Höhere Mathematik II

G. Herzog, Ch. Schmoeger

Sommersemester 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

15 Reelle Zahlen 2

16 Folgen und Konvergenz 12

Kapitel 15

Reelle Zahlen

Die Grundmenge der Analysis ist die Menge $\mathbb{R}$, die Menge der **reellen Zahlen**. Diese führen wir **axiomatisch** ein, d.h. wir nehmen $\mathbb{R}$ als gegeben an und **fordern** in den folgenden 15 **Axiomen** Eigenschaften von $\mathbb{R}$ aus denen sich alle weiteren Rechenregeln herleiten lassen.

Körperaxiome: In $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen "+" und "·" gegeben, die jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ genau ein $a + b \in \mathbb{R}$ und genau ein $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei gilt:

$(A1)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \ a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz für "+")

$(A5)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz für "·")

$(A2)$ $\exists 0 \in \mathbb{R} \ \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$ (Existenz einer Null)

$(A6)$ $\exists 1 \in \mathbb{R} \ \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$ und $1 \neq 0$ (Existenz einer Eins)

$(A3)$ $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists - a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ (Inverse bzgl. "+")

$(A7)$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$ (Inverse bzgl. "·")

$(A4)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ (Kommutativgesetz für "+")

$(A8)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz für "·")

$(A9)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

Schreibweisen: Für $a, b \in \mathbb{R}$: $a - b := a + (-b)$ und für $b \neq 0$: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

Alle bekannten Regeln der Grundrechenarten lassen sich aus $(A1)-(A9)$ herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele:

a) Behauptung: $\exists_1 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$.

Beweis: Sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ und es gelte $\forall a \in \mathbb{R}:\ a + \tilde{0} = a$. Mit $a = 0$ folgt: $0 + \tilde{0} = 0$. Mit $a = \tilde{0}$ in $(A2)$ folgt: $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Damit ist $0 = 0 + \tilde{0} \overset{(A4)}{=} \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. $\square$

b) Behauptung: $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 0 = 0$.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \coloneqq a \cdot 0$. Es gilt $b \overset{(A2)}{=} a \cdot (0 + 0) \overset{(A9)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = b + b$, und damit $0 \overset{(A3)}{=} b + (-b) = (b + b) + (-b) \overset{(A1)}{=} b + (b + (-b)) = b + 0 \overset{(A2)}{=} b$. $\square$

Anordnungsaxiome: In $\mathbb{R}$ ist eine Relation "$\leq$" gegeben. Für diese gilt:

$(A10)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$ oder $b \leq a$

$(A11)$ $a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$

$(A12)$ $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

$(A13)$ $a \leq b$ und $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c$

$(A14)$ $a \leq b$ und $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$

Schreibweisen: $b \geq a :\iff a \leq b$; $a < b :\iff a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a :\iff a < b$.

Aus $(A1) - (A14)$ lassen sich alle Regeln für Ungleichungen herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

Beispiele (Übung)**:**

a) $a < b$ und $0 < c \Rightarrow ac < bc$

b) $a \leq b$ und $c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$

c) $a \leq b$ und $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$

Intervalle: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wir setzen:

$[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

$(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (offenes Intervall)

$(a,b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a,b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a,\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(a,\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty,a] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$, $(-\infty,a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty,\infty) \coloneqq \mathbb{R}$

Der Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| \coloneqq \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ der **Betrag** von a. Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißt die Zahl $|a-b|$ der **Abstand** von a und b.

Beispiele: $|1| = 1$, $|-7| = -(-7) = 7$.

Regeln: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|-a| = |a|$ und $|a-b| = |b-a|$

b) $|a| \geq 0$

c) $|a| = 0 \iff a = 0$

d) $|ab| = |a||b|$

e) $\pm a \leq |a|$

f) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

g) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Beweis:

a) - e) leichte Übung.

f) Fall 1: $a+b \geq 0$. Dann gilt: $|a+b| = a+b \overset{e)}{\leq} |a| + |b|$.
Fall 2: $a+b < 0$. Dann gilt: $|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) \overset{e)}{\leq} |a| + |b|$.

g) Es sei $c := |a| - |b|$. Es gilt

$$|a| = |a - b + b| \overset{f)}{\leq} |a - b| + |b| \Rightarrow c = |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Analog zeigt man

$$-c = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

Also gilt $\pm c \leq |a - b| \Rightarrow |c| \leq |a - b|$.

$\square$

Definition: *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$.*

a) M heißt ***nach oben beschränkt*** $:\Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M:\ x \leq \gamma.$
In diesem Fall heißt γ eine ***obere Schranke*** *(OS) von M.*

b) Ist γ eine obere Schranke von M und gilt $\gamma \leq \delta$ für jede weitere obere Schranke δ von M, so heißt γ das ***Supremum*** *(oder* ***die kleinste obere Schranke****) von M.*

c) M heißt ***nach unten beschränkt*** $:\Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\ \forall x \in M:\ \gamma \leq x.$
In diesem Fall heißt γ eine ***untere Schranke*** *(US) von M.*

d) Ist γ eine untere Schranke von M und gilt $\gamma \geq \delta$ für jede weitere untere Schranke δ von M, so heißt γ das ***Infimum*** *(oder* ***die größte untere Schranke****) von M.*

Bezeichnung in diesem Fall: $\gamma = \sup M$ bzw. $\gamma = \inf M$.
Aus $(A11)$ folgt: Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden, so ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ eindeutig bestimmt.
Ist $\sup M$ bzw. $\inf M$ vorhanden und gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so heißt $\sup M$ das **Maximum** bzw. $\inf M$ das **Minimum** von M und wird mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet.

Beispiele:

a) $M = (1, 2)$. $\sup M = 2 \notin M$, $\inf M = 1 \notin M$. M hat kein Maximum und kein Minimum.

b) $M = (1, 2]$. $\sup M = 2 \in M$, $\max M = 2$.

c) $M = (3, \infty)$. M ist nicht nach oben beschränkt, $3 = \inf M \notin M$.

d) $M = (-\infty, 0]$. M ist nach unten unbeschränkt, $0 = \sup M = \max M$.

e) $M = \emptyset$. Jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke und eine untere Schranke von M.

Vollständigkeitsaxiom:

($A15$) Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach oben beschränkt, so ist $\sup M$ vorhanden.

Satz 15.1: *Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und ist M nach unten beschränkt, so ist $\inf M$ vorhanden.*

Beweis: In den Übungen. $\square$

Definition: *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. M heißt beschränkt $:\iff$ M ist nach oben und nach unten beschränkt. Äquivalent ist:*

$$\exists c \geq 0 \ \forall x \in M: \ |x| \leq c.$$

Satz 15.2: *Es sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$.*

a) Ist A beschränkt, so ist $\inf A \leq \sup A$.

b) Ist A nach oben bzw. unten beschränkt, so ist B nach oben beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ bzw. nach unten beschränkt und $\inf B \geq \inf A$.

c) A sei nach oben beschränkt und γ eine obere Schranke von A. Dann gilt:

$$\gamma = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x = x(\varepsilon) \in A : x > \gamma - \varepsilon$$

d) A sei nach unten beschränkt und γ eine untere Schranke von A. Dann gilt:

$$\gamma = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x = x(\varepsilon) \in A : x < \gamma + \varepsilon$$

Beweis:

a) $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \in A$. Es gilt: $\inf A \leq x$ und $x \leq \sup A \Rightarrow \inf A \leq \sup A$.

b) Es sei $x \in B$. Dann: $x \in A$, also $x \leq \sup A$. Also ist B oben beschränkt und $\sup A$ ist eine obere Schranke von B. Somit ist $\sup B \leq \sup A$. Analog falls A nach unten beschränkt ist.

c) "$\Rightarrow$": Es sei $\gamma = \sup A$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\gamma - \varepsilon < \gamma$. Also ist $\gamma - \varepsilon$ keine obere Schranke von A. Es folgt: $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon$.
"$\Leftarrow$": Es sei $\tilde{\gamma} = \sup A$. Dann ist $\tilde{\gamma} \leq \gamma$. Annahme: $\gamma \neq \tilde{\gamma}$. Dann ist $\tilde{\gamma} < \gamma$, also $\varepsilon \coloneqq \gamma - \tilde{\gamma} > 0$. Nach Voraussetzung gilt: $\exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - \tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Widerspruch zu $x \leq \tilde{\gamma}$.

d) Analog zu c).

$\square$

Natürliche Zahlen

Definition:

a) *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt* ***Induktionsmenge*** *(IM)*

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} 1. & 1 \in A; \\ 2. & \textit{aus } x \in A \textit{ folgt stets } x+1 \in A \end{cases}$$

Beispiele: $\mathbb{R}$, $[1, \infty)$, $\{1\} \cup [2, \infty)$ *sind Induktionsmengen.*

b) $\mathbb{N} \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x$ *gehört zu jeder IM* $\}$ = *Durchschnitt aller Induktionsmengen.*
Also: $\mathbb{N} \subseteq A$ *für jede Induktionsmenge* A.
Beispiele: $1, 2, 3, 4, 17 \in \mathbb{N}$; $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

Satz 15.3:

a) $\mathbb{N}$ *ist eine Induktionsmenge.*

b) $\mathbb{N}$ *ist nicht nach oben beschränkt.*

c) *Ist* $x \in \mathbb{R}$, *so existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > x$.

Beweis:

a) Es gilt $1 \in A$ für jede IM A, also $1 \in \mathbb{N}$. Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann ist $x \in A$ für jede IM A, somit $x + 1 \in A$ für jede IM A. Also gilt $x + 1 \in \mathbb{N}$.

b) Annahme: $\mathbb{N}$ ist beschränkt. Nach $(A15)$ existiert $s := \sup \mathbb{N}$. Mit 15.2 folgt: $\exists n \in \mathbb{N} : n > s - 1$. Nun ist $n + 1 > s$. Wegen $n + 1 \in \mathbb{N}$ ist aber $n + 1 \leq s$, ein Widerspruch.

c) Folgt aus 15.3 b).

$\square$

Satz 15.4 (Prinzip der vollständigen Induktion)**:**
Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und ist A eine Induktionsmenge, so ist $A = \mathbb{N}$.

Beweis: Es gilt $A \subseteq \mathbb{N}$ (nach Voraussetzung) und $\mathbb{N} \subseteq A$ (nach Definition), also ist $A = \mathbb{N}$. $\square$

Beweisverfahren durch vollständige Induktion

Es sei $A(n)$ eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Für $A(n)$ gelte:

$$\begin{cases} (I) & A(1) \text{ ist wahr;} \\ (II) & \text{Ist } n \in \mathbb{N} \text{ und } A(n) \text{ wahr, so ist auch A(n + 1) wahr.} \end{cases}$$

Dann ist $A(n)$ wahr für **jedes** $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $A \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr }\}$. Dann ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und wegen (I), (II) ist A eine Induktionsmenge. Nach 15.4 ist $A = \mathbb{N}$. $\square$

Beispiel: Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)}$.

Beweis: (induktiv)
I.A.: Es gilt $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, $A(1)$ ist also wahr.
I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ wahr, es gelte also $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
I.S.: $n \curvearrowright n + 1$: Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &\overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $A(n + 1)$ wahr. $\square$

Definition: *Wir setzen:*

a) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

b) $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ *(Menge der ganzen Zahlen).*

c) $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ *(Menge der rationalen Zahlen).*

Satz 15.5: *Sind* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $x < y$*, so gilt:* $\exists r \in \mathbb{Q}$*:* $x < r < y$*.*

Beweis: In den Übungen. $\square$

Einige Definitionen und Formeln

a) **Ganzzahlige Potenzen**.
Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} : a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$, $a^0 := 1$.
Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} : a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.
Es gelten die bekannten Rechenregeln.

b) **Fakultäten**.

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \ (n \in \mathbb{N}), \quad 0! := 1.$$

c) **Binomialkoeffizienten** (BK). Für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Es gilt (nachrechnen):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

d) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}. \end{aligned}$$

e) **Binomischer Satz**. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis: In den Übungen. □

f) **Bernoullische Ungleichung**. Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq -1$. Dann gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: (induktiv)
I.A.: $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$ ist wahr.
I.V.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
I.S.: $n \curvearrowright n+1$: Wegen $1 + x \geq 0$ folgt aus der I.V.:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

□

Hilfssatz 15.6: *Für $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x \leq y \iff x^n \leq y^n$.*

Beweis: In den Übungen. □

Satz 15.7: *Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$ mit $x^n = a$.*
*Dieses x heißt **die n-te Wurzel aus** a. Bezeichnung: $x = \sqrt[n]{a}$ ($\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$, $\sqrt[1]{a} = a$).*

Beweis: Existenz: später in §7.
Eindeutigkeit: Es seien $x, y \geq 0$ und $x^n = a = y^n$. Mit dem 15.6 folgt $x = y$. □

Bemerkungen:

a) Bekannt (Schule): $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Bsp.: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{4} \neq -2$. Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen: $x = 2$ und $x = -2$.

c)

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \sqrt{x^2} = |x|.$$

Rationale Exponenten

a) Es sei zunächst $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{m}{n}$. Wir wollen definieren:

$$(*) \qquad a^r \coloneqq \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

Problem: Gilt auch noch $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, gilt dann $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$?
Antwort: Ja (d.h. obige Definition $(*)$ ist sinnvoll).

Beweis: Setze $x \coloneqq (\sqrt[n]{a})^m$, $y \coloneqq (\sqrt[q]{a})^p$. Dann gilt $x, y \geq 0$ und $mq = np$, also

$$\begin{aligned} x^q &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mq} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^p = a^p \\ &= \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^q\right)^p = \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^p\right)^q = y^q. \end{aligned}$$

Mit dem 15.6 folgt $x = y$. □

b) Es seien $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ und $r < 0$. Wir definieren:

$$a^r \coloneqq \frac{1}{a^{-r}}.$$

Es gelten die bekannten Rechenregeln: $a^r a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, etc.

Kapitel 16

Folgen und Konvergenz

Definition: *Es sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$ heißt eine **Folge in** X. Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt a eine **reelle Folge**.*

Schreibweisen: a_n statt $a(n)$ (n-tes Folgenglied)
(a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$ statt a.

Beispiele:

a) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

b) $a_{2n} := 0$, $a_{2n-1} := 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$.

Bemerkung: Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $a\colon \{p, p+1, p+2, \dots\} \to X$ eine Funktion, so spricht man ebenfalls von einer Folge in X. Bezeichnung: $(a_n)_{n=p}^{\infty}$. Meistens ist $p = 0$ oder $p = 1$.

Definition: *Es sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$.*

*a) X heißt **abzählbar** $:\iff$ Es gibt eine Folge (a_n) in X mit $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.*

*b) X heißt **überabzählbar** $:\iff$ X ist nicht abzählbar.*

Beispiele:

a) Ist X endlich, so ist X abzählbar.

b) $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$.

c) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit

$$a_1 := 0,\ a_2 := 1,\ a_3 := -1,\ a_4 := 2,\ a_5 := -2, \dots$$

also

$$a_0 := 0, \quad a_{2n} := n, \quad a_{2n+1} := -n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

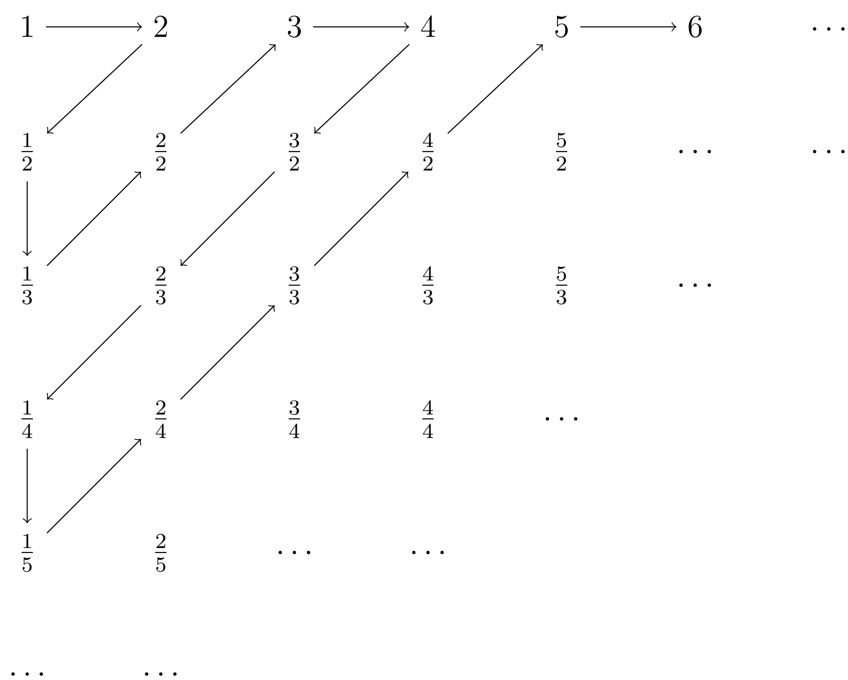

Abbildung 16.1: Zum Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$.

d) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.
Durchnummerieren in Pfeilrichtung liefert:

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Setze $b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\mathbb{Q} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}.$$

e) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (Beweis in §5).

Vereinbarung: Solange nichts anderes gesagt wird, seien alle vorkommenden Folgen stets Folgen in $\mathbb{R}$. Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir nur für Folgen der Form $(a_n)_{n=1}^\infty$. Sie gelten sinngemäß für Folgen der Form $(a_n)_{n=p}^\infty$ $(p \in \mathbb{Z})$.

Definition: *Es sei* (a_n) *eine Folge und* $M := \{a_1, a_2, \dots\}$.

a) (a_n) *heißt* ***nach oben beschränkt*** $:\iff$ *M ist nach oben beschränkt.*
In diesem Fall:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup M.$$

b) (a_n) *heißt* ***nach unten beschränkt*** $:\iff$ *M ist nach unten beschränkt.*
In diesem Fall:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf M.$$

c) (a_n) *heißt* ***beschränkt*** $:\iff$ *M ist beschränkt. Äquivalent ist:*

$$\exists c \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \leq c$$

Definition: *Es sei $A(n)$ eine für jedes $n \in \mathbb{N}$ definierte Aussage.*
$A(n)$ gilt ***für fast alle*** *(ffa) $n \in \mathbb{N}$* $:\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : A(n)$ *ist wahr.*

Definition: *Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Das Intervall*

$$U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$$

heißt ***ε-Umgebung von*** *a.*

Definition: *Eine Folge (a_n) heißt* ***konvergent***

$$:\iff \exists a \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{Zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ so,} \\ \text{daß für jedes } n \geq n_0 \text{ gilt } : |a_n - a| < \varepsilon. \end{cases}$$

In diesem Fall heißt a ***Grenzwert*** *(GW) oder* ***Limes*** *von (a_n) und man schreibt*

$$a_n \to a\ (n \to \infty) \text{ oder } a_n \to a \text{ oder } \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) ***divergent***. *Beachte:*

$$\begin{aligned} a_n \to a\ (n \to \infty) &\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ a_n \in U_\varepsilon(a) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \notin U_\varepsilon(a) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Satz 16.1: *Es sei* (a_n) *konvergent und* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. *Dann gilt:*

a) Gilt auch noch $a_n \to b$, *so ist* $a = b$.

b) (a_n) *ist beschränkt.*

Beweis:

a) Annahme $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \text{ und } \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1 : |a_n - b| < \varepsilon.$$

$N := \max\{n_0, n_1\}$. Dann gilt:

$$2\varepsilon = |a-b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\varepsilon.$$

Widerspruch. Also ist $a = b$.

b) Es sei $\varepsilon = 1$. Es gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 1$. Damit folgt:

$$\forall n \geq n_0 :\ |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

Setze $c := \max\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$. Dann: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$.

□

Beispiele:

a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $a_n := c$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ |a_n - c| = 0.$$

Also: $a_n \to c$ $(n \to \infty)$.

b) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Behauptung: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt: $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$. Mit 15.3 c) erhalten wir:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Für $n \geq n_0$ ist damit $n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Somit ist $|a_n - 0| < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$. □

c) $a_n := (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Es gilt $|a_n| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), also ist (a_n) beschränkt.
Behauptung: (a_n) ist divergent.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n||1 - (-1)| = 2.$$

Annahme: (a_n) konvergiert. Definiere $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Es gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \frac{1}{2}.$$

Für $n \geq n_0$ folgt dann aber:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ein Widerspruch. □

d) $a_n := n$ ($n \in \mathbb{N}$). (a_n) ist nicht beschränkt. Nach 16.1 b) ist (a_n) also divergent.

e) $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Behauptung: $a_n \to 0$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Mit 15.3 c) erhalten wir:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Für $n \geq n_0$ gilt damit: $n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, also $|a_n - 0| < \varepsilon$. □

f) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Behauptung: $a_n \to 0$.

Beweis:

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Beispiel e) folgt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \ \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0 : \ |a_n - 0| < \varepsilon$$

Also gilt: $a_n \to 0$. □

Definition: *Es seien* (a_n) *und* (b_n) *Folgen und* $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n);\; \alpha(a_n) := (\alpha a_n);\; (a_n)(b_n) := (a_n b_n)$$

Gilt $\forall n \geq m : b_n \neq 0$, *so ist die Folge* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty}$ *definiert.*

Satz 16.2: *Es seien* $(a_n), (b_n), (c_n)$ *und* (α_n) *Folgen und* $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

a) $a_n \to a \iff |a_n - a| \to 0$.

b) *Gilt* $|a_n - a| \leq \alpha_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_n \to 0$, *so gilt* $a_n \to a$.

c) *Es gelte* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$. *Dann gilt:*

   (i) $|a_n| \to |a|$;

   (ii) $a_n + b_n \to a + b$;

   (iii) $\alpha a_n \to \alpha a$;

   (iv) $a_n b_n \to ab$;

   (v) *ist* $a \neq 0$, *so existiert ein* $m \in \mathbb{N}$ *mit:*

$$a_n \neq 0 \ (n \geq m) \text{ und für die Folge } \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n=m}^{\infty} \text{ gilt: } \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}.$$

d) *Es gelte* $a_n \to a$, $b_n \to b$ *und* $a_n \leq b_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $a \leq b$.

e) *Es gelte* $a_n \to a$, $b_n \to a$ *und* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *ffa* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt* $c_n \to a$.

Beispiele:

a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ und $a_n := \frac{1}{n^p}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt $n \leq n^p$ $(n \in \mathbb{N})$. Also:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}) \xRightarrow{16.2\ e)} a_n \to 0.$$

b) Es sei $a_n := \frac{5n^2+3n+1}{4n^2-n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt: $a_n = \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{16.2} \frac{5}{4}$.

Beweis: (von 2.2)

a) Folgt aus der Definition der Konvergenz.

b) Es gilt: $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m: \ |a_n - a| \leq \alpha_m$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\alpha_n \to 0$ gilt:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1: \ \alpha_n < \varepsilon.$$

Setze $n_0 := \max\{m, n_1\}$. Für $n \geq n_0$ gilt nun: $|a_n - a| \leq \alpha_n < \varepsilon$.

c) (i) $\forall n \in \mathbb{N}: \ ||a_n| - |a|| \overset{\S 1}{\leq} |a_n - a| \ \xRightarrow{a),b)} \ |a_n| \to |a|$.

(ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Es gilt: $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_1: \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \forall n \geq n_2: \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setze $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Für $n \geq n_0$ erhalten wir:

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iii) Übung.

(iv) Es sei $c_n := |a_n b_n - ab|$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir Zeigen: $c_n \to 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} c_n &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|. \end{aligned}$$

Mit 16.1 b) folgt: $\exists c \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq c$. Damit erhalten wir:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ c_n \leq c|b_n - b| + |b||a_n - a| =: \alpha_n.$$

Mit c) (ii), c) (iii) und a) folgt: $\alpha_n \to 0$.
Also: $|c_n - 0| = c_n \leq \alpha_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\alpha_n \to 0$. Mit b) folgt nun $c_n \to 0$.

(v) Setze $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$. Aus (i) folgt: $|a_n| \to |a|$. Damit gilt:

$$\exists m \in N\ \forall n \geq m: \ |a_n| \in U_\varepsilon(|a|) = (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon). = (\frac{|a|}{2}, \frac{3}{2}|a|)$$

Insbesondere ist $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ $(n \geq m)$, also $a_n \neq 0$ $(n \geq m)$. Für $n \geq m$ gilt nun:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} =: \alpha_n$$

Es gilt $\alpha_n \to 0$. Mit b) folgt $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.

d) Annahme: $b < a$. Setze $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Dann gilt:

$$\forall x \in U_\varepsilon(b)\ \forall y \in U_\varepsilon(a):\ x < y.$$

Weiter gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0:\ b_n \in U_\varepsilon(b),$$
$$\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m:\ a_n \leq b_n.$$

Setze $m_0 := \max\{n_0, m\}$. Für $n \geq m_0$ ist $a_n \leq b_n < b + \varepsilon$, also $a_n \notin U_\varepsilon(a)$. Widerspruch.

e) Es gilt: $\exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m:\ a_n \leq c_n \leq b_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Es existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\forall n \geq n_1:\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$
$$\forall n \geq n_2:\ a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon.$$

Setze $n_0 := \max\{n_1, n_2, m\}$. Für $n \geq n_0$ gilt nun:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

Also: $|a_n - a| < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$.

□

Definition:

a) (a_n) *heißt* ***monoton wachsend*** $:\iff \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq a_{n+1}$.

b) (a_n) *heißt* ***streng monoton wachsend*** $:\iff \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n < a_{n+1}$.

c) Entsprechend definiert man ***monoton fallend*** *und* ***streng monoton fallend****.*

d) (a_n) *heißt* ***[streng] monoton*** $:\iff$ (a_n) *ist [streng] monoton wachsend oder [streng] monoton fallend.*

Satz 16.3 (Monotoniekriterium)**:**

a) Die Folge (a_n) *sei monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann ist* (a_n) *konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

b) *Die Folge* (a_n) *sei monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann ist* (a_n) *konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

Beweis: Setze $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$$

also $|a_n - a| < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$. □

Beispiel: $a_1 := \sqrt[3]{6}$, $a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n}$ $(n \geq 1)$.
Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$.

Beweis: (induktiv)
I.A.: $n = 1$.

$$0 < a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} > \sqrt[3]{6} = a_1.$$

I.V.: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$.
I.S. $n \curvearrowright n + 1$: Es gilt $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} >_{I.V.} 0$. Weiter ist

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} <_{I.V.} \sqrt[3]{6 + 2} = 2; \quad a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} >_{I.V.} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}.$$

□

Also ist (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend. Nach 16.3 ist (a_n) konvergent. Setze $a := \lim a_n$. Es gilt $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, also $a \geq 0$. Weiter ist

$$a_{n+1}^3 = 6 + a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mit 16.2 folgt $a^3 = 6 + a \Rightarrow 0 = a^3 - a - 6 = (a - 2)(\underbrace{a^2 + 2a + 3}_{\geq 3})$. Also ist $a = 2$.

Wichtige Beispiele:
Vorbemerkung: Es seien $x, y \geq 0$ und $p \in \mathbb{N}$: Es ist (vgl. §1)

$$x^p - y^p = (x - y) \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k$$

$$\Rightarrow |x^p - y^p| = |x - y| \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k \geq y^{p-1} |x - y|.$$

Beispiel 16.4: Es sei (a_n) eine konvergente Folge in $[0, \infty)$ mit Grenzwert a (bea. $a \geq 0$) und $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.

Beweis:
Fall 1: $a = 0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ 0 \leq a_n < \varepsilon^p$. Daraus folgt:

$$\forall n \geq n_0 :\ 0 \leq \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon.$$

Also gilt: $\sqrt[p]{a_n} \to 0 = \sqrt[p]{a}$.
Fall 2: $a \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - (\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y})^p| = |x^p - y^p| \\ &\geq_{s.o.} \underbrace{y^{p-1}}_{:=c} |x - y| = c|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}|, \quad c > 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{1}{c}|a_n - a| =: \alpha_n$. Es gilt $\alpha_n \to 0$, also $\sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$. □

Beispiel 16.5: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: (x^n) ist konvergent $\iff x \in (-1, 1]$. In diesem Fall:

$$\lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Beweis:
Fall 1: $x = 0$. Dann gilt $x^n \to 0$. Fall 2: $x = 1$. Dann gilt $x^n \to 1$.
Fall 3: $x = -1$. Dann ist $(x^n) = ((-1)^n)$ divergent.
Fall 4: $|x| > 1$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $|x| = 1 + \delta$. Damit gilt:

$$|x^n| = |x|^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist (x^n) nicht beschränkt und somit divergent.
Fall 5: $0 < |x| < 1$. Dann ist $\frac{1}{|x|} > 1$ und es gibt ein $\eta > 0$ mit $\frac{1}{|x|} = 1 + \eta$. Damit gilt:

$$\left|\frac{1}{x^n}\right| = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1 + \eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Also ist

$$|x^n| \leq \frac{1}{n\eta} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Damit folgt $x^n \to 0$. □

Beispiel 16.6: Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $s_n \coloneqq 1 + x + x^n + \dots x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
Fall 1: $x = 1$. Dann ist $s_n = n + 1$, (s_n) ist also divergent.
Fall 2: $x \neq 1$. Dann ist $s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Aus 16.5 folgt:

$$(s_n) \text{ ist konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 1.$$

In diesem Fall gilt: $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$.

Beispiel 16.7: Behauptung: Es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Beweis: Es ist $\sqrt[n]{n} \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, also $a_n \coloneqq \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir zeigen: $a_n \to 0$.
Für jedes $n \geq 2$ gilt:

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (a_n + 1)^n \overset{\S 1}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

Es folgt (bea. $a_n \geq 0$)

$$\forall n \geq 2: \ 0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

Also gilt $a_n \to 0$. $\square$

Beispiel 16.8: Es sei $c > 0$. Behauptung: Es gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$.

Beweis: Fall 1: $c \geq 1$. Dann gilt: $\exists m \in \mathbb{N} : 1 \leq c \leq m$. Daraus folgt:

$$1 \leq c \leq n \ (n \geq m) \ \Rightarrow \ 1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n} \ (n \geq m).$$

Mit 2.7 folgt die Behauptung.
Fall 2: $0 < c < 1$. Dann ist $\frac{1}{c} > 1$. Also gilt

$$\sqrt[n]{c} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} \xrightarrow[Fall 1]{} 1 \quad (n \to \infty).$$

$\square$

Beispiel 16.9: Es sei $a_n \coloneqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Behauptung: (a_n) und (b_n) sind konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: In der großen Übungen wird gezeigt: $\forall n \in \mathbb{N}: \; 2 \le a_n < a_{n+1} < 3$. Nach 16.3 ist (a_n) also konvergent; $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.
Weiter ist $b_n > 0$ und $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Also ist (b_n) monoton wachsend.
Für jedes $n > 3$ gilt:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2\cdot \ldots \cdot n}}_{<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Nach 16.3 ist (b_n) konvergent; $b := \lim_{n\to\infty} b_n$.
Weiter gilt für jedes $n \ge 2$:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{§1}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{<1}\underbrace{(1-\frac{2}{n})}_{<1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(1-\frac{k-1}{n})}_{<1} \\ &\le 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = b_n. \end{aligned}$$

Also gilt $a_n \le b_n$ $(n \ge 2)$ und damit folgt $a \le b$.
Weiter sei $j \in \mathbb{N}$, $j \ge 2$ (zunächst fest). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge j$ gilt:

$$\begin{aligned} a_n &\overset{s.o.}{=} 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k-1}{n}) \\ &\ge 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!} \underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{\to 1}\underbrace{(1-\frac{2}{n})}_{\to 1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(1-\frac{k-1}{n})}_{\to 1} \\ &\to 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j}\frac{1}{k!} = b_j \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

Also gilt $a \ge b_j$ für jedes $j \ge 2$. Wegen $b_j \to b$ $(j \to \infty)$ folgt $a \ge b$. $\square$

Übung: Es gilt: $2 < a = b < 3$.

Definition: *Die gemeinsame Grenzwert der Folgen in 16.9*

$$e \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

heißt ***Eulersche Zahl*** *($e \approx 2,718\ldots$).*

Definition: *Es sei (a_n) eine Folge und $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze*

$$b_k \coloneqq a_{n_k},$$

also $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{n_2}, b_3 = a_{n_3}, \ldots$.
Dann heißt $(b_k) = (a_{n_k})$ eine ***Teilfolge*** *(TF) von (a_n).*

Beispiele:

a) $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = 2k$.

b) $(a_1, a_4, a_9, \ldots)$ ist eine Teilfolge von (a_n); hier: $n_k = k^2$.

c) $(a_2, a_6, a_4, a_{10}, a_8, a_{14}, \ldots)$ ist keine Teilfolge von (a_n).

Definition: *Es sei (a_n) eine Folge. Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt ein* ***Häufungswert*** *(HW) von (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) existiert mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. Weiter sei*

$$H(a_n) \coloneqq \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \textit{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}.$$

Satz 16.10: *Es gilt:*

$$\alpha \in H(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0 : \; a_n \in U_\varepsilon(\alpha) \textit{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:
“$\Rightarrow$“: Es sei (a_{n_k}) eine Teilfolge mit $a_{n_k} \to \alpha$ und es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$ für $k \geq k_0$.
“$\Leftarrow$“: Es gilt:
$\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} \in U_1(\alpha)$,
$\exists n_2 \in \mathbb{N} : a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$ und $n_2 > n_1$,
$\exists n_3 \in \mathbb{N} : a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$ und $n_3 > n_2$, etc...
So entsteht eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha)$ $(k \in \mathbb{N})$. Also gilt: $a_{n_k} \to \alpha$. $\square$

Beispiele:

a) $a_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt: $a_{2k} \to 1, a_{2k+1} \to -1$, also $1, -1 \in H(a_n)$. Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, daß $1, -1 \notin U_\varepsilon(\alpha)$. Dann gilt $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für kein $n \in \mathbb{N}$. Nach 16.10 ist $\alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \{1, -1\}$.

b) $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$.. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so gilt: $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für höchstens endlich viele n, also $\alpha \notin H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \emptyset$.

c) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Es sei (a_n) eine Folge mit $\mathbb{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Nach 15.5 enthält $U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ unendlich viele verschiedene rationale Zahlen. Nach 16.10 folgt $\alpha \in H(a_n)$. Fazit: $H(a_n) = \mathbb{R}$.

Folgerung: Ist $x \in \mathbb{R}$, so existieren Folgen (r_n) in $\mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$.

Satz 16.11: *Die Folge (a_n) sei konvergent, $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n). Dann gilt:*

$$a_{n_k} \to a \quad (k \to \infty)$$

Insbesondere gilt: $H(a_n) = \{\lim_{n\to\infty} a_n\}$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a_n \in U_\varepsilon(a)$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also auch $a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$ ffa $k \in \mathbb{N}$. Somit gilt $a_{n_k} \to \alpha$. $\square$

Definition: *Es sei (a_n) eine Folge und $m \in \mathbb{N}$.*
*m heißt **niedrig** (für (a_n)) $:\Longleftrightarrow \quad \forall n \geq m: \ a_n \geq a_m$.*

Bemerkung: Es gilt also:
$m \in \mathbb{N}$ ist nicht niedrig $\Longleftrightarrow \exists n \geq m: \ a_n < a_m \Rightarrow \exists n > m: \ a_n < a_m$.

Hilfssatz 16.12: *Es sei (a_n) eine Folge. Dann enthält (a_n) eine monotone Teilfolge.*

Beweis:
Fall 1: Es existieren höchstens endlich viele niedrige Indizes. Also existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ so, daß jedes $n \geq n_1$ nicht niedrig ist.

n_1 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_2 > n_1 : a_{n_2} < a_{n_1}$,

n_2 nicht niedrig $\Rightarrow \exists n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$, etc. . .

Wir erhalten so eine streng monoton fallende Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n).
Fall 2: Es existieren unendlich viele niedrige Indizes $n_1, n_2, n_3 \ldots$. O.B.d.A. sei $n_1 < n_2 < n_3, \ldots$.

n_1 ist niedrig und $n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} \geq a_{n_1}$,

n_2 ist niedrig und $n_3 > n_2 \Rightarrow a_{n_3} \geq a_{n_2}$,

etc. . .

Wir erhalten so eine monoton wachsende Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n). $\square$

Satz 16.13 (Bolzano-Weierstraß)**:**
Die Folge (a_n) sei beschränkt. Dann gilt: $H(a_n) \neq \emptyset$. Also enthält (a_n) eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Es gilt: $\exists c \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: \; |a_n| \leq c$. Nach 16.12 enthält (a_n) eine monotone Teilfolge (a_{n_k}). Wegen $|a_{n_k}| \leq c$ $(k \in \mathbb{N})$ ist (a_{n_k}) auch beschränkt.
Nach 16.3 ist (a_{n_k}) konvergent. Damit ist $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in H(a_n)$. $\square$

Satz 16.14: *Die Folge (a_n) sei beschränkt (nach 16.13 gilt damit $H(a_n) \neq \emptyset$). Es gilt:*

a) *$H(a_n)$ ist beschränkt.*

b) $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$*; es existieren also* $\max H(a_n)$ *und* $\min H(a_n)$.

Beweis:

a) Es gilt: $\exists c \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: \; |a_n| \leq c$. Sei $\alpha \in H(a_n)$. Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. Es ist $|a_{n_k}| \leq c$ $(k \in \mathbb{N})$, also $|\alpha| \leq c$. Somit gilt

$$\forall \alpha \in H(a_n): \; |\alpha| \leq c.$$

b) ohne Beweis.

$\square$

Definition: *Die Folge (a_n) sei beschränkt.*

a) Die Zahl

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \max H(a_n)$$

*heißt **Limes superior** oder **oberer Limes** von (a_n).*

b) Die Zahl

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \min H(a_n)$$

*heißt **Limes inferior** oder **unterer Limes** von (a_n).*

Satz 16.15: *Die Folge (a_n) sei beschränkt. Dann gilt:*

a) $\forall \alpha \in H(a_n): \ \liminf_{n\to\infty} a_n \le \alpha \le \limsup_{n\to\infty} a_n$.

b) Ist (a_n) konvergent, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

c) $\forall \alpha \ge 0: \ \limsup_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \limsup_{n\to\infty} a_n$.

d) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: a) ist klar, b) folgt aus 16.11, c) und d) Übung. □

Vorbemerkung: Die Folge (a_n) sei konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0: \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $n, m \ge n_0$ gilt damit:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \le |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Folge (a_n) hat also die folgende Eigenschaft:

$$(c) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \ge n_0: \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Äquivalent ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 \ \forall k \in \mathbb{N}: |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Definition: *Eine Folge (a_n) heißt eine **Cauchyfolge** (CF)*

$$:\Longleftrightarrow \ (a_n) \ \textit{hat die Eigenschaft } (c).$$

Stichwortverzeichnis

abzählbar, 12
Axiome
  Anordnungs-, 3
  Körper-, 2
  Vollständigkeits-, 6

Bernoullische Ungleichung, 9
beschränkt, 6
  Folge, 13
  Menge, 5
Betrag, 4
Binomialkoeffizient, 9
Binomischer Satz, 9

Cauchyfolge, 27

divergent, 14

Eulersche Zahl, 24

für fast alle, 14
Fakultät, 9
Folge, 12

ganze Zahlen, 9
Grenzwert, 14

Induktionsmenge, 7
Infimum, 5
Intervalle, 3

konvergent, 14

Limes, 14
Limes inferior, 26
Limes superior, 26

monoton, 19
  fallend, 19
  streng fallend, 19
  streng wachsend, 19
  wachsend, 19
Monotoniekriterium, 19

Natürliche Zahlen, 7
niedrig, 25

oberer Limes, 26

rationale Zahlen, 9

Satz
  Bolzano-Weierstraß, 26
Schranke, 5
Supremum, 5

Teilfolge, 24

überabzählbar, 12
Umgebung, 14
unterer Limes, 26

vollständige Induktion, 8

Wurzeln, 10