Spektraltheorie

Prof. Dr. Lutz Weis

Sommersemester 2016

Karlsruher Institut für Technologie

Vorwort

Dieses Skript wurde im Sommersemester 2016 von Martin Belica geschrieben. Es ist ein inoffizielles Skript und beinhaltet die Mitschriften aus der Vorlesung von Prof. Dr. Weis am Karlsruhe Institut für Technologie sowie die Mitschriften einiger Übungen.

Einleitung

Die Spektraltheorie verallgemeinert die Theorie von Eigenwerten und Normalformen von Matrizen für unendlichdimensionale Operatoren auf Funktionenräumen, wie Differential- und Integraloperatoren. Sie vermittelt eine wesentliche Methodik für viele Anwendungsgebiete, wie partielle Differentialgleichungen, mathematische Physik und numerische Analysis.

Zu den Themen gehören:

- Spektrum und Resolvente linearer (unbeschränkter) Operatoren
- Fouriertransformation und der Funktionalkalkül des Laplace-Operators
- Der Funktionalkalkül selbstadjungierter Operatoren
- Der holomorphe Funktionalkalkül sektorieller Operatoren
- Cauchy-Problem für sektorielle Operatoren

Diese Vorlesung bereitet auf zukünftige Vorlesungen und Seminare im Bereich der deterministischen und stochastischen Evolutionsgleichungen vor.

Erforderliche Vorkenntnisse

Wir setzen ein grundlegendes Verständnis funktionalanalytischer Methoden voraus, wie sie z.B. in den Vorlesungen "Differentialgleichungen und Hilberträumeöder "Funktionalanalysis"vermittelt werden.

Inhaltsverzeichnis

Überblick über die Vorlesung Spektraltheorie

I Kapitel: Fourieranalysis

Motivation:

a) $x \in C_c^2(\mathbb{R}^d) : \Delta x = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2 x(u)} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\Delta : C_c^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ unbeschränkter Operator $(C_c^2(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\Delta), \|x\|_\Delta = \|x\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}$ Ist denn der Operator Δ genau dann abgeschlossen, wenn $(C_c^2(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\Delta)$ vollständig? Nein.

   $\langle \Delta x, y\rangle_{L^2} = \langle x, \Delta y\rangle$, $x, y \in C_c^2$ Δ selbstadjungiert auf $D(\Delta) = H^{2,2}$, part. Integr.

b) Spektralsatz für ΔL: $\exists f : L^2(\mathbb{R}^2 \to L^2(\mathbb{R}^d)$ unitär, sodass $\delta = fMf^{-1}$ mit

$$(Mx)(u) = -|u|^2 x(u) \text{ Multiplikationsoperator}$$

   $D(M) = \{x \in L^2 \colon |u|^2 x(u) \in L^2\}. L^2(\mathbb{R}^d \supset D(M) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ $x \in L^1(\mathbb{R}^d)$: $\hat{x}(u) = (fx)(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i u \cdot v} x(v) dc$ Fouriertransformation

c) Grundlegende Eigenschaften von f:

   - Differentiation und Multiplikation

$$(-2\pi i u)^\alpha f(u) \underset{f}{\to} D^\alpha \hat{f}(v),\ \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

$$D^\alpha f(u) \underset{f}{\to} (2\pi i v)^\alpha \hat{f}(v)$$

   - Faltung $(f * g)(u) = \int f(v-u) g(v) dv$ *todo*
   - Translationen: $f(u+h) \underset{\tilde{f}}{\to} \hat{f}(v) e^{2\pi v \cdot h}$ $F(u) e^{-2\pi i u \cdot h} \xrightarrow{f} \hat{(}v+h)$
   - Stetigkeit von f $f \colon L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$ $f \colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ unitär rcases über beide $f \colon L^p \to L^{p'}, 1 \le p \le 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

II Kapitel: Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren

Motivation:

- Schrödingeroperatpr $A = \Delta + \underbrace{V}_{Potential: Vx(u) = V(u)x(u)}$
- ellip. Operaator: $Ax = \sum_{n,m} \frac{\partial}{\partial u_n} a_{n,m} \frac{\partial}{\partial u_m x(u)}$ wobei $(a_{n,m}) \in M(d,l)$ selbstadjungiert, $A \ge 0$

- Laplace Beltr. Operatoren auf Mannigfaltigkeiten
- Graphenlaplace auf Graphen
- Δ auf Fraktalen

Ist X ein Hilbertraum, $X \subset D(A) \xrightarrow{A} X$ selbstadjungiert **Spektralsatz**: Es gilt (U, μ) und $m \colon U \to \mathbb{C}$ und $J \colon L^2(U,\mu) \to X$ unitärer Operator, sodass

$$A = JMJ^{-1}x, \ x \in D(A)$$

wobei $M \colon L^2(U,\mu) \to L^2(U,\mu), (Mx)(u) = m(u)x(u)$

III Kapitel: Funktionalkalkül für selbstadjungierte Operatoren

Sei $A \in B(X)$ selbstadjunigert, X ein Hilbertraum. Nach II gilt: $A = JMJ^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^2 &= (JMJ^{-1})(JMJ^{-1}) = JM^2J^{-1} \\ A^n &= \ldots = JM^nJ^{-1} \end{aligned}$$

$p(z) = \sum_n a_n z^n, \quad M^n x(u) = m(u)^n x(u)$ $z = A$: $p(A) = \sum a_n A^n = J(\sum_n a_n M^n)J^{-1} = J(p(M))J^{-1}$ $P(M)x(u) = (\sum_n a_n m(u)^n)x(u) = p(m(u))x(u)$ Allgemeine Definition: $f \in B_b(\mathbb{R})$ - beschr. Borel.

$$f(A) = Jf(M)J^{-1}$$

mit $f(M)x(u) = f(m(u))x(u)$.

Eigenschaften des Funktionalkalküls: $f, g \in B_b(\mathbb{R})$

i) $(\underbrace{(f \cdot g)}_{punktweisesProduktvonFunktionen}(A) = \underbrace{f(A) \cdot g(A)}_{KompositionvonOperatoren}$

ii) $\|f(A)\| = \|f\|_{L^\infty(U,\mu)} \underset{\text{stetig}}{\overset{f}{=}} \sup_{u \in \sigma(A)} |f(u)|$

iii) $f \colon U \to \mathbb{C}$ stetig $\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ Kurz: $f \in (B_b, \|\cdot\|_\infty) \to f(A) \in B(X)$ stetiger Algebrenhomomorphismus

Beispiel 1.1

1. $\frac{1}{\lambda - z} - \frac{1}{\mu - z} = \frac{mu - \lambda}{(\lambda - z)(\mu - z)}$ $z = A$: $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$
2. $f_t(z) = e^{-tz}$, $t > 0$ $f_t(z) = e^{-tA} = \sum_{n \geq 9} \frac{-1^n}{n!} t^n A^n$ $e^{-tz}e^{-sz} = e^{-(s+t)z} \to e^{-tA}e^{-sA} = e^{-(s+t)A}$
3. $f_a(z) = z^a, \quad f_a(A) = A^a$ $z^a \cdot z^b = z^{a+b} \to A^a \cdot A^b) A^{a+b}$
4. $f(z) = z^\alpha e^{-zu}$, $f(A) = A^\alpha e^{-tA}$ $\|f(A)\| = \sup_{z>0} |z^\alpha e^{-tz}|$ $f(z) = z^\alpha (\lambda_0 - z)^{-\beta}$, $f(A) = A^\alpha R(\lambda_0, A)^\beta, \|f(A)\| = \sup \left| \frac{z^\alpha}{(\lambda_0 - z)^\beta} \right|$
5. $f = \mathbb{1}_{[a,b]}, f(A)^2 \overset{i)}{=} f^2(A) = f(A)$, d.h. $f(A)$ ist eine Projektion. $\sigma(A) \subset [a,b], c \in (a,b)$ $P_1 = {}_{(a,c]}(A), P_2 = \mathbb{1}_{(c,b)}(A)$ $P_1 + P_2 = I$, $P_1P_2 = 0$ $X_j = P_j(X), j = 1,2$: $X = X_1 \oplus X_2$ $mitA(X_1 \subset X_1$, $A(X_2) \subset X_2$ $A = A_1 \oplus A_2$, $A_1 = A|_{X_1}, A_2 = A|_{X_2}$ $\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2) = \sigma(A)$

Anwendung des Kalküls auf Evolutionsgleichungen:

i) $y'(t) = Ay(t),\ y(0) = y_0$ mit z.B. $A = \Delta$ und $y(t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung. $y(t) = e^{tA}y_0, e^{tA} = \sum_n \frac{1}{n} t^n A^n, e^{tA} = f_t(A), f_t(z) = e^{tz}$

ii) $y'(t) = iAy(t), y(0) = y_0$ $A = \Delta$: Schrödingergleichung $y(t) = e^{itA}y_n$

iii) $y''(t) = Ay(t), y(0) = y_0, y_t(0) = y_1$ $A = \Delta$ Wellengelichung $y(t) = \cos(A^{\frac{1}{2}}t)y_0 + A^{-\frac{1}{2}}\sin(A^{\frac{1}{2}}t)y_1$ $A = \Delta$ Kapitel Fourieranalysis $e^{tA}x(u) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{-(u-v)^2}{2\pi}} f(v)dv$

Eigenschaften der Lösung:

- Stbilität, asymptotisches Vehalten: $y(t) = e^{tA}y_0 \xrightarrow[t\to 0]{} ?$ $\exists \epsilon > 0, \sigma(A) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -\lambda\}$

$$\Rightarrow \|y(t)\| \leq ce^{-\epsilon t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

- Regularität: $\underbrace{\|A^\alpha e^{-tA}y_0\|}_{\|e^{-tA}y_0\|_{D(A^\alpha)}d} \leq c\frac{1}{t^\alpha}$, $t > 0, \alpha > 0$ $A = -\Delta$, $D(A) = H^{2,2}, D(A^n) = H^{2n,2}$,

Abkürzungsverzeichnis

Beh. Behauptung

Bew. Beweis

bzgl. bezüglich

bzw. beziehungsweise

ca. circa

d. h. das heißt

Def. Definition

etc. et cetera

ex. existieren

Hom. Homomorphismus

i. A. im Allgemeinen

o. B. d. A. ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Prop. Proposition

sog. sogenannte

Vor. Voraussetzung

vgl. vergleiche

z. B. zum Beispiel

zhgd. zusammenhängend

z. z. zu zeigen