Höhere Mathematik I

G. Herzog, C. Schmoeger

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen

Grundmenge der Analysis is die Menge $\mathbb{R}$, die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen $\mathbb{R}$ als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von $\mathbb{R}$ aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.
Körperaxiome: in $\mathbb{R}$ seien zwei Verknüpfungen "+" und "·" gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a+b \in \mathbb{R}$ und genau ein $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei soll gelten:

$(A1)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz)

$(A5)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$(A2)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ (Null)

$(A6)$ $\exists 1 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$ und $1 \neq 0$ (Eins)

$(A3)$ $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists - a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$

$(A7)$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$

$(A4)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)

$(A8)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)

$(A9)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

Schreibweisen: für $a, b \in \mathbb{R}$: $a - b := a + (-b)$ und für $b \neq 0$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

Alle bekannten Regeln der Grundrechnungsarten lassen sich aus $(A1)$–$(A9)$ herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele:

a) Beh.: $\exists_1 0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a + 0 = a$

Beweis. Sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\, a + \tilde{0} = a$. Mit $a = 0$ folgt: $0 + \tilde{0} = 0$. Mit $a = \tilde{0}$ in (A2) folgt: $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Dann $0 = 0 + \tilde{0} \overset{(A4)}{=} \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$
$\square$

b) Beh.: $\forall a \in \mathbb{R}\; a \cdot 0 = 0$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b := a \cdot 0$. Dann: $b \overset{(A2)}{=} a(0+0) \overset{(A9)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b + b$.
$0 \overset{(A3)}{=} b + (-b) = (b + b) + (-b) \overset{(A1)}{=} b + (b + (-b)) = b + 0 \overset{(A2)}{=} b$ $\square$

Anordnungsaxiome: in $\mathbb{R}$ ist eine Relation "$\leq$" gegeben.
Dabei sollen gelten:

($A10$) für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$

($A11$) aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$

($A12$) aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$

($A13$) aus $a \leq b$ folgt $\forall c \in \mathbb{R}\; a + c \leq b + c$

($A14$) aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $ac \leq bc$

Schreibweisen: $b \geq a \iff a \leq b$; $a < b \iff a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a \iff a < b$

Aus ($A1$) – ($A14$) lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele (ohne Beweis)**:**

a) aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$

b) aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$

c) aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \leq b + d$

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

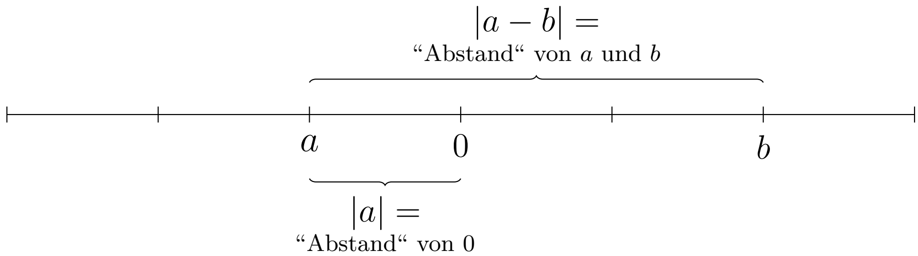
$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Der Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ der Betrag von a.

Beispiele: $|1| = 1, \;\; |-7| = -(-7) = 7.$

Anschaulich:



Es ist $|-a| = |a|$ und $|a - b| = |b - a|$

Regeln:

a) $|a| \geq 0$

b) $|a| = 0 \iff a = 0$

c) $|ab| = |a||b|$

d) $\pm a \leq |a|$

e) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

f) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Beweis.

a) - d) leichte Übung.

e) Fall 1: $a+b \geq 0$. Dann: $|a+b| = a+b \overset{d)}{\leq} |a| + |b|$.
Fall 2: $a+b < 0$. Dann: $|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) \overset{d)}{\leq} |a| + |b|$.

f) $c := |a| - |b|$; $|a| = |a-b+b| \overset{d)}{\leq} |a-b| + |b|$

$\Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a-b|$. Analog: $-c = |b| - |a| \leq |b-a| = |a-b|$

Also: $\pm c \leq |a-b|$.

$\square$

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

a) M heißt **nach oben beschränkt** $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ x \leq \gamma$
In diesem Fall heißt γ eine **obere Schranke** (OS)

b) Ist γ eine obere Schranke von M und gilt $\gamma \leq \delta$ für jede weitere obere Schranke δ von M, so heißt γ das **Supremum** von M (kleinste obere Schranke von M)

c) M heißt **nach unten beschränkt** $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ \gamma \leq x$
In diesem Fall heißt γ eine **untere Schranke** (US)

d) Ist γ eine untere Schranke von M und gilt $\gamma \geq \delta$ für jede weitere untere Schranke δ von M, so heißt γ das **Infimum** von M (größte untere Schranke von M)

Bez.: in dem Fall: $\gamma = \sup M$ bzw. $\gamma = \inf M$.
Aus $(A11)$ folgt: ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden, so ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ eindeutig bestimmt.
Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden und gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so heißt $\sup M$ das Maximum bzw. $\inf M$ das Minimum von M und wird mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet.

Beispiele:

a) $M = (1, 2)$. $\sup M = 2 \notin M$, $\inf M = 1 \notin M$. M hat kein Maximum und kein Minimum.

b) $M = (1, 2]$. $\sup M = 2 \in M$, $\max M = 2$

c) $M = (3, \infty)$. M ist nicht nach oben beschränkt, $3 = \inf M \notin M$.

d) $M = (-\infty, 0]$. M ist nach unten unbeschränkt, $0 = \sup M = \max M$.

Vollständigkeitsaxiom:

($A15$) Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach oben beschränkt, so ist $\sup M$ vorhanden.

Satz 1.1: Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach unten beschränkt, so ist $\inf M$ vorhanden.

Beweis. i. d. Übungen. $\square$

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt beschränkt $\iff$ M ist nach oben und nach unten beschränkt ($\iff \exists c \geq 0\ \forall x \in M\ |x| \leq c \iff \exists c \geq 0\ \forall x \in M\ -c \leq x \leq c$)

Satz 1.2: Es sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$

a) Ist A beschränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$

b) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt $\Rightarrow$ B ist nach oben beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ bzw. nach unten beschränkt und $\inf B \geq \inf A$

c) A sei nach oben beschränkt und γ eine obere Schranke von A. Dann:

$$\gamma = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x = x(\varepsilon) \in A : x > \gamma - \varepsilon$$

d) A sei nach unten beschränkt und γ eine untere Schranke von A. Dann:

$$\gamma = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x = x(\varepsilon) \in A : x < \gamma + \varepsilon$$

Beweis.

a) $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$. Dann $\inf A \leq x$, $x \leq \sup A$ $(A12)$

$$\Rightarrow \inf A \leq \sup A$$

b) Sei $x \in B$. Dann: $x \in A$, also $x \leq \sup A$. B ist also nach oben beschränkt und $\sup A$ ist eine obere Schranke von B

$$\Rightarrow \sup B \leq \sup A$$

Analog der Fall für A nach unten beschränkt.

c) "$\Rightarrow$" Sei $\gamma = \sup A$ und $\varepsilon > 0$. Dann: $\gamma - \varepsilon < \varepsilon$. $\gamma - \varepsilon$ ist also keine obere Schranke von A. Also: $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon$
"$\Leftarrow$" Sei $\tilde{\gamma} \leq \gamma$. Annahme: $\gamma \neq \tilde{\gamma}$. Dann $\tilde{\gamma} < \gamma$, also $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$. $\overset{Vor.}{\Longrightarrow} \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Widerspruch zu $x \leq \tilde{\gamma}$.

d) Analog zu c)

□

Natürliche Zahlen

Definition:

a) $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine Induktionsmenge (IM)

$$\iff \begin{cases} 1. & 1 \in A; \\ 2. & \text{aus } x \in A \text{ folgt stets } x+1 \in A \end{cases}$$

Beispiele: $\mathbb{R}$, $[1, \infty)$, $\{1\} \cup [2, \infty)$ sind Induktionsmengen

b) $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x$ gehört zu jeder IM $\}$ = Durchschnitt aller IMn.
Also: $\mathbb{N} \subseteq A$ für jede Induktionsmenge A.

Satz 1.3:

a) $\mathbb{N}$ ist eine Induktionsmenge

b) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt

c) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ex. ein $n \in \mathbb{N} : N > x$

Von nun an sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bekannt.

1.4 Prinzip der vollständigen Induktion:
Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und A eine Induktionsmenge, so ist $A = N$.

Beweis. $A \subseteq \mathbb{N}$ (nach Vor.) und $\mathbb{N} \subseteq A$ (nach Def.), also $A = \mathbb{N}$ $\square$

Beweisverfahren durch vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Für $A(n)$ gelte:

$$\begin{cases} (I) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (II) & \text{ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch A(n + 1) wahr;} \end{cases}$$

Dann ist $A(n)$ wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$!

Beweis. Sei $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr } \}$. Dann:
$A \subseteq \mathbb{N}$ und wegen (I), (II) ist A eine Induktionsmenge $\overset{1.4}{\Longrightarrow} A = \mathbb{N}$ □

Beispiel: Beh.: $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. (induktiv)
I.A.: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$✓, $A(1)$ ist also wahr.
I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
I.S.: $n \curvearrowright n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &\overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr. □

Definition:

a) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

b) $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (ganze Zahlen)

c) $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (rationale Zahlen)

Satz 1.5: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$: $x < r < y$.

Beweis. i. d. Übungen. □

Einige Definitionen und Formeln

a) Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} : a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$, $a^0 := 1$ und ist $a \neq 0 : a^{-n} := \frac{1}{a^n}$
Es gelten die bekannten Rechenregeln.

b) Für $n \in \mathbb{N} : n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! := 1$ (**Fakultäten**)

c) **Binomialkoeffizienten** (BK): für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

z.B. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. Es gilt (nachrechnen!):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \end{aligned}$$

e) **Binomischer Satz**: $a, b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$

Beweis. i. d. Übungen. □

f) **Bernoullische Ungleichung**: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$. Dann:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis. (induktiv)
I.A.: $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$

I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $(1+x)^n \geq 1+nx$
I.S.: $n \curvearrowright n+1$: $\overset{I.V.}{\Longrightarrow} (1+x)^n \geq 1+nx$ und da $1+x \geq 0$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+nx+x+\underbrace{nx^n}_{\geq 0} \\ &\geq 1+nx+x \\ &= 1+(n+1)x\end{aligned}$$

□

Hilfssatz (HS)**:** Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$.

Beweis. i. d. Übungen. □

Satz 1.6: Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$ mit: $x^n = a$.
Dieses x heißt **n-te Wurzel aus a**; Bez.: $x = \sqrt[n]{a}$. ($\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$)

Beweis. Existenz: später in §7.
Eindeutigkeit: seien $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n \overset{HS}{\Longrightarrow} x = y$. □

Bemerkungen:

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (s. Schule).

b) Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Bsp.: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{4} \neq -2$. Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

c) $\sqrt{x^2}|x| \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Rationale Exponenten

a) Sei zunächst $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Dann ex. $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$. Wir wollen definieren:

$$a^r := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m . \tag{$*$}$$

Problem: gilt auch noch $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, gilt dann $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$?
Antwort: ja (d.h. obige Def. ($*$) ist sinnvoll).

Beweis. $x := (\sqrt[n]{a})^m$, $y := (\sqrt[q]{a})^p$, dann: $x, y \geq 0$ und $mq = np$, also

$$\begin{aligned} x^q &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mq} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^p = a^p \\ &= \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^q\right)^p = \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^p\right)^q = y^q \end{aligned}$$

$\overset{HS}{\Longrightarrow} x = y$. $\square$

b) Sei $a > 0, r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$. Es gelten die bekannten Rechenregeln:

$$\left(a^r a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, \ldots \right)$$

2 Folgen und Konvergenz

Definition: Es sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$ heißt eine **Folge in X**. Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt a eine **reelle Folge**.

Schreibweisen: a_n statt $a(n)$ (n-tes Folgenglied)
(a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$ statt a.

Beispiele:

a) $a_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

b) $a_{2n} := 0$, $a_{2n-1} := 1 \quad (n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$.

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a\colon \{p, p+1, \dots\} \to X$ eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in X. Bez.: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$. Meist $p = 0$ oder $p = 1$.

Definition: Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$.

a) X heißt **abzählbar** $\iff$ $\exists$ Folge (a_n) in X: $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

b) X heißt **überabzählbar** $\iff$ X ist nicht abzählbar

Beispiele:

a) Ist X endlich, so ist X abzählbar.

b) $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$.

c) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_1 := 0, a_2 := 1, a_3 := -1, a_4 := 2, a_5 := -2, \dots$ also

$$a_{2n} := n, \quad a_{2n+1} := -n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[dl] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[dl] & 5 \arrow[r] & 6 & \cdots \\
\frac{1}{2} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \frac{5}{2} & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots & \\
\frac{1}{4} \arrow[d] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots & & \\
\frac{1}{5} \arrow[ur] & \frac{2}{5} & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \cdots & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2.1: Zum Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$.

d) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar!
Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert:

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$b_1 \coloneqq 0, b_{2n} \coloneqq a_n, b_{2n+1} \coloneqq -a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann:

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}.$$

e) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (Beweis in §5).

Vereinbarung: Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in $\mathbb{R}$.

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form $(a_n)_{n=1}^\infty$. Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^\infty$ $(p \in \mathbb{Z})$.

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $M := \{a_1, a_2, \dots\}$.

a) (a_n) heißt **nach oben beschränkt** $\iff$ M ist nach oben beschränkt. I.d. Fall: $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^\infty a_n := \sup M$.

b) (a_n) heißt **nach unten beschränkt** $\iff$ M ist nach unten beschränkt. I.d. Fall: $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^\infty a_n := \inf M$.

c) (a_n) heißt **beschränkt** $\iff$ M ist beschränkt

$$\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition: Sei $A(n)$ eine für jedes $n \in \mathbb{N}$ definierte Aussage.
$A(n)$ gilt **für fast alle** (ffa) $n \in \mathbb{N}$ $\iff$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq n_0$

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

heißt **ε-Umgebung von a**.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **konvergent**

$$\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ ex. } n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \\ |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \end{cases}$$

I. d. Fall heißt a **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von (a_n) und man schreibt

$$a_n \to a \ (n \to \infty) \text{ oder } a_n \to a \text{ oder } \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) **divergent**. Beachte:

$$\begin{aligned} a_n \to a \ (n \to \infty) &\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \ \forall n \geq n_0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Satz 2.1: (a_n) sei konvergent und $a = \lim a_n$.

a) Gilt auch noch $a_n \to b$, so ist $a = b$.

b) (a_n) ist beschränkt.

Beweis.

a) Annahme $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n_0} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ und $\exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

$N := \max\{n_0, n_1\}$. Dann:

$$2\varepsilon = |a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\varepsilon$$

Widerspruch! Also $a = b$.

b) Zu $\varepsilon = 1 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \ \forall n \geq n_0$. Dann:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \geq n_0$$

$c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$. Dann: $|a_n| \leq \varepsilon \ \forall n \geq 1$.

$\square$

Beispiele:

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n := c \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$|a_n - c| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also: $a_n \to c$.

b) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Beh: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0 : |a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\xRightarrow{1.3\ c)} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Für $n \geq n_0$ ist $n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Somit $|a_n - 0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. $\square$

c) $a_n := (-1)^n$. Es ist $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_n| = 1$, (a_n) ist also beschränkt. Behauptung: (a_n) ist divergent.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n| \, (1 - (-1)) = 2$$

Annahme: (a_n) konvergiert. Definiere $a := \lim a_n$, dann

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ |a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n \geq n_0$ gilt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Widerspruch! $\square$

d) $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$. (a_n) ist nicht beschränkt $\xRightarrow{2.1\ b)}$ (a_n) ist divergent.

e) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} (n \in \mathbb{N})$. Beh.: $a_n \to 0$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$.

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$\xRightarrow{1.3\ c)} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Ist $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow$ $|a_n - 0| < \varepsilon$ $\square$

f) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Beweis.

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$, nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Also $a_n \to 0$. □

Definition: (a_n) und (b_n) seien Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n); \;\; \alpha(a_n) := (\alpha a_n); \;\; (a_n)(b_n) := (a_n b_n)$$

Gilt $\forall n \geq m$ $b_n \neq 0$, so ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$ definiert.

Satz 2.2: $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (α_n) seien Folge und $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$.

a) $a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0$

b) Gilt $|a_n - a| \leq \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0$, so gilt $a_n \to a$

c) Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann:
   (i) $|a_n| \to |a|$
   (ii) $a_n + b_n \to a + b$
   (iii) $\alpha a_n \to \alpha a$
   (iv) $a_n b_n \to ab$
   (v) ist $a \neq 0$, so ex. ein $m \in \mathbb{N}$:

$$a_n \neq 0 \; \forall n \geq m \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$$

d) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$

e) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dann $c_n \to a$.

Beispiele:

a) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $a_n := \frac{1}{n^p}$. Es ist $n \leq n^p$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N} \xRightarrow{2.2\ e)} a_n \to 0, \text{ also } \frac{1}{n^p} \to 0.$$

b) $a_n := \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2} = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{2.2} \frac{5}{4}$

Beweis. (von 2.2)

a) folgt aus der Definition der Konvergenz.

b) $\exists m \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \alpha_m \ \forall n \geq m$. Sei $\varepsilon > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \alpha_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1.$$

$n_0 := \max\{m, n_1\}$. Für $n \geq n_0$: $|a_n - a| \leq \alpha_n < \varepsilon$.

c) (i) $||a_n| - |a|| \overset{\S 1}{\leq} |a_n - a| \ \forall n \in \mathbb{N} \xRightarrow{a),b)} |a_n| \to |a|$

(ii) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_1$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_2$
$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Für $n \geq n_0$:

$$|a_n+b_n-(a+b)| = |a_n-a+b_n-b| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iii) Übung.

(iv) $c_k := |a_n b_n - ab|$. z. z.: $c_n \to 0$

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned}$$

$\xRightarrow{2.1\ b)} \exists c \ge 0 : |a_n| \le c \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $c \ge |b|$. Dann:

$$c_n \le c(|b_n - b| + |a_n - a|) =: \alpha_n \xRightarrow[c)(ii),c)(iii)]{a)} \alpha_n \to 0$$

Also: $|c_n - 0| = c_n \le \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \overset{b)}{\Rightarrow} c_n \to 0$.

(v) $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$; aus (i): $|a_n| \to |a| \Rightarrow \exists n \in N$:

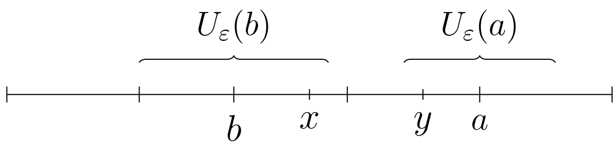
$$|a_n| \in U_\varepsilon(|a|) = (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon) = (\frac{|a|}{2}, \frac{3}{2}|a|) \quad \forall n \ge m$$

$\Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2} > 0 \ \forall n \ge m \Rightarrow a_n \ne 0 \ \forall n \ge m$. Für $n \ge m$:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \le \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} =: \alpha_n$$

$\alpha_n \to 0 \overset{b)}{\Rightarrow} \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.

d) Annahme $b < a$, $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$.



Dann: $x < y \ \forall x \in U_\varepsilon(b) \ \forall y \in U_\varepsilon(a)$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : b_n \in U_\varepsilon(b) \ \forall n \ge n_0$$

$$\exists m \in \mathbb{N} : a_n \le b_n \ \forall n \ge m$$

$m_0 := \max\{n_0, m\}$. Für $n \ge m_0$: $a_n \le b_n < b + \varepsilon$, also $a_n \notin U_\varepsilon(a)$.
Widerspruch!

e) $\exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \geq m$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq n_1 \\ a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq n_2 \end{aligned}$$

$n_0 := \max\{n_1, n_2, m\}$. Für $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

Also: $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

□

Definition:

a) (a_n) heißt **monoton wachsend** $\iff a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) (a_n) heißt **streng monoton wachsend** $\iff a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Entsprechend definiert man **monoton fallend** und **streng monoton fallend**.

d) (a_n) heißt **monoton** $\iff$ (a_n) ist monoton wachsend oder monoton fallend.

2.3 Monotoniekriterium:

a) (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n$$

b) (a_n) sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n=1}^{\infty} a_n$$

Beweis. $a := \sup_{n=1}^{\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_1, a_2, \cdots\}$, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$. Für $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a \leq a + \varepsilon$$

also $|a_n - a| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$. $\square$

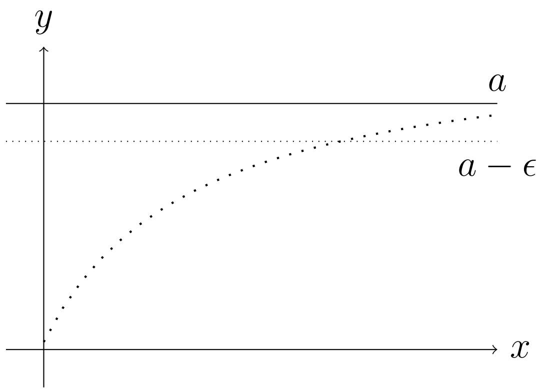


Abbildung 2.2: Zum Beweis des Monotonie-Kriteriums.

Beispiel: $a_1 := \sqrt[3]{6}$, $a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n}$ $(n \geq 2)$.

$a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2;$

$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2;$

$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6} = a_1;$

Behauptung: $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. (induktiv)
I.A.: s.o.
I.V.: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$.
$n \curvearrowright n + 1$: $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} >_{I.V.} 0$

$a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} <_{I.V.} \sqrt[3]{6 + 2} = 2;\quad a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} >_{I.V.} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}$

Also: (a_n) ist nach oben beschränkt und monoton wachsend.
$\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (a_n) ist konvergent. $a := \lim a_n$, $a_n \geq 0\ \forall n \overset{2.2}{\Longrightarrow} a \geq 0$. Es ist

$$a_{n+1}^3 = 6 + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\overset{2.2}{\Longrightarrow} a^3 = 6 + a \Rightarrow 0 = a^3 - a + 6 = (a-2)(\underbrace{a^2 - 2a + 3}_{\geq 3}) \Rightarrow a = 2.$ $\square$

Wichtige Beispiele:
Vorbemerkung: Seien $x, y \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$: es ist (s. §1)

$$x^p - y^p = (x-y)\sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k}y^k$$

$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x-y|\sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k}y^k \geq y^{p-1}|x-y|$

Beispiel 2.4: Sei $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \to a \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$

Beweis.
Fall 1: $a = 0$. Sei $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon^p\ \forall n \geq n_0$. Daraus folgt:

$$|\sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{|a_n|} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Also $\sqrt[p]{a_n} \to 0$.
Fall 2: $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - |\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y}|^p| = |x^p - y^p| \\ &\geq_{s.o.} \underbrace{y^{p-1}}_{:=c}|x-y| = c|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}|, \quad c > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{1}{c}|a_n - a| =: \alpha_n$. $\alpha_n \to 0 \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$ $\square$

Beispiel 2.5: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt (x^n) ist konvergent $\iff x \in (-1, 1]$, i. d. Fall:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in (-1,1) \end{cases}$$

Beweis.
Fall 1: $x = 0$. Dann $x^k \to 0$. Fall 2: $x = 1$. Dann $x^k \to 1$.
Fall 3: $x = -1$. Dann $(x^k) = ((-1)^k)$, ist divergent.
Fall 4: $|x| > 1$. $\exists \delta > 0 : |x| = 1+\delta \Rightarrow |x^k| = |x|^k = (1+\delta)^k \geq 1+n\delta \geq n\delta$
$\Rightarrow$ ist nicht beschränkt $\overset{2.1}{\Longrightarrow}$ (x^k) ist divergent. Fall 5: $0 < |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} > 1 \Rightarrow \exists \eta > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + \eta$.

$$\Rightarrow |\frac{1}{x^n}| = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1+\eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta$$

$\Rightarrow |x^n| \leq \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow x^n \to 0$. $\square$

Beispiel 2.6: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $s_n := 1 + x + x^n + \dots x^n = \sum_{k=0}^n x^k$.
Fall 1: $x = 1$. Dann: $x_n = n + 1$, (s_n) ist also divergent.
Fall 2: $x \neq 1 \Rightarrow s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Aus 2.5:

$$(s_n) \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 1$$

i.d. Fall: $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$.

Beispiel 2.7: Behauptung: $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Beweis. Es ist $\sqrt[n]{n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, also $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Z. z.:

$$a_n \to 0.$$

Für $n \geq 2$:

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (a_n + 1)^n \overset{\S 1}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

$\Rightarrow \frac{n-1}{2} a_n^2 \leq 1$. Also $\overset{a_n \geq 0}{\Longrightarrow} 0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} (n \geq 2)$. $\Rightarrow a_n \to 0$. $\square$

Beispiel 2.8: Sei $c > 0$. Beh.: $\sqrt[n]{c} \to 1$.

Beweis. Fall 1: $c \geq 1$. $\exists m \in \mathbb{N} : 1 \leq c \leq m$. Daraus folgt:

$$1 \leq c \leq n \ \forall n \geq m \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq m$$

$\Rightarrow$ Beh.
Fall 2: $0 < c < 1 \Rightarrow \frac{1}{c} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \xrightarrow[Fall 1]{} 1 (n \to \infty) \Rightarrow$ Beh. $\square$

Beispiel 2.9: $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; $b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$
Beh.: (a_n) und (b_n) sind konvergent und $\lim a_n = \lim b_n$

Beweis. I. d. gr. Übungen wird gezeigt: $2 \leq a_n < a_{n+1} < 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\overset{2.3}{\Longrightarrow} (a_n) \text{ konvergiert, } a := \lim a_n$$

Es ist $b_n > 0$ und $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n$. (b_n) ist also monoton wachsend. Für $n > 3$:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 2}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \ldots \cdot n}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \ldots + (\frac{1}{2})^{n-1}\right) = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\overset{2.3}{\Longrightarrow} (b_n)$ konvergiert. $b := \lim b_n$. Für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{\S 1}{=} \sum_{k=0} n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{(1 - \frac{1}{n})}_{<1} \underbrace{(1 - \frac{2}{n})}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1 - \frac{k-1}{n})}_{<1} \\ &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = b_n \end{aligned}$$

Also $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq 2$. Z. z.: $\Rightarrow a \leq b$
Sei $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$ (zunächst fest). Für $n \in \mathbb{N}, n \geq j$:

$$\begin{aligned}
a_n &\overset{s.o.}{=} 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) \\
&\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} \underbrace{(1 - \frac{1}{n})}_{\to 1} \underbrace{(1 - \frac{2}{n})}_{\to 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1 - \frac{k-1}{n})}_{\to 1} \\
&\to 1 + 1 + 1 \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

Also $a \geq b_j$ $\forall j \geq 2 \overset{j \to \infty}{\Longrightarrow} a \geq b$. $\square$

Definition: Die Konstante

$$e \coloneqq \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$$

heißt **Eulersche Zahl**. Übung: $2 < e < 3$ ($e \approx 2,718\ldots$).

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$b_k \coloneqq a_{n_k}$$

also $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, \ldots$.
Dann heißt $(b_k) = (a_{n_k})$ eine **Teilfolge** (TF) von (a_n).

Beispiele:

a) $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = 2k$

b) $(a_1, a_4, a_9, \ldots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = k^2$

c) $(a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, a_{14}, \ldots)$ ist keine Teilfolge von (a_n).

Definition: (a_n) sei eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. α heißt ein **Häufungswert** (HW) von (a_n)

$$\iff \exists \text{ Teilfolge } (a_{n_k}) \text{ von } (a_n): \; a_{n_k} \to \alpha \; (k \to \infty)$$

$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}$.

Satz 2.10: $\alpha \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungswert von (a_n)

$$\iff \forall \epsilon > 0 : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha) \quad (*)$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.
"$\Rightarrow$" Sei (a_{n_k}) eine Teilfolge mit $a_{n_k} \to \infty$. Sei $\epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha)$ für $k \geq k_0 \Rightarrow (*)$.
"$\Leftarrow$" $\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in U_1(\alpha)$. $\exists n_2 \in \mathbb{N} : a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ und $n_2 > n_1$. $\exists n_3 \in \mathbb{N} : a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$ und $n_3 > n_2$. Etc. ... Man erhält eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit

$$a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha) \; \forall k \in \mathbb{N}, \text{ also } |a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \quad \forall k$$

Somit: $a_{n_k} \to \alpha$. □

Beispiele:

a) $a_n = (-1)^n$, $a_{2k} = 1 \to 1, a_{2k+1} \to -1$, also $1, -1 \in H(a_n)$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1, \alpha \neq -1$
   Wähle $\epsilon > 0$ so, dass $1, -1 \notin U_\epsilon(\alpha)$. Dann $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$ für kein $n \in \mathbb{N} \overset{2.10}{\Longrightarrow} \alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \{1, -1\}$.

b) $a_n = n$. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$, so gilt: $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$ für höchstens endlich viele n, also $\alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \emptyset$.

c) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Sei (a_n) eine Folge mit $Q = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0 \overset{1.5}{\Longrightarrow} U_\epsilon(\alpha) = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ enthält unendlich viele verschiedene rationale Zahlen $\overset{2.10}{\Longrightarrow} \alpha \in H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \mathbb{R}$.

Folgerung: Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_m) in $\mathbb{Q} : r_n \to \alpha$.

Satz 2.11: (a_n) sei konvergent, $a := \lim a_n$ und (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n). Dann:

$$a_{n_k} \to a \quad (k \to \infty)$$

Insbesondere: $H(a_n) = \{\lim a_n\}$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann: $a_n \in U_\epsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also auch $a_{n_k} \in U_\epsilon(a)$ ffa $k \in \mathbb{N}$. Somit: $a_{n_k} \to \alpha$. $\square$

Definition: Sei (a_n) eine Folge.

a) $m \in \mathbb{N}$. m heißt **niedrig** (für (a_n)) $\iff a_n \geq a_m \; \forall n \geq m$

b) $m \in \mathbb{N}$ heißt nicht niedrig $\iff \exists n \geq m : a_n < a_m \Rightarrow n > m : a_n < a_m$

Hilfssatz (HS)**:** (a_n) sei eine Folge. Dann enthält (a_n) eine monotone Teilfolge.

Beweis.
Fall 1: es existieren höchstens endlich viele niedrige Indizes. Also existiert $n_1 \in \mathbb{N}$: jedes $n \geq n_1$ ist nicht niedrig.

n_1 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} < a_{n_1}$

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$

Etc...

Wir erhalten so eine streng monoton fallende Teilfolge (a_{n_k}).
Fall 2: es existieren unendlich viele niedrige Indizes $n_1, n_2, \ldots$, etwa $n_1 < n_2 < \ldots$

n_1 ist niedrig und $n_2 > n_1 \to a_{n_2} \geq a_{n_1}$

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} \geq a_{n_2}$

Etc. . .

Wir erhalten so eine monoton wachsende Teilfolge (a_{n_k}). $\square$

Satz 2.12 (Bolzano-Weierstraß)**:**
(a_n) sei beschränkt, dann: $H(a_n) \neq \emptyset$. (a_n) enthält also eine konvergente Teilfolge.

Beweis. $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\overset{HS}{\Longrightarrow}$ (a_n) enthält eine monotone Teilfolge (a_{n_k}). Dann: $|a_{n_k}| \leq c \ \forall k \in \mathbb{N}$, (a_{n_k}) ist also beschränkt.
$\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (a_{n_k}) ist konvergent. Also $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in H(a_n)$. $\square$

Satz 2.13: (a_n) sei beschränkt (nach 2.12 gilt damit $H(a_n) \neq \emptyset$).

a) $H(a_n)$ ist beschränkt.

b) $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$; es existieren also

$$\max H(a_n), \min H(a_n).$$

Definition: Ist (a_n) beschränkt, so nennen wir

a) $\limsup_{n\to\infty} a_n := \limsup a_n := \overline{\lim} a_n := \max H(a_n)$ heißt **Limes superior** oder **oberer Limes** von (a_n).

b) $\liminf_{n\to\infty} a_n := \liminf a_n := \underline{\lim} a_n := \min H(a_n)$ heißt **Limes inferior** oder **unterer Limes** von (a_n).

Beweis.

a) $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\alpha \in H(a_n)$. Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. Es ist

$$|a_{n_k}| \leq c \quad \forall k, \text{ also } -c \leq a_{n_k} \leq c \quad \forall k$$

$\Rightarrow -c \leq \alpha \leq c$. Also $|\alpha| \leq c \forall \alpha \in H(a_n)$.

b) ohne Beweis.

$\square$

Satz 2.14: (a_n) sei beschränkt.

a) $\liminf a_n \leq \alpha \leq \limsup a_n \ \forall \alpha \in H(a_n)$.

b) Ist (a_n) konvergent $\Rightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$.

c) $\limsup(\alpha a_n) = \alpha \limsup a_n \ \forall \alpha \geq 0$.

d) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$.

Beweis. a) klar, b) folgt aus 2.11, c) und d) Übung. $\square$

Motivation: (a_n) sei konvergent und $\lim a_n =: a$. Sei $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

D.h.: (a_n) hat die folgende Eigenschaft:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \tag{c}$$

$$(\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+k}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \ \forall k \in \mathbb{N})$$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt eine **Cauchyfolge** (CF)

$$\iff (a_n) \text{ hat die Eigenschaft } (c)$$

Konvergente Folgen sind also Cauchy-Folgen!

2.15 Cauchykriterium: (a_n) ist konvergent $\iff$ (a_n) ist eine Cauchyfolge.

Beweis. "$\Rightarrow$" s.o. "$\Leftarrow$" ohne Beweis. $\square$

Beispiel: $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit Induktion folgt:

1) $0 < a_n \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ Damit:

2) $a_n \geq \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$

Für $n \geq 2, k \in \mathbb{N}$ gilt daher:

$$
\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= \left| \frac{1}{1 + a_{n+k-1}} - \frac{1}{1 - a_{n-1}} \right| = \frac{|a_{n-1} - a_{n+k-1}|}{(1 + a_{n+k-1})(1 + a_{n-1})} \\
&\leq \frac{1}{(1 + \frac{1}{2})^2} |a_{n+k-1} a_{n-1}| = \frac{4}{9} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |a_{n-k-2} - a_{n-2}| \leq \ldots \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_{k+1} - a_1| \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} (|a_{k+1}| + |a_1|) \leq 2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$: $2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} < \epsilon$ $(n \geq n_0)$. Damit:

$$|a_{n+k} - a_n| < \epsilon \quad (n \geq n_0, k \in \mathbb{N}).$$

Also ist (a_n) eine Cauchyfolge. $a := \lim_{n \to \infty} a_n$. Klar:

$$a \geq \frac{1}{2} \text{ und } a = \frac{1}{1 + a}$$

Also $a^2 + a - 1 = 0 \iff a = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Wegen $a \geq \frac{1}{2}$ folgt $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3 Unendliche Reihen

Definition: (a_n) sei eine Folge.

a) $s_n := a_1 + a_2 + \ldots a_n \quad (n \in \mathbb{N})$ (also $a_1 = a_1, a_2 = a_1 + a_2, \ldots$). (s_n) heißt **(unendliche) Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Weitere Bezeichnungen: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

b) s_n heißt **n-te Teilsumme** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent bzw. divergent $\iff$ (s_n) ist konvergent bzw. divergent.

d) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim s_n$ der Reihenwert und wird ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet (schlecht, aber so üblich).

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ eine Folge, so definiert man entsprechend

$$s_n = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n \quad (n \geq p)$$

und $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ (meist: $p = 1$ oder $p = 0$).

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nun für Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Diese Sätze und Definitionen gelten entsprechend für Reihen der Form $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ $(p \in \mathbb{Z})$.

Beispiele:

a) Sei $x \in \mathbb{R}$. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$ heißt **geometrische Reihe**. $s_m = 1 + x + \ldots x^m \overset{2.6}{\Longrightarrow} (s_n)$ konvergiert $\iff$ $|x| < 1$ und $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$. Also: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergent $\iff$ $|x| < 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x] < 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_n &= a_1 + \ldots + a_n \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \end{aligned}$$

Also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1))}$ konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$; $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \overset{2.9}{\Longrightarrow} s_n \to e$.
Also: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

d) Die **harmonischen Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dann ist $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}$,

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = s_n + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq s_n + \frac{1}{2}$$

Annahme: (s_n) ist konvergent. $s := \lim s_n$

$$\overset{2.11}{\Longrightarrow} s_{2n} \to s \Rightarrow s \geq s + \frac{1}{2} \to 0 \geq \frac{1}{2}.$$

Widerspruch! Also: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent!

Satz 3.1: (a_n) sei eine Foge und $s_n = a_1 + \ldots + a_n$.

a) **Monotoniekriterium:** Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

b) **Cauchykriterium:** $\sum a_n$ konvergiert $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon \quad \forall m > n \geq n_0$$

c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \to 0$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann ist für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ konvergent und für $r_\nu := \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ gilt: $r_\nu \to 0$.

Beweis.

a) $s_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. (s_n) ist also wachsend und beschränkt $\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (s_n) konvergent.

b) Für $m > n : |s_m - s_n| = |a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m - (a_1 + \ldots a_n)| = |a_{n+1} + \ldots + a_m| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k|$. Behauptung folgt aus 2.15.

c) $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$. Ist (s_n) konvergent, so folgt $a_{n+1} \to 0$

d) ohne Beweis!

$\square$

Bemerkung: Ist (a_n) eine Folge und gilt $a_n \not\to 0$, so ist $\sum a_n$ divergent!

Satz 3.2: Die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ seien konvergent und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$$

und $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$

Beweis. 2.2 $\square$

3.3 Leibnitzkriterium: Sei (b_n) eine Folge mit:

$$b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, (b_n) \text{ ist monoton fallend und } b_n \to 0$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konvergent.

Beispiel: Aus 3.3 folgt:
Die **alternierende harmonische Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent.

Beweis. (von 3.3) $a_n := (-1)^{n+1} b_n$,
$s_n := a_1 + \ldots + a_n$. $s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{b_{2n+1} - b_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n}$.

(s_{2n}) ist also monoton fallend. Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} = s_{2n-1} - b_{2n} \leq s_{2n-1} \qquad (*)$$

Also:

$$s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2n} \overset{(*)}{\leq} s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1$$

(s_{2n}) und (s_{2n+1}) sind also beschränkt $\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (s_{2n}) und (s_{2n+1}) sind konvergent. $s := \lim s_{2n} \overset{(*)}{\Longrightarrow} s = \lim s_{2n+1}$.
Sei $\epsilon > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} s_{2n} \in U_\epsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ s_{2n-1} \in U_\epsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow s_n \in U_\epsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$$

Also: $s_n \to s$. $\square$

Definition: $\sum a_n$ heißt **absolut konvergent** $\iff$ $\sum |a_n|$ ist konvergent.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz 3.4: $\sum a_n$ sei absolut konvergent. Dann:

a) $\sum a_n$ ist konvergent

b) $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ($\triangle$-Ungleichung für Reihen)

Beweis.

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}, m > n$

$$\underbrace{|\sum_{k=n+1}^{m} a_k|}_{=:\sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|}_{=:\tau_{m,n}} \qquad (*)$$

Sei $\epsilon > 0$, Voraussetzung nach 3.1 *b)* $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \tau_{m,n} < \epsilon$ für $m > n > n_0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \sigma_{m,n} < \epsilon$ für $m > n \geq n_0 \overset{3.1\ b)}{\Longrightarrow} \sum a_n$ konvergiert.

b) Sei $s_k := a_1 + \ldots + a_k$, $s := \lim s_n$, $\sigma_k := |a_1| + \ldots |a_k|$ und $\sigma = \lim \sigma_n$. Dann: $|s_n| \to |s|$ und

$$|s| \leq \sigma \quad \forall n$$

$\Rightarrow |s| \leq \sigma \Rightarrow \triangle$-Ungleichung.

$\square$

Satz 3.5:

a) **Majorantenkriterium**: Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum b_n$ konvergent, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

b) **Minorantenkriterium**: Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum b_n$ divergent, so ist $\sum a_n$ divergent.

Beweis.

a) $\exists j \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq b_n$ $\forall n \geq j$. Sei $m > n \geq j$, dann

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} |a_n|}_{=:\sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} b_k}_{=:\tau_{m,n}}$$

Sei $\epsilon > 0$ Voraussetzung nach 3.1 *b)* $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq j$ und $\tau_{m,n} < \epsilon$ für $m > n \geq n_0$. Dann: $\sigma_{m,n} < \epsilon$ für $m > n \geq n_0 \overset{3.1\ b)}{\Longrightarrow}$ $\sum |a_n|$ konvergiert.

b) Annahme: $\sum a_n$ konvergent $\overset{a)}{\Rightarrow} \sum b_n$ konvergent. Widerspruch.

$\square$

Beispiele:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = |a_n| = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$$

Bekannt: $\sum b_n$ konvergiert $\xRightarrow{3.5\ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergiert.

b) Aus Beispiel a): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

c) Sei $\alpha > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$: Betrachte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.
Fall 1: $\alpha \in (0, 1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \xRightarrow{3.5\ b)} \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ divergiert.}$$

Fall 2: $\alpha \geq 2$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \xRightarrow{3.5\ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert.}$$

Fall 3: $\alpha \in (1, 2)$: vgl. Übungsblatt, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert.

Fazit: Ist $\alpha > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+1}$; $|a_n| = \frac{n+2}{n^3+1} \leq \frac{n+2}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2n}{n^2} =: b_n$. Für $n \geq 2$
$\sum b_n$ konvergiert $\xRightarrow{3.5\ a)} \sum a_n$ konvergiert absolut.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$; $a_n = |a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}_{\geq 0} =: b_n$.

$\sum b_n$ divergiert $\xRightarrow{3.5\ b)} \sum a_n$ divergiert.

Bemerkung: Ist später später (in §7) die allgemeine Potenz a^x ($a > 0, x \in \mathbb{R}$) eingeführt, so zeigt man analog:

$$\text{Für } \alpha > 0 \text{ gilt: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert } \iff \alpha > 1$$

Hilfssatz (HS)**:** (c_n) sei beschränkt

a) Ist $\alpha := \limsup c_n$ und $x > \alpha$, so gilt: $c_n < x$ ffa n

b) Ist $\alpha := \liminf c_n$ und $x < \alpha$, so gilt: $c_n > x$ ffa n

c) Ist $c_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\limsup c_n = 0$, so gilt $c_n \to 0$

Beweis.

b) Sei $\epsilon > 0$. $x := \epsilon \overset{a)}{\Rightarrow} -\epsilon < 0 \leq c_n < \epsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also $c_n \in U_\epsilon(0)$ ffa n.

a) Annahme: $c_n \geq x$ für unendlich viele n, etwa für $n_1, n_2, n_3, \ldots$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$
Die Teilfolge (c_{n_k}) ist beschränkt $\overset{2.11}{\Longrightarrow}$ (c_{n_k}) enthält eine konvergente Teilfolge $(c_{n_{k_j}})$. $\beta := \lim_{j\to\infty} c_{n_{k_j}}$. Es ist $c_{n_{k_j}} \geq x\ \forall j \Rightarrow \beta \geq x > \alpha$; $(c_{n_{k_j}})$ ist eine Teilfolge von $(c_n) \Rightarrow \beta \in H(a_n) \Rightarrow \beta \leq \alpha$, Widerspruch.

□

3.6 Wurzelkriterium (WK): Sei (a_n) eine Folge, $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$.

a) Ist (c_n) unbeschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

b) Sei $(c_n$ beschränkt und $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$

(i) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\alpha > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.

Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis.

a) (c_n) unbeschränkt $\Rightarrow c_n \geq 1$ für unendlich viele $n \Rightarrow |a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \Rightarrow a_n \not\to 0 \xRightarrow{3.1\ c)}$ Beh.

b) (i) Sei $\alpha < 1$, sei $x \in (\alpha, 1) \xRightarrow{HS} c_n \leq x$ ffa n $\Rightarrow |a_n| \leq x^n$ ffa n. $\sum x^n$ konvergiert $\xRightarrow{3.5\ a)} \sum a_n$ konvergiert absolut.

(ii) Sei $\alpha > 1$, wähle $\epsilon > 0$ so, dass $\alpha - \epsilon > 1$. Es gilt $c_n U_\epsilon(\alpha)$ für unendlich viele n. Dann: $c_n > \alpha - \epsilon > 1$ für unendlich viele n. Wie bei a): $\sum a_n$ divergiert.

$\square$

Beispiele:

a) $a_n := \frac{1}{n}$; $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, also $\alpha = 1$ und $\sum a_n$ divergiert.

b) $a_n := \frac{1}{n^2}$; $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$, also $\alpha = 1$ und $\sum a_n$ konvergiert.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n = 2k \\ nx^n, & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases}$

Frage: Wann ist $\sum a_n$ (abs.) konvergent? Es ist

$$c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } n = 2k \\ \sqrt[n]{n}|x|, & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases}$$

(c_n) ist also beschränkt, $H(c_n) = \left\{\frac{1}{2}, |x|\right\}$.

Fall 1: $|x| < 1$. Dann: $\alpha = \limsup c_n < 1$, also ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Fall 2: $|x| > 1$. Dann: $\alpha = \limsup c_n < 1$, also ist $\sum a_n$ divergent.

Fall 3: $|x| = 1$. Dann: $\alpha = \limsup c_n = 1$. Es ist $|a_n| = n$ falls $n = 2k-1$. Also: $a_n \not\to 0$. $\sum a_n$ ist also divergent.

3.7 Quotientenkriterium (QK): Es sei $a_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und definiere $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \; (n \in \mathbb{N})$.

a) Ist $c_n \geq 1$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum a_n$ divergent.

b) Sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup c_n$ und $\beta := \liminf c_n$.

(i) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\beta > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.

Folgerung 3.8: (a_n) und (c_n) seien wie in 3.7, (c_n) sei konvergent und $\alpha := \lim c_n$.

$$\sum a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konv.,} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}$$

Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allg. Aussage möglich.

Beispiele:

a) $a_n = \frac{1}{n}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$, $\sum a_n$ divergiert.

b) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$, $\sum a_n$ konvergiert.

3.9 Die Exponentialreihe: Für $x \in \mathbb{R}$ betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Frage: für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe (absolut).
Klar, die Reihe konvergiert für $x = 0$. Sei $x \neq q$ und $a_n := \frac{x^n}{n!}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Aus 3.8 folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ konv. absolut für jedes } x \in \mathbb{R}$$

Damit ist auf $\mathbb{R}$ eine Funktion $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{Exponentialfunktion}$$

Es ist $E(0) = 1$, $E(1) \overset{§2}{=} e$.
Später zeigen wir: $E(r) = e^r$ für $r \in \mathbb{Q}$. Des Weiteren definieren wir später $e^x := E(X)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann: $e^x = E(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Setze $b_n := a_{\varphi(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Also

$$b_1 = a_{\varphi(1)}, b_2 = a_{\varphi(2)}, \ldots$$

Dann heißt (b_n) eine **Umordnung** von (a_n).

Beispiel: $(a_2, a_4, a_1 a_3, a_6, a_8, a_5, a_7, \ldots)$ ist eine Umordnung von (a_n).

Satz 3.10: (b_n) sei eine Umordnung von (a_n).

a) Ist (a_n) konvergent, so ist (b_n) konvergent und $\lim b_n = \lim a_n$.

b) Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum b_n$ absolut konvergent und

$$\sum a_n = \sum b_n$$

Beweis.

a) $a := \lim a_n$; Sei $\epsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq n_0$. Dann: $|a_{\varphi(n)} - a| < \epsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

b) ohne Beweis.

$\square$

Bemerkung (ohne Beweis)**:** $\sum a_n$ sei konvergent, aber nicht absolut konvergent.

a) Ist $s \in \mathbb{R}$, so existiert eine Umordnung $\sum b_n$ von $\sum a_n$ mit: $\sum b_n$ ist konvergent und $\sum b_n = s$.

b) Es existiert eine Umordnung $\sum c_n$ von $\sum a_n$ mit: $\sum c_n$ ist divergent.

Definition: Gegeben seien die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
Setze für $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}, \text{ also:}$$
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das **Cauchyprodukt** (CP) von $\sum a_n$ und $\sum b_n$.

Satz 3.11 (ohne Beweis)**:** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent. Für ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gilt dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ ist absolut konvergent und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$$

Beispiel: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$. Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert absolut und $\sum_{k=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Also

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \overset{3.11}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$. Also:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1)$$

z.B.: $(x = \frac{1}{2}) : 4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n}$. Weiter:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

z.B.: $(x = \frac{1}{2}) : 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, also $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$.

3.12 Exponentialfunktion: $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$

a) $E(0) = 1, E(1) = e$

b) $E(x+y) = E(x)E(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

c) $E(x_1 + \ldots + x_m) = E(x_1) \cdot \ldots \cdot E(x_m)\ \forall x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$

d) $E(x) > 1\ \forall x > 0$; $E(X) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$; $E(-x) = E(x)^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R}$

e) $E(rx) = E(x)^r\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$

f) $E(r) = e^r\ \forall r \in \mathbb{Q}$

g) E ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt stets $E(x) < E(y)$.

Beweis.

a) klar.

b) $E(x)E(y) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}) \overset{3.11}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k} \overset{\S 1}{=} \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

Also: $E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y)$.

c) folgt aus b).

d) Für $x > 0$: $E(x) = 1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}_{>0} > 1$

$$1 = E(x + (-x)) \overset{b)}{=} E(x)E(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Insb.: $E(x) > 0$ $(x < 0)$ und $E(-x) = E(x)^{-1}$.

e) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$:

$$E(nx) = E(x + \ldots + x) \overset{c)}{=} E(x)^n$$

$E(x) = (En(\frac{x}{n}) = E(\frac{x}{n})^n$, also $E(\frac{1}{n}x) = E(x)^{\frac{1}{n}}$. Für $m, n \in \mathbb{N}$:

$$E(\frac{m}{n}x) = E(m\frac{x}{n}) = E(\frac{x}{n})^m = (E(x)^{\frac{1}{n}})^m = E(x)^{\frac{m}{b}}.$$

Also $E(rx) = E(x)^r$ $\forall r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$. Sei $r \in Q$ und $r < 0$. Dann: $-r > 0$, also

$$\underbrace{E(-rx)}_{\overset{d)}{=}\frac{1}{E(rx)}} = e(x)^{-r} = \frac{1}{E(x)^r}$$

Also $E(rx) = E(x)^r$.

f) folgt aus d) mit $x = 1$.

g) Sei $x < y \Rightarrow y - x > 0 \overset{d)}{\Rightarrow} E(y - x) > 1$

$$\Rightarrow 1 < E(y - x) \overset{b)}{=} E(y)E(-x) \overset{d)}{=} \frac{E(y)}{E(x)} \overset{d)}{\Rightarrow} E(x) < E(y)$$

$\square$

4 Potenzreihen

Definition: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei eine Folge in $\mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

heißt **Potenzreihe** (PR).

Frage: für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe (absolut)? Klar: die Potenzreihe konvergiert absolut für $x = x_0$.

Beispiele:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Hier: $a_n = \frac{1}{n!}, x_0 = 0$. Bekannt: die Potenzreihe konvergiert absolut in jeden $x \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n$. Hier: $a_n = 1$. Setze $q := x - x_0$. Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert absolut $\iff$ $|q| < 1$. D.g. die Potenzreihe konvergiert absolut $\iff$ $|x-x_0| < 1$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n(x-x_0)^n$. Hier: $a_n = n^n$. Sei $x \neq x_0$ und $b_n := n^n(x-x_0)^n$; $\sqrt[n]{|b_n|} = n|x-x_0| \overset{x \neq x_0}{\Longrightarrow} \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right)$ ist unbeschränkt $\overset{3.6}{\Longrightarrow} \sum n^n(x-x_0)^n$ ist divergent.
Also: $\sum_{n=0}^{\infty} n^n(x-x_0)^n$ konvergiert nur für $x = x_0$.

Definition: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe. Setze

$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right) \text{ unbeschränkt;} \\ \limsup \sqrt[n]{|b_n|}, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0, \infty) \end{cases}$$

(kurz: "$r = \frac{1}{\rho}$"). r heißt der **Konvergenzradius** (KR) der Potenzreihe.

Satz 4.1: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe und ρ und r seien wie oben.

a) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = x_0$.

b) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

c) Ist $r \in (0, \infty)$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$, sie divergiert für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$. Für $x = x_0 \pm r$ ist keine allg. Aussage möglich.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $b_n := a_n(x-x_0)^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Damit: $\sqrt[n]{|b_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0|$

a) Sei $x \neq x_0$. $r = 0 \iff \rho = 0 \iff \left(\sqrt[n]{|b_n(x)|}\right)$ unbeschränkt $\overset{3.6}{\Longrightarrow} \sum b_n(x)$ divergiert.

b) $r = \infty \iff \rho = 0 \iff \limsup \sqrt[n]{|b_n(x)|} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \overset{3.6}{\Longrightarrow}$ Beh.

c) $\limsup \sqrt[b]{|b_n(x)|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \rho|x-x_0| = \frac{1}{r}|x - x_0| < 1$

$$\iff |x - x| < r$$

Analog für $|x - x| > r$. Behauptung folgt aus 3.6.

□

Folgerung: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Beweis. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$; $a_n = \frac{1}{n!} \overset{4.1}{\Longrightarrow} \rho = 0$, also

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Hilfssatz vor 3.6 $\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. □

Beispiele:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $x_0 = 1$; $\rho = 1, r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert für $|x| <$ absolut; sie divergiert für $|x| > 1$. $|x| = 1$: die Potenzreihe divergiert.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, $x_0 = 0$; $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$ und sie divergiert für $|x| > 1$. $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert; $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert.

c) $\sum \frac{x^n}{n^2}$; $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$, $x_0 = 0$; $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$, sie divergiert für $|x| > 1$. $x = 1$: $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut; $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert absolut.

4.2 Cosinus: Betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

hier: $x_0 = 0, a_{2n+1} = 0, a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ folgt

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}} \to 0 \quad \text{Folgerung nach 4.1}$$

Also $H(\sqrt[n]{|a_n|}) = \{0\}$. Also: $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \overset{4.1}{\Longrightarrow}$ obige Potenzreihe hat den Konvergenzradius $r = \infty$, konvergiert also absolut in jedem $x \in \mathbb{R}$

$$\textbf{Cosinus:} \begin{cases} \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

4.3 Sinus: Ähnlich wie bei 4.2 sieht man: die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \dots$$

konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

$$\textbf{Sinus:} \begin{cases} \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \sin x := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$$

Klar: $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$, $\sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Ähnlich wie in 3.12 zeigt man (mit Cauchyprodukt) die **Additiostheoreme**, dassfüraööe $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Für $x \in \mathbb{R}$:

$$1 = \cos(0) = \cos(x+(-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\cos^2 x \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, also $|\cos x| \le 1$ und $sin^2 x \le cos^2 x + \sin^2 x = 1$, also $|\sin x| \le 1$.

Satz 4.4: Es ist $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$, die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ sei konvergent und $L := \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ den Konvergenzradius L.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ und $b_n := a_n(x-x_0)^n$. Dann:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x - x_0| \qquad (*)$$

Fall 1: $L = 0$. $|x - x_0| > 0 \Rightarrow \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq |x - x_0|$ ffa n

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \geq \text{ ffa } n \overset{3.7}{\Longrightarrow} \sum b_n \text{ divergiert}$$

Die Potenzreihe konvergiert also nur für $x = x_0$, also $r = 0 = L$.
Fall 2: $L > 0$. $\overset{(*)}{\Longrightarrow} \lim \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{L}|x - x_0|$

$$\overset{3.8}{\Longrightarrow} \begin{cases} \text{Die Potenzreihe konv. absolut für } |x - x_0| < L \\ \text{Die Potenzreihe divergiert für } |x - x_0| > L \end{cases}$$

$\overset{4.1}{\Longrightarrow} r = L$. $\square$

5 q-adische Entwicklung

Definition: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$: $k \leq x < k+1$;

$$[x] := k = \text{ größte ganze Zahl } \leq x$$

Vereinbarung: In diesem § sei stets $a \geq 0, q \in \mathbb{N}$ und $q > 1$.

Setze $z_0 := [a]$, dann: $z_0 \leq a < z_0 + 1$.
Setze $z_1 := [(a - z_0)q]$, dann: $z_1 \leq aq - z_0 q < z_1 + 1$.
Also

$$z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{1}{q}$$

Es ist $z_1 \in \mathbb{N}_0$: Annahme: $z_1 \geq 1 \Rightarrow \frac{z_1}{q} \geq 1$

$$\Rightarrow z_0 + 1 \leq z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + 1$$

Widerspruch! Also: $z_1 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.
Setze $z_2 := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2]$, dann (wie oben)

$$z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} + \frac{1}{q^2}$$

und $z_2 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.
Allgemein (induktiv): sind $z_0, \ldots, z_n$ schon definiert, so setze

$$z_{n+1} := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q} - \ldots - \frac{z_n}{q^n})q^{n+1}]$$

Wir erhalten so eine Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ mit:

$$(*) \begin{cases} z_0 \in \mathbb{N}_0, z_n \in \{0, 1, \ldots, q-1\} \ \forall n \geq 1 \\ \text{und} \\ \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \ldots + \frac{z_n}{q^n}}_{=:S_n} \leq a < \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \ldots + \frac{z_n}{q^n} + \frac{1}{q^n}}_{=S_n + \frac{1}{q^n}} \end{cases}$$

In den großen Übungen wird gezeigt:

Satz 5.1: Ist $(\tilde{z}_n)_0^\infty$ eine weitere Folge mit den Eigenschaften in $(*)$, so gilt:

$$z_n = \tilde{z}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Es ist

$$0 \le \frac{z_n}{q^n} \le \frac{q-1}{q^n} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} \text{ konvergiert.}$$

$\overset{3.5\ a)}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{z_n} q^n$ konvergiert. Also ist (s_n) konvergent.

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} a = \lim s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n}$$

Dafür schreibt man: $a = z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ (**q-adische Entwicklung von** a)
$q = 10$: Dezimalentwicklung; $q = 2$: Dualentwicklung; (Gilt mit einem $m \in \mathbb{N}$: $z_n = 0 \; \forall n > m$, so schreibt man auch: $a = z_0, z_1 \ldots z_m$).

Beispiele:

a) $q = 10, a = 1.\ z_0 = 1, z_1 = [(a - z_0)q] = 0;$
$z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = 0, \ldots$ allg.: $z_n = 0 \; \forall n \ge 1$.
Also $1 = 1,000\ldots$

b) $q = 10, a = \frac{1}{2}.\ z_0 = 0, z_1 = [(a - z_0)q] = [\frac{1}{2}10] = 5;$
$z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = [(\frac{1}{2} - \frac{5}{10})100] = 0, \ldots$ allg.: $z_n = 0 \; \forall n \ge 2$.
Also $\frac{1}{2} = 0,5000\ldots = 0,5$

Definition: Sei $b \in \mathbb{R}$ und $b < 0$. Weiter sei

$$-b = z_0, z_1 z_2 \ldots$$

die q-adische Entwicklung von $-b$. Dann ist $b = -z_0, z_1 z_2 \ldots$ die q-adische Entwicklung von b.

Satz 5.2: Sei $a = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$ die q-adische Entwicklung von a. Dann ist $z_n = q-$ ffa $n \in \mathbb{N}$ nicht möglich.

Beweis. Annahme: $\exists m \in \mathbb{N}$: $z_n = q - 1 \ \forall n \geq m$. Dann

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{q^n}}_{=S_{m-1}} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^n}$$

und damit

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^m} &= (q-1)\left(\frac{1}{q^m} + \frac{1}{q^{m+1}} + \dots\right) \\ &= \frac{q-1}{q^m}(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots) \\ &= \frac{q-1}{q^m}\frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \frac{1}{q^{m-1}}\end{aligned}$$

Also $a = S_{m-1} + \frac{1}{q^{m-1}} \overset{(*)}{>} a$. Widerspruch! $\square$

Satz 5.3: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis. es genügt zu zeigen: $[0,1)$ ist überabzählbar. Annahme $[0,1)$ abzählbar, also $[0,1) = \{a_1, a_2, \dots\}$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$$

die 3-adische Entwicklung von a_j, also $z_k^{(j)} \in \{0,1,2\}$. Setze

$$z_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } z_k^{(k)} = 0 \text{ oder } z_k^{(k)} = 2 \\ 0, & \text{falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

Dann: $z_k \neq z_k^k \ \forall k \in \mathbb{N}$ $(**)$. Setze $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n}$, dann:

$$0 \leq a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}, \text{ also } a \in [0,1).$$

Übung: $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ ist die 3-adische Entwicklung von $a . a \in [0,1) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a = a_m$, also

$$0, z_1 z_2 z_3 \dots = 0, z_1^{(m)} z_2^{(m)} \dots$$

und $z_j = z_j^{(m)} \; \forall j \in \mathbb{N} \overset{j=m}{\Longrightarrow} z_m = z_m^{(m)}$. Widerspruch zu $(**)$. $\square$

6 Grenzwerte bei Funktionen

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von $D \iff \exists$ Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$.

Beispiele: a) $D = (0, 1]$
x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff x_0 \in [01]$

b) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
D hat genau einen Häufungspunkt: $x_0 = 0$.

c) Ist D endlich, so hat D keine Häufungspunkte.

Hilfssatz 6.1: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff \forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Beweis.
“$\Rightarrow$“ $\exists$ Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\} : x_n \to x_0$. Sei $\epsilon > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \; \forall n \geq n_0.$$

“$\Leftarrow$“ $\exists x_1 \in U_1(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$, also $|x_1 - x_0| < 1$;
$\exists x_2 \in U_{\frac{1}{2}}(x_0 \cap (D \setminus \{x_0\})$, also $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$; etc.
Wir erhalten eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also $x_n \to x_0$. □

Vereinbarung: ab jetzt sei stets in den §en:

- $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, x_0$ ein Häufungspunkt von D und
- $f := D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

Bezeichnung:

a) $D_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$

b) Sei $M \subseteq D$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit $f \leq g$ auf $M \iff f(x) \leq g(x)\ \forall x \in M$.

Definition: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert $\iff \exists a \in \mathbb{R}$: für jede Folge (x_n) in $D \in \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to a$. In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt und wir schreiben:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) \to a\ (x \to x_0)$$

Bemerkung: sollte $x_0 \in D$ sein, so ist der Wert $f(x_0)$ in obiger Definition nicht relevant. Relevant ist allein das Verfahren von f in das "Nähe" von x_0.

Beispiele:

a) $D := [0,\infty), p \in \mathbb{N}; f(x) := \sqrt[p]{x}$. Sei $x_0 \in D$ (dann ist x_0 eine Häufungspunkt von D). Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ und $x_n \to x_0 \overset{2.4}{\Longrightarrow} \sqrt[p]{x_n} \to \sqrt[p]{x_0}$. Also

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \sqrt[p]{x_0}$$

b) $D = (0,1]$

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Klar: $\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to 1} f(x) = 1$

$$x_n := \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, z_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad (n \geq 3)$$

Dann: $x_n \to \frac{1}{2}, z_n \to \frac{1}{2}$, aber $f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{4} \neq 1 \leftarrow f(z_n)$.
D.h. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ existiert nicht, aber $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x\in(0,\frac{1}{2})}} f(x) = \frac{1}{4}$, dafür schreibt man

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0} f(x) = \frac{1}{4} \text{ (linksseitiger Grenzwert)}$$

Analog:

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x\in(\frac{1}{2},\infty)}} f(x) = 1 \text{ (rechtsseitiger Grenzwert)}$$

c) $D = \mathbb{R}$, $f = E$, also $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; x_0 = 0$. Sei $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} |E(x) - E(0)| &= |E(x) - 1| = |x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots| \\ &= |x| \left|1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots\right| \\ &\leq |x| \left(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \dots\right) \\ &\leq |x| \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \\ &= |x|(e-1) \end{aligned}$$

Sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}$: $x_n \to 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n| \leq 1 \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ $|E(x_n) - | \leq |x_n|(e-1) \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow E(x_n) \to 1$
Also: $\lim_{x\to 0} E(x) = 1 = E(0)$. Somit: $\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x\to 0} \frac{x1n}{n!}\right)$.

Satz 6.2:

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(\epsilon)) :$

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x \in D_\delta(x_0) \tag{$*$}$$

b) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert

$\iff$ für jede Folge (x_n) in $D \backslash \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ ist $(f(x_n))$ konvergent.

c) **Cauchykriterium**: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert

$\iff \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \; \forall x_1, x_2 \in D_\delta(x_0)$

Satz 6.3: $f, g, h \colon D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen. (Erinnerung: $D_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und es gelte $f(x) \to a, g(x) \to b$ $(x \to x_0)$. Dann:

a) $\alpha f(x) + \beta g(x) \to \alpha a + \beta b$; $f(x) g(x) \to ab$,
$|f(x)| \to |a|$ $(x \to x_0)$

b) Ist $a \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$: $f(x) \neq 0 \; \forall x \in D_\delta(x_0)$. Für $\frac{1}{f} \colon D_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ gilt: $\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{a}$ $(x \to x_0)$.

c) Für ein $\delta > 0$ gelte: $f \leq g$ auf $D_\delta(x_0)$. Dann: $a \leq b$

d) Für ein $\delta > 0$ gelte: $f \leq h \leq g$ auf $D_\delta(x_0)$. Ist $a = b$, so gilt: $h(x) \to a$ $(x \to x_0)$.

Beweis. z. B.: c) Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ und $x_n \to x_0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$x_n \in D_\delta(x_0) \; \forall n \geq n_0$$

Dann: $f(x_n) \leq g(x_n) \; \forall n \geq n_0 \overset{2.2}{\Longrightarrow} a = \lim f(x_n) \leq \lim g(x_n) = b$. $\square$

Definition:

a) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

$$x_n \to \infty \iff \forall c > 0 \; \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : x_n > c \quad \forall n \geq n_0$$
$$x_n \to -\infty \iff \forall c < 0 \; \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : x_n < c \quad \forall n \geq n_0$$

Übung: $x_n \to \infty \iff x_n > 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{x_n} \to 0$ und
$x_n \to -\infty \iff x_n < 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{x_n} \to 0$

b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall (x_n)$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to \infty$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall (x_n)$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to -\infty$

c) D sei nicht nach oben beschränkt, $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \iff \forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \to \infty \text{ gilt: } f(x_n) \to a$$

d) D sei nicht nach unten beschränkt, $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \iff \forall (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n \to -\infty \text{ gilt: } f(x_n) \to a$$

Beispiel 6.4: $\frac{1}{x} \to \infty$ $(x \to 0+0)$, $\frac{1}{x} \to -\infty$ $(x \to 0-0)$, $\frac{1}{x} \to 0$ $(x \to \pm\infty)$

6.5 Exponentialfunktionen: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
Sei $p \in \mathbb{N}_0$: für $x > 0$:

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \dots \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$$

Also: $\forall x > 0$: $\frac{E(x)}{x^p} > \frac{x}{(p+1)!}$. Somit:

$$\frac{E(x)}{x^p} \to \infty \; (x \to \infty)$$

Insbes. $(p = 0)$: $E(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. Es ist $E(-x) = \frac{1}{E(x)} \to 0$ $(x \to \infty)$, also: $(x) \to 0$ $(x \to -\infty)$.

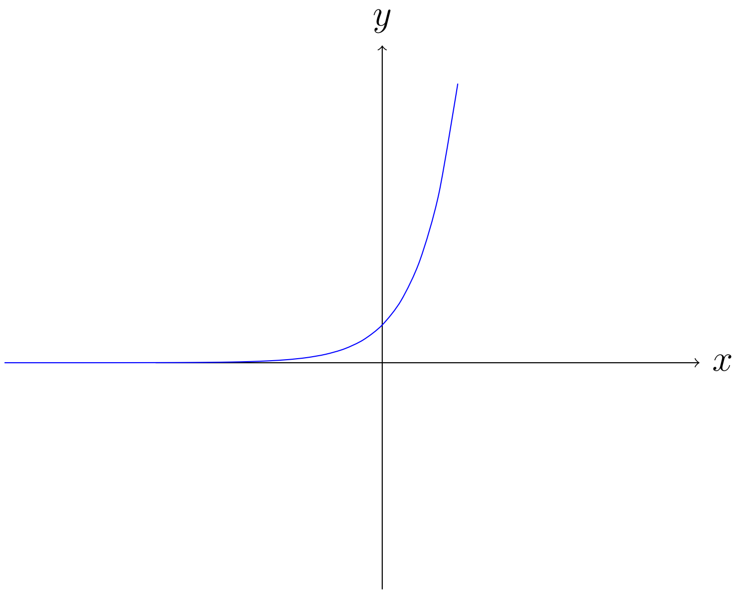


Abbildung 6.1: Exponentialfunktion.

7 Stetigkeit

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

a) f heißt **in** x_0 **stetig** $\iff$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to f(x_0)$.

b) f heißt **auf D stetig** $\iff$ f ist in jedem $x \in D$ stetig.

Beispiele: a) $D = [0\infty), p \in \mathbb{N}, f(x) = \sqrt[p]{x}$. Bekannt: ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0 \in D$, so gilt $f(x_n) \to f(x_0)$. Also: $f \in C\left([0,\infty]\right)$

b) $D = [0,1] \cup \{2\}$, $f(x) \coloneqq \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$

Klar: f ist stetig in jedem $x \in [0,1)$.

- $x_0 := 1, x_n := 1 - \frac{1}{n}$. Dann ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to 1$, aber $f(x_n) = x_n^2 \to 1 \neq 0 = f(1)$. f ist also in $x_0 = 1$ nicht stetig.
- $x_0 := 2$, sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to 2$. Dann: $x_n = 2$ ffa n, also $f(x_n) = 1$ ffa n. Somit: $f(x_n) \to 1 = f(2)$. f ist also in $x_0 = 2$ stetig.

Satz 7.1: $D \subseteq \mathbb{R}, f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$.

a) f ist in x_0 stetig $\iff$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in D_\delta(x_0)$$

b) Ist x_0 Häufungspunkt von D, so gilt:

$$f \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Beweis.

a) fast wörtlich wie bei 6.2.

b) Übung.

$\square$

Satz 7.2:

a) $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ seien stetig in $x_0 \in D$ und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind stetig in x_0:

$$\alpha f + \beta g, fg \text{ und } |f|$$

Ist $x_0 \in \tilde{D} := \{x \in D : f(x) \neq 0\}$, so ist $\frac{1}{f}\colon \tilde{D} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

b) Sind $f, g \in C(D)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\alpha f + \beta g, fg \text{ und } |f| \in C(D)$$

Beweis. a) Mit 2.2; b) folgt aus a). $\square$

Satz 7.3: Es seien $D, D_0 \subseteq \mathbb{R}, f\colon D \to \mathbb{R}, g\colon D_0 \to \mathbb{R}$ Funktionen, $f(D) \subseteq D_0, x_0 \in D$ und $y_0 := (x_0)$. Ist f in x_0 stetig und ist g in y_0 stetig, so ist

$$g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$$

stetig in x_0, wobei $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$. f stetig in $x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) = y_0$. g stetig in $y_0 \Rightarrow \underbrace{g(f(x_n))}_{=(g\circ f)(x_n)} \to g(x_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$

$\square$

Satz 7.4: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $D := (x_0 - r, x_0 + r)$. falls $r < \infty$ und $D := \mathbb{R}$ falls $r = \infty$. Weiter sei

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \ (x \in D)$$

Dann: $f \in C(D)$.

Beweis. später, nach 8.3. $\square$

Beispiele: Exponentialfunktionen, Sinus und Cosinus sind also auf $\mathbb{R}$ stetig.

Beispiel 7.5: Beh.: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Beweis. Für $x \neq 0$:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \ (x \to 0)$$

$\square$

Beispiel 7.6: Beh.: $\lim_{x\to 0} \frac{E(x)-1}{x} = 1$.

Beweis. Für $x \neq 0$:

$$\frac{E(x)-1}{x} = \frac{1}{x}\left((1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots)-1\right) = \underbrace{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots}_{\text{PR mit KR } r=\infty} \xrightarrow{7.4} 1 \ (x \to 0)$$

$\square$

Folgerung: Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{h\to 0} \frac{E(x_0+h)-E(x_0)}{h} = E(x_0)$.

Beweis. $\frac{E(x_0+h)-E(x_0)}{h} = \frac{E(x_0)E(h)-E(x_0)}{h} = E(x_0)\frac{E(h)-1}{h} \xrightarrow{7.6} E(x_0)$ $(h \to 0)$ $\square$

7.7 Zwischenwertsatz: Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C([a,b])$ und y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$.
Dann existiert ein $x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0$.

Beweis. Fall 1: $f(a) = y_0$ oder $f(b) = y_0$, fertig.
Fall 2: $f(a) \neq y_0 \neq f(b)$. o.B.d.A.: $f(a) < f(b)$, also $f(a) < y_0 < f(b)$.

$$M := \{x \in [a,b] : f(x) \leq y_0\}$$

$a \in M \Rightarrow M \neq \emptyset; M \subseteq [a,b] \Rightarrow M$ ist beschränkt $\overset{(A15)}{\Longrightarrow} \exists x_0 := \sup M \in [a,b]$. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $x_0 - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M, also ex. $x_n \in M$:

$$x_n > x_0 - \frac{1}{n}.$$

Also: $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_n$. Somit $x_n \to x_0$, f stetig in $x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \overset{\text{Def. von } M}{\Longrightarrow} \forall n \in \mathbb{N} : f(x_n) \leq y_0 \Rightarrow f(x_0) \leq y_0$.
Es ist $x_0 < b$ (andernfalls: $x_0 = b \Rightarrow f(b) = f(x_0) \leq y_0 < f(b)$, Wid!).
$z_n := x_0 + \frac{1}{n}$. Es gilt $z_n \in [a,b]$ ffa $n \in \mathbb{N}$. $z_n > x_0 \Rightarrow z_n \notin M \Rightarrow f(z_n) > y_0$. $z_n \to x_0$, f stetig $\Rightarrow f(z_n) \to f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \geq y_0$. $\square$

Folgerung (vgl. 1.6)**:** Ist $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $x_0 > 0$: $x_0^n = \alpha$.

Beweis. $b := 1+\alpha, f(x) := x^n \ (x \in [a,b])$.
Dann: $f \in C[a,b], f(0) = 0 < \alpha,\ f(b) = (1+\alpha)^n \overset{BK}{\geq} 1 + n\alpha > \alpha \overset{7.7}{\Longrightarrow}$ $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \alpha$, also $x_0^n = \alpha$. Klar: $x_0 > 0$, denn $\alpha > 0$. $\square$

Bemerkung: Erst jetzt ist 1.6 vollständig bewiesen!

Aus 7.7 folgt mit $y_0 = 0$:

7.8 Nullstellensatz von Bolzano: Ist $f \in C([a,b])$ und $f(a)f(b) \leq 0$, so existiert ein $x_0 \in [a,b]$: $f(x_0) = 0$.

7.9 Exponentialfunktion: $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Beh.: $E(\mathbb{R}) = (0,\infty)$.

Beweis. $\overset{3.12}{\Longrightarrow} \forall x \in \mathbb{R} E(x) > 0$, also $E(\mathbb{R}) \subseteq (0,\infty)$. Sei $y_0 \in (0,\infty)$.

$$\overset{6.5}{\Longrightarrow} E(x) \to \infty (x \to \infty) \Rightarrow \exists b > 0 : E(b) > y_0$$

$$\overset{6.5}{\Longrightarrow} E(x) \to 0 (x \to -\infty) \Rightarrow \exists a < 0 : E(a) < y_0$$

$\overset{7.7}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in [a,b] : E(x_0) = y_0$. Also: $y_0 \in E(\mathbb{R})$. Somit: $(0,\infty) \in E(\mathbb{R})$. $\square$

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

a) D heißt **abgeschlossen** $\iff$ für jede konvergente Folge (x_n) in D gilt $\lim x_n \in D$.

b) D heißt **kompakt** $\iff$ jede Folge (x_n) in D enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$.

Satz 7.10: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

a) D ist abgeschlossen $\iff$ jeder Häufungspunkt von D gehört zu D.

b) D ist kompakt $\iff$ D ist beschränkt und abgeschlossen.

c) Ist D kompakt und $D \neq \emptyset$, so existieren $\max D$ und $\min D$.

Beispiele:

a) $[a, b]$ ist kompakt, also auch abgeschlossen.

b) endliche Mengen sind kompakt.

c) $[a, \infty), (-\infty, a], \mathbb{R}$ sind abgeschlossen, aber nicht kompakt.

d) $\emptyset$ ist abgeschlossen.

e) $(a, b], [a, b), (a, b)$ sind nicht abgeschlossen.

Beweis. (7.10)

a) i. d. großen Übung.

b) "$\Leftarrow$" Folgt direkt aus 2.12, "$\Rightarrow$" Übung.

c) Sei $s := \sup D$.

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in D : x_n > s - \frac{1}{n}, \text{ also } \forall n \in \mathbb{N} : s - \frac{1}{n} < x_n \leq s.$$

Somit: $x_n \to s \overset{b)}{\Rightarrow} D$ ist abgeschlossen $\Rightarrow s \in D \Rightarrow s = \max D$.
Analog zeigt man: $\inf D \in D$.

□

Definition: $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt $\iff$ $f(D)$ ist **beschränkt**

$$(\iff \exists x \geq : |f(x) \leq c\ \forall x \in D)$$

Satz 7.11: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$. Dann ist $f(D)$ kompakt. Insbesondere ist f beschränkt und es ex. $x_1, x_2 \in D$:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in D$$

Beweis. Sei (y_n) eine Folge in $f(D)$. $\exists$ Folge (x_n) in D: $\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_n) = y_n$. D kompakt $\Rightarrow$ (x_n) enthält eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$. f stetig

$$\Rightarrow y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in f(D)$$

□

Satz 7.12:

a) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ($I = \mathbb{R}$ ist zugelassen!) und $f \in C(I)$, so ist $f(I)$ ein Intervall.

b) Sei $f \in C([a,b]), A := \lim f([a,b])$ und $B := \max f([a,b])$ (7.11!), so ist $f[a,b]) = [A,b]$.

Beweis. a) ohne Beweis. b) folgt aus a) und 7.7. □

Definition:

a) $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** $\iff$ aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt stets $f(x_1) \leq f(x_2)$.
$f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend** $\iff$ aus $x_1, x_2 \in D$ und $x_1 < x_2$ folgt stets $f(x_1) < f(x_2)$.

b) Entsprechend definiert man **(streng) monoton fallend**.

c) f heißt (streng) monoton $\iff$ f ist (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ($I = \mathbb{R}$ ist zugelassen) und $f\colon I \Rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend bzw. fallend. Dann ist f auf I injektiv, es existiert also die **Umkehrfunktion** $f^{-1}\colon F(I) \Rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ und f^{-1} ist streng monoton wachsend bzw. fallend.
Es gilt $\forall x \in I$: $f^{-1}(f(x)) = x$ und $\forall y \in F(I)$: $f(f^{-1}) = y$

Bemerkung: $f(I)$ ist i.A. kein Intervall.

Satz 7.13: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C(I)$ und f sei auf I streng monoton. Dann:

$$f^{-1} \in C\left(f(I)\right)$$

7.14 Der Logarithmus: Bekannt: E ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Es existiert also $E^{-1}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

$$\log x := \ln x := E^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty))$$

Logarithmus.

Eigenschaften:

a) $\log 1 = 0$, $\log e = 1$

b) $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend

c) $\log\left((0,\infty)\right) = \mathbb{R}$

d) $\log x \to \infty$ $(x \Rightarrow \infty)$, $\log x \to -\infty$ $(x \to 0)$

e) $\log x + \log y = \log(xy)$ $\forall x, y > 0$

f) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$ $\forall x, y > 0$

Beweis.

a) klar

b) folgt aus 7.13

c) $E(\mathbb{R}) = (0, \infty) \Rightarrow$ Beh.

d) folgt aus $E(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ bzw. $E(x) \to 0$ $(x \to -\infty)$.

e) $z := \log x + \log y$. Dann: $E(z) = E(\log x + \log y) = E(\log x)E(\log y) = xy \Rightarrow \log(xy) = \log E(z) = z \Rightarrow$ Beh.

f) Analog.

$\square$

Motivation: $\overset{3.12}{\Longrightarrow} E(rx) = E(x)^r \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall r \in \mathbb{Q}$.
Sei $a > 0$. Mit $x := \log a$:

$$\forall r \in \mathbb{Q}: \quad E(r \log a) = E(\log a)^r = a^r$$

7.15 Die allgemeine Potenz: Sei $a > 0$:

$$a^x := E(x \log a) \ (x \in \mathbb{R})$$

Ist speziell $a = e$: $e^x = E(x \log e) = E(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Also:

$$a^x = e^{x \log a} \ (x \in \mathbb{R}, a > 0).$$

Eigenschaften: Sei $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

c) $a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y$

d) $a^{-x} = e^{-x \log a} = \frac{1}{e^x \log a} = \frac{1}{a^x}$

e) $\log(a^x) = \log(e^{x \log a}) = x \log a$

f) $(a^x)^y = e^{y \log a^x} \overset{e)}{=} e^{xy \log a} = a^{xy}$.

g) Ist $x > 0$, so ist $a^{x^y} := a^{(x^y)}$.

Erinnerung an 7.1: Sei $f \in C(D)$, $x_0 \in D$ und $\epsilon > 0$. Dann ex. $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \; \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

δ hängt i.A. von ϵ und x_0 ab!

Definition: $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt auf D **gleichmäßig stetig** $\iff \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$: $|f(x) - f(z)| < \epsilon \; \forall x, z \in D : |x - z| < \delta$.

Klar: f gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f stetig. ("$\Leftarrow$" ist i.A. falsch!).
Ohne Beweis.

Satz 7.16: Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(D)$, so ist f auf D gleichmäßig stetig.

Definition: $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt auf D **Lipschitz-stetig** $\iff \exists L \geq 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \; \forall x, y \in D$$

Übung: f Lips.-stetig $\Rightarrow$ f glm. stetig.

Beispiel: $D = [0, 1], f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^y| = |(x + y)(x - y)| = |x + y||x - y| \\ &\leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2|x - y| \quad \forall x, y \in [0, 1] \end{aligned}$$

Bemerkung: $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$ ist nicht glm. stetig, insbesondere nicht Lips.-stetig.

8 Funktionenfolge und -reihen

I. d. §en sei stets: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ und $s_n \coloneqq f_1 + f_n + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbb{N})$

Definition:

a) Die Funktionenfolge (f_n) heißt **auf D punktweise konvergent** $\iff$ für jedes $x \in D$ ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent.
In diesem Fall setze $f(x) \coloneqq \lim f_n(x)$ $(x \in D)$. Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt die **Grenzfunktion** von (f_n).

b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **auf D punktweise konvergent** $\iff$ für jedes $x \in D$ ist die Folge $(s_n(x))$ konvergent.
In diesem Fall setze $f(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in D)$. Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt die **Summenfunktion** von (f_n).

Beispiele:

a) $D = [0, 1]$, $f_n(x) \coloneqq x^n$

$$f(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(f_n) konvergiert auf $[0, 1]$ punktweise gegen f.

b) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$ und $D \coloneqq (x_0 - r, x_0 + r)$ $(D \coloneqq \mathbb{R}$, falls $r = \infty)$. Hier: $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n \overset{4.1}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D punktweise gegen $f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

c) $D = [0, \infty$, $f_n(x) \coloneqq \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n}+x^2} \to 0$ $(n \to \infty)$. Also konvergiert (f_n) auf D punktweise gegen $f \equiv 0$. Es ist $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.
Punktweise Konvergenz von (f_n) auf D gegen f bedeutet: ist $\epsilon > 0$ und $x \in D$, so existiert eine $n_0 0 n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Definition:

a) (f_n) konvergiert auf D gleichmäßig (glm) gegen $f\colon D \to \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \forall x \in D.$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf D gleichmäßig (glm) gegen $f\colon D \to \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|s_n(x) - s(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ und } \forall x \in D.$$

Klar: gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz ("$\Leftarrow$" ist i. A. falsch, siehe Beispiele unten).
Anschaulich: (f_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f bedeutet: zu $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$: für $n \geq n_0$ liegt der Graph von f_n im "ϵ-Schlauch" um f.

Beispiele:

a) Sei $D = [0,1], f_n(x) = x^n$. (f_n) konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1], \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Es ist $f_n(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ und damit

$$|f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) - f(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \frac{1}{2} > \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(f_n) konvergiert also nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $D = (-1,1)$,

$$s_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \to \frac{1}{1-x} =: f(x) \quad \forall x \in D.$$

Beh.: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert auf D nicht gleichmäßig gegen f.
Bew.: Annahme: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, also (s_n) konvergiert auf D gleichmäßig gegen f. Zu $\epsilon = 1$ existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|s_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1x} < 1 \quad n \geq n_n, \quad \forall x \in D$$

Aber: $\frac{|x|^{n+1}}{1-x} \to \infty$ $(x \to 1-)$, Widerspruch!

c) $D = [0, \infty)$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. $f_n(x) \to 0 := f(x)$ $(n \to \infty)$. Sei $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$:

$$|f_n(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})| = \frac{1}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(f_n) konvergiert also auf D nicht gleichmäßig gegen f.

Satz 8.1:

a) (f_n) konvergiere auf D punktweise gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$. Weiter sei (α_n) eine Folge, $\alpha_n \to 0$, $m \in \mathbb{N}$ und

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \forall n \geq m \ \forall x \in D$$

Dann konvergiert (f_n) auf D gleichmäßig gegen f.

b) **Kriterium von Weierstraß**: Sei $m \in \mathbb{N}$, (c_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall n \geq m \ \forall x \in D$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig.

Beweis.

a) Sei $\epsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\epsilon) \geq m$: $\alpha_n < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$. Dann:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \ \forall x \in D$$

b) Sei $x \in D$. $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall n \geq m \overset{3.5\ a)}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert (absolut).

$\square$

Satz 8.2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, es sei $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($D := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$).
Ist $[a,b] \subseteq D$, so konvergiert die Potenzreihe auf $[a,b]$ gleichmäßig.

Beweis. Sei o. B. d. A. $x_0 = 0$
Wähle $\delta > 0$ so, dass $-r < -\delta < a < b < \delta < r$. Sei $x \in [a,b]$. Dann $|x| \leq \delta$, also

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n|\delta^n := c_n \tag{$*$}$$

$\overset{4.1}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n$ konvergiert absolut; also ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent. Aus $(*)$ und 8.1 *b)* folgt die Behauptung. $\square$

Satz 8.3: (f_n) bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere auf D gleichmäßig gegen $f \colon D \to \mathbb{R}$

a) Sind alle f_n in $x_0 \in D$ stetig, so ist f in x_0 stetig.

b) Sind alle $f_n \in C(D)$, so ist $f \in C(D)$.

Folgerungen:

a) Konvergiert (f_n) auf D punktweise gegen $f \colon D \to \mathbb{R}$ und gilt $f_n \in C(D)\ \forall n$ aber $f \notin C(D)$, so ist Konvergenz nicht gleichmäßig!

b) Voraussetzung wie in 8.3 *a)*; x_0 sei Häufungspunkt von D. Dann:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \overset{8.3\ a)}{=} f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)\end{aligned}$$

Beweis. (von 8.3) b) folgt aus a)

a) Sei $\epsilon > 0$. $\exists m \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall x \in D$. f_m stetig in $x_0 \overset{7.1}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 : |f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$. Für $x \in U_\delta(x_0) \cap D$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

$\overset{7.1}{\Longrightarrow}$ Beh.

□

Beweis. (von 7.4) $\sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($D = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) := \sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ $(x \in D)$.
Sei $z_0 \in D$. Wähle $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $z_0 \in (a, b) \subseteq [a, b] \subseteq D \overset{8.2}{\Longrightarrow}$ die Potenzreihe konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig $\overset{8.3}{\Longrightarrow} f \in C([a, b])$. f ist also in z_0 stetig. $z_0 \in D$ beliebig $\Rightarrow f \in C(D)$. □

8.4 Identitätssatz für Potenzreihen: $\sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $D := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($D := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) := \sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ $(x \in D)$.
Weiter sei (x_k) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_k \to x_0$ und $f(x_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dann:

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

9 Differentialrechnung

I.d. §en sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition: f heißt **in** $x_0 \in I$ **differenzierbar** (db) $\iff$ es existiert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und ist $\in \mathbb{R}$ ($\iff$ es existiert $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ und ist $\in \mathbb{R}$).
I.d. Fall heißt obiger Grenzwert die **Ableitung von** f **in** x_0 und wir mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
Ist f in jedem $x \in I$ differenzierbar, so heißt f **auf** I **differenzierbar** und die **Ableitung** f' **von** f auf I gegeben durch $x \mapsto f'(x)$.

Beispiele:

a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \coloneqq c$ ($x \in \mathbb{R}$). Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f' \equiv 0$.

b) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|, x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

f ist also in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{N}$). Sei $x_0 \in \mathbb{R}, x \neq x_0$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &\overset{\S}{=} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1} \to nx_0^{n-1} \ (x \to x_0) \end{aligned}$$

Also f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = nx^{n-1}$, kurz:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ auf } \mathbb{R}.$$

d) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x \neq x_0$.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \xrightarrow{7.6} e^{x_0} \ (h \to 0).$$

Also: f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = e^x$, kurz:

$$(e^x)' = e^x \text{ auf } \mathbb{R}$$

Satz 9.1: Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis. Sei $x \in I$, $x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \to f'(x) \cdot 0 = 0 \ (x \to x_0)$$

Also: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

9.2 Differentiationsregeln: $g\colon I \to \mathbb{R}$ sei eine weitere Funktion. f, g seien differenzierbar in $x_0 \in I$.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar in x_0 und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ $(x \in J := I \cap U_\delta(x_0))$. Die Funktion $\frac{f}{g}\colon J \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis.

a) leichte Übung.

b) Übung (man orientiere sich an c)).

c) g stetig in x_0 (s. 9.1). $g(x_0) \neq 0 \overset{6.3\ b)}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0$:

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \cap U_\delta(x_0) =: J.$$

$h := \frac{f}{g}$. Für $x \neq x_0$ mit $x \to x_0$:

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\frac{1}{g(x)} - f(x_0)\frac{\frac{1}{g(x_0)}-\frac{1}{g(x)}}{x-x_0} \\ &= \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\to\frac{1}{g(x_0)^2}}\left(\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} g(x_0) - f(x_0)\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)}\right)\end{aligned}$$

□

Satz 9.3: Es sei $f \in C(I)$ streng monoton, in $x_0 \in I$ differenzierbar und es sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist

$$f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } y_0 := f(x_0)$$

und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis. $\overset{7.12}{\Longrightarrow}$ $f(I)$ ist ein Intervall; sei (y_n) eine Folge in $f(I)$ mit $y_n \to y_0$ und $y_n \neq y_0\ \forall n$. $x_n := f^{-1}(y_n) \overset{7.13}{\Longrightarrow} x_n \to x_0 = f^{-1}(y_0)$, also

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}{y_n-y_0} = \frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \quad (x \to x_0)$$

□

9.4 Kettenregel: $J \subseteq \mathbb{R}$ sei ein weiteres Intervall, $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(I) \subseteq J$. f sei in $x_0 \in I$ differenzierbar und g sei in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist

$$g \circ f\colon I \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } x_0$$

und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis. Für $y \in J$:

$$\tilde{g}(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0), & y = y_0 \end{cases}$$

g ist differenzierbar in $y_0 \Rightarrow \tilde{g}$ ist stetig in y_0 d.h. $\tilde{g}(y) \to \tilde{g}(y_0) = g'(y_0) = g'(f(x_0))$ $(y \to y_0)$

$$\Rightarrow \tilde{g}(f(x)) \to g'(f(x_0)) \quad (x \to x_0).$$

Es ist $g(y) - g(y_0) = \tilde{g}(y)(y - y_0)$ $\forall y \in J$, daraus folgt:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \tilde{g}(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to g'(f(x_0))f'(x_0) \quad (x \to x_0)$$

□

Beispiele:

a) Sei $a > 0$ und $h(x) := a^x = e^{x \log a} = g(f(x))$, wobei $g(x) = e^x$ und $f(x) = x \log a$. Dann: $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$. Kurz:
$$(a^x)' = a^x \log a \quad (x \in \mathbb{R})$$

b) $f(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \log y$ $(y > 0) \overset{9.3}{\Longrightarrow} f^{-1}$ ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar und
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$
Kurz: $(\log x)' = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$.

c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ $(x > 0)$.

$$f'(x) = e^{\alpha \log x}(\alpha \log x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Kurz: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ auf $(0, \infty)$.

d) aus Bsp. c): $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ auf $(0, \infty)$.

Anwendung 9.5: Sei $a \in \mathbb{R}$ und o.B.d.A. $a \neq 0$. $f(t) \coloneqq \log(1+t)$ $(t > -1)$. Dann: $f'(t) = \frac{1}{1+t}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x \to \infty} \frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = \frac{1}{a} x \log(1 + \frac{a}{x}) = \frac{1}{a} \log(1 + \frac{a}{x})^x$$

$\Rightarrow \log(1 + \frac{a}{x})^x \to a$ $(x \to \infty) \Rightarrow \lim_{x \to \infty}(1 + \frac{a}{x})^x = e^a$

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und $g \colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion

a) $x_0 \in M$ heißt ein **innerer Punkt von M** $\iff \exists > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq M$

b) g hat in $x_0 \in M$ eine **relatives Maximum** $\iff$ $\exists \delta > 0$: $g(x) \leq g(x_0)$ $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap M$.

c) g hat in $x_0 \in M$ eine **relatives Minimum** $\iff \exists \delta > 0$: $g(x) \geq g(x_0)$ $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap M$.

relatives Extremum = relative Max. oder Min.

Satz 9.6: $f \colon I \to \mathbb{R}$ habe in x_0 ein relatives Extremum und sei in $x_0 \in I$ differenzierbar. Ist x_0 ein innerer Punkt von I, so ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Sei o.B.d.A. x_0 ein relatives Maximum von Funktion f. $\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I$ und $f(x) \le f(x_0)$ $(x \in U_\delta(x_0))$

$$D(x) \coloneqq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \le 0, x > x_0 \\ \ge 0, x < x_0 \end{cases} \quad (x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

Also: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} D(x) \le 0$ und $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} D(x) \ge 0$. $\square$

9.7 Mittelwertsatz: (MWS) der Differentialrechnung.
Es sei $f \in C[a, b]$ und f sei auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis. $g(x) \coloneqq f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ $(x \in [a, b])$. Dann: $g \in C[a, b]$, g ist differenzierbar auf (a, b), $g(a) = g(b) = 0$ und

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \; (x \in (a, b)).$$

Z.z.: $\exists \xi \in (a, b)$: $g'(\xi) = 0$.
Fall 1: $g \equiv 0$ ✓
Fall 2: $g \not\equiv 0 \overset{7.11}{\Longrightarrow} \exists x_1, x_2 \in [a, b] : g(x_1) \le g(x) \le g(x_2)$ $(x \in [a, b])$.
Da $g \not\equiv 0 : x_1 \in (a, b)$ oder $x_2 \in (a, b) \overset{9.6}{\Longrightarrow} g'(x_1) = 0$ oder $g'(x_2) = 0$. $\square$

Folgerung 9.8: $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf I. f ist auf I konstant $\iff f' \equiv 0$ auf I.

Beweis. "$\Rightarrow$" ✓, "$\Leftarrow$" Seien $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \overset{MWS}{\Longrightarrow} \exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

also $f(x_1) = f(x_2)$. $\square$

Anwendung 9.9: $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann:

$$f' = f \text{ auf } I \iff \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x \ (x \in I)$$

Beweis. "$\Rightarrow$" ✓, "$\Leftarrow$" $g(x) := \frac{f(x)}{e^x}$. Dann:

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{e^{2x}} = 0 \quad \forall x \in I.$$

$\overset{9.8}{\Longrightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : g(x) = c \ \forall x \in I \Rightarrow$ Beh. □

Satz 9.10: $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ seien auf I differenzierbar.

a) Ist $f' = g'$ auf I, so $\exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$ auf I.

b) Ist $' \geq 0$ auf I, so ist f monoton wachsend auf I.
Ist $f' > 0$ auf I, so ist f streng monoton wachsend auf I.

c) Ist $' \leq 0$ auf I, so ist f monoton fallend auf I.
Ist $f' < 0$ auf I, so ist f streng monoton wachsend auf I.

Beweis.

a) $(f - g')' = 0$ auf $I \overset{9.8}{\Longrightarrow}$ Beh.

b) Sei $g' \geq 0$ auf I. Seien $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2 \overset{MWS}{\Longrightarrow} \exists \xi \in (x_1, x_2)$:
$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}(x_2 - x_1) \geq 0$, also $f(x_1) \leq f(x_2)$.

c) Analog zur b).

□

Ohne Beweis:

9.11 Die Regeln von de l'Hospital: Es sei $I = (a, b)$, wobei $a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen ist. $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ seien auf I differenzierbar und $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$.

a) Es existiere

$$L \coloneqq \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$$

Gilt (I) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder (II) $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$,
so ist

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

b) Es existiere

$$L \coloneqq \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$$

Gilt (I) $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$ oder (II) $\lim_{x\to b} g(x) = \pm\infty$,
so ist

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Beispiele:

a) $a, b > 0$. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b.$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$

c) $\lim_{x\to 0} x \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = \epsilon.$

d) $\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x \log x} \overset{c)}{=} e^0 = 1.$

Satz 9.12: Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ ($I = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und $f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ $(x \in I)$.

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ hat den Konvergenzradius r.

b) f ist auf I differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I$$

Beweis.

a) $\sum[n]n|a_n| = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\sqrt[n]{|a_n|}$; $r > 0 \overset{4.1}{\Longrightarrow} \sqrt[n]{|a_n|}$ ist beschränkt $\Rightarrow \sqrt[n]{n|a_n|}$ ist beschränkt $\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, da $H(\sqrt[n]{|a_n|}) = H(\sqrt[n]{|na_n|}) \Rightarrow$ Beh.

b) später, nach 10.18.

$\square$

9.13 Sinus/Cosinus: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \overset{9.12}{\Longrightarrow}$ sin ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und

$$(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

Analog: cos ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $(\cos x)' = -\sin x$.

9.14 Definition von π:

a) Für $x \in (0,2)$ ist

$$\sin x = \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right)}_{>0} + \ldots > x - \frac{x^3}{3!} > 0$$

Speziell: $\sin 1 > 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

b) $\exists \xi_0 \in (0,2)$: $\cos \xi_0 = 0$ und $\cos x > 0 \ \forall x \in [0, \xi_0)$

Beweis. $\cos 0 = 1 > 0$;

$$\begin{aligned}\cos 2 = \cos(1+1) &\overset{4.3}{=} \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos^2 1 + \sin^2 - 2\sin^2 1\\ &= 1 - 2\sin^2 1 \leq 1 - 2\frac{25}{36} < 0\end{aligned}$$

$\overset{7.7}{\Longrightarrow} \exists \xi_0 \in (0,2) : \cos \xi_0 = 0$. Auf $(0,2)$:

$$(\cos x)' = -\sin x \overset{a)}{<} 0 \Rightarrow \cos x > 0 \ \forall x \in [0, \xi_0)$$

$\square$

c) Sei ξ_0 wie in b). $\pi := 2\xi_0$ (Pi).

$$\xi_0 \in (0,2) \Rightarrow \pi \in (0,4) \quad (\pi \approx 3,14\dots)$$

$\frac{\pi}{2} = \xi_0$, also $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow |\sin \frac{\pi}{2}| = 1 \overset{a)}{\Rightarrow} \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

cos hat in $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle.

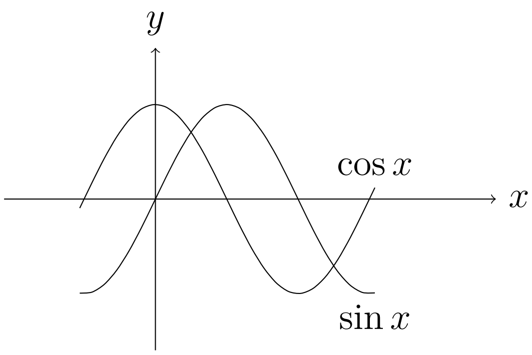


Abbildung 9.1: Sinus und Cosinus.

9.15 Weitere Eigenschaften von Sinus und Cosinus:

a) Aus 4.3:

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} = \cos x$$

Analog:

$$\begin{aligned} \cos(x+\frac{\pi}{2}) &= -\sin x \\ \sin(x+\pi) &= -\sin x, \cos(x+\pi) = -\cos x \\ \sin(x+2\pi) &= \sin x, \cos(x+2\pi) = \cos x \end{aligned}$$

b) cos hat in $[0,\pi]$ genau eine Nullstelle.

c) I. d. gr. Übungen:

$$\begin{aligned} \cos x = 0 &\iff x \in \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \\ \sin x = 0 &\iff x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Definition: $\tan\colon \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\colon k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$; $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ **Tangens**

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

tan ist also auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ streng wachsend.

Übung: $\tan((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$. Es ex. also

$$\arctan := \tan^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

Arkustangens.
I.d. Übungen wird gezeigt: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$.

Ohne Beweis:

9.16 Abelscher Grenzwertsatz: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und $r < \infty$.

a) Die Potenzreihe konvergiere auch noch in $x_0 + r$. Es sei

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ für } x \in [x_0 - r, x_0 + r)$$

Dann ist f stetig in $x_0 + r$.

b) Die Potenzreihe konvergiere auch noch in $x_0 - r$. Es sei

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ für } x \in [x_0 - r, x_0 + r)$$

Dann ist f stetig in $x_0 - r$.

Anwendungen 9.17:

a) $f(x) := \log(1+x)$ für $x \in (-1,1) =: I$. Dann:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad \forall x \in I.$$

$g := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ für $x \in (-1,1] \overset{9.12}{\Longrightarrow} g$ ist differenzierbar auf I und

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = f'(x) \quad \forall x \in I$$

Damit ex. $c \in \mathbb{R}$: $f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in I$. Mit $x = 0$ folgt: $c = 0$. Also

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in I$$

$\overset{9.16}{\underset{x\to 1}{\Longrightarrow}} f(x) = g(x)$ $\forall x \in (-1,1]$. Fazit:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1,1]$$

Für $x = 1$: $\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

b) Vgl. Übungsblatt:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in [-1,1]$$

Speziell: $\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$

$\cos \frac{\pi}{4} = \cos(-\frac{\pi}{4}) \overset{9.15}{=} \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$

Definition:

a) $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei auf I differenzierbar. Ist f' in $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f **in x_0 zweimal differenzierbar** und

$$f''(x_0) := (f')'(x_0) \text{ die 2. Ableitung von } f \text{ in } x_0.$$

b) Ist f' auf I differenzierbar, so heißt f **auf I zweimal differenzierbar** und

$$f'' := (f')'$$

die 2. Ableitung von f auf I. Entsprechend definiert man, falls vorhanden:

$$f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \dots \text{ und } f''', f^{(4)}, \dots$$

c) $C^0(I) := C(I); f^0 := f$; Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt **auf I n-mal stetig differenzierbar** $\iff$ f ist auf I n-mal differenzierbar $f, f', \dots, f^{(n)} \in C(I)$.

$$C^\infty := \bigcap_{n \geq 0} C^n(I).$$

Beispiele:

a) $(e^x)'' = e^x$, $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

b) $f(x) := x|x|$

Für $x > 0$: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

Für $x < 0$: $f(x) = -x^2$, $f'(x) = -2x$

Für $x = 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x| \to 0$ $(x \to 0)$

f ist also auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = 2|x|$ $(x \in \mathbb{R})$. f ist also in $x_0 = 0$ nicht zweimal differenzierbar.

Beispiel 9.18: $f(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Auf $(0,1]$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})$$

Für $x_0 = 0$ betrachte:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{beschr.}} \to 0$$

f ist also auf $[0,1]$ differenzierbar $(f'(0) = 0)$. $x_n := \frac{1}{n\pi}$. Dann: $x_n \to 0$,

$$f'(x_n) = \sqrt{n\pi} \cos(n\pi) = \sqrt{n\pi}(-1)^{n+1} \not\to 0 = f'(0).$$

D.h.: f ist auf $[0,1]$ differenzierbar, aber $f \notin C^1[0,1]$. $|f'(x_n)| = \sqrt{n\pi} \Rightarrow f'$ ist auf $[0,1]$ nicht beschränkt.

Aus 9.12 folgt (induktiv):

Satz 9.19: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I := (x_0 - r, x_0 + r)$ $(I = \mathbb{R}$, falls $r = \infty)$ und

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad (x \in I).$$

Dann: $f \in C^\infty(I)$ und

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot a_n(x-x_0)^{n-k} \quad \forall x \in I\ \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Insbes.: $(x = x_0)$: $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$, also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Ohne Beweis:

Satz 9.20: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei f auf I $(n+1)$-mal differenzierbar (insb. $f \in C^n(I)$), $x, x_0 \in I$ und $x \neq x_0$. Dann existiert ein ξ zwischen x und x_0, $x \neq \xi \neq x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Bemerkung: Im Fall $n = 0$ vgl. MWS.

Satz 9.21: Sei $n \geq 2$, $f \in C^n(I)$, $x_0 \in I$ sei ein innerer Pinkt von I und

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

a) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein relatives Maximum.

b) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein relatives Minimum.

c) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein relatives Extremum.

Beweis. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f^{(n)}$ stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I$.
Sei $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \overset{9.20}{\Longrightarrow} \exists \xi$ zwischen x und x_0:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=f(x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n}_{=:R(x)}$$

a) Sei $f^{(n)}(x_0) < 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} f^n(\xi) < 0$, n gerade $\Rightarrow (x - x_0)^n > 0$. Also: $R(x) < 0$; somit: $f(x) < f(x_0)$.

b) Sei $f^{(n)}(x_0) > 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} f^n(\xi) > 0$, n gerade $\Rightarrow (x - x_0)^n > 0$. Also: $R(x) > 0$; somit: $f(x) > f(x_0)$.

c) Sei o.B.d.A. $f^{(n)}(x_0 > 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} f^{(n)}(\xi) > 0$, n ungerade

$$\Rightarrow (x - x_0)^n \begin{cases} > 0, & x > x_0 \\ < 0, & x < x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(x) \begin{cases} > 0, & x > x_0 \\ < 0, & x < x_0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \begin{cases} > f(x_0), & x > x_0 \\ < f(x_0), & x < x_0 \end{cases}$$

$\square$

10 Das Riemann-Integral

Vereinbarung: I. d. §en sei stets $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und f beschränkt auf $[a,b]$; $m \coloneqq \inf f([a,b]), M \coloneqq \sup f([a,b])$.

$Z \coloneqq \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ heißt eine **Zerlegung** von $[a,b] \iff a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. $\mathcal{J} \coloneqq \{Z : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a,b]\}$. Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{J}$. Definiere $I_j \coloneqq [x_{j-1}, x_j], |I_j| \coloneqq x_j - x_{j-1}$ "Länge" von I_j und $m_j \coloneqq \inf f(I_j), M_j \coloneqq \sup f(I_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$

$$s_f(Z) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| \textbf{Untersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z.$$
$$S_f(Z) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| \textbf{Obersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z.$$

Es ist $m \leq m_j \leq M_j \leq M$, also $m|I_j| \leq m_j|I_j| \leq M_j|I_j| \leq M|I_j|$, somit

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} |I_j|}_{=b-a} \leq s_f(Z) \leq S_f(Z) \leq M \sum_{j=1}^{n} |I_j| = M(b-a) \qquad (*)$$

Definition: Seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{J}$. Z_2 heißt eine Verfeinerung von $Z_1 \iff Z_1 \subseteq Z_2$.

Ohne Beweis:

Satz 10.1: Seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{J}$.

a) $s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$

b) Ist $Z_1 \leq Z_2$ so gilt: $s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2)$ und $S_f(Z_1 \geq S_f(Z_2)$. Aus $(*)$ folgt: es existieren

$$s_f \coloneqq \sup\{s_f(Z) \colon Z \in \mathcal{J}\}$$

und

$$S_f := \inf\{S_f(Z) \colon Z \in \mathcal{J}\}.$$

Aus $(*)$ und 10.1 a) mit $Z \in \mathcal{J}$:

$$m(b-a) \leq s_f \leq S_f(Z) \leq S_f \leq M(b-a). \qquad (**)$$

Definition: f heißt (Riemann-)**integrierbar** (ib) über $[a,b]$ $\iff$ $s_f = S_f$. I. d. Fall heißt

$$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x)dx := S_f (= s_f)$$

das (Riemann-)**Integral** von f über $[a,b]$ und wir schreiben: $f \in R[a,b]$.

Beispiele:

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c$ $(x \in [a,b]) \overset{(**)}{\Longrightarrow} c(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq c(b-a) \Rightarrow f \in R[a,b]$ und $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

b) Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$. definiere

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

m_j, M_j seien wie immer, dann: $m_j = \inf f(I_j) = 0, M_j = \sup f(I_j) = 1$; $s_f(Z) = 0, S_f(Z) = 1$. Also: $s_f = 0 \neq 1 = S_f$; $f \notin R[0,1]$.

Satz 10.2: Es seien $f, g \in R[a,b]$.

a) Ist $f \leq g$ auf $[a,b]$, so ist $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$.

b) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

Beweis. nur a) (b) Übung): Sei $Z = \{x_0, \dots x_n\} \in \mathcal{J}$, I_j und m_j wie immer. $\tilde{m}_j := \inf g(I_j)$ $(j = 1, \dots, n)$. $f \leq g$ auf I_j

$$\Rightarrow m_j \leq \tilde{m}_j \Rightarrow s_f(Z) \leq s_g(Z) \leq s_g \overset{Vor.}{=} \int_a^b g dx$$

$\Rightarrow s_f \leq \int_a^b g dx \overset{Vor.}{\Longrightarrow}$ Beh. □

10.3 Riemannsches Integrabilitätskriterium: $f \in R[a, b]$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \; \exists Z = Z(\epsilon) \in \mathcal{J} : S_f(Z) - s_f(Z) < \epsilon.$$

Satz 10.4: Ist f auf $[a, b]$ monoton, so ist $f \in R[a, b]$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon.$$

Für $j = 0, \dots, n$ sei $x_j := a + j\frac{b-a}{n}$ und $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$. Seien I_j, m_j und M_j wie immer, dann $|I_j| = \frac{b-a}{n}, m_j = f(x_{j-1}), M_j = f(x_j)$. Also:

$$\begin{aligned} S_f(Z) - s_f(Z) &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon \end{aligned}$$

$\overset{10.3}{\Longrightarrow}$ Beh. □

Satz 10.5: $C[a,b] \subseteq R[a,b]$.

Beweis. Sei $f \in C[a,b]$ und $\epsilon > 0 \overset{7.16}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0$:

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\epsilon}{b-a} \quad \forall t, s \in [a,b] \text{ mit } |t-s| < \delta. \tag{$*$}$$

Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$, I_j, M_j, m_j wie immer und Z sei so gewählt, dass $|I_j| < \delta$ $(j = 1, \dots, n)$. Betrachte I_j:

$$\overset{7.11}{\Longrightarrow} \exists \xi, \eta \in I_j : \quad f(\xi) = m_j, f(\eta) = M_j$$

$|I_j| < \delta \Rightarrow |\xi - \eta| < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$$M_j - m_j = f(\eta) - f(\xi) = |f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Dann: $S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n |I_j| = \epsilon \overset{10.3}{\Longrightarrow}$ Beh. □

Definition: $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $G, g \colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen. G heißt eine **Stammfunktion** von g auf I $\iff$ G ist auf I differenzierbar und $G' = g$ auf I.

Beachte: Sind G, H Stammfunktionen von g auf $I \Rightarrow G' = g = H'$ auf $I \overset{9.10}{\Longrightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : G = H + c$ auf I.

10.6 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist $f \in R[a,b]$ und besitzt f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b =: [F(x)]_a^b$$

Beweis. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{J}$, I_j, m_j, M_j wie immer.

$$F(x_j) - f(x_{j-1}) \overset{MWS}{=} F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j) \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{=|I_j|}$$

mit $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$. $m_j \le f(\xi_j) \le M_j \Rightarrow m_j|I_j| \le f(\xi_j)|I_j| \le M_j|I_j| \Rightarrow$

$$\begin{aligned} s_f(Z) &\le \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} (F(x_j) - F(x_{j-1})) \\ &= F(b) - F(a) \\ &\le S_f(Z) \end{aligned}$$

Also: $s_f(Z) \le F(b) - F(a) \le S_f(Z)$ $\forall Z \in \mathcal{J}$.
$f \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b f dx = s_f \le F(b) - F(a) \le S_f = \int_a^b f dx$. $\square$

Beispiele:

a) $0 < a < b$, $f(x) := \frac{1}{x}$; $f \in C[a,b] \overset{10.5}{\Longrightarrow} f \in R[a,b]$. $F(x) := \log x$; F ist eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$.

$$\overset{10.6}{\Longrightarrow} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_a^b = \log b - \log a.$$

b) Sei $a < b$. $\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$.

Warnungen:

a) Es gibt integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen!

b) Es gib nicht integrierbare Funktionen, die Stammfunktionen besitzen!

Beispiele:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. f ist monoton $\overset{10.4}{\Longrightarrow} f \in R[0,1]$.
Annahme: f besitzt auf $[0,1]$ eine Stammfunktion F. Dann:

$$F'(x) = f(x) \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow F'(x) = 1 = (x)' \text{ auf } (0,1]$$

$\overset{9.10}{\Longrightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : F(x) = x + c$ auf $(0,1]$. F ist differenzierbar in $0 \Rightarrow F$ stetig in $0 \overset{x\to 0}{\Longrightarrow} F(0) = c$. Also: $F(x) = x + c \ \forall x \in [0,1]$. Aber:

$$0 = f(0) = F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x + c - c}{x} = 1,$$

Widerspruch!

b) $F(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases} \overset{9.18}{\Longrightarrow} F$ ist auf $[0,1]$ differenzierbar; $f := F'$. Dann ist F eine Stammfunktion von f auf $[0,1] \overset{9.18}{\Longrightarrow} f$ ist auf $[0,1]$ nicht beschränkt, also $f \notin R[a,b]$.

Ohne Beweis:

Satz 10.7: Sei $c \in (a,b)$.

$$f \in R[a,b] \iff f \in R[a,c] \text{ und } f \in R[c,b]$$

I. d. Fall: $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$.

Motivation: Für $n \geq 2$ sei

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ n - (x - \frac{1}{n})n^2, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

$f_n \in C[0,1] \overset{10.5}{\Longrightarrow} f_n \in R[0,1] \underset{10.7}{\overset{10.6}{\Longrightarrow}} \int_0^1 f_n dx = 1 \ \forall n \geq 2$.
Übung: (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen $f \equiv 0$. Aber:

$$\lim_{n\to 0} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 \int_0^1 f dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Ohne Beweis:

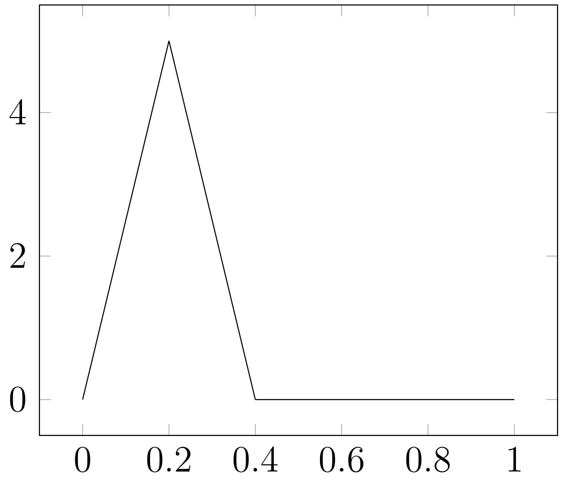


Abbildung 10.1: f_n für $n = 5$.

Satz 10.8: Sei (f_n) eine Folge in $R[a,b]$ und f_n konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann: $f \in R[a,b]$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Satz 10.9: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I := (x_0 - r, x_0 + r)$ ($I := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) und

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in I)$$

Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ den Konvergenzradius r und für

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} \quad (x \in I) \tag{$*$}$$

gilt $G' = g$ auf I.

Beweis. Sei $\tilde{r}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe in $(*)$ $\overset{9.12}{\Longrightarrow}$ $r = \tilde{r}$ und $G' = g$ auf I. $\square$

Satz 10.10: Es seien $f, g \in R[a,b]$.

a) Sei $D := f([a,b])$ und mit einem $L \geq 0$ gelte für $h\colon D \to \mathbb{R}$:

$$|h(s) - h(t)| \leq L|s-t| \quad \forall t, s \in D$$

Dann: $h \circ f \in R[a,b]$.

b) $|f| \in R[a,b]$ und $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ ($\triangle$-Ungleichung für Integrale).

c) $fg \in R[a,b]$.

d) Ist $g(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$ und $\frac{1}{g}$ auf $[a,b]$ beschränkt, so ist $\frac{1}{g} \in R[a,b]$.

Beweis.

a) c) und d) ohne Beweis.

b) $D := f([a,b])$; $h(t) := |t|$ $(t \in D)$. Dann: $|f| = h \circ f$. Für $t, s \in D$:

$$|h(t) - h(s)| = ||t| - |s|| \overset{\S 1}{\leq} |t-s|.$$

Aus a): $|f| \in R[a,b]$. Es ist $\pm f \leq |f|$ auf $[a,b]$

$$\overset{10.2}{\Longrightarrow} \pm \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx$$

$\Rightarrow$ $\triangle$-Ungleichung.

$\square$

Definition: Sei $f \in R[a,b]$ und $\alpha, \beta \in [a,b]$. $\int_\alpha^\alpha f(x)dx =: 0$. Sei $\alpha < \beta \overset{10.7}{\Longrightarrow} f \in R[\alpha, \beta]$.

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx := -\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

10.11 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Sei $f \in R[a,b]$ und

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a,b])\,.$$

Dann gilt:

a) $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \; \forall x, y \in [a,b]$.

b) $F \in C[a,b]$.

c) Ist $f \in C[a,b]$, so ist $F \in C^1[a,b]$ und $F' = f$ auf $[a,b]$.

Beweis.

a) Seien $x, y \in [a,b]$. Fall 1: $x \le y$

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &\overset{10.7}{=} \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t) - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^y f(t)dt \end{aligned}$$

Fall 2: $x > y$:

$$F(y) - F(x) = -(F(x) - F(y)) \overset{Fall 1}{=} -\int_y^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt.$$

b) $L := \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$. Seien $x, y \in [a,b]$. O.B.d.A.: $x \le y$, dann:

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &\overset{a)}{=} |\int_x^y f(t)dt| \overset{10.10}{\le} \int_x^< |f(t)|dt \overset{10.2}{\le} \int_x^y Ldt \\ &= L(y-x) = L|y-x|. \end{aligned}$$

c) Wir zeigen für $x_0 \in [a,b)$:

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

(analog zeigt man für $x_0 \in (a,b]$: $\lim_{h\to 0-0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$).
Sei also $x_0 \in [a,b), h > 0$ und $x_0 + h \in [a,b]$. Es ist

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt = f(x_0)$$

und

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \overset{a)}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Dann:

$$\begin{aligned} L(h) &:= \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \\ &= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt\right| \\ &\overset{10.10}{\leq} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|dt. \end{aligned}$$

$\overset{7.11}{\Longrightarrow}$ $\exists \xi_h \in [x_0, x_0+h]$: $|f(t)-f(x_0)| \leq |f(\xi_h)-f(x_0)|$ $\forall t \in [x_0, x_0+h]$. Dann:

$$L(h) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(\xi_h)-f(x_0)|dt = |f(\xi_h)-f(x_0)|.$$

Für $h \to 0$: $\xi_h \to x_0$; f stetig $\Rightarrow$ $f(\xi_h) \to f(x_0)$. Also: $L(h) \to 0$ $(h \to 0)$.

$\square$

Aus 10.10 folgt (Übung):

Folgerung 10.12: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g \in C(I)$ und $\xi \in I$ (fest). Definiere $G\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \int_{\xi}^{x} f(t)dt.$$

Dann: $G \in C^1(I)$ und $G' = g$ auf I.

Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Besitzt $g\colon I \to \mathbb{R}$ auf I eine Stammfunktion, so schreibt man für eine solche auch $\int g(x)dx$ (**unbestimmtes Integral**).

Beispiel 10.13: $\int \cos x dx = \sin x(+c)$ $(c \in \mathbb{R})$.

10.14 Partielle Integration: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g \in C^1(I)$. Dann:

a) $\int f'g dx = fg - \int fg' dx$ auf I.

b) Ist $I = [a, b]$, $\int_a^b f'g dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg' dx$.

Beweis. $(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$
$\Rightarrow$ a), sowie

$$\int_a^b f'g dx = \int_a^b (fg)' dx - \int_a^b fg' dx \underset{1.HS}{\overset{10.6}{=}} fg\Big|_a^b - \int_a^b fg' dx.$$

$\square$

Beispiele:

a) $\int \sin^2 x dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g} dx = -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x dx$

$$\begin{aligned} &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx \\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ &= x - \cos x \sin x - \int \sin^2 x dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x)$.

b) $\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx = \frac{1}{2}x^x e^x - \int \frac{1}{2} x^2 e^x dx \to$ komplizierter

$\int \underbrace{x}_{g} \underbrace{e^x}_{f'} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$.

c) $\int \log x dx = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_{g} dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x$.

Bez.: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq \beta$.

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \begin{cases} [\alpha, \beta], & \text{falls } \alpha < \beta \\ [\beta, \alpha], & \text{falls } \alpha > \beta \end{cases}$$

10.15 Substitutionsregeln: I und J seien Intervalle in $\mathbb{R}$, es sei $f \in C(I)$, $g \in C^1(J)$ und $g(J) \subseteq I$.

a) $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=g(t)}$ auf J.

b) Sei $g'(t) \neq 0 \ \forall t \in J$ ($\Rightarrow g' > 0$ auf J oder $g' < 0$ auf $J \Rightarrow g$ ist streng monoton). Dann:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \text{ auf } I$$

c) Ist $I = \langle a, b \rangle$, $J = \langle \alpha, \beta \rangle$, $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Beweis. $\overset{10.2}{\Longrightarrow} f$ hat auf I eine Stammfunktion F. $G(t) := F(g(t))$ ($t \in J$). Kettenregel $\Rightarrow G \in C^1(J)$ und

$$G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \quad \forall t \in J.$$

a) $\int f(g(t))g'(t)dt = \int G'(t)dt = G(t) = F(x)\Big|_{x=g(t)}$.

b) $\int f(g(t))g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = G(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x))) = F(x)$.

c) $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt \overset{10.6}{=} G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$

$$= F(b) - F(a) \overset{10.6}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

Merkregel: Ist $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, so schreibt man für y' auch $\frac{dy}{dx}$.
Zu 10.15: substituiere $x = g(t)$, fasse also x als Funktion von t auf. Dann: $\frac{dx}{dt} = g'(t)$, also

$$\text{“}dx = g'(t)dt\text{“}$$

Beispiele:

a) $\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx = \begin{cases} x = \log t, e^x = t \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, dx = \frac{1}{t}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = e \end{cases}$

$$= \int_1^e \frac{t^2+1}{t} \cdot \frac{1}{t}dt = \int_1^e \frac{t^2+1}{t^2} = \int_1^e (1 + \frac{1}{t^2})dt$$
$$= \left[t - \frac{1}{t}\right]_1^e = e - \frac{1}{e} - (1-1) = e - \frac{1}{e}.$$

b) Berechne $\beta := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{dx}{dt} = \cos t, dx = \cos t dt \end{cases}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)dt$$
$$\overset{s.o.}{=} \left[t - \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ohne Beweis:

Satz 10.16: $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seien beschränkt.

a) Ist $\{x \in [a,b] : f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig }\}$ höchstens endlich, so ist $f \in R[a,b]$.

b) Sei $f \in R[a,b]$ und $M := \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ höchstens endlich, so ist $g \in R[a,b]$ und
$$\int_a^b f(x) = \int_a^b g(x)dx.$$

Satz 10.17: Es seien $f, g \in R[a,b], g \geq 0$ auf $[a,b]$, $m := \inf f([a,b])$ und $M := \sup f([a,b])$.

a) $\exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b fg dx = \mu \int_a^b g dx$.

b) $\exists \mu \in [m, M]$: $\int_a^b f dx = \mu(b-a)$.

Ist $f \in C[a,b]$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$: für die Zahl μ in a) bzw. b): $\mu = f(\xi)$.

Beweis.

a) $g \geq 0$ auf $[a,b] \Rightarrow mg \leq fg \leq Mg$ auf $[a,b]$
$$\overset{10.2}{\Longrightarrow} m \underbrace{\int_a^b g dx}_{=:A} \leq \underbrace{\int_a^b fg dx}_{=:B} \leq M \int_a^b g dx.$$
Also: $mA \leq B \leq MA$.
Fall 1: $A = 0$. Dann ist $B = 0$ und jedes $\mu \in [m, M]$ leistet das Verlangte.
Fall 2: $A \neq 0$. $g \geq 0 \overset{10.2}{\Longrightarrow} A > 0 \Rightarrow m \leq \frac{B}{A} \leq M$. $\mu := \frac{B}{A}$.

b) folgt aus a) mit $g \equiv 1$. Der Zusatz folgt aus 7.7 und 7.11.

$\square$

Satz 10.18: Sei (f_n) eine Folge mit:

i) $f_n \in C^1[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

ii) $(f_n(a))$ ist konvergent und

iii) (f_n') konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Dann konvergiert (f_n) auf $[a,b]$ gleichmäßig und für $f(x) := \lim_{x\to\infty} f_n(x)$ $(x \in [a,b])$ gilt:

$$f \in C^1[a,b] \text{ und } g' = g \text{ auf } [a,b]$$

Also: $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) = f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$ auf $[a,b]$.

Beweis. $\alpha_n := \int_a^b |f_n'(t) - g(t)| dt \overset{iii)}{\Longrightarrow} (|f_n' - g|)$ konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $0 \overset{10.8}{\Longrightarrow} \alpha_n \to 0$. o.B.d.A. $(f_n(a))$ ist eine Nullfolge. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [a,b]$:

$$f_n(x) \overset{10.6}{=} \underbrace{f_n(a)}_{\to 0} + \int_a^x f_n'(t)dt \xrightarrow{10.8} \int_a^x g(t)dt =: f(x).$$

Also: (f_n) konvergiert auf $[a,b]$ punktweise gegen f.

$$\overset{8.3\ a)}{\Longrightarrow} g \in C[a,b] \overset{10.11}{\Longrightarrow} f \in C^1[a,b] \text{ und } f' = g.$$

Noch zu zeigen: (f_n) konvergiert auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f.

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(a) - \int_a^x g(t)dt + f_n(a)| \\
&\overset{10.6}{=} |\int_a^x (f_n'(t) - g(t))dt + f_n(a)| \\
&\leq \int_a^x |f_n'(t) - g(t)|dt + |f_n(a)| \\
&\leq \int_a^b |f_n'(t) - g(t)|dt + |f_n(a)| \\
&= \underbrace{\alpha_n + |f_n(a)|}_{\to 0} \quad \forall x \in [a,b].
\end{aligned}$$

$\overset{8.1}{\Longrightarrow}$ Gleichmäßige Konvergenz. $\square$

Bemerkung: Der Beweis von 9.12 folgt aus 10.18.

11 Uneigentliche Integrale

Vereinbarung: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so soll stets gelten: $f \in R(J)$ für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$.

Definition:

a) Sei $a \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, a < \beta$ und $f\colon [a, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **uneigentliche Integral** $\int_a^\beta f(x)dx$ heißt **konvergent** $\iff$ der Grenzwert

$$\lim_{t \to \beta - 0} \int_a^t f(x)dx$$

existiert und ist $\in \mathbb{R}$. In diesem Fall:

$$\int_a^\beta f(x)dx := \lim_{t \to \beta - 0} \int_a^t f(x)dx.$$

b) Sei $b \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \alpha < b$ und $f\colon (\alpha, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **uneigentliche Integral** $\int_\alpha^b f(x)dx$ heißt **konvergent** $\iff$ der Grenzwert

$$\lim_{t \to \alpha + 0} \int_t^b f(x)dx$$

existiert und ist $\in \mathbb{R}$. In diesem Fall:

$$\int_\alpha^b f(x)dx := \lim_{t \to \alpha + 0} \int_t^b f(x)dx.$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt divergent.

Beispiele:

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx$ $(\gamma > 0)$ $(a = 1, \beta = \infty)$. Sei $t > 1$,

$$\int_1^t \frac{1}{x^\gamma} dx = \begin{cases} \log t, & \text{falls } \gamma = 1 \\ \frac{1}{1-\gamma}(t^{1-\gamma} - 1), & \text{falls } \gamma \neq 1. \end{cases}$$

Also: $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx$ konvergiert $\iff \gamma > 1$. In diesem Fall:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}dx = \frac{1}{\gamma - 1}$$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ $(a = 0, \beta = \infty)$.

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan t \to \frac{\pi}{2} \ (t \to \infty).$$

Also ist $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ konvergent und $= \frac{\pi}{2}$.

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma}dx$ $(\gamma > 0)$ $(\alpha = 0, b = 1)$. Wie in Beispiel a) sieht man:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma}dx \text{ konvergiert } \iff \gamma < 1$$

d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ $(\alpha = -\infty, b = 0)$. Wie in Beispiel b) sieht man:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx \text{ konvergiert und } = \frac{\pi}{2}.$$

e) $\int_0^\infty \sin x dx$. Sei $t_n := (2n+1)\pi$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$\int_0^{t_n} \sin x dx = -\cos\Big|_0^{t_n} = 1 - \cos t_n = 1 - \cos(2n\pi + \pi) = 1 - \cos\pi = 2$$

Definiere $s_n := 2n\pi$, dann:

$$\int_0^{s_n} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{s_n} = 1 - \cos s_n = 0$$

$\int_0^\infty \sin x dx$ ist also divergent.

Definition: Sei $\alpha < \beta$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Das **uneigentliche Integral** $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ ist **konvergent** $\iff \exists c \in (\alpha, \beta)$: $\int_\alpha^c f(x)dx$ und $\int_c^\beta f(x)dx$ sind beide konvergent. In diesem Fall:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx := \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx$$

(divergent = nicht konvergent).

Übung: obige Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha, \beta)$!

Beispiele:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ ist divergent, denn $\int_0^\infty x dx$ ist divergent. (Aber: $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t x dx = 0$).

b) Sei $\gamma > 0$. Obige Beispiele a) und c) zeigen:
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\gamma} dx \text{ ist divergent.}$$

c) Obige Beispiele b) und d) zeigen:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ist konvergent und } = \pi.$$

Die folgenden Definitionen und Sätze formulieren wir nur für Funktionen
$$f\colon [a, \beta) \to \mathbb{R}$$
(wie in der ersten Definition dieses Kapitels). Diese Definitionen und Sätze gelten sinngemäß auch für die beiden anderen Typen uneigentlicher Integrale.
Beachte: Für $t \in (a, \beta)$: $g(t) := \int_a^t f(x)dx$. Dann:
$$\int_a^\beta f(x)dx \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t\to\beta} g(t) \text{ existiert.}$$

Aus 6.2 c) folgt:

11.1 Cauchykriterium: $\int_a^\beta f(x)dx$ konvergiert
$$\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists c \in (a, \beta) : |\int_u^v f(x)dx| < \epsilon \quad \forall u, v \in (c, \beta).$$

Beispiel: Beh.: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert.

Beweis. Seien $c \leq u < v$.

$$
\begin{aligned}
|\int_u^v \frac{\sin x}{x} dx| &= |\int_u^v \underbrace{\frac{1}{x}}_{g} \underbrace{\sin x}_{f'} dx| \\
&= |\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_v^u - \int_u^v -\frac{1}{x^2}(-\cos x) dx| \\
&= |\frac{\cos v}{v} - \frac{\cos u}{u} - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2} dx| \\
&\leq \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \int_u^v \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{u}
\end{aligned}
$$

(für $\epsilon > 0$: $\frac{2}{u} < \epsilon \iff u > \frac{2}{\epsilon}$). Sei $\epsilon > 0, c := \frac{2}{\epsilon}$. Seien $\frac{2}{\epsilon} < u < v$. Dann:

$$
|\int_u^v \frac{\sin x}{x} dx| \leq \frac{2}{u} < \epsilon
$$

$\overset{11.1}{\Longrightarrow}$ Beh. □

Definition: $\int_a^\beta f(x)dx$ heißt **absolut konvergent** $\iff$ $\int_a^\beta |f(x)|dx$ ist konvergent.

Den folgenden Satz beweist man mit 11.1 ähnlich wie bei Reihen:

Satz 11.2:

a) Ist $\int_a^\beta f(x)d$ absolut konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)dx$ konvergent und

$$
|\int_a^\beta f(x)dx| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx.
$$

b) **Majorantenkriterium**: Ist $|f| \leq h$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta h(x)dx$ konvergiert, so ist $\int_a^\beta f(x)dx$ konvergent.

c) **Minorantenkriterium**: Ist $f \geq h \geq 0$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta h(x)dx$ divergiert, so ist $\int_a^\beta f(x)dx$ divergent.

Beispiele:

a) $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^5}}}_{=:f(x)} dx$. $|f(x)| = f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =: g(x)$.

$$\int_1^\infty g(x)dx \text{ konvergiert } \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergiert.}$$

b) $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7x}}_{=:f(x)} dx$, $g(x) := \frac{1}{x}$; $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^2+7x} \to 1 \ (x \to \infty)$.

$$\Rightarrow \exists c \geq 1 : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} \ \forall x \geq c \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2} g(x) \ \forall x \geq c.$$

$\int_c^\infty g(x)dx$ divergiert $\Rightarrow \int_1^\infty g(x)dx$ divergiert $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ divergiert.

12 Die komplexe Exponentialfunktion

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

$|z| \coloneqq \sqrt{x^2 + y^2}$ **Betrag** von z.

$\overline{z} \coloneqq x - iy$.

$z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ $(z, w \in \mathbb{C})$.

$e^z \coloneqq e^x(\cos y + i \sin y)$.

Ist $z = x \in \mathbb{R}$: $e^z = e^x$; ist $z = it$ $(t \in \mathbb{R})$: $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Satz 12.1: Es gilt $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}, z \neq 1$.

a) $e^{z+w} = e^z e^w$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

b) $|e^{it}| = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-it} = \overline{e^{it}}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

c) $e^{i\pi} + 1 = 0$.

d) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ $\forall k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}$.

e) Für $t \in \mathbb{R}$: $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$.

Beweis.

a) Übung (Add. von e-Funktionen, sin, cos).

b) $e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow |e^{it} = (\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1$,

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t = \overline{\cos t + i \sin t} = \overline{e^{it}}.$$

c) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$.

d) $e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 \overset{a)}{\Rightarrow}$ Beh.

e) $e^{it} + e^{-it} = 1\cos t$.

$\square$

Definition: Für $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Übung: $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\sin(z+w) &= \sin z \cos w + \sin w \cos z \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w\end{aligned}$$

Satz 12.2: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

$$e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$$

Beweis. "$\Leftarrow$": 12.1 *d*).
"$\Rightarrow$" Sei $e^z = 1$, also $1 = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y \Rightarrow e^x\cos y = 1, e^x\sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : y = j\pi \Rightarrow \cos y = (-1)^j$ somit $1 = e^x(-1)^j \Rightarrow j = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ und $x = 0$. Also: $z = 2k\pi i$.
$\square$

Polarkoordinaten: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$.

$$r := |z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Die Gerade durch 0 und z schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ein.
φ heißt das **Argument von** z; $\phi = \arg z$. Es ist

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

also

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\varphi = re^{i\varphi} = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i\arg z}$$

Ist weiter $w \in \mathbb{C}$ und $\psi := \arg w$, so gilt:

$$zw = |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$$

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \overset{12.1}{\Longrightarrow} (e^z)^n = e^{nz}$; Es gilt:

$$\begin{aligned} e^z = e^w &\iff e^z e^{-w} = e^w e^{-w} \\ &\iff e^{z-w} = e^{w-w} = e^0 = 1 \\ &\overset{12.2}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z} : z = w + 2k\pi i \end{aligned}$$

Ohne Beweis:

12.3 Fundamentalsatz der Algebra: Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ein Polynom mit $n \geq 1$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Dann existieren $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (eind. bestimmt) mit $p(z) = a_n(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$ $(z \in \mathbb{C})$. $z_1, \ldots, z_n$ sind genau die Nullstellen von p.

Definition: Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ heißt eine **n-te Wurzel aus** a.

$\sqrt[n]{a}$ bez. eine n-te Wurzel aus a ($n = 2$kurz: Wurzel)

Satz 12.4: Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}, r := |a|$ und $\varphi := \arg a$. (also $a = |a|e^{i\varphi} = re^{i\varphi}$). Für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sei

$$z_k := \sqrt[n]{r}e^{i\frac{l4\varphi + 2k\pi}{n}}$$

Dann:

a) $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$.

b) z ist eine n-te Wurzel aus $a \iff z \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}\}$.

Beweis.

a) Seien $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$, $z_j = z_k$ und $k \geq j$. Also: $e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\varphi+2j\pi}{n}} \overset{s.o.}{\Longrightarrow} \exists l \in \mathbb{Z}$:

$$i\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = i\frac{\varphi + 2j\pi}{n} + 2e\pi i \Rightarrow \frac{\varphi}{2\pi} + k = \frac{\varphi}{2\pi} + j + ln$$

$$\Rightarrow \frac{k-j}{n} = l \Rightarrow |l| = \frac{|k-j|}{n} = \frac{k-j}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

$\Rightarrow l = 0 \Rightarrow k = j$.

b) $p(z) := z^n - a$. Dann: z ist eine n-te Wurzel aus $a \iff p(z) = 0$. Es gilt

$$z_k^n \overset{s.o.}{=} re^{i(\varphi+2k\pi)} = re^{i\varphi}e^{2k\pi i} = re^{i\varphi} = a.$$

Also: $p(z_k) = 0$ $(k = 0, \dots, n-1)$. Aus a) und 12.3 folgt die Beh.

$\square$

Bezeichnung: Ist $a = 1$, so heißen die Zahlen $z_0, \dots, z_{n-1}$ aus 12.4 die **n-ten Einheitswurzeln**. Also $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k = 0, \dots, n-1)$.

Bemerkung: $z^n - 1 = \Pi_{k=0}^{n-1}(z - z_k)$.

Beispiele:

a) Im Rahmen ist $\sqrt{4} = 2$; Im Komplexen sind die Wurzeln aus 4: $2, -2$.

b) Die 4. Wurzeln aus 16 sind $2, -2, 2i, -2i$.

c) Die 4. Einheitswurzel sind $1, -1, i, -i$.

Beispiel: Man kann $\sqrt{-3+4i}$ mittels verschiedener Ansätze berechnen:

1. Möglichkeit: $w = u + iv$, $w^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = -3 + 4i$

$$\iff u^2 - v^2 = -3, 2uv = 4$$

Löse Gleichungssystem.

2. Möglichkeit: $z = 3 + 4i$. Bestimme $|z|, \varphi = \arg z$. Dann sind

$$\pm\sqrt{|z|} = e^{i\frac{\arg z}{z}} \text{ die Wurzeln von z.}$$

3. Möglichkeit: Ist $z \in (-\infty, 0]$, so sind $w = \pm\sqrt{-z}$ die Wurzeln von z. Ist $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, so sind

$$w = \pm\sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}$$

die Wurzeln von z; Beweis:

Beweis. Betrachte:

$$\left(\sqrt{|z|}\frac{z + |z|}{|z + |z||}\right)^2 = |z|\frac{(z + |z|)(z + |z|)}{(z + |z|)(\overline{z} + |z|)} = |z|\frac{(z + |z|)}{(\overline{z} + |z|)}$$
$$= \frac{(|z|z + z\overline{z})}{(\overline{z} + |z|)} = z\frac{(|z| + \overline{z})}{(\overline{z} + |z|)} = z$$

$\square$

Also: $\sqrt{-3 + 4i} = \pm\sqrt{5}\frac{-3+4i+5}{|-3+4i+5} = \sqrt{5}\frac{2+4i}{\sqrt{20}} = \pm(1 + 2i)$.

Satz 12.5: Seien $p, q \in \mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + pz + q = 0 \iff z = -\frac{p}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}_{\text{doppeldeutig!}}.$$

Beweis. "$\Leftarrow$" nachrechnen. Rest mit 12.3. $\square$

Beispiel 12.6: Löse $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$ $(*)$.

$$\begin{aligned} z &= \frac{2i-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(2i-1)^2}{4} + 2i} = i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-4-4i+1}{4} + 2i} \\ &= i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{-3-3i+8i} = i - \frac{1}{2} \pm \sqrt{1}2\sqrt{-3+4i}. \end{aligned}$$

Also sind

$$z_1 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+2i) = 2i$$

und

$$z_2 = i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1-2i) = -1$$

die Lösungen von $(*)$. Es gilt $z^2 + (1-2i)z - 2i = (z-z_1)(z-z_2) = (z-2i)(z+1)$.

Definition: Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt ein **Logarithmus von** w.

Satz 12.7: Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r := |w|$ und $\varphi = \arg w$, also $w = re^{i\varphi}$. Sei $z \in \mathbb{C}$.

$$z \text{ ist ein Logarithmus von } w \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \underbrace{\log|w|}_{\log \text{ in } \mathbb{R}} + i\varphi + 2k\pi i.$$

Beweis. "$\Leftarrow$" $e^z = e^{\log|w|}e^{i\varphi}e^{2k\pi i} = |w|e^{i\varphi} = w$.
"$\Rightarrow$" Sei $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ und $w = e^z = e^x e^{iy} \Rightarrow |w| = e^x \Rightarrow x = \log|w|$. Es ist

$$|w|e^{i\varphi} = w = e^z = e^x e^{iy} = |w|e^{iy}$$

$\Rightarrow e^{i\varphi} = e^{iy} \overset{s.o.}{\Longrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z} : iy = i\varphi + 2k\pi i \Rightarrow z = \log|w| + i\varphi + 2k\pi i.$ $\square$

Beispiele:

a) $w = -1$; $|w| = 1, \arg w = \pi$. Alle Logarithmen von -1:

$$i\pi + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $w = 1$; $|w| = 1, \arg w = 0$. Alle Logarithmen von 1:

$$2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $w = 1 + i$; $|w| = \sqrt{2}, \arg w = \frac{\pi}{4}$. Alle Logarithmen von $1 + i$:

$$\log \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

13 Fourierreihen

I. d. §-en sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit:

$$(V) \quad \begin{cases} f \in R[-\pi, \pi] \text{ und } f \text{ ist auf } \mathbb{R} \text{ } 2\pi\text{-periodisch,} \\ \text{d.h. } f(x+2\pi) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definition: Es seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ Folge in $\mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

heißt eine **trigonometrische Reihe** (TR).

Fragen: Wann ist f durch eine trigonometrisch Reihe darstellbar? Wie hängt dann f mit (a_n), (b_n) zusammen?

Satz 13.1:

a) Ist $a \in \mathbb{R}$, so gilt: $f \in R[a, a+2\pi]$ und $\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

b) **Orthogonalitätsrelationen**: für $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)dx = 0$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} \pi, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Beweis. Übung. □

Motivation: Es seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen und es gelte

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Weiter sei diese trigonometrisch Reihe auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent.
Sei $k \in \mathbb{N}$, dann:

$$f(x)\sin(kx) = \frac{a_0}{2}\sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)\sin(kx) + b_n\sin(nx)\sin(kx)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Übung: die letzte Reihe konvergiert auf $\mathbb{R}$ ebenfalls gleichmäßig.

$$\begin{aligned}\overset{10.8}{\Longrightarrow} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx &= \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)dx}_{=0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)dx}_{\overset{13.1}{=}0} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)dx}_{\overset{13.1}{=}\begin{cases}\pi, & \text{fals } k = n \\ 0, & \text{falls } k \neq n\end{cases}} \\ &= b_k\pi\end{aligned}$$

Also:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Analog zeigt man:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

d.h. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx.$

Definition: f erfülle (V). Setze

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

und

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Zahlen a_n, b_n heißen die **Fourierkoeffizienten** (FK) von f und die mit a_n und b_n gebildete Fourierreihe heißt **die zu f gehörenden Fourierreihe**. Man schreibt:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Frage: wann, bzw. für welche $x \in \mathbb{R}$konvergiert die zu f gehörige Fourierreihe gegen $f(x)$?

Satz 13.2: Für f gelte (V).

a) Ist f gerade, also $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ und } b_n = 0$$

b) Ist f ungerade, also $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, so gilt für die Fourierkoeffizienten von f:

$$a_n = 0 \text{ und } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Beweis. Übung. □

Definition:

a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$ und $g\colon (x_0, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$$g(x_0+) \coloneqq \lim_{x \to x_0 + 0} g(x), \text{ falls dieser Grenzwert existiert und } \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$ und $g\colon (x_0 - \delta, x_0) \to \mathbb{R}$ eine Funktion

$$g(x_0-) \coloneqq \lim_{x \to x_0 - 0} g(x), \text{ falls dieser Grenzwert existiert und } \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

Definition: Für f gelte (V). f heißt **stückweise glatt** $\iff$ es existiert eine Zerlegung $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ von $[-\pi, \pi]$ (also $-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \pi$) mit:

i) $f \in C^1\left((t_{j-1}, t_j)\right)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

ii) Es existieren die folgenden Grenzwerte:

$$f(\pi-),\ f'(\pi-),\ f(-\pi+),\ f'(-\pi+)$$

und

$$f(t_j+),\ f'(t_j+),\ f(t_j-),\ f'(t_j-) \quad (j = 1, \ldots, n-1)$$

Beachte:

a) In den Punkten t_j muss f nicht stetig sein (aber: $f(t_0) = f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(\pi) = f(t_n)$)

b) f 2π-per $\Rightarrow f(x-), f(x+)$ existiert in jedem $x \in \mathbb{R}$.

$$s_f(x) := \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ohne Beweis:

Satz 13.3: Für f gelte (V) und f sei stückweise glatt. Dann konvergiert die Fourierreihe von f in jedem $x \in \mathbb{R}$ gegen $s_f(x)$. Ist in diesem Fall f in $x \in \mathbb{R}$ stetig, so konvergiert die Fourierreihe von f also gegen $f(x)$.

Beispiel 13.4: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch und auf $(-\pi, \pi]$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

$\overset{10.16}{\Longrightarrow}$ $f \in R[-\pi, \pi]$, f erfüllt also (V). f ist stückweise glatt und $s_f(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. f ist ungerade $\overset{13.2}{\Longrightarrow}$ $a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx \overset{10.16}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx \overset{\text{Übung}}{=} (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\overset{13.3}{\Longrightarrow}$ $f(x) = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \quad \forall x \in (-\pi, \pi).$$

$x = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$ (vgl. 9.17 b)).

Beispiel 13.5: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch und auf $[-\pi, \pi]$ definiert durch $f(x) = x^2$.
Klar: f erfüllt (V), f ist stückweise glatt, f ist gerade und $f(x) = s_f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\overset{13.2}{\Longrightarrow} b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3}, & n = 0 \\ 4\frac{(-1)^n}{n^2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der Rechnung in 13.3 folgt:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - + \dots\right)\ \forall x \in [-\pi, \pi]$.

$$x = 0: \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \dots = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad (1)$$

$$x = \pi: \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \qquad (2)$$

Addition von (1), (2): $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^n}$.

Ohne Beweis:

Satz 13.6: Es gelte (V), es sei $f \in C(\mathbb{R})$ und f sei stückweise glatt.

a) Die Fourierreihe von f konvergiert in jedem $x \in \mathbb{R}$ absolut.

b) Die Fourierreihe von f konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig (gegen f).

c) Sind a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von$f$, so konvergieren die Reihen
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$
die zu g gehörige Fourierreihe.

Definition: Sei $g \in R[-\pi, \pi]$. Setze
$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$
und
$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$
Auch in diesem Fall heißen die Zahlen a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von g und die Reihe
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$
die zu g gehörige Fourierreihe.

Satz 13.7: g, a_n und b_n seien wie in der obigen Definition.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ ist konvergent.

b) $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx$ Besselsche Ungleichung.

c) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-\pi, \pi]$:

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Dann:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - s_n(x))^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (g(x)^2 - 2g(x)s_n + s_n(x)^2) dx \\ &\underset{\text{nachr.}}{\overset{13.1}{=}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha_n := \frac{a_0^2}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{b} (a_k^2 + b_k^2)}_{=:\beta_n} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx =: \alpha.$

Also ist (α_n) monoton und beschränkt, somit ist (α_n) konvergent. Damit ist (β_n) konvergent $\Rightarrow$ (1).
$\alpha_n \leq \alpha \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (2).
(3) $a_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2$. Aus (1) und 3.1: $a_n^2 + b_n^2 \to 0 \Rightarrow a_n^2 \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$.
Genauso: $b_n \to 0$. □

13.8 Satz von Riemann-Lebesgue: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ und $g \in R[a, b]$. Dann:

$$\int_a^b g(x) \sin(nx) dx \to 0 \text{ und } \int_a^b g(x) \cos(nx) dx \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Ohne Beweis. Für $[a, b] = [-\pi, \pi]$ vgl. 13.7 *c)*.

14 Der Raum $\mathbb{R}^n$

Es sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. $\mathbb{R}^n$ ist mit der bekannten Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Einheitsvektoren:

$e_1 := (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n := (0, \ldots, 0, 1)$

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist ein Basis des $\mathbb{R}^n$. Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Definition: Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

a) $xy := x \cdot y := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ **Skalarprodukt** oder **Innenprodukt** von x und y. Beachte: $xy \in \mathbb{R}$.

b) $\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ **Norm** oder Länge von x. Beachte: $\|x\|^2 = x \cdot x$ (Im Fall $n = 1 : \|x\| = |x|$).

c) $\|x - y\|$ heißt Abstand von x und y. Beachte: $\|x - y\| = \|y - x\|$.

Beispiele:

a) $(1, 2, -1) \cdot (1, 3, 4) = 1 + 6 - 4 = 3$.

b) $\|(1, 2, -1)\| = (1 + 4 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$.

c) $\|e_j\| = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Satz 14.1: Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot y$; $x \cdot y = y \cdot x$.

b) $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y)$.

c) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0 = (0, \ldots, 0)$.

d) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

e) $\|x \cdot y\| \leq \|x\|\|y\|$ **Cauchy-Schwarz Ungleichung** (CSU).

f) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **Dreiecksungleichung**.

g) $\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

h) Für $j \in \{1, \ldots, n\}$: $|x_j| \leq \|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

Beweis. a) - d): Nachrechnen.

e) o.B.d.A. $y \neq 0$, also $\|y\| > 0$. $A := \|x\|^2 = x \cdot x$, $B := x \cdot y$, $C := \|y\|^2 = y \cdot y$, $\alpha := \frac{B}{C}$. Dann:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^{n} (x_j - \alpha y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^2 - 2\alpha x_j y_j + \alpha^2 y_j^2 \right) \\ &= A - 2\alpha B + \alpha^2 C = A - 2\frac{B^2}{C} + \frac{B^2}{C} = A - \frac{B^2}{C} \end{aligned}$$

$\Rightarrow B^2 \leq AC \Rightarrow (x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

f) $\|x+y\|^2 = (x+y) \cdot (x+y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$. Damit:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \overset{e)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

g) Übung.

h) Es ist $|x_j|^2 = x_j^2 \leq x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |x_j| \leq \|x\|$. Es ist

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \Rightarrow \|x\| \underset{f)}{\overset{d)}{=}} |x_1|\|e_1\| + \ldots |x_n|\|e_n\| = |x_1| + \ldots + |x_n|.$$

$\square$

Definition: Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und $A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ eine reelle $m \times n$-Matrix.

$$\|A\| := \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \textbf{Norm von } A$$

Sei B eine reelle $n \times l$-Matrix, dann existiert AB. Übungsblatt:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \tag{$*$}$$

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$Ax := A \cdot x^T = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\textbf{Matrix-Vektorprodukt})$$

Aus $(*)$ folgt: $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$.

Definition: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$.

a) $U_\epsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ heißt **offene Kugel um** x_0 **mit Radius** ϵ.

b) $\overline{U_\epsilon(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \epsilon\}$ heißt **abgeschlossene Kugel um** x_0 **mit Radius** ϵ.

$U_\epsilon(x_0)$ heißt auch ϵ**-Umgebung von** x_0.

Definition: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) A heißt **beschränkt** $\iff \exists c \geq 0 : \|a\| \leq c \; \forall a \in A$.

b) A heißt **offen** $\iff \forall a \in A \; \exists \epsilon = \epsilon(a) > 0 : U_\epsilon(a) \subseteq A$.

c) A heißt **abgeschlossen** $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen.

d) A heißt **kompakt** $\iff$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

Beispiele:

a) Offene Kugeln sind offen, abgeschlossene Kugeln sind nicht offen.

b) $\mathbb{R}^n$ ist offen, $\emptyset$ ist offen, $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, $\emptyset$ ist abgeschlossen.

c) Abgeschlossene Kugeln sind kompakt.

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. A ist nicht beschränkt, also auch nicht kompakt. A ist nicht offen, aber A ist abgeschlossen.

e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x > 0\}$. A ist nicht offen und auch nicht abgeschlossen.