen!

**Satz 2.16** (Cauchy Kriterium):  $(a_n)$  ist konvergent  $\iff (a_n)$  ist eine Cauchyfolge.

*Beweis:* “ $\Rightarrow$ ”: wurde in obiger Vorbemerkung bewiesen.

“ $\Leftarrow$ ”: Es gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < 1.$$

Für  $n \geq N$  ist somit

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| =: c.$$

Also gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \max\{c, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|\}.$$

Damit ist  $(a_n)$  beschränkt und nach 2.13 hat  $(a_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})$ . Es sei  $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ .

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

und

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } n_{k_0} \geq n_0.$$

Für jedes  $n \geq n_0$  gilt nun

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also gilt  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ). □

**Beispiel:**  $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Mit Induktion folgt  $0 < a_n \leq 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und damit  $a_n \geq \frac{1}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Für  $n \geq 2$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt daher:

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &= \left| \frac{1}{1+a_{n+k-1}} - \frac{1}{1+a_{n-1}} \right| = \frac{|a_{n-1} - a_{n+k-1}|}{(1+a_{n+k-1})(1+a_{n-1})} \\ &\leq \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| = \frac{4}{9} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |a_{n-k-2} - a_{n-2}| \leq \dots \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_{k+1} - a_1| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} (|a_{k+1}| + |a_1|) \leq 2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen  $2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \forall n \geq n_0 : 2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} < \varepsilon.$$

Wir erhalten:

$$\forall n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N} : |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

Also ist  $(a_n)$  eine Cauchyfolge und somit konvergent;  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Klar ist:

$$a \geq \frac{1}{2} \text{ und } a = \frac{1}{1+a}.$$

Also ist

$$a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ oder } a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Wegen  $a \geq \frac{1}{2}$  folgt  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

# Kapitel 3

## Unendliche Reihen

**Definition:** Es sei  $(a_n)$  sei eine Folge.

a) Wir setzen

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

also  $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$ . Die Folge  $(s_n)$  heißt (**unendliche**) **Reihe** und wird mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bezeichnet. Es gilt also:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent bzw. divergent  $\iff (s_n)$  ist konvergent bzw. divergent.

b)  $s_n$  heißt ***n-te Teilsumme*** von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

c) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, so heißt  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  der **Reihenwert** und wird ebenfalls mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bezeichnet. (**Vorsicht:** Doppelbedeutung von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .)

**Bemerkung:** Ist  $p \in \mathbb{Z}$  und  $(a_n)_{n=p}^{\infty}$  eine Folge, so definiert man entsprechend

$$s_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n \quad (n \geq p)$$

und  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  (meist:  $p = 1$  oder  $p = 0$ ).

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nun für Reihen der Form  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Diese Sätze und Definitionen gelten entsprechend für Reihen der Form  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ).

**Beispiele:**

a) Es sei  $x \in \mathbb{R}$ . Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

heißt **geometrische Reihe**.

Hier ist  $s_n = 1 + x + \dots + x^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Nach 2.6 gilt:  $(s_n)$  konvergiert  $\iff |x| < 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-x}$  für  $|x| < 1$ . Also:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergiert  $\iff |x| < 1$  und

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$



b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \dots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Also:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  ist konvergent und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Nach 2.9 gilt:

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \rightarrow e \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  konvergiert und  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ .

d) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

heißt **harmonische Reihe**. Hier ist  $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es gilt:

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = s_n + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq s_n + \frac{1}{2}.$$

Annahme:  $(s_n)$  ist konvergent;  $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Mit 2.11 folgt  $s_{2n} \rightarrow s$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Somit gilt

$$s \geq s + \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{2}.$$

Widerspruch. Also:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent.

**Satz 3.1:** Es sei  $(a_n)$  eine Folge und  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

a) **Monotoniekriterium:** Sind alle  $a_n \geq 0$  und ist  $(s_n)$  beschränkt, so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent.

b) **Cauchy Kriterium:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

c) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, so gilt  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

d) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei konvergent. Dann ist für jedes  $m \in \mathbb{N}$  die Reihe  $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$  konvergent und für  $r_m := \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$  gilt:  $r_m \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow \infty$ ).

*Beweis:*

a) Es gilt:  $s_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Also ist  $(s_n)$  wachsend und beschränkt. Nach 2.3 ist  $(s_n)$  konvergent.

b) Für  $m > n$  gilt:

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_m - (a_1 + \dots + a_n)| \\ &= |a_{n+1} + \dots + a_m| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt damit aus 2.16.

c) Es gilt:  $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Ist  $(s_n)$  konvergent, so folgt  $a_{n+1} \rightarrow 0$ .

d) Ohne Beweis.

□

**Bemerkung:** Ist  $(a_n)$  eine Folge und gilt  $a_n \not\rightarrow 0$ , so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.

**Satz 3.2:** Die Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  seien konvergent und es seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

*Beweis:* Folgt aus 2.2. □

**Satz 3.3** (Leibnizkriterium): *Es sei  $(b_n)$  eine Folge mit:*

a)  $(b_n)$  ist monoton fallend,

b)  $b_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$  konvergent.

**Beispiel:** Aus 3.3 folgt:

Die **alternierende harmonische Reihe**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  ist konvergent.

*Beweis:* (von 3.3) Da  $(b_n)$  eine fallende Nullfolge ist gilt:  $b_n \geq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Wir setzen  $a_n := (-1)^{n+1} b_n$  und  $s_n := a_1 + \dots + a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es gilt:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{b_{2n+1} - b_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist  $(s_{2n})$  monoton wachsend. Analog zeigt man:  $(s_{2n-1})$  ist monoton fallend.

Weiter gilt:

$$(*) \quad s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n-1} - b_{2n} \leq s_{2n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also:

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \stackrel{(*)}{\leq} s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1$$

Somit sind  $(s_{2n})$  und  $(s_{2n-1})$  beschränkt. Nach 2.3 sind  $(s_{2n})$  und  $(s_{2n-1})$  konvergent;  $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$ . Mit  $(*)$  folgt  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1}$ .

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Es gilt:

$$\left. \begin{array}{l} s_{2n} \in U_\varepsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ s_{2n-1} \in U_\varepsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow s_n \in U_\varepsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$$

Also gilt:  $s_n \rightarrow s$  ( $n \rightarrow \infty$ ). □

**Definition:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **absolut konvergent** :  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  ist konvergent.

**Beispiel:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

**Satz 3.4:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei absolut konvergent. Dann gilt:

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent,
- b)  $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  ( $\Delta$ -Ungleichung für Reihen).

*Beweis:*

- a) Für  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n$  gilt:

$$(*) \quad \underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right|}_{=: \sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^m |a_k|}_{=: \tau_{m,n}}.$$

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung und 3.1 b) gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m > n > n_0 : \tau_{m,n} < \varepsilon,$$

also mit (\*)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m > n > n_0 : \sigma_{m,n} < \varepsilon.$$

Nach 3.1 b) ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent.

- b) Es sei  $s_n := a_1 + \dots + a_n$ ,  $\sigma_n := |a_1| + \dots + |a_n|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  und  $\sigma := \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ . Es gilt:  $|s_n| \rightarrow |s|$  ( $n \rightarrow \infty$ ) und  $|s_n| \leq \sigma_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Damit folgt  $|s| \leq \sigma$ .

□

**Satz 3.5:**

- a) **Majorantenkriterium:** Gilt  $|a_n| \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent, so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.
- b) **Minorantenkriterium:** Gilt  $a_n \geq b_n \geq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergent, so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.

*Beweis:*

a) Es gilt:  $\exists j \in \mathbb{N} \forall n \geq j: |a_n| \leq b_n$ . Nun sei  $m > n \geq j$ . Dann ist

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^m |a_k|}_{=: \sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^m b_k}_{=: \tau_{m,n}}.$$

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung und 3.1 b) gilt:

$$\exists n_0 \geq j \forall m > n \geq n_0 : \tau_{m,n} < \varepsilon,$$

also

$$\exists n_0 \geq j \forall m > n \geq n_0 : \sigma_{m,n} < \varepsilon.$$

Nach 3.1 b) ist  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergiert.

b) Annahme:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent. Nach a) ist dann  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent. Widerspruch.

□

### Beispiele:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ ,  $a_n := \frac{1}{(n+1)^2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$|a_n| = a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2 + 2n + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n.$$

Bekannt:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ist konvergent. Nach 3.5 a) ist auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$  konvergent.

b) Aus Beispiel a) folgt:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergent.

c) Sei  $\alpha > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Wir betrachten  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .

Fall 1:  $\alpha \in (0, 1]$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \xrightarrow{3.5 \text{ b)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ divergiert.}$$

Fall 2:  $\alpha \geq 2$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow{3.5 \text{ a)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert.}$$

Fall 3:  $\alpha \in (1, 2)$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergiert.}$$

Beweis in den Übungen.

**Fazit:** Ist  $\alpha > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

**Bemerkung:** Ist später (in §7) die allgemeine Potenz  $a^x$  ( $a > 0, x \in \mathbb{R}$ ) eingeführt, so zeigt man analog: Ist  $\alpha > 0$ , so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^3+1}$ . Es gilt:

$$\left| (-1)^n \frac{n+2}{n^3+1} \right| = \frac{n+2}{n^3+1} \leq \frac{n+2}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \quad (n \geq 2).$$

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$  ist konvergent. Nach 3.5 a) ist  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^3+1}$  absolut konvergent.

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ . Es gilt

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$  divergiert. Nach 3.5 b) ist auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$  divergent.

**Hilfssatz 3.6:** Die Folge  $(c_n)$  sei beschränkt. Dann gilt:

a) Ist  $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n$  und  $x > \alpha$ , so ist  $c_n < x$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Ist  $\alpha := \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n$  und  $x < \alpha$ , so ist  $c_n > x$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

c) Ist  $c_n \geq 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , so gilt  $c_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

*Beweis:*

c) Es sei  $\varepsilon > 0$ . Mit a) (für  $x = \varepsilon$ ) folgt:  $-\varepsilon < 0 \leq c_n < \varepsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Also gilt  $c_n \in U_{\varepsilon}(0)$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Annahme:  $c_n \geq x$  für unendlich viele  $n$ , etwa für  $n_1, n_2, n_3, \dots$  mit

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Die Teilfolge  $(c_{n_k})$  ist beschränkt. Nach 2.11 enthält  $(c_{n_k})$  eine konvergente Teilfolge  $(c_{n_{k_j}})$ . Definiere

$$\beta := \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_{k_j}}.$$

Es gilt  $c_{n_{k_j}} \geq x$  ( $j \in \mathbb{N}$ ), also ist  $\beta \geq x > \alpha$ . Auch  $(c_{n_{k_j}})$  ist eine Teilfolge von  $(c_n)$ , also ist  $\beta \in H(a_n)$  und somit  $\beta \leq \alpha$ , Widerspruch.

b) Analog wie a).

□

**Satz 3.7** (Wurzelkriterium (WK)): *Es sei  $(a_n)$  eine Folge,  $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).*

a) *Ist  $(c_n)$  unbeschränkt, so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.*

b) *Es sei  $(c_n)$  beschränkt und  $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Dann gilt:*

(i) *Ist  $\alpha < 1$ , so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.*

(ii) *Ist  $\alpha > 1$ , so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.*

*Im Falle  $\alpha = 1$  ist keine allgemeine Aussage möglich.*

*Beweis:*

a)  $(c_n)$  ist unbeschränkt  $\Rightarrow c_n \geq 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \geq 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$ . Mit 3.1 c) folgt die Behauptung.

b) (i) Es sei  $\alpha < 1$ . Wähle ein  $x \in (\alpha, 1)$ . Nach 3.6 gilt:  $c_n \leq x$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , also  $|a_n| \leq x^n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  konvergiert. Nach 3.5 a) konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut.

(ii) Es sei  $\alpha > 1$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  so, daß  $\alpha - \varepsilon > 1$ . Es gilt  $c_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $c_n > \alpha - \varepsilon > 1$  für unendlich viele  $n$ . Wie bei a) folgt:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert.

□

**Beispiele:**

- a)  $a_n := \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ );  $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = 1$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert.
- b)  $a_n := \frac{1}{n^2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ );  $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = 1$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert.

- c) Es sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n = 2k \\ nx^n, & \text{falls } n = 2k - 1 \end{cases}$

Frage: Für welche  $x$  ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (absolut) konvergent? Es ist

$$c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } n = 2k \\ \sqrt[n]{n}|x|, & \text{falls } n = 2k - 1 \end{cases}$$

$(c_n)$  ist also beschränkt und  $H(c_n) = \left\{ \frac{1}{2}, |x| \right\}$ .

Fall 1:  $|x| < 1$ . Dann ist  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n < 1$ , also ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

Fall 2:  $|x| > 1$ . Dann ist  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n > 1$ , also ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.

Fall 3:  $|x| = 1$ . Dann ist  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$  und das Wurzelkriterium liefert keine Entscheidung. Es ist  $|a_n| = n$  falls  $n = 2k - 1$ . Also gilt  $a_n \not\rightarrow 0$ . Damit ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  also divergent.

**Satz 3.8** (Quotientenkriterium (QK)): *Es sei  $a_n \neq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und  $c_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .*

- a) *Ist  $c_n \geq 1$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.*
- b) *Es sei  $(c_n)$  beschränkt,  $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n$  und  $\beta := \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Dann gilt:*
- (i) *Ist  $\alpha < 1$ , so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.*
- (ii) *Ist  $\beta > 1$ , so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.*

Ohne Beweis.

**Folgerung 3.9:**  $(a_n)$  und  $(c_n)$  seien wie in 3.8,  $(c_n)$  sei konvergent und  $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent,} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Im Falle  $\alpha = 1$  ist keine allgemeine Aussage möglich.



**Beispiele:**

a)  $a_n = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert.

b)  $a_n = \frac{1}{n^2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert.

**3.10 Die Exponentialreihe:** Für  $x \in \mathbb{R}$  betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Frage: Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert diese Reihe (absolut)?

Klar: Die Reihe konvergiert absolut für  $x = 0$ . Sei nun  $x \neq 0$  und  $a_n := \frac{x^n}{n!}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Es gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Mit 3.9 folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ konvergiert absolut für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist eine Funktion  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Sie heißt **Exponentialfunktion**. Es gilt:  $E(0) = 1$ ,  $E(1) \stackrel{§2}{=} e$ .

Später zeigen wir  $\forall r \in \mathbb{Q}: E(r) = e^r$  und definieren dann  $e^x := E(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Dann ist also  $e^x = E(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

**Definition:** Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Bijektion. Setze  $b_n := a_{\varphi(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Also

$$b_1 = a_{\varphi(1)}, \quad b_2 = a_{\varphi(2)}, \quad b_3 = a_{\varphi(3)}, \dots$$

Dann heißt  $(b_n)$  eine **Umordnung** von  $(a_n)$ .

**Beispiel:**  $(a_2, a_4, a_1, a_3, a_6, a_8, a_5, a_7, \dots)$  ist eine Umordnung von  $(a_n)$ .

**Satz 3.11:** Es sei  $(b_n)$  eine Umordnung von  $(a_n)$ . Dann gilt:

a) Ist  $(a_n)$  konvergent, so ist  $(b_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

b) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent, so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  absolut konvergent und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

*Beweis:*

a) Setze  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Da  $\varphi$  injektiv ist, ist die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) < n_0\}$  endlich. Also gilt:

$$|b_n - a| = |a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon \text{ f\"ur } n \in \mathbb{N}.$$

b) Ohne Beweis.

□

**Bemerkung** (ohne Beweis): Es sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gilt:

a) Ist  $s \in \mathbb{R}$ , so existiert eine Umordnung  $(b_n)$  von  $(a_n)$  mit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ ist konvergent und } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s.$$

b) Es existiert eine Umordnung  $(c_n)$  von  $(a_n)$  mit:  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  ist divergent.

**Definition:** Gegeben seien die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ .

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  sei

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k, \text{ also}$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  heißt das **Cauchyprodukt** (CP) von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ .

**Satz 3.12:** Es seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  absolut konvergent. Für ihr Cauchyprodukt  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  gilt dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ ist absolut konvergent und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Ohne Beweis.

**Beispiel:** Es sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $|x| < 1$ .

Bekannt:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergiert absolut und  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ . Also ist

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \stackrel{3.12}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

mit  $c_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Somit gilt:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1).$$

z.B.  $(x = \frac{1}{2}) : 4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n}$ .

Weiter gilt:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

z.B.  $(x = \frac{1}{2}) : 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ , also  $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$ .

**3.13 Eigenschaften der Exponentialfunktion:**  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Es gilt:

- a)  $E(0) = 1, E(1) = e$ ;
- b)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x+y) = E(x)E(y)$ ;
- c)  $\forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} : E(x_1 + \dots + x_m) = E(x_1) \cdot \dots \cdot E(x_m)$ ;
- d)  $E(x) > 1$  ( $x > 0$ );  $E(x) > 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ );  $E(-x) = E(x)^{-1}$  ( $x \in \mathbb{R}$ );
- e)  $\forall x \in \mathbb{R} \forall r \in \mathbb{Q} : E(rx) = E(x)^r$ ;
- f)  $\forall r \in \mathbb{Q} : E(r) = e^r$ ;

g)  $E$  ist auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend, d.h. aus  $x < y$  folgt stets  $E(x) < E(y)$ .

*Beweis:*

a) Ist bekannt.

b) Es gilt

$$E(x)E(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) \stackrel{3.12}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

mit

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{=\binom{n}{k}} x^k y^{n-k} \stackrel{§1}{=} \frac{1}{n!} (x+y)^n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

$$\text{Also: } E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y).$$

c) Folgt aus b).

d) Für  $x > 0$  gilt  $E(x) = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{>0} > 1$ . Weiter ist

$$1 = E(x + (-x)) \stackrel{b)}{=} E(x)E(-x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere gilt:  $E(x) > 0$  ( $x < 0$ ) und  $E(-x) = E(x)^{-1}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

e) Für  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$E(nx) = E(x + \dots + x) \stackrel{c)}{=} E(x)^n.$$

Also ist

$$E(x) = E\left(n \frac{x}{n}\right) = \left(E\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \Rightarrow E\left(\frac{1}{n}x\right) = E(x)^{\frac{1}{n}}.$$

Für  $m, n \in \mathbb{N}$  folgt damit:

$$E\left(\frac{m}{n}x\right) = E\left(m \frac{x}{n}\right) = E\left(\frac{x}{n}\right)^m = \left(E(x)^{\frac{1}{n}}\right)^m = E(x)^{\frac{m}{n}}.$$

Somit gilt  $E(rx) = E(x)^r$  für jedes  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $r > 0$ . Sei  $r \in \mathbb{Q}$  und  $r < 0$ . Dann ist  $-r > 0$ , also

$$\frac{1}{E(rx)} = E(-rx) = E(x)^{-r} = \frac{1}{E(x)^r} \Rightarrow E(rx) = E(x)^r.$$

f) Folgt aus e) mit  $x = 1$ .

g) Es sei  $x < y$ . Dann gilt  $y - x > 0$ , also

$$\Rightarrow 1 \stackrel{d)}{<} E(y - x) \stackrel{b)}{=} E(y)E(-x) \stackrel{d)}{=} \frac{E(y)}{E(x)} \stackrel{d)}{\Rightarrow} E(x) < E(y).$$

□

# Kapitel 4

## Potenzreihen

**Definition:** Es sei  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

heißt **Potenzreihe** (PR).

Frage: Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert eine Potenzreihe (absolut)?

Klar: Eine Potenzreihe konvergiert absolut für  $x = x_0$ .

**Beispiele:**

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Hier:  $a_n = \frac{1}{n!}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ),  $x_0 = 0$ .

Bekannt: Die Potenzreihe konvergiert absolut für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n$ . Hier:  $a_n = 1$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ).

Bekannt: Die Potenzreihe konvergiert absolut  $\iff |x - x_0| < 1$  (geometrische Reihe).

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x - x_0)^n$ . Hier:  $a_n = n^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ).

Es sei  $x \neq x_0$  und  $b_n := n^n (x - x_0)^n$ . Es gilt:  $\sqrt[n]{|b_n|} = n|x - x_0|$ . Wegen  $x \neq x_0$  ist  $(\sqrt[n]{|b_n|})$  unbeschränkt. Nach 3.7 ist  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x - x_0)^n$  divergent.

Also:  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x - x_0)^n$  konvergiert nur für  $x = x_0$ .

**Definition:** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe. Setze

$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ unbeschränkt} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, & \text{falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0, \infty) \end{cases}$$

(kurz: “ $r = \frac{1}{\rho}$ “).  $r$  heißt der **Konvergenzradius** (KR) der Potenzreihe.

**Satz 4.1:** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe und  $\rho$  und  $r$  seien wie in obiger Definition. Dann gilt:

- a) Ist  $r = 0$ , so konvergiert die Potenzreihe nur für  $x = x_0$ .
- b) Ist  $r = \infty$ , so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .
- c) Ist  $r \in (0, \infty)$ , so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < r$  und sie divergiert für jedes  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| > r$ . Für  $x = x_0 \pm r$  ist keine allgemeine Aussage möglich.

*Beweis:* Für  $x \in \mathbb{R}$  sei  $b_n(x) := a_n(x - x_0)^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ), also  $\sqrt[n]{|b_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

- a) Es sei  $x \neq x_0$ . Es gilt  $r = 0$  also  $\rho = \infty$ . Somit ist  $\left(\sqrt[n]{|b_n(x)|}\right)$  unbeschränkt. Nach 3.7 ist  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)$  divergent.
- b) Es gilt  $r = \infty$  also  $\rho = 0$ . Somit ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Mit 3.7 folgt die Behauptung.
- c) Es gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \rho|x - x_0| = \frac{1}{r}|x - x_0|.$$

Also gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} < 1 \iff |x - x_0| < r,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} > 1 \iff |x - x_0| > r.$$

Die Behauptung folgt aus 3.7.

□

**Folgerung:** Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

*Beweis:* Bekannt:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  hat den Konvergenzradius  $r = \infty$ . Nach 4.1 ist  $\rho = 0$ , d.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Mit 3.6 folgt die Behauptung. □

**Beispiele:**

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ;  $a_n = 1$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ),  $x_0 = 0$ ;  $\rho = 1$ ,  $r = 1$ .

Die Potenzreihe konvergiert für  $|x| < 1$  absolut und sie divergiert für  $|x| > 1$ . Für  $|x| = 1$  ist die Potenzreihe divergent.

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ;  $a_0 = 0$ ,  $a_n = \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ),  $x_0 = 0$ .

Es gilt:  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$ . Also ist  $\rho = 1$  und damit  $r = 1$ . Die Potenzreihe konvergiert absolut für  $|x| < 1$  und sie divergiert für  $|x| > 1$ .

Für  $x = 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert.

Für  $x = -1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  konvergiert (nicht absolut).

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ;  $a_0 = 0$ ,  $a_n = \frac{1}{n^2}$  ( $n \geq 1$ ),  $x_0 = 0$ .

Es gilt:  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1$ . Also ist  $\rho = 1$  und damit  $r = 1$ . Die Potenzreihe konvergiert absolut für  $|x| < 1$  und sie divergiert für  $|x| > 1$ .

Für  $x = 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert absolut.

Für  $x = -1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  konvergiert absolut.

In vielen Fällen läßt sich auch über das Quotientenkriterium 3.8 der Konvergenzradius einer Potenzreihe bestimmen:

**Satz 4.2:** Es sei  $a_n \neq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}_0$ , die Folge  $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$  sei konvergent und  $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ . Dann hat die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  den Konvergenzradius  $L$ .

Ohne Beweis.



**4.3 Cosinus:** Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Hier:  $x_0 = 0$ ,  $a_{2n+1} = 0$ ,  $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ).

Wegen  $0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) folgt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Nach 4.1 hat obige Potenzreihe den Konvergenzradius  $r = \infty$ , konvergiert also absolut für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\textbf{Cosinus:} \quad \begin{cases} \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

**4.4 Sinus:** Analog wie bei 4.3 sieht man: Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

konvergiert absolut für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\textbf{Sinus:} \quad \begin{cases} \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt:  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ , sowie

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

Ähnlich wie in 3.13 zeigt man (mit dem Cauchyprodukt) die folgenden Additionstheoreme:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Für  $x \in \mathbb{R}$  erhalten wir

$$1 = \cos(0) = \cos(x + (-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

$$\cos^2 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \sin^2 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

und damit  $|\cos x| \leq 1$  und  $|\sin x| \leq 1$ .

# Kapitel 5

## q-adische Entwicklung

**Definition:** Es sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann existiert genau eine größte ganze Zahl  $\leq x$ , also ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \leq x < k + 1$ ;

$$[x] := k.$$

**Vereinbarung:** In diesem §en sei stets  $a \geq 0$  und  $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

Setze  $z_0 := [a]$ , dann gilt:  $z_0 \leq a < z_0 + 1$ .

Setze  $z_1 := [(a - z_0)q]$ , dann gilt:  $z_1 \leq aq - z_0q < z_1 + 1$ .

Also:

$$z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{1}{q}.$$

Es gilt  $z_1 \in \mathbb{N}_0$ . Annahme:  $z_1 \geq q$ . Dann gilt  $\frac{z_1}{q} \geq 1$ , also

$$z_0 + 1 \leq z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + 1.$$

Widerspruch. Also ist  $z_1 \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$ .

Setze  $z_2 := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2]$ . Wie oben folgt

$$z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} + \frac{1}{q^2}.$$

und  $z_2 \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$ .

Allgemein (induktiv): Sind  $z_0, \dots, z_n$  schon definiert, so setze

$$z_{n+1} := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q} - \dots - \frac{z_n}{q^n})q^{n+1}].$$

Wir erhalten so eine Folge  $(z_n)_{n=0}^\infty$  mit:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} z_0 \in \mathbb{N}_0, \ z_n \in \{0, 1, \dots, q - 1\} \ (n \geq 1) \\ \text{und} \\ \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \dots + \frac{z_n}{q^n}}_{=: s_n} \leq a < \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \dots + \frac{z_n}{q^n} + \frac{1}{q^n}}_{=: s_n + \frac{1}{q^n}} \end{array} \right.$$

In den großen Übungen wird gezeigt:

**Satz 5.1:** Ist  $(\tilde{z}_n)_{n=0}^\infty$  eine weitere Folge mit den Eigenschaften in (\*), so gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : z_n = \tilde{z}_n.$$

Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \frac{z_n}{q^n} \leq \frac{q-1}{q^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} \text{ konvergiert.}$$

Nach 3.5 a) ist  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n}$  konvergent. Also ist  $(s_n)$  konvergent und mit (\*) folgt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n}.$$

**Definition:** Ist  $(y_n)_{n=0}^\infty$  eine Folge mit  $y_0 \in \mathbb{N}_0$  und  $y_n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ , so schreibt man

$$y_0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{q^n}.$$

**Bemerkungen:**

- a) Die Darstellung einer reellen Zahl als ein solcher Reihenwert ist nicht eindeutig.  
Z.B. ist ( $q = 10$ ):

$$1,0000000 \dots = 1 = 0,99999999 \dots$$

- b) Gilt mit einem  $m \in \mathbb{N} : y_n = 0 \ (n > m)$ , so schreibt man auch:

$$y_0, y_1 \dots y_m.$$

- c) Obige Konstruktion der Folge  $(z_n)$  zeigt, daß jede reelle Zahl  $a \geq 0$  als ein solcher Reihenwert geschrieben werden kann:

$$a = z_0, z_1 z_2 z_3 z_4 \dots$$

Die so erhaltene Darstellung von  $a$  heißt **die q-adische Entwicklung von  $a$** . Sie ist nach 5.1 durch (\*) eindeutig bestimmt.

- d) Sprechweisen:  $q = 10$ : Dezimalentwicklung;  $q = 2$ : Dualentwicklung.

**Beispiele:**

a)  $q = 10, a = 1$ . Dann gilt:

$$z_0 = 1, z_1 = [(a - z_0)q] = 0, z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = 0, \dots$$

Induktiv folgt:  $z_n = 0$  ( $n \geq 1$ ), also  $1 = 1,000\dots$

b)  $q = 10, a = \frac{1}{2}$ . Dann gilt:

$$z_0 = 0, z_1 = [(a - z_0)q] = [\frac{10}{2}] = 5, z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = [(\frac{1}{2} - \frac{5}{10})100] = 0, \dots$$

Induktiv folgt:  $z_n = 0$  ( $n \geq 2$ ), also  $\frac{1}{2} = 0,5000\dots = 0,5$ .

**Definition:** Es sei  $b \in \mathbb{R}$  und  $b < 0$ . Weiter sei  $z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$  die  $q$ -adische Entwicklung von  $-b$ . Dann heißt  $-z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$  die  $q$ -adische Entwicklung von  $b$ .

**Satz 5.2:**

a) Es sei  $z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$  die  $q$ -adische Entwicklung von  $a$ . Dann ist  $z_n = q - 1$  fa  $n \in \mathbb{N}$  nicht möglich.

b) Ist  $(y_n)_{n=0}^\infty$  eine Folge mit  $y_0 \in \mathbb{N}_0, y_n \in \{0, 1, \dots, q - 1\}, a = y_0, y_1 y_2 y_3 \dots$  und  $y_n = q - 1$  nicht fa  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $y_0, y_1 y_2 y_3 \dots$  die  $q$ -adische Entwicklung von  $a$ .

*Beweis:* a) Annahme:  $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m: z_n = q - 1$ . Dann gilt:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{q^n}}_{=s_{m-1}} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^n}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} &= (q-1) \left( \frac{1}{q^m} + \frac{1}{q^{m+1}} + \dots \right) \\ &= \frac{q-1}{q^m} \left( 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \right) \\ &= \frac{q-1}{q^m} \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q^{m-1}}. \end{aligned}$$

Also ist  $a = s_{m-1} + \frac{1}{q^{m-1}} \stackrel{(*)}{>} a$ . Widerspruch.

b) Übung (mit 5.1).

□

**Satz 5.3:**  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar.

*Beweis:* Es genügt zu zeigen, daß  $[0, 1)$  überabzählbar ist. Annahme:  $[0, 1)$  ist abzählbar, also  $[0, 1) = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ . Für  $j \in \mathbb{N}$  sei

$$a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$$

die 3-adische Entwicklung von  $a_j$ , also  $z_n^{(j)} \in \{0, 1, 2\}$ . Setze

$$z_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } z_n^{(n)} = 0 \text{ oder } z_n^{(n)} = 2 \\ 0, & \text{falls } z_n^{(n)} = 1 \end{cases}$$

Dann gilt  $z_n \neq z_n^{(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) (\*\*). Setze  $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n}$ . Es gilt:

$$0 \leq a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}, \text{ also } a \in [0, 1).$$

Nach 5.2 b) ist  $0, z_1 z_2 z_3 \dots$  ist die 3-adische Entwicklung von  $a$ . Wegen  $a \in [0, 1)$  existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $a = a_m$ , also

$$0, z_1 z_2 z_3 \dots = 0, z_1^{(m)} z_2^{(m)} z_3^{(m)} \dots$$

Es folgt  $z_j = z_j^{(m)}$  ( $j \in \mathbb{N}$ ), also für  $j = m$ :  $z_m = z_m^{(m)}$ . Widerspruch zu (\*\*). □

# Kapitel 6

## Grenzwerte bei Funktionen

**Definition:** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von  $D$  :  $\Longleftrightarrow$  Es gibt eine Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .

**Beispiele:**

- a)  $D = (0, 1]$ . Es gilt:  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D \iff x_0 \in [0, 1]$ .
- b)  $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ . Es gilt:  $D$  hat genau einen Häufungspunkt:  $x_0 = 0$ .
- c)  $D = \mathbb{Q}$ . Es gilt: Jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist Häufungspunkt von  $D$ .
- d) Ist  $D$  endlich, so hat  $D$  keine Häufungspunkte.

**Hilfssatz 6.1:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$x_0 \text{ ist Häufungspunkt von } D \iff \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

*Beweis:*

“ $\Rightarrow$ “: Es gibt eine Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}).$$

“ $\Leftarrow$ “: Nach Voraussetzung gilt:

$\exists x_1 \in U_1(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$ , also  $|x_1 - x_0| < 1$ ;

$\exists x_2 \in U_{\frac{1}{2}}(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$ , also  $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$ ; etc.

Wir erhalten eine Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

also  $x_n \rightarrow x_0$ . □

**Vereinbarung:** Ab jetzt sei stets in diesem §en  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

**Bezeichnung:**

a)  $D_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$ .

b) Sei  $M \subseteq D$  und  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Funktion. Wir schreiben “ $f \leq g$  auf  $M$ ” für “ $f(x) \leq g(x)$  ( $x \in M$ )”.

**Definition:**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert :  $\iff$  Es gibt ein  $a \in \mathbb{R}$  so, daß für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$ .

In diesem Fall ist  $a$  eindeutig bestimmt und wir schreiben:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) \rightarrow a \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)}.$$

**Bemerkung:** Sollte  $x_0 \in D$  sein, so ist der Wert  $f(x_0)$  in obiger Definition nicht relevant. Relevant ist allein das Verhalten von  $f$  in das “Nähe“ von  $x_0$ .

**Beispiele:**

a)  $D := [0, \infty)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) := \sqrt[p]{x}$ .

Es sei  $x_0 \in D$  (dann ist  $x_0$  eine Häufungspunkt von  $D$ ). Es sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Nach 2.4 gilt dann:  $\sqrt[p]{x_n} \rightarrow \sqrt[p]{x_0}$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Also gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{x_0}.$$

b)  $D = (0, 1]$ ,

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Klar:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ . Weiter sei

$$x_n := \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \quad y_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad (n \geq 3).$$

Es gilt  $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $y_n \rightarrow \frac{1}{2}$ , aber  $f(x_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{4} \neq 1 \leftarrow f(y_n)$ .

D.h.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  existiert nicht. Schränkt man aber  $f$  auf  $D \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = (0, \frac{1}{2})$  ein, so gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x \in (0, \frac{1}{2})}} f(x) = \frac{1}{4}.$$

Dafür schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} f(x) = \frac{1}{4} \text{ (linksseitiger Grenzwert).}$$

Analog: Schränkt man  $f$  auf  $D \cap (\frac{1}{2}, \infty) = (\frac{1}{2}, 1]$  ein, so ist

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x \in (\frac{1}{2}, 1]}} f(x) = 1 \text{ (rechtsseitiger Grenzwert).}$$

c)  $D = \mathbb{R}$ ,  $f = E$ , also  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Für  $|x| \leq 1$  gilt:

$$\begin{aligned} |E(x) - E(0)| &= |E(x) - 1| = \left| x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right| \\ &= |x| \left| 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right| \\ &\leq |x| \left( 1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \dots \right) \\ &\leq |x| \left( 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) \\ &= |x|(e - 1). \end{aligned}$$

Es sei  $(x_n)$  Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow 0$ . Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n| \leq 1,$$

und somit

$$\forall n \geq n_0 : |E(x_n) - 1| \leq |x_n|(e - 1).$$

Damit folgt  $E(x_n) \rightarrow 1$ . Somit ist  $\lim_{x \rightarrow 0} E(x) = 1 = E(0)$ . Es gilt also:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{n!} \right).$$



**Satz 6.2:** *Es gilt:*

a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_\delta(x_0) : |f(x) - a| < \varepsilon.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert

$$\iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ ist } (f(x_n)) \text{ konvergent.}$$

c) **Cauchy Kriterium:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existiert} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D_\delta(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

*Beweis:*

b) und c) ohne Beweis.

a) “ $\Rightarrow$ ”: Es sei  $\varepsilon > 0$ . Annahme: Für kein  $\delta > 0$  gilt  $|f(x) - a| < \varepsilon$  ( $x \in D_\delta(x_0)$ ). Dann existiert zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in D_{1/n}(x_0)$  mit  $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$ . Damit ist  $(x_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  und  $f(x_n) \not\rightarrow a$  Widerspruch.

“ $\Leftarrow$ ”: Es sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Es sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\delta > 0$  so, daß  $|f(x) - a| < \varepsilon$  ( $x \in D_\delta(x_0)$ ). Es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_0| < \delta$  ( $n \geq n_0$ ). Für  $n \geq n_0$  gilt damit  $|f(x_n) - a| < \varepsilon$ . Also gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$ .  $\square$

**Satz 6.3:** *Es seien  $f, g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Weiter seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und es gelte  $f(x) \rightarrow a$ ,  $g(x) \rightarrow b$  ( $x \rightarrow x_0$ ). Dann gilt:*

a)

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \rightarrow \alpha a + \beta b; \quad f(x)g(x) \rightarrow ab; \quad |f(x)| \rightarrow |a| \quad (x \rightarrow x_0).$$

b) Ist  $a \neq 0$ , so existiert ein  $\delta > 0$  mit  $f(x) \neq 0$  ( $x \in D_\delta(x_0)$ ). Für  $\frac{1}{f}: D_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$\frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{a} \quad (x \rightarrow x_0).$$

c) Für ein  $\delta > 0$  gelte  $f \leq g$  auf  $D_\delta(x_0)$ . Dann ist  $a \leq b$ .

d) Für ein  $\delta > 0$  gelte  $f \leq h \leq g$  auf  $D_\delta(x_0)$ . Ist  $a = b$ , so gilt  $h(x) \rightarrow a$  ( $x \rightarrow x_0$ ).

*Beweis:* z. B.: c) Es sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in D_\delta(x_0).$$

Also ist  $f(x_n) \leq g(x_n)$  ( $n \geq n_0$ ). Nach 2.2 folgt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b.$$

Die anderen Aussagen beweist man analog durch Zurückführen auf 2.2. □

**Definition:**

a) Es sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .

$$x_n \rightarrow \infty : \iff \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n > c,$$

$$x_n \rightarrow -\infty : \iff \forall c < 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n < c.$$

*Übung:* Es gilt:

$$x_n \rightarrow \infty \iff x_n > 0 \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{1}{x_n} \rightarrow 0,$$

$$x_n \rightarrow -\infty \iff x_n < 0 \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{1}{x_n} \rightarrow 0.$$

b) Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0$  sei ein Häufungspunkt von  $D$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty : \iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ gilt: } g(x_n) \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty : \iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \setminus \{x_0\} \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ gilt: } g(x_n) \rightarrow -\infty.$$

c) Es sei  $D$  nicht nach oben beschränkt,  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion und es sei  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a : \iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow \infty \text{ gilt: } g(x_n) \rightarrow a.$$

d) Es sei  $D$  nicht nach unten beschränkt,  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion und es sei  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = a : \iff \text{Für jede Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \rightarrow -\infty \text{ gilt: } g(x_n) \rightarrow a.$$

**Beispiel 6.4:**  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow 0+$ ),  $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow 0-$ ),  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \pm\infty$ ).

**6.5 Exponentialfunktion:**  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Es sei  $p \in \mathbb{N}_0$ . Für jedes  $x \geq 0$  gilt

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \dots \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)!},$$

also

$$\frac{E(x)}{x^p} \geq \frac{x}{(p+1)!} \quad (x > 0).$$

Somit folgt:

$$\frac{E(x)}{x^p} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty).$$

Insbesondere gilt ( $p = 0$ ):

$$E(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty),$$

also

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty),$$

und damit

$$E(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty).$$

# Kapitel 7

## Stetigkeit

**Definition:** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in D$ .

- a)  $f$  heißt **in**  $x_0$  **stetig** :  $\iff$  Für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .
- b)  $f$  heißt **auf**  $D$  **stetig** :  $\iff$   $f$  ist in jedem  $x \in D$  stetig.
- c) Wir setzen

$$C(D) := C(D, \mathbb{R}) := \{g : D \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ ist stetig auf } D\}.$$

**Beispiele:**

- a)  $D = [0, \infty)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = \sqrt[p]{x}$ .

Bekannt: Ist  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0 \in D$ , so gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Also gilt  $f \in C([0, \infty))$ .

- b)  $D = [0, 1] \cup \{2\}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$

Offensichtlich gilt:  $f$  ist stetig in jedem  $x \in [0, 1)$ .

- (i) Es sei  $x_0 = 1$ ,  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann ist  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow 1$ , aber  $f(x_n) = x_n^2 \rightarrow 1 \neq 0 = f(1)$ . Also ist  $f$  in  $x_0 = 1$  nicht stetig.
- (ii) Es sei  $x_0 = 2$ , und  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow 2$ . Dann ist  $x_n = 2$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , also  $f(x_n) = 1$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Somit gilt  $f(x_n) \rightarrow 1 = f(2)$ . Also ist  $f$  in  $x_0 = 2$  stetig.

**Satz 7.1:** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in D$ . Dann gilt:

a)

$$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

b) Ist  $x_0$  Häufungspunkt von  $D$ , so gilt:

$$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Beweis:*

a) Fast wörtlich wie bei 6.2.

b) Übung.

□

**Satz 7.2:**

a) Es seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in D$  und es seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann sind

$$\alpha f + \beta g, fg \text{ und } |f| \text{ stetig in } x_0.$$

Ist  $x_0 \in \tilde{D} := \{x \in D : f(x) \neq 0\}$ , so ist  $\frac{1}{f}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .

b) Sind  $f, g \in C(D)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so gilt:

$$\alpha f + \beta g, fg, |f| \in C(D).$$

*Beweis:* a) Folgt aus 2.2; b) folgt aus a).

□

**Bemerkung:** Satz 7.2 b) zeigt insbesondere:  $C(D)$  ist ein reeller Vektorraum.

**Satz 7.3:** Es seien  $D, D_0 \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: D_0 \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen,  $f(D) \subseteq D_0$ ,  $x_0 \in D$  und  $y_0 := f(x_0)$ . Ist  $f$  in  $x_0$  stetig und ist  $g$  in  $y_0$  stetig, so ist

$$g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

stetig in  $x_0$ .

*Beweis:* Es sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .

Da  $f$  stetig in  $x_0$  ist gilt:  $f(x_n) \rightarrow f(x_0) = y_0$ . Da  $g$  stetig in  $y_0$  ist folgt

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

□

**Satz 7.4:** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ . Es sei  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$  falls  $r < \infty$  und  $D := \mathbb{R}$  falls  $r = \infty$ . Weiter sei

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in D).$$

Dann gilt:  $f \in C(D)$ .

Wir beweisen 7.4 später, nach 8.3.

**Beispiele:** Nach 7.4 sind die Exponentialfunktion, und die Funktionen Sinus und Cosinus auf  $\mathbb{R}$  stetig.

**Beispiel 7.5:** Behauptung:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*Beweis:* Für  $x \neq 0$  gilt:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \quad (x \rightarrow 0).$$

□

**Beispiel 7.6:** Behauptung:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E(x) - 1}{x} = 1.$$

*Beweis:* Für  $x \neq 0$  gilt:

$$\frac{E(x) - 1}{x} = \frac{1}{x} \left( \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) - 1 \right) = \underbrace{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \quad (x \rightarrow 0).$$

□

**Folgerung:** Für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(x_0 + h) - E(x_0)}{h} = E(x_0).$$

*Beweis:* Es gilt:

$$\frac{E(x_0 + h) - E(x_0)}{h} = \frac{E(x_0)E(h) - E(x_0)}{h} = E(x_0) \frac{E(h) - 1}{h} \xrightarrow{7.6} E(x_0) \quad (h \rightarrow 0).$$

□

**Satz 7.7** (Zwischenwertsatz): *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f \in C([a, b])$  und*

$$y_0 \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}],$$

*also  $y_0$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$ . Dann existiert ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$ .*

*Beweis:* Fall 1: Ist  $f(a) = y_0$  oder  $f(b) = y_0$  so gilt die Behauptung.

Fall 2: Es sei  $f(a) \neq y_0 \neq f(b)$ . O.B.d.A. sei  $f(a) < f(b)$ , also  $f(a) < y_0 < f(b)$ . Wir setzen

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}.$$

Es gilt  $a \in M$ , also  $M \neq \emptyset$ . Wegen  $M \subseteq [a, b]$  ist  $M$  beschränkt. Damit existiert  $x_0 := \sup M$  und es gilt  $x_0 \in [a, b]$ . Ist  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $x_0 - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $M$ , also existiert ein  $x_n \in M$  mit

$$x_n > x_0 - \frac{1}{n}.$$

Also:  $\forall n \in \mathbb{N}: x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0$ . Somit gilt  $x_n \rightarrow x_0$ . Da  $f$  stetig in  $x_0$  ist folgt  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Nach Definition von  $M$  ist  $f(x_n) \leq y_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), also  $f(x_0) \leq y_0$ .

Weiter gilt  $x_0 < b$  (andernfalls:  $x_0 = b \Rightarrow f(b) = f(x_0) \leq y_0 < f(b)$ , Widerspruch).

Es sei  $z_n := x_0 + \frac{1}{n}$ . Es gilt  $z_n \in [a, b]$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , und für diese  $n$  gilt:

$$z_n > x_0 \Rightarrow z_n \notin M \Rightarrow f(z_n) > y_0.$$

Wegen  $z_n \rightarrow x_0$  folgt ( $f$  ist stetig):  $f(z_n) \rightarrow f(x_0)$ . Damit ist  $f(x_0) \geq y_0$ . □

**Folgerung** (vgl. 1.7): Ist  $a > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ , so existiert ein  $x_0 > 0$  mit  $x_0^n = a$ .

*Beweis:* Es sei  $b := 1 + a$  und  $f(x) := x^n$  ( $x \in [0, b]$ ).

Dann gilt:

$$f \in C([0, b]), \quad f(0) = 0 < a, \quad f(b) = (1 + a)^n \geq 1 + na > a.$$

Mit 7.7 folgt:  $\exists x_0 \in [0, b] : f(x_0) = a$ , also  $x_0^n = a$ . Wegen  $a > 0$  ist  $x_0 > 0$ . □

**Bemerkung:** Erst jetzt ist 1.7 vollständig bewiesen!

Aus 7.7 folgt mit  $y_0 = 0$ :

**Satz 7.8** (Nullstellensatz von Bolzano): *Ist  $f \in C([a, b])$  und  $f(a)f(b) \leq 0$ , so existiert ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = 0$ .*

**7.9 Exponentialfunktion:**  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Behauptung:  $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ .

*Beweis:* Nach 3.13 gilt  $E(x) > 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), also  $E(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$ .

Es sei  $y_0 \in (0, \infty)$ . Nach 6.5 gilt:

$$E(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \Rightarrow \exists b > 0 : E(b) > y_0,$$

$$E(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \Rightarrow \exists a < 0 : E(a) < y_0.$$

Mit 7.7 folgt:  $\exists x_0 \in [a, b] : E(x_0) = y_0$ , also  $y_0 \in E(\mathbb{R})$ . Somit ist  $(0, \infty) \subseteq E(\mathbb{R})$ . □

**Definition:** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

a)  $D$  heißt **abgeschlossen** :  $\iff$  Für jede konvergente Folge  $(x_n)$  in  $D$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in D.$$

b)  $D$  heißt **kompakt** :  $\iff$  Jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D.$$

**Satz 7.10:** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Dann gilt:

a)  $D$  ist abgeschlossen  $\iff$  Jeder Häufungspunkt von  $D$  gehört zu  $D$ .

b)  $D$  ist kompakt  $\iff$   $D$  ist beschränkt und abgeschlossen.



c) Ist  $D$  kompakt und  $D \neq \emptyset$ , so existieren  $\max D$  und  $\min D$ .

**Beispiele:**

- a)  $[a, b]$  ist kompakt, also auch abgeschlossen.
- b) Endliche Mengen sind kompakt.
- c)  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, a]$  und  $\mathbb{R}$  sind abgeschlossen, aber nicht kompakt.
- d)  $\emptyset$  ist kompakt.
- e)  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b)$  sind nicht abgeschlossen.

*Beweis:* (von 7.10):

- a) Übung.
- b) “ $\Leftarrow$ “ Folgt direkt aus 2.13, “ $\Rightarrow$ “ Übung.
- c) Es sei  $s := \sup D$ . Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D : s - \frac{1}{n} < x_n \leq s.$$

Somit gilt  $x_n \rightarrow s$ . Da  $D$  abgeschlossen ist folgt  $s \in D$ . Also ist  $s = \max D$ .

Analog zeigt man:  $\inf D \in D$ .

□

**Definition:**  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *beschränkt* :  $\iff f(D)$  ist **beschränkt**. Äquivalent ist

$$\exists c \geq 0 \forall x \in D : |f(x)| \leq c.$$

**Satz 7.11:** Es sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$  kompakt und  $f \in C(D)$ . Dann ist  $f(D)$  kompakt. Insbesondere ist  $f$  beschränkt und es existieren  $x_1, x_2 \in D$  mit  $f(x_1) = \min f(D)$  und  $f(x_2) = \max f(D)$ , d.h.

$$\forall x \in D : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

*Beweis:* Es sei  $(y_n)$  eine Folge in  $f(D)$ . Dann existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $f(x_n) = y_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Da  $D$  kompakt ist enthält  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D$ . Da  $f$  stetig ist folgt

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \in f(D).$$

□

**Satz 7.12:**

- a) Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und ist  $f \in C(I)$ , so ist  $f(I)$  ein Intervall.
- b) Sei  $f \in C([a, b])$ ,  $A := \min f([a, b])$  und  $B := \max f([a, b])$ , so ist  $f([a, b]) = [A, B]$ .

*Beweis:* a) Übung: Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist genau dann ein Intervall, wenn gilt:

$$x, y \in M, x < z < y \Rightarrow z \in M.$$

Damit folgt die Behauptung aus 7.7.

b) folgt aus a). □

**Definition:**

- a)  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **monoton wachsend**:  $\iff$  Aus  $x_1, x_2 \in D$  und  $x_1 < x_2$  folgt stets  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .  
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **streng monoton wachsend**:  $\iff$  Aus  $x_1, x_2 \in D$  und  $x_1 < x_2$  folgt stets  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- b) Entsprechend definiert man **(streng) monoton fallend**.
- c)  $f$  heißt **(streng) monoton**:  $\iff$   $f$  ist (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend.

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sei streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Dann ist  $f$  auf  $I$  injektiv, es existiert also die Umkehrfunktion  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  und  $f^{-1}$  ist streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Es gilt:

$$\forall x \in I: f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall y \in f(I): f(f^{-1}(y)) = y.$$

**Bemerkung:**  $f(I)$  ist im allgemeinen kein Intervall.

**Satz 7.13:** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f \in C(I)$  und  $f$  sei auf  $I$  streng monoton. Dann ist  $f(I)$  ein Intervall (vgl. 7.12) und

$$f^{-1} \in C(f(I)).$$

Ohne Beweis.

**7.14 Der Logarithmus:** Bekannt:  $E$  ist auf  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend und  $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ . Es existiert also  $E^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion

$$\log x := \ln x := E^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty))$$

heißt **Logarithmus**.

**Eigenschaften:** Es gilt:

- a)  $\log 1 = 0, \log e = 1$ ;
- b)  $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und streng monoton wachsend;
- c)  $\log((0, \infty)) = \mathbb{R}$ ;
- d)  $\log x \rightarrow \infty \ (x \rightarrow \infty), \log x \rightarrow -\infty \ (x \rightarrow 0)$ ;
- e)  $\forall x, y > 0: \log(xy) = \log x + \log y$ ;
- f)  $\forall x, y > 0: \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ .

*Beweis:*

- a) Folgt aus  $E(0) = 1$  und  $E(1) = e$ .
- b) Folgt aus 7.13.
- c) Folgt aus  $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ .
- d) Folgt aus  $E(x) \rightarrow \infty \ (x \rightarrow \infty)$  bzw.  $E(x) \rightarrow 0 \ (x \rightarrow -\infty)$ .

e) Es sei  $z := \log x + \log y$ . Dann gilt:

$$E(z) = E(\log x + \log y) = E(\log x)E(\log y) = xy,$$

also

$$\log(xy) = \log E(z) = z.$$

f) Übung. (Ähnlich wie e)).

□

**Erinnerung:** Nach 3.13 gilt:  $\forall x \in \mathbb{R} \forall r \in \mathbb{Q} : E(rx) = E(x)^r$ .

Es sei  $a > 0$ . Mit  $x := \log a$  erhalten wir:

$$\forall r \in \mathbb{Q} : E(r \log a) = E(\log a)^r = a^r.$$

**7.15 Die allgemeine Potenz:** Es sei  $a > 0$ . Wir definieren:

$$a^x := E(x \log a) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Ist speziell  $a = e$ , so ist  $e^x = E(x \log e) = E(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Somit gilt

$$a^x = e^{x \log a} \quad (x \in \mathbb{R}, a > 0).$$

**Eigenschaften:** Es sei  $a > 0$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

a)  $a^x > 0$ ;

b) Die Funktion  $x \mapsto a^x$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig;

c)  $a^{x+y} = e^{(x+y) \log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y$ ;

d)  $a^{-x} = e^{-x \log a} = \frac{1}{e^{x \log a}} = \frac{1}{a^x}$ ;

e)  $\log(a^x) = \log(e^{x \log a}) = x \log a$ ;

f)  $(a^x)^y = e^{y \log a^x} \stackrel{e)}{=} e^{xy \log a} = a^{xy}$ ;

g) Ist auch  $x > 0$ , so ist  $a^{x^y} := a^{(x^y)}$ . Im allgemeinen ist  $a^{x^y} \neq (a^x)^y$ .

**Definition:**  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $D$  **gleichmäßig stetig** :  $\iff$  Sind  $(x_n), (y_n)$  Folgen in  $D$  mit  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , so gilt  $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ .

**Erinnerung an 7.1:** Es sei  $f \in C(D)$ ,  $x_0 \in D$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$  mit:

$$\forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die Zahl  $\delta$  hängt also im Allgemeinen von  $\varepsilon$  und  $x_0$  ab!

**Bemerkung:** Ähnlich wie in 7.1 kann man eine  $\varepsilon$ - $\delta$ -Bedingung für gleichmäßige Stetigkeit beweisen. Es gilt (ohne Beweis):

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleichmäßig stetig  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Offensichtlich gilt: Ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $D$ , so ist  $f$  stetig auf  $D$ .

**Satz 7.16** (Satz von Heine):

Ist  $D \subseteq \mathbb{R}$  kompakt und ist  $f \in C(D)$ , so ist  $f$  auf  $D$  gleichmäßig stetig.

*Beweis:* Annahme:  $f$  ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existieren ein  $\varepsilon > 0$  und Folgen  $(x_n), (y_n)$  in  $D$  mit  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , aber  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Da  $D$  kompakt ist enthält  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in D$ . Nun gilt

$$y_{n_k} = y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} \rightarrow 0 + x_0 = x_0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

also  $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \rightarrow f(x_0) - f(x_0) = 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Ein Widerspruch. □

**Definition:**  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $D$  **Lipschitz-stetig** :  $\iff$

$$\exists L \geq 0 \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Übung: Ist  $f$  Lipschitz-stetig auf  $D$ , so ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $D$ .

**Beispiele:**

a)  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  ist Lipschitz-stetig (also gleichmäßig stetig):

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| = |x + y||x - y| \\ &\leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2|x - y| \quad (x, y \in [0, 1]). \end{aligned}$$

b)  $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$  ist nicht gleichmäßig stetig, insbesondere nicht Lipschitz-stetig:

Betrachte  $(x_n) = (n + \frac{1}{n})$ ,  $(y_n) = (n)$ . Es gilt  $x_n - y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ , aber

$$g(x_n) - g(y_n) = 2 + \frac{1}{n^2} \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

# Kapitel 8

## Funktionenfolgen und -reihen

In diesem §en sei stets  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $s_n := f_1 + f_n + \cdots + f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Definition:**

- a) Die Funktionenfolge  $(f_n)$  heißt **auf  $D$  punktweise konvergent** :  $\iff$  Für jedes  $x \in D$  ist die Folge  $(f_n(x))$  konvergent.

In diesem Fall sei

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in D).$$

Die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt die **Grenzfunktion** von  $(f_n)$ .

- b) Die Funktionenreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  heißt **auf  $D$  punktweise konvergent** :  $\iff$  Für jedes  $x \in D$  ist die Folge  $(s_n(x))$  konvergent.

In diesem Fall sei

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in D).$$

Die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt die **Summenfunktion** von  $(f_n)$ .

**Beispiele:**

- a)  $D = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es gilt:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$(f_n)$  konvergiert auf  $[0, 1]$  punktweise gegen  $f$ .

- b) Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $r > 0$  und  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $D := \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ). Es sei  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Nach 4.1 gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  konvergiert auf  $D$  punktweise gegen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

c)  $D = [0, \infty)$ ,  $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Für jedes  $x \in [0, \infty)$  gilt

$$f_n(x) = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2} + x^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also konvergiert  $(f_n)$  auf  $D$  punktweise gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$ .

**Bemerkung:** Punktweise Konvergenz von  $(f_n)$  auf  $D$  gegen  $f$  bedeutet:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Definition:**

a)  $(f_n)$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig (glm) gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R} : \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig (glm) gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R} : \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D : |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Offensichtlich folgt aus gleichmäßiger Konvergenz stets punktweise Konvergenz. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch (siehe Beispiele unten).

$(f_n)$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$  bedeutet anschaulich: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit:

Für  $n \geq n_0$  liegt der Graph von  $f_n$  im “ $\varepsilon$ -Schlauch“ um den Graphen von  $f$ .

**Beispiele:**



a) Es sei  $D = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Bekannt:  $(f_n)$  konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Es sei  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Wegen  $f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0, 1)$  gilt

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also konvergiert  $(f_n)$  auf  $[0, 1]$  nicht gleichmäßig gegen  $f$ .

b) Wir betrachten  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  auf  $D = (-1, 1)$ . Es gilt:

$$\forall x \in D : s_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \rightarrow \frac{1}{1 - x} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Funktionenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergiert also punktweise auf  $D$  gegen die Summenfunktion  $f(x) := \frac{1}{1-x}$ .

Behauptung:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergiert auf  $D$  nicht gleichmäßig gegen  $f$ .

Beweis: Annahme:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  (also  $(s_n)$ ) konvergiert auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$ . Zu  $\varepsilon = 1$  existiert dann ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$|s_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1 - x} < 1 \quad (n \geq n_0, x \in D).$$

Aber:

$$\frac{|x|^{n+1}}{1 - x} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow 1-),$$

Widerspruch.

c) Es sei  $D = [0, \infty)$ ,  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Bekannt:

$$\forall x \in D : f_n(x) \rightarrow 0 =: f(x).$$

Es sei  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Es gilt  $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und damit:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Also konvergiert  $(f_n)$  auf  $D$  nicht gleichmäßig gegen  $f$ .

**Satz 8.1:**

- a) Die Folge  $(f_n)$  konvergiere auf  $D$  punktweise gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiter sei  $(\alpha_n)$  eine Folge mit  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und

$$\forall n \geq m \quad \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n.$$

Dann konvergiert  $(f_n)$  auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$ .

- b) **Kriterium von Weierstraß:** Es sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $(c_n)$  eine Folge in  $[0, \infty)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  sei konvergent und

$$\forall n \geq m \quad \forall x \in D : |f_n(x)| \leq c_n.$$

Dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  auf  $D$  gleichmäßig.

*Beweis:*

- a) Es sei  $\varepsilon > 0$ . Es gilt:

$$\exists n_0 \geq m \quad \forall n \geq n_0 : \alpha_n < \varepsilon,$$

und damit

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- b) Ohne Beweis.

□

**Satz 8.2:** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ , es sei  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $D := \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ).

Ist  $[a, b] \subseteq D$ , so konvergiert die Potenzreihe auf  $[a, b]$  gleichmäßig.

*Beweis:* Es sei o.B.d.A.  $x_0 = 0$ .

Wähle  $\delta > 0$  so, daß  $-r < -\delta < a < b < \delta < r$ . Für jedes  $x \in [a, b]$  gilt dann  $|x| \leq \delta$ , also

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : |a_n x^n| = |a_n| |x|^n \leq |a_n| \delta^n =: c_n.$$

Nach 4.1 konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n$  absolut, also ist  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergent. Aus  $(*)$  und 8.1 b) folgt die Behauptung. □

**Satz 8.3:**  $(f_n)$  bzw.  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergiere auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:

a) Sind alle  $f_n$  in  $x_0 \in D$  stetig, so ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

b) Sind alle  $f_n \in C(D)$ , so ist  $f \in C(D)$ .

**Folgerungen:**

a) Konvergiert  $(f_n)$  auf  $D$  punktweise gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und gilt  $f_n \in C(D)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) aber  $f \notin C(D)$ , so ist die Konvergenz nicht gleichmäßig.

b) Unter der Voraussetzung von 8.3 a) gilt: Ist  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ , so ist:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{8.3 \text{ a)}}{=} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right). \end{aligned}$$

*Beweis:* (von 8.3)

a) Es sei  $(x_k)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_k \rightarrow x_0$ . Wir zeigen  $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$ : Es sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung gilt:

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall x \in D : |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da  $f_m$  stetig in  $x_0$  ist, gilt  $f_m(x_k) \rightarrow f_m(x_0)$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Damit folgt:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : |f_m(x_k) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für  $k \geq k_0$  gilt damit:

$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(x_0)| &= |f(x_k) - f_m(x_k) + f_m(x_k) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x_k) - f_m(x_k)| + |f_m(x_k) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

b) folgt aus a).

□

*Beweis:* (von 7.4) Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $D := \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  ( $x \in D$ ). Es sei  $x \in D$ . Wähle  $a, b \in \mathbb{R}$  so, daß  $x \in (a, b) \subseteq [a, b] \subseteq D$ . Nach 8.2 konvergiert die Potenzreihe auf  $[a, b]$  gleichmäßig. Nach 8.3 ist  $f \in C([a, b])$ . Also ist  $f$  in  $x$  stetig. Da  $x \in D$  beliebig war ist  $f \in C(D)$ .  $\square$

**Satz 8.4** (Identitätssatz für Potenzreihen): *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $D := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $D := \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  ( $x \in D$ ).*

*Weiter sei  $(x_k)$  eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_k \rightarrow x_0$  und  $f(x_k) = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt:*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = 0.$$

*Insbesondere ist dann  $r = \infty$  und  $f(x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).*

Ohne Beweis.

# Kapitel 9

## Differentialrechnung

I.d. §en sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

**Definition:**  $f$  heißt **in**  $x_0 \in I$  **differenzierbar** (db) :  $\iff$  Es existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Äquivalent ist: Es existiert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall heißt obiger Grenzwert die **Ableitung von  $f$  in  $x_0$**  und wird mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.

Ist  $f$  in jedem  $x \in I$  differenzierbar, so heißt  $f$  **auf  $I$  differenzierbar** und die **Ableitung**  $f': I \rightarrow \mathbb{R}$  **von  $f$  auf  $I$**  ist gegeben durch  $x \mapsto f'(x)$ .

**Beispiele:**

a) Es sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f(x) := c$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Dann ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

b) Es sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ . Es gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$f$  ist also in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar.

c) Es sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = x^n$ . Für  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq x_0$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1} \rightarrow nx_0^{n-1} \quad (x \rightarrow x_0). \end{aligned}$$

Also ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(x) = nx^{n-1}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), kurz:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ auf } \mathbb{R}.$$

d) Es sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ . Für  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$  gilt:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \xrightarrow{7.6} e^{x_0} \quad (h \rightarrow 0).$$

Also ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(x) = e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), kurz:

$$(e^x)' = e^x \text{ auf } \mathbb{R}$$

**Satz 9.1:** Ist  $f$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar, so ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

*Beweis:* Es sei  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$ . Es gilt:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad (x \rightarrow x_0)$$

Also gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . □

**Bemerkung:** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  ist in  $x_0 = 0$  stetig aber in diesem Punkt nicht differenzierbar.

**Satz 9.2** (Differentiationsregeln): Die Funktionen  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien in  $x_0 \in I$  differenzierbar. Dann gilt:

a) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g$  differenzierbar in  $x_0$  und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b)  $fg$  ist differenzierbar in  $x_0$  und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

c) Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so existiert ein  $\delta > 0$  mit  $g(x) \neq 0$  ( $x \in J := I \cap U_\delta(x_0)$ ). Die Funktion  $\frac{f}{g} : J \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar in  $x_0$  und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

*Beweis:*

- a) Übung.
- b) Übung (man orientiere sich an c)).
- c) Nach 9.1 ist  $g$  stetig in  $x_0$ . Wegen  $g(x_0) \neq 0$  folgt mit 6.3 b):

$$\exists \delta > 0 \forall x \in I \cap U_\delta(x_0) =: J : g(x) \neq 0.$$

Sei  $h := \frac{f}{g}$  auf  $J$ . Für  $x \neq x_0, x \in J$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{g(x)} - f(x_0) \frac{\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)}}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\rightarrow \frac{1}{g(x_0)^2}} \left( \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} g(x_0) - f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \right) \\ &\rightarrow \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad (x \rightarrow x_0). \end{aligned}$$

□

**Satz 9.3:** Es sei  $f \in C(I)$  streng monoton, in  $x_0 \in I$  differenzierbar und es sei  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $y_0 := f(x_0)$  und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

*Beweis:* Nach 7.12 ist  $f(I)$  ein Intervall. Es sei  $(y_n)$  eine Folge in  $f(I)$  mit  $y_n \rightarrow y_0$  und  $y_n \neq y_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Setze  $x_n := f^{-1}(y_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Nach 7.13 ist  $f^{-1} \in C(f(I))$ , also gilt  $x_n = f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$ . Somit gilt:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

**Satz 9.4** (Kettenregel): Es sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  sei ein weiteres Intervall,  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $f(I) \subseteq J$ . Weiter sei  $f$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar und  $g$  sei in  $y_0 := f(x_0)$  differenzierbar. Dann ist

$$g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } x_0$$

und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

*Beweis:* Für  $y \in J$  sei

$$\tilde{g}(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0), & y = y_0 \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist  $g$  differenzierbar in  $y_0$ . Damit ist  $\tilde{g}$  stetig in  $y_0$ , d.h.

$$\tilde{g}(y) \rightarrow \tilde{g}(y_0) = g'(y_0) = g'(f(x_0)) \quad (y \rightarrow y_0).$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(f(x)) \rightarrow g'(f(x_0)) \quad (x \rightarrow x_0)$$

Es ist  $g(y) - g(y_0) = \tilde{g}(y)(y - y_0)$  ( $y \in J$ ). Damit folgt:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \tilde{g}(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0) \quad (x \rightarrow x_0).$$

□

**Beispiele:**

a) Es sei  $a > 0$  und  $h(x) = a^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Mit  $g(x) = e^x$  und  $f(x) = x \log a$  gilt  $h(x) = e^{x \log a} = g(f(x))$ . Nach 9.4 gilt:

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a.$$

Kurz:  $(a^x)' = a^x \log a$  auf  $\mathbb{R}$ .

b) Betrachte  $f(x) = e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),  $f^{-1}(y) = \log y$  ( $y \in (0, \infty)$ ). Nach 9.3 ist  $f^{-1}$  auf  $(0, \infty)$  differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\log(y)}} = \frac{1}{y}.$$

Kurz:  $(\log x)' = \frac{1}{x}$  auf  $(0, \infty)$ .



c) Es sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$  ( $x \in (0, \infty)$ ).

$$f'(x) = e^{\alpha \log x} (\alpha \log x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Kurz:  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  auf  $(0, \infty)$ .

d) Aus Beispiel c) folgt:  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  auf  $(0, \infty)$ .

**Anwendung 9.5:** Es sei  $a \in \mathbb{R}$  und o.B.d.A.  $a \neq 0$ . Für  $f(t) = \log(1+t)$  ( $t > -1$ ) gilt:  $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ . Damit folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = 1 \\ \Rightarrow 1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a} x \log(1 + \frac{a}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \log(1 + \frac{a}{x})^x \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{a}{x})^x = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a. \end{aligned}$$

**Definition:** Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}$  und  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

a)  $x_0 \in M$  heißt ein **innerer Punkt von  $M$** :  $\iff \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq M$

b)  $g$  hat in  $x_0 \in M$  ein **lokales Maximum [bzw. Minimum]**:  $\iff$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M : g(x) \leq g(x_0) \quad [ \text{ bzw. } g(x) \geq g(x_0) ].$$

Alternative Sprechweise: **Relatives Maximum [bzw. Minimum]**.

c)  $g$  hat in  $x_0 \in M$  ein **globales Maximum [bzw. Minimum]**:  $\iff$

$$\forall x \in M : g(x) \leq g(x_0) \quad [ \text{ bzw. } g(x) \geq g(x_0) ].$$

Alternative Sprechweise: **Absolutes Maximum [bzw. Minimum]**.

d) **“Extremum”** bedeutet “Maximum oder Minimum”.

**Satz 9.6:** Die Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  habe in  $x_0 \in I$  ein lokales Extremum und sei in  $x_0$  differenzierbar. Ist  $x_0$  ein innerer Punkt von  $I$ , so ist  $f'(x_0) = 0$ .

*Beweis:* O.B.d.A. habe  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum. Dann gilt:

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I \text{ und } f(x) \leq f(x_0) \text{ } (x \in U_\delta(x_0)).$$

Damit ist

$$D(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, & x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ \geq 0, & x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{cases}.$$

Also gilt  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} D(x) \leq 0$  und  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} D(x) \geq 0$ . □

**Satz 9.7** (Der Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechnung):

Es sei  $f \in C([a, b])$  und  $f$  sei auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gilt:

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

*Beweis:* Wir setzen

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (x \in [a, b]).$$

Es gilt:  $g \in C([a, b])$ ,  $g$  ist differenzierbar auf  $(a, b)$ ,  $g(a) = g(b) = 0$  und

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (x \in (a, b)).$$

Wir zeigen:  $\exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = 0$ .

Fall 1:  $g(x) = 0$  ( $x \in [a, b]$ ). ✓

Fall 2:  $g(x_0) \neq 0$  für ein  $x_0 \in [a, b]$ . Nach 7.11 gilt:

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \forall x \in [a, b] : g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2).$$

Nun ist  $x_1 \in (a, b)$  oder  $x_2 \in (a, b)$  (sonst wäre  $g = 0$  auf  $[a, b]$ ). Mit 9.6 folgt:  $g'(x_1) = 0$  oder  $g'(x_2) = 0$ . □

**Folgerung 9.8:** Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $I$ . Dann gilt:

$$f \text{ ist auf } I \text{ konstant} \iff \forall x \in I : f'(x) = 0.$$

*Beweis:* “ $\Rightarrow$ ” ✓, “ $\Leftarrow$ ” Es seien  $x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x_2$ . Nach 9.7 gilt:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

also  $f(x_1) = f(x_2)$ . □

**Anwendung 9.9:** Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gilt:

$$f' = f \text{ auf } I \iff \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x \ (x \in I)$$

*Beweis:* “ $\Rightarrow$ ” ✓, “ $\Leftarrow$ ” Setze  $g(x) := \frac{f(x)}{e^x}$  ( $x \in I$ ). Dann gilt:

$$\forall x \in I : g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = 0.$$

Mit 9.8 folgt:  $\exists c \in \mathbb{R} \ \forall x \in I : g(x) = c$ , also  $f(x) = ce^x$  ( $x \in I$ ). □

**Satz 9.10:**  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  seien auf  $I$  differenzierbar. Dann gilt:

- a) Ist  $f' = g'$  auf  $I$ , so existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f = g + c$  auf  $I$ .
- b) Ist  $f' \geq 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  monoton wachsend auf  $I$ .  
Ist  $f' > 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  streng monoton wachsend auf  $I$ .
- c) Ist  $f' \leq 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  monoton fallend auf  $I$ .  
Ist  $f' < 0$  auf  $I$ , so ist  $f$  streng monoton fallend auf  $I$ .

*Beweis:*

- a) Es gilt  $(f - g)' = f' - g' = 0$  auf  $I$ . Mit 9.8 folgt die Behauptung.
- b) Es sei z.B.  $f' > 0$  auf  $I$  und  $x_1, x_2 \in I$  mit  $x_1 < x_2$ . Mit dem MWS folgt:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} (x_2 - x_1) > 0,$$

also  $f(x_1) < f(x_2)$ .

- c) Analog zur b).

□

### 9.11 Die Regeln von de l'Hospital:

Es sei  $I = (a, b)$ , wobei  $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  zugelassen ist. Es seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  differenzierbar mit  $g'(x) \neq 0$  ( $x \in I$ ), und es sei  $c = a$  oder  $c = b$ . Es existiere

$$L := \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Gilt (I)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$  oder (II)  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$ ,

so ist

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ohne Beweis.

**Beispiele:**

a) Für  $a, b > 0$  gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \log x} = e^0 = 1.$$

d)

$$0 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Die Voraussetzungen der Regeln von de l'Hospital sind hier nicht erfüllt.

**Satz 9.12:** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I = (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $I = \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  ( $x \in I$ ). Dann gilt:

a) Die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$  hat den Konvergenzradius  $r$ .

b)  $f$  ist auf  $I$  differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1} \quad (x \in I).$$

*Beweis:*

a) Es gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$  konvergiert genau dann, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^n$  konvergiert. Beide Potenzreihen haben also denselben Konvergenzradius. Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Mit 4.1 folgt die Behauptung.

b) Ohne Beweis (kann mit 10.18 bewiesen werden).

□

**9.13 Sinus/Cosinus:**  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Nach 9.12 gilt:  $\sin$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und

$$(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

Analog:  $\cos$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $(\cos x)' = -\sin x$ .

**9.14 Definition von  $\pi$ :**

a) Für  $x \in (0, 2)$  ist

$$\sin x = \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right)}_{>0} + \dots > x - \frac{x^3}{3!} > 0.$$

Speziell:  $\sin 1 > 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .

b)  $\exists \xi_0 \in (0, 2): \cos \xi_0 = 0$  und  $\cos x > 0$  ( $x \in [0, \xi_0)$ )

*Beweis:* Es gilt  $\cos 0 = 1 > 0$  und

$$\begin{aligned} \cos 2 &= \cos(1+1) \stackrel{4.4}{=} \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos^2 1 + \sin^2 1 - 2\sin^2 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 1 \leq 1 - 2 \cdot \frac{25}{36} < 0. \end{aligned}$$

Mit 7.7 folgt:  $\exists \xi_0 \in (0, 2) : \cos \xi_0 = 0$ . Weiter gilt:

$$\forall x \in (0, 2) : (\cos x)' = -\sin x \stackrel{a)}{<} 0 \Rightarrow \forall x \in [0, \xi_0) : \cos x > 0.$$

□

c) Es sei  $\xi_0$  wie in b). Wir definieren

$$\pi := 2\xi_0.$$

Es gilt  $\xi_0 \in (0, 2)$ , also  $\pi \in (0, 4)$  ( $\pi \approx 3,14\dots$ ). Es ist  $\frac{\pi}{2} = \xi_0$ , also  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

Damit gilt:

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow |\sin \frac{\pi}{2}| = 1 \stackrel{a)}{\Rightarrow} \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

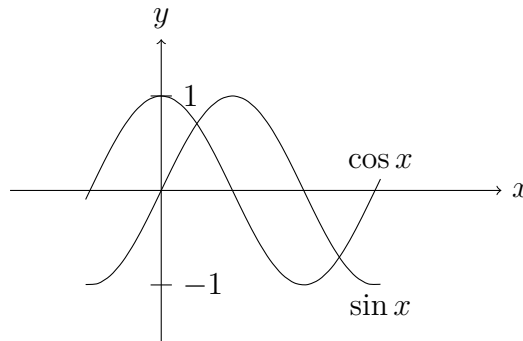


Abbildung 9.1: Sinus und Cosinus.

### 9.15 Weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus:

a) Aus 4.4 folgt:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$$

Analog:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

b)  $\cos$  hat in  $[0, \pi]$  genau eine Nullstelle. Ohne Beweis.

c) In der großen Übungen wird gezeigt:

$$\cos x = 0 \iff x \in \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\sin x = 0 \iff x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

**Definition:** Die Funktion

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt **Tangens**. Es gilt:

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Also ist  $\tan$  auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  streng monoton wachsend.

**Definition:** Es gilt (Übung):  $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$ . Es existiert also die Umkehrfunktion

$$\arctan := \tan^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Sie heißt **Arkustangens**. Mit 9.3 folgt:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Satz 9.16** (Abelscher Grenzwertsatz): Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r \in (0, \infty)$ . Dann gilt:

a) Konvergiert die Potenzreihe auch in  $x_0 + r$  und ist

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ für } x \in (x_0 - r, x_0 + r],$$

so ist  $f$  stetig in  $x_0 + r$ .

b) Konvergiert die Potenzreihe auch in  $x_0 - r$  und ist

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ für } x \in [x_0 - r, x_0 + r),$$

so ist  $f$  stetig in  $x_0 - r$ .

Ohne Beweis.

### Anwendungen 9.17:

a) Betrachte  $f(x) = \log(1+x)$  ( $x \in (-1, 1]$ ). Dann gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (x \in (-1, 1) =: I).$$

Wir setzen  $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$  für  $x \in (-1, 1]$ . Nach 9.12 ist  $g$  differenzierbar auf  $I$  und

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = f'(x) \quad (x \in I).$$

Damit existiert ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = g(x) + c$  ( $x \in I$ ). Mit  $x = 0$  folgt  $c = 0$ . Also gilt:

$$f(x) = g(x) \quad (x \in I).$$

Da  $f$  und  $g$  stetig auf  $(0, 1]$  sind (für  $g$  vgl. 9.16) gilt

$$f(x) = g(x) \quad (x \in (-1, 1]),$$

also

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (x \in (-1, 1]).$$

Insbesondere gilt mit  $x = 1$ :

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

b) Ähnlich wie in a) zeigt man (Übung):

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (x \in [-1, 1]).$$

Insbesondere gilt mit  $x = 1$ :

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Es gilt:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \stackrel{9.15}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Somit gilt:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

### Definition:

a) Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  differenzierbar. Ist  $f'$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar, so heißt  $f$  **in  $x_0$  zweimal differenzierbar** und

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

heißt **die 2. Ableitung von  $f$  in  $x_0$** .



b) Ist  $f'$  auf  $I$  differenzierbar, so heißt  $f$  **auf  $I$  zweimal differenzierbar** und

$$f'' := (f')'$$

die 2. Ableitung von  $f$  auf  $I$ . Entsprechend definiert man, falls vorhanden:

$$f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), f^{(5)}(x_0), \dots \text{ und } f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots$$

c) Für  $n \in \mathbb{N}$  heißt  $f$  **auf  $I$   $n$ -mal stetig differenzierbar**:  $\iff f$  ist auf  $I$   $n$ -mal differenzierbar und  $f^{(n)} \in C(I)$ . In diesem Fall gilt:  $f, f', \dots, f^{(n)} \in C(I)$ . Wir setzen

$$C^0(I) := C(I), \quad f^{(0)} := f,$$

$$C^n(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist auf } I \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$C^\infty(I) := \bigcap_{n \geq 0} C^n(I).$$

### Beispiele:

a)  $(e^x)''' = e^x$ ,  $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$ . Es gilt:  $E, \sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$ .  
 $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

b) Betrachte  $f(x) = x|x|$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Es gilt:

Für  $x > 0$ :  $f(x) = x^2$ ,  $f'(x) = 2x$ .

Für  $x < 0$ :  $f(x) = -x^2$ ,  $f'(x) = -2x$ .

Für  $x = 0$ :  $\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = |t| \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ ), also  $f'(0) = 0$ .

Somit ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar,  $f'(x) = 2|x|$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) und  $f'$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ . In  $x_0 = 0$  ist  $f$  nicht zweimal differenzierbar. Also gilt:  $f \in C^1(\mathbb{R})$  und  $f \notin C^2(\mathbb{R})$ .

Bemerkung: Allgemein gilt:

$$C^0(I) \subsetneq C^1(I) \subsetneq C^2(I) \subsetneq C^3(I) \subsetneq \dots$$

### Beispiel 9.18:

Wir betrachten  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Auf  $(0, 1]$  gilt:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} + x^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}.$$

Weiter gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{beschr.}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

Also ist  $f$  auf  $[0, 1]$  differenzierbar (mit  $f'(0) = 0$ ). Für  $x_n := \frac{1}{2n\pi}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gilt:  $x_n \rightarrow 0$  und

$$f'(x_n) = -\sqrt{2n\pi} \cos(2n\pi) = -\sqrt{2n\pi} \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit ist  $f'$  auf  $[0, 1]$  nicht beschränkt, also insbesondere nicht stetig auf  $[0, 1]$ .

Also:  $f$  ist auf  $[0, 1]$  differenzierbar, aber  $f \notin C^1([0, 1])$ .

**Satz 9.19:** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $I = \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in I).$$

Dann gilt  $f \in C^\infty(I)$  und

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I : f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n(x - x_0)^{n-k}.$$

Mit  $x = x_0$  folgt insbesondere:  $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$ , also

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

*Beweis:* Folgt induktiv aus 9.12. □

**Satz 9.20** (Satz von Taylor):

Es sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $f$  sei auf  $I$   $(n+1)$ -mal differenzierbar. Es seien  $x, x_0 \in I$  und  $x \neq x_0$ .

Dann existiert ein  $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$  mit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

also

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Ohne Beweis.

**Bemerkung:** Im Fall  $n = 0$  folgt die Aussage von 9.20 direkt aus dem MWS.

**Satz 9.21:** Es sei  $n \geq 2$ ,  $f \in C^n(I)$ ,  $x_0 \in I$  sei ein innerer Punkt von  $I$ , und

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- a) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum.
- b) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum.
- c) Ist  $n$  ungerade, so hat  $f$  in  $x_0$  kein lokales Extremum.

*Beweis:* Aus  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$  und  $f^{(n)} \in C(I)$  folgt:

$$(*) \quad \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I \text{ und } f^{(n)}(x)f^{(n)}(x_0) > 0 \quad (x \in U_\delta(x_0)).$$

Es sei  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ . Nach 9.20 existiert ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$  mit:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{=f(x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n}_{=:R(x)}$$

- a) Es gilt  $f^{(n)}(x_0) < 0$ . Mit  $(*)$  folgt  $f^{(n)}(\xi) < 0$ . Da  $n$  gerade ist gilt  $(x - x_0)^n > 0$ . Also ist  $R(x) < 0$ . Somit gilt:

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} : f(x) < f(x_0).$$

- b) Analog zu a).

- c) Es sei o.B.d.A.  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , also  $f^{(n)}(\xi) > 0$ . Da  $n$  ungerade ist gilt

$$(x - x_0)^n \begin{cases} > 0, & x > x_0 \\ < 0, & x < x_0 \end{cases}$$

und damit

$$R(x) \begin{cases} > 0, & x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ < 0, & x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{cases} \Rightarrow f(x) \begin{cases} > f(x_0), & x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ < f(x_0), & x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{cases}.$$

□

# Kapitel 10

## Das Riemann-Integral

**Vereinbarung:** In diesem §en sei stets  $a < b$ ,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $f$  beschränkt auf  $[a, b]$ . Wir setzen  $m := \inf f([a, b])$ ,  $M := \sup f([a, b])$ .

**Definition:**

a)  $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  heißt eine **Zerlegung** von  $[a, b]$  :  $\Longleftrightarrow$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

$\mathcal{Z} := \{Z : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$ .

b) Es sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}$ . Wir definieren

$$I_j := [x_{j-1}, x_j], \quad |I_j| := x_j - x_{j-1}, \quad m_j := \inf f(I_j), \quad M_j := \sup f(I_j) \quad (j = 1, \dots, n),$$

sowie

$$s_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j |I_j| \quad (\text{die } \mathbf{Untersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z),$$

$$S_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j |I_j| \quad (\text{die } \mathbf{Obersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z).$$

Für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $m \leq m_j \leq M_j \leq M$ , also  $m|I_j| \leq m_j|I_j| \leq M_j|I_j| \leq M|I_j|$  und somit

$$(*) \quad m(b-a) = m \sum_{j=1}^n |I_j| \leq s_f(Z) \leq S_f(Z) \leq M \sum_{j=1}^n |I_j| = M(b-a).$$

**Definition:** Es seien  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ .  $Z_2$  heißt eine **Verfeinerung** von  $Z_1$  :  $\Longleftrightarrow Z_1 \subseteq Z_2$ .

**Satz 10.1:** Es seien  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ . Dann gilt:

a)  $s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$ .

b) Ist  $Z_1 \subseteq Z_2$ , so gilt:

$$s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2), \quad S_f(Z_1) \geq S_f(Z_2).$$

Ohne Beweis.

Aus (\*) folgt: Es existieren

$$s_f := \sup\{s_f(Z) : Z \in \mathcal{Z}\} \text{ und } S_f := \inf\{S_f(Z) : Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Aus (\*) und 10.1 a) folgt:

$$m(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq M(b-a).$$

### Definition:

Die Funktion  $f$  heißt (Riemann-) **integrierbar** (ib) über  $[a, b] : \iff s_f = S_f$ . In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := S_f (= s_f)$$

das (Riemann-) **Integral** von  $f$  über  $[a, b]$  und wir schreiben:

$$f \in R([a, b]) \text{ oder } f \in R([a, b], \mathbb{R}).$$

### Beispiele:

a) Es sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = c$  ( $x \in [a, b]$ ). Dann gilt  $c(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq c(b-a)$ , also  $f \in R[a, b]$  und  $\int_a^b c dx = c(b-a)$ .

b) Es sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[0, 1]$  und  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Hier gilt:  $m_j = \inf f(I_j) = 0$ ,  $M_j = \sup f(I_j) = 1$  ( $j = 1, \dots, n$ ), also  $s_f(Z) = 0$ ,  $S_f(Z) = 1$ . Somit ist  $s_f = 0 \neq 1 = S_f$  und damit  $f \notin R([0, 1])$ .

**Satz 10.2:** Es seien  $f, g \in R([a, b])$ . Dann gilt:

a) Ist  $f \leq g$  auf  $[a, b]$ , so ist  $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ .

b) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g \in R([a, b])$  und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

*Beweis:* Nur a) ( b) Übung): Es sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}$ ,  $I_j$  und  $m_j$  wie immer. Es sei  $\widetilde{m}_j := \inf g(I_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Wegen  $f \leq g$  auf  $I_j$  gilt:

$$m_j \leq \widetilde{m}_j \quad (j = 1, \dots, n) \text{ und damit } s_f(Z) \leq s_g(Z) \leq s_g.$$

Da  $Z \in \mathcal{Z}$  beliebig war folgt

$$\int_a^b f dx = s_f \leq s_g = \int_a^b g dx.$$

□

**Satz 10.3** (Riemannsches Integrabilitätskriterium):

*Es gilt:*

$$f \in R([a, b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists Z = Z(\varepsilon) \in \mathcal{Z} : S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon.$$

Ohne Beweis.

**Satz 10.4:** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton, so ist  $f \in R([a, b])$ .

*Beweis:* O.B.d.A. sei  $f$  monoton wachsend. Es sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $n \in \mathbb{N}$  so, daß

$$\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Für  $j = 0, \dots, n$  sei  $x_j := a + j \frac{b-a}{n}$ . Damit ist  $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}$ . Es seien  $I_j, m_j$  und  $M_j$  wie immer. Es gilt:

$$|I_j| = \frac{b-a}{n}, \quad m_j = f(x_{j-1}), \quad M_j = f(x_j) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Also:

$$\begin{aligned} S_f(Z) - s_f(Z) &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |I_j| \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit 10.3 folgt die Behauptung.

□

**Satz 10.5:** Es gilt:  $C([a, b]) \subseteq R([a, b])$ .

*Beweis:* Es sei  $f \in C([a, b])$  und  $\varepsilon > 0$ . Mit 7.16 folgt:

$$(*) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t, s \in [a, b] : |t - s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Es sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}$  so gewählt, daß  $|I_j| < \delta$  ( $j = 1, \dots, n$ ), und  $I_j, M_j, m_j$  seien wie immer. Betrachte  $I_j$ : Nach 7.11 gilt:

$$\exists \xi, \eta \in I_j : f(\xi) = m_j, f(\eta) = M_j.$$

Wegen  $|I_j| < \delta$  ist  $|\xi - \eta| < \delta$  und mit (\*) folgt:

$$M_j - m_j = f(\eta) - f(\xi) = |f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Damit ist

$$S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |I_j| < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{j=1}^n |I_j| = \varepsilon.$$

Mit 10.3 folgt die Behauptung. □

**Definition:** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $G, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Die Funktion  $G$  heißt eine **Stammfunktion** von  $g$  auf  $I$  :  $\iff G$  ist auf  $I$  differenzierbar und  $G' = g$  auf  $I$ .

Beachte: Sind  $G$  und  $H$  Stammfunktionen von  $g$  auf  $I$ , so ist  $G' = g = H'$  auf  $I$  und nach 9.10 gilt

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I : G(x) = H(x) + c.$$

**Satz 10.6** (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):

Ist  $f \in R([a, b])$  und besitzt  $f$  auf  $[a, b]$  eine Stammfunktion  $F$ , so ist

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Beweis:* Es sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}$ , und  $I_j, m_j, M_j$  seien wie immer. Für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) \stackrel{MWS}{=} F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j) \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{=|I_j|},$$

mit  $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ . Wegen  $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$  gilt  $m_j|I_j| \leq f(\xi_j)|I_j| \leq M_j|I_j|$ . Summation über  $j$  liefert

$$s_f(Z) \leq \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j| = \sum_{j=1}^n (F(x_j) - F(x_{j-1})) = F(b) - F(a) \leq S_f(Z).$$

Also gilt:

$$\forall Z \in \mathcal{Z} : s_f(Z) \leq F(b) - F(a) \leq S_f(Z).$$

Wegen  $f \in R([a, b])$  folgt:

$$\int_a^b f dx = s_f \leq F(b) - F(a) \leq S_f = \int_a^b f dx.$$

□

In Rechnungen ist folgende Schreibweise nützlich:

$$F(x) \Big|_a^b := [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

**Beispiele:**

- a) Es sei  $0 < a < b$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \in [a, b]$ ). Es gilt  $f \in C([a, b]) \xrightarrow{10.5} f \in R([a, b])$ , und  $F(x) := \log x$  ist eine Stammfunktion von  $f$  auf  $[a, b]$ . Mit 10.6 folgt:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_a^b = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

- b) Es gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

**Bemerkung:**

- a) Es gibt integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen!
- b) Es gibt nicht integrierbare Funktionen, die Stammfunktionen besitzen!

**Beispiele:**



a) Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f$  ist monoton  $\xRightarrow{10.4} f \in R([0, 1])$ .

Annahme:  $f$  besitzt auf  $[0, 1]$  eine Stammfunktion  $F$ . Dann gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in [0, 1]), \text{ also } F'(x) = 1 \quad (x \in (0, 1]).$$

Mit 9.10 folgt:  $\exists c \in \mathbb{R} : F(x) = x + c \quad (x \in (0, 1])$ . Weiter gilt:

$F$  ist differenzierbar in 0  $\Rightarrow F$  ist stetig in 0  $\Rightarrow F(0) = c$ . Also ist  $F(x) = x + c$  ( $x \in [0, 1]$ ). Es folgt

$$0 = f(0) = F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + c - c}{x} = 1,$$

ein Widerspruch.

b) Betrachte

$$F(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Nach 9.18 ist  $F$  auf  $[0, 1]$  differenzierbar. Setze  $f := F'$ . Dann ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $[0, 1]$ . Nach 9.18 ist  $f$  auf  $[0, 1]$  nicht beschränkt, also  $f \notin R([a, b])$ .

**Satz 10.7:** Es sei  $c \in (a, b)$ . Dann gilt:

$$f \in R([a, b]) \iff f \in R([a, c]) \text{ und } f \in R([c, b]).$$

In diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

Ohne Beweis.

**Motivation:** Für  $n \geq 2$  sei

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ n - (x - \frac{1}{n})n^2, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

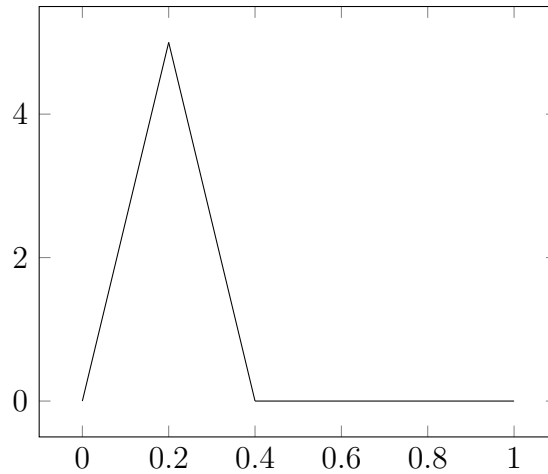


Abbildung 10.1:  $f_n$  für  $n = 5$ .

Es gilt:

$$f_n \in C([0, 1]) \xrightarrow{10.5} f_n \in R([0, 1]) \xrightarrow[10.7]{10.6} \int_0^1 f_n dx = 1 \quad (n \geq 2).$$

Übung:  $(f_n)$  konvergiert auf  $[0, 1]$  punktweise gegen  $f = 0$ . Also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

**Satz 10.8:** Es sei  $(f_n)$  eine Folge in  $R([a, b])$  und  $(f_n)$  konvergiere auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:  $f \in R([a, b])$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Ohne Beweis.

**Satz 10.9:** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I := (x_0 - r, x_0 + r)$  ( $I := \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in I)$$

Dann hat die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$  den Konvergenzradius  $r$  und für

$$(*) \quad G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} \quad (x \in I).$$

gilt  $G' = g$  auf  $I$ .

*Beweis:* Es sei  $\tilde{r}$  der Konvergenzradius der Potenzreihe in (\*). Nach 9.12 gilt  $r = \tilde{r}$  und  $G' = g$  auf  $I$ .  $\square$

**Satz 10.10:** *Es seien  $f, g \in R([a, b])$ . Dann gilt:*

a) *Es sei  $D := f([a, b])$  und mit einem  $L \geq 0$  gelte für  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ :*

$$|h(s) - h(t)| \leq L|s - t| \quad (t, s \in D).$$

*Dann ist  $h \circ f \in R([a, b])$ .*

b)  *$|f| \in R([a, b])$  und  $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$  ( $\Delta$ -Ungleichung für Integrale).*

c)  *$fg \in R([a, b])$ .*

d) *Ist  $g(x) \neq 0$  ( $x \in [a, b]$ ) und  $\frac{1}{g}$  auf  $[a, b]$  beschränkt, so ist  $\frac{1}{g} \in R([a, b])$ .*

*Beweis:*

a) , c) und d) ohne Beweis.

b) Es sei  $D := f([a, b])$  und  $h(t) := |t|$  ( $t \in D$ ). Dann ist  $|f| = h \circ f$ . Für  $t, s \in D$  gilt:

$$|h(t) - h(s)| = ||t| - |s|| \leq |t - s|.$$

Aus a) folgt  $|f| \in R([a, b])$ . Weiter ist  $\pm f \leq |f|$  auf  $[a, b]$ . Mit 10.2 folgt

$$\pm \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx, \text{ also } |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

$\square$

**Definition:** *Es sei  $f \in R([a, b])$  und  $\alpha, \beta \in [a, b]$ . Wir setzen*

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx := 0.$$

*Ist  $\alpha < \beta$ , so ist nach 10.7  $f \in R([\alpha, \beta])$  und wir setzen*

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx := - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

**Satz 10.11** (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):

Es sei  $f \in R([a, b])$  und

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b]).$$

Dann gilt:

- a)  $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt$  ( $x, y \in [a, b]$ ).
- b)  $F$  ist Lipschitz-stetig.
- c) Ist  $f \in C([a, b])$ , so ist  $F \in C^1([a, b])$  und  $F'(x) = f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ).

*Beweis:*

- a) Es seien  $x, y \in [a, b]$ .

Fall 1: Für  $x \leq y$  gilt

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &\stackrel{10.7}{=} \int_a^x f(t) dt + \int_x^y f(t) - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^y f(t) dt \end{aligned}$$

Fall 2: Für  $x > y$  gilt

$$F(y) - F(x) = -(F(x) - F(y)) \stackrel{Fall 1}{=} - \int_y^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt.$$

- b) Setze  $L := \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$ . Es seien  $x, y \in [a, b]$  und o.B.d.A. sei  $x \leq y$ .  
Dann gilt:

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &\stackrel{a)}{=} \left| \int_x^y f(t) dt \right| \stackrel{10.10}{\leq} \int_x^y |f(t)| dt \stackrel{10.2}{\leq} \int_x^y L dt \\ &= L(y - x) = L|y - x|. \end{aligned}$$

- c) Wir zeigen für  $x_0 \in [a, b]$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

(analog zeigt man für  $x_0 \in (a, b]$ :  $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$ ).

Sei also  $x_0 \in [a, b)$ ,  $h > 0$  und  $x_0 + h \in [a, b]$ . Es ist

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = f(x_0)$$

und

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \stackrel{a)}{=} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} D(h) &:= \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\stackrel{10.10}{\leq} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt. \end{aligned}$$

Die Funktion  $t \mapsto |f(t) - f(x_0)|$  ist stetig auf  $[a, b]$ . Nach 7.11 gilt daher:

$$\exists \xi_h \in [x_0, x_0+h] \quad \forall t \in [x_0, x_0+h] : |f(t) - f(x_0)| \leq |f(\xi_h) - f(x_0)|.$$

Also gilt:

$$D(h) \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(\xi_h) - f(x_0)| dt = |f(\xi_h) - f(x_0)|.$$

Für  $h \rightarrow 0+$  gilt  $\xi_h \rightarrow x_0$ . Da  $f$  stetig ist folgt  $f(\xi_h) \rightarrow f(x_0)$  ( $h \rightarrow 0+$ ), also  $D(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0+$ ).

□

Aus 10.10 folgt (Übung):

**Folgerung 10.12:** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $g \in C(I)$  und  $x_0 \in I$  (fest). Definiere  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Dann gilt:  $G \in C^1(I)$  und  $G' = g$  auf  $I$ .

**Definition:** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Besitzt  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  eine Stammfunktion, so schreibt man für eine solche auch

$$\int g dx \text{ oder } \int g(x) dx$$

und nennt dies ein **unbestimmtes Integral** von  $g$ .

**Beispiel 10.13:**

$$\int \cos x dx = \sin x, \quad \int \cos x dx = \sin x + 17.$$

**Satz 10.14** (Partielle Integration):

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f, g \in C^1(I)$ . Dann gilt:

a)  $\int f' g dx = f g - \int f g' dx$  auf  $I$ .

b) Ist  $I = [a, b]$ , so ist  $\int_a^b f' g dx = f g \Big|_a^b - \int_a^b f g' dx$ .

*Beweis:* Es gilt  $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$  und damit a), sowie

$$\int_a^b f' g dx = \int_a^b (fg)' dx - \int_a^b f g' dx \stackrel{10.6}{=} f g \Big|_a^b - \int_a^b f g' dx.$$

□

**Beispiele:**

a)

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_g dx = -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x dx \\ &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx = -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ &= x - \cos x \sin x - \int \sin^2 x dx \\ &\Rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x). \end{aligned}$$

b) Ungeeignete Anwendung der partiellen Integration:

$$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \int \frac{1}{2} x^2 e^x dx.$$

Besser:

$$\int \underbrace{x}_g \underbrace{e^x}_{f'} dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x.$$

c)

$$\int \log x dx = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_g dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x.$$

**Bezeichnung:** Es seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\alpha \neq \beta$ . Wir setzen

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \begin{cases} [\alpha, \beta], & \text{falls } \alpha < \beta \\ [\beta, \alpha], & \text{falls } \alpha > \beta \end{cases}$$

**Satz 10.15** (Substitutionsregeln):

Es seien  $I$  und  $J$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ , es sei  $f \in C(I)$ ,  $g \in C^1(J)$  und  $g(J) \subseteq I$ .

a) Es gilt

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=g(t)} \text{ auf } J.$$

b) Es sei  $g'(t) \neq 0$  ( $t \in J$ ) ( $\Rightarrow g' > 0$  auf  $J$  oder  $g' < 0$  auf  $J \Rightarrow g$  ist streng monoton).

Dann gilt:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} \text{ auf } I.$$

c) Ist  $I = \langle a, b \rangle$ ,  $J = \langle \alpha, \beta \rangle$ ,  $g(\alpha) = a$  und  $g(\beta) = b$ , so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

*Beweis:* Nach 10.2 hat  $f$  auf  $I$  eine Stammfunktion  $F$ . Setze  $G(t) := F(g(t))$  ( $t \in J$ ). Es gilt (Kettenregel):  $G \in C^1(J)$  und

$$G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \quad (t \in J)$$

und damit

a)

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int G'(t)dt = G(t) = F(g(t)) = \int f(x)dx \Big|_{x=g(t)}.$$

b)

$$\int f(g(t))g'(t)dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = G(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x))) = F(x) = \int f(x)dx.$$

c)

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt &\stackrel{10.6}{=} G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \stackrel{10.6}{=} \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

□

**Merkregel:** Ist  $y = y(x)$  eine differenzierbare Funktion, so schreibt man für  $y'$  auch  $\frac{dy}{dx}$ .  
Zu 10.15: Substituiere  $x = g(t)$ , fasse also  $x$  als Funktion von  $t$  auf. Dann:  $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ , also

$$“dx = g'(t)dt”.$$

**Beispiele:**

a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx &\begin{cases} x = \log t, e^x = t \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, dx = \frac{1}{t} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = e \end{cases} \\ &= \int_1^e \frac{t^2 + 1}{t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{t^2 + 1}{t^2} = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{t}\right]_1^e = e - \frac{1}{e} - (1 - 1) = e - \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx &\begin{cases} x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{dx}{dt} = \cos t, dx = \cos t dt \end{cases} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) dt \\ &\stackrel{s.o.}{=} \left[t - \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

**Satz 10.16:** Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt:



a) Ist  $\{x \in [a, b] : f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}$  endlich, so ist  $f \in R([a, b])$ .

b) Ist  $f \in R([a, b])$  und  $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$  endlich, so ist  $g \in R([a, b])$  und

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Ohne Beweis.

**Satz 10.17:** Es seien  $f, g \in R([a, b])$ ,  $g \geq 0$  auf  $[a, b]$ ,  $m := \inf f([a, b])$  und  $M := \sup f([a, b])$ . Dann gilt:

a)  $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx.$

b)  $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f dx = \mu(b - a).$

Ist  $f \in C([a, b])$ , so existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $\mu = f(\xi)$  in a) bzw. b).

*Beweis:*

a) Aus  $g \geq 0$  auf  $[a, b]$  folgt  $mg \leq fg \leq Mg$  auf  $[a, b]$ . Mit 10.2 folgt

$$m \underbrace{\int_a^b g dx}_{=: A} \leq \underbrace{\int_a^b f g dx}_{=: B} \leq M \int_a^b g dx,$$

also  $mA \leq B \leq MA$ . Beachte:  $A \geq 0$ .

Fall 1:  $A = 0$ . Dann ist  $B = 0$  und jedes  $\mu \in [m, M]$  leistet das Verlangte.

Fall 2:  $A > 0$ . Es gilt:  $m \leq \frac{B}{A} \leq M$ . Nun leistet  $\mu = \frac{B}{A}$  das Verlangte.

b) Mit  $g = 1$  auf  $[a, b]$  folgt die Behauptung aus a).

Der Zusatz folgt aus 7.7 und 7.11. □

**Satz 10.18:** Es sei  $(f_n)$  eine Folge mit:

i)  $f_n \in C^1([a, b])$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),

ii)  $(f_n(a))$  ist konvergent,

iii)  $(f'_n)$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dann konvergiert  $(f_n)$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig und für

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in [a, b])$$

gilt:

$$f \in C^1([a, b]) \text{ und } f'(x) = g(x) \quad (x \in [a, b]).$$

**Bemerkung:** Satz 10.18 enthält wieder eine Aussage über das Vertauschen von Grenzwerten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) = f'(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' \quad (x \in [a, b]).$$

*Beweis:* Wir setzen  $\alpha_n := \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Nach iii) folgt:  $(|f'_n - g|)$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen 0. Damit folgt mit 10.8:  $\alpha_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Wir setzen  $c := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ . Für jedes  $x \in [a, b]$  gilt:

$$f_n(x) \stackrel{10.6}{=} \underbrace{f_n(a)}_{\rightarrow c} + \int_a^x f'_n(t) dt \stackrel{10.8}{\rightarrow} c + \int_a^x g(t) dt =: f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also:  $(f_n)$  konvergiert auf  $[a, b]$  punktweise gegen  $f$ . Mit 8.3 a) folgt  $g \in C([a, b])$ , und nach 10.11 ist daher  $f \in C^1([a, b])$  und  $f' = g$  auf  $[a, b]$ .

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - c - \int_a^x g(t) dt| \\ &\stackrel{10.6}{=} \left| \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt + f_n(a) - c \right| \\ &\leq \int_a^x |f'_n(t) - g(t)| dt + |f_n(a) - c| \\ &\leq \int_a^b |f'_n(t) - g(t)| dt + |f_n(a) - c| \\ &= \underbrace{\alpha_n}_{\rightarrow 0} + |f_n(a) - c| \quad (x \in [a, b]). \end{aligned}$$

Mit 8.1 folgt:  $(f_n)$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f$ . □

**Bemerkung:** Der Beweis von 9.12 b) kann mit 8.2 und 10.18 geführt werden.

# Kapitel 11

## Uneigentliche Integrale

**Vereinbarung:** Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so soll stets gelten:  $f \in R(J)$  für jedes kompakte Intervall  $J \subseteq I$ .

**Definition:**

a) Es sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $a < \beta$  und  $f: [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Das **uneigentliche Integral**  $\int_a^\beta f(x)dx$  heißt **konvergent** :  $\Longleftrightarrow$

$$\text{Es existiert } \lim_{t \rightarrow \beta-} \int_a^t f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall:

$$\int_a^\beta f(x)dx := \lim_{t \rightarrow \beta-} \int_a^t f(x)dx.$$

b) Es sei  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\alpha < b$  und  $f: (\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Das **uneigentliche Integral**  $\int_\alpha^b f(x)dx$  heißt **konvergent** :  $\Longleftrightarrow$

$$\text{Es existiert } \lim_{t \rightarrow \alpha+} \int_t^b f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall:

$$\int_\alpha^b f(x)dx := \lim_{t \rightarrow \alpha+} \int_t^b f(x)dx.$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt *divergent*.

**Beispiele:**

a)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx$ , ( $\gamma > 0$ ) ( $a = 1, \beta = \infty$ ). Für  $t > 1$  gilt:

$$\int_1^t \frac{1}{x^\gamma} dx = \begin{cases} \log t, & \text{falls } \gamma = 1 \\ \frac{1}{1-\gamma}(t^{1-\gamma} - 1), & \text{falls } \gamma \neq 1 \end{cases}$$

Also gilt:  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx$  konvergiert  $\Longleftrightarrow \gamma > 1$ . In diesem Fall ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

b)  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$  ( $a=0, \beta=\infty$ ). Für  $t > 0$  gilt:

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan t \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Also ist  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$  konvergent und  $= \frac{\pi}{2}$ .

c)  $\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx$ ,  $\gamma > 0$  ( $\alpha=0, b=1$ ). Wie in Beispiel a) sieht man:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx \text{ konvergiert} \iff \gamma < 1$$

. In diesem Fall ist

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} dx = \frac{1}{1-\gamma}.$$

d)  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$  ( $\alpha=-\infty, b=0$ ). Wie in Beispiel b) sieht man:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ konvergiert und } = \frac{\pi}{2}.$$

e)  $\int_0^\infty \sin x dx$  ( $a=0, \beta=\infty$ ). Es sei  $t_n = n\pi$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es gilt:  $t_n \rightarrow \infty$  und

$$\int_0^{t_n} \sin x dx = -\cos \Big|_0^{t_n} = 1 - \cos t_n = 1 - \cos(n\pi) = 1 - (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist  $\int_0^\infty \sin x dx$  divergent.

**Definition:** Es sei  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Das **uneigentliche Integral**  $\int_\alpha^\beta f(x) dx$  heißt **konvergent** :  $\iff$

$$\exists c \in (\alpha, \beta) : \int_\alpha^c f(x) dx \text{ und } \int_c^\beta f(x) dx \text{ sind konvergent}.$$

In diesem Fall:

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx := \int_\alpha^c f(x) dx + \int_c^\beta f(x) dx.$$

Im anderen Fall heißt das Integral divergent.

**Übung:** Obige Definition ist unabhängig von  $c \in (\alpha, \beta)$ .

**Beispiele:**

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$  ist divergent, denn  $\int_0^{\infty} x dx$  ist divergent.

b) Es sei  $\gamma > 0$ . Obige Beispiele a) und c) zeigen:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx \text{ ist divergent.}$$

c) Obige Beispiele b) und d) zeigen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ist konvergent und } = \pi.$$

Die folgenden Definitionen und Sätze formulieren wir nur für uneigentliche Integrale der Form

$$\int_a^\beta f(x) dx.$$

Sie gelten sinngemäß auch für die beiden anderen Typen uneigentlicher Integrale.

**Bemerkung:** Für  $t \in [a, \beta)$  sei  $g(t) := \int_a^t f(x) dx$ . Dann gilt:

$$\int_a^\beta f(x) dx \text{ konvergiert} \iff \lim_{t \rightarrow \beta^-} g(t) \text{ existiert und ist in } \mathbb{R}.$$

D.h. die Konvergenz eines uneigentlichen Integrals ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Funktionenlimes.

**Satz 11.1** (Cauchy Kriterium): *Es gilt:*

$$\int_a^\beta f(x) dx \text{ konvergiert} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a, \beta) \forall u, v \in (c, \beta) : \left| \int_u^v f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

*Beweis:* Folgt aus 6.2 c). □

**Beispiel:** Behauptung:  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  konvergiert.

*Beweis:* Für  $1 < u < v$  gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_u^v \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \int_u^v \underbrace{\frac{1}{x}}_g \underbrace{\sin x}_{f'} dx \right| \\ &= \left| \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_u^v - \int_u^v -\frac{1}{x^2} (-\cos x) dx \right| \\ &= \left| \frac{\cos v}{v} - \frac{\cos u}{u} - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \int_u^v \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{u} \end{aligned}$$

Es sei  $\varepsilon > 0$  und o.B.d.A  $\varepsilon < 2$ . Setze  $c := \frac{2}{\varepsilon}$ . Für  $\frac{2}{\varepsilon} = c < u < v$  gilt nun:

$$\left| \int_u^v \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{u} < \varepsilon.$$

Mit 11.1 folgt die Behauptung. □

**Definition:**

$$\int_a^\beta f(x) dx \text{ heißt } \mathbf{absolut\ konvergent} : \iff \int_a^\beta |f(x)| dx \text{ ist konvergent.}$$

**Beispiel:**  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  ist nicht absolut konvergent (Übung).

Den folgenden Satz beweist man mit 11.1 ähnlich wie bei Reihen:

**Satz 11.2:**

a) Ist  $\int_a^\beta f(x) dx$  absolut konvergent, so ist  $\int_a^\beta f(x) dx$  konvergent und

$$\left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)| dx.$$

b) **Majorantenkriterium:** Ist  $|f| \leq h$  auf  $[a, \beta)$  und  $\int_a^\beta h(x) dx$  konvergent, so ist  $\int_a^\beta f(x) dx$  konvergent.

c) **Minorantenkriterium:** Ist  $f \geq h \geq 0$  auf  $[a, \beta)$  und  $\int_a^\beta h(x) dx$  divergent, so ist  $\int_a^\beta f(x) dx$  divergent.

**Beispiele:**

a)  $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^5}}}_{=:f(x)} dx$ . Für  $x \geq 1$  gilt:  $|f(x)| = f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =: g(x)$ .

$$\int_1^\infty g(x) dx \text{ konvergiert} \Rightarrow \int_1^\infty f(x) dx \text{ konvergiert.}$$

b)  $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7x}}_{=:f(x)} dx$ . Es sei  $g(x) := \frac{1}{x}$ . Es gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2+7x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \exists c \geq 1 \ \forall x \geq c : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \forall x \geq c : f(x) \geq \frac{1}{2}g(x).$$

Weiter gilt:

$$\int_c^\infty \frac{1}{2}g(x)dx \text{ divergiert} \Rightarrow \int_c^\infty f(x)dx \text{ divergiert} \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ divergiert}.$$

# Kapitel 12

## Die komplexe Exponentialfunktion

Erinnerung (lineare Algebra): Die Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen ist ein Körper. Alle aus den Körperaxiomen hergeleiteten Formeln gelten daher auch in  $\mathbb{C}$ .

**Beispiele:**

- a) Die Binomische Formel gilt in  $\mathbb{C}$ .
- b) Die geometrische Summenformel gilt in  $\mathbb{C}$ :

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \in \mathbb{C}, z \neq 1).$$

Es sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  heißt **Betrag** von  $z$ .

$\bar{z} := x - iy$  heißt **komplex Konjugierte** von  $z$ .

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

**Definition:** Die auf  $\mathbb{C}$  definierte Funktion

$$z = x + iy \mapsto e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$$

heißt **komplexe Exponentialfunktion**.

Ist  $z = x \in \mathbb{R}$ , so ist  $e^z = e^x$ ; ist  $z = it$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), so ist  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ .

**Satz 12.1:** Es gilt:



$$a) \forall z, w \in \mathbb{C} : e^{z+w} = e^z e^w; \forall z \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{Z} : e^{nz} = (e^z)^n.$$

$$b) \forall t \in \mathbb{R} : |e^{it}| = 1, \quad e^{-it} = \overline{e^{it}}.$$

$$c) e^{i\pi} + 1 = 0.$$

$$d) \forall k \in \mathbb{Z} \forall z \in \mathbb{C} : e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

$$e) \forall t \in \mathbb{R} : \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

*Beweis:*

$$a) \text{ Übung (mit den Additionstheoremen von } E, \sin, \cos).$$

b)

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow |e^{it}| = (\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t = \overline{\cos t + i \sin t} = \overline{e^{it}}.$$

$$c) e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

$$d) e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)) = e^z.$$

$$e) e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t, \quad e^{it} - e^{-it} = 2i \sin t.$$

□

**Definition:** Für  $z \in \mathbb{C}$  sei

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

**Übung:** Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z,$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

**Satz 12.2:** Es sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Dann gilt:

$$e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i.$$

*Beweis:* “ $\Leftarrow$ ”: Folgt aus 12.1 d).

“ $\Rightarrow$ ”: Es sei  $e^z = 1$ , also

$$1 = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$\Rightarrow e^x \cos y = 1, e^x \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : y = j\pi.$$

Also ist  $\cos y = (-1)^j$ , somit  $1 = e^x(-1)^j$  und daher  $j = 2k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  und  $x = 0$ .

Also gilt  $z = 2k\pi i$ .  $\square$

Aus 12.2 folgt:

$$\begin{aligned} e^z = e^w &\iff e^z e^{-w} = e^w e^{-w} \\ &\iff e^{z-w} = e^{w-w} = e^0 = 1 \\ &\stackrel{12.2}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} : z = w + 2k\pi i \end{aligned}$$

**Polarkoordinaten:** Es sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) und  $z \neq 0$ . Wir setzen

$$r := |z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Die Gerade durch 0 und  $z$  schließt mit der positiven  $x$ -Achse einen Winkel  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  ein. Die Zahl  $\varphi$  heißt das **Argument von**  $z$ ;  $\arg z := \varphi$ . Es gilt

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

also

$$z = x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r e^{i\varphi} = |z| e^{i \arg z}.$$

Ist weiter  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $\psi := \arg w$ , so gilt:

$$zw = |z| e^{i\varphi} |w| e^{i\psi} = |z||w| e^{i(\varphi+\psi)}$$

**Satz 12.3** (Fundamentalsatz der Algebra):

Es sei  $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  ein Polynom mit  $n \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  und  $a_n \neq 0$ .

Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  mit

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Insbesondere gilt:

$$p(z) = 0 \iff z \in \{z_1, \dots, z_n\}.$$

Ohne Beweis.

**Definition:** Es sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^n = a$  heißt eine  **$n$ -te Wurzel aus  $a$** .

$\sqrt[n]{a}$  bezeichnet eine  $n$ -te Wurzel aus  $a$ .

**Satz 12.4:** Es sei  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r := |a|$  und  $\varphi := \arg a$  (also  $a = |a|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$ ). Für  $k = 0, 1, \dots, n-1$  sei

$$z_k := \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

Dann gilt:

- a)  $z_j \neq z_k$  für  $j \neq k$ .
- b)  $z$  ist eine  $n$ -te Wurzel aus  $a \iff z \in \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ .

*Beweis:*

- a) Es seien  $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $k \geq j$ . Ist

$$z_k = e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\varphi+2j\pi}{n}} = z_j,$$

so existiert ein  $l \in \mathbb{Z}$  mit:

$$i\frac{\varphi+2k\pi}{n} = i\frac{\varphi+2j\pi}{n} + 2l\pi i \Rightarrow \frac{\varphi}{2\pi} + k = \frac{\varphi}{2\pi} + j + ln \Rightarrow \frac{k-j}{n} = l.$$

Somit ist

$$0 \leq l = \frac{k-j}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Wegen  $l \in \mathbb{Z}$  folgt damit  $l = 0$ , also  $k = j$ .

- b) Es sei  $p(z) := z^n - a$ . Dann gilt:  $z$  ist eine  $n$ -te Wurzel aus  $a \iff p(z) = 0$ . Weiter gilt

$$z_k^n = re^{i(\varphi+2k\pi)} = re^{i\varphi} e^{2k\pi i} = re^{i\varphi} = a \quad (k = 0, \dots, n-1),$$

also  $p(z_k) = 0$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ). Aus a) und 12.3 folgt die Behauptung.

□

**Bezeichnung:**

Ist  $a = 1$ , so heißen die Zahlen  $z_0, \dots, z_{n-1}$  aus 12.4 die  **$n$ -ten Einheitswurzeln**. Diese sind also

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

**Bemerkung:** Insbesondere gilt:

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{\frac{2k\pi i}{n}}) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

**Beispiele:**

- a) Die 4. Einheitswurzel sind  $1, -1, i, -i$ .
- b) Die 4. Wurzeln aus 16 sind  $2, -2, 2i, -2i$ .
- c) Im Reellen ist  $\sqrt{4} = 2$ . Im Komplexen sind 2 und  $-2$  die Wurzeln aus 4.

**Beispiel:**  $\sqrt{-3+4i} = ?$  Man kann Wurzeln auf verschiedene Weisen berechnen:

1. Möglichkeit:  $w = u + iv$  ( $u, v \in \mathbb{R}$ ). Dann gilt:

$$w^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = -3 + 4i \iff u^2 - v^2 = -3, \quad 2uv = 4.$$

Löse das Gleichungssystem.

2. Möglichkeit:  $z = -3 + 4i$ . Bestimme  $|z|$  und  $\varphi = \arg z$ . Dann sind

$$\pm \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg z}{2}}$$

die Wurzeln von  $z$ .

3. Möglichkeit: Ist  $z \in (-\infty, 0]$ , so sind  $w = \pm \sqrt{-z}$  die Wurzeln von  $z$ .

Behauptung: Ist  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , so sind

$$w = \pm \sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||}$$

die Wurzeln von  $z$ .

*Beweis:* Es gilt:

$$\begin{aligned} \left( \pm \sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||} \right)^2 &= |z| \frac{(z + |z|)(z + |z|)}{(z + |z|)(\bar{z} + |z|)} = |z| \frac{(z + |z|)}{(\bar{z} + |z|)} \\ &= \frac{(|z|z + z\bar{z})}{(\bar{z} + |z|)} = z \frac{(|z| + \bar{z})}{(\bar{z} + |z|)} = z. \end{aligned}$$

□

Also gilt:

$$\sqrt{-3 + 4i} = \pm \sqrt{5} \frac{-3 + 4i + 5}{|-3 + 4i + 5|} = \pm \sqrt{5} \frac{2 + 4i}{\sqrt{20}} = \pm(1 + 2i).$$

**Satz 12.5:** Es seien  $p, q \in \mathbb{C}$ . Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt:

$$z^2 + pz + q = 0 \iff z = -\frac{p}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}_{\text{doppeldeutig!}}.$$

*Beweis:* “ $\Leftarrow$ ” nachrechnen. Rest mit 12.3.

□

**Beispiel 12.6:** Löse (\*)  $z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$ .

$$\begin{aligned} z &= \frac{2i - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2i - 1)^2}{4} + 2i} = i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-4 - 4i + 1}{4} + 2i} \\ &= i - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3 - 4i + 8i} = i - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3 + 4i}. \end{aligned}$$

Also sind

$$z_1 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + 2i) = 2i \text{ und } z_2 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1 - 2i) = -1$$

die Lösungen von (\*). Es gilt

$$z^2 + (1 - 2i)z - 2i = (z - z_1)(z - z_2) = (z - 2i)(z + 1).$$

**Definition:** Es sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $e^z = w$  heißt ein **Logarithmus von**  $w$ .

**Satz 12.7:** Es sei  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $r = |w|$  und  $\varphi = \arg w$ , also  $w = re^{i\varphi}$ . Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt:

$$z \text{ ist ein Logarithmus von } w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \underbrace{\log |w|}_{\log \text{ in } \mathbb{R}} + i\varphi + 2k\pi i.$$

*Beweis:* “ $\Leftarrow$ ”: Es gilt

$$e^z = e^{\log |w|} e^{i\varphi} e^{2k\pi i} = |w| e^{i\varphi} = w.$$

“ $\Rightarrow$ ”: Es sei  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) und  $w = e^z = e^x e^{iy}$ . Dann gilt  $|w| = e^x \Rightarrow x = \log |w|$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} |w| e^{i\varphi} = w = e^z &= e^x e^{iy} = |w| e^{iy} \\ \Rightarrow e^{i\varphi} &= e^{iy} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : iy = i\varphi + 2k\pi i. \end{aligned}$$

Also gilt  $z = \log |w| + i\varphi + 2k\pi i$ . □

**Beispiele:**

a)  $w = -1$ ;  $|w| = 1$ ,  $\arg w = \pi$ . Alle Logarithmen von  $-1$ :

$$i\pi + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b)  $w = 1$ ;  $|w| = 1$ ,  $\arg w = 0$ . Alle Logarithmen von  $1$ :

$$2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c)  $w = 1 + i$ ;  $|w| = \sqrt{2}$ ,  $\arg w = \frac{\pi}{4}$ . Alle Logarithmen von  $1 + i$ :

$$\log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

# Kapitel 13

## Fourierreihen

Für eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten wir die Eigenschaft

$$(V) \quad \begin{cases} f \in R([- \pi, \pi]) \text{ und } f \text{ ist auf } \mathbb{R} \text{ } 2\pi\text{-periodisch,} \\ \text{d.h. } f(x + 2\pi) = f(x) \text{ } (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

**Definition:** Es seien  $(a_n)_{n=0}^\infty$  und  $(b_n)_{n=1}^\infty$  Folgen in  $\mathbb{R}$ . Eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

heißt eine **trigonometrische Reihe** (TR).

**Fragen:** Wann ist  $f$  mit der Eigenschaft (V) durch eine trigonometrische Reihe darstellbar? Wie hängt dann  $f$  mit  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zusammen?

**Satz 13.1:** Es gilt:

a) Die Funktion  $f$  erfülle (V). Dann gilt für jedes  $a \in \mathbb{R}$ :

$$f \in R([a, a + 2\pi]) \text{ und } \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

b) **Orthogonalitätsrelationen:** Für alle  $k, n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \begin{cases} \pi, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}.$$

*Beweis:* a) Übung.

b) Die Funktion  $x \mapsto \sin(nx) \cos(kx)$  ist ungerade. Damit folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0.$$

Rest: Übung. □

**Motivation:** Es seien  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  und  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  Folgen und es gelte

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei diese trigonometrisch Reihe auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig konvergent sei.

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt dann:

$$f(x) \sin(kx) = \frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \sin(kx) + b_n \sin(nx) \sin(kx)) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Übung: Die letzte Reihe konvergiert auf  $\mathbb{R}$  ebenfalls gleichmäßig. Mit 10.8 folgt daher:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx}_{\stackrel{13.1}{=} 0} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx}_{\stackrel{13.1}{=} \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = n \\ 0, & \text{falls } k \neq n \end{cases}} \\ &= b_k \pi. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} : b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Analog zeigt man:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$



**Definition:** Die Funktion  $f$  erfülle (V). Setze

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

und

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Zahlen  $a_n, b_n$  heißen die **Fourierkoeffizienten** (FK) von  $f$  und die mit  $a_n$  und  $b_n$  gebildete trigonometrische Reihe heißt die zu  $f$  gehörenden **Fourierreihe**. Man schreibt:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

**Frage:** Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die zu  $f$  gehörige Fourierreihe, und wogegen?

**Satz 13.2:** Für  $f$  gelte (V).

a) Ist  $f$  gerade, also  $f(x) = f(-x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), so gilt für die Fourierkoeffizienten von  $f$ :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}_0) \text{ und } b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

b) Ist  $f$  ungerade, also  $f(x) = -f(-x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), so gilt für die Fourierkoeffizienten von  $f$ :

$$a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \text{ und } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

*Beweis:* Übung. □

**Definition:** Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir setzen

$$g(x_0 \pm) := \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} g(x), \text{ falls dieser Grenzwert vorhanden und } \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

**Definition:** Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodisch. Die Funktion  $f$  heißt **stückweise glatt** :  $\iff$  es existiert eine Zerlegung  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  von  $[-\pi, \pi]$  (also  $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \pi$ ) mit:

i)  $f \in C^1((t_{j-1}, t_j))$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

ii) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  existieren die Grenzwerte:

$$f(x-), f'(x-), f(x+), f'(x+)$$

In diesem Fall setzen wir

$$s_f(x) := \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Beachte:**

a) In den Punkten  $t_j$  muss  $f$  nicht stetig sein.

b)  $f$  hat die Eigenschaft (V), vgl. 10.16 a).

**Satz 13.3:** Die Funktion  $f$  sei  $2\pi$ -periodisch und stückweise glatt. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  in jedem  $x \in \mathbb{R}$  gegen  $s_f(x)$ . Ist in diesem Fall  $f$  in  $x \in \mathbb{R}$  stetig, so konvergiert die Fourierreihe von  $f$  also gegen  $f(x)$ .

Ohne Beweis.

**Beispiel 13.4:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch und auf  $(-\pi, \pi]$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = \pi \end{cases}.$$

Es gilt:  $f$  ist stückweise glatt und  $s_f(x) = f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Weiter ist  $f$  ungerade. Nach 13.2 ist also  $a_n = 0$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) und

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \stackrel{10.16}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \stackrel{\text{Übung}}{=} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mit 13.3 folgt nun:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad (x \in \mathbb{R}). \\ \Rightarrow \frac{x}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad (x \in (-\pi, \pi)). \end{aligned}$$

Mit  $x = \frac{\pi}{2}$  folgt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

vgl. 9.17 b).

**Beispiel 13.5:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch und auf  $[-\pi, \pi]$  definiert durch  $f(x) = x^2$ .  
Es gilt:  $f$  ist stückweise glatt,  $f$  ist gerade und  $f(x) = s_f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Nach 13.2 ist also  $b_n = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3}, & n = 0 \\ 4 \frac{(-1)^n}{n^2}, & n \geq 1 \end{cases}.$$

Mit 13.3 folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots \right) \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots \right) \quad (x \in [-\pi, \pi]). \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir:

$$x = 0 : \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (1)$$

$$x = \pi : \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

Addition von (1), (2) liefert:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

**Satz 13.6:** Es sei  $f \in C(\mathbb{R})$  und  $f$  sei  $2\pi$ -periodisch und stückweise glatt. Dann gilt:

- a) Die Fourierreihe von  $f$  konvergiert in jedem  $x \in \mathbb{R}$  absolut.
- b) Die Fourierreihe von  $f$  konvergiert auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $f$ .
- c) Sind  $a_n, b_n$  die Fourierkoeffizienten von  $f$ , so konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ absolut.}$$

Ohne Beweis.

**Satz 13.7:** Die Funktion  $f$  erfülle (V), und  $a_n, b_n$  seien ihre Fourierkoeffizienten. Dann gilt:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$  ist konvergent.

b)  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx$  (Besselsche Ungleichung).

c)  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

*Beweis:* Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in [-\pi, \pi]$ :

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - s_n(x))^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (g(x)^2 - 2g(x)s_n(x) + s_n(x)^2) dx \\ &\stackrel{\substack{13.1 \\ \text{nachr.}}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx - \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right), \end{aligned}$$

also

$$\alpha_n := \frac{a_0^2}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)}_{=:\beta_n} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx =: \alpha.$$

Die Folge  $(\alpha_n)$  ist monoton wachsend und beschränkt, somit ist  $(\alpha_n)$  konvergent. Damit ist  $(\beta_n)$  konvergent und es folgt a).

Aus  $\alpha_n \leq \alpha$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) folgt b).

Aus (1) und 3.1 folgt  $a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0$ . Damit gilt  $a_n^2 \rightarrow 0, b_n^2 \rightarrow 0$  und hieraus folgt c).  $\square$

# Kapitel 14

## Der Raum $\mathbb{R}^n$

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Erinnerung (lineare Algebra):

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^n$  ist mit der bekannten Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit  $\dim \mathbb{R}^n = n$ .

Die Vektoren

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad e_n := (0, \dots, 0, 1)$$

heißen **Einheitsvektoren**;  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Ist  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , so ist

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

**Definition:** Es seien  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

a) Die Zahl  $xy := x \cdot y := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  heißt **Skalarprodukt** oder **Innenprodukt** von  $x$  und  $y$ .

b) Die Zahl  $\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$  heißt **Norm** oder **Länge** von  $x$ . Beachte:  $\|x\|^2 = x \cdot x$ . Im Fall  $n = 1$  ist  $\|x\| = |x|$ .

c) Die Zahl  $\|x - y\|$  heißt **Abstand** von  $x$  und  $y$ . Beachte:  $\|x - y\| = \|y - x\|$ .

**Beispiele:**

a)  $(1, 2, -1) \cdot (1, 3, 4) = 1 + 6 - 4 = 3$ .

b)  $\|(1, 2, -1)\| = (1 + 4 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$ .

c)  $\|e_j\| = 1$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

**Satz 14.1:** Es seien  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y, z \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

a)  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ ,  $x \cdot y = y \cdot x$ .

b)  $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y)$ .

c)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0 \iff x = 0 = (0, \dots, 0)$ .

d)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ .

e)  $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$  (**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (CSU)**).

f)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (**Dreiecksungleichung**).

g)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .

h)  $\forall j \in \{1, \dots, n\} : |x_j| \leq \|x\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$ .

*Beweis:* a) - d): Nachrechnen.

e) O.B.d.A. sei  $y \neq 0$ , also  $\|y\| > 0$ . Es sei  $A := \|x\|^2 = x \cdot x$ ,  $B := x \cdot y$ ,  $C := \|y\|^2 = y \cdot y$  und  $\alpha := \frac{B}{C}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2) \\ &= A - 2\alpha B + \alpha^2 C = A - 2\frac{B^2}{C} + \frac{B^2}{C} = A - \frac{B^2}{C} \\ &\Rightarrow B^2 \leq AC \Rightarrow (x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

f) Es gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \stackrel{e)}{=} \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

g) Übung.

h) Für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$|x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |x_j| \leq \|x\|.$$

Weiter gilt:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \|x\| \stackrel{d), f)}{\leq} |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

□

**Definition:** Es seien  $l, m, n \in \mathbb{N}$  und

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine reelle  $m \times n$ -Matrix.

$$\|A\| = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ heißt } \mathbf{Norm \ von \ } A.$$

Es sei  $B$  eine reelle  $n \times l$ -Matrix (dann existiert  $AB$ ). Es gilt (Übung):

$$(*) \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Es sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

$$Ax := A \cdot x^T = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\mathbf{Matrix\text{-}Vektorprodukt})$$

Aus  $(*)$  folgt:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

**Definition:** Es sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$ .

a)  $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$  heißt **offene Kugel um  $x_0$  mit Radius  $\varepsilon$** ,  
oder auch  **$\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0$** .

b)  $\overline{U_\varepsilon(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$  heißt **abgeschlossene Kugel um  $x_0$  mit Radius  $\varepsilon$** .

**Definition:** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

a)  $A$  heißt **beschränkt** :  $\iff \exists c \geq 0 \forall a \in A : \|a\| \leq c$ .

b)  $A$  heißt **offen** :  $\iff \forall a \in A \exists \varepsilon = \varepsilon(a) > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A$ .

c)  $A$  heißt **abgeschlossen** :  $\iff \mathbb{R}^n \setminus A$  ist offen.

d)  $A$  heißt **kompakt** :  $\iff A$  ist beschränkt und abgeschlossen.

**Beispiele:**

a) Offene Kugeln sind offen, abgeschlossene Kugeln sind nicht offen.

b)  $\mathbb{R}^n$  ist offen,  $\emptyset$  ist offen,  $\mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen,  $\emptyset$  ist abgeschlossen.

c) Abgeschlossene Kugeln sind kompakt.

d)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$  ist nicht beschränkt, also auch nicht kompakt.  $A$  ist nicht offen, aber  $A$  ist abgeschlossen.

e)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x > 0\}$  ist nicht offen und auch nicht abgeschlossen.



# Stichwortverzeichnis

- Abelscher Grenzwertsatz, 86
- abgeschlossen, 63, 127
- Ableitung, 76
  - n-te, 87
- abzählbar, 12
- Additionstheoreme, 48
- Argument, 113
- Arkustangens, 86
- Axiome
  - Anordnungs-, 3
  - Körper-, 2
  - Vollständigkeits-, 6
- Bernoullische Ungleichung, 9
- beschränkt, 6, 64, 127
  - Folge, 13
  - Menge, 5
- Besselsche Ungleichung, 122
- Betrag, 4
  - einer komplexen Zahl, 111
- Binomialkoeffizient, 9
- Binomischer Satz, 9
- Cauchy-Schwarz Ungleichung, 125
- Cauchyfolge, 28
- Cauchy Kriterium, 28, 32, 108
- Cauchyprodukt, 41
- Cosinus, 47
- differenzierbar, 76
  - n-mal, 87
  - stetig, 87
- divergent, 14, 31
- Dreiecksungleichung, 125
- Einheitsvektoren, 124
- Einheitswurzeln
  - n-te, 114
- Eulersche Zahl, 24
- Exponentialfunktion, 40
- Exponentialreihe, 40
- für fast alle, 14
- Fakultät, 9
- Folge, 12
- Fourierkoeffizienten, 119
- Fourierreihe, 119
- Fundamentalsatz der Algebra, 113
- ganze Zahlen, 9
- Grenzfunktion, 70
- Grenzwert, 14
  - linksseitiger, 54, 120
  - rechtsseitiger, 54, 120
- Häufungspunkt, 53
- Hauptsätze der Diff.- und Integralrechnung
  - 1. Hauptsatz, 94
  - 2. Hauptsatz, 98
- Identitätssatz für Potenzreihen, 75
- Induktionsmenge, 7

Infimum, 5  
 Innenprodukt, 124  
 Integrabilitätskriterium  
     Riemannsches, 93  
 Integral, 92  
     Riemann, 92  
     unbestimmtes, 100  
 integrierbar, 92  
     Riemann, 92  
 Intervalle, 3  
  
 Kettenregel, 78  
 kompakt, 63, 127  
 konvergent, 14, 31, 106  
     absolut, 34, 109  
     punktweise, 70  
 Konvergenzkriterium  
     Cauchy, 56  
     Funktionen  
         Weierstraß, 72  
     Reihen  
         Leibniz, 34  
         Majoranten, 35  
         Minoranten, 35  
         Quotienten, 39  
         Wurzel, 38  
 Konvergenzradius, 45  
 Kugel, 126  
     abgeschlossene, 126  
     offene, 126  
  
 Länge, 124  
 Limes, 14  
 Limes inferior, 27  
  
 Limes superior, 27  
 Logarithmus, 66, 116  
  
 Majorantenkriterium, 109  
 Minorantenkriterium, 109  
 Mittelwertsatz, 81  
 monoton, 19  
     fallend, 65  
     streng fallend, 65  
     streng wachsend, 65  
     wachsend, 65  
     fallend, 19  
     streng fallend, 19  
     streng wachsend, 19  
     wachsend, 19  
 Monotoniekriterium, 19, 32  
  
 Natürliche Zahlen, 7  
 niedrig, 26  
 Norm, 124  
     Matrizen, 126  
 Nullstellensatz, 63  
  
 oberer Limes, 27  
 offen, 127  
 Orthogonalitätsrelationen, 118  
  
 Partielle Integration, 101  
 Polarkoordinaten, 113  
 Potenzreihe, 45  
  
 q-adische Entwicklung, 50  
  
 rationale Zahlen, 9  
 Reihe, 31  
     alternierende harmonische Reihe, 34

- geometrische, 31
- harmonische, 31
- unendliche, 31
- Reihenwert, 31
- Satz
  - Bolzano-Weierstraß, 27
- Schranke, 5
- Sinus, 48
- Skalarprodukt, 124
- Stammfunktion, 94
- stetig, 59
  - gleichmäßig, 67
- Substitutionsregeln, 102
- Summenfunktion, 70
- Supremum, 5
- Tangens, 85
- Teilfolge, 24
- Teilsumme, 31
- trigonometrische Reihe, 118
- überabzählbar, 12
- Umgebung, 14, 126
- Umordnung, 40
- uneigentliche Integral, 106
  - konvergiert, 107
- unterer Limes, 27
- vollständige Induktion, 8
- Wurzeln, 10
  - komplexe, 114
- Zerlegung, 91
- Zwischenwertsatz, 62