Spektraltheorie

Prof. Dr. Lutz Weis

Sommersemester 2016

Karlsruher Institut für Technologie

Vorwort

Dieses Skript wurde im Sommersemester 2016 von Martin Belica geschrieben. Es ist ein inoffizielles Skript und beinhaltet die Mitschriften aus der Vorlesung von Prof. Dr. Weis am Karlsruhe Institut für Technologie sowie die Mitschriften einiger Übungen.

Einleitung

Die Spektraltheorie verallgemeinert die Theorie von Eigenwerten und Normalformen von Matrizen für unendlichdimensionale Operatoren auf Funktionenräumen, wie Differential- und Integraloperatoren. Sie vermittelt eine wesentliche Methodik für viele Anwendungsgebiete, wie partielle Differentialgleichungen, mathematische Physik und numerische Analysis.

Zu den Themen gehören:

- Spektrum und Resolvente linearer (unbeschränkter) Operatoren
- Fouriertransformation und der Funktionalkalkül des Laplace-Operators
- Der Funktionalkalkül selbstadjungierter Operatoren
- Der holomorphe Funktionalkalkül sektorieller Operatoren
- Cauchy-Problem für sektorielle Operatoren

Diese Vorlesung bereitet auf zukünftige Vorlesungen und Seminare im Bereich der deterministischen und stochastischen Evolutionsgleichungen vor.

Erforderliche Vorkenntnisse

Wir setzen ein grundlegendes Verständnis funktionalanalytischer Methoden voraus, wie sie z.B. in den Vorlesungen "Differentialgleichungen und Hilberträumeöder "Funktionalanalysis"vermittelt werden.

Inhaltsverzeichnis

Überblick über die Vorlesung Spektraltheorie

Kapitel I: Fourieranalysis

Motivation:

a) $x \in C_c^2(\mathbb{R}^d) : \Delta x = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2 x(u)} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\Delta : C_c^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ unbeschränkter Operator $(C_c^2(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\Delta), \|x\|_\Delta = \|x\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}$ Ist denn der Operator Δ genau dann abgeschlossen, wenn $(C_c^2(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\Delta)$ vollständig? Nein.

   $\langle \Delta x, y\rangle_{L^2} = \langle x, \Delta y\rangle$, $x, y \in C_c^2$ Δ selbstadjungiert auf $D(\Delta) = H^{2,2}$, part. Integr.

b) Spektralsatz für ΔL: $\exists f : L^2(\mathbb{R}^2 \to L^2(\mathbb{R}^d)$ unitär, sodass $\delta = fMf^{-1}$ mit

$$(Mx)(u) = -|u|^2 x(u) \text{ Multiplikationsoperator}$$

   $D(M) = \{x \in L^2 \colon |u|^2 x(u) \in L^2\}.L^2(\mathbb{R}^d \supset D(M) \to L^2(\mathbb{R}^d), x \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\hat{x}(u) = (fx)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i u \cdot v} x(v) dv$$

   Fouriertransformation

c) Grundlegende Eigenschaften von f:

   - Differentiation und Multiplikation, mit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

$$(-2\pi i u)^\alpha f(u) \underset{f}{\to} D^\alpha \hat{f}(v) \text{ bzw. } D^\alpha f(u) \underset{f}{\to} (2\pi i v)^\alpha \hat{f}(v)$$

   - Faltung $(f * g)(u) = \int f(v-u) g(v) dv$ *todo*
   - Translationen: $f(u+h) \underset{\tilde{f}}{\to} \hat{f}(v) e^{2\pi v \cdot h}$ $F(u) e^{-2\pi i u \cdot h} \xrightarrow{f} \hat{(}v+h)$
   - Stetigkeit von f:

$$\left.\begin{aligned} f \colon L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d) \\ f \colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d) \end{aligned}\right\} \text{ unitär } f \colon L^p \to L^{p'},$$

     mit $1 \leq p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Kapitel II: Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren

Motivation:

- Schrödingeroperatpr $A = \Delta + \underbrace{V}_{\substack{Potential: \\ Vx(u)=V(u)x(u)}}$
- ellip. Operator: $Ax = \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial u_n} a_{n,m} \frac{\partial}{\partial u_m x(u)}$ wobei $(a_{n,m}) \in M(d,l)$ selbstadjungiert, $A \geq 0$
- Laplace Beltr. Operatoren auf Mannigfaltigkeiten
- Graphenlaplace auf Graphen
- Δ auf Fraktalen

Ist X ein Hilbertraum, $X \subset D(A) \xrightarrow{A} X$ selbstadjungiert **Spektralsatz**: Es gilt (U, μ) und $m\colon U \to \mathbb{C}$ und $J\colon L^2(U,\mu) \to X$ unitärer Operator, sodass

$$A = JMJ^{-1}x, \ x \in D(A)$$

wobei $M\colon L^2(U,\mu) \to L^2(U,\mu), (Mx)(u) = m(u)x(u)$

Kapitel III: Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren

Sei $A \in B(X)$ selbstadjunigert, X ein Hilbertraum. Nach II gilt: $A = JMJ^{-1}$.

$$A^2 = (JMJ^{-1})(JMJ^{-1}) = JM^2J^{-1}$$
$$A^n = \ldots = JM^nJ^{-1}$$

$p(z) = \sum_n a_n z^n, \quad M^n x(u) = m(u)^n x(u) \ z = A$: $p(A) = \sum a_n A^n = J(\sum_n a_n M^n)J^{-1} = J(p(M))J^{-1}$ $P(M)x(u) = (\sum_n a_n m(u)^n)x(u) = p(m(u))x(u)$ Allgemeine Definition: $f \in B_b(\mathbb{R})$ - beschr. Borel.

$$f(A) = Jf(M)J^{-1}$$

mit $f(M)x(u) = f(m(u))x(u)$.

Eigenschaften des Funktionalkalküls: $f, g \in B_b(\mathbb{R})$

i) $(\underbrace{(f \cdot g)}_{punktweisesProduktvonFunktionen}(A) = \underbrace{f(A) \cdot g(A)}_{KompositionvonOperatoren}$

ii) $\|f(A)\| = \|f\|_{L^\infty(U,\mu)} \underset{\text{stetig}}{\overset{f}{=}} \sup_{u \in \sigma(A)} |f(u)|$

iii) $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig $\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ Kurz: $f \in (B_b, \|\cdot\|_\infty) \to f(A) \in B(X)$ stetiger Algebrenhomomorphismus

Beispiel 1.1

a) $\frac{1}{\lambda - z} - \frac{1}{\mu - z} = \frac{mu - \lambda}{(\lambda - z)(\mu - z)}$ $z = A$: $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$

b) $f_t(z) = e^{-tz}$, $t > 0$ $f_t(z) = e^{-tA} = \sum_{n \geq 9} \frac{-1^n}{n!} t^n A^n$ $e^{-tz}e^{-sz} = e^{-(s+t)z} \to e^{-tA}e^{-sA} = e^{-(s+t)A}$

c) $f_a(z) = z^a, \quad f_a(A) = A^a$ $z^a \cdot z^b = z^{a+b} \to A^a \cdot A^b)A^{a+b}$

d) $f(z) = z^\alpha e^{-zu}$, $f(A) = A^\alpha e^{-tA}$ $\|f(A)\| = \sup_{z>0} |z^\alpha e^{-tz}|$ $f(z) = z^\alpha(\lambda_0 - z)^{-\beta}$, $f(A) = A^\alpha R(\lambda_0, A)^\beta, \|f(A)\| = \sup \left| \frac{z^\alpha}{(\lambda_0 - z)^\beta} \right|$

e) $f = \mathbb{1}_{[a,b]}, f(A)^2 \overset{i)}{=} f^2(A) = f(A)$, d.h. $f(A)$ ist eine Projektion. $\sigma(A) \subset [a,b], c \in (a,b)$ $P_1 = {}_{(a,c]}(A), P_2 = \mathbb{1}_{(c,b)}(A)$ $P_1 + P_2 = I$, $P_1P_2 = 0$ $X_j = P_j(X), j = 1,2$: $X = X_1 \oplus X_2$ $mitA(X_1 \subset X_1,\ A(X_2) \subset X_2$ $A = A_1 \oplus A_2,\ A_1 = A|_{X_1}, A_2 = A|_{X_2}$ $\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2) = \sigma(A)$

Anwendung des Kalküls auf Evolutionsgleichungen:

i) $y'(t) = Ay(t),\ y(0) = y_0$ mit z.B. $A = \Delta$ und $y(t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung. $y(t) = e^{tA}y_0, e^{tA} = \sum_n \frac{1}{n}t^nA^n, e^{tA} = f_t(A), f_t(z) = e^{tz}$

ii) $y'(t) = iAy(t), y(0) = y_0$ $A = \Delta$: Schrödingergleichung $y(t) = e^{itA}y_n$

iii) $y''(t) = Ay(t), y(0) = y_0, y_t(0) = y_1$ $A = \Delta$ Wellengelichung $y(t) = \cos(A^{\frac{1}{2}}t)y_0 + A^{-\frac{1}{2}}\sin(A^{\frac{1}{2}}t)y_1$ $A = \Delta$ Kapitel Fourieranalysis $e^{tA}x(u) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{-(u-v)^2}{2\pi}}f(v)dv$

Eigenschaften der Lösung:

- Stbilität, asymptotisches Vehalten: $y(t) = e^{tA}y_0 \xrightarrow[t\to 0]{}?$ $\exists\epsilon > 0, \sigma(A) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -\lambda\}$

$$\Rightarrow \|y(t)\| \leq ce^{-\epsilon t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

- Regularität: $\underbrace{\|A^\alpha e^{-tA}y_0\|}_{\|e^{-tA}y_0\|_{D(A^\alpha)}d} \leq c\frac{1}{t^\alpha},\ t > 0, \alpha > 0$ $A = -\Delta$, $D(A) = H^{2,2}, D(A^n) = H^{2n,2}$,

Fourieranalysis

3 Die Fouriertransformation auf L^1, $\mathcal{S}$ und L^2

Definition 3.1
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ setze $\hat{f}(\xi) = f f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx$

Bemerkung
Für $d = 1$, $f \in L^2[0, \pi] \subseteq L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-2\pi n x} f(x) dx$ klassische Fourierkoeffizienten $f \in L^2[0, 2\pi]$ sind die Werte von $\hat{f}(\xi)$ für $\xi = n \in \mathbb{Z}$. $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$ (Fourierreihen)

Proposition 3.2
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$. Es gilt sogar $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Beweis
$|\hat{f}(\xi)| \leq \int |e^{-2\pi i x \xi}||f(x)| dx = \|f\|_{L^1}$. Für $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ siehe Übung. □

Proposition 3.3

a) für die Dilation $f_\delta(x) \coloneqq f(\delta x), \delta > 0$ fest gilt $\hat{f}_\delta(x) = \delta^{-d} \hat{f}(\delta^{-1} \xi)$

b) $f(x+h) \xrightarrow{f} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi h}, h \in \mathbb{R}^d$ fest, $f(x) e^{-2\pi i \xi h} \xrightarrow{f} \hat{f}(\xi + h)$

Beweis

b) $f[f(\cdot + g)](\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} f(x+h) dx \overset{x'=x+h}{=} \int e^{-2\pi i (x'-h)\xi} f(x') dx' = e^{2\pi i h \xi} \hat{f}(\xi)$ □

Definition 3.4
Faltung von $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$(f * g)(x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) f y = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

Bemerkung: $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$

Proposition 3.5: $\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$

Beweis

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * g)}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \xi} \left(\int f(x-y) g(y) dy \right) dx \overset{Fubini}{=} \int e^{-2\pi i y \xi} g(y) \left(\int e^{-2\pi i (x-y)\xi} f(x-y) dx \right) dy \\
&\overset{x'=x-y}{=} \left(\int e^{-2\pi i y \xi} g(y) dy \right) \left(\int e^{-2\pi i x' \xi} f(x') dx' \right) = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

□

Definition 3.6
$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ heißt schnell fallend, falls für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ gilt

$$\|f\|_{\alpha,\beta} \coloneqq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| < \infty$$

Notation $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (schnell fallende Fkt, Schwartzraum).
Dabei ist für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d, x \in \mathbb{R}^d : D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_d}^{\alpha_d}, x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}, |a| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$

Bemerkung
Definition 3.6 heißt, dass alle Ableitungen schneller gegen Null geht als jedes Polynom gegen ∞ für $\|x\| \to \infty$, d.h. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\forall m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + |x|)^m x^\beta D^\alpha f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Insb $x^\beta D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$ Im Himmelreich für Fubini, Diff unter dem Integralzeichen, Leb. Konvergenzsatz usb.

Beispiel 3.7
a) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Aber $\hat{f}(\xi) = \int_K e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(K = \operatorname{supp} f)$

b) $h(x) = e^{-\pi |x|^2}$, $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Später: $\hat{h} = h$

Satz 3.8
Mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sind auch $x \in f(x), D^\alpha f, D^\alpha(\hat{f}), \widehat{D^\alpha f}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und

a) $D^\alpha \hat{f} = f[(-2\pi i x)^\alpha f(x)]$ $((-2\pi i x)^\alpha = (-2\pi i)^{|\alpha|} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d})$

b) $(2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) = \widehat{D^\alpha f}(\xi) s$

Beweis
a) $D_{\xi_1}(\hat{f})(\xi) = \int D_{\xi_1}[e^{-2\pi i x \xi}] f(x) dx = \int (-2\pi i x_1) e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$

$$D_{\xi_2} D_{\xi_1}(\hat{f})(\xi) = \int D_{\xi_2}[e^{-2\pi i x \xi}](-2\pi i x_1) f(x) dx = \int e^{-2\pi i x \xi}(-2\pi i x_2)(-2\pi i x_1) f(x) dx$$

b) $\hat{f}(x) = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R e^{-2\pi i x y} f(y) dy$

$$= \lim_{R \to \infty} e^{-2\pi i x_1 y_1} \underbrace{\left(\int_{-R}^R e^{-2\pi x_2 y_2} \cdots \int_{-R}^R e^{-2\pi i x_d y_d} f(y_1 \ldots y_d) dy_2 \ldots dy_d \right)}_{=: I_R(y_1} dy_d$$

$$\overset{P.I.}{=} \lim_{r \to \infty} - \int_{-R}^R \frac{1}{-2\pi i x_1} e^{-2\pi i x_1 y_1} D_{y_1} I_R(y_1) dy_1 + \underbrace{\lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{-2\pi i x_1} I_R(y_1 \right]_{y_1 = -R}^{y_1 = R}}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi i x_1} \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^R e^{-2\pi i x_1 y_1} \left(\int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R e^{-2\pi i x_2 y_2} \ldots e^{-2\pi i x_d y_d} D_{y_1} f(y_1 \ldots y_d) dy_2 \ldots dy_d \right) dy_1$$

$$= \frac{1}{2\pi i x_1} \lim_{R \to \infty} \int_{[-R,R]^d} e^{-2\pi i x \cdot y} D_{y_1} f(y) dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i x_1} \widehat{D_{y_1}(f)}(x)$$

□

Beispiel 3.9: $f[e^{-\pi|x|^2}](\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$

Beweis
$d = 1$: Setze $h(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - e\pi i x\xi} dx$, d.h. $h(\xi) = f[e^{-\pi|x|^2}](\xi)$

$$\overset{3.8}{\Longrightarrow} h'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x) e^{-\pi x^2 - 2\pi i x\xi} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}[e^{-\pi x^2}] d^{-2\pi x\xi} dx = if[\frac{d}{dx}]e^{-\pi x^2}](\xi)$$
$$= i(2\pi i\xi) f[e^{-\pi x^2}](\xi) = -2\pi\xi h(\xi) \Rightarrow h'(\xi) = -2\pi\xi h(\xi)$$

$\Rightarrow \frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = -2\pi\xi \to lnh(\xi) = 2\pi \int_0^x (-\xi) d\xi \Rightarrow h(\xi) = e^{-\pi\xi^2} = f[e^{-\pi x^2}](\xi)$
$d > 1$: $f[e^{-\pi|x|^2}](\xi) = \int e^{-2\pi i\xi x} e^{-\pi|x|^2} = \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_j^2} e^{-2\pi i \xi_j x_j dx_j} dx_j = \prod_{j=1}^{d} e^{-\pi\xi_j^2} = e^{-\pi|\xi|^2}$ □

4 Don't know

Satz 4.3
Sei $v : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ linear. Dann gilt:

$$v \text{ stetig (d.h. } v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \iff \exists N \in \mathbb{N} : |v(f)| \leq C\|f\|_N \text{ für alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Beweis
" $\Leftarrow$ " klar.
" $\Rightarrow$ " Andernfalls gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in \mathcal{S}$ mit $\|f_n\|_n = 1$, aber $|v(f_n)| \geq n$. Setze $g_n = \frac{f_n}{\sqrt{n}}$. Dann

$$\|g_n\|_N \leq n^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ für } n \geq N$$

Aber: $|v(g_n)| \geq \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Also ein Widerspruch zur Stetigkeit von v. $\square$

Beispiele 4.4

a) "$L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$". Sei $u \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar und

$$(*) \quad \int_{|x|\leq R} |h(x)|dx \leq CR^n \text{ für } R > 1 \text{ und ein festes } C < \infty, n \in \mathbb{N} \text{ fest.}$$

Dann wird durch

$$u_n(f) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)f(x)dx$$

eine Distribution $u_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definiert, d.h. wir erhalten eine Einbettung

$$h \in \{ \text{ Fkt. mit } (*)\} \to v_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

Beweis
Benutze 4.3 mit u auf $(*)$

$$|u_n(f)| = |\int h(x)f(x)dx| = |\int h(x)(1+|x|^2)^{-2-n}(1+|x|^2)^{2+n}f(x)dx|$$
$$\leq \underbrace{\int |h(x)(1+|x|^2)^{-2-n}dx}_{\leq C\|f\|_N < \infty} \cdot \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^{2+R}|f(x)|}_{\substack{\leq \|f\|_{4+2R} \\ (N=4+2R)}}$$

$h \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\int_{|x|=R} |h(x)dx \overset{Hlder}{\leq} \left(\int_{|x|\leq R} |h(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} R^{\frac{d}{p'}}$ mit $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. Hier ist $(*)$ erfüllt mit ... $\square$

b) Sei $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und langsam wachsend, d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gibt es $N_\alpha, C_\alpha < \infty$ mit

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{N_\alpha}, x \in \mathbb{R}^d$$

Dann kann man für jedes $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ein Produkt $\psi \cdot v \in S'(\mathbb{R}^d)$ definieren, durch:

$$(\psi \cdot v)(f) \coloneqq u(\psi f) \text{ für alle } f \in S(\mathbb{R}^d)$$

Beweis
z.B.: $\psi f \in \mathbb{R}^d$ $\square$

c) Dirac Distrubution: $\delta_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\delta_x(f) = f(x) \text{ für } f \in S(\mathbb{R}^d)$$

d) $h(x) = e^{|x|^2}$. Dann $u_h \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, denn $f(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$u_h = \int h(x)g(x)dx = \int 1dx = \infty$$

Definition 4.5 (Prinzip der Dualität)
Sei $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ linear, stetig. Dann definieren wir die **duale Abbildung** $T'\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ durch

$$T'u(f) = u(Tf) \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Beweis
$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \Rightarrow Tf_n \xrightarrow{\mathcal{S}} Tf$.
$u(tf_n) \to u(Tf)$, $T'u(f_n) \to T'u(f)$, da T und u stetig nach Definition. $\square$

Definition 4.6
$F\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
$\Rightarrow F'\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ mit $(F'u)(f) = u(\hat{f})$ und $f \in \mathcal{S}, u \in \mathcal{S}'$

Bemerkung 4.7
$h \in L^1(\mathbb{R}^d) \to u_h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$(F'u_h)(f) = u_h(\hat{f}) = \int h(x)\hat{f}(x)dx \underset{\S 3}{=} \int \underbrace{\widehat{h(x)}}_{\substack{hat(*)\\(4.4a)}} f(x)dx = u_{\widehat{h(x)}}(f),\ \forall f \in \mathcal{S}$$

Notation: $F' = F$. Dann $\boxed{F(u_h) = u_{Fh} \text{ bzw. } \hat{u}_h = u_{\hat{h}}}$

Proposition 4.8
$F\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ bijektiv, $(F^{-1}u)(f) = (Fu)(\tilde{f})$, wobei $\tilde{f}(x) = f(-x)$

$$F \cdot F^{-1} = Id_{\mathcal{S}}$$

Dualität: $(F^{-1})'F' = (F \cdot F^{-1})' = Id'_{\mathcal{S}} = Id_{\mathcal{S}}$ (und umgekehrt).

$$\Rightarrow (F')^{-1} = (F^{-1})' \text{ und daher bijektiv}$$

Außerdem $(F^{-1}u)(f) = u(F^{-1}f) \underset{\S 3}{=} u(Ff(-\cdot)) = F'u(F - \cdot) = F'u(\tilde{f})$

Definition 4.9
Sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Definiere $D_u^\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ durch:

$$(D^\alpha u)(f) = (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha f)$$

Bemerkung 4.10

a) $X^\alpha\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\underset{\mathcal{S}'}{D^\alpha} u := (-1)^{|\alpha|}(\underset{\mathcal{S}}{D^\alpha})'$ (im Sinne der Dualität in 4.6), denn $(\underset{\mathcal{S}'}{D^\alpha} u)(f) = (-1)^{|\alpha|}\underbrace{u(D^\alpha f)}_{(\underset{\mathcal{S}}{D^\alpha}}$

b) Sei $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $u_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$.

$$D^\alpha(u_h)(f) = (-1)^{|\alpha|} u_h(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|} \int h(x) D^\alpha f(x) dx \overset{P.I.}{=} \int (D^\alpha h) f(x) dx$$

Also: $\boxed{D^\alpha(u_h) = u_{D^\alpha h}}$

Proposition 4.11

a) Sei $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine langsam wachsende Funktion und $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Dann:

$$D_{x_i}(h \cdot u) = (D_{x_i} h) \cdot u + h \cdot D_{x_i} u$$

b) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$. Dann:

$$D^{\alpha+\beta} u = D^\alpha(D^\beta u)$$

Beweis
Übung. □

Beispiel 4.12

a) $d = 1$, $H(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \geq 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{cases}$. Beh.: $D(u_H) = \delta_0$

Beweis
Für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt:

$$(Du_H)(\phi) = -u_H(D\phi) = -\int H(x)\phi'(x) dx = -\int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0)$$

Außerdem: $(D^\alpha \delta_a)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\delta_a(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi(0)$ □

Vorschau: Zu jedem $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ gibt es eine langsam wachsende stetige Funktion $\psi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, so dass $u = D^\alpha \psi$. (Keine Eindeutigkeit!)

Übungen

1. Übung

2. Übung

3. Übung

Abkürzungsverzeichnis

Beh. Behauptung

Bew. Beweis

bzgl. bezüglich

bzw. beziehungsweise

ca. circa

d. h. das heißt

Def. Definition

etc. et cetera

ex. existieren

Hom. Homomorphismus

i. A. im Allgemeinen

o. B. d. A. ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Prop. Proposition

sog. sogenannte

Vor. Voraussetzung

vgl. vergleiche

z. B. zum Beispiel

zhgd. zusammenhängend

z. z. zu zeigen

Stichwortverzeichnis