Höhere Mathematik I

G. Herzog, C. Schmoeger

Wintersemester 2016/17

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen

Grundmenge der Analysis is die Menge $\mathbb{R}$, die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen $\mathbb{R}$ als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von $\mathbb{R}$ aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.

Körperaxiome: in $\mathbb{R}$ seien zwei Verknüpfungen "+" und "·" gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a+b \in \mathbb{R}$ und genau ein $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei soll gelten:

(A1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\; a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz)

(A5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(A2) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\; a + 0 = a$ (Null)

(A6) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\; a \cdot 1 = a$ und $1 \neq 0$ (Eins)

(A3) $\forall a \in \mathbb{R}\; \exists -a \in \mathbb{R}\; a + (-a) = 0$

(A7) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\; \exists a^{-1} \in \mathbb{R}\; a \cdot a^{-1} = 1$

(A4) $\forall a, b \in \mathbb{R}\; a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)

(A8) $\forall a, b \in \mathbb{R}\; a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)

(A9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

Schreibweisen: für $a, b \in \mathbb{R}$: $a - b := a + (-b)$ und für $b \neq 0$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

Alle bekannten Regeln der Grundrechnungsarten lassen sich aus (A1) – (A9) herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele:

a) Beh.: $\exists_1 0 \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\;\; a + 0 = a$

Beweis. Sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R}\; a + \tilde{0} = a$. Mit $a = 0$ folgt: $0 + \tilde{0} = 0$. Mit $a = \tilde{0}$ in (A2) folgt: $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Dann $0 = 0 + \tilde{0} \overset{(A4)}{=} \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ □

b) Beh.: $\forall a \in \mathbb{R} \; a \cdot 0 = 0$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b := a \cdot 0$. Dann: $b \overset{(A2)}{=} a(0+0) \overset{(A9)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b + b$.
$0 \overset{(A3)}{=} b + (-b) = (b+b) + (-b) \overset{(A1)}{=} b + (b + (-b)) = b + 0 \overset{(A2)}{=} b$ □

Anordnungsaxiome: in $\mathbb{R}$ ist eine Relation „ $\leq$ “ gegeben.
Dabei sollen gelten:

$(A10)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$

$(A11)$ aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$

$(A12)$ aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$

$(A13)$ aus $a \leq b$ folgt $\forall c \in \mathbb{R} \; a + c \leq b + c$

$(A14)$ aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $ac \leq bc$

Schreibweisen: $b \geq a \iff a \leq b$; $a < b \iff a \leq b$ und $a \neq b$; $b > 0 \iff a < b$

Aus $(A1) - (A14)$ lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele (ohne Beweis)**:**

a) aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$

b) aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$

c) aus $a \leq b$ und $c \leq d$ folgt $a + c \geq b + d$

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

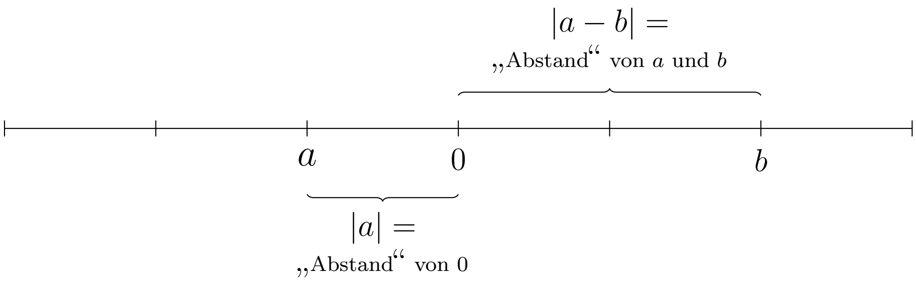
$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Der Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ der Betrag von a.

Beispiele: $|1| = 1, \ \ |-7| = -(-7) = 7$.

Anschaulich:



Es ist $|-a| = |a|$ und $|a-b| = |b-a|$

Regeln:

a) $|a| \geq 0$

b) $|a| = 0 \iff a = 0$

c) $|ab| = |a||b|$

d) $\pm a \leq |a|$

e) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

f) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Beweis.

a) - d) leichte Übung.

e) Fall 1: $a + b \geq 0$. Dann: $|a+b| = a + b \leq_{d)} |a| + |b|$.
Fall 2: $a + b < 0$. Dann: $|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) \leq_{d)} |a| + |b|$.

f) $c := |a| - |b|$; $|a| = |a - b + b| \leq_{d)} |a - b| + |b|$

$$\Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a - b|. \text{ Analog: } -c = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$$

Also: $\pm c \leq |a - b|$.

$\square$

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

a) M heißt **nach oben beschränkt** $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ x \leq \gamma$
In diesem Fall heißt γ eine **obere Schranke** (OS)

b) Ist γ eine obere Schranke von M und gilt $\gamma \leq \delta$ für jede weitere obere Schranke δ von M, so heißt γ das **Supremum** von M (kleinste obere Schranke von M)

c) M heißt **nach unten beschränkt** $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\ \gamma \leq x$
In diesem Fall heißt γ eine **untere Schranke** (US)

d) Ist γ eine untere Schranke von M und gilt $\gamma \geq \delta$ für jede weitere untere Schranke δ von M, so heißt γ das **Infimum** von M (größte untere Schranke von M)

Bez.: in dem Fall: $\gamma = \sup M$ bzw. $\gamma = \inf M$.

Aus $(A11)$ folgt: ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden, so ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ eindeutig bestimmt.

Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden und gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so heißt $\sup M$ das Maximum bzw. $\inf M$ das Minimum von M und wird mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet.

Beispiele:

a) $M = (1, 2)$. $\sup M = 2 \notin M$, $\inf M = 1 \notin M$. M hat kein Maximum und kein Minimum.

b) $M = (1, 2]$. $\sup M = 2 \in M$, $\max M = 2$

c) $M = (3, \infty)$. M ist nicht nach oben beschränkt, $3 = \inf M \notin M$.

d) $M = (-\infty, 0]$. M ist nach unten unbeschränkt, $0 = \sup M = \max M$.

Vollständigkeitsaxiom:

($A15$) Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach oben beschränkt, so ist $\sup M$ vorhanden.

Satz 1.1: Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach unten beschränkt, so ist $\inf M$ vorhanden.

Beweis. i. d. Übungen. □

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt beschränkt $\iff$ M ist nach oben und nach unten beschränkt ($\iff \exists c \geq 0 \; \forall x \in M \; |x| \leq c \iff \exists c \geq 0 \; \forall x \in M \; -c \leq x \leq c$)

Satz 1.2: Es sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$

a) Ist A bechränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$

b) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt $\Rightarrow$ B ist nach oben beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ bzw. nach unten beschränkt und $\inf B \geq \inf A$

c) A sei nach oben bzw. unten beschränkt und γ eine obere bzw. untere Schranke von A. Dann

$$\gamma = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x = x(\varepsilon) \in A : x > \gamma - \varepsilon$$

bzw.

$$\gamma = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x = x(\varepsilon) \in A : x < \gamma + \varepsilon$$

Beweis.

a) $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$. Dann $\inf A \leq x$, $x \leq \sup A$ ($A12$)

$$\Rightarrow \inf A \leq \sup A$$

b) Sei $x \in B$. Dann: $x \in A$, also $x \leq \sup A$. B ist also nach oben beschränkt und $\sup A$ ist eine obere Schranke von B

$$\Rightarrow \sup B \leq \sup A$$

Analog der Fall für A nach unten beschränkt.

c) " $\Rightarrow$ " Sei $\gamma = \sup A$ und $\varepsilon > 0$. Dann: $\gamma - \varepsilon < \varepsilon$. $\gamma - \varepsilon$ ist also keine obere Schranke von A. Also: $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon$
" $\Leftarrow$ " Sei $\tilde{\gamma} \leq \gamma$. Annahme: $\gamma \neq \tilde{\gamma}$. Dann $\tilde{\gamma} < \gamma$, also $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$.
$\stackrel{Vor.}{\Longrightarrow} \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Widerspruch zu $x \leq \tilde{\gamma}$.

□

Natürliche Zahlen

Definition:

a) $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine Induktionsmenge (IM)

$$\iff \begin{cases} 1. & 1 \in A; \\ 2. & \text{aus } x \in A \text{ folgt stets } x + 1 \in A \end{cases}$$

Beispiele: $\mathbb{R}, [1, \infty), \{1\} \cup [2, \infty)$ sind Induktionsmengen

b) $\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x$ gehört zu **jeder** IM $\}$ = Durchschnitt aller IMn
Also: $\mathbb{N} \subseteq A$ für jede Induktionsmenge A.

Satz 1.3:

a) $\mathbb{N}$ ist eine Induktionsmenge

b) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt

c) Ist $x \in \mathbb{R}$, so ex. ein $n \in \mathbb{N} : N > x$

Von nun an sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bekannt.

Proposition 1.4 (Prinzip der vollständigen Induktion)**:**
Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und A eine Induktionsmenge, so ist $A = N$.

Beweis. $A \subseteq \mathbb{N}$ (nach Vor.) und $\mathbb{N} \subset A$ (nach Def.), also $A = \mathbb{N}$ □

Beweisverfahren durch vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Für $A(n)$ gelte:

$$\begin{cases} (I) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (II) & \text{ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch A(n + 1) wahr;} \end{cases}$$

Dann ist $A(n)$ wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$!

Beweis. Sei $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr } \}$. Dann:
$A \subseteq \mathbb{N}$ und, wg. (I), (II), A ist eine Induktionsmenge $\overset{1.4}{\Longrightarrow} A = \mathbb{N}$ □

Beispiel: Beh.: $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

induktiv. I.A.: $1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$, $A(1)$ ist also wahr.
I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
I.S.: $n \curvearrowright n+1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &\overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr. □

Definition:

a) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

b) $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ (ganze Zahlen)

c) $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (rationale Zahlen)

Satz 1.5: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}$:

$$x < r < y$$

Beweis. i. d. Übungen. □

Einige Definitionen und Formeln

a) Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} : a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$, $a^0 := 1$ und ist $a \neq 0 : a^{-n} := \frac{1}{a^n}$
Es gelten die bekannten Rechenregeln.

b) Für $n \in \mathbb{N} : n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! := 1$ (**Fakultäten**)

c) **Binomialkoeffizienten**: für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

z.B. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. Es gilt (nachrechnen!):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \end{aligned}$$

e) **Binomischer Satz**: $a, b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Beweis. i. d. Übungen. □

f) **Bernoullische Ungleichung**: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$. Dann:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

induktiv. I.A.: $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$
I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $(1+x)^n \geq 1 + nx$

I.S.: $n \curvearrowright n+1$: $\overset{I.V.}{\Longrightarrow} (1+x)^n \geq 1+nx$ und da $1+x \geq 0$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+nx+x+\underbrace{nx^n}_{\geq 0} \\ &\geq 1+nx+x \\ &= 1+(n+1)x\end{aligned}$$

$\square$

Hilfssatz (HS)**:** Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$

Beweis. i. d. Übungen. $\square$

Satz 1.6: Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$ mit: $x^n = a$. Dieses x heißt **n-te Wurzel aus a**; Bez.: $x = \sqrt[n]{a}$. ($\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$)

Beweis. Existenz: später in §7.
Eindeutigkeit: seien $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n$. $\overset{HS}{\Longrightarrow} x = y$ $\square$

Bemerkungen:

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (s. Schule)

b) Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Bsp.: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{4} \neq -2$. Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

c) $\sqrt{x^2}|x| \ \forall x \in \mathbb{R}$

Rationale Exponenten

a) Sei zunächste $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Dann ex. $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$. Wir wollen definieren:

$$a^r := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad (*)$$

Problem: gilt auch noch $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, gilt dann $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = (\sqrt[q]{a})^p$?
Antwort: ja (d.h. obige Def. $(*)$ ist sinnvoll).

Beweis. $x := (\sqrt[n]{a})^m$, $y := (\sqrt[q]{a})^p$, dann: $x, y \geq 0$ und $mq = np$, also

$$\begin{aligned} x^q &= \big(\sqrt[n]{a}\big)^{mq} = \big(\sqrt[n]{a}\big)^{np} = \big(\big(\sqrt[n]{a}\big)^m\big)^p = a^p \\ &= \big(\big(\sqrt[q]{a}\big)^q\big)^p = \big(\big(\sqrt[q]{a}\big)^p\big)^q = y^q \end{aligned}$$

$\overset{HS}{\Longrightarrow} x = y.$ ☐

b) Sei $a > 0, r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$. Es gelten die bekannten Rechenregeln:

$$\big(\, a^r a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, \dots \big)$$

2 Folgen und Konvergenz

Definition: Es sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$ heißt eine **Folge in X**. Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt a eine **reelle Folge**.

Schreibweisen: a_n statt $a(n)$ (n-tes Folgenglied)
(a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$ statt a

Beispiele:

a) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

b) $a_{2n} := 0$, $a_{2n-1} := 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a\colon \{p, p+1, \dots\} \to X$ eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in X. Bez.: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$. Meist $p = 0$ oder $p = 1$.

Definition: Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$.

a) X heißt **abzählbar** $\iff$ $\exists$ Folge (a_n) in X: $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

b) X heißt **überabzählbar** $\iff$ X ist nicht abzählbar

Beispiele:

a) Ist X endlich, so ist X abzählbar.

b) $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_1 := 0, a_2 := 1, a_3 := -1, a_4 := 2, a_5 := -2, \dots$ also

$$a_{2n} := n, \quad a_{2n+1} := -n \quad (n \in \mathbb{N})$$

d) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar!

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[dl] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[dl] & 5 \arrow[r] & 6 & \cdots \\
\frac{1}{2} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \frac{5}{2} & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots & \\
\frac{1}{4} \arrow[d] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots & & \\
\frac{1}{5} \arrow[ur] & \frac{2}{5} & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \cdots & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann:

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

e) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (Beweis in §5).

Vereinbarung: Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in $\mathbb{R}$.

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form $(a_n)_{n=1}^\infty$. Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^\infty$ $(p \in \mathbb{Z})$.

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $M := \{a_1, a_2, \dots\}$.

a) (a_n) heißt **nach oben beschränkt** $\iff$ M ist nach oben beschränkt. I.d. Fall: $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^\infty a_n := \sup M$.

b) (a_n) heißt **nach unten beschränkt** $\iff$ M ist nach unten beschränkt.
I.d. Fall: $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf M$.

c) (a_n) heißt **beschränkt** $\iff$ M ist beschränkt

$$\iff \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \;\forall n \in \mathbb{N}$$

Definition: Sei $A(n)$ eine für jedes $n \in \mathbb{N}$ definierte Aussage.
$A(n)$ gilt **für fast alle** (ffa) $n \in \mathbb{N}$ $\iff$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq n_0$

Definition: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$$

heißt ε**-Umgebung von a**.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **konvergent**

$$\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ ex. } n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \\ |a_n - a| < \varepsilon \;\forall n \geq n_0 \end{cases}$$

I. d. Fall heißt a **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von (a_n) und man schreibt

$$a_n \to a \;(n \to \infty) \text{ oder } a_n \to a \text{ oder } \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) **divergent**. Beachte:

$$\begin{aligned} a_n \to a \;(n\to\infty) &\iff \forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \;\forall n \geq n_0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Satz 2.1: (a_n) sei konvergent und $a = \lim a_n$

a) Gilt auch noch $a_n \to b$, so ist $a = b$

b) (a_n) ist beschränkt

Beweis.

a) Annahme $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_{n_0} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ und $\exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

$N := \max\{n_0, n_1\}$. Dann:

$$2\varepsilon = |a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\varepsilon$$

Widerspruch! Also $a = b$

b) Zu $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1$ $\forall n \geq n_0$. Dann:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad \forall n \geq n_0$$

$c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$. Dann: $|a_n| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq 1$.

$\square$

Beispiele:

a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n := c$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$|a_n - c| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also: $a_n \to c$.

b) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Beh: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0 : |a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\xRightarrow{1.3\ c)} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Für $n \geq n_0$ ist $n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Somit $|a_n - 0| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\square$

c) $a_n := (-1)^n$. Es ist $|a_n| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, (a_n) ist also beschränkt. Behauptung: (a_n) ist divergent.

Beweis. $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n|\,(1-(-1)) = 2$.
Annahme: (a_n) konvergiert. Definiere $a := \lim a_n$, dann

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n \geq n_0$ gilt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Widerspruch! $\square$

d) $a_n := n \; (n \in \mathbb{N})$. (a_n) ist nicht beschränkt $\overset{2.1\ b)}{\Longrightarrow}$ (a_n) ist divergent.

e) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} (n \in \mathbb{N})$. Beh.: $a_n \to 0$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$.

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$\overset{1.3\ c)}{\Longrightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Ist $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$
$\square$

f) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Beweis.

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \; \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$, nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Also $a_n \to 0$. $\square$

Definition: (a_n) und (b_n) seien Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n);\;\; \alpha(a_n) := (\alpha a_n);\;\; (a_n)(b_n) := (a_n b_n)$$

Gilt $b_n \neq 0 \; \forall n \geq m$, so ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$ definiert.

Satz 2.2: $(a_n), (b_n), (c_n)$ und (α_n) seien Folge und $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$

a) $a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0$

b) Gilt $|a_n - a| \leq \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0$, so gilt $a_n \to a$

c) Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann:

  (i) $|a_n| \to |a|$

  (ii) $a_n + b_n \to a + b$

  (iii) $\alpha a_n \to \alpha a$

  (iv) $a_n b_n \to ab$

  (v) ist $a \neq 0$, so ex. ein $m \in \mathbb{N}$:

$$a_n \neq 0 \; \forall n \geq m \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$$

d) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$

e) Es gelte $a_n \to a$, $b_n \to a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dann $c_n \to a$.

Beispiele:

a) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $a_n := \frac{1}{n^p}$. Es ist $n \leq n^p \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Dann: $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N} \overset{2.2\ e)}{\Longrightarrow} a_n \to 0$, also $\frac{1}{n^p} \to 0$.

b) $a_n := \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2} = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{2.2} \frac{5}{4}$

von 2.2.

a) folgt aus der Definition der Konvergenz

b) $\exists m \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \alpha_m \ \forall n \geq m$. Sei $\varepsilon > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \alpha_n < \varepsilon \ \forall n \geq n_1.$$

$n_0 := \max\{m, n_1\}$. Für $n \geq n_0$: $|a_n - a| \leq \alpha_n < \varepsilon$

c) (i) $||a_n| - |a|| \leq_{\S 1} |a_n - a| \ \forall n \in \mathbb{N} \overset{b)}{\underset{a)}{\Rightarrow}} |a_n| \to |a|$

(ii) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_1$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_2$
$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Für $n \geq n_0$:

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iii) Übung

(iv) $c_k := |a_n b_n - ab|$. z. z.: $c_n \to 0$

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |an(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \end{aligned}$$

$\overset{2.1\ b)}{\Longrightarrow} \exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $c \geq |b|$. Dann:

$$c_n \leq c(|b_n - b| + |a_n - a|) =: \alpha_n \xrightarrow[c)(ii),c)(iii)]{a)} \alpha_n \to 0$$

Also: $|c_n - 0| = c_n \leq \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \overset{b)}{\Rightarrow} c_n \to 0$.

(v) $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$; aus (i): $|a_n| \to |a| \Rightarrow \exists n \in N$:

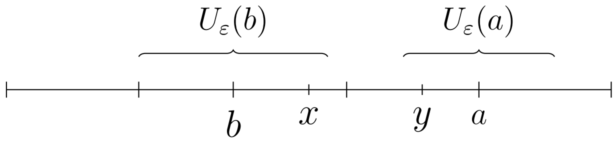
$$|a_n| \in U_\varepsilon(|a|) = (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon) = (\frac{|a|}{2}, \frac{3}{2}|a|) \quad \forall n \geq m$$

$\Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2} > 0 \ \forall n \geq m \Rightarrow a_n \neq 0 \ \forall n \geq m$.
Für $n \geq m$:

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} =: \alpha_n$$

$\alpha_n \to 0 \overset{b)}{\Rightarrow} \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.

d) Annahme $b < a$, $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$



Dann: $x < y \ \forall x \in U_\varepsilon(b) \ \forall y \in U_\varepsilon(a)$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : b_n \in U_\varepsilon(b) \ \forall n \geq n_0$$
$$\exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \ \forall n \geq m$$

$m_0 := \max\{n_0, m\}$. Für $n \geq m_0$: $a_n \leq b_n < b + \varepsilon$, also $a_n \notin U_\varepsilon(a)$. Widerspruch!

e) $\exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \geq m$. Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \ \forall n \geq n_1$$
$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \ \forall n \geq n_2$$

$n_0 := \max\{n_1, n_2, m\}$. Für $n \geq n_0$:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

Also: $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$.

$\square$

Definition:

a) (a_n) heißt **monoton wachsend** $\iff$ $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) (a_n) heißt **streng monoton wachsend** $\iff$ $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Entsprechend definiert man **monoton fallend** und **streng monoton fallend**.

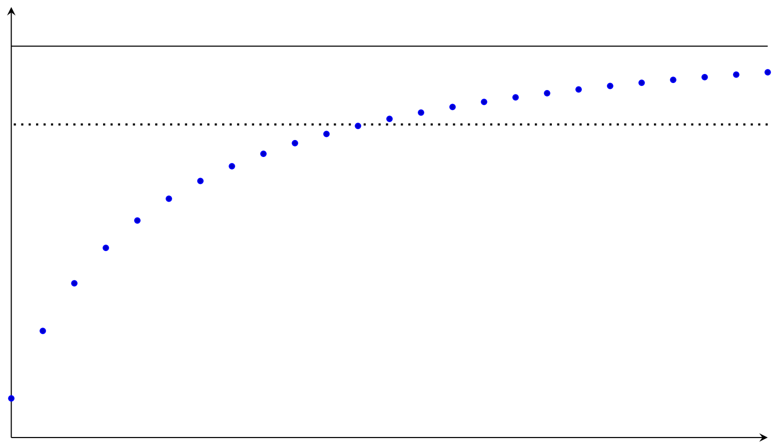
d) (a_n) heißt **monoton** $\iff$ (a_n)n ist monoton wachsend oder monoton fallend.

Proposition 2.3 (Monotoniekriterium)**:**

a) (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n$$

b) (a_n) sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n=1}^{\infty} a_n$$

Beweis. $a := \sup_{n=1}^{\infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_1, a_2, \cdots\}$, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$. Für $n \geq n_0$:
$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a \leq a + \varepsilon$$
also $|a_n - a| \leq \varepsilon \; \forall n \geq n_0$. $\square$



Beispiel: $a_1 := \sqrt[3]{6}$, $a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n}$ $(n \geq 2)$.

$a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2;$

$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6 + 2} = 2;$

$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{6} = a_1;$

Behauptung: $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

induktiv.
I.A.: s.o.
I.V.: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$. $n \curvearrowright n+1$: $a_{n+1} = \sqrt[3]{6+a_n} >_{I.V.}$ 0

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6+a_n} <_{I.V.} \sqrt[3]{6+2} = 2; \quad a_{n+2} = \sqrt[3]{6+a_{n+1}} >_{I.V.} \sqrt[3]{6+a_n} = a_{n+1}$$

Also: (a_n) ist nach oben beschränkt und monoton wachsend.
$\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (a_n) ist konvergent. $a := \lim a_n$, $a_n \geq 0 \ \forall n \overset{2.2}{\Longrightarrow} a \geq 0$. Es ist

$$a_{n+1}^3 = 6 + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\overset{2.2}{\Longrightarrow} a^3 = 6 + a \Rightarrow 0 = a^3 - a + 6 = (a-2)(\underbrace{a^2 - 2a + 3}_{\geq 3})$$

$\Rightarrow a = 2.$ □

Wichtige Beispiele:

Vorbemerkung: Seien $x, y \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$: es ist (s. §1)

$$x^p - y^p = (x-y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x-y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1}|x-y|$

Beispiel 2.4: Sei $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a (\geq 0)$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$

Beweis.
Fall 1: $a = 0$. Sei $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon^p \ \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{|a_n|} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$$

Also $\sqrt[p]{a_n} \to 0$.

Fall 2: $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}|a_n - a| &= |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - |\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y}|^p| = |x^p - y^p| \\ &\geq_{s.o.} \underbrace{y^{p-1}}_{:=c}|x-y| = c|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}|, \quad c > 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{1}{c}|a_n - a| =: \alpha_n$. $\alpha_n \to 0 \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$ □

Beispiel 2.5: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt (x^n) ist konvergent $\iff$ $x \in (-1, 1]$, i. d. Fall:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in (-1,1) \end{cases}$$

Beweis.
Fall 1: $x = 0$. Dann $x^k \to 0$. Fall 2: $x = 1$. Dann $x^k \to 1$.
Fall 3: $x = -1$. Dann $(x^k) = ((-1)^k)$, ist divergent.
Fall 4: $|x| > 1$. $\exists \delta > 0 : |x| = 1 + \delta \Rightarrow |x^k| = |x|^k = (1+\delta)^k \geq 1 + n\delta \geq n\delta$ $\Rightarrow$ ist nicht beschränkt $\overset{2.1}{\Longrightarrow}$ (x^k) ist divergent. Fall 5: $0 < |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|x|} > 1 \Rightarrow$ $\exists \eta > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + \eta$.

$$\Rightarrow |\frac{1}{x^n}| = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1+\eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta$$

$\Rightarrow |x^n| \leq \frac{1}{\eta} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow x^n \to 0$. □

Beispiel 2.6: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $s_n := 1 + x + x^n + \ldots x^n = \sum_{k=0}^n x^k$
Fall 1: $x = 1$. Dann: $x_n = n + 1$, (s_n) ist also divergent.
Fall 2: $x \neq 1 \Rightarrow s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Aus 2.5:

$$(s_n) \text{ konvergent} \quad \iff \quad |x| < 1$$

i.d. Fall: $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$

Beispiel 2.7: Behauptung: $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Beweis. Es ist $\sqrt[n]{n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, also $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Z. z.: $a_n \to 0$. Für $n \geq 2$:

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (a_n + 1)^n \overset{\S 1}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

$\Rightarrow \frac{n-1}{2} a_n^2 \leq 1$. Also $\xrightarrow[a_n \geq 0]{} 0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} (n \geq 2)$. $\Rightarrow a_n \to 0$. □

Beispiel 2.8: Sei $c > 0$. Beh.: $\sqrt[n]{c} \to 1$.

Beweis. Fall 1: $c \geq 1$. $\exists m \in \mathbb{N} : 1 \leq c \leq m$

$$\Rightarrow 1 \leq c \leq n \ \forall n \geq m \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n} \ \forall n \geq m \Rightarrow \text{Beh.}$$

Fall 2: $0 < c < 1 \Rightarrow \frac{1}{c} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \xrightarrow[Fall 1]{} 1 (n \to \infty) \Rightarrow$ Beh. □

Beispiel 2.9: $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$
Beh.: (a_n) und (b_n) sind konvergent und $\lim a_n = \lim b_n$

Beweis. I. d. gr. Übungen wird gezeigt: $2 \leq a_n < a_{n+1} < 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\overset{2.3}{\Longrightarrow} (a_n) \text{ konvergiert, } a := \lim a_n$$

Es ist $b_n > 0$ und $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n$. (b_n) ist also monoton wachsend. Für $n > 3$:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 2}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \ldots \cdot n}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \ldots + (\frac{1}{2})^{n-1}\right) = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (b_n) konvergiert. $b := \lim b_n$. Für $n \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\S 1}{=} \sum_{k=0} n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \\
&= 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{<1} \underbrace{(1-\frac{2}{n})}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1-\frac{k-1}{n})}_{<1} \\
&\leq 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = b_n
\end{aligned}
$$

Also $a_n \leq b_n \ \forall n \geq 2$. Z. z.: $\Rightarrow a \leq b$Â
Sei $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$ (zunächst fest). Für $n \in \mathbb{N}, n \geq j$:

$$
\begin{aligned}
a_n &\overset{s.o.}{=} 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdot \ldots \cdot (1-\frac{k-1}{n}) \\
&\geq 1+1+\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} \underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{\to 1} \underbrace{(1-\frac{2}{n})}_{\to 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1-\frac{k-1}{n})}_{\to 1} \\
&\to 1+1+1\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

Also $a \geq b_j \ \forall j \geq 2 \overset{j\to\infty}{\Longrightarrow} a \geq b$. $\square$

Definition:

$$
e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})
$$

heißt **Eulersche Zahl**. Übung: $2 < e < 3$.
$e \approx 2{,}718\ldots$

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$b_k := a_{n_k}$$

also $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, \dots$. Dann heißt $(b_k) = (a_{n_k})$ eine **Teilfolge** (TF) von (a_n).

Beispiele:

a) $(a_2, a_4, a_6, \dots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = 2k$

b) $(a_1, a_4, a_9, \dots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = k^2$

c) $(a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, a_{14}, \dots)$ ist keine Teilfolge von (a_n).

Definition: (a_n) sei eine Folge und $\alpha \in \mathbb{R}$. α heißt ein **Häufungswert** (HW) von (a_n)

$$\iff \exists \text{ Teilfolge } (a_{n_k}) \text{ von } (a_n): \; a_{n_k} \to \alpha \; (k \to \infty)$$

$H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}$.

Satz 2.10: $\alpha \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungswert von (a_n)

$$\iff \forall \epsilon > 0 : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha) \quad (*)$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.
" $\Rightarrow$ " Sei (a_{n_k}) eine Teilfolge mit $a_{n_k} \to \infty$. Sei $\epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : a_{n_k} \in U_\epsilon(\alpha)$ für $k \geq k_0 \Rightarrow (*)$
" $\Leftarrow$ " $\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in U_1(\alpha)$. $\exists n_2 \in \mathbb{N} : a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ und $n_2 > n_1$. $\exists n_3 \in \mathbb{N} : a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$ und $n_3 > n_2$. Etc. ... Man erhält eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit

$$a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha) \; \forall k \in \mathbb{N}, \text{ also } |a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \; \forall k$$

Somit: $a_{n_k} \to \alpha$. $\square$

Beispiele:

a) $a_n = (-1)^n$, $a_{2k} = 1 \to 1, a_{2k+1} \to -1$, also $1, -1 \in H(a_n)$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1, \alpha \neq -1$
Wähle $\epsilon > 0$ so, dass $1, -1 \notin U_\epsilon(\alpha)$. Dann $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$ für kein $n \in \mathbb{N}$ $\overset{2.10}{\Longrightarrow} \alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \{1, -1\}$.

b) $a_n = n$. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$, so gilt: $a_n \in U_\epsilon(\alpha)$ für höchstens endlich viele n, also $\alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \emptyset$.

c) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Sei (a_n) eine Folge mit $Q = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0 \overset{1.5}{\Longrightarrow} U_\epsilon(\alpha) = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ enthält unendlich viele verschiedene rationale Zahlen $\overset{2.10}{\Longrightarrow} \alpha \in H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \mathbb{R}$.

Folgerung: Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_m) in $\mathbb{Q} : r_n \to \alpha$.

Satz 2.11: (a_n) sei konvergent, $a := \lim a_n$ und (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n). Dann:

$$a_{n_k} \to a(k \to \infty)$$

Insbesondere: $H(a_n) = \{\lim a_n\}$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann: $an \in U_\epsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also auch $a_{n_k} \in U_\epsilon(a)$ ffa $k \in \mathbb{N}$. Somit: $a_{n_k} \to \alpha$. □

Definition: Sei (a_n) eine Folge.

a) $m \in \mathbb{N}$. m heißt **niedrig** (für (a_n)) $\iff a_n \geq a_m \ \forall n \geq m$

b) $m \in \mathbb{N}$ heißt nicht niedrig $\iff \exists n \geq m : a_n < a_m \Rightarrow n > m : a_n < a_m$

Hilfssatz: (a_n) sei eine Folge. Dann enthält (a_n) eine monotone Teilfolge.

Beweis.
Fall 1: es existieren höchstens endlich viele niedrige Indizes. Also existiert $n_1 \in \mathbb{N}$: jedes $n \geq n_1$ ist nicht niedrig.

n_1 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} < a_{n_1}$

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$

Etc...

Wir erhalten so eine streng monoton fallende Teilfolge (a_{n_k}).

Fall 2: es existieren unendlich viele niedrige Indizes $n_1, n_2, \ldots$, etwa $n_1 < n_2 < \ldots$

n_1 ist niedrig und $n_2 > n_1 \to a_{n_2} \geq a_{n_1}$

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} \geq a_{n_2}$

Etc. . .

Wir erhalten so eine monoton wachsende Teilfolge (a_{n_k}). □

Satz 2.12 (Bolzano-Weierstraß)**:**
(a_n) sei beschränkt, dann: $H(a_n) \neq \emptyset$. (a_n) enthält also eine konvergente Teilfolge

Beweis. $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \; \forall n \in \mathbb{N}$. $\xRightarrow{Hilfssatz}$ (a_n) enthält eine monotone Teilfolge (a_{n_k}). Dann: $|a_{n_k}| \leq c \forall k \in \mathbb{N}$
(a_{n_k}) ist also beschränkt $\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (a_{n_k}) ist konvergent. Also $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in H(a_n)$. □

Satz 2.13: (a_n) sei beschränkt $\left(\overset{2.12}{\Longrightarrow} H(a_n) \neq \emptyset \right)$

a) $H(a_n)$ ist beschränkt

b) $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$; es existieren also

$$\max H(a_n), \min H(a_n)$$

Definition: Ist (a_n) beschränkt, so nennen wir

a) $\limsup_{n\to\infty} a_n := \limsup a_n := \overline{\lim} a_n := \max H(a_n)$ heißt **Limes superior** oder **oberer Limes** von (a_n).

b) $\liminf_{n\to\infty} a_n := \liminf a_n := \underline{\lim} a_n := \min H(a_n)$ heißt **Limes inferior** oder **unterer Limes** von (a_n).

Beweis.

a) $\exists c \geq 0 : |a_n| \leq c \; \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\alpha \in H(a_n)$. Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to \alpha \; (k \to \infty)$. Es ist

$$|a_{n_k}| \leq c \quad \forall k, \text{ also } -c \leq a_{n_k} \leq c \quad \forall k$$

$\Rightarrow -c \leq \alpha \leq c$. Also $|\alpha| \leq c \; \forall \alpha \in H(a_n)$.

b) ohne Beweis.

□

Satz 2.14: (a_n) sei beschränkt.

a) $\liminf a_n \leq \alpha \leq \limsup a_n \; \forall \alpha \in H(a_n)$

b) Ist (a_n) konvergent $\Rightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$

c) $\limsup(\alpha a_n) = \alpha \limsup a_n \; \forall \alpha \geq 0$

d) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$

Beweis. a) klar, b) folgt aus 2.11, c) und d) Übung. □

Motivation: (a_n) sei konvergent und $\lim a_n =: a$. Sei $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

Für $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

D.h.: (a_n) hat die folgende Eigenschaft:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0 \tag{c}$$

$(\iff \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+k}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \; \forall k \in \mathbb{N})$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt eine **Cauchyfolge** (CF)

$$\iff (a_n) \text{ hat die Eigenschaft } (c)$$

Konvergente Folgen sind also Cauchy-Folgen!

Proposition 2.15 (Cauchykriterium)**:**

$$(a_n) \text{ ist konvergent } \iff (a_n) \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ s.o. „ $\Leftarrow$ “ ohne Beweis $\square$

Beispiel: $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit Induktion folgt:

1) $0 < a_n \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ Damit:

2) $a_n \geq \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$

Für $n \geq 2, k \in \mathbb{N}$ gilt daher:

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| = \left| \frac{1}{1 + a_{n+k-1}} - \frac{1}{1 - a_{n-1}} \right| &= \frac{|a_{n-1} - a_{n+k-1}|}{(1 + a_{n+k-1})(1 + a_{n-1})} \\
&\leq \frac{1}{(1 + \frac{1}{2})^2} |a_{n+k-1} a_{n-1}| = \frac{4}{9} |a_{n+k-1} - a_{n-1}| \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |a_{n-k-2} - a_{n-2}| \leq \ldots \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_{k+1} - a_1| \\
&\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} (|a_{k+1}| + |a_1|) \leq 2 \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$: $2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} < \epsilon$ $(n \geq n_0)$. Damit: $|a_{n+k} - a_n| < \epsilon$ $(n \geq n_0, k \in \mathbb{N})$. Also ist (a_n) Cauchyfolge. $a := \lim_{n \to \infty} a_n$. Klar: $a \geq \frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{1+a}$. Also $a^2 + a - 1 = 0 \iff a = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Wegen $a \geq \frac{1}{2}$ folgt $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3 Unendliche Reihen

Definition: (a_n) sei eine Folge;

a) $s_n := a_1 + a_2 + \dots a_n \quad (n \in \mathbb{N})$ (also $a_1 = a_1, a_2 = a_1 + a_2, \dots$). (s_n) heißt **(unendliche) Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Weitere Bezeichnungen: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

b) s_n heißt **n-te Teilsumme** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent bzw. divergent $\iff$ (s_n) ist konvergent bzw. divergent.

d) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so heißt $\lim s_n$ der Reiehenwert und wird ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet (schlecht, aber so üblich)

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n=p}^{\infty}$ eine Folge, so definiert man entsprechend

$$s_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n \quad (n \geq p)$$

und $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ (meist: $p = 1$ oder $p = 0$)

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nun für Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Diese Sätze und Definitionen gelten entsprechend für Reihen der Form $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ $(p \in \mathbb{Z})$

Beispiele:

a) Sei $x \in \mathbb{R}$. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ heißt **geometrische Reihe**. $s_m = 1 + x + \dots x^m \overset{2.6}{\Longrightarrow} (s_n)$ konvergiert $\iff$ $|x| < 1$ und $\lim s_n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$. Also: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergent $\iff$ $|x| < 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x] < 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; a_n)\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow s_n &= a_1 + \dots + a_n \\
&= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1
\end{aligned}$$

Also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1))}$ konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$; $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \overset{2.9}{\Longrightarrow} s_n \to e$.
Also: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

d) Die **harmonischen Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dann ist $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}$,
$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = s_n + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \ldots + + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq$
$s_n + \frac{1}{2}$
Annahme (s_n) ist konvergent. $s := \lim s_n \xrightarrow[satz:2.11]{2.11} s_{2n} \to s \Rightarrow s \geq s + \frac{1}{2} \to$
$0 \geq \frac{1}{2}$. Widerspruch! Also: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent!

Satz 3.1: (a_n) sei eine Foge und $s_n = a_1 + \ldots + a_n$.

a) **Monotoniekriterium:** Sind alle $a_n \geq 0$ und ist (s_n) beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

b) **Cauchykriterium:** $\sum a_n$ konvergiert $\iff$ $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon \ \forall m > n \geq n_0$$

c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \to 0$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann ist für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ konvergent und für $r_\nu := \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ gilt: $r_\nu \to 0$.

Beweis.

a) $s_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. (s_n) ist also wachsend und beschränkt $\overset{2.3}{\Longrightarrow} (s_n)$ konvergent.

b) Für $m > n : |s_m - s_n| = |a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m - (a_1 + \ldots a_n)| = |a_{n+1} + \ldots + a_m| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k|$. Behauptung folgt aus 2.15.

c) $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$. Ist (s_n) konvergent, so folgt $a_{n+1} \to 0$

d) ohne Beweis!

□

Bemerkung: Ist (a_n) eine Folge und gilt $a_n \not\to 0$, so ist $\sum a_n$ divergent!

Satz 3.2: Die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ seien konvergent und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$$

und $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$

Beweis. 2.2 □

Proposition 3.3 (Leibnitzkriterium)**:** Sei (b_n) eine Folge mit:

$$b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, (b_n) \text{ ist monoton fallend und } b_n \to 0$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konvergent-.

Beispiel: Aus 3.3 folgt:
Die **alternierende harmonische Reihe** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent.

von 3.3. $a_n := (-1)^{n+1} b_n$, $s_n := a_1 + \ldots + a_n$. $s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{b_{2n+1} - b_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n}$. (s_{2n}) ist also monoton fallend. Es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} = s_{2n-1} - b_{2n} \leq s_{2n-1} \qquad (*)$$

Also:

$$s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2n} \overset{(*)}{\leq} s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1$$

(s_{2n}) und (s_{2n+1}) sind also beschränkt $\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ (s_{2n}) und (s_{2n+1}) sind konvergent. $s := \lim s_{2n} \overset{(*)}{\Longrightarrow} s = \lim s_{2n+1}$.
Sei $\epsilon > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} s_{2n} \in U_\epsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ s_{2n-1} \in U_\epsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow s_n \in U_\epsilon(s) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}$$

Also: $s_n \to s$. □

Definition: $\sum a_n$ heißt **absolut konvergent** $\iff$ $\sum |a_n|$ ist konvergent.

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz 3.4: $\sum a_n$ sei absolut konvergent. Dann:

a) $\sum a_n$ ist konvergent

b) $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ($\triangle$-Ungleichung für Reihen)

Beweis.

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}, m > n$

$$\underbrace{|\sum_{k=n+1}^{m} a_k|}_{=:\sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|}_{=:\tau_{m,n}} \qquad (*)$$

Sei $\epsilon > 0$, Voraussetzung nach 3.1 b) $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \tau_{m,n} < \epsilon$ für $m > n > n_0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \sigma_{m,n} < \epsilon$ für $m > n \geq n_0 \overset{3.1\ b)}{\Longrightarrow} \sum a_n$ konvergiert

b) Sei $s_k \coloneqq a_1 + \ldots + a_k$, $s \coloneqq \lim s_n$, $\sigma_k \coloneqq |a_1| + \ldots |a_k|$ und $\sigma = \lim \sigma_n$. Dann: $|s_n| \to |s|$ und

$$|s| \leq \sigma \quad \forall n$$

$\Rightarrow |s| \leq \sigma \Rightarrow \triangle$-Ungleichung

$\square$

Satz 3.5:

a) **Majorantenkriterium**: Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum b_n$ konvergent, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

b) **Minorantenkriterium**: Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum b_n$ divergent, so ist $\sum a_n$ divergent.

Beweis.

a) $\exists j \in \mathbb{N}$: $|a_n| \leq b_n \; \forall n \geq j$. Sei $m > n \geq j$, dann

$$\underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} |a_n|}_{=:\sigma_{m,n}} \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} b_k}_{=:\tau_{m,n}}$$

Sei $\epsilon > 0$ Voraussetzung nach 3.1 $b) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq j$ und $\tau_{m,n} < \epsilon$ für $m > n \geq n_0$. Dann: $\sigma_{m,n} < \epsilon$ für $m > n \geq n_0 \xRightarrow{3.1\ b)} \sum |a_n|$ konvergiert.

b) Annahme: $\sum a_n$ konvergent $\overset{a)}{\Rightarrow} \sum b_n$ konvergent, Widerspruch.

$\square$

Beispiele:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = |a_n| = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$$

Bekannt: $\sum b_n$ konvergiert $\xRightarrow{3.5\ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergiert

b) Aus Beispiel a): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

c) Sei $\alpha > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$: Betrachte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.
Fall 1: $\alpha \in (0, 1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \xRightarrow{3.5\ b)} \sum \frac{1}{n^\alpha}$$

Fall 2: $\alpha \geq 2$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; 0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{n^2} \xRightarrow{3.5\ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergent}$$

Fall 3: $\alpha \in (1, 2)$: vgl. Übungsblatt, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent.

Fazit: Ist $\alpha > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+1}$; $|a_n| = \frac{n+2}{n^3+1} \leq \frac{n+2}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2n}{n^2} =: b_n$. Für $n \geq 2$ $\sum b_n$ konvergiert $\overset{3.5\ a)}{\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ konvergiert absolut

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$; $a_n = |a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}_{\geq 0} =: b_n$.

$\sum b_n$ divergiert $\overset{3.5\ b)}{\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ divergiert

Bemerkung: Ist später später (in §7) die allgemeine Potenz a^x $(a > 0, x \in \mathbb{R})$ eingeführt, so zeigt man analog:

$$\text{Für } \alpha > 0 \text{ gilt: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert } \iff \alpha > 1$$

Hilfssatz: (c_n) sei beschränkt

a) Ist $\alpha := \limsup c_n$ und $x > \alpha$, so gilt: $c_n < x$ ffa n

b) Ist $\alpha := \liminf c_n$ und $x < \alpha$, so gilt: $c_n > x$ ffa n

c) Ist $c_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\limsup c_n = 0$, so gilt $c_n \to 0$

Beweis.

b) Sei $\epsilon > 0$. $x := \epsilon \overset{a)}{\Rightarrow} -\epsilon < 0 \leq c_n < \epsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also $c_n \in U_\epsilon(0)$ ffa n.

a) Annahme: $c_n \geq x$ für unendlich viele n, etwa für $n_1, n_2, n_3, \ldots$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, Die Teilfolge (c_{n_k}) ist beschränkt $\overset{2.11}{\Longrightarrow}$ (c_{n_k}) enthält eine konvergente Teilfolge $(c_{n_{k_j}})$. $\beta := \lim_{j\to\infty} c_{n_{k_j}}$. Es ist $c_{n_{k_j}} \geq x$ $\forall j \Rightarrow \beta \geq x > \alpha$; $(c_{n_{k_j}})$ ist eine Teilfolge von $(c_n) \Rightarrow \beta \in H(a_n) \Rightarrow \beta \leq \alpha$, Widerspruch.

□

Proposition 3.6 (Wurzelkriterium (WK))**:** Sei (a_n) eine Folge, $c_n := \sqrt[n]{|a_n|}$.

a) Ist (c_n) unbeschränkt, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

b) Sei $(c_n$ beschränkt und $\alpha := \limsup_{n\to\infty} c_n$

   (i) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(ii) Ist $\alpha > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent

Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis.

a) (c_n) unbeschränkt $\Rightarrow c_n \geq 1$ für unendlich viele $n \Rightarrow |a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \Rightarrow a_n \not\to 0 \overset{3.1\ c)}{\Longrightarrow}$ Beh.

b) (i) Sei $\alpha < 1$, sei $x \in (\alpha, 1) \overset{Hilfssatz}{\Longrightarrow} c_n \leq x$ ffa n $\Rightarrow |a_n| \leq x^n$ ffa n. $\sum x^n$ konvergiert $\overset{3.5\ a)}{\Longrightarrow} \sum a_n$ konvergiert absolut

(ii) Sei $\alpha > 1$, wähle $\epsilon > 0$ so, dass $\alpha - \epsilon > 1$. Es gilt $c_n U_\epsilon(\alpha)$ für unendlich viele n. Dann: $c_n > \alpha - \epsilon > 1$ für unendlich viele n. Wie bei a): $\sum a_n$ divergiert

$\square$

Beispiele:

a) $a_n := \frac{1}{n}$; $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, also $\alpha = 1$ und $\sum a_n$ divergiert.

b) $a_n := \frac{1}{n^2}$; $c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$, also $\alpha = 1$ und $\sum a_n$ konvergiert.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n = 2k \\ nx^n, & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases}$

Frage: Wann ist $\sum a_n$ (abs.) konvergent? Es ist

$$c_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } n = 2k \\ \sqrt[n]{n}|x|, & \text{falls } n = 2k-1 \end{cases}$$

(c_n) ist also beschränkt, $H(c_n) = \left\{\frac{1}{2}, |x|\right\}$.

Fall 1: $|x| < 1$. Dann: $\alpha = \limsup c_n < 1$, also ist $\sum a_n$ absolut konvergent.
Fall 2: $|x| > 1$. Dann: $\alpha = \limsup c_n < 1$, also ist $\sum a_n$ divergent.
Fall 3: $|x| = 1$. Dann: $\alpha = \limsup c_n = 1$. Es ist $|a_n| = n$ falls $n = 2k-1$. Also: $a_n \not\to 0$. $\sum a_n$ ist also divergent.

Proposition 3.7 (Quotientenkriterium (QK))**:** Es sei $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ (n \in \mathbb{N})$.

a) Ist $c_n \geq 1$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum a_n$ divergent

b) Sei (c_n) beschränkt, $\alpha := \limsup c_n$ und $\beta := \liminf c_n$

 (i) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent

 (ii) Ist $\beta > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.

Folgerung 3.8: (a_n) und (c_n) seien wie in 3.7, (c_n) sei konvergent und $\alpha := \lim c_n$.

$$\sum a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konv.,} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \text{divergent,} & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases}$$

Im Falle $\alpha = 1$ ist keine allg. Aussage möglich.

Beispiele:

a) $a_n = \frac{1}{n}, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1, \sum a_n$ divergiert

b) $a_n = \frac{1}{n^2}, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1, \sum a_n$ konvergiert

Proposition 3.9 (Die Exponentialreihe)**:** Für $x \in \mathbb{R}$ betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Frage: für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe (absolut).
Klar, die Reihe konvergiert für $x = 0$. Sei $x \neq q$ und $a_n := \frac{x^n}{n!}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Aus 3.8 folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ konv. absolut für jedes } x \in \mathbb{R}$$

Damit ist auf $\mathbb{R}$ eine Funktion $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert:

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{Exponentialfunktion}$$

Es ist $E(0) = 1$, $E(1) \overset{\S 2}{=} e$.
Später zeigen wir: $E(r) = e^r$ für $r \in \mathbb{Q}$. Desweiteren definieren wir später $e^x := E(X)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann: $e^x = E(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Setze $b_n := a_{\varphi(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. also

$$b_1 = a_{\varphi(1)}, b_2 = a_{\varphi(2)}, \dots$$

Dann heißt (b_n) eine **Umordnung** von (a_n).

Beispiel: $(a_2, a_4, a_1 a_3, a_6, a_8, a_5, a_7, \dots)$ ist eine Umordnung von (a_n).

Satz 3.10: (b_n) sei eine Umordnung von (a_n).

a) Ist (a_n) konvergent, so ist (b_n) konvergent und $\lim b_n = \lim a_n$.

b) Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum b_n$ absolut konvergent und $\sum a_n = \sum b_n$

Beweis.

a) $a := \lim a_n$; Sei $\epsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \ \forall n \geq n_0$. Dann: $|a_{\varphi(n)} - a| < \epsilon$ ffa $n \in \mathbb{N}$.

b) ohne Beweis.

□

Bemerkung (ohne Beweis)**:** $\sum a_n$ sei konvergent, aber nicht absolut konvergent.

a) Ist $s \in \mathbb{R}$, so existiert eine Umordnung $\sum b_n$ von $\sum a_n$ mit: $\sum b_n$ ist konvergent und $\sum b_n = s$.

b) Es existiert eine Umordnung $\sum c_n$ von $\sum a_n$ mit: $\sum c_n$ ist divergent.

Definition: Gegeben seien die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
Setze für $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}, \text{ also:}$$
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das **Cauchyprodukt** (CP) von $\sum a_n$ und $\sum b_n$.

Satz 3.11 (ohne Beweis)**:** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent. Für ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gilt dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ ist absolut konvergent und } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$$

Beispiel: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$.
Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert absolut und $\sum_{k=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Also

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \overset{3.11}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$. Also:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1)$$

z.B.: $(x = \frac{1}{2}) : 4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n}$. Weiter:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

z.B.: $(x = \frac{1}{2}) : 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, also $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$

Proposition 3.12: $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$

a) $E(0) = 1, E(1) = e$

b) $E(x+y) = E(x)E(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

c) $E(x_1 + \ldots + x_m) = E(x_1) \cdot \ldots \cdot E(x_m) \; \forall x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$

d) $E(x) > 1 \; \forall x > 0$; $E(X) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$; $E(-x) = E(x)^{-1} \; \forall x \in \mathbb{R}$

e) $E(rx) = E(x)^r \; \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$

f) $E(r) = e^r \; \forall r \in \mathbb{Q}$

g) E ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt stets $E(x) < E(y)$

Beweis. a) klar.

b) $E(x)E(y) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}) \overset{3.11}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k} \overset{\S 1}{=} \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

Also: $E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y)$

c) folgt aus b)

d) Für $x > 0$: $E(x) = 1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}_{>0} > 1$

$1 = E\left(x + (-x)\right) \overset{b)}{=} E(x)E(-x) \; \forall x \in \mathbb{R}$; Insb.: $E(x) > 0$ $(x < 0)$ und $E(-x) = E(x)^{-1}$.

e) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$:

$$E(nx) = E(x + \ldots + x) \overset{c)}{=} E(x)^n$$

$E(x) = (En(\frac{x}{n}) = E(\frac{x}{n})^n$, also $E(\frac{1}{n}x) = E(x)^{\frac{1}{n}}$.
Für $m, n \in \mathbb{N}$: $E(\frac{m}{n}x) = E(m\frac{x}{n}) = E(\frac{x}{n})^m = (E(x)^{\frac{1}{n}})^m = E(x)^{\frac{m}{b}}$ Also $E(rx) = E(x)^r \; \forall r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$. Sei $r \in Q$ und $r < 0$. Dann: $-r > 0$, also

$$\underbrace{E(-rx)}_{\overset{d)}{=} \frac{1}{E(rx)}} = e(x)^{-r} = \frac{1}{E(x)^r}$$

Also $E(rx) = E(x)^r$

f) folgt aus d) mit $x = 1$.

g) Sei $x < y \Rightarrow y - x > 0 \overset{d)}{\Rightarrow} E(y-x) > 1$

$$\Rightarrow 1 < E(y-x) \overset{b)}{=} E(y)E(-x) \overset{d)}{=} \frac{E(y)}{E(x)} \overset{d)}{\Rightarrow} E(x) < E(y)$$

$\square$

4 Potenzreihen

Definition: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei eine Folge in $\mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

heißt **Potenzreihe** (PR).

Frage: für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe (absolut)? Klar: die Potenzreihe konvergiert absolut für $x = x_0$.

Beispiele:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Hier: $a_n = \frac{1}{n!}, x_0 = 0$. Bekannt: die Potenzreihe konvergiert absolut in jeden $x \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n$. Hier: $a_n = 1$. Setze $q := x - x_0$. Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert absolut $\iff |q| < 1$. D.g. die Potenzreihe konvergiert absolut $\iff |x-x_0| < 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n(x-x_0)^n$. Hier: $a_n = n^n$. Sei $x \neq x_0$ und $b_n := n^n(x-x_0)^n$; $\sqrt[n]{|b_n|} = n|x-x_0| \xRightarrow{x \neq x_0} \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right)$ ist unbeschränkt $\overset{3.6}{\Longrightarrow} \sum n^n(x-x_0)^n$ ist divergent.
Also: $\sum_{n=0}^{\infty} n^n(x-x_0)^n$ konvergiert nur für $x = x_0$.

Definition: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe. Setze

$$\rho := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right) \text{ unbeschränkt;} \\ \limsup \sqrt[n]{|b_n|}, & \text{falls } \left(\sqrt[n]{|b_n|}\right) \text{ beschränkt} \end{cases}$$

und

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } \rho \in (0, \infty) \end{cases}$$

(kurz: „$r = \frac{1}{\rho}$“). r heißt der **Konvergenzradius** (KR) der Potenzreihe.

Satz 4.1: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sei eine Potenzreihe und ρ und r seien wie oben.

a) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = x_0$.

b) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

c) Ist $r \in (0, \infty)$, so konvergiert die Potenzreihe absolut für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$, sie divergiert für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$. Für $x = x_0 \pm r$ ist keine allg. Aussage möglich.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $b_n := a_n(x-x_0)^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Damit: $\sqrt[n]{|b_n(x)|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0|$

a) Sei $x \neq x_0$. $r = 0 \iff \rho = 0 \iff \left(\sqrt[n]{|b_n(x)|}\right)$ unbeschränkt $\overset{3.6}{\Longrightarrow}$ $\sum b_n(x)$ divergiert.

b) $r = \infty \iff \rho = 0 \iff \limsup \sqrt[n]{|b_n(x)|} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \overset{3.6}{\Longrightarrow}$ Beh.

c) $\limsup \sqrt[b]{|b_n(x)|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \rho|x - x_0| = \frac{1}{r}|x - x_0| < 1$

$$\iff |x - x| < r$$

Analog für $|x - x| > r$. Behauptung folgt aus 3.6.

$\square$

Folgerung: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Beweis. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$; $a_n = \frac{1}{n!} \overset{4.1}{\Longrightarrow} \rho = 0$, also $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ Hilfssatz vor 3.6 $\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. $\square$

Beispiele:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $x_0 = 1$; $\rho = 1, r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert für $|x| <$ absolut; sie divergiert für $|x| > 1$. $|x| = 1$: die Potenzreihe divergiert.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, $x_0 = 0$; $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$ und sie divergiert für $|x| > 1$. $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert; $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert.

c) $\sum \frac{x^n}{n^2}$; $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$, $x_0 = 0$; $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow r = 1$. Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x| < 1$, sie divergiert für $|x| > 1$. $x = 1$: $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut; $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert absolut.

Proposition 4.2 (Cosinus)**:** Betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

hier: $x_0 = 0, a_{2n+1} = 0, a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ folgt

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}} \to 0 \quad \text{Folgerung nach 4.1}$$

Also $H(\sqrt[n]{|a_n|}) = \{0\}$. Also: $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \overset{4.1}{\Longrightarrow}$ obige Potenzreihe hat den Konvergenzradius $r = \infty$, konvergiert also absolut in jedem $x \in \mathbb{R}$

$$\textbf{Cosinus:} \begin{cases} \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \cos x := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

Proposition 4.3 (Sinus)**:** Ähnlich wie bei 4.2 sieht man: die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \dots$$

konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

$$\textbf{Sinus:} \begin{cases} \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \sin x := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$$

Klar: $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ähnlich wie in 3.12 zeigt man (mit Cauchyprodukt) die **Additiostheoreme** $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$:

$$1 = \cos(0) = \cos(x + (-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\cos^2 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, also $|\cos x| \leq 1$ und $sin^2 x \leq cos^2 x + \sin^2 x = 1$, also $|\sin x| \leq 1$.

Satz 4.4: Es ist $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$, die Folge $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)$ sei konvergent und $L := \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ den Konvergenzradius L.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ und $b_n := a_n(x - x_0)^n$. Dann:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x - x_0| \tag{$*$}$$

Fall 1: $L = 0$. $|x - x_0| > 0 \Rightarrow \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq |x - x_0|$ ffa n

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \geq \text{ ffa } n \overset{3.7}{\Longrightarrow} \sum b_n \text{ divergiert}$$

Die Potenzreihe konvergiert also nur für $x = x_0$, also $r = 0 = L$.
Fall 2: $L > 0$. $\overset{(*)}{\Longrightarrow} \lim \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{L}|x - x_0|$

$$\overset{3.8}{\Longrightarrow} \begin{cases} \text{Die Potenzreihe konv. absolut für } |x - x_0| < L \\ \text{Die Potenzreihe divergiert für } |x - x_0| > L \end{cases}$$

$\overset{4.1}{\Longrightarrow} r = L.$ □

5 q-adische Entwicklung

Definition: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$: $k \leq x < k+1$;

$$[x] := k = \text{ größte ganze Zahl } \leq x$$

Vereinbarung: In diesem § sei stets $a \geq 0, q \in \mathbb{N}$ und $q > 1$.

Setze $z_0 := [a]$, dann: $z_0 \leq a < z_0 + 1$.
Setze $z_1 := [(a - z_0)q]$, dann: $z_1 \leq aq - z_0 q < z_1 + 1$.
Also

$$z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{1}{q}$$

Es ist $z_1 \in \mathbb{N}_0$: Annahme: $z_1 \geq 1 \Rightarrow \frac{z_1}{q} \geq 1$

$$\Rightarrow z_0 + 1 \leq z_0 + \frac{z_1}{q} \leq a < z_0 + 1$$

Widerspruch! Also: $z_1 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.
Setze $z_2 := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2]$, dann (wie oben)

$$z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{q} + \frac{z_2}{q^2} + \frac{1}{q^2}$$

und $z_2 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.
Allgemein (induktiv): sind $z_0, \ldots, z_n$ schon definiert, so setze

$$z_{n+1} := [(a - z_0 - \frac{z_1}{q} - \ldots - \frac{z_n}{q^n})q^{n+1}]$$

Wir erhalten so eine Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ mit:

$$(*) \begin{cases} z_0 \in \mathbb{N}_0, z_n \in \{0, 1, \ldots, q-1\} \ \forall n \geq 1 \\ \text{und} \\ \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \ldots + \frac{z_n}{q^n}}_{=:S_n} \leq a < \underbrace{z_0 + \frac{z_1}{q} + \ldots + \frac{z_n}{q^n} + \frac{1}{q^n}}_{=S_n + \frac{1}{q^n}} \end{cases}$$

In den großen Übungen wird gezeigt:

Satz 5.1: Ist $(\tilde{z}_n)_0^\infty$ eine weitere Folge mit den Eigenschaften in $(*)$, so gilt:

$$z_n = \tilde{z}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Es ist

$$0 \leq \frac{z_n}{q^n} \leq \frac{q-1}{q^n}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q-1}{q^n} \text{ konvergiert.}$$

$\overset{3.5\ a)}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{z_n} q^n$ konvergiert. Also ist (s_n) konvergent.

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} a = \lim s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n}$$

Dafür schreibt man: $a = z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ (**q-adische Entwicklung von** a)

$q = 10$: Dezimalentwicklung; $q = 2$: Dualentwciklung;
(Gilt mit einem $m \in \mathbb{N}$: $z_n = 0\ \forall n > m$, so schreibt man auch: $a = z_0, z_1 \ldots z_m$).

Beispiele:

a) $q = 10, a = 1.\ z_0 = 1, z_1 = [(a - z_0)q] = 0;$
$z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = 0, \ldots$ allg: $z_n = 0\ \forall n \geq 1$.
Also $1 = 1,000\ldots$

b) $q = 10, a = \frac{1}{2}.\ z_0 = 0, z_1 = [(a - z_0)q] = [\frac{1}{2}10] = 5;$
$z_2 = [(a - z_0 - \frac{z_1}{q})q^2] = [(\frac{1}{2} - \frac{5}{10})100] = 0, \ldots$ allg.: $z_n = 0\ \forall n \geq 2$.
Also $\frac{1}{2} = 0,5000\ldots = 0,5$

Definition: Sei $b \in \mathbb{R}$ und $b <=$. Weiter sei

$$-b = z_0, z_1 z_2 \ldots$$

die q-adische Entwicklung von $-b$. Dann ist $b = -z_0, z_1 z_2 \ldots$ die q-adische Entwicklung von b.

Satz 5.2: Sei $a = z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ die q-adische Entwicklung von a. Dan ist $z_n = q-$ ffa $n \in \mathbb{N}$ nicht möglich.

Beweis. Annahme: $\exists m \in \mathbb{N}$: $z_n = q-1\ \forall n \geq m$. Dann

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{q^n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{q^n}}_{=S_{m-1}} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^n}$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{q-1}{q^m} = (q-1)\left(\frac{1}{q^m} + \frac{1}{q^{m+1}} + \dots\right) = \frac{q-1}{q^m}(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\dots) = \frac{q-1}{q^m}\frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \frac{1}{q^{m-1}}$$

Also $a = S_{m-1} + \frac{1}{q^{m-1}} \overset{(*)}{>} a$, Widerspruch! $\square$

Satz 5.3: $\mathbb{R}$ ist überazählbar.

Beweis. es genügt zu zeigen: $[0,1)$ ist überabzählbar. Annahme $[0,1)$ abzählbar, also $[0,1) = \{a_1, a_2, \dots\}$. Für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$$

die 3-adische Entwicklung von a_j, also $z_k^{(j)} \in \{0,1,2\}$. Setze

$$z_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } z_k^{(k)} = 0 \text{ oder } z_k^{(k)} = 2 \\ 0, & \text{falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

Dann: $z_k \neq z_k^k\ \forall k \in \mathbb{N}$ $(**)$
Setze $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n}$. Dann:

$$0 \leq a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}, \text{ also } a \in [0,1)$$

Übung: $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ ist die 3-adische Entwicklung von $a.a \in [0,1) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}:$ $a = a_m$, also

$$0, z_1 z_2 z_3 \dots = 0, z_1^{(m)} z_2^{(m)} \dots$$

und $z_j = z_j^{(m)}\ \forall j \in \mathbb{N} \overset{j=m}{\Longrightarrow} z_m = z_m^{(m)}$. Widerspruch zu $(**)$. $\square$

6 Grenzwerte bei Funktionen

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von $D \iff \exists$ Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$.

Beispiele: a) $D = (0, 1]$
x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff x_0 \in [01]$

b) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
D hat genau einen Häufungspunkt: $x_0 = 0$.

c) Ist D endlich, so hat D keine Häufungspunkte.

Hilfssatz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 ist Häufungspunkt von $D \iff \forall \epsilon > 0 :$ $U_\epsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Beweis.
“ $\Rightarrow$ “” $\exists$ Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\} : x_n \to x_0$. Sei $\epsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})\ \forall n \geq n_0$
“ $\Leftarrow$ “” $\exists x_1 \in U_1(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$, also $|x_1 - x_0| < 1$ $\exists x_2 \in U_{\frac{1}{2}}(x_0 \cap (D \setminus \{x_0\})$, also $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$, etc.
Wir erhalten eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}\ \forall n$, also $x_n \to x_0$. □

Vereinbarung: ab jetzt sei stets in den §en:

- $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, x_0$ ein Häufungspunkt von D und
- $f \coloneqq D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

Bezeichnung:

a) $D_\delta(x_0) \coloneqq U_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$

b) Sei $M \subseteq D$ und $g \colon D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion mit $f \leq g$ auf $M \iff f(x) \leq g(x)\ \forall x \in M$.

Definition: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert $\iff \exists a \in \mathbb{R}$: für jede Folge (x_n) in $D \in \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to a$. In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt und wir schreiben:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ oder } f(x) \to a\ (x \to x_0)$$

Bemerkung: sollte $x_0 \in D$ sein, so ist der Wert $f(x_0)$ in obiger Definition nicht relevant. Relevant ist allein das Verfahren von f in das „Nähe“ von x_0.

Beispiele:

a) $D := [0, \infty), p \in \mathbb{N}; f(x) := \sqrt[p]{x}$. Sei $x_0 \in D$ (dann ist x_0 eine Häufungspunkt von D). Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ und $x_n \to x_0 \overset{2.4}{\Longrightarrow} \sqrt[p]{x_n} \to \sqrt[p]{x_0}$. Also

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sqrt[p]{x_0}$$

b) $D = (0, 1]$

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Klar: $\lim_{x \to 0} f(x), \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

$$x_n := \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, z_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \; (n \geq 3)$$

Dann: $x_n \to \frac{1}{2}, z_n \to \frac{1}{2}$, aber $f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{4} \neq 1 \leftarrow f(z_n)$.
D.h. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ existiert nicht, aber $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x \in (0, \frac{1}{2})}} f(x) = \frac{1}{4}$, dafür schreibt man $\lim_{x \to \frac{1}{2} - 0} f(x) = \frac{1}{4}$ (linksseitiger Grenzwert)
Analog: $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x \in (\frac{1}{2}, \infty)}} f(x) = 1$ (rechtsseitiger Grenzwert)

c) $D = \mathbb{R}$, $f = E$, also $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; x_0 = 0$. Sei $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} |E(x) - E(0)| = |E(x) - 1| &= |x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots| \\ &= |x| \left| 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right| \\ &\leq |x| \left(1 + \frac{|x|}{2!} + \frac{|x|^2}{3!} + \dots \right) \leq |x| \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) \\ &= |x|(e - 1) \end{aligned}$$

Sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}$: $x_n \to 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_n| \leq 1 \; \forall n \geq n_0 \Rightarrow |E(x_n) - | \leq |x_n|(e-1) \; \forall n \geq n_0 \Rightarrow E(x_n) \to 1$
Also: $\lim_{x\to 0} E(x) = 1 = E(0)$. Somit: $\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x\to 0} \frac{x1n}{n!} \right)$.

Satz 6.1: a

Stichwortverzeichnis