Spektraltheorie

Prof. Dr. Lutz Weiss

Vorlesungsmitschrieb

Sommersemester 2015/16

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Wiederholung aus der Funktionalanalysis

Abgeschlossene Operatoren

Sei X ein Banachraum, $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ linear auf einem linearen Teilraum $D(A)$ von X. $D(A)$ heißt **Definitionsbereich**.

Definition 1.1.0.1 (Abgeschlossener Operator). *A heißt abgeschlossen, falls für alle $x_n \in D(A)$, $x_n \to x$ in $||.||_X$, $Ax_n \to y$ in $||.||_y \Rightarrow x \in D(A)$, $Ax = y$.*

Notation: $||x||_A = ||x|| + ||Ax||$, $x \in D(A)$ heißt Graphennorm von A. Also:

$$A : (D(A), ||.||_A) \to (X, ||.||_X)$$

stetig.

Satz 1.1.0.2. *$A : X \supset D(A) \to X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Graph}(A) = \{(x, Ax) \in X \times X,\ x \in D(A)\}$ ist abgeschlossen in $X \times X \Leftrightarrow (D(A), ||.||_A)$ vollständig normierter Raum.*

Korollar 1.1.0.3. *$X = D(A)$, A abgeschlossen $\Leftrightarrow A : X \to X$ stetig $\Leftrightarrow A(U_X)$ beschränkt in X, $U_X =$ offene Einheitskugel in X.*

Notation: $B(X)$ ist der Banachraum aller beschränkten/stetigen linearen Operatoren $A : X \to X$ mit der Norm $||A|| = \sup_{x \in U_X} ||Ax|| < \infty$.

Bemerkung 1.1.0.4. *Sei $D \subseteq X$ ein dichter, linearer Teilraum von X, d.h. $\bar{D} = X$. Sei $A : D \to X$ ein linearer Operator mit $||Ax|| \leq C||x||$ für alle $x \in D$. Dann gibt es* ***genau eine*** *stetige Fortsetzung $\tilde{A} : X \to X$, d.h. $\tilde{A} \in B(X)$, $\tilde{A}|D = A$, $||\tilde{A}|| \leq C$ (Sei $x \in X$ mit $x_n = \lim x_n$, $x_n \in D$. Dann $\tilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$).*

Spektrum und Resolvente

Sei X ein Banachraum, $A : X \supset D(A) \to X$ linearer, abgeschlossener Operator.
Sei gegeben: $\lambda x - Ax = y$,$\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in X$, $x \in D(A)$ ist gesucht. Formal $x = (\lambda - A)^{-1}y$ ist Lösung, falls $(\lambda - A)^{-1}$ existiert.

Definition 1.1.0.5. *$\lambda \in \rho(A)$ falls $\lambda - A : D(A) \to X$ bijektiv oder äquivalent:*

$$\lambda - A : (D(A), ||.||_A) \to (X, ||.||_X)$$

ist ein Isomorphismus. $\rho(A)$ heißt die ***Resolventenmenge*** *von A. $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ heißt das* ***Spektrum*** *von A.*
$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} : X \to D(A) \subset X$, für ein $\lambda \in \rho(A)$. $R(\lambda, A) \in B(X)$, aber Bild$(R(\lambda, A)) \subset D(A)$.

Bemerkung 1.1.0.6. *Fall $A \in B(X)$, $D(A) = X$, dann ist $R(\lambda, A) : X \to X$ ein Isomorphismus.*

Satz 1.1.0.7.

a) $\rho(A)$ ist offen, $\sigma(A)$ abgeschlossen.

b) Falls $A \in B(X)$, dann: $|\lambda| \leq ||A||$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$. Insbesondere: $\sigma(A)$ Kompakt.

$\sigma(A) \neq \emptyset$.

Satz 1.1.0.8 (Resolventendarstellung)**.**

a) Sei $\lambda_0 \in \rho(A)$, $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{||R(\lambda_0,A)||}$. Dann ist

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}$$

analytisch.

b) Sei $A \in B(X)$ und $|\lambda| > ||A||$, dann ist

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n.$$

Satz 1.1.0.9 (Resolventenregel)**.** *Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt:*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

Für $\mu \to \lambda$:

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2.$$

Beispiel 1.1.0.10.

a) Sei $X = l^p$, $(x_n) \subset \mathbb{C}$.

$$D(A) = \{(x_n) \in l^p : (\sum_n |\lambda_n x_n|^p)^{1/p}\}$$

$A(x_n) = (\lambda_n x_n) \in l^p$ für $(x_n) \in D(A)$.

Diagonaloperator: $\sigma(A) = \{\lambda_n\}$, $\lambda \notin \overline{\{\lambda_n\}}$ ist

$$R(\lambda, A)(x_n) = (\lambda - A)^{-1}(x_n) = (\frac{1}{\lambda - \lambda_n} x_n).$$

b) $X = l^p$, $A(x_n) = (0, x_1, x_2, ...)$ *(Rechts-Verschiebeoperator).* $\sigma(A) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$.

c) $X = C[0,1]$, $Tf(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$ *(Volterraoperator).* $\sigma(T) = \{0\}$, $||T|| \neq 0$.

Spektrum und Kompaktheit

Satz 1.1.0.11. *Sei X ein Banachraum, $A \in B(A)$ kompakt, d.h. $A(U_X)$ ist relativ kompakt in $(X, ||.||)$ (z.B. $A \in \{T : X \to X | \dim \mathrm{Bild}(T) < \infty\}$). Falls $\dim X = \infty$, dann gilt $0 \in \sigma(A)$. $\sigma(A) \backslash \{0\}$ besteht aus einer Folge $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$, die aus Eigenwerten von A besteht, mit endlich dimensionalem Eigenraum $\mathrm{Kern}(\lambda_n - A)$. (λ_n) ist endlich oder $|\lambda_n| \to 0$.*

Sei ab jetzt X ein Hilbertraum mit $< ., . >$.

Definition 1.1.0.12. *$(h_n) \subset X$ heißt Orthonormalbasis von X, falls $< h_n, h_m >= \delta_{n,m}$, $\overline{\mathrm{span}(h_n)} = X$.*

Satz 1.1.0.13. *Jeder seperable Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis (h_n) und für alle $x \in X$ gilt*

$$\begin{aligned} x &= \sum_n < x, h_n > h_n, \\ ||x||^2 &= \sum_n | < x, h_n > |^2 \end{aligned}$$

Satz 1.1.0.14 (Spektralsatz)**.** *Für kompakte, selbstadjungierte Operatoren auf einem seperablen Hilbertraum. Sei A kompakt, selbstadjungiert, d.h. $< Ax, y >=< x, Ay >$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis (h_n) von H und eine Folge $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq 0$, $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$, sodass*

$$Tx = \sum_n \lambda_n < x, h_n > h_n.$$

Bemerkung 1.1.0.15.

a) λ_n *sind Eigenwerte von* A*, denn* $Th_n = \lambda_n h_n$*,* $|\lambda_n| \to 0$*.*

b) $||A|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| = \lambda_1$*.*

c) $\mathrm{Kern}\, A = \overline{\mathrm{span}}\{h_n : \lambda_n = 0\}$*.* $\overline{\mathrm{Bild}(A)} = \overline{\mathrm{span}}\{h_n : \lambda_n \neq 0\}$*.* $X = (\mathrm{Kern}(A)) \oplus \overline{\mathrm{Bild}(A)}$ *(orthogonal).* A *injektiv* $\Leftrightarrow \overline{\mathrm{Bild}(A)} = X \Leftrightarrow \lambda_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$*.*

d) $J : l^2 \to X$*,* $J(e_n) = h_n$ *(*e_n *Einheitsvektor).* J *ist Isometrie, denn*

$$|| \sum \alpha_n e_n ||_{l^2} = (\sum |\alpha_n|^2)^{1/2} = || \sum_n \alpha_n h_n ||_X$$

$$\begin{array}{ccc} l^2 & \xrightarrow{D} & l^2 \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle J^{-1}} \\ X & \xrightarrow[A]{} & X \end{array}$$

$D = JJ^{-1}A$*,* $D(x_n) = (\lambda_n x_n)$ *für* $x = (x_n) \in l^2$*.* A *ist ähnlich zu einem Diagonaloperator* D *mit* $|\lambda_n| \to 0$*.*

1.2 Verpasst

1.3 Fourieranalysis

Die Fouriertransformation auf L^1, S und L^2

Definition 1.3.0.1. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ setze*

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(\xi))) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$$

mit $x \cdot \xi = \langle x, \xi \rangle$.

Bemerkung: $d = 1,\ f \in L^2[0, \pi] \subset L^2(\mathbb{R})$.

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i n x} f(x) dx = \mathcal{F}(f(n))$$

Klassische Fourier Koeffizienten $f \in L^[0, 2\pi]$ sind die Werte von $\mathcal{F}f(\xi)$ für $\xi = n \in \mathbb{Z}$.

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \text{ Fourierreihen.}$$

Ziel: $\sum \to \int$. Damit folgt $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$.

Proposition 1.3.0.2. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $||\mathcal{F}f||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1}$. Es gilt sogar $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, d.h.*

$$\lim_{|x| \to 0} \mathcal{F}f(x) = 0.$$

Beweis: $|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \int |e^{-2\pi i x \xi}||f(x)| dx$. FÜr $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ siehe Übung. □

Proposition 1.3.0.3.

a) Für die Dilation $f_\delta(x) = f(\delta x)$, $\delta > 0$ fest:

$$f(\delta x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta^{-d} \hat{f}(\delta^{-1} \xi).$$

Beweis durch Substitution $x' = x \cdot \delta$ in der Definition von $\mathcal{F}$.

b) $f(x+h) \overset{\mathcal{F}}{\to} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\xi h}$*,* $h \in \mathbb{R}^d$ *fest.*

$f(x)e^{-2i\pi xh} \overset{\mathcal{F}}{\to} \hat{f}(\xi+h)$*.*

Beweis: b) $\mathcal{F}[f(\cdot+h)](\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi} f(x+h)dx = (*)$. Substituiere $x' = x+h$

$$\begin{aligned} (*) &= \int e^{-2i\pi(x'-h)\xi} f(x')dx' \\ &= e^{2\pi ih\xi}\hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Definition 1.3.0.4 (Faltung von $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$)**.**

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

Bemerkung: $||f*g||_{L^1} \leq ||f|| \cdot ||g||$.

Proposition 1.3.0.5.

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).$$

Beweis: $\mathcal{F}(f*g)(x) = \int e^{-2i\pi x\xi}(\int f(x-y)g(y)dy)dx$. Fubini liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f*g)(x) &= \int e^{-2i\pi y\xi} g(y)(\int e^{-2i\pi(x-y)\xi} f(x-y)dx)dy \\ &= (\int e^{-2i\pi y\xi} g(y)dy) \cdot (\int e^{-2i\pi x\xi} f(x)d(x)) = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

□

Zur Erinnerung: $f \to f*g$ ist eine Glättung.

Definition 1.3.0.6. *$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ heißt schnell fallend, falls für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ gilt:*

$$||f||_{\alpha,\beta} := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| < \infty.$$

Notation: $f \in S(\mathbb{R}^d)$ (Raum der schnell fallenden Funktionen/Schwarzraum). $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$, $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} ... D_{x_n}^{\alpha_n}$ und x^α beschreibt das komponentenweise Potenzieren mit α_i.

Bemerkung: Alle Ableitungen gehen schneller gegen Null als jedes Polynom gegen ∞ geht für $|x| \to \infty$, d.h. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\forall m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(I + |x|)^m x^\beta D^\alpha f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Insbesondere: $f \in S(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mathbb{R}^d)$ (Himmelreich für Fubini, Differentiation unter dem Integralzeichen, Lebesgue Konvergenz...).

Beispiel 1.3.0.7.

a) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset S(\mathbb{R}^d)$. Aber $\hat{f}(\xi) = \int_K e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, K kompakt $= \operatorname{supp} f$.

b) $h(x) = e^{-\pi|x|^2}$, $h \in S(\mathbb{R}^d)$. Später: $\mathcal{F}(h) = h$.

Satz 1.3.0.8. *Mit $f \in S(\mathbb{R}^d)$ sind auch $x \cdot f(x)$, $D^\alpha f$, $D^\alpha \mathcal{F} f$, $\mathcal{F}(D^\alpha f)$ in $S(\mathbb{R}^d)$ und*

a) $D^\alpha \mathcal{F} f = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^\alpha f(x)]$.

b) $(2i\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi)$.

Beweis: a) $D_{\xi_1}(\mathcal{F}f)(\xi) = \int D_{\xi_1}[e^{-2i\pi x\xi}] f(x)dx$

$$D_{\xi_1}(\mathcal{F}f)(\xi) = \int (2i\pi x_1) e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx$$

Analog

$$D_{\xi_1} D_{\xi_2} \mathcal{F} f(\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi} (-2i\pi x_2)(-2i\pi x_1) f(x) dx ...$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} f(x) &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} ... \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi xy} f(y) dy \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_1 y_1} \left(\int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_2 y_2} ... e^{-2i\pi x_d y_d} f(y_1, ..., y_d) dy_2 ... dy_d \right) dy_1 \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{-2i\pi x_2} e^{-2i\pi x_1 y_1} D_{y_1} I_R(y_1) dy_1 + \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{-2i\pi x_2} I_R(y_1) \right]_{y_1=-R}^{R} \\
&= \frac{1}{-2i\pi x_1} \mathcal{F}(D y_1 f)(x)
\end{aligned}$$

mit $I_R = \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_2 y_2} ... e^{-2i\pi x_d y_d} f(y_1, ..., y_d) dy_2 ... dy_d$.

Beispiel 1.3.0.9. $\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$, *denn (für* $d = 1$*):*

Setze $h(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2i\pi x\xi} dx$, *d.h.* $h(\xi) = \mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](\xi)$.

$$\begin{aligned}
h'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\pi x) e^{-\pi x^2 - 2i\pi x\xi} dx \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [e^{-\pi x^2}] e^{-2i\pi x\xi} dx \\
&= i \mathcal{F} \left[\frac{d}{dx} e^{-\pi x^2} \right] (\xi) \\
&= i(2i\pi\xi) \mathcal{F} \left[e^{-\pi x^2} \right] (\xi) = -2\pi\xi h(\xi)
\end{aligned}$$

Differentialgleichung: $h'(\xi) = -2\pi\xi h(\xi)$.

$$\begin{aligned}
\frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = -2\pi\xi \quad &\Rightarrow \quad \ln(h(\xi)) = 2\pi \int_0^x (-\xi) d\xi \\
&\Rightarrow h(\xi) = e^{-\pi\xi^2} = \mathcal{F}[e^{\pi x^2}](\xi)
\end{aligned}$$

Für $d > 1$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](\xi) &= \int e^{-2i\pi\xi x} e^{-\pi|x|^2} dx \\
&= \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_j^2} e^{-2i\pi\xi_j x_j} dx_j = \prod_{j=1}^{d} e^{-\pi\xi_j^2} \\
&= e^{-\pi|\xi|^2}
\end{aligned}$$

Damit folgt $\mathcal{F}(\exp(-\pi\epsilon^2|x|^2)) = \epsilon^{-d}\exp(-\pi|\xi|^2/\epsilon^2)$.

Satz 1.3.0.10. *$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d)$ ist bijektiv und*

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \int_{R^d} e^{2i\pi x\xi}\phi(\xi)d\xi.$$

Beweis: Seien $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(\phi) \in S(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ fest:

$$\begin{aligned}
\int e^{2i\pi x\xi}(\mathcal{F}\phi)(\xi)d\xi &= \int \left(\int e^{-2i\pi\xi y}\phi(y)dy\right) e^{2i\pi x\xi}\psi(\xi)d\xi \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int \left(\int e^{2i\pi(x-y)\xi}\psi(\xi)d\xi\right)\phi(y)dy \\
&= \int \mathcal{F}\psi(x-y)\phi(y)dy \\
&= \int \mathcal{F}\psi(y)\phi(x+y)dy
\end{aligned}$$

Wähle $\psi(x) = e^{-\pi\epsilon^2|x|^2}$.

$$\begin{aligned}
\int e^{2i\pi x\xi}(\mathcal{F}\phi)(\xi)e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2}d\xi &= \int \epsilon^{-d}e^{-pi|y|^2}\phi(y+x)dy \\
&\overset{y'=y/\epsilon}{=} \int e^{2i\pi x\xi}\mathcal{F}\phi(\xi)e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2}d\xi \\
&= \int e^{-\pi|y|^2}\phi(x+\epsilon y)dy
\end{aligned}$$

Für $\epsilon >> 0$ folgt mit Lebesgue Konvergenz und

$$\begin{aligned}
\phi(x+\epsilon y) &\overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \phi(x),\ |\phi(x)| \leq C \\
e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} &\overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 1,\ |e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} \leq 1
\end{aligned}$$

Für $\epsilon \to 0$:

$$\begin{aligned} \int e^{2i\pi x\xi}\mathcal{F}\phi(\xi)d\xi &= \left(\int e^{-\pi|y|^2}dy\right)\phi(x) \\ \mathcal{G}f(x) &:= \int e^{2\imath\pi x\xi}f(\xi)d\xi \end{aligned}$$

Also $\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathrm{Id}$ und $\mathcal{F}(\mathcal{G}) = \mathrm{Id} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{G}$. □

Folgerung: $\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \mathcal{F}\phi(-x)$.

Bemerkung Vergleich zu Fourierreihen:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nx}\hat{f}(n), \quad \hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi nx}f(x)dx.$$

Proposition 1.3.0.11. *Seien $f, g \in S$. Dann sind $f \cdot g$ und $f * g$ wieder $\in S$.*

Beweis: Zeige $f(x)g(x) \in S$, benutze Produktformel.

$D^\alpha(f * g)(x) = \int(D_\alpha f)(x-y)g(y)dy$.

$$\begin{aligned} (1+|x|)^n D^\alpha(f*g)(x) &= \int (1+|x-y|)^n D^\alpha f(x-y)(1+|y|)^g(y)\frac{(1+|x|)^n}{(1+|x-y|)^n(1+|y|)^n}dx \\ &\leq C\int(1+|y|)^{-m}(1+|y|)^{n+m}g(y)dy \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{D^\alpha} & S \\ {\scriptstyle\mathcal{F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}} \\ S & \xrightarrow[M_\alpha]{} & S \end{array}$$

Mit $M_\alpha f(x) = (2i\pi x)^\alpha f(x)$.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{T_g} & S \\ {\scriptstyle\mathcal{F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{F}} \\ S & \xrightarrow[M_g]{} & S \end{array}$$

Mit $T_g f = f * g$, $M_g f = \hat{g} f$.

Bemerkung 1.3.0.12 (Zur Lösung von Differentialgleichungen (formale Rechnung))**.**
$(*)$ $(I - D^\alpha) f = g$, *g gegeben, f gesucht.*

$$[1 - (2i\pi x)^\alpha] \hat{f}(x) = \hat{g}(x) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(x) = [1 - (2i\pi x)^\alpha]^{-1} \hat{g}(x)$$

$m(x) = 1 - (2i\pi x)^\alpha$. *Falls* $m(x) \neq 0$.

$$f = [\mathcal{F}^{-1}[(1 - 2i\pi x)^\alpha] \hat{g}(x)]$$

Angenommen $\exists k \in L^1$ *mit* $\hat{k}(x) = \frac{1}{m(x)}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f &= [\mathcal{F}^{-1}[(1 - 2i\pi x)^\alpha] \hat{g}(x)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{k} \cdot \hat{g}] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\hat{k} * \mathcal{F}^{-1}\hat{g} = k * g \end{aligned}$$

Die Lösung von $(*)$ ist oft durch einen Faltungsoperator gegeben.

Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^d)$

Lemma 1.3.0.13. *Für $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt mit $< f, g >= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$.*

a) $< \mathcal{F} f, \mathcal{F} g >=< f, g >$, $\mathcal{F}$ *unitär.*

b) $||\mathcal{F} f||_{L^2} = ||f||_{L^2}$, $\mathcal{F}$ *Isometrie.*

Beweis: a) $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
< f, g > &= \int f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int \left(\int e^{2i\pi xy} \mathcal{F}f(y)dy \right) \overline{g(x)}dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int \mathcal{F}(y) \left(\int e^{2i\pi xy}\overline{g(x)}dx \right) dy \\
&= \int \mathcal{F}f(y) \int e^{-2i\pi xy} g(x)dxdy \\
&= < \mathcal{F}f, \mathcal{F}g >
\end{aligned}$$

b) $< f, f >$ liefert Behauptung. $\square$

Definition 1.3.0.14 (der Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^d)$)**.** *Da $S(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, gibt es zu jedem $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ eine Folge $(f_n) \subset S(\mathbb{R}^d)$ mit $||f - f_n||_{L^2} \to 0$.*
Setze $\mathcal{F}f = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n)$ (in L^2), d.h. $\mathcal{F}$ ist die stetige Fortsetzung von

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d) \text{ auf } L^2(\mathbb{R}^d),$$

denn $||\mathcal{F}f||_{L^2} = ||f||^{L^2}$ für alle $f \in S(\mathbb{R}^d)$.

Achtung: Für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $\int e^{-2i\pi xy} f(y)dy$ nicht immer für fast alle x als Lebesgue-Integral definiert.

Korollar 1.3.0.15. *Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt:*

a) $< \mathcal{F}f, \mathcal{F}g > = < f, g >$.

b) $||\mathcal{F}f||_{L^2} = ||f||_{L^2}$.

Beweis: $f_n, g_n \in S^n$ mit $f_n \to f$, $g_n \to g$, $f, g \in L^2$. 3.13 und 3.14 liefern Behauptung. $\square$

Korollar 1.3.0.16. *Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $T_g f = g * f$. Dann ist*

$$||T_g||_{L^2 \to L^2} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\hat{g}(x)|.$$

Beweis: $||f * g||_{L^2} = ||\mathcal{F}[f * g]||_{L^2} = ||\hat{f} \cdot \hat{g}||_{L^2}$. Damit folgt

$$||\hat{f} \cdot \hat{g}||_{L^2} = \left(\int |\hat{f}(x) \hat{g}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \le \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\hat{g}(x)| \cdot ||\hat{f}||_{L^2} = \sup |\hat{g}(x)| \cdot ||f||_{L^2}.$$

Somit $||T_g|| \le \sup |\hat{g}(x)|$. □

Bemerkung: $||T_g||_{L^2 \to L^2} \le ||g||_{L^1}$ (Youngsche Ungleichung), denn $\sup |\hat{g}(x)| \le ||g||_{L^1}$.

1.4 Temperierte Distributionen und die Fouriertransformation

Idee $S'(\mathbb{R}^d)$ soll der Dualraum von $S(\mathbb{R}^d)$ sein.

Wiederholung: Für $N \in \mathbb{N}$ setze $||f||_N = \sup\{|x^\alpha D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^d, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha|, |\beta| \le N\}$.

Definition 1.4.0.1. *Für $f_n, f \in S(R^d)$ gilt $f_n \overset{S}{\to} f \Leftrightarrow ||f - f_n||_N \to 0 \ \forall N \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung: $f_n \overset{S}{\to} f$ ist äquivalent zu $d(f_n, f) \to 0$ für die Metrik

$$d(f, g) = \sum_{N \in \mathbb{N}} 2^{-N} \frac{||f - g||_N}{1 + ||f - g||_N}$$

und $d(f_n, f) \to 0 \Leftrightarrow ||f - f_n|_N \to 0$ für alle N.

Definition 1.4.0.2. *$S'(\mathbb{R}^d) = \{u : S(\mathbb{R}^d) \to K,$ linear, stetig bezüglich $f_n \overset{S}{\to} f\}$. $S'(\mathbb{R}^d)$ ist der Dualraum von $S(\mathbb{R}^d)$. Mann nennt ihn auch den Raum der temperierten Distributionen.*

Beispiel 1.4.0.3.

a) Sei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar und es gebe n, C, sodass $\int_{|x| \leq R} |h(x)|dx \leq CR^n$ für $R \to \infty$. Dann setze

$$u_h(f) = \int f(x)h(x)dx.$$

Zu zeigen: $u_h \in S'$. Insbesondere: $L^p(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d)$ für alle p, denn

$$\int_{|x| \leq R} |f(x)|d <\leq R^{1/p} ||f\chi_{|x|\leq R}||_{L^p}.$$

b) Dirac Maß: $\delta_x \in S'(\mathbb{R}^d)$, $\delta_x(u) = u(x)$.

Satz 1.4.0.4. *Sei $u : S(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ linear, u stetig, d.h. $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn es ein N gibt, sodass*

$$|u(f)| \leq C||f||_N \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^d).$$

Beweis: „$\Leftarrow$“ klar. „$\Rightarrow$“: Andernfalls gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in S$ mit $||f_n||_n = 1$ aber $|u(f_n)| \geq n$. Setze $g_n = f_n/\sqrt{n}$. Dann gilt $||g_n||_N \leq n^{1/2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ für $n \geq N$.
Aber $|u(g_n)| \geq \sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$. Also Widerspruch zur Stetigkeit von u.

Beispiel 1.4.0.5.

a) „$L^p(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d)$“. Sei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar und

$$(*) \quad \int_{|x| \leq R} |h(x)|dx \leq CR^n \text{ für } R > 1$$

für ein festes $C < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann wird durch

$$u_h(f) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)f(x)dx$$

eine Distribution $u_h \in S'(\mathbb{R}^d)$ definiert, d.h. man erhält eine Einbettung von Funktionen h mit $(*)$ nach $u_h \in S'(\mathbb{R}^d)$.

b) Sei $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und langsam wachsend, d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ gibt es $N_\alpha, C_\alpha \leq \infty$ mit

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{N_\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann kann man für jedes $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ ein Produkt $\psi \cdot u \in S'(\mathbb{R}^d)$ definieren durch $(\psi \cdot u)(f) = u(\psi f)$ für $f \in S(\mathbb{R}^d)$.

c) Dirac Distribution: $\delta_x \in S'(\mathbb{R}^d)$. $\delta_x(f) = f(x)$ für $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

d) $h(x) = e^{|x|^2}$. Dann $u_h \notin S'(\mathbb{R}^d)$, den $f(x) = e^{-|x|^2} \in S(\mathbb{R}^d)$

$$u_h(f) = \int h(x)g(x)dx = \int 1dx = \infty.$$

Beweis: a) Benutze 4.4.

$$\begin{aligned} |u_h(f)| &= \int h(x)f(x)dx \\ &= \int h(x)(1+|x|^2)^{-2-n}(1+|x|^2)^{2+n}f(x)dx \\ &\leq \int |h(x)|(1+|x|^2)^{-2-n}dx \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{2+n}|f(x)| \\ &\leq C||f||_N \end{aligned}$$

Für $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt mit Hölder $\int_{|x|\leq R}|h(x)|dx \leq \left(\int_{|x|\leq R}|h(x)|^p dx\right)^{1/p} R^{d/p'}$. Hier ist $(*)$ erfüllt mit $n > d/p'$.

b) z.B. $\psi f \in S(\mathbb{R}^d)$. □

Definition 1.4.0.6 (Prinzip der Dualität)**.** *Sei* $T : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d)$ *linear und stetig. Dann definiere die* ***duale Abbildung*** $T' : S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$ *durch* $(U \in S'(\mathbb{R}^d), f \in S(\mathbb{R}^d))$

$$(T'u)(f) = u(T(f)).$$

Bemerkung. $f_n \overset{S}{\to} f \Rightarrow Tf_n \overset{S}{\to} Tf$. $u(Tf_n) \to u(Tf)$, $T'u(f_n) \to T'u(f)$, da T und u stetig und linear nach Definition.

Definition 1.4.0.7. $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}' : S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$ *mit*

$$(\mathcal{F}'u)(f) = u(\hat{f}), \quad f \in S, \ u \in S'.$$

Bemerkung. $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \to u_h \in S'(\mathbb{R}^d)$. Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$(\mathcal{F}'u_h)(f) = u_h(\hat{f}) = \int h(x)\hat{f}(x)dx \overset{\text{Sec. 3}}{=} \int \hat{h}(x)f(x)dx = u_{\hat{h}(x)}(f), \ \forall f \in S.$$

Also $\mathcal{F}'u_h = u_{\mathcal{F}h}$.

Notation: $\mathcal{F}' \hat{=} \mathcal{F}$. Dann $\boxed{\mathcal{F}(u_h) = u_{\mathcal{F}h},\ \hat{u}_h = u_{\hat{h}}.}$

Proposition 1.4.0.8. $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$ *ist bijektiv.*

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(f) = (\mathcal{F}u)(\tilde{f}), \ \textit{wobei} \ \tilde{f}(x) = f(-x).$$

Beweis: $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id}_S$. Dualität:

$$(\mathcal{F}^{-1})'\mathcal{F}' = (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1})' = \mathrm{id}_S' = \mathrm{id}_{S'}.$$

$\Rightarrow (\mathcal{F}')^{-1} = (\mathcal{F}^{-1})'$ und damit bijektiv. Außerdem

$$(F^{-1}u)(f) = u(\mathcal{F}^{-1}f) = u(\mathcal{F}f(-\bullet)) = \mathcal{F}'u(f(-\bullet)) = \mathcal{F}'u(\tilde{f}).$$

$\square$

Definition 1.4.0.9. *Sei $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Definiere $D^\alpha u$ durch*

$$(D^\alpha u)(f) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha f) \text{ und } D^\alpha u \in S'(\mathbb{R}^d).$$

Bemerkung:

a) $D^\alpha : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d)$.

$$D^\alpha u := (-1)^{|\alpha|}(D_S^\alpha)'u \text{ (im Sinne der Dualität)}$$

denn $(D_{S'}^\alpha u)(f) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha f)$.

b) Sei $h \in S(\mathbb{R}^d)$ und $u_h \in S'(\mathbb{R}^d)$.

$$D^\alpha(u_h)(f) = (-1)^{|\alpha|} u_h(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|} \int h(x) D^\alpha f(x) dx \overset{\text{p.I.}}{=} \int (D^\alpha h)(x) f(x) dx.$$

Also: $\boxed{D^\alpha(u_h) = u_{D^\alpha h}.}$

Proposition 1.4.0.10. *Sei $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine langsam wachsende Funktion, $u \in S'^{\mathbb{R}^d}$. Dann gilt*

$$D_{x_i}(h \cdot u) = (D_{x_i} h) \cdot u + h D_{x_i} u$$

sowie für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$

$$D^{\alpha+\beta} u = D^\alpha(D^\beta u).$$

Beweis: Übung. □

Beispiel 1.4.0.11.

a) Sei $d = 1$, $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Behauptung: $D(u_H) = \delta_0$, denn für $\phi \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$(Du_h)(\phi) = -u_h(D\phi) = -\int H(x)\phi'(x)dx = \int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0)$$

Außerdem: für δ_a

$$(D^\alpha \delta_a)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi(0).$$

Vorschau: Zu $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ gibt es eine langsam wachsende, stetige Funktion $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, sodass $u = D^\alpha \psi$.

Proposition 1.4.0.12. *Für $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gilt:*

a) $\mathcal{F}(D^\alpha u) = (2i\pi \cdot)^\alpha \mathcal{F}u$.

b) $D^\alpha(\mathcal{F}u) = \mathcal{F}((-2i\pi \cdot)^\alpha u)$.

Beweis: a) Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$ erhält man nach Kapitel 3

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(D^\alpha u)](f) &\overset{\text{Def.}}{=} (D^\alpha u)(\mathcal{F}f) \\ &\overset{\text{Def.}}{=} (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \mathcal{F}f) \\ &= (-1)^{|\alpha|} u(\mathcal{F}((-2i\pi \cdot)^\alpha f)) \\ &\overset{\text{Def.}}{=} (-1)^{|\alpha|} (\mathcal{F}u)((-2i\pi \cdot)^\alpha f) \\ &= [(2i\pi)^\alpha \mathcal{F}u](f) \end{aligned}$$

b) analog. □

Erinnerung: Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}^d$, $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned} (\tau^Y f)(x) &:= f(x-y) \\ (\delta^a f)(x) &:= f(ax) \\ \tilde{f}(x) &:= f(-x) \end{aligned}$$

Dann folgt mit einfacher Substitution

$$
\begin{aligned}
u_{\tau^y g}(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} \tau^Y(g) f dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) f(x) dx \\
&\overset{\text{Subst.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x+y) dx = u_g(\tau^{-y} f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{\delta^a g}(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(ax) f(x) dx \\
&\overset{\text{Subst.}}{=} a^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(\frac{1}{a} x) dx \\
&= a^{-d} u_g(\delta^{1/a} f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{\tilde{g}}(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(-x) dx \\
&= u_g(\tilde{f})
\end{aligned}
$$

Proposition 1.4.0.13. *Es gelten für $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}^d$, $a > 0$ die Regeln:*

a) $\mathcal{F}(\tau^y u) = e^{-2i\pi yx} \hat{u}$.

b) $\tau^y \hat{u} = \mathcal{F}(e^{2i\pi xy} u)$.

c) $\mathcal{F}(\delta^a u) = a^{-d} \delta^{1/a} \hat{u}$.

d) $\mathcal{F}(\tilde{u}) = \widetilde{\mathcal{F}(u)}$.

Beweis: a) Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned}
[F(\tau^y u)](f) &\overset{\text{Def}}{=} (\tau^y u)(\hat{f}) \\
&\overset{\text{Def}}{=} u(\tau^{-y}\hat{f}) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} u(\mathcal{F}(e^{-2i\pi xy}f)) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \hat{u}(e^{-2i\pi xy}f) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} [e^{-2i\pi xy}\hat{u}](f)
\end{aligned}$$

b), c), d) analog □

Satz 1.4.0.14. *Zu $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ existiert eine langsam wachsende Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$, sodass*

$$\begin{aligned}
u &= D^\gamma \varphi (= D^\gamma u_\varphi) \\
(u(f) &= (-1)^{|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^\gamma f(x) dx)
\end{aligned}$$

Beweis: Idee: Verwende Darstellungssatz von Riesz für L^1.

a) Für $N \in \mathbb{N}$ definiere $S_N := (S(\mathbb{R}^d), ||.||_N)$, wobei

$$||f||_N = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |x^\beta D^\alpha f(x)|$$

und sei S'_N der Dualraum von S_N. Definiert man

$$I_N := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| \leq N\}$$

und $M := \#I_N$ zu $f \in S(\mathbb{R}^d)$ und außerdem

$$\psi_f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad \psi_{f,\alpha}(x) = (1 + |x|)^N D^{\alpha+1} f(x), \quad \alpha \in I_N$$

mit $1 = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}_0^d$. Dann ist $\psi_{f,\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in I_N$, d.h. $\psi_f \in L^1(\mathbb{R}^d)^M$. Außerdem ist ψ_f durch f eindeutig bestimmt.

b) Sei nun $u \in S'(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 4.3 ist dann $u \in S'_N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Definiere außerdem $L(\psi_f) := u(f)$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Nach 1. ist dann L wohldefiniert.

Weiter $|L(\psi_f)| = |u(f)| \leq C||f||_N = C \sup_x \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |x^\beta D^\alpha f(x)$

$$\begin{aligned}
|L(\psi_f)| &= |u(f)| \leq C||f||_N \\
&= C \sup_x \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |x^\beta D^\alpha f(x) \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_x (1+|x|)^N |D^\alpha f(x)| \\
&\overset{x_0 = x_{0,\alpha}}{=} C \sum_{|\alpha| \leq N} (1+|x_{0,\alpha})^N |D^\alpha f(x_{0,\alpha}|) \\
&= C \sum_{|\alpha| \leq N} (1+|x_0|)^N \left(\int_{-\infty}^{x_{0,d}} ... \int_{-\infty}^{x_{0,k+1}} ... \int_{x_{0,k}}^{\infty} ... D^{\alpha+1}(f(y_1, ..., y_d))dx \right) \\
&\leq C||\psi_f||_{L^1(\mathbb{R}^d)^M}
\end{aligned}$$

Definiere nun $\mathcal{L}^M := \{\psi_f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^M : f \in S(\mathbb{R}^d)\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)^M$. Wegen $\alpha\psi_f + \psi_g = \psi_{\alpha f + g}$ und der Linearität von U ist L linear auf $\mathcal{L}^M$ und nach obigem beschränkt auf $(\mathcal{L}^M, ||.||_{L^1(\mathbb{R}^d)^M})$, d.h. $L \in (\mathcal{L}^M)'$. Nach Hahn-Banach existiert nun eine Erweiterung $\tilde{L} \in (L^1(\mathbb{R}^d)^M)'$ und nach Darstellungssatz von Riesz gilt

$$(L^1(\mathbb{R}^d)^M)' \cong (L^1(\mathbb{R}^d)')^M \cong L^\infty(\mathbb{R}^d)^M.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
u(f) = \tilde{L}(\psi_f) &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_{f,\alpha} g_\alpha dx \\
&= \sum_{|\alpha| \leq N} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^N D^{\alpha+1} f(x) g_\alpha(x) dx
\end{aligned}$$

mit $g_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ für $\alpha \in I_N$. Mit mehrfacher partieller Integration kann man dies weiter vereinfachen zu

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\varphi} D^{\tilde{\gamma}} f dx$$

mit $\tilde{\gamma} = (N+1, ..., N+1)$ und $\tilde{\varphi} =$ Linearkombinationen aus $(1+|x|)^N g_\alpha$ und deren Stammfunktionen. Insbesondere ist $\tilde{\varphi}$ langsam wachsende Funktion. Nochmals partielles Integrieren liefert dann ein stetiges φ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit gewünschter Eigenschaft.

$\square$

1.5 Faltung und Distributionen

Wir begnügen uns damit Distributionen u mit Schwarzfunktionen f zu falten. Die Definition wird motiviert durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = u_g(f(x-\cdot)).$$

Definition 1.5.0.1. *Sei $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ und $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Dann definiere*

$$(f * u)(x) := u(f(x-\cdot)),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Satz 1.5.0.2. *Sei $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Dann ist die Funktion $x \mapsto (f*u)(x)$ eine langsam wachsende $C^\infty-$Funktion, mit*

$$D(f*u) = (D^\alpha f) * u = f * (D^\alpha u).$$

Beweis: Nach Kapitel 4 existiert zu $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ ein $N \in \mathbb{N}$, $C < \infty$ mit

$$|u(f)| \leq C||f||_N.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
|(f * u)(x)| &= |u(f(x - \cdot))| \\
&\leq C \sup_y \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |y^\alpha D^\beta f(x-y)| \\
&= C \sup_y \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |(x-y)^\alpha D^\beta f(y)| \\
&\leq C \cdot \tilde{C}(1+|x|)^N,
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} \geq \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N}(1+|y|)^N |D^\beta f(u)|$.

Zeige nun

$$D_{x_i}(f * u) = (D_{x_i} f * u).$$

Betrachte dazu den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{n}[(f * u)(x + he_i) - (f * u)(x)] \overset{\text{Def.}}{=} u(\frac{1}{n}[f(x + he_i - \cdot) - f(x - \cdot)])$$

Da jedes $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gleichmäßig stetig (und alle Ableitungen ebenso) ist, folgt für festes $x \in \mathbb{R}^d$ und $N \in \mathbb{N}$.

$$||[\frac{1}{n} f(x + he_i - \cdot) - f(x - \cdot)] - D_{x_i} f(x - \cdot)||_N \to 0 \text{ für } h \to 0.$$

Mit der Stetigkeit von u folgt nun

$$\begin{aligned}
D_{x_i}(f * u)(x) &= u(D_{x_i} f(x - \cdot)) \\
&= ((D_{x_i} f) * u)(x)
\end{aligned}$$

Wiederholung des Arguments liefert

$$D^\alpha(f * u) = (D^\alpha f) * u).$$

Die letzte Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}(D^\alpha f * u)(x) &= u((D^\alpha f)(x-\cdot)) \\ &= u((-1)^{|\alpha|} D^\alpha(f(x-\cdot)) \\ &= (D^\alpha u)(f(x-\cdot)) = (f * D^\alpha u)(x)\end{aligned}$$

□

Für alternative Darstellungen benötigen wir das folgende

Lemma 1.5.0.3. *Seien $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$u\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(u-\cdot)g(y)dy\right) = \int_{\mathbb{R}^d} u(f(y-\cdot))g(y)dy.$$

Beweis:

a) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei $(Q_m)_{m=1}^{(2N^2)^d}$ die Zerlegung von $[-N, N]^d$ in Würfel der Seitenlänge $1/N$ mit Mittelpunkt y_m. Zeige nun, dass die Riemannsumme $R_N(x) := \sum_{m=1}^{(2N^2)^d} f(y_m - x)g(y_m)|Q_m|$ in $S(\mathbb{R}^d)$ gegen $\int_{\mathbb{R}^d} f(y-x)g(y)dy$ konvergiert, d.h.

$$||R_N - \int_{\mathbb{R}^d} f(y-\cdot)g(y)dy||_{x,\beta} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^d} |\sum_{m=1}^{(2N^2)^d} x^\alpha D^\beta(f(y_m-x))g(y_m)|Q_m| - \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha D_x^\beta(f(y-x))g(y)dy$$

Es gilt zum einen:

$$\begin{aligned}x^\alpha(-1)^{|\beta|}(D^\beta f)(y_m-x)g(y_m)|Q_m| &- (-1)^{|\beta|}\int_{\mathbb{Q}_m} x^\alpha(D^\beta f)(y-x)g(y)dy \\ &= (-1)^{|\beta|}\int_{Q_m} x^\alpha((D^\beta f)(u_m-x)g(y_m) - (D^\beta f)(y-x)g(y \\ &= (-1)^{|\beta|}\int_{Q_m} x^\alpha(y_m-y)[\nabla_y(D^\beta f(\cdot - x)g)](\xi)dy = (*)\end{aligned}$$

für $\xi = y + \theta(y_m - y)$, $\theta \in [0,1]$. Wegen $|y| \leq |\xi| + \theta|y_m - y| \leq |\xi| + \frac{\sqrt{d}}{N} \leq |\xi| + 1$ für $N > \sqrt{d}$, folgt

$$|(*)| \;\leq\; c_1 \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^M}\frac{\sqrt{d}}{N}\int_{Q_m}\frac{1}{(1+|y|)^M}dy$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
|D_N(x)| &\leq c_1 \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^M} \frac{\sqrt{d}}{N} \int_{|y| \leq N} \frac{1}{(1+|y|)^M} dy + \int_{|y|>N} |x^{|\alpha|} D^\beta f(y-x) g(y) dy \\
&\leq c_1 \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^M} \frac{\sqrt{d}}{N} \int_{|y|_\infty \leq N} \frac{1}{(1+|y|)^M} dy + c_2 \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^M} \int_{|y|_\infty > N} \frac{1}{(1+|y|)^M} dy \\
&\to 0 \text{ für } N \to 0 \text{ (unabhängig von x)}
\end{aligned}$$

b) Mit 1. erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
u\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y-\cdot) g(y) dy\right) &= \lim_{N\to\infty} u(R_N) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{(2N^2)^d} u(f(y_m - \cdot)) g(y_m) |Q_M| \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(f(y-\cdot)) g(y) dy
\end{aligned}$$

da $y \mapsto u(f(y-\cdot))g(y) \in S(\mathbb{R}^d)$ und damit Riemann-integrierbar

□

Damit erhält man

Proposition 1.5.0.4. *Für $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$(f * u)(g) = u(\tilde{f} * g) \ \forall g \in S(\mathbb{R}^d)$$

($f * u$ als Distribution aufgefasst).

Beweis: Nach Kapitel 3 gilt $\tilde{f} * g \in S(\mathbb{R}^d)$, d.h. die rechte Seite ist wohldefiniert. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
u(\tilde{f} * g) &= u\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y-\cdot)g(y)dy\right) \\
&\overset{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^d} u(f(y-\cdot))g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (f*u)(y)g(y)dy \\
&= (f*u)(g).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.0.5. *Für $u \in S'(\mathbb{R}^d),\ f, g \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$f * (g * u) = (f * g) * u.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left[(f*g)*u\right](x) &= u((f*g)(x-\cdot)) \\
&= u\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y-\cdot)f(y)dy\right) \\
&\overset{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^d} u(g(x-y-\cdot))f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (g*u)(x-y)f(y)dy \\
&= [f*(g*u)](x).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.0.6. *Für $u \in S'(\mathbb{R}^d),\ f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt*

a) $\mathcal{F}(f * u) = \hat{f} \cdot \hat{u}$.

b) $\mathcal{F}(f \cdot u) = \hat{f} * \hat{u}$.

Beweis: a) Für $g \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * u)(g) &= (f * u)(\hat{g}) \overset{5.4}{=} u(\tilde{f} * \tilde{g}) \\ (\hat{f} \cdot \hat{u})(g) &= \hat{u}(\hat{f} \cdot g) = u(\mathcal{F}(\hat{f} \cdot g)) = u(\mathcal{F}(\hat{f}) * \hat{g}) = u(\tilde{f} * g). \end{aligned}$$

b) analog. □

So kommt man schließlich zu einem Dichtheitsresultat:

Satz 1.5.0.7. *Zu jedem $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ existiert eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $f_k \to u$ „im distributiven Sinne“, d.h.*

$$u_{f_k}(g) \overset{k\to\infty}{\to} u(g) \ \forall g \in S(\mathbb{R}^d).$$

Beweis: Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi(x) = 1$ auf $B(0,R)$ für ein $R > 0$ und setze $\varphi_k(x) = \varphi(\frac{1}{k}x)$. Zeige zunächst zwei Hilfsbehauptungen. Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k f = f$ in $S(\mathbb{R}^d)$.

b) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k \mathcal{F}(\varphi_k f) = \hat{f}$ in $S(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: 1. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||\varphi_k f - f||_{\alpha,\beta} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta((\varphi_k(x) - 1)f(x))| \\ &\overset{\text{Leibnitz}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \sum_{\gamma_1=0}^{\beta_1} ... \sum_{\gamma_d=0}^{\beta_d} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot ... \cdot \begin{pmatrix} \beta_d \\ \gamma_d \end{pmatrix} (D^\gamma(\varphi_k - 1))(D^{\beta\gamma} f)| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left[|x^\alpha(\varphi_k(x) - 1)D^\beta f(x) + \sum_{\gamma\neq 0} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \frac{1}{k^{|\gamma|}} |x^\alpha (D^\gamma \varphi)(\frac{x}{k}) D^{\beta-\gamma} f(x)| \right] \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha(\varphi_k(x) - 1)D^\beta f(x)| + \frac{1}{k} c_\beta ||\varphi||_N ||f||_N \qquad (1.5.1) \end{aligned}$$

Nun ist $\varphi_k(x) - 1 = 0$ für $|x| < kR$ und $|x^\alpha D^\beta f(x)| \leq c\frac{1}{|x|} \leq c\frac{1}{kR}$ für $|x| \leq kR$. Damit folgt

$$||\varphi_k f - f||_{\alpha,\beta} \leq \frac{c}{kR} + \frac{1}{k} c_\beta ||\varphi||_N ||f||_N \to 0 \quad (k \to 0).$$

2. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ beliebig. Nach 1. und wegen der Stetigkeit von $\mathcal{F} : S \to S$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(\varphi_k f) = \hat{f}$$

in $S(\mathbb{R}^d)$ für alle $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Nach 1. und da $\mathcal{F}(\varphi_j f) \in S(\mathbb{R}^d)$ folgt dann auch

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k \mathcal{F}(\varphi_j f) = \mathcal{F}(\varphi_j f)$$

in $S(\mathbb{R}^d)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wähle nun zu $\epsilon > 0$ ein $j_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $||\mathcal{F}(\varphi_j f) - \hat{f}||_{\alpha,\beta} < \epsilon$ und $||\mathcal{F}(\varphi_k f) - \mathcal{F}(\varphi_j f)||_{\alpha,\beta} < \epsilon$ für alle $k, j \geq j_\epsilon$. Dann gilt für $j \geq j\epsilon$

$$\begin{aligned}
||\varphi_k \mathcal{F}(\varphi_k f) - \hat{f}||_{\alpha,\beta} &\leq ||\varphi_k \mathcal{F}(\varphi_k f) - \varphi_k \mathcal{F}(\varphi_j f)||_{\alpha,\beta} \\
&+ ||\varphi_k \mathcal{F}(\varphi_j f) - \mathcal{F}(\varphi_j f)||_{\alpha,\beta} \\
&+ ||\mathcal{F}(\varphi_j f) - \hat{f}||_{\alpha,\beta} \\
&\to 2\epsilon \text{ für } k \to \infty
\end{aligned}$$

□

Sei nun $u \in S'(\mathbb{R}^d)$. Dann definiere

$$f_k := \varphi_k(\hat{\varphi} * u) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ nach Satz 5.2.}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
u_{f_k}(g) &\overset{5.6}{=} \varphi_k \cdot \mathcal{F}(\varphi_k \cdot \mathcal{F}^{-1}(u))(g) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F}(\varphi_k g)) \\
&\to \mathcal{F}^{-1} u(\hat{g}) = u(g) \ (k \to \infty)
\end{aligned}$$

nach Behauptung 2. $\square$

1.6 Soboleväume

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \to u_f \in S'$, $u_f(h) = \int f(x)g(x)dx$. Wann gilt $D^\alpha u_f \in S' \Rightarrow D^\alpha u_f \in L^2$?.

Definition 1.6.0.1. *Für $K \in \mathbb{N}$:*

$$H^K(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : D^\alpha f \in L^2, \forall |\alpha| \leq K\}$$

$$\textit{genauer } f \in H^\alpha \Leftrightarrow \forall |\alpha| \leq K \exists f_\alpha : U - f = D^\alpha u_f$$

mit der Norm

$$||f||_K := \left(\sum_{|\alpha| \leq K} ||D^\alpha f||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right)^{1/2}.$$

Bemerkung 1.6.0.2.

a) *(schwache Ableitung) Zu $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gibt es ein $f_\alpha \in L^2$, sodass für $h \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt:*

$$\begin{aligned} \int f_\alpha(x)h(x)dx &= D^\alpha(u_f)(h) \\ &= (-1)^{|\alpha|} u_f(D^\alpha h) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int f(x)(D^\alpha h)(x)dx. \end{aligned}$$

b) *Die Räume H^K sind vollständig.*

c) *H^K sind Hilberträume bezüglich*

$$< f, g >_K = \sum_{|\alpha| \leq K} \int_{\mathbb{R}^d} (D^\alpha f)(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx, \quad < f, f >_K = ||f||^2_K.$$

d) Berechne $||f||_K$ mit Hilfe von $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} ||D^\alpha f||_{L^2}^2 &= ||\mathcal{F}(D^\alpha f)||_{L^2}^2 \\ &= ||(2i\pi\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)||_{L^2}^2 \\ &= (2\pi)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\alpha||\hat{f}(\xi)^2 d\xi \\ \Rightarrow \sum_{|\alpha|\le K} (2\pi)^{|\alpha|} \int |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{|\alpha|\le K} (2\pi)^{|\alpha|} |\xi^\alpha| \right) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \approx (1+|\xi|^2)^K \end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned} |x^\alpha| &\le 1+|x|^{2k} \\ (1+|x|^K)^2 &= (1+(\sum |x_i|^2)^{K/2})^2 \\ &\le (1+(\sum_{i=1}^d |x_i|^K))^2 \\ &\le C(\sum_{|\alpha|\le K} |x^\alpha|^2) \end{aligned}$$

Also

$$||f||_K^2 \cong \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{K/2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, K \in \mathbb{N}.$$

Definition 1.6.0.3. *Für alle $s \in \mathbb{R}$ definiere den Sobolevraum*

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{R}^d) &= \{f \in S'(\mathbb{R}^d) : (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\} \\ ||f||_{H^s} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi \right)^{1/2} \\ < f, g >_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} (1+|\xi|^2)^s d\xi \end{aligned}$$

für $s = K \in \mathbb{N} : ||f||_{H^s} \cong ||f||_{H^\alpha}$.

Proposition 1.6.0.4. *Die Räume $H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$ sind Hilberträume, also insbesondere vollständig. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dich in $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis: $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$, $H^s \overset{\mathcal{F}|_{H^s}}{\leftrightarrow} L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s)$, Isometrie von H^s auf $L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s)$, wobei $L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s)$ vollständig ist. Somit ist auch H^s vollständig und damit ein Hilbertraum.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi) & \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\to} & H^s \\ S(\mathbb{R}^d) & \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\to} & S(\mathbb{R}^d) \end{array}$$

Also liegt $S(\mathbb{R}^d)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^d)$. Elementar: $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ in $S(\mathbb{R}^d)$. □

Proposition 1.6.0.5. *$J : H^{-s} \to (H^s)'$, $J(u)(h) = \int \hat{u}(\xi)\hat{h}(\xi)d\xi$ für $u \in H^{-s}$, $h \in H^s$ definiert eine surjektive Isometrie von H^{-s} auf $(H^s)'$ - den Banachraum dual von H^s bezüglich der Dualität*

$$(f, g) = \int \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi \text{ (bilineare Abbildung).}$$

Beweis: Sei $u \in H^{-s}$, $h \in H^s$.

$$\begin{aligned} J(u)(h) &= \int \hat{u}(\xi)\hat{h}(\xi)d\xi \\ &= \int \hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{h}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}d\xi \\ &\leq \left(\int |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{1/2} \cdot \left(\int |\hat{h}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{s}d\xi\right)^{1/2} \\ &= ||u||_{H^{-s}}||h||_{H^s} \end{aligned}$$

Da J stetig gilt $||Ju||_{(H^s)'} \leq ||u||_{H^{-s}}$. Sei nun $u \in H^{-s}$, $||u||_{H^{-s}} = 1$ gegeben. Wähle

$g = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s}]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
||g||_s &= \left(\int |\hat{u}(1+|\xi|^2)^{-s/2}|^s d\xi\right)^{1/2} \\
&= ||u||_{H^{-s}} = 1 \\
(Ju)(g) &= \int |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \\
&= ||u||_{H^{-s}} = 1 \\
\Rightarrow ||Ju||_{(H^s)'} &= 1 \text{ für } ||u||_{H^{-s}} = 1
\end{aligned}$$

Somit ist $J : H^{-s} \to (H^s)'$ eine isometrische Einbettung.

Zu zeigen bleibt, J ist surjektiv. Zu $v \in (H^s)'$ gibt es ein $g \in H^s$ mit $v(h) =< h, g >_{H^s}$ nach Riesz.

$$v(h) = \int \hat{h}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi$$

für alle $h \in H^s$. Wähle $u = \mathcal{F}^{-1}[\overline{\hat{g}(\xi)}(1+|\xi|^2)^s]$. Dann:

$$\begin{aligned}
||u||_{H^{-s}} &= ||\bar{g}||_{H^s} = ||g||_{H^s} \\
J(u)(h) &= < h, g >_s = v(h), \ \forall h \in H
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 1.6.0.6. *Ist $s < t$, so ist $H^t \subset H^s$.*

Beweis: Da $(1+|\xi|^2)^s \leq (1+|\xi|^2)^t$. $\square$

Satz 1.6.0.7 (Sobolevscher Einbettungssatz)**.** *Sei $s > d/2$. Dann gilt*

a) $H^s \subset C_b(\mathbb{R}^d)$.

b) $H^{s+K} \subset C_b^K(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: a) Für $u \in S(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2i\pi x\xi}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}d\xi \\ &\leq \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{1/2}\left(\int |\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} \end{aligned}$$

mit $\left(\int (1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{1/2} \leq \infty$ und $\left(\int |\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} = ||u||_{H^s}$.

b) $|\alpha| \leq K$, $u \in H^{s+K} \Rightarrow D^\alpha \in H^s$, wende nun a) an $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Korollar 1.6.0.8. *Sei $s > d/2$, dann gilt: Der Raum der endlichen Maße $M(\mathbb{R}^d) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.*

Bemerkung: $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$, $u_\mu \in S'(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} u_\mu(h) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x)d\mu(x) \\ \mu \in M(\mathbb{R}^d) &\Rightarrow u_\mu \in H^{-s}(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |u_\mu(h)| &= |\int h(x)d\mu(x)| \\ &\leq ||h||_{C_b(\mathbb{R}^d)}||\mu||_{M(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq ||h||_{H^s} \cdot ||\mu||_{M(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Also: $u_\mu \in (H^s)'$, $||u_\mu||_{(H^s)'} \leq ||\mu||_{M(\mathbb{R}^d)}$, d.h. $u_\mu \in H^{-s}$.

z.B. $\delta_x \in H^{-s}$, $s > d/2$, $x \in \mathbb{R}^d$, denn $h \in H^s$, $h \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $\delta_x(f) = f(x)$.

Satz 1.6.0.9. *Sei $s < t$ (d.h. $H^t \subseteq H^s$), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^t$ und $||u_n||_{H^t} \leq 1$ und $\operatorname{supp}(u_n) \subset U$, $U \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Dann hat (u_n) eine in H^s konvergente Teilfolge.*

Ergänzung zur Einbettung. $H^t \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ für $t > s$.

Satz 1.6.0.10 (Kompakte Einbettung auf beschränkten Mengen)**.** *Sei $u_n \subset H^t$, $||u_n||_{H^t} \leq C$, und für ein $M < \infty$ $\operatorname{supp} u_n \subset B(0,M)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann hat u_n eine Teilfolge, die in $H^s(\mathbb{R}^d)$ konvergiert für $s < t$.*

Beweis: 1. Schritt: $\hat{u}_n|_K, n \in \mathbb{N}$ ist relativ kompakt in $C(K)$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^d$. Denn: wähle $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \equiv 1$ auf $B(0,m)$.

$$
\begin{aligned}
D^\alpha \hat{u}_n &= D^\alpha \mathcal{F}(\psi u_n) \\
&= D^\alpha [\hat{\psi} * \hat{u}_n] \\
&= (D^\alpha \hat{\psi}) * \hat{u}_n, \qquad \text{also} \\
|D^\alpha \hat{u}_n(\xi)| &\leq \int D^\alpha \hat{\psi}(\xi - \eta) \hat{u}_n(\eta) d\eta \\
&\leq \left(\int (1+|\eta|^2)^{-t} |D^\alpha \hat{\psi}(\xi-\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \left(\int |\hat{u}_n(\eta)|^2 (1+|\eta|^2)^d \eta \right)^{1/2} \\
&=: f_\alpha(\xi) \cdot ||u_n||_{H^t} \\
&\leq C f_\alpha(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^d),
\end{aligned}
$$

denn $(1+|\eta|^2)^{-1} \in L^\infty$, $\xi \to |D^\alpha \hat{\psi}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (Youngsche Ungleichung).
Da $\hat{u}_n|_K$ beschränkt und gleichgradig stetig (denn $D^\alpha f_n$ gleichmäßig beschränkt), folgt aus Azela-Ascoli, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergente Teilfolgen hat.
2. Schritt: u_n hat eine konvergente Teilfolge in H^s. Denn: Zu $\epsilon > 0$ wähle ein $0 < R < \infty$, sodass

$$(1+R^2)^{s-t} \leq \frac{\epsilon}{4c^2}$$

Für $K = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq R\}$ wähle nach Schritt 1 eine Teilfolge von (u_n) (wieder u_n

genannt), sodass $\hat{u}_n|_K$ gleichmäßig in $C(K)$ konvergiert. Dann

$$\begin{aligned}
||u_n - u_m||^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_n(\xi) - \hat{u}_m(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi \\
&= \int_{|\xi|\leq R} ... + \int_{|\xi|>R} ...
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|>R} |\hat{u}_n(\xi) - \hat{u}_m(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi &\leq \sup_{|\xi|>R} (1+|\xi|^2)^{s-t} ||u_n - u_m||^2_{H^t} \\
&\leq (1+R^2)^{s-t} (||u_n||_{H^t} + ||u_m||_{H^t}) \leq \epsilon
\end{aligned}$$

nach Wahl von R und

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq R} |\hat{u}_n(\xi) - \hat{u}_m(\xi)^2 (1+|\xi|)^s d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq R} (1+|\xi|^2)^s d\xi \sup_{\xi \in K} |\hat{u_n}(\xi) - \hat{u}_m(\xi)|^2 \\
&= C_1 \cdot \text{ Konst } \cdot ||\hat{u}_n - \hat{u}_m||_{C(K)} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Proposition 1.6.0.11 (Bernsteinsche Ungleichung)**.** *Für* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq \{\xi : |\xi| > R\}$ *gilt:*

a) f hat eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C}^d$.

b) Für alle $s < r$ gilt $f \in H^r$ und

$$||f||_{H^r} \leq (1+R)^{r-s} ||f||_{H^s}.$$

Beweis: a) Für $(z_1, ..., z_d) \in \mathbb{C}^d$ setze

$$F(z_1, ..., z_d) = \int_{|\xi|\leq R} \exp\left[2i\pi \left(\sum_{j=1}^d z_j \xi_j\right)\right] \hat{f}(\xi_1, ..., \xi_d) d\xi_1 ... \xi_d.$$

Nach der Umkehrformel: $F(x_1, ..., x_d) = f(x_1, ..., x_d)$ für $x_1, ..., x_d \in \mathbb{R}$. Also ist F eine Fortsetzung von f von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{C}^d$. Zu zeigen: F ist partiell komplex differenzierbar nach

$z_1, ..., z_d$. Sei $w = w_1, ..., w_d \in \mathbb{C}^d$ fest. Auf der Kugel $K = \{z \in \mathbb{C}^d : |z - w| \leq 1\}$ ist $\exp\left[2i\pi\left(\sum_{j=1}^d z_j\xi_j\right)\right]$, $|\xi| \leq R$, $z \in K$ gleichmäßig beschränkt. Also ist Differentiation nach $w_1, ..., w_d$ unter dem Integral erlaubt und die Behauptung folgt.

b)

$$\begin{aligned}
||f||^2_{H^r} &= \int |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^r d\xi \\
&\leq \sup_{|\xi|\leq R}(1+|\xi|^2)^{r-s}\int_{|\xi|\leq R}|\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)d\xi \\
&\leq (1+R^2)^{r-s}||f||^2_{H^s} \\
&\leq (1+R)^{2(r-s)}||f||^2_{H^s}
\end{aligned}$$

□

1.7 Der Funktionalkalkül des Laplace Operators

Definition 1.7.0.1 (des Laplace Operators). *Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$: $\Delta f(\cdot) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(\cdot)$.*

$$\begin{tikzcd}
S(\mathbb{R}^d) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & S(\mathbb{R}^d) \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
S(\mathbb{R}^d) \arrow[r, "M"'] & S(\mathbb{R}^d)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Delta f)(\xi) &= \sum_{j=1}^d \mathcal{F}(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f)(\xi) \\
&= \sum_{j=1}^d (2i\pi)^2 \xi_j^2(\xi) \\
&= -(2\pi)^2|\xi|^2\hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

$$Mg(\xi) = -(2\pi)^2|\xi|^2 g(\xi)$$

$$\boxed{\Delta = \mathcal{F}^{-1} \circ M \circ \mathcal{F}.}$$

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^d),\ \ f \in D(A):\ \ \mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = -(2\pi)^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi).$$

Bemerkung 1.7.0.2.

a) *Der ungewohnte Faktor* $(2\pi)^2$ *kommt von der Definition der Fouriertransformation durch* $e^{\underline{2\pi} i\xi x}$.

b) $H^2 = \{f \in S' : \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \in L^2(\mathbb{R}^d), i = 1, 2\}$

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f$$

ist in Ordnung, falls man $\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}$ *als distributionelle oder* ***schwache*** *Ableitungen versteht.*

$$\int \varphi(x) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x)\right] dx = (-1)^2 \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi(x)\right) dx$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

c) $\Delta : H^2 \to L^2$ *ist stetig und mit der Graphennorm*

$$||f||_{H^2} \cong ||f||_{L^2} + ||\Delta f||_{L^2}$$

ist Δ *insbesondere auf* L^2 *ein abgeschlossener Operator, d.h.* $f_n \in D(A)$, $f_n \to f$ *in* L^2, $\Delta f_n \to g$ *in* $L^2 \Rightarrow f \in D(A)$, $\Delta f = g$.

Beweis:

$$\begin{aligned} ||f||_{H^2}^2 &= \int |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^2 d\xi \\ &\approx \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int \left[|\hat{f}(\xi)||\xi|^2\right]^2 d\xi \\ &\approx ||f||_{L^2}^2 + ||\Delta f||_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Also: $||\Delta u||_{L^2} \leq ||u||_\Delta \approx ||u||_{H^2}$ - Stetigkeit. $\square$

Bemerkung 1.7.0.3 (Ziele des Funktionalkalküls)**.** *Definition neuer Operatoren, z.B.*

- $e^{-t\Delta} \Rightarrow$ *Lösung der Wärmeleitungsgleichung:* $y'(t) = \Delta y(t)$, $y(0) = y_0$.
- $e^{-it\Delta} \Rightarrow$ *Lösung der Schrödingergleichung* $y'(t) = (i\Delta)y(t)$.
- $\sin(t\Delta^{1/2})$, $\cos(t\Delta^{1/2}) \Rightarrow$ *Lösung der Wellengleichung* $y''(t) = \Delta y(t)$.

Berechnen der Operatorennormen, z.B.

$$||\Delta^n e^{-z\Delta}|| =?$$

Übertragung von Funktionalgleichungen in Operatorengleichungen, z.B.

$$e^{-t\lambda}e^{-s\lambda} = e^{-(s+t)\lambda} \Rightarrow e^{-t\Delta}e^{-s\Delta} = e^{-(s+t)\Delta}?$$

Definition 1.7.0.4. *Der Funktionalkalkül des Laplaceoperators ist eine Abbildung*

$$\Phi : B_b(\mathbb{R}_+) \to B(L^2(\mathbb{R}^d))$$

mit

(i) $\Phi(\varphi + \phi) = \Phi(\varphi) + \Phi(\phi)$. $\Phi(\varphi \cdot \phi) = \Phi(\varphi) \circ \Phi(\phi)$. ***Algebrahomomorphismus*** *von* $B_b(\mathbb{R}_+)$ *- punktweise Operationen - nach* $B(L^2)$ *- Operatorverknüpfungen.*

(ii) $||\Phi(\varphi)|| = ||\varphi||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. ***Beschränktheit*** *des Kalküls.*

(iii) Sei $\varphi_n(t)| \leq 1$, $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$, $n \to \infty$ *für alle* $t > 0$. *Dann gelte*

$$\Phi(\varphi_n)f \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(\varphi)f,\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Konvergenzeigenschaft*.*

(iv) Für $r_\mu(t) = \frac{1}{\mu - t}$ *folgt* $\Phi r_\mu = R(\mu, \Delta)$.

Notation: Schreibe $\Phi(\varphi) := \varphi(\Delta)$.

Idee zur Konstruktion von I:

$$-\Delta = \mathcal{F}^{-1} M \mathcal{F}$$

mit $Mg(\xi) = (4\pi^2 \cdot |\xi|^2)g(\xi)$, $m(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2$,

$$D(M) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) : \ m \cdot g \in L^2, \text{ d.h. } |\xi|^2 g(\xi) \in L^2\}.$$

Konstruiere zuerst

Definition 1.7.0.5 (Funktionalkalkül für M)**.**

$$M^2 g = M(Mg) = M(m \cdot g) = m^2 g, M^g = (m^n)g.$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \sum a_n \lambda^n, \\ p(M)g &= \left(\sum a_n M^n\right) g = \left(\sum a_n m^n\right) g = [p(m)]\, g \end{aligned}$$

wobei $p(m)(u) = p(m(u))$ (Komposition von Funktionen).

Sei $\varphi \in B_b(\mathbb{R}_+)$:

$$\Phi_M(\varphi)g \quad = \quad \varphi(M)g \quad = \quad \boxed{\varphi(m)}g, \ \ \varphi(m) = \varphi \circ m$$

Nachweis der Eigenschaften (i)-(iv) für M: (i)

$$\begin{aligned}\varphi(M)g + \psi(M)g &= (\varphi \circ m)g + (\psi \circ m)g \\ &= [(\varphi + \psi) \circ m]\, g \\ &= (\varphi + \psi)(M)g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\varphi(M) \cdot \psi(M)]\,(g) &= \varphi(M)\,[\psi(M)g] \\ &= \varphi(M)\,[(\psi \circ m)g] \\ &= (\varphi \circ m)(\psi \circ m)g \\ &= [(\varphi \cdot \psi) \circ m]\, g \\ &= (\varphi \cdot \psi)(M)g\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}||\varphi(M)||_{B(L^2)} &= \int |\varphi(M)g(x)|^2 dx \\ &= \int |\varphi(m(x))g(x)|^2 dx \\ &= ||m \circ \varphi||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(m(x))| \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda > 0} |\varphi(\lambda)|\end{aligned}$$

(iii) Zu zeigen:

$$\varphi_n(M)f \;\to\; \varphi(M)f \text{ in } L^2(\mathbb{R}^d).$$

$$|\varphi(M)f - \varphi_n(M)f||_{L^2}^2 = \int |\varphi(m(x)) - \varphi_n(m(x))|^2 |f(x)|^2 dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

nach Satz von Lebesgue, da $|\varphi(m(x)) - \varphi_n(m(x))|^2 \to 0$ für $n \to \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

(iv) Zu zeigen:

$$r_\mu(M) = R(\mu, M)$$

$$\begin{aligned} R(\mu, M) &= (\mu - M)^{-1}, \\ (\mu - M)g &= (\mu - m(x))g(\cdot) \\ \Rightarrow (\mu - M)^{-1}g &= (M - m(\cdot))^{-1}g(\cdot) = r_\mu(M) \end{aligned}$$

□

Definition 1.7.0.6 (Konstruktion des Funktionalkalküls für Δ)**.**

$$\varphi(-\Delta) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(M)\mathcal{F}.$$

Nachprüfen der Eigenschaften von Φ: (i)

$$\begin{aligned} \varphi(-\Delta)\psi(-\Delta) &= \left(\mathcal{F}^{-1}\varphi(M)\mathcal{F}\right)\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi(M)\mathcal{F}\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\varphi(M)\psi(M)]\mathcal{F} \\ &= (\varphi \cdot \psi)(-\Delta) \end{aligned}$$

(ii)

$$||\varphi(-\Delta)|| \overset{\text{Isometrien}}{=} ||\varphi(M)|| = ||\varphi||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \varphi_n(M)f &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(M)f,\ f \in L^2 \\ \Rightarrow \varphi_n(-\Delta)g = \mathcal{F}^{-1}[\varphi_n(M)(\mathcal{F}g)] &\to \mathcal{F}^{-1}[\varphi(M)(\mathcal{F}g)] \text{ da } \mathcal{F} \text{ stetig.} \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}(\lambda - M) r_\mu(M) &= \mathrm{id} \\ \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[(\lambda - M) r_\mu(M)]\mathcal{F} &= \mathrm{id} \\ \Rightarrow R(\lambda, -\Delta) &= r_\mu(-\Delta)\end{aligned}$$

□

Beispiel. Definition von $-(-\Delta)^{1/2}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(-(-\Delta)^{1/2} f)(\xi) &= 2\pi|\xi|\hat{f}(\xi) : \\ (-(-\Delta))^2 &= -\Delta\end{aligned}$$

1.8 Das Cauchyproblem für die Schrödinger- und die Wellengleichung

Motivation 1.8.0.1.

$$y'(t) = a(y(t)) + f(t),\ y(0) = y_0,$$

wobei $a \in \mathbb{R},\ f \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds.$$

Bemerkung 1.8.0.2 (Cauchyproblem für die Schrödingergleichung)**.**

$$(+)\ u'(t) = i\Delta u(t) + f(t),\ u(0) = y_0,$$

wobei $y_0 \in L^2(\mathbb{R}^d),\ f(t) \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \int_0^\infty ||f(t)||_{L^2}dt < \infty,\ A = i\Delta$.

Notation: $\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}(u(t,\cdot))(\xi)$ für festes $t \in \mathbb{R}$ heißt partielle Fouriertransformation bezüglich x.

Anwendung der partiellen Fouriertransformation auf (+).

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi) \quad = \quad i(-4\pi^2|\xi|^2)\hat{u}(t,\xi) + \hat{f}(t,\xi) \tag{1.8.1}$$

Für festes $\xi \in \mathbb{R}^d$ ist das eine gewöhnliche Differentialgleichung wie in 8.1. Die Lösung von (1) für festes ξ ist

$$\hat{u}(t,\xi) \quad = \quad e^{-4\pi^2 i|\xi|^2}\hat{y}_0(\xi) + \int_0^\infty e^{-4i\pi^2(t-s)|\xi|^2}\hat{f}(s,\xi)ds \tag{1.8.2}$$

Mit der inversen partiellen Fouriertransformation bezüglich ξ (t fest) erhält man

$$u(t,\xi) \quad = \quad \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4i\pi^2|\xi|^2}\hat{y}_0(\xi)\right](x) + \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4i\pi^2|\xi^2(t-s)}\hat{f}(x,\xi)\right]ds \tag{1.8.3}$$

wobei im letzten Ausdruck mit Hilfe von Fubini die Integration und $\mathcal{F}^{-1}$ vertauscht wurden. Mit Hilfe des Funktionalkalküls kann man (3) interpretieren als

$$\boxed{u(t) = e^{it\Delta}y_0 + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)ds,} \tag{1.8.4}$$

denn

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{it\Delta}y_0)(\xi) &= e^{itm(\xi)}\hat{y}_0(\xi), \quad m(\xi) = 4\pi|\xi|^2 \\ &= e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{y}_0(\xi) \end{aligned}$$

Proposition 1.8.0.3. *Die Operatoren $T(t) = e^{it\Delta}$ erfüllen:*

(i) $T(t+s) = T(s)T(t),\ t, s \in \mathbb{R}$.

(ii) $T^{-1}(t) = T(-t) = T(t)^*$, *d.h. die $T(t)$ sind eine unitäre Gruppe in $B(L^2)$.* $||T(t)|| = 1$.

(iii) $T_t f \overset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ *in* L^2, $f \in L^2$.

(iv) Für $f \in D(\Delta)$ gilt:

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t) - I}{t} f = i\Delta f, \quad \frac{d}{dt} e^{it\Delta}|_{t=0} f = i\Delta f.$$

Beweis: (i)

$$\begin{aligned} T(t) &= \varphi_t(-\Delta),\ \varphi_t(x) = e^{-i\lambda t} \\ \varphi_t(\lambda)\varphi_s(\lambda) = \varphi_{s+t}(\lambda) &\Rightarrow T(t)T(s) = T(t+s) \\ \varpi_t(\lambda) \cdot \varphi_{-t}(\lambda) = 1 &\Rightarrow T(t) \cdot T(-t) = \mathrm{id} \end{aligned}$$

(ii)

$$||T(t)|| = \sup_{\lambda>0} |e^{i\lambda t}| = 1.$$

(iii)

$$|\rho_t(\lambda)| \leq 1, \varphi_t(\lambda) \to 1 \Rightarrow T(t)f \to T(0) = \mathrm{id}\,.$$

(iv) Da $f \in D(\Delta)$, ist $(i\Delta)f = g \in L^2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{-i\lambda t}(e^{-i\lambda t} - 1) &\to 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{t}(e^{i\lambda\Delta} - I)(i\Delta)^{-1}g &\to g \\ \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{(T(t) - I)}{t} f &= i\Delta f. \end{aligned}$$

Kapitel 2

Spekraltheorie selbstadjungierter Operatoren

2.1 Beschränkte normale Operatoren

Definition 2.1.0.1. *Seien H_j Hilberträume mit $< .,. >_j$, $j = 1,2$. Zu jedem $T \in B(H_1, H_2)$ gibt es einen Hilbertraum adjungierten Operator $T^* \in B(H_2, H_1)$ mit*

$$< Tx, y >=< x, T^*y > .$$

Bemerkung 2.1.0.2.

a) *A^* ist eindeutig, $A^* \in B(H)$ mit $||A^*|| = ||A||$.*

b) *Beziehung zwischen der Hilbertraum-Adjungierten T^* und der Banachraum-Adjungierten T':*

$$\begin{aligned} \Phi_1 : H_1 &\to H_1', \Phi_1(x)(y) =< y, x >_1 \\ \Phi_2 : H_2 &\to H_2', \Phi_2(x)(y) =< y, x >_2,\ x, y \in Hz. \end{aligned}$$

(Riesz-Homomorphismen).

Behauptung:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\Phi_1"] & H_1' \\ H_2 \arrow[u, "T^*"] \arrow[r, "\Phi_2"'] & H_2' \arrow[u, "T'"'] \end{tikzcd} \quad , \quad T^* = \Phi_1^{-1}(T')\Phi_2.$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(T^*x)(y) &= < y, T^*x >_1 \\ &= < Ty, x >_2 \\ &= < \Phi_2(x), Ty >_1 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Proposition 2.1.0.3. *Seien $S, T \in B(H_1, H_2)$, $R \in B(H_2, H_3)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann*

a) $(S + T)^* = S^* + T^*$.

b) $(\lambda S)^* = (\overline{\lambda})S^*$, $(\lambda S)^* = \lambda S'$.

c) $(RS)^* = S^*R^*$.

d) $S^{**} = S$.

e $||SS^*|| = ||S^*S|| = ||S||^2$.

f) $\text{Kern}(S) = \text{Bild}(S^*)^\perp$, $\text{Kern}(S^*) = \text{Bild}(S)^\perp$.

Beweis: e)

$$||Sx||^2 =< Sx, Sx >=< x, S^*Sx >\leq ||x||^2||S^*S|| = ||x||^2||S^*|| \cdot ||S^*|| = ||x||^2||S||^2$$

Supremum über x mit $||x|| = 1$:

$$||S||^2 \leq ||S^*S|| \leq ||S||^2.$$

Definition 2.1.0.4.

a) *$T : H_1 \to H_2$ ist* ***unitär****, falls T invertierbar ist und $T^{-1} = T^*$.*

b) *$T \in B(H)$ ist* ***selbstadjungiert****, falls $T^* = T$.*

c) *$T \in B(H)$ ist* ***normal*** *fallst $TT^* = T^*T$.*

Bemerkung 2.1.0.5.

a) *Selbtstadjungierte und unitäre Operatoren sind normal.*

b) *T unitär $< Tx, Ty > = < x, T^*Ty > = < x, TT^*y > = < x, TT^{-1}y > ? < x, y > \Rightarrow$*

eine unitäre Abbildung erhält das Skalarprodukt und $||Tx|| = ||x||$.

Beispiel 2.1.0.6. *$H = L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $m \in L^\infty(\Omega)$.*

$$T : H \to H, \quad Tf(\omega) = m(\omega)f(\omega).$$

Dann gilt $||T|| = ||m||_{L^\infty}$.

$$\begin{aligned} < Tf, g > &= \int_\Omega m(x)f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int f(x)\overline{\overline{m(x)}g(x)}dx \\ &= < f, T^*g > \end{aligned}$$

$\Rightarrow T^*g(x) = \overline{m(x)}g(x)$. Also

- *T selbstadjungiert $\Leftrightarrow m(x) \in \mathbb{R}$.*
- *T unitär $\Leftrightarrow |m(x)| = 1$.*

$$T^{-1}f(x) = m(x)^{-1}f(x),\ m(x)^{-1} = \overline{m(x)}$$

.

Satz 2.1.0.7. *Sei $T \in B(H)$. Dann*

a) T normal: $r(T) = ||T||$.

b) T selbstadjungiert $\Rightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

c) T unitär $\Rightarrow \sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}$.

Beweis: a)

$$||T^2||^2 = ||(T^2)(T^2)^*|| = ... = ||TT^*||^2 = ||T||^4.$$

$\Rightarrow ||T^2|| = ||T||^2 \Rightarrow ||T^{2^n}|| = ||T||^{2n}$.

b),c) Übung. $\square$

Satz 2.1.0.8. *$T \in B(H)$ ist selbstadjungiert genau dann, wenn $< Tx, x >\in \mathbb{R}\ \forall x \in H$ und*

$$||T|| = \sup_{||x||=1} < Tx, x > .$$

Beweis: Übung.

Satz 2.1.0.9. *$P \in B(H)\backslash\{0\}$ sei eine Projektion. Dann sind äquivalent:*

a) P ist eine Orthogonalprojektion, d.h. Kern $P \perp$ Bild P.

b) $||P|| = 1$.

c) P selbstadjungiert.

d) P *normal.*

e) $< Px, x > \geq 0$.

Beweis: Funkana Übung, Buch Werner.

Satz 2.1.0.10 (Lax-Milgram). *Sei H ein komplexer Hilbertraum mit $< .,. >$ und b : $H \times H \to \mathbb{C}$ sei eine sesquilineare Form ($b(x, \lambda y) = \overline{\lambda} b(x, y)$).*

a) Falls $|b(x, y)| \leq C||x|| \cdot ||y||$ (+), dann existiert ein eindeutig bestimmter Operator $T \in B(H)$ mit

$$b(x, y) =< x, Tx > \text{ und } ||T|| \leq C.$$

b) Falls zusätzlich $b(x, x) \geq \delta ||x||^2$, $\delta \geq 0$, dann ist T invertierbar und $||T^{-1} \leq \delta^{-1}$.

Beweis: a) Sei $y \in H$ fest. Dann ist $x \to b_y(x) := b(x, y)$ ein lineares Funktional auf H mit $||b_y|| \leq C||y||$ (nach (+)). Da $b_y \in H'$, gibt es nach dem Satz von Riesz ein $z \in H$ mit $< x, z >= b_y(x) = b(x, y)$ und $||z|| = ||b_y||_{H'} \leq C||y||$.
Definiere $Ty := z$. Dann ist $||Ty|| \leq ||z|| \leq C||y||$.

$$< x, Ty >=< x, z >= b(x, y)$$

$||T|| \leq C$, T linear.
b) Es gilt $b(x, x) \geq \delta ||x||^2$. Für T aus a) und $y \in H$ gilt

$$< y, Ty >= b(y, y) \geq \delta ||y||^2.$$

- Aus $Ty = 0$ folgt $||y|| = 0$, d.h. T ist injektiv.

- Bild T ist abgeschlossen, denn für $y_n \in H$ mit $T(y_n) \to z \in H$ folgt

  $||y_n - y_m||^2 \leq \delta^{-1} b(y_n - y_m, y_n - y_m) = \delta^{-1} < y_n - y_m, T(y_n - y_m) > \leq \delta^{-1} 2 \sup ||y_n|| \cdot ||T(y_n) - T(y_m)$

  Da $\sup ||y_n|| < 0$, $T(y_n) \to z$, gilt $||y_n - y_m|| \to 0$ für $n, m \to \infty$. Also (y_n) sind Cauchy Folge und $y = \lim y_n$ existiert. Dann $Ty = \lim Ty_n = z$ und $z \in \text{Bild}\, T$, d.h. Bild T ist abgeschlossen.

- Bild $T = H$. Wähle $z \in (\text{Bild}\, T)^{\perp}$. Dann

  $$||z||^2 \leq \delta^{-1} < z, Tz >= 0 \Rightarrow z = 0$$

  Somit gilt Bild $T = H$.

Also $T \in B(H)$ ist surjektiv und $T^{-1} \in B(X)$ (open-map).

$$||T^{-1}x||^2 \leq \delta^{-1} < T^{-1}, T^{-1}Tx > \leq \delta^{-1} ||T^{-1}x|| \cdot ||x||$$

Also $||T^{-1}x|| \leq \delta^{-1} ||x||$.

2.2 Funktionalkalkül für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Notation $\mathcal{P}$: Menge der Polynome auf $\mathbb{R}$ mit komplexen Koeffizienten.

Definition 2.2.0.1 (Funktionalkalkül für Polynome)**.** *Sei $A \in B(X)$, X Hilbertraum, $< .,. >$, A selbstadjungiert. Für*

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_n \lambda^n, \; a_n \in \mathbf{K}$$

setze

$$p(A) = \sum_{j=0}^{n} a_n A^n \in B(X).$$

Definition 2.2.0.2. *Die Abbildung $p \in \mathcal{P} \to p(A) \in B(X)$ hat die Eigenschaften ($f, g \in \mathcal{P}, \lambda \in \mathbb{C}$)*

(i) $(\alpha f + g)(A) = \alpha f(A) + g(A)$, *linear.*

$(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$, *multiplikativ.*

(ii) $f_0(\lambda) \equiv 1,\ f_1(\lambda) = \lambda \Rightarrow f_0(A) = \mathrm{id}_X,\ f_1(A) = A.$

(iii) $f(A)^* = \overline{f}(A).$

(iv) $\boxed{\|p(A)\| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot \|A\|^j}$ *für* $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$

Beweis: (i) Übung, (ii) folgt aus Definition, (iii)

$$p(A)^* = (\sum_{j=0}^{n} a_j A^n) * = \sum_{j=0}^{n} (a_n A^n)^* = \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j (A^*)^n = \overline{p}(A^*) = \overline{p}(A)$$

(iv) $\|p(A)\| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot \|A^j\| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot \|A\|^j$. □

Satz 2.2.0.3 (Spektralabbildungssatz)**.** *Für einen selbstadjungierten Operator $A \in B(X)$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Beweis: „$\supseteq$“ Sei $\mu \in \sigma(A)$. Zu zeigen: $p(\mu) \in \sigma(p(A))$. Dazu wähle ein Polynom q, sodass

$$p(\mu) - p(\lambda) = (\mu - \lambda) q(\lambda),\ \ \lambda > 0$$

$$\Rightarrow p(\mu) - p(A) = (\mu - A) q(A) = q(A)(\mu - A)$$

Da $\mu - A$ keine Inverse hat ($\mu \in \sigma(A)$), hat auch $p(\mu) - p(A)$ keine Inverse, d.h. $p(\mu) \in \sigma(p(A))$.

„$\subseteq$" Sei $\mu \in \sigma(p(A))$. Zeige: $\mu \in p(\sigma(A))$. Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Wurzeln von $\lambda \to \mu - p(\lambda)$, d.h. $\mu - p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)$, (+). Damit folgt $\mu - p(A) = a(A - \lambda_1) \cdot ... \cdot (A - \lambda_n)$. Wäre $\lambda_1, ..., \lambda_n \notin \sigma(A)$, dann folgt

$$(\mu - p(A))^{-1} = a^{-1}(A - \lambda_n)^{-1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_1)^{-1}$$

also wäre $\mu \notin \sigma(p(A))$. Da $\mu \in \sigma(p(A))$, ist mindestens eines der λ_i in $\sigma(A)$. Dann folgt aus (+) $\mu = p(\lambda_j)$, $\mu \in p(\sigma(A))$. $\square$

Lemma 2.2.0.4. *Für $A \in B(X)$ selbstadjungiert und $p \in \mathcal{P}$ gilt*

$$\|p(A)\|_{B(X)} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |p(x)|.$$

Beweis:

$$\|p(A)\|^2 = \|p(A)p(A)^*\| = \|p(A)\overline{p}(A)\| = \|(p \cdot \overline{p})(A)\| = \||p|^2(A)\| = r(|p|^2(A))$$

da $|p(\cdot)|^2$ reell und $|p|^2(A)$ selbstadjungiert ist. Weiter ist

$$r(|p|^2(A)) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(|p|^2(A))\} \overset{2.2.3}{=} \sup\{|p|^2(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Durch Wurzelziehen erhält man

$$\|p(A)\| = \sup |\{p(\lambda) \in \sigma(A)\}|.$$

$\square$

Idee: $f(A) = \lim p_n(A)$ für $p_n \in \mathcal{P}$ mit $\|p_n - f\|_{C(\sigma(A))} \to 0$.

Satz 2.2.0.5 (Funktionalkalkül für stetige Funktionen)**.** *Es gibt eine lineare, multiplikative Abbildung*

$$\Phi : C(\sigma(A)) \to B(X) \ (schreibe \Phi(f) = f(A))$$

mit $\Phi(p) = p(A)$ *für* $p \in \mathcal{P}$ *und*

(i) $\|f(A)\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

(ii) $f(A)^* = \bar{f}(A)$, $f(A)$ *normal,* $f(A)$ *selbstadjungiert* $\Leftrightarrow$ f *reellwertig.* $f(A) \geq 0 \Leftrightarrow f(\lambda) \geq 0$ *für* $\lambda \in \sigma(A)$.

(iii) $Ax = \lambda x \Rightarrow f(A)x = f(\lambda)x$.

(iv) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Beweis: Nach dem Satz von Weierstraß sind die Polynome dicht in $(C(\sigma A), \| \cdot \|_\infty)$, da $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Φ ist die stetige Fortsetzung der Abbildung $p \in \mathcal{P} \to p(A) \in B(X)$, d.h. für $p \in \mathcal{P}$ mit $\|p_n - f\|_\infty \to 0$ setze $\Phi(f) = \lim \lim_{n\to\infty} p_n(A)$ in $B(X)$. Das ist möglich, da $p \in \mathcal{P} \to p(A) \in B(X)$ eine Isometrie ist, wegen 2.2.3

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Da

$$\|f(A)\| = \lim_{n\to\infty} \|p_n(A)\| = \lim \lim_{n\to\infty} sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p_n(x)| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(x)$$

gilt also

$$\|\Phi(f)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)| \text{ nach (i),}$$

d.h. Φ ist linear und multiplikativ.

$$f(A)^* = \lim p_n(A)^* = \lim \overline{p}_n(A) = \overline{f}(A)$$

Zeige nun $f(A)$ ist normal:

$$f(A) \cdot f(A)^* = f(A) \cdot \overline{f}(A) = (f \cdot \overline{f})(A) = (\overline{f} \cdot f)(A) = \overline{f}(A) \cdot f(A) = f(A)^* \cdot f(A).$$

$f(A)$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ f ist reelwertig:

$$f(A) = f(A)^* = \overline{f}(A) \Leftrightarrow f = \overline{f} \Leftrightarrow f \text{ ist reelwertig.}$$

$f \geq 0 \Rightarrow f(A) \geq 0$, d.h. $< f(A)x, x >\geq 0$ für alle x. Wähle $g \geq 0$ mit $f = g^2$. Dann

$$< f(A)x, x >=< g^2(A)x, x >=< g(A)g(A)x, x >=< g(A)x, g(A)^*x >=< g(A)x, g(A)x >\geq 0.$$

(iii) $p \in \mathcal{P}$, $Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow p(A) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j A^j\right) x = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\right) x$$

$\Rightarrow f(A)x = f(\lambda)x$ mit Hilfe von Approximationen von f durch Polynome p_n. (iv) „$\subseteq$“ Sei $\mu \in f(\sigma(A))$. Setze $g(\lambda) = (f(\lambda) - \mu)^{-1} \in C(\sigma(A))$. Dann gilt

$$g(f - \mu) = (f - \mu)g \equiv 1$$

$$\Rightarrow g(A)(f(A) - \mu) = (f(A) - \mu)g(A) = \mathrm{id}_X \Rightarrow \mu \notin \sigma(f(A)).$$

„$\supseteq$“ Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Zeige: $f(\mu) \in \sigma(f(A))$. Wähle $p_n \in \mathcal{P}$ mit $\|f - p_n\|_{C(\sigma(A))} \to 0$.

$$\|f(\mu) - f(A) - (p_n(\mu) - p_n(A))\|_{B(X)} \leq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\mu) - f(\lambda) - p_n(\mu) + p_n(\lambda)| \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$f(A)^* = \lim p_n(A)^* = \lim \overline{p}_n(A) = \overline{f}(A)$$

Nach 2.2.3 gilt $p_n(\mu) \in \sigma(p_n(A))$. Wäre $f(\mu) - f(A)$ invertierbar, so wäre wegen $p_n(\mu) - p_n(A) \to f(\mu) - f(A)$ in $B(X)$ auch $p_n(\mu) - p_n(A)$ für große n invertierbar, da die Menge der invertierbaren Operatoren in $B(X)$ offen ist. Also $f(\mu) - f(A)$ nicht invertierbar, d.h. $f(\mu) \in \sigma(f(A))$.

Ziele.

1) $\Phi : B_b(\sigma(A)) \to B(X)$, B_b beschränkte Borelfunktionen.

2) Finde ein Maß μ auf $\mathbb{C}$ und eine Isometrie $U : L^2(\mathbb{C}, \mu) \to X$, sodass

$$A = UMU^{-1}, \text{ wobei } Mg(\lambda = m(\lambda)g(\lambda).$$

Nach Riesz gilt $C(\sigma(A))' = M(\sigma(A))$. Zu $|l \in C(\sigma(A))$ gibt es ein Maß μ:

$$l(f) \int_{\sigma(A)} f(\lambda d\mu(\lambda)).$$

Satz 2.2.0.6. *$f \in C(\sigma(A)) \to f(A) \in B(X)$ ist ein isometrischer Algebrahomomorphismus.*

Satz 2.2.0.7. *Sei $A \in B(X)$, A selbstadjungiert. Zu jedem $x \in X$, $\|x\| = 1$ gibt es ein Maß μ_x auf $(\sigma(A),$ Borelmengen$)$ mit $\mu_x(\sigma(A)) = 1$, sodass*

$$\boxed{< f(A)x, x >= \int_{\sigma(A)} f(x) d\mu_x(x)}$$

für alle $f \in C(\sigma(A))$.

Definition 2.2.0.8. *μ_x heißt **Spektralmaß** von A bezüglich $x \in X$.*

Beweis: Sei $x \in X$, $\|x\| = 1$ fest. Definiere $l_x : C(\sigma(X)) \to \mathbb{C}$. Für $f \in C(\sigma(A))$ setze $l_x(f) =< f(A)x, x >$. Dann gilt

- l_x ist linear, denn

$$l_x(f+g) =< (f+g)(A)x, x >=< f(A)x, x > + < g(A)x, x >= l_x(f) + l_x(g).$$

- $|l_x(f)| \leq |< f(A)x, x > | \leq \|f(A)\| \cdot \|x\|^2 = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} f(x)$.

  $l(1_{\sigma(A)}) =< 1(A)x, x >= \|x\|^2 = 1 \Rightarrow \|l\|_{C(\sigma(A))} = 1$.

- f ist positiv, d.h. $f \geq 0$, $\overset{2.6}{\Rightarrow} f(A) \geq 0 \Rightarrow l_x(f) =< f(A)x, x >\geq 0$.

Nach Riesz: $\exists \mu_x$ Maß mit $\mu_x(\sigma(A)) = 1$, $\int f(\lambda) d\mu_x(\lambda) = l_x(f) =< f(A)x, x >$. □

2.3 Spektraldarstellung selbstadjungierter beschränkter Operatoren

Definition 2.3.0.1. *Sei $A \in B(X)$. Dann heißt $x \in X$ ein zyklischer Vektor von A, falls*

$$X = \overline{\operatorname{span}\{A^n x : n \in \mathbb{N}_0\}} = \overline{\{p(A)x : p \in \mathcal{P}\}}$$

Satz 2.3.0.2. *Sei A selbstadjungiert, $A \in B(X)$ und habe einen zyklischen Vektor $x \in X$. Dann gibt es eine unitäre Abbildung*

$$U : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to X \quad (\mu \textit{ Spektralmaß}),$$

sodass $A = UMU^{-1}$, wobei $Mg(\lambda) = \lambda g(\lambda)$.

Beweis: Sei x ein fester, zyklischer Vektor mit $\|x\| = 1$ und μ_x das zugehörige Spektralmaß.

$$U : C(\sigma(A)) \to X$$

Für $f \in C(\sigma(A))$ setze $Uf := f(A)x \in X$

- U ist linear, denn der Funktionalkalkül ist linear.

- $\|Uf\|_x^2 =< Uf, Uf >_X =< f(A)x, f(A)x >=< f(A)^* f(A)x, x >=< \bar{f}(A)f(A)x, x >$ $=< (\bar{f} \cdot f)(A)x, x >= \int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2 d\mu_x(\lambda) = \|f\|^2_{L^2(\sigma(A),\mu_x)}$. Also: $\|Uf\|_x = \|f\|_{L^2(\sigma(A),\mu_x)}$.

Da $C(\sigma(A))$ dicht in $L^2(\sigma(A), \mu_x)$, kann man U stetig fortsetzen.

$$L^2(\sigma(A), \mu_x) \to X \text{ linear, isometrisch.}$$

Zu zeigen: $U : L^2 \to X$ ist surjektiv.

$\operatorname{Bild} U$ ist abgeschlossen in X, da U isometrisch. Ferner gilt $\{Up : p \in \mathcal{P}\} = \{p(A)x : p \in \mathcal{P}\}$ ist dicht in X, da x ein zyklischer Vektor ist. $\Rightarrow \operatorname{Bild} U = X$.

Bleibt zu zeigen: $A = UMU^{-1}$. $(AU)(p) = A(p(A)x) = (A \cdot p(A))x = q(A)x = M(p)(A)x$ mit $q(\lambda) = \lambda p(\lambda) = Mp(\lambda) = UM(p)$. Damit gilt $AU = UM \Rightarrow$ Behauptung. $\square$

Lemma 2.3.0.3. *Sei X separabel, $A \in B(X)$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine (möglicherweise endliche) Folge H_j, $j \in J$, von Teilräumen von X mit*

(i) $A(H_j) \subset H_j$, $j \in J$.

(ii) $A_j = A|_{H_j}$ *hat* A_j *einen zyklischen Vektor in* H_j, *d.h.*

$$\overline{\{p(A_j)x_j : p \in \mathcal{P}\}} = H_j, \; j \in J.$$

(iii) $H_j \perp H_k$ *für* $j \neq k$.

(iv) Für $x \in X$ *gilt mit* $x_j = P_{H_j}x$ ($P_{H_j} : X \to H_j$ *orthogonale Projektion).*

$$x = \sum_{j \in J} x_j, \; \|x\|^2 = \sum_{j \in J} \|x_j\|^2.$$

Beweis: (i) Wähle $x_1 \in H_1$, $x_1 \neq 0$ und setze

$$H_1 = \overline{\text{span}}\{A_j x_1, j = 0, 1, 2, ...\} = \overline{\{p(A)x_1 : p \in \mathcal{P}\}}$$

Dann $A(H_1) \subset H_1$, denn

$$x = p(A)x_1 \Rightarrow Ax = Ap(A)x_1 = q(A)x_1 \in H_1$$

mit $q(\lambda) = \lambda p(\lambda)$. x_1 ist ein zylischer Vektor von $A_1 = A|_{H_1}$ in H_1.

(ii) Falls $X \neq H_1$, wähle $x_2 \in H_1^{\perp}$, $x_2 \neq 0$. Setze

$$H_2 = \overline{\{p(A)x_2 : p \in \mathcal{P}\}}.$$

Genauso folgt: $A(H_2) \subset H_2$, x_2 ist ein zyklischer Vektor für $A_2 = A|_{H_2}$ in H_2.

Zeige nun $H_1 \perp H_2$. $p(A)x_1 \in H_1$, $q(A)x_2 \in H_2$, $p, q \in \mathcal{P}$.

$$< p(A)x_1, q(A)x_2 >=< q(A)^* p(A)x_1, x_2 >=< (\bar{q} \cdot p)(A)x_1, x_2 >= 0$$

denn $(\bar{q} \cdot p)(A)x_1 \in H_1$ und $x_2 \perp H_1$.

(iii) Falls $x \neq \overline{H_1 + H_2}$, wähle $x_3 \perp H_1, H_2$ und setze

$$H_3 = \overline{\{p(A)x_3 : p \in \mathcal{P}\}}.$$

Frage

$$\overline{\bigcup_{j \in J} H_j} = X.$$

(iv) In dieser Konstruktion kann man $x_1, x_2, ...$ so wählen, dass

$$\overline{\bigcup_{j \in J} H_j} = X.$$

Wähle eine Folge (y_k) mit $\overline{\text{span}}(y_k) = X$. Wähle $x_1 = y_1$. Falls $H_1 \neq X$, wähle zuerst den ersten Index j_1, sodass $y_{j_1} \notin H_1$ und setze $x_2 = y_{j_1} - P_{H_1} y_{j_1} \perp H_1$. Iteriere nun. Dann

$$\{y_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \overline{\sum_{j \in J} H_j} = \overline{\{x_1 + \cdots + x_{j_m}, x_k \in H_k\}}.$$

(v) $x_j \perp x_k$ für $k \neq j$. Wie bei ONB:

$$\| \sum_{j=1}^{m} x_j \|^2 =< \sum_{j=1}^{m} x_j, \sum_{j=1}^{m} x_k >= \| \sum_{j=1}^{m} x_k \|^2 \Rightarrow \text{ Behauptung.}$$

□

Satz 2.3.0.4. *Sei $A \in B(X)$ selbstadjungiert und X seperabel. Dann existieren*

- *eine abgeschlossene Menge $S \subset \mathbb{R}^2$,*
- *ein Borelmaß μ auf S*
- *und ein unitärer Operator $U : L^2(S, \mu) \to X$.*
- *sowie $m : S \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt,*

sodass $A = UMU^{-1}$, wobei $Mg(\lambda) = m(\lambda)g(\lambda)$.

Beweis: Nach Lemma 3.3 gibt es eine Folge H_j, $j \in J$ von Teilrämen von X mit

- $A(H_j) \subset H_j$, $A_j = A|_{H_j}$ hat einen zyklischen Vektor x_j.
- $x = \sum x_j$, $x_j = P_{H_j} x$, $\|x\|^2 = \sum_{j \in J} \|x_j\|^2$ (orthogonale Zerlegung von X).

Auf $A_j \in H(H_j)$ wende Satz 3.2 an: Zum zyklischen Vektor x_j und seinem Spektralmaß μ_j gibt es eine unitäre Abbildung: $L^2(\sigma(A_j), \mu_j) \to H_j$, sodass $A_j = U_j M_j U_j^{-1}$, wobei $M_j g(\lambda) = \lambda g(\lambda)$. Sei S die "disjunkte Vereinigung"der $\sigma(A_j) \subset \mathbb{R}$

$$S = \bigcup_{j \in J} S_j, \; S_j = \{j\} \times \sigma(A_j) \subset \mathbb{R}^2.$$

$\tilde{\mu}_j(\{j\} \times B_j) = \mu_j(B_j)$ für $B_j \subset \mathbb{R}$ Borel, $j \in J$.

Definiere Maß μ auf S:

$$\mu(B) = \sum_{j \in J} \mu_j(B_j) \text{ für } B = \bigcup_{j \in J} \{j\} \times B_j.$$

$f \in L^2(S, \mu)$ hat die Form

$$f(j, \lambda) = f_j(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}, j \in J.$$

$$\|f\|^2_{L^2(S,\mu)} = \int_{\bigcup S_j} |f(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) = \sum_{j \in J} \int_{S_j} |f_j(t)|^2 d\tilde{\mu}_j(t) = \sum \int_{\sigma(A)} |f_j(t)|^2 d\mu(t) = \sum_{j \in J} \|f_j\|_{L^2(\sigma(A_j),\mu_j)}$$

$U : L^2(S, \mu) \to X \ Uf = \sum_j U_j f_j$.

$$\|U(f)\|^2_X = \sum \|U_j(f_j)\|^2_{H_j} = \sum \|f_j\|_{L^2(\sigma(A_j),\mu_j)} = \|f\|_{L^2(S,\mu)}$$

Also ist U unitär.

Setze $m(j, \lambda) = m_j(\lambda)$ für $(j, \lambda) \in S$. Damit folgt

$$[UAU^{-1}](j, d) = U_j A_j U_j^{-1} f_j(\lambda) = m_j(\lambda) f_j(\lambda) = (m \cdot f)(j, \lambda), (j, \lambda) \in s.$$

$\square$

Erweiterung des Funktionskalküls auf $B_b(\sigma(A))$, z.B. $f = \chi_{[a,b]}$, $f = \chi_B$. Problem: $\|f(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma A} |f(\lambda)|$.

Beispiel 2.3.0.5. *Sei* $M_m : L^2(S, \mu) \to L^2(S, \mu)$, $M(f) = m(\lambda) f(\lambda)$. *Wiederhole:* $\|M_m\|_{B(L^2)} = \|m\|_{L^\infty(S,\mu)}$.

$$\sigma(M_m) = \overline{\{m(s) : s \in S\}} = \{\mu\text{-}\textit{wesentlicher Wertebereich von } m \textit{ auf } S\}$$

$$= \{t \in \mathbb{R} : \mu(\{s \in S : |m(s) - t| < \epsilon\}) > 0 \forall \epsilon > 0\}.$$

ist abgeschlossen, $t_n \in R_\mu(m)$*,* $t_n \to t$*,* $\mu(\{s \in S : |m(s) - t_n| < \epsilon/2\}) > 0$*.*

$$|m(s) - t| \leq |m(s) - t_n| + |t_n - t|$$

$$\{|m(s) - t| < \epsilon\} \supset \{s \in S : |t_n - t| < \epsilon/2\}$$

Damit folgt $\mu(\{s \in S : |m(s) - t_n| < \epsilon/2\}) > 0$*, d.h.* $t \in R_\mu(m)$*.*

Zu Zeigen: $t \in R_\mu(m) \Rightarrow t \in \sigma(M_m)$*.* $(t \operatorname{id} - M_m)f$*.*

$$B_\epsilon = \{s \in S : |m(s) - t| < \epsilon\}, \mu(B_\epsilon) > 0$$

$$f = \chi_{B_\epsilon} \cdot \mu(B_\epsilon)^{-1/2}, \|f\|_{L^2(\mu)} = 1$$

$$\begin{aligned} \|(t \operatorname{id} - M)f\|_{L^2}^2 &= \int_{B_\epsilon} |(t - m(s))f(s)|^2 ds \\ &\leq \epsilon^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

Wähle eine Folge $\epsilon_n \to 0$*. Dann gilt für die Konstruktion* f_{ϵ_n}*:*

$$\|(t \operatorname{id} - M)f_{\epsilon_n}\| \to 0, \|f_{\epsilon_n}\| = 1$$

d.h. $t \in \sigma(M_m)$*. Bleibt zu zeigen:* $t \in \sigma(M_m) \Rightarrow t \in R_\mu(m)$*, d.h.* $t \notin R_\mu(m) \Rightarrow t \in \rho(M_m)$
$t \notin R_\mu(m)$ *heißt:* $\exists \epsilon_0 > 0 : \mu(s \in S_|t - m(s)| < \epsilon_0) = 0$*, d.h.* $|t - m(s)|^{-1} \leq \epsilon_0 > 0$ *für* μ*-fas alle* $t \in S$*.* $R(f(t)) = (t - m(s))^{-1} f(s)$ *gilt*

$$\|R\|_{B(L^2)} = \|(t - m(s))^{-1}\|_{L^\infty(S,\mu)} \leq \infty$$

$$R(t \operatorname{id} - M_m)f = (t - m(s))^{-1}(t - m(s))f(s) = f(s)$$

$$R = (t \operatorname{id} - M_m)^{-1},$$

d.h. $t \in \rho(M)$*.*

Funktionalkalkül von $\mathbf{M_m}$

$f \in B_b(\sigma(M_m)) \to f(M_m)$. $M_m^2 = M_{m^2}$, $M_m^n = M_{m^n}$. Somit gilt für ein Polynom

$$p(M) = \sum_{n=1}^{m} a_n M_m^n = M_{p(m)}$$

Definiere nun für $f \in B_b(\sigma(M_m))$:

$$f(M_m) := M_{f \circ m}.$$

Die Abbildung $f \in B_b(\sigma(M_m)) \to f(M_m) \in B(H)$ ist linear und multiplikativ.

Beweis: Folgt direkt aus der Multiplikativität von Funktionen.

Frage: Was ist $\|f(M)\|_{B(L^2)}$?

$$\|f(M)\|_{B(L^2)} = \|M_{f\circ m}\|_{B(L^2)} = \operatorname{ess\,sup} |(f \circ m)(s)| = \|f \circ m\|_{L^\infty}$$

$(S, \mu) \overset{m}{\to} (\sigma(M_m), \rho) \overset{f}{\to} \mathbb{R}$. Ziel:

$$\|f \circ m\|_{L^\infty(S,\mu)} = \|f\|_{L^\infty(\sigma(M_m),\rho)}$$

z.B. $m(\lambda) = \lambda$, $\sigma(M_m) = S$, $\mu = \mu_X$ $\|f \circ m\|_{L^\infty(\mu) = \|f\|_{L^\infty}}$.

Definition 2.3.0.6 (eines Maßes ν auf $\sigma(M_m)$)**.** *Für $B \subset \sigma(M_m)$ setze $\nu(B) = \mu(m^{-1}(B))$ (da $m^{-1}(B)$ Borelmenge in S).*

ν ist die Verteilung von m auf $\sigma(M)$, denn für B_j, $B_j \cap B_k = \emptyset$ für $k \neq j$ gilt $m^{-1}(B_j) \cap m^{-1}(B_k) = \emptyset$ und

$$\sum \nu(B_j) = \sum \mu(m^{-1}(B_j)) = \mu(m^{-1}(B)) = \nu(B), \bigcup B_j = B.$$

Es gilt nun:

$$\|f(M_m)\|_{B(L^2)} = \|f \circ m\|_{L^\infty(S,\mu)} = \|f\|_{L^\infty(\sigma(M),\nu)}$$

Also für $f \in B_b(\sigma(M_m)) \to f(M_m) \in B(L^2(S,\mu))$ ist $\Phi_M(f) = f(M_m)$ ein Algebrahomomorphismus uns

$$\|f(M_m)\| = \|f\|_{L^\infty(\sigma(M_m),\nu)}.$$

Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren

Sei $A = UM_mU^{-1}$ Spektraldarstellung mit U, μ, n, ν wie oben.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "A"] & H \\ L^2(\mu) \arrow[u, "U"] \arrow[r, "M_m"'] & L^2(U) \arrow[u, "U"'] \end{tikzcd}$$

Definition 2.3.0.7. *$f(A) = Uf(M_m)U^{-1}$ für $f \in B_b(\sigma(A))$.*

Beachte $\sigma(A) = \sigma(M) = R_\mu(m)$. Für den Funktionalkalkül

$$f \in B_b(\sigma(A)) \to f(A) \in B(H)$$

gilt

(i) $f \to f(A)$ ist ein Algebrahomomorphismus.

(ii) $\|f(A)\| = \|f\|_{L^\infty(\sigma(A),\nu)}$.

(iii) $|f_n(t)| \le C$, $f_n(t) \to f(t)$ μ-fast überall $\Rightarrow f_n(A)x \to f(A)x$ für alle $x \in H$.

(iv) $f(A)$ ist stets normal.

$f(A)$ ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ f ist reell.

$f(A)$ ist unitär $\Leftrightarrow$ $|f(t)| = 1$ μ-fast überall.

(v) Für $B \in B(H)$ gelte, dass $BA = AB$. Dann gilt auch $f(A)B = Bf(A)$ für alle $f \in B_b(\sigma(A))$.

Beweis: (i) $f(A)g(A) = Uf(M_m)U^{-1}Ug(M_m)U^{-1}$ liefert Behauptung.

(ii) $\|f(A)\| = \|f(M_M)\|$, da U Isometrie liefert Behauptung.

(iii) Zu zeigen: $f_n(M_m)h \to f(M_m)h$ in $L^2(S, \mu)$. Folgt aus dem Satz von Lebesgue.

(v) Übung $\square$

2.4 Spektralprojektion

Beispiel 2.4.0.1 (Multiplikationsoperator)**.** *Sei (S, μ) ein Maßraum, $m : S \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gibt es zu $\epsilon > 0$ messbare Mengen $B_1, ..., B_k \subset S$ und $m_1, ..., m_k \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\left| m(s) - \sum_{i=1}^{k} m_i \chi_{B_i}(s) \right| \leq \epsilon \textit{ für } s \in S$$

Zur Konstruktion: Wähle $V_j = (\epsilon \cdot j, e \cdot (j+1))$, $j \in J$, sodass $R_\mu(m) \subset \bigcup_{j \in J} V_j$. Setze $B_j = m^{-1}(V_j)$ messbar, $m_j = \epsilon \cdot j$ Dann gilt

$$\left| m(s) - \sum m_j \chi_{B_j}(s) \right| < \epsilon.$$

Setze $Mh(s) = m(s)h(s)$ und $\tilde{M}h(s) = \tilde{m}(s)h(s)$, wobei $\tilde{m} = \sum_{j \in J} m_j \chi_{B_j}(s)$. Dann gilt

$$\|M - \tilde{M}\|_{B(L^2)} = \|m - \tilde{m}\|_{L^\infty} \leq \epsilon.$$

und $\tilde{M}h(s) = m_j h(s)$ *für* $s \in B_j$, $j \in J$. $B_j = m^{-1}(V_j)$, *d.h.* $\chi_{V_j} \circ m = \chi_{B_j}$. *Setze*

$$M_j(h) = \chi_{B_j} h = (\chi_{V_j} \circ m)h = \chi_{V_j}(M) = \Phi_m(\chi_{V_j}).$$

Damit folgt

$$\tilde{M} = \sum_{j \in J} m_j \chi_{V_j}(M),$$

Approximation von M *mit Hilfe des Funktionalkalküls.*

Im folgenden wird stets angenommen: $A \in B(H)$ auf einem Hilbertraum H, A selbstadjungiert,

$$(S, \mu),\ U : L^2(S, \mu) \to H,\ m : S \to \sigma(A)$$

seien eine Spektraldarstellung für A, d.h.

$$A = U M_m U^{-1},$$

$\Phi_A(f) = f(A)$ der Funktionalkalkül von A.

Definition 2.4.0.2. *Für* V *setze* $\Phi_A(\chi_V) = \chi_V(A) =: P_V$. P_V *ist eine* ***Spektralprojektion*** *von* A *zur messbaren Teilmenge* $V \subset S$.

Proposition 2.4.0.3. *Eigenschaften der Spektralprojektion* P_A.

(i) P_V *ist immer eine Orthogonalprojektion auf* H, *d.h.* $\|P_V\| = 1$, $P_V^2 = P_V$.

(ii) $P_\emptyset = 0$, $P_\mathbb{R} = \mathrm{id}_H$.

(iii) $P_{V_1} \cdot P_{V_2} = P_{V_1 \cap V_2}$.

(iv) Falls $V = \bigcup V_i$ *mit* $V_i \cap V_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$, *dann gilt* $P_V x = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n P_{V_i} x$ *in* H.

(v) Sei V_j wie in (iv). $P_{V_i}(H) \perp P_{V_j}(H)$ für $i \neq j$ und $\|P_V x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|P_{V_i} x\|^2$ (falls $V = S$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} P_{V_j} x$, $\|x\|^2 = \sum \|P_{V_i} x\|^2$), Spektralzerlegung von H bezüglich A.

(vi) $AP_V = P_V A$, d.h. $A(P_V(H)) \subset P_V(H)$ und $A_V = A|_{P_V(H)}$ hat $\sigma(Av) = \sigma(A) \cap \bar{V}$.

Beweis: (i) $P_V^2 = [\chi_B(A)]^2 = \chi_B^2(A) = \chi_B(A) = P_V$. $\|P_V\| = \|\chi_V\|_{L^\infty(,\mu)} = \begin{cases} 0, & \mu(B) = 0, \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$.

(ii) $P_{V_1} \cap P_{V_2} = \chi_{V_1}(A) \cdot \chi_{V_2}(A) = \chi_{V_1 \cap V_2}(A) = P_{V_1 \cap V_2}(A)$.

(iii) $\chi_V(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \chi_{V_i}(s) \overset{\text{Konvergenzeigenschaft}}{\Longrightarrow} \chi_V(A)x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m \chi_{V_i}(A)x$ in H für alle $x \in H$.

(iv) $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \langle P_{V_i}(x), P_{V_j}(y)\rangle &= \langle x, P_{V_i} \cdot P_{V_j} y\rangle \\ &= \langle x, P_{V_i \cap V_j} y\rangle = 0, \end{aligned}$$

wenn $V_i \cap V_j = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \|P_V x\|^2 &= \left\langle \sum P_{V_i} x, \sum P_{V_i} x \right\rangle \\ &= \sum \langle P_{V_i} x, P_{V_i} x\rangle = \sum \|P_{V_i} x\|^2 \end{aligned}$$

(v) und (vi) Übung. □

Korollar 2.4.0.4. *Zu $\epsilon > 0$ gibt es eine messbare Partition $V_1, ..., V_k$ von $\sigma(A)$ und $m_1, ..., m_k$, sodass*

$$\left\| A - \sum_{j=1}^n m_j P_{V_j} \right\|_{B(L^2)} \leq \epsilon,$$

d.h. $x = \sum_{j=1}^{\infty} P_{V_j} x \Rightarrow \tilde{A}x = \sum_{j=1}^{\infty} m_j P_{V_j} x$ erfüllt

$$\|A - \tilde{A}\| \leq \epsilon.$$

Beweis: Für M_m, $\tilde{M}$ siehe Beispiel 4.1. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= U^{-1}\tilde{M}U \\
&= U^{-1}\left(\sum m_i \chi_{V_i}(M)\right)U \\
&= \sum m_i U[\chi_{V_i}(M)]U^{-1} \\
&= \sum m_i \chi_{V_i}(A) \\
\|A-\tilde{A}\| &= \|M-\tilde{M}\| \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

da U Isometrie. □

Definition 2.4.0.5. *$V \in B(\mathbb{R}) \to P_V \in \{Orthogonalprojektionen\ auf\ H\}$ heißt das Spektralmaß von A und $P_t = P_{(-\infty,t]}$, $t \in \mathbb{R}$, heißt* ***Spektralschar*** *von A.*

Bemerkung 2.4.0.6. *Idee einer Darstellung selbstadjungierter Operatoren durch projektionswertige Spektralmaße.*

a) $f(t) = \sum_i \alpha_i \chi_{V_i}$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, V_j messbar. Dann gilt $f(A) = \sum_i \alpha_i P_{V_i}$.

b) (f_n) seien Elementarfunktionen, $|f_n| \leq C$, $f_n \to f$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$f_n(A)x \to f(A)x.$$

c) Insbesondere: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, beschränkt gilt

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \sum f\left(\frac{j}{n}\right)\chi_{(j/n,(j+1)/n]}(t) \\
f(t) &= \lim f_n(t),\ \lim|f_n(t)| \leq |f(t)| \leq C, \\
f(A)x &= \lim f_n(A)x = \lim\left[f\left(\frac{j}{n}\right)P_{(j/n,(j+1)/n]}\right] \\
\Rightarrow f(A)x &= \lim\sum f\left(\frac{j}{n}\right)\left(P_{(j+1)/n} - P_{j/n}\right).
\end{aligned}$$

Vergleich mit Riemann-Integral, Stieltjes-Integral, legt die „Schreibweise“ nahe

$$\boxed{f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(t) dP_t.}$$

P_t ist σ-additiv, $V = \bigcup V_j$, $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ $P_V x = \lim \sum_{i=1}^n P_{V_i} x$. Siehe Werner - Funktionalanalysis, Weidmann - Lineare Operatoren auf Hilberträumen, Schmüdgen - Unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren.

d) *Für $x \in H$, $\|x\| = 1$, wurde Spektralmaß μ_x zu $x \in X$, definiert in Kapitel 2.2. Betrachte zu $(a,b]$ Funktionen $g_n \in C_b(\mathbb{R})$ mit $g_n(t) \to \chi_{(a,b]}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, z.B.*

$$\begin{aligned}
\mu_x((a,b]) &= \int \chi_{(a,b]}(t) d\mu_x(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_R g_n(t) d\mu_x(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle g_n(A)x, x\rangle \\
&= \langle \chi_{(a,b]}(A)x, x\rangle \\
&= \langle (P_b - P_a)x, x\rangle \\
\Rightarrow \mu_x(a,b] &= \langle (P_a - P_b)x, x\rangle.
\end{aligned}$$

Satz 2.4.0.7 (Spektralprojektion und Spektrum).

a) *$\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow$ Es gibt eine offene Umgebung V von X mit $P_V = 0$.*

b) *$\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow P_{\{\lambda\}} \neq 0$. In diesem Fall projiziert $P_{\{\lambda\}}$ auf den Eigenraum von A bezüglich dem Eigenwert λ.*

c) *Jeder isolierte Punkt $\lambda \in \sigma(A)$ ist ein Eigenwert.*

Beweis: a) „$\Rightarrow$" Sei $\lambda \in \rho(A)$. $P_{\rho(A)} = P_{\sigma(A)\cap\rho(A)} = 0$, da $\rho(A) \cap \sigma(A) = \emptyset$.

"$\Leftarrow$" $P_U = 0$ für $\lambda \in U$ offen. Setze

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-\lambda}, & \text{für } t \notin U, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann ist $f \in B_b(\mathbb{R})$. Setze weiter $g(t) = t - \lambda$.

$$\begin{aligned} f(A)(\lambda - A) &= f(A)g(A) \\ &= (f \cdot g)(A) = \chi_{U^C}(A) + \chi_U(A) \\ &= \chi_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{id}_H \,. \end{aligned}$$

Also $(\lambda - A)^{-1} = f(A)$, somit ist $\lambda \in \rho(A)$.

b) Zeige: $\operatorname{Bild} P_{\{\lambda\}} = \ker(\lambda \operatorname{id} - A)$. „$\subseteq$" $0 \neq x \in \operatorname{Bild} P_{\{\lambda\}} \Rightarrow P_{\{\lambda\}}x = x$

$$\begin{aligned} \langle(\lambda - A)x, y\rangle &= \langle(\lambda - A)P_{\{\lambda\}}x, y \\ &= \int (\lambda - t)\chi_{\{\lambda\}}(t) d\langle P_t x, y\rangle = 0 \end{aligned}$$

für alle $y \in Y$. Also $(\lambda - A)x = 0$.

„$\supseteq$"Sei $x \in \ker(\lambda \operatorname{id} - A)$. $Ax = \lambda x \Rightarrow \forall f \in B_b(\mathbb{R})\ f(A)x = f(\lambda)x$.

$$\chi_{\{\lambda\}}(t) = \lim_{h \to 0} g_n(t)$$

$$P_{\{\lambda\}}x = \lim g_n(A)x = \lim g_n(\lambda)x = \lambda x.$$

c) λ sei isolierter Punkt von $\sigma(A)$, d.h. es gibt ein $x \in U$ offen, $\sigma(A) \cap U = \{x\}$. Da $U \backslash \{\lambda\} \subset \rho(A) \Rightarrow P_{U\backslash\{\lambda\}} = 0$. Wäre $P_{\{\lambda\}} = 0$, dann $P_U = P_{U\backslash\{\lambda\}} + P_{\{\lambda\}} = 0$ dann nach a) $\lambda \in \rho(A)$ Widerspruch. Also $P_{\{\lambda\}} \neq 0$ und λ ist ein Eigenwert nach b).

Satz 2.4.0.8 (Stone's Formel)**.** *Sei $A \in B(H)$ selbstadjungiert. Für alle $a < b$ gilt*

$$\left(\frac{1}{2}P_{[a,b]} - \frac{1}{2}P_{(a,b)}\right) x = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b [(A{-}\lambda{-}i\epsilon)^{-1}x{-}(A{-}\lambda{+}i\epsilon)x]d\lambda = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon\cup\Gamma_{-\epsilon}} R(\mu, A)d\mu$$

$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

Beweis: Sei $f_\epsilon(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left[\frac{1}{t-\lambda-i\epsilon} - \frac{1}{t-\lambda+i\epsilon}\right] dt$. Behauptung:

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t) = \begin{cases} 0,\ t \notin [a,b] \\ 1/2,\ t = a \text{ oder } t = b \\ 1,\ t \in (a,b) \end{cases}$$

Aus der Behauptung folgt mit der Konvergenzeigenschaft:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_a^n [(A-\lambda-i\epsilon)^{-1} - (a-\lambda+i\epsilon)^{-1}]xd\lambda = f_\epsilon(A)x \\ \to \frac{1}{2}[\chi_{[a,b]}(A) + \chi_{(a,b)}(A)]x \\ = \frac{1}{2}\left(P_{[a,b]} + P_{(a,b)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\epsilon(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{2i\epsilon}{(t-\lambda-i\epsilon)(t-\lambda+i\epsilon)}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\epsilon}{(t-\lambda)^2+\epsilon^2}d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{1}{(t/\epsilon-\lambda/\epsilon)^2+1}\frac{d\lambda}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{a/\epsilon}^{b/\epsilon}\frac{1}{\lambda^2+1}d\lambda \qquad \to \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda^2}d\lambda = 1 \end{aligned}$$

Also $t \in (a,b)$: $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t) = 1$, $t \notin [a,b]$: $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t) = 0$, $t = 1$ oder $t = b$ $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t) = 1/2$.
$|f_\epsilon(t)| \leq 1$. □

2.5 Beispiele für Spektraldarstellungen

Beispiel 2.5.0.1. *Sei $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Setze $Tf(t) = \int_{\mathbb{R}^n} k(t-s)f(s)ds$. Dann gilt: $T \in B(L^2(\mathbb{R}^d)$ nach dem Satz von Young.*

- $T^*f(t) = \int_{\mathbb{R}} k^*(t-s)f(s)ds$, $k^*(t) = \overline{k(-t)}$.
- $T^*T = TT^*$, *d.h. T ist normal (Faltungsoperator vertauschen).*
- T *selbstadjungiert* $\Leftrightarrow k(t) = k^*(t) = \overline{k(-t)}$.

Sei T selbstadjungiert.

$$\mathcal{F}[Tf](t) = \hat{k}(t)\hat{f}(t)$$
$$Tf = \mathcal{F}^{-1}[\hat{k}(t)\hat{f}]$$

Ablesen der Spektraldarstellung. $U = \mathcal{F}^{-1}$, $L^2(S,\mu) = L^2(\mathbb{R}^n,$ Lebesguemaß$)$. $(Mg)(t) = \hat{k}(t)g(t)$, U Isometrie. $A = UMU^{-1}$. $\overline{k(-t)} = k(t) \Rightarrow \hat{k}$ reelwertig, stetig auf $\mathbb{R}^n$ nach Lemma von Riemann-Lebesgue. Spektralprojektion zu $I = [a,b]$.

$$P_I = \chi_{[a,b]}(A) = \mathcal{F}^{-1}[\chi_{[a,b]}(\hat{k}(\cdot))\hat{f}(\cdot)].$$

Sei $J = k^{-1}([a,b])$ endlich, $\chi_{[a,b]}(\hat{k}(\cdot)) = \chi_J(\cdot)$.

$$P_I = \mathcal{F}^{-1}[\chi_J \cdot \hat{f}] = \mathcal{F}^{-1}(\chi_J) * f$$
$$\mathcal{F}^{-1}(\chi_J)(t) = \int_c^d e^{2\pi its}\chi_J(s)ds = \frac{e^{2\pi itd} - e^{2\pi itc}}{2\pi it},$$

falls $J = (c,d)$.

Beispiel 2.5.0.2 (diskreter Laplace Operator)**.**

a) Motivation:

- $iu_n'(t) + u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) - 2u_n(t) = 0$. *System von abzählbar vielen gekoppelten Oszillatoren, wobei aber der n-te Oszillator nur seine beiden Nachbarn beeinflusst.*

- $i\partial_t u(x,t) + \partial_{xx} u(x,t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. *Approcimation durch Differenzenquotienten.*

$$\partial_{xx} u(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) + u(x_0 - h) - 2u(x_0)}{h^2}.$$

Für $h > 0$ betrachte das Gitter $h\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$.

$$\Delta u(nh) = \frac{u(nh + h) + u(nh - h) - 2u(nh)}{h^2}.$$

$h = 1$ $iu_n(t) + \Delta_{diskret} u_n(t) = 0$.

b) $H = l^2(\mathbb{Z}^d)$, $j \in \{1, ..., d\}$.

$$\partial_j f(n) = f(n + e_j) - f(n),\ n \in \mathbb{Z}^d,\ e_j \textit{ Einheitsvektor.}$$
$$\partial_j^* f(n) = f(n - e_j) - f(n),\ n \in \mathbb{Z}^d$$

Definiere $\Delta_{diskret} f = -\sum_{j=1}^n \partial_j^* \partial_j$. $\Delta_{diskret} u(n) = \sum_{|n-m|=1} u(m) - 2du(n)$ *auf* $\mathbb{Z}^d$. $A = \Delta_{diskret}$ *ist ein selbstadjungierter, beschränkter Operator auf* $H = l^2(\mathbb{Z})$. *Behauptung:*

- $\Delta_d \in B(H)$ *selbstadjungiert.*

- $\rho(\Delta_{diskret}) \supset (-\infty, 0]$.

Beweis:

$$\|(\lambda+\Delta)u\|^2 = \sum_n (\lambda - 2d)u_n^2 + \sum_n \sum_{|m-n|=1} |u(m)|^2 = \lambda \|(u_n)\|^2$$

c) Spektraldarstellung $u : L^2([0,1]^d,\ \textit{Lebesgue}) \to H$.

$$U^{-1} = \mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}^d) \to L^2([0,1]^d), (u_n) \to \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} u_n e^{2\pi i(n\cdot k)}.$$

$U, \mathcal{F}$ unitär, $E_n(k) = e^{2\pi i(n\cdot k)}$ bilden ONB von $L^2([0,1]^d)$.

Definiere $m(k) = -4\sum_{j=1}^d \sin(\pi k_j),\ k = (k_1, ..., k_d) \in [0,1]^d$. $Mg(\cdot) = m(\cdot)g(\cdot)$ Multiplikationsoperator auf $L^2[0,1]^d$. Behauptung

$$\Delta_{diskret} = UMU^{-1},\ L^2(S,\mu) = L^2([0,1]^d).$$

Beweis: $u = (u_n) \in l^2(\mathbb{Z}^d),\ f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} u_n E_n(k)$. *Dann*

$$u_n = \langle f, E_n\rangle_{L^2}.$$

Dann

$$\begin{aligned}
\Delta u(n) &= \sum_{j=1}^d [u(n+e_j) + u(n-e_j) - 2u(n)] \\
&= \sum_{j=1}^d \langle f, E_{n+e_j}\rangle + \langle f, E_{n-e_j}\rangle - 2\langle f, E_n\rangle \\
&= \int_{[0,1]^d} \int_{j=1}^d (e^{2\pi i k_j} + e^{-2\pi i k_j} - 2)(e^{-2\pi i n\cdot k}) f(k) \\
&= \int_{[0,1]^d} m(k) f(k) e^{-2\pi i n k} dk = \mathcal{F}^{-1}[m\mathcal{F}f].
\end{aligned}$$

Beispiel 2.5.0.3 (Spektraldarstellung stationärer Prozesse[1])**.** *a)* (Ω, Σ, P) *sei Wahrscheinlichkeitsraum, $X_n \in L^2(\Omega, \Sigma, P)$ Zufallsveränderliche. Annahme:*

$$E(X_n) - E(X_0) = \int_\Omega X_0(\omega) dP(\omega).$$

Definition: X_n stationär $\Leftrightarrow$

$$E(X_{n+l}\overline{X_{m+l}}) = E(X_n \cdot \overline{X}_m) = \int_\Omega X_n(\omega)\overline{X_m(\omega)}dP(\omega) = \operatorname{cov}(X_n, X_m)$$

mit $\operatorname{cov}(X_{n+l}, X_{m+l}) = \operatorname{cov}(X_n, X_m)$ *für alle n, m, l.*

Setze $M = \operatorname{span}(X_n) \subset L^2(\Omega, P)$, M Hilbertraum. Behauptung: Es gibt eine unitäre Transformation $U : M \to M$ mit $U(X_n) = X_{n+1}$.

$$X = \sum_{j=1}^{m} a_j X_j \in M$$

Setze $U(X) = \sum_{j=1}^{m} a_j X_{j+1}$, U linear.

$$\begin{aligned}
\|U(X)\|^2_{L^2(P)} &= \left\langle \sum_{i=1}^{m} a_j X_{j+1}, \sum_{k=1}^{m} a_k X_{k+1} \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} a_j \overline{a}_k \langle X_{j+1}, X_{k+1} \rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} a_j \overline{a}_k E(X_{j+1} \cdot \overline{X}_{k+1}) \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} a_j \overline{a}_k E(X_j \overline{X}_k) = \|X\|^2_{L(P)}
\end{aligned}$$

Also ist U Isometrie auf X.

b) *Zu einer Unitären Transformation $U : M \to M$ gibt es eine selbstadjungierte Abbildung $T \in B(M)$ mit $\sigma(A) \subset [0, 2\pi]$, sodass*

$$U = e^{iA} = \cos(A) + i\sin(A).$$

Sei $t \in [0, 2\pi] \to P_t \in \{$Orthogonalprojektion auf $M\}$ die Spektralschar von A, d.h.

$$f(U)X = f(e^{iA})X = \int_0^{2\pi} f(e^{is})dP_s(X)$$

für $f \in C(S^1)$ (Einheitskreis). Sei $X = X_0$, $f(\lambda) = \lambda^n$. Dann

$$X_n = U^n(X_0) = \int (e^{is})^n dP_s X_0.$$

Setze $Y(t) = P_s X_0 \in L^2(\Omega, P)$ folgt

$$X_n = \int_0^{2\pi} e^{ins} dY(s),$$

d.h. der Prozess (X_n) ist die Fouriertransformation des Prozesses $Y(s)$, also die Fouriertransformation des Spektralmaßes von U.

c) *Kovarianzfunktion von (X_n).*

$$\operatorname{cov}(X_n, X_0) = E(X_n \overline{X}_0) \overset{b)}{=} \int_0^{2\pi} e^{ins} d\langle P_s X_0, X_0 \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ins} d\mu_{X_0},$$

wobei μ_{X_0} das Spektralmaß zu A ist, d.h. $X_0 \in M$ „Kovarianzfunktion des stationären Prozesses (X_n)“ ist die Fouriertransformation des Spektralmaßes μ_{X_0}.

d) *Stochastische Integrale und das Spektralmaß. Für $g = \sum \alpha_n e^{ins} \in L^2[0, 2\pi]$ setze $Jg = \sum \alpha_n X_n \in M \subset L^2(P)$.*

$$\begin{aligned}
\|Jg\|^2_{L^2(\Omega,P)} &= \left\langle \sum \alpha_n X_n, \sum \alpha_k X_k \right\rangle \\
&= \sum \alpha_n \overline{\alpha}_k E[X_n \overline{X}_k] \\
&= \sum \alpha_n \overline{\alpha}_k \int e^{i(n-k)s} d\mu_{X_0} \\
&= \int \left(\sum \alpha_n e^{ins}\right) \overline{\left(\sum \alpha_k e^{iks}\right)} d\mu_{X_0}(s) \\
&= \left\|\sum \alpha_n e^{ins}\right\|^2_{L((0,2\pi),\mu_{X_0})},
\end{aligned}$$

d.h. $J : L^2[0, 2\pi] \to M$ ist eine Isometrie mit $J(e^{ins}) = X_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$Jg = \int_0^{2\pi} g(s) dY(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(s_k^n)[J(s_k^n) - J(s_{k-1}^n)]$$

mit $s_k^n = \frac{2\pi}{n}k,\ k = 0, ..., n.$

Beispiel 2.5.0.4. *Sei $T \in B(H)$ selbstadjungiert und kompakt.*

a) 1. Fall: Alle Eigenwerte sind einfach, $\mathrm{Kern}\, A = \{0\}$*, d.h.* $\sigma(A) = \{0, \lambda_n\}$*,* $\lambda_1 > \lambda_2, ..., \lambda_n > ... > 0$*,* $\lambda_{\to} 0$*. Seien* (h_n) *die zu* λ_n *gehörigen Eigenvektoren. Aus Funktionalanalysis:*

$$Tf = \sum \lambda_n \langle f, h_n \rangle h_n,$$

d.h. $U : l^2 \to H$*,* $U(\alpha_n) = \sum \alpha_n h_n$ *ist Isometrie auf* H*,* $M : l^2 \to l^2$*,* $M(\alpha_n) = (\lambda_n \alpha_n)$*. Dann ist* $A = UMU^{-1}$*. Wie hängt dieses frühere Ergebnis mit der allgemeinen Konstruktion der Spektraldarstellung zusammen?*

Angabe eines zyklischen Vektors: Fixiere $\gamma_n > 0$ *mit* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 = 1$*. Setze* $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n h_n$*. Behauptung:* x_0 *ist zyklischer Vektor, d.h.* $\overline{\mathrm{span}\{x_0, A^n x_0\}} = H$*.*

Beweis: *Sei* $y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j h_j \in H$*. Zu zeigen: Es gibt* $\alpha_0, ..., \alpha_{m-1}$ *mit* $y = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j A^j x_0$*.*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} \beta_j h_j = y &= \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j A^j x_0 \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A^j h_n \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_n \lambda_n^j \alpha_j \right) h_n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \beta_n = \sum_{j=0}^{m-1} (\gamma_n \lambda_n^j) \alpha_j$*,* $n = 1, ..., m$*. Zu zeigen: Zu* $\beta_1, ..., \beta_m$ *gibt es* $\alpha_0, ..., \alpha_{m-1}$ *mit* $0 \neq \det(\gamma_n \lambda_n^j)_{n,j} = \left(\prod_{n=1}^{m} \gamma_n^m\right) \det(\lambda_n^j) = \gamma \neq 0$*. Spektralmaß von A:*

$$\begin{aligned}
\int f(t) d\mu_{x_0}(t) &= \langle f(A) x_0, x_0 \rangle,\ x_0 = \sum \gamma_n h_n \\
&= \left(\sum \gamma_n^2 \delta_{\lambda_n} \right) f
\end{aligned}$$

Also

$$\boxed{\mu_{x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \delta_{\lambda_n}}, \|\mu_{x_0}\|^2 = \sum \gamma_n^2 = 1.$$

d.h. formal sieht die Spektraldarstellung so aus:

$$L^2(\mathbb{R}, \mu_x) = L^2(\mathbb{R}, \sum \gamma_n \delta_{\lambda_n} = l^2(\mathbb{N}, \gamma_n^2),$$

d.h. $\|(\alpha_n)\|_{l^2(\mathbb{N},\gamma_n^2)} = (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \gamma_n^2)^{1/2}$. $U : L^2(\mathbb{R}, \mu_x) \to H$. *Polynom* $p \to p(A)x_0$, $Mg(t) = tg(t)$, $t \in \{\lambda_n :\Leftarrow\!\!\!\!/\in \mathbb{N}\}$, $Mg(\lambda_n) = \lambda_n g(\lambda_n)$.

b) *A hat mehrfache Eigenwerte,* $0 < \lambda_j$ *sei ein* m_j*-facher Eigenwert. Sei* $\mathrm{Kern}\, A = \{0\}$. *Abzählung der Eigenwerte:*

$$\lambda_{1,1} = \cdots = \lambda_{1,m_1} > \lambda_{2,1} = \cdots = \lambda_{2,m_2} > \cdots$$

Die Zerlegung von H *in Unterräume mit zyklischen Vektoren von* A*: Notation* $h_{n,j}$ *sei ein Eigenvektor zu* $\lambda_{n,j}$*, sodass alle* $h_{n,j}$ *für* $j = 1, ..., m_n$, $n \in \mathbb{N}$ *eine ONB von* H *ist. Setze ferner* $h_{n,j} = 0$ *für* $j > m_n$

Setze $H_1 = \overline{\mathrm{span}}\{h_{n,1} : n \in \mathbb{N}\}$. $H_2 = \overline{\mathrm{span}}\{h_{n,2} : n \in \mathbb{N}\}$ *und analog* H_3... *Dann* $H = \sum_{k=1}^{\infty} \bigoplus H_k$ *und* H_j *hat den zyklischen Vektor*

$$x_j = \sum_{j \in \mathbb{N}} \gamma_n h_{n,j}$$

und $A|_{H_j}$ *hat das Spektralmaß* $\mu_j = \sum \gamma_n \delta_{\lambda_n,j}$.

2.6 Unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

Wiederholung 2.6.0.1.

a) X Banachraum, $X \supset D(A) \overset{A}{\to} X$ linear, $D(A)$ linearer Teilraum von X. A heißt abgeschlossen, genau dann wenn eine der äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist.

(i) $(D(A), \|\cdot\|_A)$, $\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_X$ für $x \in D(A)$ ist vollständig.

(ii) $\mathrm{Graph}(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$ *abgeschlossen in $X \times X$.*

(iii) Falls $x_n \in D(A)$, $x_n \to x$ in X und $Ax_n \to y$ in X, dann $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

*b) $X \supset D(A) \overset{A}{\to} X$ linear heißt **abschließbar**, falls es eine abgeschlossene Erweiterung A_1 von A gibt, d.h. $X \supset D(A_1) \overset{A_1}{\to} X$ ist abgeschlossen und für $x \in D(A) \subset D(A_1)$ gilt $Ax = A_1 x$.*

*c) $D \subset D(A)$ heißt **wesentlicher Definitionsbereich** (core), falls D in $D(A)$ dicht bezüglich der Graphennurm $\|\cdot\|_A$ ist.*

Bemerkung. A ist abschließbar, falls aus $D(A) \ni x_n \to 0$ in X und $Ax_n \to y$ in X, dass $y = 0$ (Übung).

Im folgenden sei X stets ein komplexer Hilbertraum mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition 2.6.0.2. *Sei $A\colon X \supset D(A) \to X$ ein linearer Operator mit dichtem Definitionsbereich $D(A)$ in $(X, \|\cdot\|)$.*

$$D(A^*) = \{x \in X \colon \exists y_x \in X \text{ mit } \langle Ay, x\rangle = \langle y, y_x\rangle \text{ für } y \in D(A)\}$$

Für $x \in D(A^*)$ setze $A^* x = y_x$.

Bemerkung 2.6.0.3.

a) A^*x *ist eindeutig bestimmt, denn* $\langle y_x, y\rangle = \langle y'_x, y\rangle$ *für alle* $y \in D(A)$ *folgt* $y_x = y'_x$*, da* $D(A)$ *dicht in* X*.*

b) $x \in D(A^*)$ *bedeutet, dass sich die lineare Abbildung* $y \in D(A) \to \langle Ay, x\rangle$ *zu einem beschränkten linearen Funktional auf* X *fortsetzen lässt, d.h.* $\exists C_x$ *mit* $|\langle Ay, x\rangle| \leq C_x\|y\|$, $y \in D(A)$ $(*)$.

c) (vergleiche mit Funktionalanalysis)

$$X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$$

$$X \xrightarrow{J} X'$$

$$\begin{array}{ccc} \supset D(A^*) & \xrightarrow[J]{} & D(A') \subset \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[J]{} & X' \end{array}$$

mit

Beweis: a) Unter $(*)$ gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein $y_x \in X$ mit $\langle Ay, x\rangle = \langle x, y_x\rangle$.

Proposition 2.6.0.4 (Eigenschaften der Adjungierten)**.** *Seien* $D(A)$, $D(A_1)$ *und* $D(A_2)$ *dicht.*

a) Sei A_1 *eine Erweiterung von* A_2*, d.h.* $D(A_2) \subset D(A_1)$, $A_1x = A_2x$ *für* $x \in D(A_2) \Rightarrow A_2^*$ *ist eine Erweiterung von* A_1^**, d.h.* $D(A_1^*) \subset D(A_2^*)$, $A_1^*x = A_2^*x$ *für* $x \in D(A_1^*)$.

b) $\operatorname{Graph} A^* = [J(\operatorname{Graph} A)]^\perp$*, wobei* $J\colon X \times X \to X \times X$, $J(x,y) = (-y, x)$.

c) A^* ist abgeschlossen.

d) A ist abschließbar, genau dann, wenn $D(A^*)$ dicht ist in X und dann gilt $\overline{A} = A^{**}$.

e) $\operatorname{Bild}(A)^\perp = \operatorname{Kern}(A^*)$.

f) $\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda} \colon \lambda \in A\}$ *und für* $\lambda \in \rho(A)$

$$(\bar{\lambda} \operatorname{id} - A^*)^{-1} = [(\lambda \operatorname{id} - A)^{-1}]^*.$$

Beweis: a) $x \in D(A_1^*) \Leftrightarrow \exists C$, sodass

$$|\langle A_1 y, x\rangle| \leq C\|y\| \text{ für } y \in D(A_1)$$

gilt dann auch für $y \in D(A_2)$, d.h. $x \in D(A_2^*)$.

b) $x \in D(A^*)$, $z \in D(A)$

$$\langle (x, A^*x), J(z, Az)\rangle = \langle (x, A^x), (-Az, z)\rangle = \langle x, -Az\rangle + \langle A^*x, z\langle = -\langle x, Az\rangle + \langle x, Az\rangle = 0.$$

Also $\operatorname{Graph} A^* \subset [J(\operatorname{Graph} A)]^\perp$ in $X \times X$. Umgekehrt sei $(x, y) \in [J(\operatorname{Graph} A)]^\perp \Rightarrow$ für $z \in D(A)$ gilt:

$$0 = \langle (x, y), J(z, Az)\rangle = \langle (x, y), (-Az, z)\rangle = -\langle x, Az\rangle + \langle y, z\rangle$$

$\Rightarrow \forall z \in D(A)$: $\langle x, Az\rangle = \langle y, z\rangle \Rightarrow x \in D(A^*)$, $A^*x = y$.

c) A^* ist immer abgeschlossen, da $\operatorname{Graph} A^* = [...]^\perp$ abgeschlossen ist.

d) Sei $D(A^*)$ dicht in X. $A^{**} = (A^*)^*$ existiert als abgeschlossener Operator nach c). $Ax = A^{**}x$ für $x \in D(A)$. $D(A) \subset D(A^{**})$ nach Definition.

e) $y \in D(A^*)$. $y \in \operatorname{Bild}(A)^\perp \Leftrightarrow \forall x \in D(A)$: $\langle y, Ax\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall x \in P(A)$: $\langle A^*y, x\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$A^*y = 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{Kern} A^*$.

f) $\lambda \in \rho(A)$ bedeutet: $\lambda \operatorname{id} - A\colon D(A) \to X$ ist bijektiv $\Leftrightarrow (\lambda \operatorname{id} - A)^{-1}\colon X \to (D(A), \|\cdot\|_A)$ $\Leftrightarrow (\lambda \operatorname{id} - A)^{-1}\colon X \to X$ ist beschränkt.

$$S \cdot (\lambda \operatorname{id} - A) = \operatorname{id} \Rightarrow [(\bar{\lambda} \operatorname{id} - A^*)]S^* = \operatorname{id}^* = \operatorname{id}.$$

□

Definition 2.6.0.5. *Sei $A\colon X \supset D(A) \to X$ mit $D(A)$ dicht in X.*

*a) A heißt **symmetrisch**, falls für alle $x, y \in D(A)$ gilt*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

*b) A heißt **selbstadjungiert**, falls A symmetrisch ist, und $D(A) = D(A^*)$.*

Bemerkung 2.6.0.6. *Falls A symmetrische ist, dann ist $D(A) \subseteq D(A^*)$ und $Ax = A^*x$ für $x \in D(A)$, aber im allgemeinen gilt $D(A) \subsetneq D(A^*)$.*

Satz 2.6.0.7. *Sei A abgeschlossen mit dichtem Definitionsbereich in X. Dann sind Äquivalent.*

a) A ist selbstadjungiert.

b) A ist symmetrisch und es gibt $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda, \bar{\lambda} \in \rho(A)$.

c) A ist symmetrisch und $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ c): Sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Zu zeigen: $\lambda \in \rho(A)$.

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - A)x\|^2 &= \langle(\lambda - A)x, (\lambda - A)x\rangle \\
&= \lambda\bar{\lambda}\langle x, x, \rangle + \langle Ax, Ax\rangle - \langle Ax, \lambda x\rangle - \langle \lambda x, Ax\rangle \\
&= |\lambda|^2\|x\|^2 - 2Re\lambda\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|^2 \\
&\geq ((Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2)\|x\|^2 - 2|Re\lambda|\|Ax\| \cdot \|x\| + \|Ax\|^2 \\
&= (Im\lambda)^2\|x\|^2 + (Re\lambda\|x\| - \|Ax\|)^2 \\
&\geq |Im\lambda|^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

$\|(\lambda - A)x\| \geq |Im\lambda|\|x\|$, $|Im\lambda| \neq 0 \Rightarrow (\lambda - A)$ ist injektiv, d.h. Bild$(\lambda - A)$ ist abgeschlossen. Bleibt zu zeigen, dass $(\lambda - A)$ surjektiv.

$$\text{Bild}(\lambda - A)^{\perp} = \text{Kern}(\lambda - A)^* = \text{Kern}(\bar{\lambda} - A) = \{0\},$$

da $A = A^*$, $(\bar{\lambda} - A)$ injektiv (wie oben, mit $\bar{\lambda}$ anstelle von λ) $\Rightarrow$ Bild$(\lambda - A)$ dicht, Bild$(\lambda - A)$ abgeschlossen $\Rightarrow$ Bild$(\lambda - A) = X$, somit ist $\lambda - A$ bijektiv.

b) $\Rightarrow$ a): Zeige $x \in D(A^*) \Rightarrow x \in D(A)$. Da Bild$(\lambda - A) = X$, gibt es $y \in D(A)$ sodass

$$(\lambda - A)y = (\lambda - A^*)x.$$

Da $A^* \supseteq A$ gilt $(\lambda - A^*)y = (\lambda - A^*)x$. $(\lambda - A^*) = (\bar{\lambda} - A)^*$ ist injektiv, das, $\bar{\lambda} \in \rho(A)$ $\Rightarrow x = y \in D(A)$. $\square$

Beispiel 2.6.0.8. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Borelmenge, μ Maß auf Ω, $m\colon \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ Borelmaß.*

$$D(M) = \{g \in L^2(\Omega, \mu)\colon g \cdot m \in L^2(\Omega, \mu)\}$$

$g \in D(M)$: $Mg = m \cdot g$. Beachte:

$$\sigma(M) = R_\mu(m) \text{ wesentlicher Definitionsbereich bezüglich } \mu.$$

$\lambda \notin \sigma(M)$: $\|R(\lambda,\mu)\| = \left\|\frac{1}{\lambda - m(\cdot)}\right\|_{L^\infty(\Omega,\mu)}$ *(wesentliches supremum). M ist symmetrisch, da für $f, g \in D(M)$.*

$$\langle Mg, f\rangle = \int m(x)g(x)f(x)d\mu(x) = \int g(x)m(x)f(x)d\mu(x) = \langle g, Mf\rangle.$$

$f \in D(M^*) \Leftrightarrow \exists C < \infty$ *für alle* $g \in L^2(\Omega,\mu)$

$$|\langle g, Mf\rangle| \leq C\|g\|_{L^2}$$

$$\left|\int g(x)m(x)f(x)d\mu(x)\right| \leq C\|g\|_{L^2}$$

$\Leftrightarrow f \cdot m \in L^2(\Omega,\mu) \Leftrightarrow f \in D(M)$. *Also* $D(M) = D(M^*)$.

2.7 Spektralsatz für ubeschränkte selbstadjungierte Operatoren

Beispiel 2.7.0.1 (Laplace Operator)**.** *Sei* $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, $D_0(A) = C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in D_(A)$:

$$Af = \Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

A auf $D_0(A)$ ist symmetrisch:

$$\langle \Delta f, g\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j} g\right) dx = \langle f, \Delta g\rangle.$$

Δ auf $D_0(A)$ selbstadjungiert?

Wiederhole: $S = \mathbb{R}^n$, $\mu =$ Lebesgue Maß.

$$U\colon L^2(S,\mu) \to L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$$

$U = \mathcal{F}^{-1}$, $m(x) = -|x|^2$. Dann

$$\mathcal{F}(\Delta f)(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} -x_j^2\right) \hat{f}(x) = m(x)\hat{f}(x).$$

Somit ist

$$\Delta = \mathcal{F}^{-1}[m(x)\hat{f}(x)] = U[M_m] \cdot U^{-1}$$

mit $M_m g(x) = m(x)g(x) = -|x|^2 g(x)$. $D(M_m) = D(M_m^*) = \{g \in L^2 \colon m \cdot g \in L^2\}$.

$D(A) = U(D(M_m)) = \mathcal{F}^{-1}(\{g \colon m{\cdot}g \in L^2\}) = \{f \colon \hat{f}(x){\cdot}|x|^2 \in L^2\} = \boxed{\dot{H}^2(\mathbb{R}^n)}$ (Sobolevraum).

Somit ist Δ auf $D_0(A)$ nicht selbstadjungiert, aber symmetrisch. $D_0(\Delta)$ ist ein wesentlicher Definitionsbereich.

Idee zum Spektralsatz: $n(t) = t(1+t^2)^{-1/2} \colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ ist bijektiver, wachsender Homöomorphismus. $n^{-1} \colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ sei die Inverse zu n. Sei A unbeschränkter, selbstadjungierter Operator, $t = A$ liefert

$$n(A) = A(1+A^2)^{-1/2} =: T \in B(H)$$

Wende Spektralsatz für beschränkte Operatoren auf T an. $T \rightsquigarrow A$ (zurückrechnen mit n^{-1}).

Lemma 2.7.0.2. *Sei A ein selbstadjungierter Operator auf H. Dann ist $I + A^2$ mit Definitionsbereich $D(A^2)$ ein invertierbarer Operator und*

$$T := (I + A^2)^{-1/2}$$

erfüllt

a) T ist beschränkt und selbstadjungiert mit $\|T\| \leq 1$.

b) Für $x \in D(A)$ gilt $ATx = TAx$ und $T^2 = A^2(I + A^2) = \mathrm{id} - (I + A^2)^{-1}$.

Beweis: Für $x \in D(A^2)$

$$\begin{aligned}\|(I + A^2)x\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle Ax, Ax\rangle + \|Ax\|^2 \text{ (da } A \text{ selbstadjungiert)}\\ &\leq \|x\|^2\end{aligned}$$

Also ist $I + A^2$ injektiv mit abgeschlossenem Bild. Bild$(I + A)^2$ ist dicht in H, denn $(I + A^2)^* = I + A^2$ auf $D(A^2)$. Da $I + A^2$ injektiv, hat $(I + A^2)$ dichtes Bild.Da $I + A^2$ injektiv ist, hat $(I + A^2)$ ein dichtes Bild

$$(\mathrm{Bild}\, B)^{\perp} = \mathrm{Kern}\, B^*,\ \ B = I + A^2.$$

Also ist $I + A^2 \colon D(A^2) \to H$ bijektiv $\Rightarrow (I + A^2)^{-1} \colon H \to D(A^2)$ und $(I + A^2)^{-1} \in B(H)$ nach Graphensatz. Da $(I + A^2)^{-1}$ beschränkt ist, ist $f((I + A^2)^{-1})$ beschränkt, wobei $f(\lambda) = \lambda^{1/2}$ beschränkt auf $\sigma((I+A^2)^{-1})$, d.h. nach dem Funktionalkalkül für beschränkte Operatoren ist $(I + A^2)^{-1/2} \in B(H)$, $(I + A^2)^{-1} \geq 0$,

$$\langle (I + A^2)^{-1}x, x\rangle = \langle x, (I + A^2)x\rangle = \langle x, x\rangle + \langle Ax, Ax\rangle \geq 0,\ \ x \in D(A^2).$$

Nun benutze $\overline{D(A^2)} = H$. $(I + A^2)^{-1/2}$ ist selbstadjungierter, beschränkter Operator.

Setze $T := A(I + A^2)^{-1/2}$. Z.z. $T \in B(H)$, $\|T\| \leq 1$. Für $x \in D(A^2)$:

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= \langle A(I + A^2)^{-1/2}x, A(I + A^2)^{-1/2}x\rangle \\
&= \langle (I + A^2)^{-1/2}x, A^2(I + A^2)^{-1/2}x\rangle \\
&= \langle (I + A^2)^{-1/2}x, (I + A)^{-1/2}A^2x\rangle \\
&= \langle x, (I + A^2)^{-1}A^2x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle x, (I + A^2)^{-1}x\rangle \\
&\leq \|x\|^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|Tx\| \leq \|x\|$, $\|T\| \leq 1$, da $\overline{D(A^2)} = H$.

Satz 2.7.0.3. *Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem seperablen Hilbertraum. Dann gibt es eine Borelmenge $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, ein Maß μ auf S, eine unitäre Abbildung $U\colon L^2(S, \mu) \to H$ und eine stetige Funktion $m\colon B \to \mathbb{R}$ mit $D(A) = \{Ug\colon g, g \cdot m \in L^2(S, \mu)\}$. $Ax = UM_mU^{-1}x$, $x \in D(A)$, wobei $M_mg = g \cdot m$.*

Beweis: $n(\lambda) == \lambda(1 + \lambda^2)^{-1/2}\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ist bijektiv, $n^{-1}\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ stetig. Setze $T := A(I + A^2)^{-1/2} \in B(H)$, selbstadjungiert auf H nach Lemma 7.2. Nach dem Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren für T gibt es

$$U\colon L^2(S, \mu) \to H,\ m_T\colon S \to [-1, 1] \text{ stetig}$$

mit $T = UM_{m_T}U^{-1}$, $M_{m_T}g = m_T \cdot g$. Ziel $T \rightsquigarrow A$. Setze $m = n^{-1} \circ m_T$.

$$D(\tilde{A}) = \{Ug\colon g, m \cdot g \in L^2(S)\}.$$

$x \in D(\tilde{A})$: $\tilde{A}x = UM_mU^{-1}$. Zu zeigen $\tilde{A} = A$ auf $D(A)$.

$$(I + \tilde{A}^2)x = (I + (UM_mU^{-1})^2)x = U(I + M_m^2)U^{-1}x,$$

für $x \in D(I+\tilde{A}^2) = \{Ug\colon g, g(1+m^2) \in L^2\}$. $m = n^{-1} \circ m_T$, $n \circ m = m_T$, d.h.

$$\tilde{A}(I+\tilde{A}^2)^{-1/2} = T = A(I+A^2)^{-1/2}.$$

$$\begin{aligned} I - (I+\tilde{A}^2)^{-1} &= \tilde{A}^2(I-\tilde{A}^2)^{-1} = T^2 \\ &= A^2(I+A^2)^{-1} = I - (I+A^2)^{-1} \\ (I+\tilde{A}^2)^{-1} &= (I+A^2)^{-1} \\ \Rightarrow (I+\tilde{A})^{-1/2} &= (I+A^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Für $x = (I+A^2)^{-1/2}y$, $y \in H$ ist $\mathrm{Bild}((I+A^2)^{-1/2}) \supset D(A^2)$ ein wesentlicher Definitionsbereich, $\tilde{A} = A$, da beide selbstadjungiert. □

Satz 2.7.0.4. *Sei A selbstadjungierter Operator auf einem seperablen Hilbertraum. Dann gibt es ein Maß ν auf $\sigma(A)$ und einen Algebrahomomorphismus*

$$\Phi_A\colon L^\infty(\sigma(A),\nu) \to B(H),\ \Phi_A(f) = f(A)$$

mit

(i) $\Phi\left(\frac{1}{\lambda - \cdot}\right) = R(\lambda, A)$ *für* $\lambda \notin \sigma(A)$.

(ii) $\|\Phi_A(f)\|_{B(H)} = \|f\|_{L^\infty(\sigma(A),\nu)}$.

(iii) $\Phi_A(f)^* = \Phi_A(\bar{f})$, $\Phi_A(f)$ *ist selbstadjungiert* $\Leftrightarrow$ f *ist reelwertig.*

Beweis: Fall 1: Sei A ein Multiplikationsoperator auf $L^2(s,\mu)$: $Mg(\cdot) = m(\cdot)g(\cdot)$, $m\colon S \to \mathbb{C}$. $D(M) = \{g\colon g, m \cdot g \in L^2(S,\mu)\}$. ν-Bildmaß von μ unter m, d.h. für $B \subset \sigma(M)$ setze $\nu(B) = \mu(m^{-1}(B))$, $m\colon S \to \sigma(M)$. $\nu(B) = 0 \Leftrightarrow \mu(m^{-1}(B)) = 0$. Also $\|f\|_{L^\infty(\sigma(M),\nu)} = \|f \circ m\|_{L^\infty(S,\mu)}$ für $f\colon \sigma(M) \to \mathbb{C}$.

Definition 2.7.0.5. *Sei* $[\Phi_M(f)]g = (f \circ m)g$ *für* $g \in L^2(S,\mu)$, $f\colon \sigma(M) \to \mathbb{C}$.

Nachprüfen der Eigenschaften im Falle der berschränkten, selbstadjungierten Operatoren.

Fall 2: Sei A beliebiger selbstadjungierter Operator. Nach 7.3 gibt es eine Spektraldarstellung für A, d.h. es gibt $U\colon L^2(S,\mu) \to H$, $Mg = mg$ für $m\colon S \to \mathbb{C}$ mit

$$D(A) = \{Ug\colon g \in D(M)\},\ Ax = UMU^{-1}x,\ x \in D(A).$$

Definiere den Funktionalkalkül für A wie im beschränkten Fall

$$\Phi_A(f) = U\Phi_M(f)U^{-1}$$

Eigenschaften von Φ_A wie früher. □

Korollar 2.7.0.6 (Konvergenzeigenschaft)**.** *Sei* A *ein selbstadjungierter Operator mit* $\Phi_A\colon L^2(\sigma(A),\nu) \to B(H)$. *Für* $f_n \in L^\infty(\sigma(A),\nu)$ *mit* $\|f_n\|_{L^\infty(\sigma(A),\nu)} \leq C$ $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ *fast überall auf* $\sigma(A)$ *gilt*

$$f_n(A)x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(A)x\ \forall x \in H.$$

Beweis: $U\colon L^2(S,\mu) \to H$, $m\colon S \to \sigma(A)$ aus Satz 7.3. Für $g \in L^2(S,\mu)$, $x = Ug \in H$ gilt

$$\begin{aligned}\|f_n(A)x - f(A)x\|_H^2 &= \|f_n(M)g - f(M)g\|_{L^2(S,\mu)}^2\\ &= \int |[(f_n \circ m)(s) - (f \circ m)(s)]|^2 |g(s)|^2 d\mu(s)\\ &\to 0 \text{ für } n \to \infty\end{aligned}$$

nach Satz von Lebesgue, da $|[(f_n \circ m)(s) - (f \circ m)(s)]| \leq 2C$ und $|g(s)| \in L^\infty$.

Bemerkung Die Darstellung eines selbstadjungierten Operators als Multiplikationsoperator ist **nicht** eindeutig. Z.B. $L(\mathbb{R}, \mu)$ (Lebesguemaß), $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int |f \circ m(s) g(s)|^2 ds &= \|f(M)g\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mu)} \\ &= \int |f \circ m(n(t)) g(n(t))|^2 n'(t) dt, \ s = n(t) \\ &= \int |(f \circ m_1)(t) h(t)|^2 d\mu_1(t)\end{aligned}$$

mit $d\mu_1 = n'(t) d\mu$, $m_1 = m \circ n$, $h = g \circ \nu$. Damit folgt

$$\begin{aligned}U\colon L^2(\mathbb{R}, \mu) &\to H; \ A = UMU^{-1} \\ V\colon L^2(\mathbb{R}, \mu) &\to L^2(\mathbb{R}, \mu_1), \\ \|g\|^2_{L^2(\mu)} &= \int |g(s)|^2 d\mu(s) \\ &= \int |g(n(t))|^2 n'(t) d\mu(s) \\ &= \|g \circ n\|^2_{L^2(\mu_1)} = \|Vg\|^2_{L^2(\mu_1)}, \ (Vg = g \circ n) \\ V^{-1}UAU^{-1}V &= M_1 \text{ auf } L^2(S, \mu_1), \ M_1 g = (m \circ n) g\end{aligned}$$

$M = VM_1V^{-1}$, $M_1 = V^{-1}MV$ auf $L^2(\mathbb{R}, \mu)$, M auf $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Beispiel 2.7.0.7 (Halbgruppen für selbstadjungierte Operatoren)**.** *Definiere Exponentialfunktion e^{tA} für A.*

$$f_t(\lambda) = e^{-t\lambda}, \ \lambda \geq 0.$$

Voraussetzung $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_+$. Nach Funktionalkalkül: $T(t) = f_t(A) = \Phi_A(f_t)$ erfüllt

- $\|T(t)\|_{B(H)} = 1,$ *denn*

$$\|T(t)\| = \|f_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,\nu)} = \sup_{\lambda > 0} e^{-t\lambda} = 1.$$

- *$T(t) \cdot T(s) = T(s+t)$, denn $f_t(\lambda) f_s(\lambda) = f_{t+s}(\lambda)$.*

- *$T(t)x \to x$ für $t \to 0$, $x \in H$, denn $f_t(\lambda) \to 1$ für $t \to 0$ aber $|f_t(\lambda)| \leq 1$ auf $\mathbb{R}_+$. Verwende dann 7.5.*

- *$\frac{d}{dt} T_t x = A T_t x$ für $t > 0$, denn*
$$\frac{1}{s}(T_{t+s}x - T_t x) = \Phi_A \left(\frac{f_{t+s}(\cdot) - f(t)}{s} \right) \to -\lambda e^{-t\lambda}, \; s \to 0$$
und $q_t(s) \leq 1/t$, $|\lambda e^{-t\lambda} \leq 1/t$. Verwende dann 7.5. Damit gilt für die Lösung des Cauchyproblems $y(t) = T(t)x$:
$$y'(t) = -Ty(t), \; y(0) = x.$$

2.8 Störungssatz

Problem: Sei beispielsweise $A = \Delta + \sum b_j \frac{\partial}{\partial x} + V$. Führe die Behandlung von A auf den bekannten Operator Δ zurück mit Hilfe von „Störungstheorie“.

Formal: a „gut“, $a + b$, b „Störung“. Sei $\lambda \in \rho(a)$. Frage $\lambda \in a + b$?.
$$\mu - (a+b) = (1 - b(\mu - a))(\mu - a)$$
$$(\mu - (a+b))^{-1} = (\mu - a)^{-1}(1 - b(\mu - a)^{-1})^{-1} = (\mu - a)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [b(\mu - a)^{-1}]^k$$

Lemma 2.8.0.1. *Sei A ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X, B linear auf X mit $D(A) \subset D(B)$. Falls $\lambda \in \rho(A)$ und $\|BR(\lambda, A)\| < 1$. Dann ist $A + B$ mit $D(A+B) = D(A)$ abgeschlossen und $\lambda \in \rho(A+B)$ mit*
$$R(\lambda, A+B) = R(\lambda, A)[I - BR(\lambda, A)]^{-1} = R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} [BR(\lambda, A)]^k$$

Beweis: Da $\|BR(\lambda, A)\| < 1$ gilt nach dem Lemma über die Neumannsche Reihe

$$[\mathrm{id} - BR(\lambda, A)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} BR(\lambda, A)^k$$

Setze $R = R(\lambda, A)[I - BR(\lambda, A)]^{-1}$. Zu zeigen: R ist Inverse von $\lambda - (A + B)$.

$R(\lambda I - A - B)RX = (\lambda I - A - B)R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1} = (I - BR(\lambda, A))(I - BR(\lambda, A)^{-1})x.$

$$\begin{aligned}
R(\lambda \,\mathrm{id} - A - B) &= R(\lambda, A)\sum_{k=0}^{\infty}[BR(\lambda, A)]^k(\lambda - A - B)x \\
&= R(\lambda, A)(x - A - B)x + R(\lambda, A)\sum_{k=0}^{\infty}(BR(\lambda, A))^k(\lambda - A - B)x \\
&= x - R(\lambda, A)Bx + R(\lambda, A)\sum_{k=1}^{\infty}(BR(\lambda, A))^k(\lambda - A)x - \sum R(\lambda, A)(BR(\lambda, A))^k Bx \\
&= x - \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda, A)(BR(\lambda, A))^k Bx + \sum_{k=1}^{\infty} R(\lambda, A)BR(\lambda, A)^{k-1}Bx \\
&= x, \text{ mit Indexshift}
\end{aligned}$$

Relative Kleinheitsbedingung. $\exists\ a, b > 0$, sodass

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|.$$

Satz 2.8.0.2. *Sei H ein Hilbertraum, $H \supset D(A) \xrightarrow{A} H$ selbstadjungiert, B ein symmetrischer Operator mit $D(B) \supset D(A)$ und es gebe $0 < a < 1$ und $b < \infty$, sodass für alle $x \in D(A)$*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|. \tag{2.8.1}$$

Dann ist $A + B$ selbstadjungiert.

Beweis: Sei $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $x \in D(A)$.

$$(\|A + i\mu)x\|^2 = \langle (A + i\mu)x, (A + i\mu)x\rangle = \|Ax\|^2 + \mu^2\|x\|^2 + 2Re\langle Ax, \mu x\rangle \tag{2.8.2}$$

Für $y \in H$ und $x = (A + i\mu)^{-1}y$ folgt aus (2.3)

$$\begin{aligned}
&\|A(A+i\mu)^{-1}y\|^2 + |\mu|\|(A+i\mu)y\|^2 = \|y\|^2 \\
\Rightarrow &\|A(A+i\mu)^{-1}\| \leq 1, \ \|A+i\mu\|^{-1} \leq \frac{1}{|\mu|}
\end{aligned}$$

Setze $x = (i\mu + A)^{-1}y$ in (2.2).

$$\begin{aligned}
\|B(A+i\mu)^{-1}y\| &\leq \|A(A+i\mu)^{-1}y\| + \frac{b}{|\mu|}\|\mu(A+i\mu)^{-1}y\| \\
&\leq a\|y\| + \frac{b}{|\mu|}\|y\| \leq (a + \frac{b}{|\mu|})\|y\|
\end{aligned}$$

wobei $(a + \frac{b}{|\mu|}) < 1$ für μ groß genug. Also $\|B(A+i\mu)^{-1}\| < 1$ für μ groß genug. Nach 8.1: $i\mu \in \rho(A+B)$ für $|\mu|$ groß genug. A, B symmetrisch $\Rightarrow$ $A+B$ symmetrisch auf $D(A+B) = D(A)$. Also ist $A+B$ selbstadjungiert. $\square$

Beispiel 2.8.0.3. *Sei $V = V_1 + V_2$ mit $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, V reelwertig. Dann ist der* ***Schrödingeroperator***

$$A = \Delta + V, \ Ax(u) = \Delta_x u(x) + V(x)u(x)$$

mit Potential V selbstadjungiert.

Lemma 2.8.0.4. *Sei $x \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $x \in D(A) = W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$. Dann gibt es zu jedem $a > 0$ ein $b < \infty$, sodass*

$$\|x\|_{L^\infty} \leq a\|\Delta x\|_{L^2} + b\|x\|_{L^2}.$$

Beweis: Sei $x \in S(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} &\leq \left(\int |(1+|u|^2)\hat{x}(u)|^2 du\right)^{1/2} \left(\int \left(\frac{1}{1+|u|^2}\right)^2 du\right)^{1/2} \\
&\leq C(\||u|^2\hat{x}(u)\|_{L^2} + \|\hat{x}\|_{L^2})
\end{aligned}$$

Für $r > 0$ setze $x_r(u) = x(u/r)$, $\mathcal{F}(x)(u) = r^3\hat{x}(ru)$.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(x_r)\|_{L^1} &= \|\hat{x}\|_{L^1}, \\
\|\mathcal{F}(x_r)\|_{L^2} &= r^{3/2}\|\hat{x}\|_{L^2}, \\
\||u^2|\mathcal{F}(x_r)(u)\|_{L^2} &= r^{-1/2}\||u|^2\hat{x}(u)\|_{L^2}, \\
\|\hat{x}\|_{L^1} &= \|\mathcal{F}(x_r)\|_{L^1} \text{ mit 1. Ungleichung} \\
&\le C(\||u|^2\mathcal{F}(x_r)(u)\|_{L^2} + \|\mathcal{F}x_r\|_{L^2}) \\
&\le C(r^{-1/2}\||u|^2\hat{x}(u)\|_{L^2} + r^3\|\hat{x}\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

Mit dem Riemannschem Lemma und der Plancherelidentität folgt

$$\|x\|_{L^\infty} \le \|\hat{x}\|_{L^1} \le C(r^{1/2}\|\Delta x\|_{L^2} + r^3\|x\|_{L^2}),$$

da $\mathcal{F}^{-1}(\Delta x)(u) = -|u|^2 x(u)$. Für r genügend groß gilt dann $a = Cr^{-1/2}$, $b = Cr^3$ und die Behauptung folgt. $\square$

Beweis des Beispiels: Wähle $Bx(n) = V(h)x(n)$ in 8.3. Für $x \in D(\Delta)$

$$\|Vx\|_{L^2} \le \|V_1\|_{L^2}\|x\|_\infty + \|V_2\|_{L^\infty}\|x\|_{L^2}.$$

Nach 8.4 gilt

$$\begin{aligned}
\|Vx\|_{L^2} &\le \|V_1\|_{L^2}(a\|\Delta x\|_{L^2} + b\|x\|_{L^2}) + \|V_2\|_{L^\infty}\|x\|_{L^\infty} \\
&= a\|V_1\|_{L^2}\|\Delta x\|_{L^2} + (b\|V_1\|_{L^2} + \|V_2\|_{L^\infty})\|x\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Für $a\|V_1\|_{L^2} < 1$ ist die Voraussetzung von 8.4 erfüllt und $\Delta + V$ ist selbstadjungiert.

Grenzen der selbstadjungierten Theorie

- Sei H ein Hilbertraum, $A = \Delta$, $B = \sum_{j=1}^{d} b_j \partial_{x_j}$. $A + B$ ist selbstadjungiert, wenn $b_j = b_j(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$, denn $A + B$ ist nicht normal.

- $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, $Ax(u) = a(u)\Delta x(u)$. Dieses A ist nicht normal, denn

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} a(u)\partial_j^2 x a(u)\overline{y(u)} du = \sum_{j=1}^{d} \int x(u) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j} a(u)\overline{y(u)} \right) du$$

- $X = L^p(\mathbb{R}^d)$, $A = \Delta$ Keine Theorie selbstadjungierter Operatoren. $p \in [1, 2)$, $p \neq p'$: $\mathcal{F}\colon L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$.

Definition 2.8.0.5. *Sei $X \supset D(A) \xrightarrow{A} X$ abgeschlossener Operator, X ein Banachraum.*

- *A sei injektiv und* Bild(A) *sei dicht in X.*

- *$\sigma(A) \subset \Sigma_\omega$, $\Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\arg\lambda| < \omega\}$.*

- *$\exists C$: $\|R(\lambda, A)\| \leq C/|\lambda|$, falls $\lambda \notin \overline{\Sigma_\omega}$ (+).*

Dann heißt A ein sektorieller Operator mit Winkel ω. Notation: $\omega(A) = \inf \rho$, für die Bedingung (+) erfüllt ist.

Beispiel 2.8.0.6.

a) A sei selbstadjungierter Operator, $A \geq 0$. Dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$. $\|R(\lambda, A)\| = \frac{1}{|Im\lambda|}$, $Im\lambda = 0$, also $\omega(A) = 0$.

b) Sei iA selbstadjungiert. Dann ist $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$. Dann ist $\omega = \pi/2$.

c) Sei A normal. $\sigma(A) \subset \Sigma_\omega$. Sann ist A sektoriell mit Winkel ω. $\omega(A) =$ der kleinste Sektor, der $\sigma(A)$ enthält.

d) A beschränkt und $\sigma(A) \subset \Sigma_\omega$, $0 \notin \sigma(A)$. Dann ist A sektoriell und $\omega(A) \leq \varphi$. Zum Beweis mit $(\lambda + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$.

e) $X = L^p(\mathbb{R}^d)$, $A = \Delta$ sektoriell (später).

f) Der nächste Störungssatz gibt viele sektorielle Operatoren an.

Notation. A sei sektoriell vom Winkel φ.

$$M_\varphi(A) = \sup\{\|\lambda R(\lambda, A)\|, \|AR(\lambda, A)\| : \lambda \notin \Sigma_\omega\} < \infty$$

$$AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - \mathrm{id}\,.$$

Satz 2.8.0.7. *Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel φ und B sei Linear, $D(B) \supset D(A)$. Sei $a > 0$ mit $a \cdot M_\varphi(A) < 1$.*

a) Falls $\|Bx\| \leq a\|Ax\|$ (++) für $x \in D(A)$, dann ist $A+B$ auf sektoriell und $\omega(A+B) \leq \varphi$.

b) Falls $\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|$ für $x \in D(A)$, dann gibt es ein $\mu_0 > 0$, sodass $A + B + \mu_0$ sektoriell und $\omega(A + B + \mu_0) \leq \varphi$.

Beweis: a) Zeige $\|BR(\lambda, A)\| < 1$.

$$\|(A+B)x\| \leq (1+a)\|Ax\| \text{ nach } (++)$$

$$\|(A+B)x\| \geq \|Ax\| - \|Bx\| \geq (1-a)\|Ax\|,\ a < 1$$

A injektiv $\Rightarrow$ $(A+B)$ injektiv. $Tx = BA^{-1}x$, $x \in \mathrm{Bild}(A^{-1})$. Aus (++) folgt für $x = A^{-1}y$

$$\|Ty\| \leq a\|y\|.$$

Also kann $T \in B(X)$ fortgesetzt werden, $\|T\| \leq a < 1$. $I+T \in B(X)$ ist Isomorphismus. $\mathrm{Bild}(A+B) = (I+T)(\mathrm{Bild}(A))$, $\mathrm{Bild}(A+B)$ ist dicht. $Tx = B^{-1}x$, $x \in \mathrm{Bild}(A)$, $\|T\|_{B(X)} \leq a$. Zu zeigen: $\|BR(\lambda, A)\| < 1$, $|\arg \lambda| > \varphi$.

$$\begin{aligned}
\|BR(\lambda, A) &\leq \|(BA^{-1})AR(\lambda, A)x\| \\
&\leq \|T\| \cdot \|AR(\lambda, A)\| \\
&\leq aM_{\varphi}(A) < 1
\end{aligned}$$

Nach Lemma 8.1

$$\begin{aligned}
\lambda R(\lambda, A) &= \lambda R(\lambda, A) \left(\sum_{k=0}^{\infty} [BA^{-1}AR(\lambda, A)]^k \right) \\
\|\lambda R(\lambda, A+B)\| &\leq \|\lambda R(\lambda, A)\| + \|\lambda R(\lambda, A)\| \sum_{k=1}^{\infty} \|T\|^k \|AR(\lambda, A)\|^k \\
&\leq M_{\varphi}(A) + (1 - aM_{\varphi}(A))^{-1},
\end{aligned}$$

also $\omega(A+B) \leq \omega(A)$. b) $|\arg(\mu)| > \varphi$, $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\|BR(\mu, A)x\| &\leq a\|AR(\mu, A)x\| + \frac{b}{|\mu|}\|\mu R(\mu, A)x\| \\
&\leq \left[aM_{\varphi}(A) + \frac{b}{|\mu|} M_{\varphi}(A) \right] \|x\| < \|x\|
\end{aligned}$$

für $|\mu|$ groß genug. Dazu wähle $\mu_0 > 0$, sodass für $\mu = \lambda - \mu_0$ mit $\arg(\lambda) \geq \varphi$ gilt:

$$\left(a + \frac{b}{|\mu|} \right) M_{\varphi}(A) < 1.$$

Also folgt aus Lemma 8.1

$$\|\lambda R(\lambda, \mu_0 + A + B)\| \leq M_\varphi(A) + \frac{1}{1-c}.$$

Somit $A + B + \mu_0$ sektoriell $\square$

Erinnerung: Sei A linear und injektiv auf einem Banachraum X. A heißt **sektoriell**, falls $D(A)$ und Bild(A) dicht sind in X. $\sigma(A) \subset \Sigma_\omega$.

$$M_\omega(A) = \sup\{\|\lambda R(\lambda, A)\| \colon \lambda \notin \Sigma_\omega\} < \infty.$$

Beispiel 2.8.0.8. *Sei $b_1, ..., b_d \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $B \colon f \to \sum_{j=1}^d b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} f$, $X = L^2(\mathbb{R}^d)$, $A = -\Delta$, $D(A) = W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$, $D(B) \supset D(A)$. A ist selbstadjungiert, B, $A + B$* ***nicht*** *normal, aber $A + B$ ist sektoriell nach 8.8 b), da $\|Bx\| < a\|Ax\| + b\|x\|$ (Übung).*

Kapitel 3

Der holomorphe Funktionalkalkül

3.1 Dunfordkalkül für beschränkte Operatoren

Klar: $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_n \lambda^n$, $p(A) = \sum_{j=0}^{n} a_n A^n$ für $A \in B(X)$.

Nächster Schritt: $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ mit Konvergenzradius R. Sei $A \in B(X)$, X Banachraum, mit $r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| < R$. Dann $\limsup \|a_n A^n\|^{1/n} \leq c < 1$, denn $r(A) = \lim \|A^n\|^{1/n}$, $\|a_n A^n\| < c^n$, $c < 1 \Rightarrow$

$$\boxed{f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.}$$

z.B.

$$e^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^n,\ R = \infty,\ A \in B(X)$$
$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Ziel:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\mu - \lambda} f(\mu) d\mu.$$

Für $\lambda = A$ erhält man Formal $\Gamma \subset \rho(A)$:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\mu, A) f(\mu) d\mu.$$

Lemma 3.1.0.1. *Sei $A \in B(X)$ und $f\colon \{\lambda\colon |\lambda| < R\} \to \mathbb{C}$ analytisch und $r(A) < R' < R$.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n = f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=R'} f(\mu) R(\mu, A) d\mu.$$

Beweis: Für $|\mu| = R'$, $|\mu| > r(A)$ gilt

$$R(\mu, A) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{-m-1} A^m$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=R'} f(\mu) R(\mu, A) d\mu &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=R'} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mu^{-m-1} A^m \right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n A^m \left(\int_{|\mu|=R'} \mu^{n-m-1} d\mu \right) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.1.0.2 (Dunford Integrale)**.** *Gegeben: $\sigma(A)$. Wähle offene Mengen $U, V \in \mathbb{C}$ mit*

$$U \supset \bar{V} \supset V \supset \sigma(A).$$

$U \supset \partial V$, $\partial V \cap \sigma(A) = \emptyset$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ analytisch. ∂V besteht aus endlich vielen glatten Kurven, die positiv orientiert sind, d.h. $\sigma(A)$ liegt innerhalb von ∂V, $\mathbb{C} \backslash U$ ist außerhalb. Dann existiert das Dunford Integral $f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} f(\mu) R(\mu, A) d\mu$. Nach dem Satz von Cauchy hängt $f(A)$ nicht von der speziellen Wahl von V ab, da

$$(x', f(A)x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} f(\mu)(x', R(\lambda, A)x) d\mu$$

für alle $x \in X$, $x' \in X'$ und damit auch für A.

Standardvoraussetzungen: $\sigma(A) \subset V \subset \bar{V} \subset U$, U, V offen.

- ∂V besteht aus endlich vielen glatten Kurven.
- ∂V ist positiv orientiert.

Notation. U offen, $H(U)$ = holomorphen Funktionen. $S \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen, $f \in H(S)$ $\Leftrightarrow$ Es gibt eine offene Umgebung $U \supset S$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph.

$H^\infty(U)$ - beschränkte, analytische Funktionen auf U mit $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda\in U}|f(\lambda)|$, X Banachraum

Definition 3.1.0.3. *Zu $A \in B(X)$ und $\sigma(A) \subset V \subset U$ wie in 1.2 definiere das* ***Dunford Integral*** *für $f \in H(U)$ durch*

$$\Phi_A(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\lambda)R(\lambda, A)d\lambda.$$

Satz 3.1.0.4. *$\Phi_A\colon H(U) \to B(X)$ hat die Eigenschaften:*

(i) $\Phi(1) = \mathrm{id}_X$*, für $f(\lambda) = \lambda$ gilt $f(A) = A$.*

(ii) Φ ist linear und multiplikativ.

(iii) $\|\Phi_A(f)\| \leq C_A \sup_{\lambda\in V} f(\lambda)$.

(iv) Falls $f_n, f \in H(U)$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\bar{V}$, dann $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ in $B(X)$.

Φ_A heißt der ***Dunfordsche Funktionalkalkül****.*

Notation: $\Phi_A(f) =: f(A)$.

Beweis: (i) Wende 1.1 auf $f(\lambda) = 1$ an und $f(\lambda) = \lambda$.

(ii) Linearität klar, $f, g \in H(U)$.

$$
\begin{aligned}
f(A) \cdot g(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\mu)R(\mu,A)d\mu\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial W} g(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial V}\int_{\partial W} f(\mu)g(\lambda)R(\mu,A)R(\lambda,A)d\lambda d\mu \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\partial V}\int_{\partial W} \frac{f(\mu)g(\lambda)}{\lambda-\mu}[R(\mu,A)-R(\lambda,A)]d\lambda d\mu \text{ nach Resolventenformel} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial W} g(\lambda)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V}\frac{f(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu\right)R(\lambda,A)d\lambda \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\mu)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial W}\frac{g(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda\right)R(\mu,A)d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial W} g(\lambda)\boxed{f(\lambda)}R(\lambda,A)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial W} (gf)(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda = g(A)f(A)
\end{aligned}
$$

Dabei sind V, W offen mit $U \supset V \supset \bar{W} \supset W \supset \sigma(A)$.

(iii)

$$
\begin{aligned}
\|f(A)\| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial V} |f(\lambda)|\|R(\lambda,A)\|d|lambda| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} l(\partial V) \sup_{\lambda\in\partial V} |f(\lambda)| \sup_{\lambda\in\partial V} \|R(\lambda,A)\| \\
&\leq C \sup_{\lambda\in\bar{V}} |f(\lambda)|
\end{aligned}
$$

(iv) $\|f_n(A) - f(A)\| \leq C\sup_{\lambda\in\partial V} |f_n(\lambda) - f(\lambda)| \to 0$ für $n \to \infty$.

Korollar 3.1.0.5. *Für $A \in B(X)$ und $f \in H(\sigma(A))$ gilt*

$$
\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))
$$

Spektralabbildungssatz.

Beweis: „$\subseteq$": Sei $\lambda \notin f(\sigma(A))$. Dann gilt $g(\mu) = (f(\mu) - \lambda)^{-1} \in H(\sigma(A))$ (denn es gibt ein offenes $U \supset \sigma(A)$ mit $\lambda \notin f(U)$).

$$g(A)(f(A) - \lambda) = \Phi_A(g(\cdot)(f(\cdot) - \lambda)) = \Phi(1) = \mathrm{id}_X$$

Ebenso $(f(A) - \lambda)g(A) = \mathrm{id}_X$. Also ist $g(A) = (f(A) - \lambda)^{-1}$, d.h. $\lambda \notin \sigma(f(A))$.

„$\supseteq$": Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Definiere $g \in H(\sigma(A))$.

$$g(\mu) = \begin{cases} \frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}, \ \mu \neq \lambda \\ f(\lambda), \ \mu = \lambda \end{cases}$$

Dann

$$f(A) - f(\lambda) = \Phi_A((f(\cdot) - f(\lambda)) = \Phi_A((\cdot - \lambda)g(\cdot)) = (A - \lambda)g(A) = g(A)(A - \lambda)$$

$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow A - \lambda$ nicht invertierbar $\Rightarrow f(A) - f(\lambda)$ nicht invertierbar, d.h. $f(\lambda) \in \sigma(f(A))$. $\square$

Satz 3.1.0.6 (Spektralprojektion)**.** *Sei $\sigma(A) = \sigma_1 \dot\cup \sigma_2$ mit σ_1, σ_2 kompakt. Dann gibt es Projektionen $P_1, P_2 \in B(X)$ mit*

a) $\mathrm{id} = P_1 + P_2$, $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$.

b) $X = X_1 \oplus X_2$ *mit* $X_j = \mathrm{Bild}\, P_j$.

c) $A(X_j) \subset X_j$, $j = 1, 2$.

d) Für $A_j = A|_{X_j}$ *gilt* $\sigma(A_j) = \sigma_j$, $j = 1, 2$.

Bemerkung. A kompakt $\sigma(A) = \{0, \lambda_j, j \in J\}$, $H_j \to 0$.

Beweis: 1. Wähle offene Mengen U_1, U_2 mit $\sigma_j \subset U_j$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Setze

$$f_j(\lambda) = \begin{cases} 1, \; \lambda \in U_j \\ 0, \; \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $f_j \in H(\sigma(A))$, $f_j^2 = f_j$, $f_1 + f_2 = 1_{\chi_{U_1 \cup U_2}}$. Mit Dunford Kalkül folgt für $P_j = f_j(A)$:

$$P_j^2 = P_j, P_1 + P_2 = \mathrm{id}_X, P_1 \cdot P_2 = 0.$$

2. $X_j = \operatorname{Bild} P_j$ Dann ist $X_1 \subset \operatorname{Kern} P_2$, $X_2 \subset \operatorname{Kern} P_1$, $X_1 + X_2 = X \Rightarrow X = X_1 \oplus X_2$, X_1, X_2 abgeschlossene Unterräume.

3. $x \in X_j$: $Ax = A(P_j x) = (P_j)(Ax) \Rightarrow Ax \in X_j$.

4. $A_j = A|_{X_j}$, $A_j = g_j(A)$, $g_j(\lambda) = \lambda f_j(\lambda)$. Mit Spektralabbildungssatz folgt $\sigma(A_j) = g_j(\sigma(A)) = \sigma_j$. □

Satz 3.1.0.7. *Seien $A, B \in B(X)$, $AB = BA$. Dann $f(A)B = Bf(A)$ für alle $f \in H(\sigma(A))$.*

Beweis:

$$\begin{aligned} f(A)B &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} R(\lambda, A) d\lambda\right) B \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} f(\lambda) R(\lambda, A) B d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} f(\lambda) B R(\lambda, A) d\lambda \\ &= B \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda\right) \end{aligned}$$

Satz 3.1.0.8. *Sei $A \in B(X)$, $f \in H(\sigma(A))$, $g \in H(\sigma(f(A)))$. Dann ist $g \circ f \in H(\sigma(A))$ und*

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)).$$

Beweis: Nach 1.5: $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$. Wähle Umgebung $V \supset \sigma(f(A))$ und $U \supset \sigma(A)$ mit U, V offen, $\overline{f(U)} \subset V$. Zunächst sei $\lambda \in \partial V$.

$$R(\lambda, f(A)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{1}{\lambda - f(\mu)} R(\mu, A) d\mu.$$

$$\begin{aligned}
g(f(A)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} g(\lambda) R(\lambda, f(A)) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} g(\lambda) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{1}{\lambda - f(\mu)} R(\mu, A) d\mu \right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{g(\lambda)}{\lambda - f(\mu)} d\lambda \right) R(\mu, A) d\mu \\
&= (g \circ f)(A)
\end{aligned}$$

Proposition 3.1.0.9 (Dualität)**.** *Sei $A \in B(X)$, $U \supset \sigma(A)$ offen. Für $f \in H(U)$ analytisch gilt:*

a) $f(A)' = f(A')$.

b) Falls X Hilbertraum mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann ist $f(A)^* = \tilde{f}(A^*)$ mit $\tilde{f}(\lambda) = \overline{f(\bar{\lambda})}$ (z.B. $f(\lambda) = \sum a_n \lambda^n \rightsquigarrow \tilde{f}(\lambda) = \sum \bar{a}_n \lambda^n$), $\tilde{f}$ wieder analytisch, $\tilde{f} \in H(U)$.

Beweis: b)

$$\begin{aligned}
\langle f(A)x, y\rangle &= \langle\frac{1}{1\pi i}\int_{\partial U} f(\lambda)R(\lambda, A)x d\lambda, y\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(\lambda)\langle R(\lambda, A)x, y\rangle d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(\lambda)\langle x, R(\lambda, A)^* y\rangle d\lambda \\
&= \langle x, \overline{\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{\partial U}} \overline{f(\lambda)}R(\bar{\lambda}, A^*)y d\lambda, y\rangle \\
&= \langle x, \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \overline{f(\bar{\lambda})}R(\lambda, A^*)y d\lambda\rangle \\
&= \langle x, \tilde{f}(A)y\rangle
\end{aligned}$$

□

Definition 3.1.0.10 (Fréchet Ableitung)**.** *$t \in (a, b) \to f(t) \in X$, X Banachraum.*

$$(+)\quad f'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},\ t_0 \in (a, b)$$

*f ist **Fréchet differenzierbar** in t_0, falls $(+)$ existiert.*

Proposition 3.1.0.11. *Sei $A \in B(X), U \supset \sigma(A)$ offen. Gegeben sei $t \in (a, b) \to f_t \in H^\infty(U)$.*

a) Falls $t \in (a, b) \to f_t \in H(U)$ Fréchet differenzierbar ist, dann ist auch

$$t \in (a, b) \to f_t(A) \in B(X)$$

Fréchet differenzierbar.

b) Sei $t \in (a, b) \to f_t \in H^\infty(U)$ integrierbar und

$$g = \int_a^b f_t dt \in H^\infty(U),$$

dann ist auch

$$t \in (a,b) \to f_t(A) \in B(X)$$

integrierbar und

$$\int_a^b f_t(A)dt = g(A)$$

(integrierbar: f_t ist stetiges Riemannintegral oder Bochner Integral).

Beweis: Übung. □

3.2 Halbgruppen mit beschränkten Erzeugern

Sei $A \in B(X)$. Wie versteht man „e^{tA}"?

a) Halbgruppen: Setze $e_z(\mu) = e^{z\mu}$. Definiere $e^{zA} = e_z(A)$, $e_z \in H(\mathbb{C})$ für $z \in \mathbb{C}$. Nach Lemma 1.1:

$$e^{zA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n A^n).$$

Eigenschaften: $e_{z_1}(\mu)e_{z_2}(\mu) = e_{z_1+z_2}(\mu) \Rightarrow e^{z_1}e^{z_2 A} = e^{(z_1+z_2)A}$ (Halbgruppeneigenschaft). $e_z(\mu) \to 1$ für $z \to 0$ gleichmäßig auf kompaktem $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \Rightarrow e^{zA} \to \mathrm{id}_X$ in $B(X)$ für $z \to 0$ (C_0-Stetigkeit der Halbgruppe).

b) Halbgruppe und Resolvente: $r_\lambda(\mu) := \frac{1}{\lambda-\mu}$, $\lambda \notin \sigma(A)$, $r_\lambda \in H(\sigma(A))$.

$$R(\lambda, A) = r_\lambda(A) = (\lambda - A)^{-1}, \ \lambda \notin \sigma(A).$$

Resolventengleichung:

$$(\lambda_1 - \mu)^{-1} - (\lambda_2 - \mu)^{-1} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - \mu)^{-1}(\lambda_2 - \mu)^{-1}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - A)^{-1} - (\lambda_2 - A)^{-1} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - A)^{-1}$$

$$(\lambda-\mu)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\mu} dt$$
$$\Rightarrow R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} dt$$

(die Resolvente ist die Laplacetransformierte der Halbgruppe). Umgekehrt:

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} e^{t\lambda} R(\lambda, A) d\lambda$$

Widder-Umkehrformel.

$$\left(\frac{n}{t}\right)^n \left(\frac{n}{t} - \mu\right)^{-n} = \left(1 - \frac{t\mu}{n}\right)^{-n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{t\mu}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{n}{t}\right)^n R\left(\frac{n}{t}, A\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{tA} \text{ in } B(X),\ t > 0$$

c) Das Cauchy Problem: Gegeben sei $A \in B(X)$, $y_0 \in X$. Gesucht ist $y\colon \mathbb{R}_+ \to X$ mit

$$(+)\ y'(t) = Ay(t) \text{ für } t \geq 0,\ y(0) = y_0.$$

Beispiel $x = \mathbb{C}^n$, $y_k'(t) = \sum_{k=1}^n a_{kj} y_k(t)$, $y_k(0) = y_k$, $k = 1, ..., n$. Damit ist $A = (a_{kj}) \in B(\mathbb{C}^n)$, $y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ \\ y_1 \end{pmatrix}$. Lösung von (+): $\frac{d}{dt} e^{t\mu} = \mu e^{t\mu}$. Nach 1.11 gilt

$$T(t) = e^{tA},\ \frac{d}{dt} T(t) = AT(t).$$

Setze $y(t) = T(t) y_0$. Dann ist $y'(t) = Ay(t)$. $y(0) = T(0) y_0 = y_0$ und y löst (+).

d) Stabilität: Im Falle des obigen Beispiel ist bekannt: Ist

$$s(A) = \sup\{Re(\lambda)\colon \lambda \in \sigma(A)\} < 0$$

dann gilt für die Lösung $y(t)$ von (+) $\|y(t)\| \to 0$ für $t \to \infty$ (exponentiell).

Proposition 3.2.0.1. *$A \in B(X)$, $s(A) < 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\|e^{tA}\| \leq Ce{-}\delta t$ für $t \geq 0$, $C < \infty$.*

Beweis: Mit Spektralabbildungssatz gilt $\sigma(e^{TA}) = \{e^{T\lambda} \colon \lambda \in \sigma(A)\}$.

$$r(e^{TA}) = \sup\{|e^{T(Re\lambda + iIm\lambda)}| \colon \lambda \in \sigma(A)\} = e^{Ts(A)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|enTA\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|(e^{TA})^n\|^{1/n} = r(e^{TA}) = e^{Ts(A)}$$

Wähle $\delta >$, sodass $s(A) < -\delta < 0$ und n mit $\|e^{nTA}\| \leq e^{-Tn\delta}$. Für beliebiges $t > 0$ schreibe $t = nT + u$ mit $u \in [0, T] \Rightarrow \|e^{tA}\| \leq \|e^{ntA}\| \cdot \|e^{uA}\| \leq \sup\{\|e^{uA}\| \colon \}$.

5. Gebrochene Potenzen von Operatoren Sei $A \in B(X)$, $(-\infty, 0] \subset \rho(A)$. Sei $\mu_\alpha = \mu^\alpha$ analytisch auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, $\alpha \in (0,1)$. Definiere $A^\alpha := \mu_\alpha(A)$.

$$\mu^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_\sigma} z^{-\alpha}(z-\mu)^{-1}dz, \ Re\mu > 0$$

Für $\sigma \to \pi$:

$$\mu^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi a)}{\pi}\int_0^\infty t^{-\alpha}(t+\mu)^{-1}dt$$

Für $(1-\alpha)$ statt α, $0 < 1-\alpha < 1$.

$$(2)\ \mu^\alpha = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\mu(t+\mu)^{-1}dt$$

Für $\mu = A$.

$$(1)\ A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty t^{-\alpha}R(-t, A)dt$$
$$(2)\ A^{\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty AR(t, -A)dt$$
$$(3)\ \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty s^{\alpha-1}e^{-s}ds, \ 0 < \alpha < 1.$$

Setze $s = \mu t$:

$$\mu^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\mu t} dt$$
$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1} e^{-tA} dt.$$

$\alpha = \pm 1/2$:

$$A^{1/2} = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi} \int_0^\infty t^{-1/2} AR(t, -A) dt$$
$$A^{-1/2} = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^\infty t^{-1/2-1} AR(t, -A) dt$$

5. Cauchy Problem 2. Ordnung Skalar: $a > 0$.

$$y''(t) = -ay(t),\ y(0) = x_0,\ y'(0) = y_0$$

hat die Lösung:

$$y(t) = \cos(a^{1/2} t) x_0 + \sin(a^{1/2} t)(a^{-1/2} y_0).$$

Nun sei $A \in B(X)$, $(-\infty, 0] \subset \rho(A)$.

$$y(t) = \cos(A^{1/2} t) x_0 + \sin(A^{1/2} t)(A^{-1/2} y_0)$$

ist die Lösung für das Operatorproblem.

3.3 Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

Problem: A unbeschränkt auf X, z.B. $A = (-\Delta)$ auf $L^p(\Omega)$.

Definition 3.3.0.1. *X Banachraum, $X \supset D(A) \overset{A}{\to} X$ abgeschlossen. A sei injektiv, $D(A)$ und $R(A) =$* Bild *A dicht in X. Dann ist A* ***sektoriell*** *für ein $\omega \in (0, \pi)$, falls*

- $\sigma(A) \subset \Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\arg \lambda| < \omega\}$.

- *Es gibt eine Konstante* C_ω *mit* $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq C_\omega$ *für alle* $\lambda \notin \Sigma_\omega$.

Notation: $\omega(A) = \inf\{\omega \text{ wie oben}\}$.

Beispiel 3.3.0.2.

a) Sei A_0 *selbstadjungiert auf einem Hilbertraum* X, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. *Setze* $A = e^{i\theta} A_0$.

Also $\sigma(A) \subset e^{i\theta}\mathbb{R}$. *Für* $\theta \neq 0$ *ist* A *nicht selbstadjungiert, aber sektoriell.*

$$\|R(\lambda, A)\| = \sup_{s>0} \frac{1}{|\lambda - e^{i\theta} s|} = \frac{1}{d}.$$

b) $X = L^p(S, \mu)$, $Ax = mx$, $m\colon S \to \Sigma_\omega \backslash \{0\}$. *$A$ ist sektoriell auf* $X = L^p(S, \mu)$, $\omega(A) = \omega$, *denn*

$$\|R(\lambda, A)\| = \sup_{s \in S} \frac{1}{|\lambda - m(s)|} = \frac{1}{\sin(\theta - \omega)} \frac{1}{|\lambda|}.$$

c) $A \in B(X)$, $\sigma(A) \subset \Sigma_\omega \backslash \{0\}$, *denn für* $|\lambda > 2\|A\|$ *gilt*

$$R(\lambda, A) = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|} \right)^n$$

d) A sei „Erzeuger“ einer Operatorenhalbgruppe $T(t)$ *mit* $\|T(t)\| \leq C$ *für* $t > 0$, *d.h.*

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt \text{ (Laplacetransformation).}$$

Ein solcher Erzeuger ist immer sektoriell, denn

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq \int_0^\infty |\lambda e^{-\lambda t}| \|T(t)\| dt \leq C.$$

Definition 3.3.0.3.

a) $H^\infty(\Sigma_\sigma) = \{f\colon \Sigma_\sigma \to \mathbb{C}$ *analytisch und beschränkt auf* $\Sigma_\sigma\}$, $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{\lambda\in\Sigma_\sigma} |f(\lambda)| < \infty$.

b) Sei $\rho(\lambda) = \lambda/(1+\lambda)^2$.

$$H_0^\infty(\Sigma_\sigma) = \{f \in H^\infty(\Sigma_\sigma)\colon \forall\lambda \in \Sigma_\sigma \exists\epsilon > 0\colon |f(\lambda)| \le C|\rho(\lambda)|^\epsilon\}$$

$f \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$ *bedeutet insbesondere:* $|f(\lambda)| \le C|\lambda|^\epsilon$ *für* $|\lambda|$ *klein und* $|f(\lambda)| \le C/|\lambda|^\epsilon$ *für* $|\lambda|$ *groß.*

Definition 3.3.0.4. *Sei* A *ω-sektoriell und* $f \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$. *Sei weiter* $\omega < \sigma$ *und wähle* $\omega < \nu < \sigma$.

$$\Phi_A(f) = f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_\nu} f(\lambda)R(\lambda, A)d\lambda. \ (+)$$

Bemerkung. $f(A) \in B(X)$ definiert durch das Bochner Integral (+), denn $\lambda \in \partial\Sigma_\nu$:

$$|f(\lambda)|\|R(\lambda, A)\| \le \|f\|_{H^\infty}\frac{1}{|\lambda|}.$$

und das Integral (+) existiert als uneigentliches Integral.

Satz 3.3.0.5. *Sei* A *ω-sektoriell und* $\omega < \nu < \sigma$. *Die Abbildung*

$$f \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma) \to f(A) \in B(X)$$

ist linea, multiplikativ, stetig und es gibt die Konvergenzeigenschaft: Falls für $\lambda \in \Sigma_\sigma$, $f_n, f \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$ *mit* $|f_n(\lambda)| \le C$, $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$, *dann* $f_n(A) \to f(A)$ *in* $B(X)$.

Bemerkung. Diese Aussagen „erweitern“ den Dunfordkalkül. Sei $A \in B(X)$, $0 \in \rho(A)$, $\sigma(A) \subset \Sigma_\omega$. Hier:

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Sigma_\nu} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda \end{aligned}$$

Für $A \in B(X)$: Dunfort $=$ neuer Kalkül.

Notation. $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \sigma_1 < \arg \lambda < \sigma_2\} \backslash \{0\}$, $\partial \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)$ erhält eine positive Orientierung.

Lemma 3.3.0.6. *Sei $G \colon \Sigma(\sigma_1, \sigma_2) \to Y$, analytisch, Y Banachraum (äquivalent: $x' \circ G \colon \Sigma(\sigma_1, \sigma_2) \to \mathbb{C}$ analytisch, für alle $x' \in X'$).*

a) (Satz von Cauchy): Sei $\|G(\lambda)\| \leq C \frac{1}{1+|\lambda|^{1+\epsilon}}$ für $\lambda \in \overline{\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)}$, $\epsilon > 0$. Dann ist

$$\int_{\partial \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)} \sigma(\lambda) d\lambda = 0.$$

b) (Cauchy Formel): Sei $\|G(\lambda)\| \leq C \frac{1}{1+|\lambda|^{1+\epsilon}}$ für $\lambda \in \overline{\Sigma(\sigma_1, \sigma_2)}$. Dann ist

$$G(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda.$$

Beweis: $\Gamma_n = \{\lambda \in \partial \Sigma(\sigma_1, \sigma_2) \colon 1/n \leq |\lambda| \leq n\}$, $\gamma_n = \{\lambda \in \Sigma(\sigma_1, \sigma_2) \colon |\lambda| = 1/n \text{ oder } |\lambda| = n\}$.

a)

$$\int_{\partial \Sigma(\sigma_1, \sigma_2)} G(\lambda) d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma_n} G(\lambda) d\lambda + \lim_{n \to \infty} \int_{\gamma_n} G(\lambda) d\lambda$$

denn

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\gamma_n} G\lambda d\lambda\right\| &\leq \int_{\gamma_{n,1}} \|G(\lambda)\| d|\lambda| + \int_{\gamma_{n,2}} \|G(\lambda)\| d\lambda \\ &\leq l(\gamma_{n,1}) \sup \|G(\lambda)\| + l(\gamma_{n,2}) \sup \|G(\lambda)\| \\ &\leq 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{1}{n}C + 2\pi(\sigma_1+\sigma_2)n\frac{1}{1+|n|^{1+\epsilon}} \to 0.\end{aligned}$$

b) analog. □

Ausblick zum H^∞-Kalkül

Definition 3.3.0.7. *A hat einen beschränkten H^∞-Kalkül, falls A sektoriell ist, $\sigma(A) \subset \Sigma_\sigma$ und es eine Konstante C gibt, mit*

$$\|f(A)\|_{B(X)} \leq C\|f\|_{H^\infty(\Sigma_\sigma)}$$

für alle $f \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$.

Bemerkung. Falls (+) gilt, dann lässt sich der zunächst auf einer dichten Teilmenge $D(A) \cap R(A)$ definierte Operator

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_\sigma} f(\lambda)R(\lambda, A)x d\lambda,$$

$x \in D(A) \cap R(A)$ zu einem beschränkten Operator $f(A) \in B(X)$ fortsetzen, das heißt $f \in H^\infty(\Sigma_\sigma) \to B(X)$ (H^∞-Kalkül).

Für einen sektoriellen Operator A auf einem Hilbertraum X sind äquivalent:

(i) A hat einen beschränkten H^∞-Kalkül mit $\sigma < \pi/2$.

(ii) Es gibt auf X ein zu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ äquivalentes Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]$, sodass

$$[Ax, x] \in \Sigma_\sigma \ \forall x \in D(A).$$

(iii) A erzeugt eine analytische Halbgruppe $T(z)$, $z \in \Sigma_{\pi/2-\sigma}$, für die in einer äquivalenten Hilbertraumnorm $|||\cdot|||$ gilt: $|||T(z)||| \leq 1$.

(iv) A hat eine **Dilation** zu einem Multiplikationsoperator, d.h. es gibt eine isometrische Einbettung $J\colon X \to L^2(\mathbb{R}, X)$, eine Orthogonalprojektion $P = JJ^*$ von $L^2(\mathbb{R}, X)$ auf $J(X)$ und einen Multiplikationsoperator $Mf(t) = (it)^\alpha f(t)$, $(\alpha > 2\sigma/\pi)$, sodass

$$\begin{tikzcd}
L^2(\mathbb{R}, X) \arrow[r, "M"] & L^2(\mathbb{R}, X) \\
J_X \arrow[u] \arrow[r] & X \arrow[u, "J"']
\end{tikzcd}$$

Satz 3.3.0.8. *Sei A ω-sektoriell, $\omega < \nu < \sigma$. Dann ist die Abbildung $\Phi_A\colon f \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma) \to f(A) \in B(X)$ linear, multiplikativ, beschränkt und es gilt (Konvergenzeigenschaft): $f, f \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$ mit $|f_n(\lambda)| \leq C$ und $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$, $\lambda \in \Sigma_\sigma$. Außerdem gilt für alle $g \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$:*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_A(gf_n) = \Phi(gf) \ \text{in}\ B(X).$$

Beachte: (+) $\|f(A)\|_{B(X)} \leq C_\nu \int_{\partial\Sigma_\sigma} |f(\lambda)| \frac{d|\lambda|}{|lambda|}$

Beweis:

$$\|f(A)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Sigma_\sigma} \frac{|f(\lambda)|}{|\lambda|} \|\lambda R(\lambda, A)\| d|\lambda| \leq \left(\frac{C'_\nu}{2\pi}\right) \int_{\partial\Sigma_\sigma} \frac{|f(\lambda)|}{|\lambda|} d\lambda.$$

Also gilt (+), falls $f \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$.

Φ_A ist offensichtlich linear.

Φ_A ist multiplikativ: $\Phi_A(g)\Phi_A(f) = \Phi_A(gf)$. Wähle ν_1, ν_2 mit $\omega < \nu_1 < \nu_2 < \sigma$.

$$\begin{aligned}
\Phi_A(f) \cdot \Phi_A(g) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_{\nu_1}} f(\mu)R(\mu,A)d\mu\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_{\nu_2}} g(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\partial\Sigma_{\nu_1}}\left(\int_{\partial\Sigma_{\nu_2}} f(\mu)g(\lambda)R(\mu,A)R(\lambda,A)d\lambda\right)d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_{\nu_2}} g(x)\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial\Sigma_{\nu_1}}\frac{f(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu\right)\right]R(\lambda,A)d\lambda \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_{\nu_1}} f(\mu)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_{\nu_2}}\frac{g(\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda\right]R(\mu,A)d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_{\nu_1}} f(\mu)g(\mu)R(\mu,A)d\mu \\
&= \Phi_A(f\cdot g).
\end{aligned}$$

Konvergenzeigenschaft:

$$\begin{aligned}
H_n(\lambda) &= [f_n(\lambda) - f(\lambda)]\, g(\lambda)R(\lambda,A) \in B(X),\ \lambda \in \partial\Sigma_\nu \\
\|H_n(X)\| &\le |f_n(\lambda) - f(\lambda)|\frac{g(\lambda)}{|\lambda|}\|\lambda R(\lambda,A)\|, \\
\|H_n(\lambda)\| &\to 0,\ n \to \infty. \\
\|\Phi_A(f_ng) - \Phi_A(fg)\| &\le \frac{1}{2\pi}\|\int_{\partial\Sigma_\nu}(f_n(\lambda) - f(\lambda))g(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda\| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma_\nu}\|H_n(\lambda)\|d|\lambda| \to 0
\end{aligned}$$

□

Ziel: $e^{-\lambda}$, $\frac{1}{\mu-\lambda}$, rationale Funktionen.

Lemma 3.3.0.9. *Sei $f \in H^\infty(\Sigma_\sigma)$ und es erfülle*

- *f ist analytisch in $B(0, 2\delta)$, $\delta > 0$.*

- $|f(\lambda)| \le \frac{C}{(1+|\lambda|)^\epsilon}$, $\epsilon > 0$.

Für einen ω-sektoriellen Operator A mit $\omega < \delta$und $x \in \mathrm{Bild}(A)$ gilt:

(i) $I(f)x = \int_{\partial\Sigma\nu} f(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda = \int_{\partial\Gamma_\delta} f(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda$.

(ii) $\|I(f)x\| \le M\left(\inf \int_{\Gamma_\epsilon} |f(x)|\frac{d|\lambda|}{|\lambda|}\right)\|x\|$ *mit*

$$M = \sup_{\lambda\in\partial\Sigma_\nu} \|\lambda(R(\lambda,A)),\ \Gamma_\delta = \partial[\Sigma_\nu \cup B(0,\delta)].$$

Beweis: (i) Da $x \in \mathrm{Bild}\, A$, wähle $y \in D(A)$ mit $x = Ay$. $\Rightarrow R(\lambda,A)x = R(\lambda,A)Ay = \lambda R(\lambda,A)y - y$. $\|R(\lambda,A)x\|$ ist beschränkt in $B(0,2\delta)$.

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma_\nu} f(\lambda)R(\lambda,A)xd\lambda &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial\Gamma_\epsilon} f(\lambda)R(\lambda,A)xd\lambda \text{ (nach Lebesgue)}\\ &= \int_{\Gamma_\delta} f(\lambda)R(\lambda,A)d\lambda \text{ (nach Chauchy)}\\ &\Rightarrow \text{ (i)}\end{aligned}$$

(ii)

$$\|I(f)x\| \le \int_{\partial\Gamma_\delta} \frac{|f(\lambda)|}{|\lambda|}\|\lambda R(\lambda,A)x\|d|\lambda| \le \tilde{C}'\|x\|.$$

□

Beispiel 3.3.0.10. *Sei $\rho(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Dann gilt*

$$\rho(A) = A(I+A)^{-2} \text{ und}$$

$$\mathrm{Bild}(\rho(A)) = D(A) \cap \mathrm{Bild}(A).$$

Beweis: Wende Lemma 3.9 an auf $f(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}$.

$$R(-1,A)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_\nu} \frac{1}{\lambda+1}R(\lambda,A)xd\lambda$$

wobei $\nu \in (\omega, \pi)$.

$$\begin{aligned}
AR(-1,A)^2x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_\nu} \frac{-1}{\lambda+1} AR(-1,A)R(\lambda,A)x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_\nu} \frac{1}{\lambda+1}\frac{AR(\lambda,A)x - AR(-1,A)x}{\lambda+1} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_\nu} \frac{1}{(1+\lambda)^2} R(\lambda,A)d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Sigma_\nu} \frac{1}{1+\lambda^2} d\lambda(-x - AR(-1,A))x \\
&= \rho(A) + 0
\end{aligned}$$

$AR(-1,A)x = A(I+A)^{-2}x = \rho(A)x$ für $x \in \text{Bild}(A)$, dicht in X.

Bleibt zu zeigen: $R(A(1+A)^{-2}) = D(A) \cap \text{Bild}(A)$.

„$\subseteq$“: Sei $y \in \text{Bild}(A(I+A)^{-2})$. Wähle $x \in X$ mit $y = A(I+A)^{-2}x \Rightarrow y = (I+A)^{-1}z \in D(A)$, da $z = A(I+A)^{-1} \in X$. $y = A\tilde{z} \in \text{Bild}(A)$, da $\tilde{z} = (I+A)^{-1}(I+A)^{-1}x \in D(A)$.

„$\supseteq$“ $y := (1+A)A^{-1}(I+A)x = (1+A)A^{-1}x + (1+A)x$. $A(I+A)^{-2}y = A(I+A)^{-1}(I+A)^{-1}(I+A)A^{-1}(I+A)x = x$. $\square$

Definition 3.3.0.11. *Sei A ω-sektoriell auf X $f \in H^\infty(\Sigma_\sigma)$, $\sigma > \omega$, $x \in D(A) \cap \text{Bild}(A)$. Setze $f(A)x = (f \cdot \rho)(A)y$ mit $y = \rho(A)^{-1}x$. Also ist $f(A)$ auf der dichten Teilmenge $D(A) \cap \text{Bild}(A)$ definiert.*

Bemerkung 3.3.0.12. *a) $f\rho \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$. Also $(f\rho)(A) \in B(X)$ nach 3.7, 3.8.*

b) Falls $f \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$, dann stimmen die beiden Definitionen

$$f(A)x = (f\rho)(\rho^{-1}(x))$$

überein, da Φ_A auf H_0^∞ multiplikativ ist.

c) $f(A)$, $D(f(A)) = D(A) \cap \text{Bild}(A)$ ist abschließbar (Übung).

Definition 3.3.0.13. *Sei A ω-sektoriell auf X, $\sigma > \omega$.*

$$H_A^\infty(\Sigma_\sigma) = \{f \in H^\infty(\Sigma_\sigma) \colon f(A) \in B(X)\}.$$

Falls $H_A^\infty(\Sigma_\sigma) = H^\infty(\Sigma_\sigma)$, dann hat A einen ***beschränkten*** $\mathbf{H}^\infty$***-Funktionalkalkül****.*

Bemerkung 3.3.0.14. *$H_0^\infty(\Sigma_\sigma) \subset H_A^\infty(\Sigma_\sigma)$. f wie in 3.9 ist auch in $H_A^\infty(\Sigma_\sigma)$. Es gibt auch Operatoren, die keinen beschränkten H^∞-Kalkül haben. Diese sind jedoch exotisch.*

Beispiel 3.3.0.15.

a) $H_0^\infty(\Sigma_\sigma) \subseteq H_A^\infty(\Sigma_\sigma)$.

b) $r_\mu(\lambda) = \frac{1}{\mu - \lambda}$, $\mu \notin \overline{\Sigma_\sigma}$: $r_\mu(A) = R(\mu, A)$.

c) $f(\lambda) \equiv 1$*:* $f(A) = \mathrm{id}_X$.

d) $f(\lambda) = \prod_{j=1}^n \frac{a_j - \lambda}{\mu_j - \lambda}$ *mit* $a_j \in \mathbb{C}$, $\mu_j \notin \overline{\Sigma_\sigma}$*:* $f(A) = \prod_{j=1}^n (a_j - A) R(\mu_j, A)$ *[Übung mit Lemma 3.9].*

Satz 3.3.0.16. *$\Phi_A \colon H_A^\infty(\Sigma_\sigma) \to B(X)$ ist linear, multiplikativ und es gilt:*

(+) *Sei $|f_n(\lambda)| \leq C_1$, $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ für $\lambda \in \Sigma_\sigma$ mit $f_n \in H_A^\infty(\Sigma_\sigma)$ und $f \in H^\infty(\Sigma_\sigma)$ und $\|f_n(A)\|_{B(X)} \leq C$.*

Dann ist $f \in H_A^\infty(\Sigma_\sigma)$ und $\|f(A)\|_{B(X)} \leq C$.

Folgerung. Die lineare, unbeschränkte Abbildung $H^\infty(\Sigma_\sigma) \supseteq H_A^\infty(\Sigma_\sigma) \overset{\Phi_A}{\to} B(X)$ ist abgeschlossen.

Beweis: Linear und multiplikativ wie bisher. Zu (+): Es gilt für $\rho(\lambda) = \lambda(1+\lambda^2)^{-1} \in H_0^\infty(\Sigma_\sigma)$

$$\|(f_n\rho)(A) - (f\rho)(A)\|_{B(X)} \to 0$$
$$\Rightarrow \|f_n(A)x - f(A)x\|_X \Rightarrow 0$$

für $x = \rho(A)y \in D(A) \cap \mathrm{Bild}(A)$ für $y \in X$.

$$\Rightarrow \lim \|f_n(A)x\| = \|f(A)x\| \text{ für } x \in D(A) \cap \mathrm{Bild}(A)$$
$$\Rightarrow \|f(A)x\| \leq C\|X\| \text{ für } x \text{ in dichter Teilmenge von } X$$
$$\Rightarrow f(A) \in B(X),\ \|f(A)\| \leq C.$$

Definition 3.3.0.17. *A hat einen beschränkten $H^\infty(\Sigma_\sigma)$-Kalkül, falls $H_A^\infty(\Sigma_\sigma) = H^\infty(\Sigma_\sigma)$.*

Beispiel 3.3.0.18.

a) Fourierreihen auf $L^p(0,1)$:

$$e_n(t) = e^{2\pi int},\ t \in [0,1],\ \textit{ONB von } L^2[0,1]$$

Fourierkoeffizienten für $x \in L^p(0,1)$:

$$\hat{x}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi int} x(t)dt,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Fourierdarstellung:

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) e_n \textit{ in } L^p(0,1),\ n < \infty.$$

b) Diagonaloperatoren bezüglich der Fourierreihen. Sei $\alpha_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, gegeben. Definiere einen unbeschränkten Operator A auf $L^p(0,1)$:

$$D(A) = \{x \in L^p(0,1)\colon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{x}(n)\alpha_n e_n \text{ konvergiert in } L^p\}.$$

$x \in D(A)$: $Ax = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{x}(n)\alpha_n e_n$. H^∞-Kalkül für A:

(i) Sei $\alpha_n = n^2$. Dann ist $A = -\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ ein beschränkter H^∞-Kalkül für $p \in (1,\infty)$ aber für $p = 1$, $p = \infty$ ***nicht****.*

(ii) Sei $\alpha_n = 2^n$. Dann hat A einen beschränkten H^∞-Kalkül für $p = 2$, aber für ***kein*** *$p \neq 2$.*

(iii) $\alpha_n = p_n \in \mathcal{P}$. A hat keinen H^∞-Kalkül.

(iv) $\alpha_n \sim n^q$, $q \in \mathbb{R}^+$. Dann hat A einen H^∞-Kalkül.

Satz 3.3.0.19. *Sei A ein ω-sektorieller Operator auf einem Banachraum X mit $\omega < \pi/2$. Wähle $\delta \in (0, \pi/2 - \omega)$, $f_z(\lambda) = e^{-z\lambda}$, $z \in \Sigma_\delta$. Dann gilt für $T(z) = f_z(A)$:*

(i) $z \in \Sigma_\delta \to T(z) \in B(X)$ beschränkt und analytisch und $\frac{d}{dz}T(z) = -AT(z)$, ($T(z) = e^{-zA}$.

(ii) $T(z_1)T(z_2) = T(z_1 + z_2)$, $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$.

(iii) $T(z)x \to x$ für $z \to 0$ und $x \in X$.

(iv) Außerdem gilt für $Re\lambda < 0$

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)dt.$$

Definition 3.3.0.20. *$T(z)$ mit den Eigenschaften (i)-(iii) heißt **analytische Halbgruppe** mit Erzeuger A.*

Beweis: Zeige $T(z)$, $z \in \Sigma_\sigma$, ist beschränkt in $B(X)$. Nach Lemma 3.9 gilt wegen $T(z) = f_z(A)$

$$\|T(z)\| = \|f_z(A)\| \leq \inf \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{|f_z(\lambda)|}{|\lambda|} d|\lambda|$$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} |e^{-z\lambda}| \frac{d|\lambda}{|\lambda|} \leq \int_{\Gamma_\epsilon \cap B_0(\epsilon)} |e^{-z\lambda}| \frac{d|\lambda|}{|\lambda|} + \int_{\Gamma_\epsilon \cap B_0(i)} |e^{-z\lambda}| \frac{d|\lambda|}{|\lambda|} = (*)$$

Parametrisierung der Komplexen Wegintegrale $\theta \to \epsilon e^{i\theta}$ (erstes Integral), $t \to \lambda = te^{i\pm\nu}$ (zweites Integral).

$$\begin{aligned}(*) &\leq \int_0^{2\pi} e^{-\epsilon r \cos(\omega+\theta)} \frac{\epsilon d\theta}{\epsilon} + \int_\epsilon^\infty e^{-tr\cos(\pm\nu+\omega)} \frac{dt}{t} \\ &\leq 2\pi e^{+\epsilon r} + \sum_{+,-} e \int_{\epsilon a\pm} \frac{dt}{t} \leq C(\omega)\end{aligned}$$

Bemerkung. Sektorielle Operatoren mit $\omega < \pi/2 \Leftrightarrow A$ ist Erzeuger einer analytischen Halbgruppe.