Höhere Mathematik II

G. Herzog, Ch. Schmoeger

Sommersemester 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 15

Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

Definition: *Es sei* $\left(a^{(k)}\right)$ *eine Folge im* $\mathbb{R}^n$*, also* $\left(a^{(k)}\right) = \left(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \dots\right)$ *mit* $a^{(k)} = \left(a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$.

a) $\left(a^{(k)}\right)$ *heißt* ***beschränkt*** $:\iff \exists c \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N} : \left\|a^{(k)}\right\| \leq c$.

b) *Der Begriff* ***Teilfolge*** *(TF) wird wie in HMI definiert.*

c) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *heißt ein* ***Häufungswert*** *(HW) von* $\left(a^{(k)}\right) :\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 : a^{(k)} \in U_\varepsilon(x_0) \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}.$$

d) $\left(a^{(k)}\right)$ *heißt* ***konvergent*** $:\iff$

$$\exists a \in \mathbb{R}^n : \ \left\|a^{(k)} - a\right\| \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

In diesem Fall heißt a *der* ***Grenzwert*** *(GW) oder* ***Limes*** *von* $\left(a^{(k)}\right)$ *und man schreibt*

$$a = \lim_{k \to \infty} a^{(k)} \text{ oder } a^{(k)} \longrightarrow a\ (k \to \infty) \text{ oder } a^{(k)} \longrightarrow a.$$

Wie in HMI zeigt man: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

e) *Ist* $\left(a^{(k)}\right)$ *nicht konvergent, so heißt* $\left(a^{(k)}\right)$ ***divergent***.

Beachte:

$$\begin{aligned} & a^{(k)} \longrightarrow a \quad (k \to \infty) \\ \iff & \forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : \left\|a^{(k)} - a\right\| < \varepsilon \\ \iff & \forall \varepsilon > 0 : \ a^{(k)} \in U_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beispiel: Es sei $a^{(k)} := \left(\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right)$ $(k \in \mathbb{N})$ und $a := (0,1)$. Es gilt:

$$\left\|a^{(k)} - a\right\| = \left\|\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\| = \left(\frac{2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{k} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

Also gilt: $a^{(k)} \longrightarrow (0,1)$ $(k \to \infty)$.

Vereinbarung: Für Elemente des $\mathbb{R}^2$ schreiben wir meist (x,y) statt (x_1,x_2) und im $\mathbb{R}^3$ meist (x,y,z) statt (x_1,x_2,x_3).

Satz 15.1: *Es sei $\left(a^{(k)}\right)$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$, $a^{(k)} = \left(a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right)$. Dann gilt:*

a) Ist $\left(a^{(k)}\right)$ konvergent, so ist $\left(a^{(k)}\right)$ beschränkt und jede Teilfolge von $\left(a^{(k)}\right)$ konvergiert gegen $\lim_{k\to\infty} a^{(k)}$.

b) Ist $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$a^{(k)} \longrightarrow a \ (k \to \infty) \iff \forall j \in \{1, \ldots, n\} : \ a_j^{(k)} \longrightarrow a_j \ (k \to \infty).$$

c) Ist $\left(b^{(k)}\right)$ eine weitere Folge im $\mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, (β_k) eine Folge in $\mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ und gilt $a^{(k)} \longrightarrow a$, $b^{(k)} \longrightarrow b$ und $\beta_k \longrightarrow \beta$, so gilt:

(i) $a^{(k)} + b^{(k)} \longrightarrow a + b$,

(ii) $\beta_k a^{(k)} \longrightarrow \beta a$,

(iii) $a^{(k)} \cdot b^{(k)} \longrightarrow a \cdot b$,

(iv) $\left\|a^{(k)}\right\| \longrightarrow \|a\|$.

*d) **Cauchykriterium**:*

$$\left(a^{(k)}\right) \text{ ist konvergent} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k, l \geq k_0 : \left\|a^{(k)} - a^{(l)}\right\| < \varepsilon.$$

*e) **Bolzano-Weierstraß**: Ist $\left(a^{(k)}\right)$ beschränkt, so enthält $\left(a^{(k)}\right)$ eine konvergente Teilfolge.*

Beweis:

a) Wie in HMI.

b) Es sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Nach 14.1 h) gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ \left|a_j^{(k)} - a_j\right| \leq \left\|a^{(k)} - a\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^{(k)} - a_i\right|.$$

Damit folgt die Behauptung.

c) Folgt aus b).

d) „$\Rightarrow$" Wie in HMI. „$\Leftarrow$" Übung (mit b) und 14.1 h)).

e) Der Übersicht wegen sei $n = 2$, also $a^{(k)} = (x_k, y_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Es gilt

$$|x_k| \leq \left\|a^{(k)}\right\|, \ |y_k| \leq \left\|a^{(k)}\right\| \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Also sind (x_k) und (y_k) beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Nach 2.12 enthält (x_k) eine konvergente Teilfolge (x_{k_j}). Die Folge (y_{k_j}) ist beschränkt. Nach 2.12 enthält (y_{k_j}) eine konvergente Teilfolge $(y_{k_{j_l}})$. Dann ist auch $(x_{k_{j_l}})$ konvergent.
Mit b) folgt: $\left(a^{(k_{j_l})}\right)$ ist konvergent.

$\square$

Definition: *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein* ***Häufungspunkt*** *(HP) von A $:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Folge $\left(a^{(k)}\right)$ in $A \setminus \{x_0\}$ mit $a^{(k)} \to x_0$ $(k \to \infty)$.*

Beispiele:

a) x_0 ist Häufungspunkt von $U_1(0) \iff x_0 \in \overline{U_1(0)}$.

b) 0 ist Häufungspunkt von $U_1(0) \setminus \{0\}$.

c) Endliche Mengen haben keine Häufungspunkte.

Satz 15.2: *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen.

(ii) Für jede konvergente Folge $\left(a^{(k)}\right)$ in A gilt: $\lim_{k\to\infty} a^{(k)} \in A$.

(iii) Jeder Häufungspunkt von A gehört zu A.

b) A ist kompakt $\iff$ Jede Folge in A enthält eine konvergente Teilfolge deren Grenzwert zu A gehört.

Ohne Beweis.

Kapitel 16

Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

In diesem Kapitel seien stets $n, m \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine (vektorwertige) Funktion. Mit $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ hat f die Darstellung:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

mit $f_j\colon D \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$. Kurz: $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Beispiel: $n = 2$, $m = 3$, $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xy, x + y, xe^y)$. Also $f = (f_1, f_2, f_3)$ mit

$$f_1(x, y) = xy, \quad f_2(x, y) = x + y, \quad f_3(x, y) = xe^y.$$

Veranschaulichung möglich im Fall $m = 1$ (reellwertige Funktionen), und

a) $n = 1$ (bekannt),

b) $n = 2$.

Definition: *Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von D und $y_0 \in \mathbb{R}^m$.*
$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 :\Longleftrightarrow$ *Für jede Folge $\left(x^{(k)}\right)$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x^{(k)} \to x_0$ $(k \to \infty)$ gilt:* $f\left(x^{(k)}\right) \to y_0$ $(k \to \infty)$.
In diesem Fall schreiben wir auch: $f(x) \to y_0$ $(x \to x_0)$.

Beispiel: Es sei $f = (f_1, f_2, f_3)$ wie in obigem Beispiel. Es sei $((x_k, y_k))$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_k, y_k) \to (1, 1)$. Nach 15.1 gilt dann $x_k \to 1$, $y_k \to 1$, also

$$f_1(x_k, y_k) = x_k y_k \to 1, \;\; f_2(x_k, y_k) = x_k + y_k \to 2, \;\; f_3(x_k, y_k) = x_k e^{y_k} \to e.$$

Mit 15.1 folgt: $f(x_k, y_k) \to (1, 2, e)$. Also: $\lim_{(x,y) \to (1,1)} f(x, y) = (1, 2, e)$.

Beispiel 16.1: $m = 1$, $D = \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Es gilt

$$\left(\frac{1}{k}, 0\right) \to (0,0),\ f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 0 \to 0,$$
$$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0),\ f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Damit folgt: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.

Satz 16.2: *Es sei x_0 ein Häufungspunkt von $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$ und $h\colon D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen. Es seien $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^m$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.*

a) Ist $f = (f_1, \ldots, f_m)$ und $y_0 = (y_1, \ldots, y_m)$, so gilt:

$$f(x) \to y_0\ (x \to x_0) \iff \forall j \in \{1, \ldots, m\}:\ f_j(x) \to y_j\ (x \to x_0).$$

b) Es gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\setminus\{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\| < \varepsilon.$$

c) Es gelte $f(x) \to y_0$, $g(x) \to z_0$ und $h(x) \to \alpha$ $(x \to x_0)$. Dann gilt:

(i) $f(x) \otimes g(x) \to y_0 \otimes z_0$ $(x \to x_0)$, wobei $\otimes \in \{+, -, \cdot\}$ („$\cdot$“ Skalarprodukt);

(ii) $h(x)f(x) \to \alpha y_0$ $(x \to x_0)$;

(iii) $\|f(x)\| \to \|y_0\|$ $(x \to x_0)$;

(iv) Ist $\alpha \neq 0$ und $h(x) \neq 0$ $(x \in D)$, so gilt:

$$\frac{1}{h(x)} \to \frac{1}{\alpha} \quad (x \to x_0).$$

Beweis: a) folgt aus 15.1. Den Rest beweist man wie in HMI mit $\|\cdot\|$ statt $|\cdot|$. $\square$

Definition:

*a) f heißt in $x_0 \in D$ **stetig** $:\Longleftrightarrow$ Für jede Folge $\left(x^{(k)}\right)$ in D mit $x^{(k)} \to x_0$ gilt:*

$$f\left(x^{(k)}\right) \to f\left(x_0\right).$$

*b) f heißt **auf** D **stetig** $:\Longleftrightarrow$ f ist in jedem $x \in D$ stetig. In diesem Fall schreiben wir: $f \in C\left(D, \mathbb{R}^m\right)$.*

Beispiel 16.3: f sei wie in 16.1. Es gilt:

$$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0), \quad f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} \neq 0 = f\left(0,0\right).$$

Also ist f in $(0,0)$ nicht stetig. Aber: Ist $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so ist f in (x_0, y_0) stetig.

Satz 16.4: *Es sei $x_0 \in D$ und $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$ und $h\colon D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen.*

a) $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ist in x_0 stetig $\Longleftrightarrow$ $\forall j \in \{1, \ldots, m\} : f_j$ ist in x_0 stetig $\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D: \ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

b) Ist x_0 Häufungspunkt von D, so gilt:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

c) f, g und h seien stetig in x_0. Dann sind stetig in x_0:

(i) $f \otimes g$, wobei $\otimes \in \{+, -, \cdot\}$;

(ii) hf, $x \mapsto \|f(x)\|$;

(iii) $\frac{1}{h}$ (falls $h(x) \neq 0$ $(x \in D)$).

d) $C\left(D, \mathbb{R}^m\right)$ ist ein reeller Vektorraum.

Beweis: 15.1 bzw. wie in HMI. □

Definition: *f heißt **auf** D **beschränkt** $:\Longleftrightarrow$ $\exists M \geq 0\ \forall x \in D$: $\|f(x)\| \leq M$.*

Wie in HMI zeigt man:

Satz 16.5:

a) Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ *in* $x_0 \in D$ *stetig,* $E \subseteq \mathbb{R}^m$*,* $f(D) \subseteq E$ *und es sei* $g\colon E \to \mathbb{R}^p$ *stetig in* $f(x_0)$*. Dann ist*

$$g \circ f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

stetig in x_0*.*

b) Es sei D *kompakt und* $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$*. Dann gilt:*

(i) $f(D)$ *ist kompakt, insbesondere ist* f *beschränkt.*

(ii) Ist $m = 1$*, so existieren* $x_1, x_2 \in D$ *mit*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad (x \in D).$$

Satz 16.6: *Es sei* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linear. Dann gilt:*

$$f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Beweis: Es existiert eine reelle $m \times n$-Matrix A mit $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \overset{\S 14}{\le} \|A\|\|x - x_0\|$$

Also: $f(x) \to f(x_0)$ ($x \to x_0$). $\square$

Beispiel: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

Kapitel 17

Analysis in $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind Vektorräume über $\mathbb{R}$ der Dimension 2. Sie unterscheiden sich also nur durch die Bezeichnung ihrer Elemente:

$$z = x + iy \in \mathbb{C},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Beachtet man noch

$$|z| = |x + iy| = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(x, y)\|,$$

so sieht man: Alle aus der Addition, der Skalarmultiplikation und der Norm entwickelten Begriffe und Sätze der Kapitel 14-16 gelten in $\mathbb{C}$. Zum Beispiel:

Konvergenz von Folgen: Es sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:
$z_n \to z_0 \iff |z_n - z_0| \to 0 \iff \operatorname{Re}(z_n) \to \operatorname{Re}(z_0)$ und $\operatorname{Im}(z_n) \to \operatorname{Im}(z_0)$.

Zu den Sätzen in §15 kommt hinzu:

Satz 17.1: *Es seien (z_n) und (w_n) Folgen in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to z_0$ und $w_n \to w_0$. Dann gilt:*

a) $z_n w_n \to z_0 w_0$.

b) Ist $z_0 \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $z_n \neq 0$ $(n \geq n_0)$ und $\frac{1}{z_n} \longrightarrow \frac{1}{z_0}$.

Beweis: Wie in $\mathbb{R}$. □

Beispiel: Sei $w \in \mathbb{C}$ und $z_n := w^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist $|z_n| = |w|^n$ $(n \in \mathbb{N})$ und es gilt:

a) Ist $|w| < 1$, so gilt: $z_n \longrightarrow 0$.

b) Ist $|w| > 1$, so gilt (z_n) ist divergent.

c) Im Falle $|w| = 1$ gilt:

$w = 1$: (z_n) ist konvergent.

$w \neq 1$: (z_n) ist divergent.

Z.B. $w = i$: $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$, $z_4 = 1$, $z_5 = i$, $\ldots$.

Unendliche Reihen: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $s_n := a_1 + \ldots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Die Folge (s_n) heißt eine **unendliche Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent** (**divergent**) $:\iff$ (s_n) ist konvergent (divergent).

b) Im Konvergenzfall heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n$ der **Reihenwert**.

Die Definitionen und Sätze aus HMI, §3 gelten wörtlich auch in $\mathbb{C}$, bis auf diejenigen Definitionen und Sätze in denen die Anordnung auf $\mathbb{R}$ eine Rolle spielt (z.B.: Monotoniekriterium, Leibnizkriterium).

Beispiele:

a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ heißt **geometrische Reihe**.

(i) Es sei $|z| < 1$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ konvergent, also ist $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ absolut konvergent und somit konvergent. Wie in HMI gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ $(|z| < 1)$.
Ist z.B. $z = \frac{i}{2}$, so ist $|z| = \frac{1}{2} < 1$. Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$ konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{2-i} = \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i}{5} = \frac{4}{5} + i\frac{2}{5}.$$

(ii) Es sei $|z| \geq 1$. Dann gilt $|z|^n \not\to 0$, also $z^n \not\to 0$. Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ divergent.

b) Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \text{ ist konvergent (und } = e^{|z|}).$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut in jedem $z \in \mathbb{C}$.

c) Wie in Beispiel b) zeigt man: Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

konvergieren absolut in jedem $z \in \mathbb{C}$.

Beispiel 17.2: Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Erinnerung (HMI, §12):

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

Es gilt $|e^z| = e^x$. Also ist

$$|e^z| < 1 \iff x < 0 \iff \mathrm{Re}(z) < 0.$$

Somit gilt: Ist $\mathrm{Re}(z) < 0$, so konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^z)^n$$

absolut und

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz} = \frac{1}{1 - e^z}.$$

Potenzreihen: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

heißt eine **Potenzreihe** (PR). Es sei $\rho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (also $\rho = \infty$, falls $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ unbeschränkt). Wie in HMI heißt dann

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \text{falls } 0 < \rho < \infty \end{cases}$$

der **Konvergenzradius** (KR) der Potenzreihe.

Wie im Beweis von 4.1 und 7.4 aus HMI zeigt man:

Satz 17.3: *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann gilt:*

a) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $z = z_0$.

b) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut.

c) *Ist* $0 < r < \infty$*, so konvergiert die Potenzreihe absolut in jedem* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| < r$ *und sie divergiert für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| > r$*. Für* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| = r$ *ist keine allgemeine Aussage möglich.*

d) *Es sei* $r > 0$ *und* $D := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ *(*$D := \mathbb{C}$ *falls* $r = \infty$*). Für* $z \in D$ *sei*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dann ist f *auf* D *stetig.*

Beispiele:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.

b) Die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

haben jeweils den Konvergenzradius $r = \infty$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Es gilt für $|z| < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \frac{1}{1-(-z^2)} = \frac{1}{1+z^2}$.

Erinnerung: Für $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ hatten wir definiert:

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y), \; \cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \; \sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Satz 17.4:

a) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \; \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

b) *Die Funktionen* e^z, $\cos z$, $\sin z$ *sind auf* $\mathbb{C}$ *stetig.*

Beweis:

a) Ohne Beweis.

b) Folgt aus a) und 17.3 *d)*.

$\square$

Fourierreihen im Komplexen

Definition: *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit*

$$u := \operatorname{Re} f : [a, b] \to \mathbb{R}, \;\; v := \operatorname{Im} f : [a, b] \to \mathbb{R},$$

es ist also $f(x) = u(x) + iv(x)$ $(x \in [a, b])$. Sind $u, v \in R([a, b], \mathbb{R})$ so schreiben wir $f \in R([a, b], \mathbb{C})$ und definieren

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx.$$

Bemerkung: Sind $f, g \in R([a, b], \mathbb{C})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so gilt:

a) $\alpha f + \beta g \in R([a, b], \mathbb{C})$, $fg \in R([a, b], \mathbb{C})$ und

b) $\int_a^b \alpha f + \beta g dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$.

Definition: *Sei $f \in R([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Dann heißen die Zahlen*

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

*die **komplexen Fourierkoeffizienten** (FK) von f und*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

*heißt die zu f gehörende **komplexe Fourierreihe** (FR).*
Schreibweise: $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

Bemerkung: Obige Definition läßt auch den Fall $f(-\pi) \neq f(\pi)$ zu. Für die Definition von Fourierkoeffizienten unf Fourierreihen muß weder im reellen noch im komplexen Fall davon ausgegangen werden, daß f auf $\mathbb{R}$ zu einer 2π-periodischen Funktion fortgesetzt werden kann.

Es sei $f \in R([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ und a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$, b_n $(n \in \mathbb{N})$ die zugehörigen Fourierkoeffizienten (wie in §13). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos(nx) - i\sin(nx)\right)dx = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \ \ (n \in \mathbb{N}),\\
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0,\\
c_{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos(nx) + i\sin(nx)\right)dx = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) \ \ (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Also gilt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx}\right).$$

Wegen

$$\begin{aligned}
c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx} &= \cos(kx)\left(c_k + c_{-k}\right) + i\sin(kx)\left(c_k - c_{-k}\right)\\
&= a_k\cos(kx) + i(-ib_k)\sin(kx)\\
&= a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)
\end{aligned}$$

folgt

$$(*) \qquad \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)).$$

Im Rahmen von Fourierreihen definieren wir:

Definition: *Es seien $c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$ und $x \in \mathbb{R}$.*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \textit{ konvergiert } :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \textit{ existiert (und ist} \in \mathbb{C}\textit{)}.$$

Bemerkung: Ist $f \in R([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$, so gilt also wegen $(*)$:
Die komplexe FR von f konvergiert in x $\iff$ Die reelle FR von f konvergiert in x.

Kapitel 18

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (reellwertige Funktionen)

Beispiele:

a) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei $f(x, y) = x^2y^2$. Fasst man (vorübergehend) y als Konstante auf, so kann man den Ausdruck x^2y^2 nach x differenzieren. Diese Ableitung wird mit $f_x(x, y)$ oder mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ bezeichnet. Also:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2.$$

Zum Beispiel: $f_x(1, 2) = 2 \cdot 1 \cdot 2^2 = 8$.
Entsprechend fasst man x als Konstante auf und differenziert nach y:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y.$$

Zum Beispiel: $f_y(1, 2) = 4$.

b) Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sei $f(x, y, z) = xz + e^{xyz}$. Fasst man y und z als Konstanten auf und differenziert man nach x, so erhält man:

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z + yze^{xyz}.$$

Entsprechend:

$$f_y(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xze^{xyz},$$
$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x + xye^{xyz}.$$

Vereinbarung: In diesem Kapitel sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition: *Es sei* $x_0 = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in D$ *und* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Weiter bezeichne*

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

den i-ten Einheitsvektor. Dann gilt

$$x_0 + te_i = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i + t, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n).$$

f *heißt* ***in*** x_0 ***partiell differenzierbar*** *(pdb)* ***nach*** $x_i :\Longleftrightarrow$ *Es existiert der Grenzwert*

$$f_{x_i}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall heißt $f_{x_i}(x_0)$ *die* ***partielle Ableitung von*** f ***in*** x_0 ***nach*** x_i.

Beispiele:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Wir betrachten $x_0 = (0,0)$.
Es gilt $x_0 + te_1 = (t, 0)$.

$$\frac{f(x_0 + te_1) - f(x_0)}{t} = \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \to 0 \quad (t \to 0).$$

Somit ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar nach x und $f_x(0,0) = 0$.
Weiter gilt $x_0 + te_2 = (0, t)$.

$$\frac{f(x_0 + t_1 e_2) - f(x_0)}{t} = \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0 \longrightarrow 0 \quad (t \to 0).$$

Also ist f ist in $(0,0)$ partiell differenzierbar nach y und $f_y(0,0) = 0$.

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Sei $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}.$$

D.h. f ist in $(0,0)$ nicht partiell differenzierbar nach x. Analog: f ist in $(0,0)$ nicht partiell differenzierbar nach y.

Definition:

a) f *heißt* ***in*** $x_0 \in D$ ***partiell differenzierbar*** $:\iff$ f *ist in* x_0 *partiell differenzierbar nach allen Variablen* $x_1, \dots, x_n$*. In diesem Fall heißt der Vektor*

$$\operatorname{grad} f(x_0) \coloneqq (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$$

der ***Gradient von*** f ***in*** x_0*.*

b) f *heißt* ***auf*** D ***partiell differenzierbar*** $:\iff$ f *ist in jedem* $x \in D$ *partiell differenzierbar.*

c) Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$*.* f_{x_i} ***ist auf*** D ***vorhanden*** $:\iff$ f *ist in jedem* $x \in D$ *partiell differenzierbar nach* x_i*. In diesem Fall heißt die Funktion*

$$f_{x_i} \colon D \to \mathbb{R}$$

die ***partielle Ableitung von*** f ***nach*** x_i*.*

d) f *heißt* ***auf*** D ***stetig partiell differenzierbar*** $:\iff$ f *ist auf* D *partiell differenzierbar und* $f_{x_1}, \dots, f_{x_n} \in C(D, \mathbb{R})$*.*

Beispiele:

a) Es sei f wie in obigem Beispiel a). f ist in $(0,0)$ partiell differenzierbar und

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0).$$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ partiell differenzierbar und

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}).$$

Definition: *Es sei* $i \in \{1, \dots, n\}$ *und* f_{x_i} *sei auf* D *vorhanden. Also haben wir die partielle Ableitung von* f *nach* x_i*:*

$$f_{x_i} \colon D \to \mathbb{R}.$$

Es sei $x_0 \in D$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ist f_{x_i} in x_0 partiell differenzierbar nach x_j, so heißt

$$f_{x_i x_j}(x_0) \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \coloneqq \left(f_{x_i}\right)_{x_j}(x_0).$$

partielle Ableitung 2. Ordnung von f in x_0 nach x_i und x_j. *Entsprechend definiert man, falls vorhanden, Ableitungen höherer Ordnung. Schreibweisen: Z.B.*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f_{xxy}, \quad \frac{\partial^7 f}{\partial y^4 \partial x^3} = f_{xxxyyyy}, \quad \frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial y \partial x^2} = f_{xxyzz}.$$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2 \sin z$. Es gilt:

$$f_x(x,y,z) = y^2 \sin z, \quad f_{xy}(x,y,z) = 2y \sin z, \quad f_{xyz}(x,y,z) = 2y \cos z,$$

$$f_y(x,y,z) = 2xy \sin z, \quad f_{yx}(x,y,z) = 2y \sin z, \quad f_{yxz}(x,y,z) = 2y \cos z.$$

Definition: *Es sei $m \in \mathbb{N}$. f heißt **auf D m-mal stetig partiell differenzierbar** $:\iff$ Alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq m$ sind auf D vorhanden und dort stetig.*
Bezeichnung in diesem Fall: $f \in C^m(D, \mathbb{R})$.

Satz 18.1 (Satz von Schwarz)**:** *Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^m(D, \mathbb{R})$. Dann ist jede partielle Ableitung von f der Ordnung $\leq m$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.*

Ohne Beweis.

Beispiel: Ist z.B. $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, so gilt:

$$\forall x \in D \ \forall i, j \in \{1, \ldots n\} : \ f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x).$$

Motivation: Betrachte $f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Bekannt: f ist in $(0,0)$ partiell differenzierbar. Nach 16.3 ist aber f in $(0,0)$ nicht stetig. Wir suchen einen Differenzierbarkeitsbegriff, der Stetigkeit nach sich zieht.

Erinnerung: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. Aus HMI ist bekannt:

$$\begin{aligned}
g \text{ ist in } x_0 \text{ differenzierbar } &\iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = a \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0) - ah}{h} = 0 \\
&\iff \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0) - ah}{|h|} = 0.
\end{aligned}$$

Definition: *f heißt* ***in*** *$x_0 \in D$* ***differenzierbar*** *(db)* $:\iff$

$$\begin{aligned}
&\exists a \in \mathbb{R}^n : \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h}{\|h\|} = 0 \\
\iff &\exists a \in \mathbb{R}^n : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0,
\end{aligned}$$

wobei „$\cdot$“ das Skalarprodukt bezeichnet.

Satz 18.2 (Satz und Definition)**:** *Es sei $x_0 \in D$.*

a) Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig, und f ist in x_0 partiell differenzierbar.

b) Ist f in x_0 differenzierbar, so ist der Vektor a in obiger Definition eindeutig bestimmt und es gilt $a = \operatorname{grad} f(x_0)$. In diesem Fall heißt der Vektor

$$f'(x_0) := a = \operatorname{grad} f(x_0)$$

die ***Ableitung von*** *f* ***in*** *x_0.*

c) f ist in x_0 differenzierbar $\iff$ f ist in x_0 partiell differenzierbar und

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \operatorname{grad} f(x_0) \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

Ohne Beweis.

Beispiele:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Bekannt: f ist in $(0,0)$ nicht stetig $\overset{18.2}{\Longrightarrow}$ f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\log\left(x^2+y^2\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{t^2 \log t^2}{t} = 2t \log|t| \longrightarrow 0 \ (t \to 0),$$
$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 2t \log|t| \longrightarrow 0 \ (t \to 0).$$

f ist also partiell differenzierbar in $(0,0)$ und $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.
Es sei $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$. Dann gilt:

$$\frac{f(h) - f(0,0) - \operatorname{grad} f(0,0) \cdot h}{\|h\|} = \frac{\|h\|^2 \log\left(\|h\|^2\right)}{\|h\|} = 2\|h\| \log\left(\|h\|\right) \longrightarrow 0 \ (h \to 0).$$

f ist also in $(0,0)$ differenzierbar und $f'(0,0) = (0,0)$.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \longrightarrow 0 \ (t \to 0).$$

f ist also partiell differenzierbar in $(0,0)$ und $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.
Es sei $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$. Dann gilt:

$$Q(h) := \frac{f(h) - f(0,0) - \operatorname{grad} f(0,0) \cdot h}{\|h\|} = \frac{h_1 \sin h_2}{\|h\|^2} = \frac{h_1 \sin h_2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Für $h_1 = h_2$:

$$Q(h) = \frac{h_1 \sin h_1}{2h_1^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin h_1}{h_1} \longrightarrow \frac{1}{2} \ (h_1 \to 0).$$

D.h. $Q(h) \not\to 0 \ (h \to 0)$. f ist also in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Definition: *f heißt **auf** D **differenzierbar** $:\iff$ f ist in jedem $x \in D$ differenzierbar.*

Satz 18.3 (ohne Beweis)**:** *Es sei f auf D partiell differenzierbar und $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ seien in $x_0 \in D$ stetig. Dann ist f in x_0 differenzierbar. Insbesondere gilt: Ist $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, so ist f auf D differenzierbar.*

Definition: *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g = (g_1, \dots, g_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, also $g_j\colon I \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, n)$.*

*g heißt **in** $t_0 \in I$ **differenzierbar** $:\iff$ $g_1, \dots, g_n$ sind in $t_0 \in I$ differenzierbar.*
In diesem Fall setzen wir

$$g'(t_0) := (g_1'(t_0), \dots, g_n'(t_0)) \, .$$

Entsprechend definiert man „auf I differenzierbar“ und „auf I stetig differenzierbar“.

Beispiele:

a) $n = 2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann ist $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

b) Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ sei $g(t) := a + t\,(b - a)$ $(t \in \mathbb{R})$. Ist $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, so ist

$$g_j(t) = a_j + t(b_j - a_j), \text{ also } g_j'(t) = b_j - a_j \ (j = 1, \dots, n).$$

Somit gilt: $g'(t) = b - a$.
Bezeichnung: Die Menge $S[a, b] := g([0, 1]) = \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$ heißt die **Verbindungsstrecke** von a und b.

Satz 18.4 (Kettenregel (ohne Beweis))**:** *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g = (g_1, \dots, g_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $t_0 \in I$, $g(I) \subseteq D$ und f sei in $x_0 := g(t_0)$ differenzierbar. Dann ist*

$$f \circ g\colon I \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } t_0$$

und $(f \circ g)'\,(t_0) = f'(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$, wobei „$\cdot$“ das Skalarprodukt bedeutet.

Beispiel: Betrachte $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y$.
Wir können direkt nachrechnen: $(f \circ g)\,(t) = \cos^2 t \sin t$, also

$$(f \circ g)'\,(t) = 2 \cos t\,(-\sin t) \sin t + \cos^2 t \cos t = -2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t.$$

Anwendung von 18.4: Es gilt $f'(x, y) = (2xy, x^2)$, also

$$(f \circ g)'\,(t) = \Big(2 \cos t \sin t, \cos^2 t\Big) \cdot (-\sin t, \cos t) = -2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t.$$

Definition:

a) *Es seien* $x^{(0)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. *Die Menge*

$$S\left[x^{(0)}, \dots, x^{(m)}\right] := \bigcup_{j=1}^{m} S\left[x^{(j-1)}, x^{(j)}\right]$$

heißt ***Streckenzug*** *durch* $x^{(0)}, \dots, x^{(m)}$.

b) *Es sei* $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M *heißt ein* ***Gebiet*** $:\iff$ M *ist offen und zu je zwei Punkten* $a, b \in M$ *existieren* $x^{(0)}, \dots, x^{(m)} \in M$ *mit:*

$$a = x^{(0)}, b = x^{(m)} \text{ und } S\left[x^{(0)}, \dots, x^{(m)}\right] \subseteq M.$$

Satz 18.5 (Der Mittelwertsatz)**:** *Es sei* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *auf* D *differenzierbar, es seien* $a, b \in D$ *und* $S[a, b] \subseteq D$. *Dann existiert ein* $\xi \in S[a, b]$ *mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

Beweis: Für $t \in [0, 1]$ sei

$$g(t) := a + t(b - a), \quad \phi(t) := f\left(g(t)\right).$$

Nach 18.4 ist ϕ ist auf $[0, 1]$ differenzierbar und $\phi'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = f'(g(t)) \cdot (b - a)$. Nach dem MWS aus HMI existiert ein $t_0 \in (0, 1)$ mit

$$f(b) - f(a) = f(g(1)) - f(g(0)) = \phi(1) - \phi(0) = \frac{\phi(1) - \phi(0)}{1 - 0} = \phi'(t_0).$$

Also ist $f(b) - f(a) = f'\Big(\underbrace{g(t_0)}_{=:\xi}\Big) \cdot (b - a)$. □

Folgerung 18.6: Ist D ein Gebiet, $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D und gilt $f'(x) = 0$ $(x \in D)$, so ist f auf D konstant.

Beweis: Übung, mit 18.5. □

Definition:

a) *Es sei* $a \in \mathbb{R}^n$. *Ist* $\|a\| = 1$, *so heißt* a *eine* ***Richtung*** *oder ein* ***Richtungsvektor***.

b) *Es sei $x_0 \in D$ und $a \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung. f heißt **in x_0 in Richtung a differenzierbar** $:\iff$ Es existiert der Grenzwert*

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}.$$

*In diesem Fall heißt $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ die **Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung a**.*

Bemerkung: Ist $a = e_i = i$-ter Einheitsvektor, so ist (falls vorhanden)

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f_{x_i}(x_0).$$

Beispiele:

a) Es sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Betrachte $x_0 = (0,0)$. Ist $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung, also $a_1^2 + a_2^2 = 1$, so gilt:

$$\frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 a_1 a_2}{t^2} = \frac{a_1 a_2}{t}.$$

D.h. $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ existiert $\iff a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$

$$\iff a \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}.$$

In diesem Fall ist $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = 0$.

b) Es sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Betrachte $x_0 = (0,0)$. Ist $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung, so gilt:

$$\frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 a_1 a_2^2}{t^2 a_1^2 + t^4 a_2^4} = \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + t^2 a_2^4} \xrightarrow[t \to 0]{} \begin{cases} 0, & a_1 = 0 \\ \frac{a_2^2}{a_1}, & a_1 \neq 0 \end{cases}.$$

D.h. $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ existiert für jede Richtung $a \in \mathbb{R}^2$.

Weiter sei $x > 0$. Es gilt

$$f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \quad (x \to 0+).$$

Damit folgt: f ist in $(0,0)$ nicht stetig.

Satz 18.7 (ohne Beweis)**:** *Ist f in $x_0 \in D$ differenzierbar und $a \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, so existiert $\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)$ und*

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot \operatorname{grad} f(x_0)$$

Bemerkung: Unter den Voraussetzungen von 18.7 gilt (nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung):

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}(x_0)\right| = |a \cdot \operatorname{grad} f(x_0)| \leq \|a\| \|\operatorname{grad} f(x_0)\| = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|.$$

Ist $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ und setzt man $a := \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|.$$

D.h. die Richtungsableitung wird am größten in Richtung des Gradienten. Man sagt auch: Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs.

Beispiele:

a) Es sei f wie in obigem Beispiel b), $x_0 = (0,0)$ und $a := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{grad} f(0,0) = (0,0),$$

also

$$a \cdot \operatorname{grad} f(0,0) = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Beachte: f ist in $(0,0)$ nicht stetig, also auch nicht differenzierbar.

b) Es sei $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x|x|+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Es sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{f(ta) - f(0,0)}{t} &= \frac{1}{t} \cdot \frac{t|t|a_1|a_1| + t^4 a_2^4}{|t|} = \frac{t|t|a_1|a_1| + (t|t|)^2\, a_2^4}{t|t|} \\ &= a_1|a_1| + t|t|a_2^4 \ \longrightarrow\ a_1|a_1| \quad (t \to 0).\end{aligned}$$

Also existiert $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0)$ für jede Richtung a und $\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = a_1|a_1|$. Insbesondere:

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (1,0).$$

Sei $a := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Dann:

$$\frac{1}{2} = \frac{\partial f}{\partial a}(0,0) \neq a \cdot \operatorname{grad} f(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mit 18.7 folgt: f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar. Andererseits gilt: f ist in $(0,0)$ stetig. (Übung.)

Bezeichnung: Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(Ax) \cdot x := \left(Ax^\top\right) \cdot x.$$

Definition: *Es sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $x_0 \in D$. Die Matrix*

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt ***Hesse-Matrix von f in*** *x_0. Nach 18.1 ist $H_f(x_0)$ symmetrisch.*

Beispiel: Betrachte $f(x,y) = x^3y + xy$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$. Es gilt:

$$f_x(x,y) = 3x^2y + y,\ \ f_y(x,y) = x^3 + x,$$

$$f_{xx}(x,y) = 6xy,\ \ f_{xy}(x,y) = 3x^2 + 1,\ \ f_{yy}(x,y) = 0.$$

Damit ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2+1 \\ 3x^2+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz 18.8 (Satz von Taylor (ohne Beweis))**:** *Es sei* $f \in C^2(D, \mathbb{R})$*,* $x_0 \in D$*,* $h \in \mathbb{R}^n$ *und* $S[x_0, x_0 + h] \subseteq D$*. Dann existiert ein* $\xi \in S[x_0, x_0 + h]$ *mit*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}\,(H_f(\xi)h) \cdot h.$$

Definition: *Es sei* A *eine reelle und symmetrische* $n \times n$*-Matrix.* A *heißt*

a) ***positiv definit*** *(pd)* $:\iff \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (Ax) \cdot x > 0.$

b) ***negativ definit*** *(nd)* $:\iff \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (Ax) \cdot x < 0.$

c) ***indefinit*** *(id)* $:\iff \exists u, v \in \mathbb{R}^n : (Au) \cdot u > 0$ *und* $(Av) \cdot v < 0.$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt:

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ (Ax) \cdot x = x_1^2 \geq 0,$$

$$\forall x = (0, t) : \ (Ax) \cdot x = 0.$$

Also ist A weder negativ definit, noch indefinit, noch positiv definit.

Satz 18.9 (ohne Beweis)**:** *Es sei* A *wie in obiger Definition. Dann gilt:*

a) *(i)* A *ist positiv definit* $\iff$ *alle Eigenwerte von* A *sind* > 0.

(ii) A *ist negativ definit* $\iff$ *alle Eigenwerte von* A *sind* < 0.

(iii) A *ist indefinit* $\iff$ *es gibt Eigenwerte* λ, μ *von* A *mit* $\lambda > 0$, $\mu < 0$.

b) *Sei* $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

(i) A *ist positiv definit* $\iff \alpha > 0, \det A > 0.$

(ii) A *ist negativ definit* $\iff \alpha < 0, \det A > 0.$

(iii) A *ist indefinit* $\iff \det A < 0.$

Definition: *Es sei* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $g : M \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.* g *hat in* $x_0 \in M$ *ein*

a) ***lokales Maximum*** $:\iff \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M : g(x) \leq g(x_0).$

*b) **lokales Minimum** $:\iff \exists\delta>0\ \forall x\in U_\delta(x_0)\cap M : g(x)\geq g(x_0)$.*

*c) **globales Maximum** $:\iff \forall x\in M : g(x)\leq g(x_0)$.*

*d) **globales Minimum** $:\iff \forall x\in M : g(x)\geq g(x_0)$.*

*"**Extremum**" bedeutet "Maximum" oder "Minimum".*

Satz 18.10:

a) Ist f in $x_0\in D$ partiell differenzierbar und hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $\operatorname{grad} f(x_0)=0$.

b) Ist $f\in C^2(D,\mathbb{R})$, $x_0\in D$ und $\operatorname{grad} f(x_0)=0$, so gilt:

(i) Ist $H_f(x_0)$ positiv definit, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

(ii) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

(iii) Ist $H_f(x_0)$ indefinit, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.

Beweis:

a) Ist z.B. x_0 eine lokale Maximalstelle und $i\in\{1,\ldots,n\}$, so ist für ein $\delta>0$:

$$\frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t}\begin{cases}\leq 0, & t\in(0,\delta)\\ \geq 0, & t\in(-\delta,0)\end{cases},$$

also $f_{x_i}(x_0)=0$.

b) (Beweisskizze.) Ist z.B. $H_f(x_0)$ positiv definit, so ist $H_f(x)$ positiv definit in einer Umgebung $U_\delta(x_0)\subseteq D$ (wg. $f\in C^2(D,\mathbb{R})$). Nach 18.8 gilt für $\|h\|<\delta$:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\underbrace{(\operatorname{grad} f(x_0))}_{=0}\cdot h+\underbrace{\frac{1}{2}(H_f(\xi)\cdot h)\cdot h}_{\geq 0}$$

für ein $\xi\in S[x_0,x_0+h]\subseteq U_\delta(x_0)$. Also ist $f(x_0+h)\geq f(x_0)$.

$\square$

Beispiele:

a) $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^4 + y^4$. Somit: $f_x(x,y) = 4x^3$, $f_y(x,y) = 4y^3$. Es gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0).$$

Weiter gilt: $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2$; also ist

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

weder positiv definit, noch negativ definit, noch indefinit! Was nun? Es gilt:

$$f(x,y) \geq 0 = f(0,0) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Also hat f in $(0,0)$ ein globales Minimum!

b) $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 - y^2$. Somit: $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = -2y$. Es gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0).$$

Weiter gilt: $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = -2$; also ist

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und $\det H_f(0,0) = -4 < 0$. $H_f(0,0)$ ist also indefinit. Somit hat f in $(0,0)$ kein lokales Extremum.
Andere Möglichkeit:

$$\begin{aligned} f(x,0) &= \ \ x^2 \ > 0 = f(0,0) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ f(0,y) &= -y^2 < 0 = f(0,0) \quad (y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

c) $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$. Somit:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 12y, \ f_y(x,y) = -12x + 24y^2;$$

also ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff x^2 = 4y \text{ und } 2y^2 = x$$

$$\Rightarrow 4y^4 = 4y \iff y^3 = 1 \vee y = 0 \iff y = 0 \vee y = 1.$$

$$\text{Ist } y=0, \text{ so ist } x=0; \ \operatorname{grad} f(0,0)=(0,0),$$
$$\text{Ist } y=1, \text{ so ist } x=2; \ \operatorname{grad} f(2,1)=(0,0).$$

Extremwertverdächtige Stellen: $(0,0)$, $(2,1)$. Es gilt:

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}.$$

(i) $H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$; $\det H_f(0,0)<0$.

$$f \text{ hat also in } (0,0) \text{ kein lokales Extremum.}$$

(ii) $H_f(2,1)=\begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$; $12>0$, $\det H_f(2,1)=12\cdot 48-12\cdot 12>0$.

$$f \text{ hat also in } (2,1) \text{ ein lokales Minimum.}$$

$(2,1)$ ist keine globale Minimalstelle, denn z.B. $f(t,0)=t^3 \longrightarrow -\infty$ $(t\to-\infty)$.

d) $D=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=-8x^3-12x^2+3xy^2+y^3+3y^2$. Übung:

$$\operatorname{grad} f(x,y)=(0,0) \iff (x,y)\in\{(1,-4),(-1,0),(0,0)\}.$$

f hat in $(0,0)$ kein lokales Extremum und f hat in $(1,-4)$ ein lokales Maximum.

Es ist $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} -48x-24 & 6y \\ 6y & 6x+6y+6 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$H_f(-1,0)=\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

weder positiv definit, noch negativ definit noch indefinit! Was nun? Es gilt:

$$f(-1,t)=8-12-3t^2+t^3+3t^2=t^3-4, \ f(-1,0)=-4.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } t>0: f(-1,t)>-4 \quad =f(-1,0) \\ \text{Für } t<0: f(-1,t)<-4 \quad =f(-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ hat in } (-1,0) \text{ kein lok. Extremum.}$$

Problem: Bestimme

$$\max\{x^2+y^2-x : x^2+y^2 \le 1\},\ \min\{x^2+y^2-x : x^2+y^2 \le 1\}.$$

Es sei

$$D := \left\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\right\} \Rightarrow \overline{D} = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

Betrachte $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2-x$. f ist stetig und $\overline{D}$ ist kompakt. Nach 16.5 hat die Menge $f(\overline{D}) = \{x^2+y^2-x : x^2+y^2 \le 1\}$ ein Minimum und ein Maximum.

Suche lokale Extremalstellen in D:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x-1 = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}\right\} \iff (x,y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $H_f\left(\frac{1}{2},0\right)$ ist positiv definit. Also ist $\left(\frac{1}{2},0\right)$ eine lokale Minimalstelle und $f\left(\frac{1}{2},0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$. Es gibt keine weiteren lokalen Extremalstellen in D. Weiter gilt:

$$\max\left\{x^2+y^2-x : x^2+y^2 = 1\right\} = \max\left\{1-x : x^2+y^2 = 1\right\}.$$

Es gilt: $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1 \Rightarrow 1-x \le 2$. Wegen $f(-1,0) = 2$ folgt:

$$\max\left\{x^2+y^2-x : x^2+y^2 \le 1\right\} = 2.$$

Ebenso: $x^2+y^2 = 1 \Rightarrow 1-x \ge 0$. Wegen $f\left(\frac{1}{2},0\right) = -\frac{1}{4}$ folgt:

$$\min\left\{x^2+y^2-x : x^2+y^2 \le 1\right\} = -\frac{1}{4}.$$

Kapitel 19

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (vektorwertige Funktionen)

In diesem §en sei stets $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, D offen und $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, also $f_j\colon D \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Definition:

*a) Es sei $x_0 \in D$. f heißt **in** x_0 **partiell differenzierbar** $:\iff$ Alle f_j sind in x_0 partiell differenzierbar. In diesem Fall heißt*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \coloneqq \frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}(x_0) \coloneqq J_f(x_0) \coloneqq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

*die **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix von** f **in** x_0.*
Beachte: In der Jacobimatrix stehen zeilenweise die Gradienten der Koordinatenfunktionen.

b) Es sei $p \in \mathbb{N}$. $f \in C^p(D, \mathbb{R}^m) :\iff f_j \in C^p(D, \mathbb{R})$ $(j = 1, \ldots, m)$.

*c) f heißt **in** $x_0 \in D$ **differenzierbar** $:\iff$ Es existiert eine $m \times n$-Matrix A mit:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0.$$

Satz 19.1 (Satz und Definition (ohne Beweis))**:** *Es sei $x_0 \in D$.*

a) f ist in x_0 differenzierbar $\iff$ Alle f_j sind in x_0 differenzierbar. In diesem Fall gilt:

(i) f ist in x_0 stetig,

(ii) f *ist in* x_0 *partiell differenzierbar,*

(iii) *die Matrix* A *in obiger Definition c) ist eindeutig bestimmt:* $A = J_f(x_0)$.

b) *Ist* f *in* x_0 *differenzierbar, so heißt* $f'(x_0) \coloneqq J_f(x_0)$ *die* ***Ableitung von*** f ***in*** x_0.

Aus 19.1 und 18.3 folgt:

Satz 19.2: *Sind alle partiellen Ableitungen* $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ *auf* D *vorhanden und in* x_0 *stetig, so ist* f *in* x_0 *differenzierbar. Ist* $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, *so ist* f *auf* D *differenzierbar.*

Beispiele:

a) $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \Big(\underbrace{x + y}_{f_1(x,y)}, \underbrace{xy}_{f_2(x,y)}, \underbrace{x^2 y}_{f_3(x,y)}\Big)$. Es gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = x,\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = 2xy,\ \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = x^2.$$

Also: $f'(x,y) = J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$.

b) Es sei A eine $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ und $f(x) \coloneqq Ax + b$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah = A(x_0 + h) + b - (Ax_0 + b) - Ah = 0.$$

Also ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = A$. Somit gilt: f ist auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar und $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $f'(x) = A$.

Satz 19.3 (Die Kettenregel (ohne Beweis))**:** *Es sei* $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ *in* $x_0 \in D$ *differenzierbar, es sei* $\widetilde{D} \subseteq \mathbb{R}^m$ *offen,* $f(D) \subseteq \widetilde{D}$ *und* $g\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R}^p$ *sei differenzierbar in* $y_0 \coloneqq f(x_0)$. *Dann ist*

$$\phi \coloneqq g \circ f\colon D \to \mathbb{R}^p$$

in x_0 *differenzierbar und*

$$\phi'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}_{\text{Matrizenprodukt}}.$$

Wichtigster Fall: $p = 1$, also $g(z) = g(z_1, \ldots, z_m)$ reellwertig und $\phi\colon D \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \phi(x_1, \ldots, x_n) = g(f(x)) = g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)).$$

Mit 19.3 folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} \phi(x) &= \phi'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \operatorname{grad} g(f(x)) \cdot J_f(x) \\
&= (g_{z_1}(f(x)), g_{z_2}(f(x)), \ldots, g_{z_m}(f(x))) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also ist z.B.:

$$\phi_{x_1}(x) = g_{z_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + g_{z_2}(f(x))\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) + \ldots + g_{z_m}(f(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x).$$

Allgemein: $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\phi_{x_j}(x) = g_{z_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + g_{z_2}(f(x))\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) + \ldots + g_{z_m}(f(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x).$$

Beispiele:

a) $n = 2$, $m = 3$, $p = 1$: $\phi(x, y) = g(x^2y, xy, x\sin y)$, $(g(z) = g(z_1, z_2, z_3))$.

$$\begin{aligned}
\phi_x(x, y) &= g_{z_1}(x^2y, xy, x\sin y) \cdot 2xy + g_{z_2}(x^2y, xy, x\sin y) \cdot y + g_{z_3}(x^2y, xy, x\sin y) \cdot \sin y \\
\phi_y(x, y) &= g_{z_1}(x^2y, xy, x\sin y) \cdot x^2 + g_{z_2}(x^2y, xy, x\sin y) \cdot x + g_{z_3}(x^2y, xy, x\sin y) \cdot x\cos y
\end{aligned}$$

b) Gegeben: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi.$$

Es sei $u(r, \varphi) \coloneqq f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Dann gilt:

$$u_r(r, \varphi) = f_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + f_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = f_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + f_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\cos\varphi.$$

Implizit definierte Funktionen

Motivation:

a) Betrachte $f(x,y) = 2x^3 + y$. Es gilt $f(x,y) = 0 \iff y = -2x^3$. Setzt man $g(x) \coloneqq -2x^3$, so gilt:
$$\forall x \in \mathbb{R}: \ f(x, g(x)) = 0.$$
Man sagt:
„Die Gleichung $f(x,y) = 0$ kann nach y aufgelöst werden in der Form $y = g(x)$",
oder
„durch die Gleichung $f(x,y) = 0$ wird eine Funktion g definiert mit $f(x, g(x)) = 0$".

b) Auch in Fällen, in denen keine „formelmäßige" (also explizite) Auflösung der Gleichung $f(x,y) = 0$ nach y möglich ist, kann manchmal die Existenz einer implizit definierten Funktion g gesichert werden, also die Existenz einer Funktion g mit $f(x, g(x)) = 0$.

Beispiel: $f(x,y) = y + xy^2 - e^{xy}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$. Unten werden wir sehen: Es gibt $\delta, \eta > 0$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon (-\delta, \delta) \to (1-\eta, 1+\eta)$ mit:
$$f(x, g(x)) = 0 \ (x \in (-\delta, \delta)) \quad \text{und} \quad g(0) = 1.$$

Frage: Was ist $g'(0)$?
Aus
$$0 = f(x, g(x)) \quad (x \in (-\delta, \delta))$$
folgt durch differenzieren nach x:
$$0 = f_x(x, g(x)) \cdot 1 + f_y(x, g(x)) \cdot g'(x) \underset{x=0}{\Longrightarrow} 0 = f_x(0,1) + f_y(0,1) g'(0).$$
Es gilt:
$$f_x(x,y) = y^2 - ye^{xy} \ \Rightarrow \ f_x(0,1) = 0,$$
$$f_y(x,y) = 1 + 2xy - xe^{xy} \ \Rightarrow \ f_y(0,1) = 1.$$
Also: $g'(0) = 0$.

19.4 Spezialfall (ohne Beweis): Es sei $n = 2$, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann existieren $\delta, \eta > 0$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ mit

$$g(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta): \; f(x, g(x)) = 0.$$

(Man sagt: „g wird durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ implizit definiert“.)

Zurück zu obigem Beispiel: Es ist $f(0, 1) = 0$ und $f_y(0, 1) = 1 \neq 0$. Also existiert ein $\delta, \eta > 0$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon (-\delta, \delta) \to (1 - \eta, 1 + \eta)$ mit $g(0) = 1$ und $\forall x \in (-\delta, \delta)$: $f(x, g(x)) = 0$.

Noch ein Beispiel: $f(x, y) = e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$.
Behauptung: Es gibt $\delta, \eta > 0$ und genau eine stetig differenzierbare Funktion

$$g\colon (-\delta, \delta) \to (-\eta, \eta)$$

mit:

$$\forall x \in (-\delta, \delta): \; f(x, g(x)) = 0 \text{ und } g(0) = 0.$$

Beweis: Betrachte $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Es gilt $f(0, 0) = 0$. Weiter ist

$$f_y(x, y) = e^{\sin(xy)} \cos(xy)x - 2 \;\Rightarrow\; f_y(0, 0) = -2 \neq 0.$$

Die Behauptung folgt aus 19.4. □

Berechne $g'(0)$: Es gilt

$$0 = f(x, g(x)) \; (x \in (-\delta, \delta)).$$

Differenzieren nach x: $0 = f_x(x, g(x)) \cdot 1 + f_y(x, g(x)) \cdot g'(x)$

$$\overset{x=0}{\Longrightarrow} 0 = f_x(0, 0) + f_y(0, 0)g'(0) = f_x(0, 0) - 2g'(0).$$

Weiter ist $f_x(x, y) = e^{\sin(xy)} \cos(xy) \cdot y + 2x$, also $f_x(0, 0) = 0$. Somit gilt: $g'(0) = 0$.

Im Folgenden seien $n, p \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$, D offen und $f = (f_1, \ldots, f_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$.

Die Punkte in D schreiben wir in der Form (x, y), wobei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, also $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$. Wir setzen

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{p\times n\text{-Matrix}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} := \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}}_{p\times p\text{-Matrix}}.$$

Dann ist $f'(x, y) = J_f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$ ($p \times (n + p)$-Matrix).

Satz 19.5 (Satz über implizit definierte Funktionen (ohne Beweis))**:**
Es sei $(x_0, y_0) \in D$, $f(x_0, y_0) = 0$ *und* $\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. *Dann existieren* $\delta, \eta > 0$ *mit folgenden Eigenschaften:*

a) $U_\delta(x_0) \times U_\eta(y_0) \subseteq D$,

b) $\forall x \in U_\delta(x_0)\ \exists_1 y =: g(x) \in U_\eta(y_0) :\ f(x, y) = 0$,

c) $g \in C^1(U_\delta(x_0), \mathbb{R}^p)$,

d) $\forall x \in U_\delta(x_0) :\ \det \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$,

e)
$$\forall x \in U_\delta(x_0) :\ g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\right).$$

Zusatz: Ist $f \in C^l(D, \mathbb{R}^p)$, $l \geq 2$, *so ist* $g \in C^l(U_\delta(x_0), \mathbb{R}^p)$.

Bemerkung: Für die in 19.5 definierte Funktion $g : U_\delta(x_0) \to U_\eta(y_0)$ gilt offensichtlich:

a) $g(x_0) = y_0$,

b) $\forall x \in U_\delta(x_0)$: $f(x, g(x)) = 0$.

Beispiele:

a) $D = \mathbb{R}^3$ ($n = 2$, $p = 1$):

$$f(x, y, z) = x^4 + 2x \cos y + \sin z.$$

Behauptung: Es gibt $\delta, \eta > 0$ und genau eine Funktion $g : U_\delta((0,0)) \to U_\eta(0)$ mit:

$$g(0,0) = 0 \text{ und } f(x,y,g(x,y)) = 0 \quad \big((x,y) \in U_\delta((0,0))\big).$$

Berechne $g'(0,0)$.
Lösung: Betrachte $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$. Es gilt:

$$f(0,0,0) = 0 \checkmark, \quad f_z(x,y,z) = \cos z, \quad f_z(0,0,0) = 1 \neq 0 \checkmark.$$

Die Behauptung folgt aus 19.5. Also

$$(*) \qquad f(x,y,g(x,y)) = 0 \quad \big((x,y) \in U_\delta((0,0))\big).$$

Differenzieren von $(*)$ nach x:

$$0 = f_x(x,y,g(x,y)) \cdot 1 + f_y(x,y,g(x,y)) \cdot 0 + f_z(x,y,g(x,y)) \cdot g_x(x,y)$$

$$\Rightarrow 0 = f_x(0,0,0) + f_z(0,0,0) g_x(0,0).$$

Differenzieren von $(*)$ nach y:

$$0 = f_x(x,y,g(x,y)) \cdot 0 + f_y(x,y,g(x,y)) \cdot 1 + f_z(x,y,g(x,y)) \cdot g_y(x,y)$$

$$\Rightarrow 0 = f_y(0,0,0) + f_z(0,0,0) g_y(0,0).$$

Mit $f_z(0,0,0) = 1$ folgt

$$g_x(0,0) = -f_x(0,0,0), \;\; g_y(0,0) = -f_y(0,0,0).$$

Weiter ist

$$f_x(x,y,z) = 4x^3 + 2\cos y, \;\; f_y(x,y,z) = -2x \sin y,$$

also

$$f_x(0,0,0) = 2, \;\; f_y(0,0,0) = 0.$$

Somit ist $g'(0,0) = (g_x(0,0), g_y(0,0)) = (-2, 0)$.

b) Behauptung: Es gibt $\delta, \eta > 0$ und genau eine Funktion $g : U_\delta((0,e)) \to U_\eta(2)$ mit:

$$g(0,e) = 2 \text{ und } y^2 + xg(x,y) + (g(x,y))^2 - e^{g(x,y)} = 4 \quad \big((x,y) \in U_\delta((0,e))\big).$$

Berechne $g_x(0,e)$.
Lösung: Setze $f(x,y,z) \coloneqq y^2+xz+z^2-e^z-4$ und betrachte $(x_0,y_0,z_0)=(0,e,2)$.
Es gilt:

$$f(x_0,y_0,z_0)=e^2+0+4-e^2-4=0\ \checkmark,$$

$$f_z(x,y,z)=x+2z-e^z, \quad f_z(0,e,2)=0+4-e^2\neq 0\ \checkmark.$$

Die Behauptung folgt aus 19.5. Es gilt:

$$4=y^2+xg(x,y)+g(x,y)^2-e^{g(x,y)}\ \Big((x,y)\in U_\delta((0,e))\Big).$$

Differenzieren nach x:

$$0=g(x,y)+xg_x(x,y)+2g(x,y)g_x(x,y)-e^{g(x,y)}g_x(x,y)$$

$$\Rightarrow 0=2+4g_x(0,e)-e^2g_x(0,e)=2+\left(4-e^2\right)g_x(0,e)$$

$$\Rightarrow g_x(0,e)=\frac{2}{e^2-4}.$$

Satz 19.6 (Der Umkehrsatz (ohne Beweis))**:**
Es sei $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f\in C^1(D,\mathbb{R}^n)$ und $x_0\in D$. Ist $\det f'(x_0)\neq 0$, so existiert ein $\delta>0$ mit:

a) $U_\delta(x_0)\subseteq D$ und $f(U_\delta(x_0))$ ist offen,

b) f ist auf $U_\delta(x_0)$ injektiv,

c) $f^{-1}: f(U_\delta(x_0))\to U_\delta(x_0)$ ist in $C^1(f(U_\delta(x_0)),\mathbb{R}^n)$,

$$\det f'(x)\neq 0 \quad (x\in U_\delta(x_0))$$

und

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\left(f'\left(f^{-1}(y)\right)\right)^{-1} \quad (y\in f(U_\delta(x_0))).$$

Beispiele:

a) $D=\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$,

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix},$$

$$\det f'(x,y) = e^x \cos^2 y + e^x \sin^2 y = e^x \neq 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Es sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nach 19.6 gilt: Es gibt ein $\delta > 0$ mit:

$$f \text{ ist auf } U_\delta((x_0,y_0)) \text{ injektiv.}$$

Aber: f ist auf $\mathbb{R}^2$ nicht injektiv:

$$f(x,y) = f(x, y + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Betrachte speziell $(x_0, y_0) := \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Es gilt $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, also $f^{-1}(0,1) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und

$$\left(f^{-1}\right)'(0,1) = \left(f'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $D = \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$,

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachte $(x_0, y_0, z_0) := (1,1,1)$. Es gilt:

$$\det f'(1,1,1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Nach 19.6 existiert ein $\delta > 0$ so, daß f auf $U_\delta((1,1,1))$ injektiv ist. Es ist

$$f(1,1,1) = (1,1,1),$$

also

$$\left(f^{-1}\right)'(1,1,1) = \left(f'(1,1,1)\right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kapitel 20

Integration im $\mathbb{R}^n$

Alle Sätze i.d. §en geben wir ohne Beweis an!

Sind $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$ kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ (also $a_j \leq b_j$ $(j = 1, \ldots n)$), so heißt

$$I \coloneqq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

ein **kompaktes Intervall im** $\mathbb{R}^n$.

Die Zahl $|I| \coloneqq (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$ heißt **Inhalt** (oder **Volumen**) von I. Beachte:

$$|I| = 0 \iff \exists j \in \{1, \ldots, n\} : a_j = b_j.$$

Zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei eine Zerlegung Z_j von $[a_j, b_j]$ gegeben. Dann heißt

$$Z \coloneqq Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_n$$

eine **Zerlegung von** I.

Ein Teilintervall $\widetilde{I}$ von I bezüglich Z hat die Form

$$T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n,$$

wobei T_j jeweils ein Teilintervall bezüglich Z_j ist.

Es seien $I_1, \ldots, I_m$ die Teilintervalle bzgl. Z. Dann gilt:

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m, \quad |I| = |I_1| + \ldots + |I_m|.$$

Definition: *Es sei I wie oben, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und Z sei eine Zerlegung von I mit den Teilintervallen $I_1, \dots, I_m$. Wir setzen:*

$$m_j \coloneqq \inf f(I_j),\ M_j \coloneqq \sup f(I_j) \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$\begin{aligned} s_f(Z) &\coloneqq \sum_{j=1}^{m} m_j |I_j| \text{ \textbf{die Untersumme} von } f \text{ bzgl. } Z, \\ S_f(Z) &\coloneqq \sum_{j=1}^{m} M_j |I_j| \text{ \textbf{die Obersumme} von } f \text{ bzgl. } Z. \end{aligned}$$

Satz 20.1: *Es seien I und f wie oben und Z und $\widetilde{Z}$ seien Zerlegungen von I. Dann gilt:*

a) *Ist $Z \subseteq \widetilde{Z} \Rightarrow s_f(Z) \le s_f(\widetilde{Z})$, $S_f(Z) \ge S_f(\widetilde{Z})$.*

b) $\Big(\inf f(I)\Big)|I| \le s_f(Z) \le S_f(\widetilde{Z}) \le \Big(\sup f(I)\Big)|I|$.

Definition: *Es seien I und f wie oben.*

$$\begin{aligned} s_f &\coloneqq \sup \{s_f(Z)\colon Z \text{ Zerlegung von } I\}, \\ S_f &\coloneqq \inf \{S_f(Z)\colon Z \text{ Zerlegung von } I\}. \end{aligned}$$

Mit 20.1 folgt: $s_f \le S_f$. f heißt ***integrierbar (ib) über*** *$I :\iff s_f = S_f$. In diesem Fall heißt*

$$\int_I f dx \coloneqq \int_I f(x) dx \coloneqq s_f \ (= S_f)$$

das ***Integral von f über*** *I und man schreibt $f \in R(I)$ oder $f \in R(I, \mathbb{R})$.*

Satz 20.2: *Es sei I ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^n$, $f, g \in R(I)$ und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

a)

$$\alpha f + \beta g,\ fg,\ |f| \in R(I),$$

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx, \qquad \left|\int_I f(x) dx\right| \le \int_I |f(x)| dx.$$

b) *Ist $f \le g$ auf I, so ist $\int_I f dx \le \int_I g dx$.*

c) *Gilt $|g(x)| \ge \alpha$ $(x \in I)$ für ein $\alpha > 0$, so ist $\frac{f}{g} \in R(I)$.*

d) $C(I) \subseteq R(I)$.

Satz 20.3 (Satz von Fubini)**:** *Es seien* $p, q \in \mathbb{N}$, $n = p + q$ *(also* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$*). Es sei* I_1 *ein kompaktes Intervall im* $\mathbb{R}^p$, I_2 *sei ein kompaktes Intervall im* $\mathbb{R}^q$, *es sei* $I := I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $f \in R(I)$. *Punkte in* I *bezeichnen wir mit* (x, y), *wobei* $x \in I_1$ *und* $y \in I_2$.

a) Für jedes feste $y \in I_2$ *sei die Funktion* $x \mapsto f(x, y)$ *integrierbar über* I_1 *und es sei* $g(y) := \int_{I_1} f(x, y)dx$. *Dann gilt* $g \in R(I_2)$ *und*

$$\int_I f(x,y)d(x,y) = \int_{I_2} g(y)dy = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)dx \right) dy.$$

b) Für jedes feste $x \in I_1$ *sei die Funktion* $y \mapsto f(x, y)$ *integrierbar über* I_2 *und es sei* $g(x) := \int_{I_2} f(x, y)dy$. *Dann gilt* $g \in R(I_1)$ *und*

$$\int_I f(x,y)d(x,y) = \int_{I_1} g(x)dx = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)dy \right) dx.$$

Folgerung 20.4: Es sei $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ und $f \in C(I)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_I f(x)dx &= \int_I f(x_1, \ldots, x_n)d(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\ldots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n \right) dx_{n-1} \ldots \right) dx_1\end{aligned}$$

wobei die Reihenfolge der Integrationen beliebig vertauscht werden darf.

Beispiele:

a) Betrachte $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\int_I \sin(x+y)d(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) \right) dx \\ &= \left[-\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin 0 \right) = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

b) Betrachte $I = [0,2] \times [0,1] \times [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_I \left(x^2 z + yxz\right) d(x,y,z) &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 \left(x^2 z + yxz\right) dz \right) dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 z^2 + \frac{1}{2} yxz^2 \right]_{z=0}^{z=1} dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} yx \right) dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} yx \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{4} y^2 x \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x \right) dx \\
&= \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{8} x^2 \Big|_0^2 = \frac{8}{6} + \frac{4}{8} = \frac{8}{6} + \frac{3}{6} = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

c) Es sei $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C([a_1, b_1])$ und $g \in C([a_2, b_2])$.

$$\begin{aligned}
\int_I f(x) g(y) d(x,y) &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x) g(y) dy \right) dx \\
&= \int_{a_1}^{b_1} f(x) \left(\int_{a_2}^{b_2} g(y) dy \right) dx \\
&= \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} g(y) dy \right).
\end{aligned}$$

Inhalt von Mengen.

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ **beschränkt**. Wie kann man B einen Inhalt zuordnen?
Die Funktion $c_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$c_B(x) := \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

heißt **charakteristische Funktion von** B.
Wähle ein kompaktes Intervall I mit $B \subseteq I$.

Es sei Z eine Zerlegung von I mit den Teilintervallen $I_1, \ldots, I_m$. Dann gilt

$$\inf c_B(I_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I_j \subseteq B \\ 0, & \text{falls } I_j \not\subseteq B \end{cases}.$$

Damit folgt:

$$s_{c_B}(Z) = \sum_{j:I_j \subseteq B} |I_j|.$$

Weiter gilt:

$$\sup c_B(I_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I_j \cap B \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } I_j \cap B = \emptyset \end{cases}.$$

Damit folgt:

$$S_{c_B}(Z) = \sum_{j:I_j \cap B \neq 0} |I_j|.$$

Wir setzen

$$\underline{v}(B) \coloneqq s_{c_B} \quad \textbf{innerer Inhalt} \text{ von } B,$$

$$\overline{v}(B) \coloneqq S_{c_B} \quad \textbf{äußerer Inhalt} \text{ von } B.$$

Die Menge B heißt **messbar** (mb) $:\iff c_B \in R(I)$. In diesem Fall ist

$$\underline{v}(B) = \overline{v}(B) = \int_I c_B(x)dx$$

und

$$|B| \coloneqq \int_I c_B(x)dx$$

heißt der **Inhalt von** B.
Diese Definitionen sind unabhängig von der Wahl von I.

Beispiele:

a) Betrachte $B = \emptyset$. Es sei I ein beliebiges kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $c_B(x) = 0$ $(x \in I)$. Also ist $s_{c_B}(Z) = S_{c_B}(Z) = 0$ für jede Zerlegung Z. Somit ist $\emptyset$ messbar und $|\emptyset| = 0$.

b) Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Intervall. Wähle $I = B$. Mit obigen Bezeichnungen ist

$$s_{c_B}(Z) = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} |I_j|}_{=|I|} = S_{c_B}(Z) \text{ für jede Zerlegung } Z.$$

Also ist B messbar und $|B| = |I|$ (= frühere Definition des Inhalts von I).

c) Betrachte $B \coloneqq [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und $I = [0,1]$. Es gilt:

$$c_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Aus HMI ist bekannt: $c_B \notin R(I)$. Also ist B nicht messbar.

Definition: *Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f\colon B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Setze*

$$f_B(x) \coloneqq \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}.$$

Wähle ein kompaktes Intervall I mit $B \subseteq I$.

*f heißt **über** B **integrierbar** $:\iff f_B \in R(I)$. In diesem Fall schreiben wir: $f \in R(B)$ und*

$$\int_B f dx \coloneqq \int_B f(x) dx \coloneqq \int_I f_B(x) dx$$

*heißt **Integral von** f **über** B.*

Diese Definitionen sind unabhängig von der Wahl von I.

Bemerkung: Ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und speziell $f = 1$ auf B, so ist $f_B = c_B$ und somit

$$|B| = \int_B 1 dx.$$

Satz 20.5: *Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

a) Ist $f \in C(B, \mathbb{R})$ beschränkt, so ist $f \in R(B)$.

b) Es seien $f, g \in R(B)$. Dann gilt:

(i) $\alpha f + \beta g,\ fg,\ |f| \in R(B)$;
$\int_B (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_B f dx + \beta \int_B g dx$;
$|\int_B f dx| \leq \int_B |f| dx$.

(ii) Ist $f \leq g$ auf B, so ist $\int_B f dx \leq \int_B g dx$.

(iii) Existiert ein $\gamma > 0$ mit $|g(x)| \geq \gamma$ $(x \in B)$, so ist $\frac{f}{g} \in R(B)$.

c) *(i)* $A \cup B$, $A \cap B$ *und* $A \setminus B$ *sind messbar.*

(ii) *Aus* $A \subseteq B$ *folgt* $|A| \leq |B|$.

(iii) $f \in R(A \cup B) \iff f \in R(A) \cap R(B)$. *In diesem Fall:*

$$\int_{A\cup B} f\,dx = \int_A f\,dx + \int_B f\,dx - \int_{A\cap B} f\,dx.$$

Insbesondere gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

(iv) *Es seien* $f, g \in R(B)$ *und* $g \leq f$ *auf* B. *Weiter sei*

$$M_{f,g} \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \; x \in B, \; g(x) \leq y \leq f(x)\right\}.$$

Dann ist $M_{f,g}$ *messbar (im* $\mathbb{R}^{n+1}$*) und*

$$|M_{f,g}| = \int_B (f-g)\,dx.$$

Ist speziell $g = 0$ *auf* B, *so ist*

$$|M_{f,0}| = \int_B f\,dx.$$

Beispiele:

a) Betrachte $K \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ $(r > 0)$, $B \coloneqq [-r, r] \subseteq \mathbb{R}$; B ist messbar. Für $x \in B$ sei

$$f(x) \coloneqq \sqrt{r^2 - x}, \quad g(x) \coloneqq -\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Dann gilt: $f, g \in R(B)$ (klar) und $K = M_{f,g}$:

$$g(x) \leq y \leq f(x) \iff -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\iff |y| \leq \sqrt{r^2 - x^2} \iff y^2 \leq r^2 - x^2.$$

Also ist K messbar und

$$|K| = \int_B (f-g)\,dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} dx \overset{HMI}{=} \pi r^2.$$

b) Betrachte

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, z \le 1 - y^2, z \ge 0\right\},$$

und $B := [0,1]^2$; B ist messbar. Für $(x,y) \in B$ sei

$$f(x,y) := 1 - y^2.$$

Dann gilt: $K = M_{f,0}$ und $f, 0 \in R(B)$. Also ist K messbar und

$$\begin{aligned}|K| &= \int_B f(x,y) d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(1 - y^2\right) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[y - \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Satz 20.6 (Prinzip von Cavalieri)**:** *Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ messbar. Für Punkte im $\mathbb{R}^{n+1}$ schreiben wir (x,z) mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{R}$. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, daß $a \le z \le b$ $((x,z) \in B)$.*

Für $z \in [a,b]$ sei

$$Q(z) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon (x,z) \in B\}.$$

Weiter sei $Q(z)$ messbar für jedes $z \in [a,b]$. Dann ist $z \mapsto |Q(z)|$ integrierbar über $[a,b]$ und

$$|B| = \int_a^b |Q(z)| dz.$$

Beispiele:

a) $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$, $r > 0$ (Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius r). Wähle $a = -r$, $b = r$. Für $z \in [-r, r]$ ist

$$Q(z) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le r^2 - z^2\right\}$$

die Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{r^2 - z^2}$. Es gilt $|Q(z)| = \pi\left(r^2 - z^2\right)$. Also ist

$$|B| = \int_{-r}^{r} \pi\left(r^2 - z^2\right) dz = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \leq 4-z, z \in [0,4]\}$ (ein sogenannter Rotationsparaboloid). Wähle $a=0$, $b=4$. Für $z \in [0,4]$ gilt:

$$Q(z) \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 4-z\right\}.$$

Es gilt $|Q(z)| = \pi\,(4-z)$, also $|B| = \int_0^4 \pi(4-z)dz = 8\pi$.

Obiges Beispiel b) ist ein Spezialfall sogenannter

Rotationskörper: Es sei $a<b,\ f \in R([a,b])$ und $f \geq 0$ auf $[a,b]$.

Der Graph von f rotiere z.B. um die x-Achse:

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq f(x)^2\right\}.$$

Für $x \in [a,b]$ ist dann $Q(x) = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+z^2 \leq f(x)^2\}$. Also gilt: $|Q(x)| = \pi f(x)^2$ und somit: $|B| = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$.

Beispiel: Betrachte $a=0,\ b=4,\ f(x) = \sqrt{4-x}$. Dann gilt (vgl. Bsp. b))

$$|B| = \pi \int_0^4 (4-x)dx = 8\pi.$$

Definition: *Es seien $a,b \in \mathbb{R},\ a<b,\ f,g \in C([a,b])$ und $f \leq g$ auf $[a,b]$. Dann heißt die Menge*

$$B \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$$

*ein **Normalbereich bzgl. der x-Achse**. Nach 20.5 c) ist B messbar.*

Nun sei B wie in obiger Definition und $h \in C(B,\mathbb{R})$. Wir berechnen $\int_B h(x,y)d(x,y)$. Es sei

$$m \coloneqq \min f([a,b]),\ M \coloneqq \max g([a,b]),\ I \coloneqq [a,b] \times [m,M].$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_B h(x,y)d(x,y) &= \int_I h_B(x,y)d(x,y) \\ &\overset{Fubini}{=} \int_a^b \left(\int_m^M h_B(x,y)dy\right)dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)dy\right)dx. \end{aligned}$$

Definition: *a, b, f und g seien wie in obiger Definition. Dann heißt die Menge*

$$B := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [a,b],\ \ f(y) \leq x \leq g(y)\Big\}$$

*ein **Normalbereich bzgl. der y-Achse**.*

Wie oben gilt für $h \in C(B, \mathbb{R})$:

$$\int_B h(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{f(y)}^{g(y)} h(x,y)dx\right) dy.$$

Beispiele:

a)
$$B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0,1], \sqrt{x} \leq y \leq 2-x\Big\}$$

ist ein Normalbereich bzgl. der x-Achse. Somit gilt:

$$\begin{aligned}\int_B (x+y)d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2-x} (x+y)dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{\sqrt{x}}^{2-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(x(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 - x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) dx \\ &= \ldots = \frac{71}{60}.\end{aligned}$$

b)
$$B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [0,1], 0 \leq x \leq y^2\Big\}$$

ist ein Normalbereich bzgl. der y-Achse ($f(y) = 0$, $g(y) = y^2$). Also gilt:

$$\int_B xyd(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} xydx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{2}y^5 dy = \frac{1}{12}.$$

B ist auch Normalbereich bzgl. der x-Achse ($f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1$). Also gilt:

$$\int_B xyd(x,y) = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 xydy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{12}.$$

Nun sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und messbar; $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ seien stetig und es sei $f \le g$ auf A. Wir setzen

$$B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in A,\ f(x,y) \le z \le g(x,y)\right\}.$$

Dann ist B messbar. Sei $h \in C(B, \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\int_B h(x,y,z)d(x,y,z) \overset{Fubini}{=} \int_A \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} h(x,y,z)dz\right) d(x,y)$$

Beispiel: Es seien $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 1 - (x+y)$, und

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1\right\},$$

also

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x,y,z \ge 0, x+y+z \le 1\right\}.$$

Betrachte $h(x,y,z) = 2xyz$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_B 2xyzd(x,y,z) &= \int_A \left(\int_0^{1-(x+y)} 2xyzdz\right) d(x,y) \\
&= \int_A \left[xyz^2\right]_{z=0}^{z=1-(x+y)} d(x,y) \\
&= \int_A xy\left(1-(x+y)\right)^2 d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\left(1-(x+y)\right)^2 dy\right) dx \\
&= \ldots = \frac{1}{360}.
\end{aligned}$$

Satz 20.7 (Die Substitutionsregel)**:** *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ injektiv und*

$$\det g'(z) \ne 0 \quad (z \in G).$$

Weiter sei $B \subseteq G$ kompakt und messbar, $A := g(B)$ und $f \in C(A, \mathbb{R})$. Dann ist A kompakt und messbar und es gilt:

$$\int_A f(x)dx = \int_B f\left(g(z)\right)\left|\det g'(z)\right| dz.$$

20.8 Polarkoordinaten ($n = 2$):
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ($r = \|(x,y)\| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$)

$$g(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi),\ \det g'(r,\varphi) = r.$$

Betrachte $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$, $0 \leq R_1 < R_2$ und

$$A := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2],\ r \in [R_1, R_2]\}.$$

Mit $B := [R_1, R_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ ist $A = g(B)$. Ist nun $f \in C(A, \mathbb{R})$, so gilt:

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)d(x,y) &= \int_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot \underbrace{r}_{=|\det g'(r,\varphi)|} d(r,\varphi) \\ &\overset{Fubini}{=} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{R_1}^{R_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \right) d\varphi.\end{aligned}$$

Z.B. im Fall $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$ ist g nicht injektiv auf B, also auch in keiner offenen Obermenge von B. Die Substitutionsregel ist in diesem Fall trotzdem anwendbar.

Beispiele:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Hier: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, also $B = [1,2] \times [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}\int_A x\sqrt{x^2+y^2} d(x,y) &= \int_B (r\cos\varphi) r r d(r,\varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r^3 \cos\varphi dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 \cos\varphi \right]_{r=1}^{r=2} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(4\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos\varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0.\end{aligned}$$

b) Es sei $R > 0$ und

$$A_R := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}.$$

Hier: $R_1 = 0, R_2 = R$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, also $B = [0, R] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_{A_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) &= \int_B e^{-r^2} r d(r,\varphi) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R e^{-r^2} r dr \right) d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-R^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-R^2} \right) =: \alpha(R).\end{aligned}$$

Weiter sei

$$Q_R := [0,R] \times [0,R], \quad \beta(R) := \int_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y).$$

Es ist $A_R \subseteq Q_R$ und $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$, also $\alpha(R) \leq \beta(R)$. Weiter ist

$$\beta(R) = \int_0^R \left(\int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Setze $\rho := \sqrt{2}R$. Dann gilt $Q_R \subseteq A_\rho$ und somit

$$\beta(R) \leq \alpha(\rho) = \alpha\left(\sqrt{2}R\right).$$

Fazit:

$$\forall R > 0: \ \alpha(R) \leq \beta(R) \leq \alpha\left(\sqrt{2}R\right).$$

Damit folgt: $\frac{\pi}{4} = \lim_{R\to\infty} \beta(R)$. Also gilt:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \text{ ist konvergent und } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

20.9 Zylinderkoordinaten ($n = 3$):

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad g(r,\varphi,z) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \ \det g'(r,\varphi,z) = r.$$

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ wie in 20.7 und $f \in C(A,\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\int_A f(x,y,z) d(x,y,z) = \int_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot r \ d(r,\varphi,z).$$

Beispiele:

a) Es seien $R, h > 0$ und

$$A := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq R^2, \ 0 \leq z \leq h\right\}.$$

Für $B := [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,h]$ ist $g(B) = A$. Also gilt:

$$\begin{aligned} |A| &= \int_A 1 d(x,y,z) = \int_B r d(r,\varphi,z) \\ &= \int_0^h \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r dr \right) d\varphi \right) dz = 2\pi h \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^R = \pi R^2 h. \end{aligned}$$

b)

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \le 1, 0 \le y \le x, z \in [0,1]\right\},$$
$$B = [0,1] \times [0, \frac{\pi}{4}] \times [0,1].$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_A \left(x^2+y^2+z\right) d(x,y,z) &= \int_B \left(r^2+z\right) r d(r,\varphi,z) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(r^3+zr\right) dr\right) dz\right) d\varphi \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left[\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}zr^2\right]_0^1 dz \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z\right) dz = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

c)

$$A \coloneqq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le z \le 1, x^2+y^2 \le \sqrt{z}\right\}.$$
$$\int_A \left(4x^2z + 4y^2z\right) d(x,y,z) = \int_B 4r^2 zr d(r,\varphi,z),$$

wobei

$$\begin{aligned}
B &\coloneqq \left\{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le z \le 1, 0 \le r \le \sqrt[4]{z}, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\} \\
&= \left\{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (z,\varphi) \in [0,1] \times [0,2\pi], \underbrace{0}_{f(z,\varphi)} \le r \le \underbrace{\sqrt[4]{z}}_{g(z,\varphi)}\right\}.
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\int_A \left(4x^2z + 4y^2z\right) d(x,y,z) &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt[4]{z}} \left(\int_0^{2\pi} 4r^3 z d\varphi\right) dr\right) dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[r^4 z\right]_{r=0}^{r=\sqrt[4]{z}} dz \\
&= 2\pi \int_0^1 z^2 dz = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

20.10 Kugelkoordinaten ($n = 3$): Für $\varphi = [0, 2\pi]$, $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$r = \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ z = r\sin\vartheta,$$

$$g(r,\varphi,\vartheta) \coloneqq (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta),$$

$$|\det g'(r,\varphi,\vartheta)| = r^2\cos\vartheta.$$

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ wie in 20.6 (also $A = g(B)$), so gilt für $f \in C(A,\mathbb{R})$:

$$\int_A f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_B f(g(r,\varphi,\vartheta))\cdot r^2\cos\vartheta \; d(r,\varphi,\vartheta).$$

Beispiel: Es sei

$$A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x,y,z\geq 0,\; x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}.$$

Für $B = \underbrace{\left[0,1\right]}_{r} \times \underbrace{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}_{\varphi} \times \underbrace{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}_{\vartheta}$ ist $g(B) = A$.

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\int_A x\sqrt{x^2+y^2+z^2}d(x,y,z) &= \int_B (r\cos\varphi\cos\vartheta)rr^2\cos\vartheta d(r,\varphi,\vartheta)\\
&= \int_B r^4\cos^2\vartheta\cos\varphi d(r,\varphi,\vartheta)\\
&= \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos^2\vartheta\cos\varphi d\varphi\right)d\vartheta\right)dr\\
&= \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos^2\vartheta d\vartheta\right)dr\\
&= \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{20}.
\end{aligned}$$

Kapitel 21

Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition: *Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Gleichung*

$$(*) \qquad f(x, y(x), y'(x)) = 0$$

*heißt eine **Differentialgleichung (Dgl.)** 1. **Ordnung**. Sind $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, so heißt*

$$(A) \begin{cases} f(x, y(x), y'(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

*ein **Anfangswertproblem (AWP)**.*

*Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $y \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt y eine **Lösung von** $(*)$ **auf** $I :\iff y$ ist auf I differenzierbar und*

$$\forall x \in I: \ (x, y(x), y'(x)) \in D \text{ und } f(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

*Ist y eine Lösung von $(*)$ auf I, ist $x_0 \in I$ und $y(x_0) = y_0$, so heißt y eine **Lösung des Anfangswertproblems** (A) **auf** I.*

Beispiele:

a) $D = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = xy - z$. Also: $f(x, y(x), y'(x)) = 0 \iff y'(x) = xy(x)$. Dann ist

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = xy(x)$ auf $\mathbb{R}$ (nachrechnen).

b) $D = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) \coloneqq y^2 + 1 - z$. Also:

$$f(x, y(x), y'(x)) = 0 \iff y'(x) = 1 + y^2(x).$$

Dann ist $y(x) = \tan x$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 1 + y^2(x)$ auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Weiter ist $y(x) = \tan x$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + y^2(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen:

Satz 21.1: *Es seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, es seien $f \in C(I_1, \mathbb{R})$ und $g \in C(I_2, \mathbb{R})$. Die Differentialgleichung*

$$y'(x) = f(x)g(y(x)) \tag{1}$$

*heißt eine **Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen**.*
Gilt $g(y) \neq 0$ $(y \in I_2)$, so erhält man die Lösungen von (1), indem man die Gleichung

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c$$

nach y auflöst.

Beweis: Es seien $H : I_2 \to \mathbb{R}$ bzw. $F : I_1 \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $\frac{1}{g}$ bzw. f. Die Funktion H ist streng monoton und hat eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion H^{-1}. Setze $y(x) = H^{-1}(F(x))$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für das diese Verkettung definiert ist. Dann gilt:

$$y'(x) = \frac{1}{H'(H^{-1}(F(x)))} f(x) = f(x)g(y(x)) \quad (x \in I).$$

$\square$

Merkregel:

$$y' = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

Beispiele: In den folgenden Beispielen bestimme man zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und dann die Lösung des Anfangswertproblems.

a)

$$AWP \begin{cases} y'(x) = 1 + y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Longrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dx \Longrightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int dx + c$$
$$\Longrightarrow \arctan(y) = x + c \Longrightarrow y = \tan(x+c).$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \tan(x+c).$$

Wir betrachten die Lösungen für $|x+c| < \frac{\pi}{2}$.
Lösung des Anfangswertproblems:

$$1 = y(0) = \tan c,\ |c| < \pi/2 \ \Rightarrow \ c = \frac{\pi}{4}.$$

Es gilt:

$$\left|x + \frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{2} \iff x \in \left(-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right) =: I.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also:

$$y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (x \in I).$$

b)

$$AWP \begin{cases} y'(x) = -\frac{x}{y(x)} \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Longrightarrow \int ydy = -\int xdx + \tilde{c}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{c} \Longrightarrow \underbrace{y^2 = -x^2 + c}_{\Rightarrow c \geq 0},\ c = 2\tilde{c} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{c - x^2}.$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \pm\sqrt{c - x^2} \quad (x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})).$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$2 = y(0) = \pm\sqrt{c} \ \Rightarrow \ 2 = \sqrt{c} \ \Rightarrow \ c = 4.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also:

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad (x \in (-2, 2)).$$

c)

$$AWP \begin{cases} y'(x) = e^{y(x)} \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y \sin x \Longrightarrow \frac{dy}{e^y} = \sin x dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int \sin x dx + c$$
$$\Longrightarrow -e^{-y} = -\cos x + c \Longrightarrow e^{-y} = \cos x - c \Longrightarrow -y = \log\left(\cos x - c\right).$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = -\log(\cos x - c).$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$0 = y(0) = -\log(1-c) \iff 1 - c = 1 \iff c = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also:

$$y(x) = -\log(\cos x) \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})).$$

d)

$$AWP \begin{cases} y'(x) = \frac{1}{xy(x)} \\ y(1) = -1 \end{cases}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy} \Longrightarrow ydy = \frac{1}{x}dx \Longrightarrow \int ydy = \int \frac{1}{x}dx + \tilde{c}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}y^2 = \log|x| + \tilde{c} \Longrightarrow y^2 = \log x^2 + c,\ c = 2\tilde{c}.$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \pm\sqrt{\log x^2 + c}.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$-1 = y(1) = \pm\sqrt{c} \Rightarrow -1 = -\sqrt{c} \Rightarrow c = 1.$$

Bestimmung des Definitionsintervalls: Es gilt

$$\log x^2 + 1 > 0 \iff \log x^2 > -1 \iff x^2 > \frac{1}{e} \iff x > \frac{1}{\sqrt{e}} \vee x < -\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = -\sqrt{\log x^2 + 1} \quad (x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty)).$$

Lineare Differentialgleichungen:

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha, s \colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$y'(x) = \alpha(x)y(x) + s(x) \tag{2}$$

heißt eine **lineare Differentialgleichung** und s heißt **Störfunktion**. Die Differentialgleichung

$$y'(x) = \alpha(x)y(x) \tag{3}$$

heißt die zu (2) gehörige **homogene Gleichung**. Ist $s \neq 0$ (also nicht die Nullfunktion), so heißt die Gleichung (2) **inhomogen**.

Satz 21.2: *Es sei β eine Stammfunktion von α auf I.*

a) Es sei $y \colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

(i) y ist eine Lösung von (3) auf $I \iff \exists c \in \mathbb{R} : y(x) = ce^{\beta(x)}$.

(ii) Sei y_p eine spezielle Lösung von (2) auf I. Dann gilt:
y ist eine Lösung von (2) auf $I \iff \exists c \in \mathbb{R} : y(x) = y_p(x) + ce^{\beta(x)}$.

b) Variation der Konstanten: Der Ansatz

$$y_p(x) = c(x)e^{\beta(x)}$$

mit einer noch unbekannten Funktion c führt auf eine spezielle Lösung von (2) auf I (siehe Beweis).

c) Es sei $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = \alpha(x)y(x) + s(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung.

Beweis:

a) (i) Ist $c \in \mathbb{R}$ und $y(x) = ce^{\beta(x)}$, so gilt:

$$y'(x) = c\beta'(x)e^{\beta(x)} = \alpha(x)ce^{\beta(x)} = \alpha(x)y(x) \quad (x \in I).$$

Ist umgekehrt $y\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (3), so gilt für

$$\phi(x) := e^{-\beta(x)}y(x) \quad (x \in I):$$

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= -\beta'(x)e^{-\beta(x)}y(x) + e^{-\beta(x)}y'(x) \\ &= -\alpha(x)e^{-\beta(x)}y(x) + e^{-\beta(x)}\alpha(x)y(x) = 0. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in I: \ \phi(x) = c.$$

Also gilt:

$$y(x) = ce^{\beta(x)} \quad (x \in I).$$

(ii) Ist $y(x) = y_p(x) + \underbrace{ce^{\beta(x)}}_{=:y_h(x)}$ $(x \in I)$, so gilt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_p'(x) + y_h'(x) \\ &= \alpha(x)y_p(x) + s(x) + \alpha(x)y_h(x) \\ &= \alpha(x)\left(y_p(x) + y_h(x)\right) + s(x) = \alpha(x)y(x) + s(x). \end{aligned}$$

Ist umgekehrt y eine Lösung von (2) auf I, so gilt für $y_h(x) := y(x) - y_p(x)$:

$$\begin{aligned} y_h'(x) &= y'(x) - y_p'(x) \\ &= (\alpha(x)y(x) + s(x)) - (\alpha(x)y_p(x) + s(x)) \\ &= \alpha(x)\left(y(x) - y_p(x)\right) = \alpha(x)y_h(x). \end{aligned}$$

Also ist y_h eine Lösung von (3) auf I, somit von der Form $y_h(x) = ce^{\beta(x)}$. Damit ist

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + ce^{\beta(x)}.$$

b) Differenzieren des Ansatzes liefert:

$$y_p'(x) = c'(x)e^{\beta(x)} + c(x)\beta'(x)e^{\beta(x)} = \left(c'(x) + c(x)\alpha(x)\right)e^{\beta(x)}.$$

Also gilt: y_p ist Lösung von (2) auf I

$$\begin{aligned}&\iff \left(c'(x)+c(x)\alpha(x)\right)e^{\beta(x)} = \alpha(x)c(x)e^{\beta(x)} + s(x)\\&\iff c'(x)e^{\beta(x)} = s(x) \iff c'(x) = s(x)e^{-\beta(x)}.\end{aligned}$$

Wähle eine Stammfunktion von c'. Hieraus ergibt sich y_p.

c) Die allgemeine Lösung von (2) ist $y(x) = y_p(x) + ce^{\beta(x)}$.

$$y_0 = y(x_0) = ce^{\beta(x_0)} + y_p(x_0) \iff c = \left(y_0 - y_p(x_0)\right)e^{-\beta(x_0)}.$$

$\square$

Beispiele:

a) Betrachte

$$(*) \quad y'(x) = (\sin x)y(x) + \sin x.$$

Hier: $\alpha(x) = \sin x$, $s(x) = \sin x$, $I = \mathbb{R}$. Wähle $\beta(x) = -\cos x$.

1. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y(x) = ce^{-\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$.
2. Ansatz für eine spezielle Lösung von $(*)$: $y_p(x) = c(x)e^{-\cos x}$.

$$\begin{aligned}y_p'(x) &= c'(x)e^{-\cos x} + c(x)e^{-\cos x}\sin x\\&\overset{!}{=} y_p(x)\sin x + \sin x\\&= c(x)e^{-\cos x}\sin x + \sin x.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c'(x)e^{-\cos x} = \sin x \Rightarrow c'(x) = \sin x e^{\cos x}.$$

Wähle $c(x) = -e^{\cos x}$. Damit ist $y_p(x) = -1$.

3. Allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = ce^{-\cos x} - 1, \ c \in \mathbb{R}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = (\sin x)\, y(x) + \sin x \\ y(0) = 3 \end{cases}.$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = ce^{-\cos x} - 1,\ c \in \mathbb{R}.$$

Es gilt:

$$3 = y(0) = ce^{-1} - 1 \iff ce^{-1} = 4 \iff c = 4e.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = 4e^{1-\cos x} - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

c) Betrachte

$$(*) \quad y'(x) = 2xy(x) + x.$$

Hier: $\alpha(x) = 2x,\ s(x) = x,\ I = \mathbb{R}$. Wähle $\beta(x) = x^2$.

1. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y(x) = ce^{x^2},\ c \in \mathbb{R}$.
2. Ansatz für eine spezielle Lösung von $(*)$: $y_p(x) = c(x)e^{x^2}$.

$$y_p'(x) = c'(x)e^{x^2} + c(x)2xe^{x^2} \stackrel{!}{=} 2xy_p(x) + x = 2xc(x)e^{x^2} + x$$

$$\Rightarrow c'(x)e^{x^2} = x \Rightarrow c'(x) = xe^{-x^2}.$$

Wähle $c(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$. Damit ist $y_p(x) = -\frac{1}{2}$.

3. Allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2},\ c \in \mathbb{R}.$$

d) Betrachte

$$(*) \quad y'(x) = -\frac{1}{x}y(x) + x.$$

Hier: $\alpha(x) = -\frac{1}{x},\ s(x) = x,\ I = (0, \infty)$.
Bemerkung: Man kann alternativ auch das Intervall $(-\infty, 0)$ betrachten.
Wähle $\beta(x) = -\log x$.

1. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y(x) = ce^{-\log x} = \frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R}$.

2. Ansatz für eine spezielle Lösung von $(*)$: $y_p(x) = \frac{c(x)}{x}$.

$$y_p'(x) = c'(x)\frac{1}{x} - c(x)\frac{1}{x^2} \overset{!}{=} -\frac{1}{x}y_p(x) + x = -\frac{1}{x^2}c(x) + x$$

$$\Rightarrow c'(x)\frac{1}{x} = x \Rightarrow c'(x) = x^2.$$

   Wähle $c(x) = \frac{1}{3}x^3$. Damit ist $y_p(x) = \frac{1}{3}x^2$.

3. Allgemeine Lösung von $(*)$ auf $(0,\infty)$:

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{1}{3}x^2,\ c \in \mathbb{R}.$$

e) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{1}{x}y(x) + x \\ y(1) = -1 \end{cases}.$$

Es gilt:

$$-1 = y(1) = \frac{c}{1} + \frac{1}{3} \iff c = -\frac{4}{3}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit:

$$y(x) = -\frac{4}{3x} + \frac{1}{3}x^2 \quad (x \in (0,\infty)).$$

Bernoulli- und Riccati-Differentialgleichungen:

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $g, h \in C(I,\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung

$$(*) \qquad y'(x) + g(x)y(x) + h(x)\left(y(x)\right)^\alpha = 0$$

heißt **Bernoullische Differentialgleichung**. Im Fall $\alpha = 0$ erhält man eine lineare Differentialgleichung (inhomogen, falls $h \neq 0$). Im Fall $\alpha = 1$ erhält man eine homogene lineare Differentialgleichung.

Nun sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Wir betrachten die Transformation $z(x) = \left(y(x)\right)^{1-\alpha}$:

$$\begin{aligned} z'(x) &= (1-\alpha)\left(y(x)\right)^{-\alpha} y'(x) \\ &= (1-\alpha)\left(y(x)\right)^{-\alpha}\left(-g(x)y(x) - h(x)\left(y(x)\right)^\alpha\right) \\ &= -(1-\alpha)g(x)\left(y(x)\right)^{1-\alpha} - (1-\alpha)h(x) \\ &= -(1-\alpha)g(x)z(x) - (1-\alpha)h(x). \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für z. Sei z eine Lösung dieser Gleichung auf I. Setze $y(x) \coloneqq z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ für x aus einem Intervall $I_1 \subseteq I$, für das $(z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$ eine differenzierbare Funktion liefert. Dann ist y eine Lösung von $(*)$ auf I_1.

Beispiel: Betrachte auf $I = (-1, \infty)$:

$$y'(x) + \frac{y(x)}{1+x} + (1+x)y^4(x) = 0.$$

Für

$$z(x) \coloneqq (y(x))^{1-4} = \frac{1}{y^3(x)}$$

ist

$$z'(x) = -\frac{3}{y^4(x)} \cdot y'(x) = \frac{3}{y^4(x)} \left(\frac{y(x)}{1+x} + (1+x)y^4(x) \right) = \frac{3}{1+x} z(x) + 3(1+x).$$

Eine Lösung dieser linearen Differentialgleichung auf I ist z.B.

$$z(x) = (1+x)^2(2x-1).$$

Damit ist

$$y(x) = (z(x))^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(2x-1)}}$$

eine Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung auf $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Nun seien $g, h, k \in C(I, \mathbb{R})$. Die Differentialgleichung

$$(**) \qquad y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^2(x) = k(x)$$

heißt **Riccatische Differentialgleichung**. Sind y_1, y_2 Lösungen von $(**)$ auf $I_1 \subseteq I$, so gilt für $u \coloneqq y_1 - y_2$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left[-g(x)y_1(x) - h(x)\left(y_1(x)\right)^2 + k(x) \right] - \left[-g(x)y_2(x) - h(x)\left(y_2(x)\right)^2 + k(x) \right] \\ &= -g(x)u(x) - h(x)\left((y_1(x))^2 - (y_2(x))^2 \right) \\ &= -g(x)u(x) - h(x)u(x)\left(y_1(x) + y_2(x)\right) \\ &= -g(x)u(x) - h(x)u(x)\left(u(x) + 2y_2(x)\right) \\ &= -\left(g(x) + 2h(x)y_2(x)\right)u(x) - h(x)u^2(x). \end{aligned}$$

Fazit: Ist eine Lösung y_2 von $(**)$ bekannt (z.B. durch „erraten“), so liefern Lösungen $u \neq 0$ obiger Bernoulli Differentialgleichung für u weitere Lösungen von $(**)$ der Form $y_2(x) + u(x)$.

Kapitel 22

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

In diesem §en sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$.
Erinnerung: $y = (y_1, \ldots, y_n) \colon I \to \mathbb{R}^n$ ist auf I differenzierbar $\iff$ $y_1, \ldots, y_n$ sind auf I differenzierbar. In diesem Fall:

$$y'(x) = (y_1'(x), \ldots, y_n'(x)) \quad (x \in I).$$

Definition: *Es sei $f, F : I \to \mathbb{R}^n$ Funktionen mit $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$. Dann heißt F eine* ***Stammfunktion*** *von f auf I und wir schreiben*

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Im Folgenden sei $A = (a_{jk})$ eine reelle $n \times n$-Matrix und $b_j \colon I \to \mathbb{R}$ stetig $(j = 1, \ldots, n)$. Wir betrachten das sogenannte **lineare Differentialgleichungssystem**

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \ldots + a_{1n}y_n(x) + b_1(x)\\
y_2'(x) &= a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \ldots + a_{2n}y_n(x) + b_2(x)\\
\vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
y_1'(x) &= a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \ldots + a_{nn}y_n(x) + b_n(x)
\end{aligned}$$

Mit $y \coloneqq (y_1, \ldots, y_n)^T$ und $b \coloneqq (b_1, \ldots, b_n)^T$ schreibt sich dieses System in der Form:

$$y'(x) = Ay(x) + b(x) \tag{1}$$

Das System

$$y'(x) = Ay(x) \tag{2}$$

heißt das zu (1) gehörende **homogene System** ((1) heißt **inhomogen**, falls $b \neq 0$). Gesucht sind jetzt also vektorwertige Funktionen die (1) bzw. (2) erfüllen.

Satz 22.1 (ohne Beweis)**:**

a) *Die Lösungen von* (2) *sind auf ganz* $\mathbb{R}$ *definiert. Es sei*

$$V := \{y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : y \textit{ ist eine Lösung von } (2)\}.$$

Dann ist V *ein reeller Vektorraum und* $\dim V = n$. *Jede Basis von* V *heißt eine* ***Fundamentalsystem*** (FS) *von* (2).

b) *Ist* y_p *eine spezielle Lösung von* (1) *auf* I, *so gilt:*

$$y \textit{ ist eine Lösung von } (1) \textit{ auf } I \iff \exists y_h \in V\colon y(x) = y_p(x) + y_h(x) \ (x \in I).$$

c) *Ist* $x_0 \in I$ *und* $y_0 \in \mathbb{R}^n$, *so hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

auf I *genau eine Lösung.*

Vorbemerkung:
Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein zugehörige Eigenvektor, also $Av = \lambda v$. Dann gilt mit $y(x) := e^{\lambda x} v$:

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} v = e^{\lambda x} Av = A\left(e^{\lambda x} v\right) = Ay(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Wir betrachten zunächst (2): Es sei $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$. Da A reell ist hat p reelle Koeffizienten. Daher gilt (Übung): Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $p(\lambda_0) = 0$, so ist auch $p(\overline{\lambda_0}) = 0$.

Beachte:

$$\forall \lambda_0 \in \mathbb{C}: \ \operatorname{kern}(A - \lambda_0 I) \subseteq \operatorname{kern}(A - \lambda_0 I)^2 \subseteq \operatorname{kern}(A - \lambda_0 I)^3 \subseteq \dots$$

Lösungsmethode für (2): (ohne Beweis)

1. Bestimme die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ von A $(r \leq n)$ und deren (algebraische) Vielfachheit $k_1, \ldots, k_r$, also

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{k_r}.$$

Ordne diese wie folgt an:

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R},\ \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

mit $\lambda_{m+1} = \mu_1, \ldots, \lambda_{m+s} = \mu_s$ und $\lambda_{m+s+1} = \overline{\mu_1}, \ldots, \lambda_r = \overline{\mu_s}$. Setze

$$M := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+s}\};$$

$\lambda_{m+s+1}, \ldots, \lambda_r$ bleiben unberücksichtigt!

2. Für jedes $\lambda_j \in M$ bestimme man eine Basis von $V_j := \operatorname{kern}(A - \lambda_j I)^{k_j}$ wie folgt: Bestimme eine Basis von $\operatorname{kern}(A - \lambda_j I)$, ergänze diese zu einer Basis von $\operatorname{kern}(A - \lambda_j I)^2, \ldots$.

3. Es sei $\lambda_j \in M$ und v ein Basisvektor von V_j. Setze $y(x) :=$

$$e^{\lambda_j x}\left(v + \frac{x}{1!}(A - \lambda_j I)v + \frac{x^2}{2!}(A - \lambda_j I)^2 v + \ldots + \frac{x^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!}(A - \lambda_j I)^{k_j - 1} v\right).$$

Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Dann ist $y(x) \in \mathbb{R}^n$ $(x \in \mathbb{R})$ und y ist eine Lösung von (2) auf $\mathbb{R}$.
Fall 2: $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann ist $y(x) \in \mathbb{C}^n$ $(x \in \mathbb{R})$. Zerlege $y(x)$ komponentenweise in Real- und Imaginärteil:

$$y(x) = \underbrace{y^{(1)}(x)}_{\in \mathbb{R}^n} + i\, \underbrace{y^{(2)}(x)}_{\in \mathbb{R}^n}.$$

Dann sind $y^{(1)}, y^{(2)}$ linear unabhängige Lösungen von (2) auf $\mathbb{R}$.

4. Führt man 3. für jedes $\lambda_j \in M$ und jeden Basisvektor von V_j durch, so erhält man ein Fundamentalsystem von (2).

Beispiele:

a) Betrachte

$$(*) \qquad y'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} y(x).$$

Hier ist $n = 2$ und

$$\det\left(A - \lambda I\right) = (1-\lambda)^2 + 4 = \left(\lambda - (1+2i)\right)\left(\lambda - (1-2i)\right),$$

also $\lambda_1 = 1 + 2i$, $k_1 = 1$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, $k_2 = 1$. Setze $M := \{1 + 2i\}$. Es gilt:

$$\operatorname{kern}(A - \lambda_1 I) = \left[\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Setze

$$\begin{aligned} y(x) &:= e^{(1+2i)x}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = e^x\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right)\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{e^x\begin{pmatrix} -2\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}}_{=:y^{(1)}(x)} + i\,\underbrace{e^x\begin{pmatrix} 2\cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}}_{=:y^{(2)}(x)}. \end{aligned}$$

Fundamentalsystem für $(*)$: $y^{(1)}, y^{(2)}$.
Allgemeine Lösung von $(*)$: $y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Betrachte

$$(*) \qquad y'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} y(x).$$

Hier ist $n = 3$ und

$$\det\left(A - \lambda I\right) = -(\lambda - 2)\left(\lambda - 1\right)^2,$$

also $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $k_2 = 2$, also $M = \{1, 2\}$.
$\lambda_1 = 2$: Es gilt:

$$\operatorname{kern}(A - 2I) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

$$y^{(1)}(x) := e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung von } (*).$$

$\lambda_2 = 1$: Es gilt:

$$\mathrm{kern}(A-I) = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right] \subseteq \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \mathrm{kern}(A-I)^2.$$

Weitere Lösungen von $(*)$ sind also

$$y^{(2)}(x) := e^x \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und}$$

$$y^{(3)}(x) := e^x \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x(A-I)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = e^x \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) = e^x \begin{pmatrix}-x\\-x\\1\end{pmatrix}.$$

Fundamentalsystem von $(*)$: $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$.

c) Es sei A wie in Beispiel b). Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) \\ y(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases}.$$

Allgemeine Lösung von $y'(x) = Ay(x)$:

$$y(x) = c_1 e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix}-x\\-x\\1\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = y(0) = c_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = -e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + e^x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2e^x\begin{pmatrix}-x\\-x\\1\end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun das **inhomogene System**.

$$y'(x) = Ay(x) + b(x) \tag{1}$$

Es sei $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y'(x) = Ay(x)$. Setze

$$Y(x) \coloneqq \left(y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $Y(x)$ eine reelle $n \times n$-Matrix mit j-ter Spalte $y^{(j)}(x)$. Sie heißt ebenfalls **Fundamentalsystem** oder auch **Fundamentalmatrix** (FM). Die Lösungen von (2) sind somit genau die Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Form

$$y(x) = Y(x)c, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 22.2 (ohne Beweis)**:** *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\det Y(x) \neq 0$

Für eine spezielle Lösung $y_p : I \to \mathbb{R}^n$ von (1) gehe wie folgt vor:

Ansatz: $y_p(x) = Y(x)c(x)$

mit einer noch unbekannten Funktion $c : I \to \mathbb{R}^n$.

Dann gilt (ohne Beweis):
y_p ist eine Lösung von (1) auf $I \iff c'(x) = (Y(x))^{-1}b(x)$ $(x \in I)$.

Wähle eine Stammfunktion

$$c(x) = \int (Y(x))^{-1}b(x)dx$$

und erhalte damit y_p.

Beispiel: Betrachte

$$(*) \qquad y'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -4\\1 & 1\end{pmatrix}}_{=:A} y(x) + \underbrace{\begin{pmatrix}2e^x\\2e^x\end{pmatrix}}_{=:b(x)}.$$

1. Bekannt: Eine Fundamentalmatrix von $y'(x) = Ay(x)$ ist

$$Y(x) = e^x \begin{pmatrix} -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

2. Spezielle Lösung von $(*)$: Es gilt:

$$(Y(x))^{-1} = \frac{e^{-x}}{2} \begin{pmatrix} -\sin(2x) & 2\cos(2x) \\ \cos(2x) & 2\sin(2x) \end{pmatrix},$$

also

$$(Y(x))^{-1}b(x) = \begin{pmatrix} 2\cos(2x) - \sin(2x) \\ \cos(2x) + 2\sin(2x) \end{pmatrix} = c'(x).$$

Wähle

$$c(x) = \begin{pmatrix} \sin(2x) + \cos(2x)/2 \\ \sin(2x)/2 - \cos(2x) \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^x \begin{pmatrix} -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(2x) + \cos(2x)/2 \\ \sin(2x)/2 - \cos(2x) \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = Y(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + y_p(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Kapitel 23

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In diesem §en sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $b\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Ist $y\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar auf I, so setze

$$Ly \coloneqq y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y.$$

Die Differentialgleichung

$$(Ly)\,(x) = b(x) \tag{1}$$

heißt **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**. Die Gleichung

$$(Ly)(x) = 0 \tag{2}$$

heißt die zu (1) gehörige **homogene Gleichung** ((1) heißt **inhomogen**, falls $b \neq 0$).

Satz 23.1 (ohne Beweis)**:**

a) Die Lösungen von (2) *existieren auf* $\mathbb{R}$.

b) Es sei $V \coloneqq \Big\{ y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon y$ *ist eine Lösung von* (2) $\Big\}$.
Dann ist V *ein reeller Vektorraum und* $\dim V = n$. *Jede Basis von* V *heißt ein* ***Fundamentalsystem*** *von* (2).

c) Ist y_p *eine spezielle Lösung von* (1) *auf* I, *so gilt:*

$$y \text{ ist eine Lösung von } (1) \text{ auf } I \iff \exists y_h \in V\ \forall x \in I : y(x) = y_p(x) + y_h(x).$$

d) Es sei $x_0 \in I$ und es seien $\eta_0, \ldots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} (Ly)(x) = b(x) \\ y(x_0) = \eta_0,\ y'(x_0) = \eta_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1} \end{cases}$$

auf I genau eine Lösung.

Lösungsmethode für (2): $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0$.
Das Polynom

$$p(\lambda) \coloneqq \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_1\lambda + a_0$$

heißt **charakteristisches Polynom für** (2).

Wie in §22 sei

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{k_r} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j).$$

1. Mit

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R},\ \lambda_{m+1} = \mu_1, \ldots, \lambda_{m+s} = \mu_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ \lambda_{m+s+1} = \overline{\mu_1}, \ldots, \lambda_r = \overline{\mu_s}$$

sei

$$M \coloneqq \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+s}\}.$$

2. Es sei $\lambda_j \in M$.

Fall 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Dann sind

$$e^{\lambda_j x},\ xe^{\lambda_j x}, \ldots,\ x^{k_j-1}e^{\lambda_j x}$$

k_j linear unabhängige Lösungen von (2).

Fall 2: $\lambda_j = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Dann sind

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{k_j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ &e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ x^{k_j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

$2k_j$ linear unabhängige Lösungen von (2).

3. Führt man 2. für jedes $\lambda_j \in M$ durch, so erhält man ein Fundamentalsystem von (2).

Beispiele:

a) Betrachte

$$(*) \qquad y^{(5)}(x) + 4y^{(4)}(x) + 2y'''(x) - 4y''(x) + 8y'(x) + 16y(x) = 0.$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 \\ &= (\lambda+2)^3 (\lambda - (1+i)) (\lambda - (1-i)) \end{aligned}$$

Hier: $\lambda_1 = -2$, $k_1 = 3$, $\lambda_2 = 1+i$, $k_2 = 1$ ($\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$). Setze $M = \{-2, 1+i\}$.

Fundamentalsystem von $(*)$: e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}, $e^x \cos x$, $e^x \sin x$.
Allgemeine Lösung von $(*)$:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 x^2 e^{-2x} + c_4 e^x \cos x + c_5 e^x \sin x \\ &= e^{-2x} \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \right) + e^x \left(c_4 \cos x + c_5 \sin x \right), \end{aligned}$$

mit $c_1, \ldots, c_5 \in \mathbb{R}$.

b) Betrachte

$$(*) \qquad y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2).$$

Hier: $\lambda_1 = -1$, $k_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $k_2 = 1$, also $M = \{-1, -2\}$.

Fundamentalsystem von $(*)$: e^{-x}, e^{-2x}.
Allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases} .$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$.

$$1 = c_1 + c_2 = y(0) \Rightarrow c_2 = 1 - c_1$$

Es gilt: $y'(x) = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$.

$$1 = y'(0) = -c_1 - 2c_2 = -c_1 - 2(1 - c_1) = -c_1 - 2 + 2c_1 = c_1 - 2$$

Also: $c_1 = 3$ und $c_2 = -2$.
Die Lösung des Anfangswertproblems ist:

$$y(x) = 3e^{-x} - 2e^{-2x}.$$

d) Betrachte

$$(*) \qquad y'''(x) - 3y''(x) = 0.$$

Charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2 (\lambda - 3).$$

Hier: $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $k_2 = 1$.

Fundamentalsystem von $(*)$: e^{0x}, xe^{0x}, e^{3x}, also $1, x, e^{3x}$.
Allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten nun die **inhomogenen Gleichung**

$$(Ly)(x) = b(x) \tag{1}$$

für spezielle Funktionen $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es seien $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$, q ein Polynom vom Grad m, und b habe die Gestalt

$$b(x) = q(x)e^{\gamma x} \cos(\delta x) \quad \text{oder} \quad b(x) = q(x)e^{\gamma x} \sin(\delta x).$$

Sei p das charakteristische Polynom von

$$(Ly)(x) = 0 \tag{2}$$

Fall 1: $p(\gamma + i\delta) \neq 0$. Wähle den Ansatz:

$$y_p(x) := (\hat{q}(x)\cos(\delta x) + \tilde{q}(x)\sin(\delta x))\, e^{\gamma x}.$$

Fall 2: $\gamma + i\delta$ ist eine ν-fache Nullstelle von p. Wähle den Ansatz:

$$y_p(x) := x^\nu\, (\hat{q}(x)\cos(\delta x) + \tilde{q}(x)\sin(\delta x))\, e^{\gamma x}.$$

In beiden Fällen sind $\hat{q}$ und $\tilde{q}$ Polynome vom Grade m. In beiden Fällen führt obiger Ansatz zu einer speziellen Lösung y_p von (1).

Beispiele:

a) Betrachte

$$(*) \qquad y'''(x) - y'(x) = x - 1.$$

1. Allgemeine Lösung von $y'''(x) - y'(x) = 0$:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

   Fundamentalsystem: 1, e^x, e^{-x}.

2. $b(x) = x-1$. Also: $\gamma = \delta = 0$, $q(x) = x-1$, $m = 1$. Es gilt: $p(\gamma+i\delta) = p(0) = 0$, $\nu = 1$. Ansatz:

$$y_p(x) = x(ax+b) = ax^2 + bx.$$

   Es gilt $y_p'(x) = 2ax + b$; $y_p'''(x) = 0$. Also:

$$x - 1 \overset{!}{=} y_p'''(x) - y_p'(x) = -2ax - b \iff -2a = 1, b = 1$$

   und somit $y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

3. Allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Betrachte

$$(*) \qquad y''(x) + 4y'(x) = \cos(2x).$$

1. Allgemeine Lösung von $y''(x) + 4y'(x) = 0$:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda + 4).$$

Fundamentalsystem: 1, e^{-4x}.

2. $b(x) = \cos(2x)$. Also: $\gamma = 0$, $\delta = 2$, $q(x) = 1$, $m = 0$. Es gilt $p(\gamma + i\delta) = p(2i) \neq 0$. Ansatz:
$$y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x).$$

Es gilt:

$$y_p'(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x),$$
$$y_p''(x) = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\cos(2x) \overset{!}{=} y_p''(x) + 4y_p'(x) = (8b - 4a)\cos(2x) - (4b + 8a)\sin(2x)$$

$$\iff 8b - 4a = 1,\ 4b + 8a = 0 \iff a = -\frac{1}{20},\ b = \frac{1}{10}.$$

Somit:
$$y_p(x) = \frac{1}{10}\sin(2x) - \frac{1}{20}\cos(2x).$$

Allgemeine Lösung von $(*)$:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{20}\left(2\sin(2x) - \cos(2x)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Der Zusammenhang zwischen §22 und §23: Es sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung (1), also

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x) \quad (x \in I).$$

Für $k = 1, \ldots, n$ sei $u_k : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u_1 = y,\ u_2 = y',\ u_3 = y'', \ldots, u_n = y^{(n-1)}.$$

Dann gilt auf I:
$$u_1' = u_2,\ u_2' = u_3, \ldots, u_{n-1}' = u_n,$$

und

$$\begin{aligned} u_n' = y^{(n)} &= b - (a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y) \\ &= b - (a_{n-1}u_n + \ldots + a_1 u_2 + a_0 u_1) \end{aligned}$$

D.h. die Funktion $u : I \to \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \ldots u_n)^\top$ ist Lösung des linearen Differentialgleichungssystems $u'(x) = Au(x) + c(x)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und

$$c(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Ist umgekehrt $u : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung dieses linearen Differentialgleichungssystems $u'(x) = Au(x) + c(x)$, so ist die erste Koordinatenfunktion $y := u_1 : I \to \mathbb{R}$ von u eine Lösung der Differentialgleichung (1).

Kapitel 24

Die Fouriertransformation

Definition:

a) *Eine Funktion* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt* ***auf*** $[a,b]$ ***stückweise stetig*** $:\Longleftrightarrow$
$\exists t_0, t_1, \ldots, t_m \in [a,b]:$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b, \quad g \in C\left((t_{j-1}, t_j)\right) \ (j = 1, \ldots, m)$$

und es existiert die folgenden einseitigen Grenzwerte:

$$g(a+),\ g(b-),\ g(t_j+),\ g(t_j-) \quad (j = 1, \ldots, m-1).$$

b) *Eine Funktion* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt* ***auf*** $[a,b]$ ***stückweise glatt*** $:\Longleftrightarrow$
$\exists t_0, t_1, \ldots, t_m \in [a,b]:$

$$t_0 = a < t_1 < \ldots < t_m = b, \quad g \in C^1\left((t_{j-1}, t_j)\right) \ (j = 1, \ldots, m)$$

und es existieren die folgenden einseitigen Grenzwerte:

$$g(t_j+),\ g(t_j-),\ g'(t_j+),\ g'(t_j-) \quad (j = 1, \ldots, m-1),$$

$$g(a+),\ g'(a+),\ g'(b-),\ g(b-).$$

c) *Eine Funktion* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt* ***auf*** $\mathbb{R}$ ***stückweise stetig*** *bzw.* ***glatt*** $:\Longleftrightarrow$ *g ist auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stückweise stetig bzw. glatt.*

d) *Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise glatt und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann existieren $g'(x_0+)$ und $g'(x_0-)$. Setze*

$$(*) \qquad g'(x_0) := \frac{1}{2}\left(g'(x_0+) + g'(x_0-)\right).$$

Beachte: Ist g in x_0 differenzierbar, so stimmt $(*)$ mit der üblichen Ableitung überein.

Bemerkung: Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise glatt, so ist $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig.

Beispiel: Die Funktion $g(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist auf $\mathbb{R}$ stückweise glatt. Es gilt $g'(0+) = 1$, $g'(0-) = -1$, also $g'(0) = 0$.

Definition: *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $u(x) := \operatorname{Re} f(x)$ und $v(x) := \operatorname{Im} f(x)$ $(x \in I)$, also $f = u + iv$ mit $u, v : I \to \mathbb{R}$.*

a) f heißt auf I differenzierbar $:\iff$ u und v sind auf I differenzierbar. In diesem Fall:

$$f'(x) := u'(x) + iv'(x) \quad (x \in I).$$

b) Ist $I = [a, b]$ und gilt $u, v \in R([a, b])$, so setze

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

In diesem Fall heißt f auf I integrierbar und wir schreiben: $f \in R([a, b], \mathbb{C})$.

c) Ist $I = \mathbb{R}$, so heißt f auf I stückweise stetig bzw. glatt $:\iff$ u, v sind auf I stückweise stetig bzw. glatt.

Es sei $I = [a, b]$ und $f \in R([a, b], \mathbb{C})$. Übung:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Besitzen u und v auf $[a, b]$ die Stammfunktionen U bzw. V, so setze $F := U + iV$. Dann gilt:

$$F' = U' + iV' = u + iv = f$$

auf $[a, b]$ und $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Weitere Regeln wie Substitution, partielle Integration, etc. gelten wörtlich für Funktionen $f \in R([a, b], \mathbb{C})$.

Beispiel: Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$ und $f(t) := e^{z_0 t}$. Setze $F(t) := \frac{1}{z_0}e^{z_0 t}$. Dann gilt: $F' = f$ auf $\mathbb{R}$. Für $a < b$ gilt nun:

$$\int_a^b e^{z_0 t}dt = F(b) - F(a) = \frac{1}{z_0}\left(e^{z_0 b} - e^{z_0 a}\right).$$

Definition: *Es sei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine Funktion und es gelte* $f \in R([a,b],\mathbb{C})$ *für jedes Intervall* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$*.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \text{ heißt } \textbf{(absolut) konvergent}$$

$$:\iff \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} f(t)dt \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} f(t)dt \text{ sind (absolut) konvergent.}$$

Im Konvergenzfall:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt := \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} f(t)dt.$$

Ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ *absolut konvergent, so heißt* f ***absolut integrierbar (aib)****.*

Satz 24.1 (ohne Beweis)**:** *Es seien* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stückweise stetig. Dann gilt:*

a) f *ist absolut integrierbar* $\iff$ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ *ist konvergent.*

b) *Ist* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *absolut integrierbar und* $|g| \le |f|$ *auf* $\mathbb{R}$*, so ist* g *absolut integrierbar.*

Satz 24.2 (ohne Beweis)**:** *Es sei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stückweise glatt,* f *und* f' *seien absolut integrierbar und* f *habe höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen. Dann ist* f *auf* $\mathbb{R}$ *beschränkt und*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Satz 24.3 (Satz und Definition)**:** *Es sei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stückweise stetig und absolut integrierbar. Für* $s \in \mathbb{R}$ *sei* $g_s(t) := f(t)e^{-ist}$ $(t \in \mathbb{R})$*. Dann gilt:*

a) g_s *ist stückweise stetig.*

b) g_s *ist absolut integrierbar.*

c) *Ist* $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definiert durch*

$$\hat{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt,$$

so gilt:

(i) $\hat{f}$ *ist auf* $\mathbb{R}$ *beschränkt,*

(ii) $\lim_{s\to\pm\infty} \hat{f}(s) = 0$ *(Satz von Riemann-Lebesgue),*

(iii) *$\hat{f}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.*

Die Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt die ***Fouriertransformierte von*** *f. Die Zuordnung $f \mapsto \hat{f}$ heißt* ***Fouriertransformation****.*

Beweis:

a) Klar.

b) Es gilt $|g_s(t)| = |f(t)| \underbrace{\left|e^{-ist}\right|}_{=1} = |f(t)|$ $(t \in \mathbb{R})$. Mit 24.1 folgt die Behauptung.

c) (i) Es gilt:

$$\forall s \in \mathbb{R} : \ \left|\hat{f}(s)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \underbrace{\left|e^{-ist}\right|}_{=1} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

(ii) Ohne Beweis.

(iii) Ohne Beweis.

□

Beispiele:

a) Betrachte

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Klar: f ist auf $\mathbb{R}$ stückweise stetig. Sei $\beta > 0$. Es gilt:

$$\int_0^\beta f(t)dt = \int_0^\beta e^{-t}dt = e^{-t}\Big|_0^\beta = -e^{-\beta} + 1 \longrightarrow 1 \quad (\beta \to \infty).$$

Damit ist $\int_0^\infty f(t)dt$ konvergent, somit auch $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt$. Wegen $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}$ ist f absolut integrierbar. Also existiert die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-t}e^{-ist}dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(1+is)t}dt.$$

Sei $\beta > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^\beta e^{-(1+is)t}dt &= -\frac{1}{1+is}e^{-(1+is)t}\Big|_0^\beta \\ &= -\frac{1}{1+is}\left(e^{-(1+is)\beta}-1\right) \\ &= \frac{1}{1+is}\left(1-e^{-\beta}e^{-is\beta}\right).\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\left|e^{-\beta}e^{-is\beta}\right| = e^{-\beta}\underbrace{\left|e^{-is\beta}\right|}_{=1} = e^{-\beta} \longrightarrow 0 \quad (\beta \to \infty).$$

Also ist

$$\int_0^\infty e^{-(1+is)t}dt = \frac{1}{1+is}$$

und somit

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+is} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

b) Betrachte

$$f(t) = e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ e^t, & t < 0 \end{cases}.$$

Es ist $\int_{-\infty}^\infty f(t)dt = 2\int_0^\infty e^{-t}dt$. Klar: f ist auf $\mathbb{R}$ stetig (insbesondere stückweise stetig), absolut integrierbar (vgl. Bsp. a)), und

$$\int_0^\infty e^{-t}e^{-ist}dt = \frac{1}{1+is}.$$

Analog zeigt man:

$$\int_{-\infty}^0 e^t e^{-ist}dt = \frac{1}{1-is}.$$

Also:

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^0 e^t e^{-ist}dt + \int_0^\infty e^{-t}e^{-ist}dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-is}+\frac{1}{1+is}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1+is+1-is}{1+s^2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+s^2}.\end{aligned}$$

c) Betrachte

$$f(t) := \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

Klar: f ist auf $\mathbb{R}$ stückweise stetig und absolut integrierbar. Also existiert die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} e^{-ist} dt.$$

Es gilt:

(i) $s = 0$: $\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} 1 dt = \frac{1}{\pi}$.

(ii) $s \neq 0$: $\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{is} e^{-ist} \right]_{-1}^{1}$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{is} \left(e^{-is} - e^{is} \right) \right) = \frac{1}{s} \frac{1}{\pi} \underbrace{\frac{1}{2i} \left(e^{is} - e^{-is} \right)}_{= \sin(s)} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(s)}{s}.$$

Frage: Kann man f aus $\hat{f}$ rekonstruieren?

Der Cauchysche Hauptwert

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ war definiert als

$$\lim_{\beta \to -\infty} \int_{\beta}^{0} f(x) dx + \lim_{\alpha \to \infty} \int_{0}^{\alpha} f(x) dx$$

und nicht als $\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx$.

Beispiel: $\int_{-\alpha}^{\alpha} x dx = 0$ $(\alpha > 0)$, aber $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ ist divergent.

Definition: *Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f \in R([a,b], \mathbb{C})$ für jedes Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx,$$

so heißt diese Zahl ***Cauchyscher Hauptwert (CH)*** *und man schreibt*

$$CH\text{-} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx.$$

Übung: Ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergent, so existiert $CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Beispiel: $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ ist divergent, $CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$.

Satz 24.4 (ohne Beweis)**:** *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und absolut integrierbar. Dann gilt:*

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{ist}ds = \frac{1}{2}\left(f(t+) + f(t-)\right).$$

Ist zusätzlich f stetig auf $\mathbb{R}$, so gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ f(t) = CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{ist}ds.$$

Beispiel: Behauptung: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ ist konvergent und $= \frac{\pi}{2}$.

Beweis: Betrachte

$$f(t) := \begin{cases} 1, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

Bekannt:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\pi}\begin{cases} 1, & s = 0 \\ \frac{\sin s}{s} & s \neq 0 \end{cases}.$$

Nach 24.4 gilt:

$$(*) \qquad CH\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{is}ds = \frac{1}{2}\left(f(1+) + f(1-)\right) = \frac{1}{2}.$$

Für $s \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\hat{f}(s)e^{is} &= \frac{1}{\pi}\frac{\sin s}{s}(\cos s + i\sin s) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin s\cos s}{s} + i\frac{(\sin s)^2}{s}\right).\end{aligned}$$

Es sei $\alpha > 0$. Es gilt:

a) $s \mapsto \frac{(\sin s)^2}{s}$ ist ungerade $\Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(\sin s)^2}{s}ds = 0$.

b) $s \mapsto \frac{\sin s \cos s}{s}$ ist gerade

$$\Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin s \cos s}{s} ds = 2 \int_0^{\alpha} \underbrace{\frac{\sin s \cos s}{s}}_{=\frac{1}{2}\frac{\sin(2s)}{s}} ds = \int_0^{\alpha} \frac{\sin(2s)}{s} ds.$$

Substituiert man $t = 2s$ ($dt = 2ds$), so folgt:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin(2s)}{s} ds = 2 \int_0^{2\alpha} \frac{\sin t}{t} \frac{1}{2} dt = \int_0^{2\alpha} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Somit gilt:

$$\frac{1}{2} \overset{(*)}{=} \lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{f}(s) e^{is} ds = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{2\alpha} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

□

Es sei $V := \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \colon f$ ist stückweise stetig und absolut integrierbar$\}$. Bekannt: Für jedes $f \in V$ existiert die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Satz 24.5: *Es gilt:*

a) V ist ein komplexer Vektorraum und es gilt für $f, g \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}.$$

b) Sei $f \in V$, $h \in \mathbb{R}$ und $f_h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$f_h(t) := f(t+h).$$

Dann ist $f_h \in V$ und $\widehat{f_h}(s) = e^{ish} \hat{f}(s)$ $(s \in \mathbb{R})$.

Beweis: a) Klar.

b) Es ist

$$\widehat{f_h}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+h) e^{-ist} dt.$$

Es sei $c > 0$. Mit der Substitution $\tau := t + h$ $(d\tau = dt)$ folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^c f(t+h)e^{-ist}dt &= \int_h^{h+c} f(\tau)e^{-is(\tau-h)}d\tau \\ &= e^{ish}\int_h^{h+c} f(\tau)e^{-is\tau}d\tau \\ &\xrightarrow[c\to\infty]{} e^{ish}\int_h^{\infty} f(\tau)e^{-is\tau}d\tau\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^\infty f_h(t)e^{-ist}dt = e^{ish}\int_h^\infty f(\tau)e^{-is\tau}d\tau.$$

Analog zeigt man:

$$\int_{-\infty}^0 f_h(t)e^{-ist}dt = e^{ish}\int_{-\infty}^h f(\tau)e^{-is\tau}d\tau.$$

Summation dieser Gleichungen liefert die Behauptung.

$\square$

Definition: *Es seiesn $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Funktionen so, daß*

$$\int_{-\infty}^\infty f_1(t-x)f_2(x)dx$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ konvergent ist. Dann heißt die Funktion $f_1 * f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$(f_1 * f_2)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f_1(t-x)f_2(x)dx$$

*die **Faltung** von f_1 und f_2.*

Beispiel: Betrachte

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $g(t) := 2\pi\left(f_1 * f_2\right)(t)$. Es gilt:

$$g(t) = \int_{-\infty}^\infty f_1(t-x)f_2(x)dx = \int_{-1}^1 f_1(t-x)f_2(x)dt = \int_{-1}^1 f_1(t-x)dx.$$

Fall 1: $t < -1$. Für $x \in [-1, 1]$ gilt: $t - x < 0 \Rightarrow f_1(t-x) = 0 \Rightarrow g(t) = 0$.
Fall 2: $t \geq 1$. Für $x \in [-1, 1]$ gilt: $t - x \geq 0 \Rightarrow f_1(t-x) = e^{-(t-x)} = e^x e^{-t}$

$$\Rightarrow g(t) = \int_{-1}^{1} e^x e^{-t} dx = e^{-t}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Fall 3: $-1 \leq t < 1$. Nachrechnen: $g(t) = 1 - e^{-t-1}$.
Also gilt:

$$(f_1 * f_2)(t) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1 - e^{-t-1}, & -1 \leq t < 1 \\ e^{-t}\left(e - \frac{1}{e}\right), & t \geq 1 \end{cases}.$$

Satz 24.6 (ohne Beweis)**:** *Es seien $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und absolut integrierbar und f_1 sei beschränkt. Dann gilt:*

a) $\forall t \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x) f_2(x) dx$ *konvergiert absolut.*

b) $f_1 * f_2$ *ist stetig und absolut integrierbar (also $f_1 * f_2 \in V$) und*

$$\left(\widehat{f_1 * f_2}\right)(s) = \hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

c)
$$|(f_1 * f_2)(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)| \, dx \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Satz 24.7: *Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, stetig und absolut integrierbar. Weiter sei f' absolut integrierbar. Dann gilt:*

$$f' \in V \quad \textit{und} \quad \widehat{f}'(s) = is\hat{f}(s) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Beweis: Klar: $f' \in V$.

a) Fall 1: $s = 0$: Es gilt:
$$\widehat{f}'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) dt.$$

Für $\beta > 0$ ist

$$\int_0^{\beta} f'(t) dt = f(\beta) - f(0) \xrightarrow{24.2} -f(0) \quad (\beta \to 0).$$

Somit gilt:

$$\int_0^\infty f'(t)dt = -f(0).$$

Analog zeigt man

$$\int_{-\infty}^0 f'(t)dt = f(0).$$

Also ist $\widehat{f'}(0) = 0 = i0\hat{f}(0)$.

b) Fall 2: $s \neq 0$: Es gilt:

$$\widehat{f'}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f'(t)e^{-ist}dt.$$

Für $\beta > 0$ ist

$$\begin{aligned}\int_0^\beta \underbrace{f(t)}_{u}\underbrace{e^{-ist}}_{v'}dt &= -\frac{1}{is}e^{-ist}f(t)\Big|_0^\beta - \int_0^\beta f'(t)\left(-\frac{1}{is}e^{-ist}\right)dt\\ &= -\frac{1}{is}e^{-is\beta}f(\beta) + \frac{1}{is}f(0) + \frac{1}{is}\int_0^\beta f'(t)e^{-ist}dt.\end{aligned}$$

Nach 24.2 gilt $f(\beta) \to 0$ $(\beta \to \infty)$, und es gilt $\left|e^{is\beta}\right| = 1$. Somit gilt:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-ist}dt = \frac{1}{is}f(0) + \frac{1}{is}\int_0^\infty f'(t)e^{-ist}dt.$$

Analog zeigt man:

$$\int_{-\infty}^0 f(t)e^{-ist}dt = -\frac{1}{is}f(0) + \frac{1}{is}\int_{-\infty}^0 f'(t)e^{-ist}dt.$$

Summation dieser beiden Gleichungen liefert

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-ist}dt = \frac{1}{is}\int_{-\infty}^\infty f'(t)e^{-ist}dt.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

□

Definition: *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und absolut integrierbar. Wenn die Fouriertransformierte $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ außerhalb eines beschränkten Intervalls 0 ist, so heißt f* ***bandbeschränkt*** *(technisch: Die Frequenzdichte des Signals verschwindet außerhalb eines beschränkten Intervalls).*

In diesem Fall ist es möglich f aus den Werten auf einem hinreichend feinen Raster $\{kT : k \in \mathbb{Z}\}$, $T > 0$ zu reproduzieren.

Satz 24.8 (Abtasttheorem von Shannon (ohne Beweis))**:** *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und absolut integrierbar, und*

$$\exists b > 0 : \ \hat{f}(s) = 0 \ (s \in \mathbb{R} \setminus (-b, b)).$$

Dann gilt für jedes $T < \frac{\pi}{b}$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

wobei $\operatorname{sinc}(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ *(Sinuscardinalis).*

Die Fouriertransformation im Raum der schnell fallenden Funktionen

Ist $f \in V$, so ist $\hat{f}$ stetig und $\lim_{s\to\pm\infty} \hat{f}(s) = 0$, aber im allgemeinen ist $\hat{f}$ nicht mehr absolut integrierbar (deswegen CH in Umkehrformel). Im Raum der sogenannten schnell fallenden Funktionen herrscht diesbezüglich Symmetrie:

Definition: *Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ heißt* ***schnell fallend*** $:\iff \forall n, m \in \mathbb{N}_0 :$ *$t \mapsto t^m f^{(n)}(t)$ ist beschränkt auf $\mathbb{R}$.*

$$S \coloneqq \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ ist schnell fallend}\}$$

heißt ***Schwartz-Raum****.*

Beispiel: $f(t) = p(t)e^{-\alpha t^2}$ ist für jedes $\alpha > 0$ und jedes Polynom p eine schnell fallende Funktion.

Satz 24.9: *Es seien $f, g \in S$ und p sei ein Polynom. Dann gilt:*

a) *f ist absolut integrierbar.*

b) *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \alpha f + \beta g \in S$ (S ist also ein Vektorraum).*

c) *$fg \in S$.*

d) $\hat{f} \in S$.

e) $f^{(n)} \in S$ $(n \in \mathbb{N})$, *und* $\widehat{f^{(n)}}(s) = (is)^n \hat{f}(s)$ $(s \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$.

f) $pf \in S$.

g) $f_h \in S$ $(h \in \mathbb{R})$ *und* $\widehat{f_h}(s) = e^{ish}\hat{f}(s)$ $(s \in \mathbb{R})$.

h) $f * g \in S$ *und* $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

i) Für $h(t) := e^{-t^2/2}$ $(t \in \mathbb{R})$ *gilt:* $h \in S$ *und* $\hat{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h$ *auf* $\mathbb{R}$.

Beweis: a) Die Funktion $t \mapsto (1+t^2)\, f(t)$ ist beschränkt. Damit folgt:

$$|f(t)| \leq \frac{M}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

für ein $M \geq 0$. Da $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{1+t^2} dt$ konvergiert, folgt die Behauptung mit Satz 24.1.
b) - i) ohne Beweis □

Satz 24.10: *Die Fouriertransformation* $f \mapsto \hat{f}$ *ist ein Isomorphismus von* S *nach* S *(also linear und bijektiv).*

Beweis: Sei $\mathcal{F}\colon S \to S$ definiert durch $\mathcal{F}f = \hat{f}$. Klar: $\mathcal{F}$ ist linear. Betrachte $\mathcal{G}\colon S \to S$ definiert durch

$$(\mathcal{G}g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{ist} ds$$

(beachte: g ist in S, also absolut integrierbar). Nach Satz 24.4 gilt: $\mathcal{G}(\mathcal{F}f) = f$ $(f \in S)$. Umgekehrt gilt für $g \in S$:

$$(\mathcal{G}g)(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-ist} ds = 2\pi \hat{g}(t) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

also

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{G}g)(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \hat{g}(-t) e^{-its} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(-t) e^{-its} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t) e^{its} dt \underset{24.4}{=} g(s) \quad (s \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Also gilt $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$. □

Anwendung: Es sei $f \in S$. Behauptung: Es gibt genau eine Funktion $u \in S$ mit

$$2u(t+1) + u(t) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Beweis: Mit $u_1(t) := u(t+1)$ gilt nach 24.8 und 24.9:

$$2u_1 + u = f \iff \widehat{2u_1 + u} = \hat{f} \iff 2e^{is}\hat{u}(s) + \hat{u}(s) = \hat{f}(s) \ (s \in \mathbb{R})$$

$$\hat{u}(s) = \frac{\hat{f}(s)}{2e^{is}+1} \ (s \in \mathbb{R}) \iff u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(s)e^{ist}}{2e^{is}+1} ds \ (t \in \mathbb{R}).$$

Beachte dabei: Wegen $|2e^{is}+1| \geq 1$ $(s \in \mathbb{R})$ ist mit $\hat{f}$ auch $s \mapsto \frac{\hat{f}(s)}{2e^{is}+1}$ eine schnell fallende Funktion (Übung).

Stichwortverzeichnis