Spectraltheory - Exercise

Prof. Dr. Tobias Lamm

Sommersemester 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Exercises

Exercise 1

a) H separable $\Rightarrow \exists (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ orthonormal basis of H.

Proof: H separable $\Rightarrow \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$: $\overline{\{u_n | n \in \mathbb{N}\}} = H$. Define:

$$H_n \coloneqq \operatorname{lin}\{u_1, \dots, u_n\}, \quad \text{for } n \in \mathbb{N}$$

$H_n \subseteq H$ closed subspace of H as $\dim H_n \leq n < \infty$. By Projektionssatz there exists an orthogonal projection P_n on H_n. Set

$$g_n \coloneqq u_n - P_{n-1}un \in H_n \cap H_{n-1}^{\perp}, N \coloneqq \{n \in \mathbb{N} | g_n \neq 0\}$$

Now we define

$$e_n \coloneqq \begin{cases} \frac{g_n}{\|g_n\}}, & n \in N \\ 0, & n \notin N \end{cases}$$

$\Rightarrow e_n \in H_n \cap H_{n-1}^{\perp}$, $\operatorname{lin}\{.e_1, \dots, e_n\} = H_n \Rightarrow (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is an orthonormal basis of H.
$\square$

b) $H = L^2(0,1)$, $\mathcal{D}\left(()\, T\right) = W^{1,2}(0,1) =: H^1(0,1)$, $Tf = if'$.

Proof: T abgeschlossen: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$ Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$. $\xRightarrow[\text{vollständig}]{L^2}$
$\exists x, y \in L^2(0,1) : x_n \to x, x_n' \to y$ in $L^2(0,1)$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\varphi' dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n \varphi' dt = -\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n'' \varphi dt = -\int_0^1 y\varphi dt \ \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1)$$

$\Rightarrow x \in \mathcal{D}(T)$, $x' = y$, $Tx = ix' \Rightarrow T$ abgeschlossen.
We still have to show that T isn't symmetric:

$$\langle Tx, y\rangle_{L^2} = \int_0^1 ix'\overline{y}dt \overset{P.I.}{=} [ixy]_0^1 - \int_0^1 ix\overline{y}'dt = \underbrace{[ixy]_0^1}_{\neq 0 \text{ i. g.}} + \langle x, Ty\rangle_{L^2},$$

d.h. T is not symmetrich $\Rightarrow$ t nicht self-adjoint. T isn't halb-beschränkt nach unten;: siehe (iii). $\square$

c) $\mathcal{D}(T) = W_0^{1,2}(0,1)$, $H = L^2(0,1)$, $Tf = if'$.

Proof: T closed: as in (ii),
T symmetrisch:

$$\langle Tx, y\rangle_{L^2} = \ldots = \underbrace{[ixy]_0^1}_{=0} + \langle x, Ty\rangle_{L^2} = \langle x, Ty\rangle \ \forall x, y \in \mathcal{D}(T)$$

T not self-adjoint:

$$\mathcal{D}(T^*) = \left\{ y \in L^2(0,1) \colon x \mapsto \langle Tx, y\rangle_{L^2} \text{ continuous on } \mathcal{D}(T) \right\}$$

Vermutung: $W^{1,2}(0,10) \subseteq \mathcal{D}(T^*)$ (even "="). Let $x \in \mathcal{D}(T), y \in W^{1,2}(0,1)$:

$$\langle Tx, y\rangle_{L^2} = \ldots = \underbrace{[ixy]_0^1}_{=0} + \langle x, iy'\rangle_{L^2} = \langle x, iy'\rangle_{L^2}$$

continuous on $\mathcal{D}(T)$, i.e. $W^{1,2}(0,1) \subseteq \mathcal{D}(T^*)$, however $W^{1,2}(0,1) \not\subseteq W_0^{1,2}(0,1)$, i.e. $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{D}(T^*) \Rightarrow T \neq T^*$.
T is not halb-beschränkt nach unten:

$$\textit{Consider the comment: } \langle Tx, x\rangle_{L^2} = -2\int_0^2 1\,(\operatorname{Im} x)' \operatorname{Re} x dt \overset{\text{“?”}}{\geq} c\langle x, x\rangle_{L^2}$$

For $f_0 \in W_0^{1,2}(0,1)$ with $\langle f_0, f_0\rangle_{L^2} = 1$, $w \in \mathbb{R}$, $f_w(t) := e^{iwt} f_0(t) \Rightarrow \langle f_w, f_w\rangle_{L^2} = 1$

$$\begin{aligned} f_w'(t) &= iwe^{iwt} f_0(t) + e^{iwt} f_0'(t) \\ &= iwf_w(t) + e^{iwt} f_0'(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Tf_w, f_w\rangle &= \int_0^1 \left(-wf_w(t) + ie^{iwt} f_0'(t)\right) e^{-iwt}\overline{f_0(t)} dt \\ &= \underbrace{\int_0^1 -w|f_0|^2 dt}_{=-w} + \underbrace{\int_0^1 if_0'(t)\overline{f_0(t)} dt}_{\langle Tf_0, f_0\rangle_{L^2}} = -w + \underbrace{\langle Tf_0, f_0\rangle_{L^2}}_{\in\mathbb{R}} \to \pm\infty \end{aligned}$$

for $w \to \pm\infty \Rightarrow T$ ist not halb-beschränkt. In (iii) T has a self-adjoint Erweitunerung S:

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ x \in W^{1,2}(0,1) \colon x(0) = x(1) \right\}, \ Sf = if'$$

$\square$

Definition .1: *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $r\colon \Omega \to X$ eine Funktion. Man definiert*

a) *r ist schwach analytisch $\iff$ $\forall \varphi \in X^*\colon \varphi \circ r$ analytisch auf Ω*

b) *r ist analytisch $\iff$ $\frac{d}{dz} r(z_0) := r'(z_0) := \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{-1} [r(z) - r(z_0)]$ existiert in X $\forall z_0 \in \Omega$*

c) *Kurvenintegrale: Sein $\Gamma := \left\{\gamma(t)\colon t \in [a, b]\right\}$ endlich-stückweise glatte Kurve in Ω, r stetig, dann:*

$$\int_\Gamma r(\lambda) d\lambda := \int_a^b r(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \in X$$

Satz (Lemma von Dunford)**:** $r\colon \Omega \to X$ schwach analytisch $\iff$ r analytisch

Satz (Cuachy's Integralsatz und Formel)**:** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex, $r\colon \Omega \to X$ analytisch. Dann gilt:

a) $\gamma \subseteq \Omega$ stückweise glatt und geschlossen $\Rightarrow \int_\Gamma r(\lambda) d\lambda 0$.

b) $\forall \lambda_0 \in \Omega$, $a > 0$ mit $\overline{B(\lambda_0, a)} \subseteq \Omega$:

$$r(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \frac{1}{\mu - \lambda} r(\mu) d\mu \in X.$$

Proof: Sei $x^* \in X^*$, dann ist $x^* \circ r$ analytisch auf Ω. Nach Integralsatz bzw. -formel aus der Funktionentheorie folgt:

$$0 = \int_\Gamma x^*(r(\lambda)) d\lambda = x^* \left(\underbrace{\int_\Gamma r(\lambda) d\lambda}_{=: x_1} \right),$$

$$x^*(r(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \frac{1}{\mu - \lambda} x^*(r(\mu)) d\mu = x^* \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu - \lambda_0| = a} \frac{1}{\mu - \lambda} r(\mu) d\mu \right)$$

$$\iff x^* \left(\underbrace{r(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\mu - \lambda} r(\mu) d\mu)}_{=: x_2} \right) = 0$$

$\Rightarrow x^*(x_1) = 0$, $x^*(x_2) = 0$ $\forall x^* \in X^* \xrightarrow[Banach]{Hahn-} x_1 = 0$, $x_2 = 0$. □

Das Dunford-Kalkül

Definition .2 (Kalkül für Polynome)**:** *Sei* $A \in L(X)$, $p\colon \lambda \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ *Polynom,* $a_k \in \mathbb{C}$ *für* $k = 0, \ldots, n$*. Dann definiert man:*

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \in L(X).$$

$\mathcal{P}$ *Vektorraum aller Polynome.*

Satz (Eigenschaften)**:** $p_1, p_2, p \in \mathcal{P}$, $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$, $A \in L(X)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(1) Linearität: $(\alpha p_1 + \beta p_2)(A) = \alpha p_1(A) + \beta p_2(A)$.

(2) Multiplikativität:: $(p_1 \cdot p_2)(A) = p_1(A) p_2(A) = p_2(A) \cdot p_1(A)$.

(3) Beschränktheit: $\|p(A)\|_{L(X)} \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \|A\|_{L(X)}^k$.

(4) Spektrale Abbildungseigenschaft: $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$.

Proof:

(1) - (3): klar.

(4) "$\supseteq$": Sei $\mu \in \sigma(A)$, dann hat das Polynom $\lambda \mapsto p(\mu) - p(\lambda) \in \mathcal{P}$ eine Nullstelle in $\lambda = \mu$. Somit folgt:

$$p(\mu) - p(\lambda) = (\mu - \lambda)\, q(\lambda),$$

für ein $q \in \mathcal{P}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\xRightarrow[\lambda = A]{(1),(2)} p(\mu) - p(A) = (\mu - A)\, q(A) = q(A)\,(\mu - A)$$

Da $\mu \in \sigma(A)$ ist $\mu - A$ nicht injektiv oder nicht surjektiv.

$$\Rightarrow p(\mu) - p(A)$$

kann nicht injektiv oder nicht surjektiv sein $\Rightarrow p(\mu) \subseteq \sigma(p(A))$. "$\subseteq$": Sei $\mu \in \sigma(p(A))$.Wähle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ von $\lambda \mapsto \mu - p(\mu)$, d.h.

$$\mu - p(\lambda) = a\,(\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m),$$

$a \neq 0 \xRightarrow[\lambda)A]{(1),(2)} \mu - p(A) = a\,(A-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(A-\lambda_m)$. Angenommen: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \notin \sigma(A)$

$$\Rightarrow L(X) \ni (A-\lambda_m)^{-1} \cdot \ldots \cdot (A-\lambda_1)^{-1}\, a^{-1} = (\mu - p(A))^{-1}\,,$$

was einen Widerspruch zu $\mu \in \sigma\,(p(A))$ darstellt $\Rightarrow \exists j_0 \in \{1, \ldots, m\}$: $\lambda_{j_0} \in \sigma(A)$.

$$\mu - p(\lambda_{j_0}) = 0 \iff \mu = p(\lambda_{j_0}),$$

d.h. $\mu \in p\,(\sigma(A))$.

$\square$

Bemerkung:

Kalkül für Polynome

Verallgemeinerte	Approximiere:
Polynome = Potenzreihen	Satz von Weierstraß
	$\overline{\mathcal{P}}^{\Vert\cdot\Vert_{C^0[0,1]}} = C^0[0,1]$
$A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$	
"Konvergenzradius"?	$\Rightarrow$ Kalkül für $C^0[0,1]$
$\Rightarrow$ analytische Funktionen	Stetige Funktionalkalkül
$\Rightarrow$ Dunford-Kalkül	

Definition .3 (Kalkül für Potenzreihen)**:** *Sei $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$, Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zu $A \in L(X)$, $r(A) < R$ definieren wir:*

$$f(A) := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k \right) =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

in $L(X)$.