Spektraltheorie

Prof. Dr. Lutz Weis

Sommersemester 2016

Karlsruher Institut für Technologie

Vorwort

Dieses Skript wurde im Sommersemester 2016 von David Bückel geschrieben und von Martin Belica korrekturgelesen und ärgenzt. Es ist ein inoffizielles Skript und beinhaltet die Mitschriften aus der Vorlesung von Prof. Dr. Weis am Karlsruhe Institut für Technologie sowie die Mitschriften einiger Übungen.

Einleitung

Die Spektraltheorie verallgemeinert die Theorie von Eigenwerten und Normalformen von Matrizen für unendlichdimensionale Operatoren auf Funktionenräumen, wie Differential- und Integraloperatoren. Sie vermittelt eine wesentliche Methodik für viele Anwendungsgebiete, wie partielle Differentialgleichungen, mathematische Physik und numerische Analysis.

Zu den Themen gehören:

- Spektrum und Resolvente linearer (unbeschränkter) Operatoren
- Fouriertransformation und der Funktionalkalkül des Laplace-Operators
- Der Funktionalkalkül selbstadjungierter Operatoren
- Der holomorphe Funktionalkalkül sektorieller Operatoren
- Cauchy-Problem für sektorielle Operatoren

Diese Vorlesung bereitet auf zukünftige Vorlesungen und Seminare im Bereich der deterministischen und stochastischen Evolutionsgleichungen vor.

Erforderliche Vorkenntnisse

Wir setzen ein grundlegendes Verständnis funktionalanalytischer Methoden voraus, wie sie z.B. in den Vorlesungen "Differentialgleichungen und Hilberträumeöder "Funktionalanalysis"vermittelt werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Wiederholung aus der Funktionalanalysis

1.1.1 Abgeschlossene Operatoren

Sei X ein Banachraum, $X \supset D(A) \stackrel{A}{\to} X$ linear auf einem linearen Teilraum $D(A)$ von X. $D(A)$ heißt **Definitionsbereich**.

Definition 1.1.1 (Abgeschlossener Operator) *A heißt abgeschlossen, falls für alle $x_n \in D(A)$, $x_n \to x$ in $||.||_X$, $Ax_n \to y$ in $||.||_y \Rightarrow x \in D(A)$, $Ax = y$.*

Notation: $||x||_A = ||x|| + ||Ax||$, $x \in D(A)$ heißt Graphennorm von A. Also:

$$A : (D(A), ||.||_A) \to (X, ||.||_X)$$

stetig.

Satz 1.1.2 *$A : X \supset D(A) \to X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Graph}(A) = \{(x, Ax) \in X \times X,\ x \in D(A)\}$ ist abgeschlossen in $X \times X \Leftrightarrow (D(A), ||.||_A)$ vollständig normierter Raum.*

Korollar 1.1.3 *$X = D(A)$, A abgeschlossen $\Leftrightarrow A : X \to X$ stetig $\Leftrightarrow A(U_X)$ beschränkt in X, $U_X =$ offene Einheitskugel in X.*

Notation: $B(X)$ ist der Banachraum aller beschränkten/stetigen linearen Operatoren $A : X \to X$ mit der Norm $||A|| = \sup_{x \in U_X} ||Ax|| < \infty$.

Bemerkung 1.1.4 *Sei $D \subseteq X$ ein dichter, linearer Teilraum von X, d.h. $\bar{D} = X$. Sei $A : D \to X$ ein linearer Operator mit $||Ax|| \leq C||x||$ für alle $x \in D$. Dann gibt es* ***genau eine*** *stetige Fortsetzung $\tilde{A} : X \to X$, d.h. $\tilde{A} \in B(X)$, $\tilde{A}|D = A$, $||\tilde{A}|| \leq C$ (Sei $x \in X$ mit $x_n = \lim x_n$, $x_n \in D$. Dann $\tilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$).*

1.1.2 Spektrum und Resolvente

Sei X ein Banachraum, $A : X \supset D(A) \to X$ linearer, abgeschlossener Operator.

Sei gegeben: $\lambda x - Ax = y$,$\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in X$, $x \in D(A)$ ist gesucht. Formal $x = (\lambda - A)^{-1}y$ ist Lösung, falls $(\lambda - A)^{-1}$ existiert.

Definition 1.1.5 *$\lambda \in \rho(A)$ falls $\lambda - A : D(A) \to X$ bijektiv oder äquivalent:*

$$\lambda - A : (D(A), ||.||_A) \to (X, ||.||_X)$$

ist ein Isomorphismus. $\rho(A)$ heißt die ***Resolventenmenge*** *von A. $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ heißt das* ***Spektrum*** *von A.*

$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} : X \to D(A) \subset X$, für ein $\lambda \in \rho(A)$. $R(\lambda, A) \in B(X)$, aber $\mathrm{Bild}(R(\lambda, A)) \subset D(A)$.

Bemerkung 1.1.6 *Fall $A \in B(X)$, $D(A) = X$, dann ist $R(\lambda, A) : X \to X$ ein Isomorphismus.*

Satz 1.1.7

a) $\rho(A)$ ist offen, $\sigma(A)$ abgeschlossen.

b) Falls $A \in B(X)$, dann: $|\lambda| \leq ||A||$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$. Insbesondere: $\sigma(A)$ Kompakt. $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Satz 1.1.8 (Resolventendarstellung)

a) Sei $\lambda_0 \in \rho(A)$, $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{||R(\lambda_0,A)||}$. Dann ist

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, A)^{n+1}$$

analytisch.

b) Sei $A \in B(X)$ und $|\lambda| > ||A||$, dann ist

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n.$$

Satz 1.1.9 (Resolventenregel) *Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt:*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

Für $\mu \to \lambda$:

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2.$$

Beispiel 1.1.10

a) Sei $X = l^p$, $(x_n) \subset \mathbb{C}$.

$$D(A) = \{(x_n) \in l^p : (\sum_n |\lambda_n x_n|^p)^{1/p}\}$$

$A(x_n) = (\lambda_n x_n) \in l^p$ für $(x_n) \in D(A)$.
Diagonaloperator: $\sigma(A) = \{\lambda_n\}$, $\lambda \notin \overline{\{\lambda_n\}}$ ist

$$R(\lambda, A)(x_n) = (\lambda - A)^{-1}(x_n) = (\frac{1}{\lambda - \lambda_n} x_n).$$

b) $X = l^p$, $A(x_n) = (0, x_1, x_2, ...)$ (Rechts-Verschiebeoperator). $\sigma(A) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$.

c) $X = C[0,1]$, $Tf(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$ (Volterraoperator). $\sigma(T) = \{0\}$, $||T|| \neq 0$.

1.1.3 Spektrum und Kompaktheit

Satz 1.1.11 *Sei X ein Banachraum, $A \in B(A)$ kompakt, d.h. $A(U_X)$ ist relativ kompakt in $(X, ||.||)$ (z.B. $A \in \{T : X \to X | \dim \mathrm{Bild}(T) < \infty\}$). Falls $\dim X = \infty$, dann gilt $0 \in \sigma(A)$. $\sigma(A) \backslash \{0\}$ besteht aus einer Folge $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$, die aus Eigenwerten von A besteht, mit endlich dimensionalem Eigenraum* $\mathrm{Kern}(\lambda_n - A)$. *$(\lambda_n)$ ist endlich oder $|\lambda_n| \to 0$.*

Sei ab jetzt X ein Hilbertraum mit $< .,. >$.

Definition 1.1.12 *$(h_n) \subset X$ heißt Orthonormalbasis von X, falls $< h_n, h_m >= \delta_{n,m}$, $\overline{\mathrm{span}(h_n)} = X$.*

Satz 1.1.13 *Jeder seperable Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis* (h_n) *und für alle* $x \in X$ *gilt*

$$\begin{aligned} x &= \sum_n < x, h_n > h_n, \\ ||x||^2 &= \sum_n | < x, h_n > |^2 \end{aligned}$$

Satz 1.1.14 (Spektralsatz) *Für kompakte, selbstadjungierte Operatoren auf einem seperablen Hilbertraum. Sei* A *kompakt, selbstadjungiert, d.h.* $< Ax, y > = < x, Ay >$. *Dann gibt es eine Orthonormalbasis* (h_n) *von* H *und eine Folge* $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ *mit* $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, *sodass*

$$Tx = \sum_n \lambda_n < x, h_n > h_n.$$

Bemerkung 1.1.15

a) λ_n *sind Eigenwerte von* A, *denn* $Th_n = \lambda_n h_n$, $|\lambda_n| \to 0$.

b) $||A|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| = \lambda_1$.

c) $\mathrm{Kern}\, A = \overline{\mathrm{span}}\{h_n : \lambda_n = 0\}$. $\overline{\mathrm{Bild}(A)} = \overline{\mathrm{span}}\{h_n : \lambda_n \neq 0\}$. $X = (\mathrm{Kern}(A)) \oplus \overline{\mathrm{Bild}(A)}$ *(orthogonal).* A *injektiv* $\Leftrightarrow \overline{\mathrm{Bild}(A)} = X \Leftrightarrow \lambda_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

d) $J : l^2 \to X$, $J(e_n) = h_n$ *(*e_n *Einheitsvektor). J ist Isometrie, denn*

$$||\sum \alpha_n e_n||_{l^2} = (\sum |\alpha_n|^2)^{1/2} = ||\sum_n \alpha_n h_n||_X$$

$$\begin{tikzcd} l^2 \arrow[r, "D"] \arrow[d, "J"'] & l^2 \\ X \arrow[r, "A"'] & X \arrow[u, "J^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$D = JJ^{-1}A$, $D(x_n) = (\lambda_n x_n)$ *für* $x = (x_n) \in l^2$. *A ist ähnlich zu einem Diagonaloperator* D *mit* $|\lambda_n| \to 0$.

1.2 Verpasst

1.3 Fourieranalysis

1.3.1 Die Fouriertransformation auf L^1, S und L^2

Definition 1.3.1 *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ setze*

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(\xi))) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$$

mit $x \cdot \xi = \langle x, \xi \rangle$.

Bemerkung: $d = 1,\ f \in L^2[0, \pi] \subset L^2(\mathbb{R})$.

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i n x} f(x) dx = \mathcal{F}(f(n))$$

Klassische Fourier Koeffizienten $f \in L^[0, 2\pi]$ sind die Werte von $\mathcal{F}f(\xi)$ für $\xi = n \in \mathbb{Z}$.

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \text{ Fourierreihen.}$$

Ziel: $\sum \to \int$. Damit folgt $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$.

Proposition 1.3.2 *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $||\mathcal{F}f||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1}$. Es gilt sogar $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, d.h.*

$$\lim_{|x| \to 0} \mathcal{F}f(x) = 0.$$

Beweis: $|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \int |e^{-2\pi i x \xi}||f(x)| dx$. FÜr $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ siehe Übung.

□

Proposition 1.3.3

a) Für die Dilation $f_\delta(x) = f(\delta x)$, $\delta > 0$ fest:

$$f(\delta x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta^{-d} \hat{f}(\delta^{-1} \xi).$$

Beweis durch Substitution $x' = x \cdot \delta$ in der Definition von $\mathcal{F}$.

b) $f(x + h) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi h}$, $h \in \mathbb{R}^d$ fest.

$f(x) e^{-2i\pi x h} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\xi + h)$.

Beweis: b) $\mathcal{F}[f(\cdot + h)](\xi) = \int e^{-2i\pi x \xi} f(x + h) dx = (*)$. Substituiere $x' = x + h$

$$\begin{aligned} (*) &= \int e^{-2i\pi(x' - h)\xi} f(x') dx' \\ &= e^{2\pi i h \xi} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Definition 1.3.4 (Faltung von $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$)

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y) dy$$

Bemerkung: $||f * g||_{L^1} \leq ||f|| \cdot ||g||$.

Proposition 1.3.5

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).$$

Beweis: $\mathcal{F}(f * g)(x) = \int e^{-2i\pi x\xi}(\int f(x-y)g(y)dy)dx$. Fubini liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(x) &= \int e^{-2i\pi y\xi} g(y)(\int e^{-2i\pi(x-y)\xi} f(x-y)dx)dy \\ &= (\int e^{-2i\pi y\xi} g(y)dy) \cdot (\int e^{-2i\pi x\xi} f(x)d(x)) = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

□

Zur Erinnerung: $f \to f * g$ ist eine Glättung.

Definition 1.3.6 *$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ heißt schnell fallend, falls für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ gilt:*

$$||f||_{\alpha,\beta} := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi^\beta (D^\alpha f)(\xi)| < \infty.$$

Notation: $f \in S(\mathbb{R}^d)$ (Raum der schnell fallenden Funktionen/Schwarzraum). $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$, $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} ... D_{x_n}^{\alpha_n}$ und x^α beschreibt das komponentenweise Potenzieren mit α_i.

Bemerkung: Alle Ableitungen gehen schneller gegen Null als jedes Polynom gegen ∞ geht für $|x| \to \infty$, d.h. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\forall m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(I + |x|)^m x^\beta D^\alpha f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Insbesondere: $f \in S(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mathbb{R}^d)$ (Himmelreich für Fubini, Differentiation unter dem Integralzeichen, Lebesgue Konvergenz...).

Beispiel 1.3.7

a) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset S(\mathbb{R}^d)$. *Aber* $\hat{f}(\xi) = \int_K e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, *$K$ kompakt* $= \operatorname{supp} f$.

b) $h(x) = e^{-\pi|x|^2}$, $h \in S(\mathbb{R}^d)$. *Später:* $\mathcal{F}(h) = h$.

Satz 1.3.8 *Mit $f \in S(\mathbb{R}^d)$ sind auch $x \cdot f(x)$, $D^\alpha f$, $D^\alpha \mathcal{F} f$, $\mathcal{F}(D^\alpha f)$ in $S(\mathbb{R}^d)$ und*

a) $D^\alpha \mathcal{F} f = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^\alpha f(x)]$.

b) $(2i\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi)$.

Beweis: a) $D_{\xi_1}(\mathcal{F} f)(\xi) = \int D_{\xi_1}[e^{-2i\pi x\xi}] f(x)dx$

$$D_{\xi_1}(\mathcal{F} f)(\xi) = \int (2i\pi x_1) e^{-2i\pi x\xi} f(x)dx$$

Analog

$$D_{\xi_1} D_{\xi_2} \mathcal{F} f(\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi}(-2i\pi x_2)(-2i\pi x_1) f(x)dx...$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} ... \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi xy} f(y)dy \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_1 y_1} \left(\int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_2 y_2} ... e^{-2i\pi x_d y_d} f(y_1, ..., y_d) dy_2 ... dy_d \right) dy_1 \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{-2i\pi x_2} e^{-2i\pi x_1 y_1} D_{y_1} I_R(y_1) dy_1 + \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{-2i\pi x_2} I_R(y_1) \right]_{y_1=-R}^{R} \\
&= \frac{1}{-2i\pi x_1} \mathcal{F}(Dy_1 f)(x)
\end{aligned}$$

mit $I_R = \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_2 y_2} ... e^{-2i\pi x_d y_d} f(y_1, ..., y_d) dy_2 ... dy_d$.

Beispiel 1.3.9 $\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$, *denn (für* $d = 1$*):*
Setze $h(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2i\pi x\xi} dx$, *d.h.* $h(\xi) = \mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](\xi)$.

$$\begin{aligned}
h'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\pi x) e^{-\pi x^2 - 2i\pi x\xi} dx \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}[e^{-\pi x^2}] e^{-2i\pi x\xi} dx \\
&= i\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx} e^{-\pi x^2}\right](\xi) \\
&= i(2i\pi\xi)\mathcal{F}\left[e^{-\pi x^2}\right](\xi) = -2\pi\xi h(\xi)
\end{aligned}$$

Differentialgleichung: $h'(\xi) = -2\pi\xi h(\xi)$.

$$\frac{h'(\xi)}{h(\xi)} = -2\pi\xi \quad \Rightarrow \quad \ln(h(\xi)) = 2\pi \int_0^x (-\xi) d\xi$$
$$\Rightarrow h(\xi) = e^{-\pi\xi^2} = \mathcal{F}[e^{\pi x^2}](\xi)$$

Für $d > 1$*:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](\xi) &= \int e^{-2i\pi\xi x} e^{-\pi|x|^2} dx \\
&= \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_j^2} e^{-2i\pi\xi_j x_j} dx_j = \prod_{j=1}^{d} e^{-\pi\xi_j^2} \\
&= e^{-\pi|\xi|^2}
\end{aligned}$$

Damit folgt $\mathcal{F}(\exp(-\pi\epsilon^2|x|^2)) = \epsilon^{-d}\exp(-\pi|\xi|^2/\epsilon^2)$.

Satz 1.3.10 $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d)$ *ist bijektiv und*

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \int_{R^d} e^{2i\pi x\xi} \phi(\xi) d\xi.$$

Beweis: Seien $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(\phi) \in S(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ fest:

$$\begin{aligned}
\int e^{2i\pi x\xi}(\mathcal{F}\phi)(\xi)d\xi &= \int \left(\int e^{-2i\pi\xi y}\phi(y)dy\right) e^{2i\pi x\xi}\psi(\xi)d\xi \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int \left(\int e^{2i\pi(x-y)\xi}\psi(\xi)d\xi\right)\phi(y)dy \\
&= \int \mathcal{F}\psi(x-y)\phi(y)dy \\
&= \int \mathcal{F}\psi(y)\phi(x+y)dy
\end{aligned}$$

Wähle $\psi(x) = e^{-\pi\epsilon^2|x|^2}$.

$$\begin{aligned}
\int e^{2i\pi x\xi}(\mathcal{F}\phi)(\xi)e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2}d\xi &= \int \epsilon^{-d}e^{-pi|y|^2}\phi(y+x)dy \\
&\overset{y'=y/\epsilon}{=} \int e^{2i\pi x\xi}\mathcal{F}\phi(\xi)e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2}d\xi \\
&= \int e^{-\pi|y|^2}\phi(x+\epsilon y)dy
\end{aligned}$$

Für $\epsilon >> 0$ folgt mit Lebesgue Konvergenz und

$$\begin{aligned}
\phi(x+\epsilon y) &\overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \phi(x),\ |\phi(x)| \leq C \\
e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} &\overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 1,\ |e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} \leq 1
\end{aligned}$$

Für $\epsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
\int e^{2i\pi x\xi}\mathcal{F}\phi(\xi)d\xi &= \left(\int e^{-\pi|y|^2}dy\right)\phi(x) \\
\mathcal{G}f(x) &:= \int e^{2ß\pi x\xi}f(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

Also $\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathrm{Id}$ und $\mathcal{F}(\mathcal{G}) = \mathrm{Id} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{G}$.

□

Folgerung: $\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \mathcal{F}\phi(-x)$.

Bemerkung Vergleich zu Fourierreihen:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nx}\hat{f}(n), \quad \hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi nx}f(x)dx.$$

Proposition 1.3.11 *Seien $f, g \in S$. Dann sind $f \cdot g$ und $f * g$ wieder $\in S$.*

Beweis: Zeige $f(x)g(x) \in S$, benutze Produktformel.
$D^\alpha(f*g)(x) = \int(D_\alpha f)(x-y)g(y)dy$.

$$\begin{aligned}
(1+|x|)^n D^\alpha(f*g)(x) &= \int(1+|x-y|)^n D^\alpha f(x-y)(1+|y|)^g(y)\frac{(1+|x|)^n}{(1+|x-y|)^n(1+|y|)^n}dx \\
&\leq C\int(1+|y|)^{-m}(1+|y|)^{n+m}g(y)dy
\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "D^\alpha"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & S \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\ S \arrow[r, "M_\alpha"'] & S \end{tikzcd}$$

Mit $M_\alpha f(x) = (2i\pi x)^\alpha f(x)$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "T_g"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & S \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\ S \arrow[r, "M_g"'] & S \end{tikzcd}$$

Mit $T_g f = f * g$, $M_g f = \hat{g} f$.

Bemerkung 1.3.12 (Zur Lösung von Differentialgleichungen (formale Rechnung)) *$(*)$ $(I - D^\alpha)f = g$, g gegeben, f gesucht.*

$$[1 - (2i\pi x)^\alpha]\hat{f}(x) = \hat{g}(x) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(x) = [1 - (2i\pi x)^\alpha]^{-1}\hat{g}(x)$$

$m(x) = 1 - (2i\pi x)^\alpha$. Falls $m(x) \neq 0$.

$$f = [\mathcal{F}^{-1}[(1 - 2i\pi x)^\alpha]\hat{g}(x)]$$

Angenommen $\exists k \in L^1$ mit $\hat{k}(x) = \frac{1}{m(x)}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f &= [\mathcal{F}^{-1}[(1 - 2i\pi x)^\alpha]\hat{g}(x)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{k} \cdot \hat{g}] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\hat{k} * \mathcal{F}^{-1}\hat{g} = k * g \end{aligned}$$

Die Lösung von $(*)$ ist oft durch einen Faltungsoperator gegeben.

1.3.2 Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^d)$

Lemma 1.3.13 *Für $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt mit $< f, g >= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx$.*

a) $< \mathcal{F}f, \mathcal{F}g >=< f, g >$, $\mathcal{F}$ unitär.

b) $||\mathcal{F}f||_{L^2} = ||f||_{L^2}$, $\mathcal{F}$ Isometrie.

Beweis: a) $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} < f, g > &= \int f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int \left(\int e^{2i\pi xy}\mathcal{F}f(y)dy\right)\overline{g(x)}dx \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int \mathcal{F}(y)\left(\int e^{2i\pi xy}\overline{g(x)}dx\right)dy \\ &= \int \mathcal{F}f(y)\int e^{-2i\pi xy}g(x)dxdy \\ &= < \mathcal{F}f, \mathcal{F}g > \end{aligned}$$

b) $< f, f >$ liefert Behauptung.

$\square$

Definition 1.3.14 (der Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^d)$) *Da $S(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, gibt es zu jedem $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ eine Folge $(f_n) \subset S(\mathbb{R}^d)$ mit $||f - f_n||_{L^2} \to 0$.*

Setze $\mathcal{F}f = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n)$ (in L^2), d.h. $\mathcal{F}$ ist die stetige Fortsetzung von

$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d) \text{ auf } L^2(\mathbb{R}^d),$$

denn $||\mathcal{F}f||_{L^2} = ||f||^{L^2}$ für alle $f \in S(\mathbb{R}^d)$.

Achtung: Für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $\int e^{-2i\pi xy} f(y)dy$ nicht immer für fast alle x als Lebesgue-Integral definiert.

Korollar 1.3.15 *Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt:*

a) $< \mathcal{F}f, \mathcal{F}g > = < f, g >$.

b) $||\mathcal{F}f||_{L^2} = ||f||_{L^2}$.

Beweis: $f_n, g_n \in S^n$ mit $f_n \to f$, $g_n \to g$, $f, g \in L^2$. 3.13 und 3.14 liefern Behauptung.

$\square$

Korollar 1.3.16 *Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $T_g f = g * f$. Dann ist*

$$||T_g||_{L^2 \to L^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\hat{g}(x)|.$$

Beweis: $||f * g||_{L^2} = ||\mathcal{F}[f * g]||_{L^2} = ||\hat{f} \cdot \hat{g}||_{L^2}$. Damit folgt

$$||\hat{f} \cdot \hat{g}||_{L^2} = \left(\int |f(x)\hat{\ }\bar{(x)}g|^2 dx\right)^{1/2} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\hat{g}(x)| \cdot ||\hat{f}||_{L^2} = \sup |\hat{g}(x)| \cdot ||f||_{L^2}.$$

Somit $||T_g|| \leq \sup |\hat{g}(x)|$.

$\square$

Bemerkung: $||T_g||_{L^2\to L^2} \leq ||g||_{L^1}$ (Youngsche Ungleichung), denn $\sup |\hat{g}(x)| \leq ||g||_{L^1}$.

1.4 Temperierte Distributionen und die Fouriertransformation

Idee $S'(\mathbb{R}^d)$ soll der Dualraum von $S(\mathbb{R}^d)$ sein.

Wiederholung: Für $N \in \mathbb{N}$ setze $||f||_N = \sup\{|x^\alpha D^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^d, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha|, |\beta| \leq N\}$.

Definition 1.4.1 *Für $f_n, f \in S(R^d)$ gilt $f_n \overset{S}{\to} f \Leftrightarrow ||f - f_n||_N \to 0 \; \forall N \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung: $f_n \xrightarrow{S} f$ ist äquivalent zu $d(f_n, f) \to 0$ für die Metrik

$$d(f,g) = \sum_{N\in\mathbb{N}} 2^{-N} \frac{||f-g||_N}{1+||f-g||_N}$$

und $d(f_n, f) \to 0 \Leftrightarrow ||f - f_n|_N \to 0$ für alle N.

Definition 1.4.2 *$S'(\mathbb{R}^d) = \{u : S(\mathbb{R}^d) \to K,$ linear, stetig bezüglich $f_n \xrightarrow{S} f\}$. $S'(\mathbb{R}^d)$ ist der Dualraum von $S(\mathbb{R}^d)$. Mann nennt ihn auch den Raum der temperierten Distributionen.*

Beispiel 1.4.3

a) *Sei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar und es gebe n, C, sodass $\int_{|x|\le R} |h(x)|dx \le CR^n$ für $R \to \infty$. Dann setze*

$$u_h(f) = \int f(x)h(x)dx.$$

Zu zeigen: $u_h \in S'$. Insbesondere: $L^p(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d)$ für alle p, denn

$$\int_{|x|\le R} |f(x)|d <\le R^{1/p}||f\chi_{|x|\le R}||_{L^p}.$$

b) *Dirac Maß: $\delta_x \in S'(\mathbb{R}^d)$, $\delta_x(u) = u(x)$.*

Satz 1.4.4 *Sei $u : S(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ linear, u stetig, d.h. $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn es ein N gibt, sodass*

$$|u(f)| \le C||f||_N \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^d).$$

Beweis: „$\Leftarrow$“ klar. „$\Rightarrow$“: Andernfalls gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in S$ mit $||f_n||_n = 1$ aber $|u(f_n)| \ge n$. Setze $g_n = f_n/\sqrt{n}$. Dann gilt $||g_n||_N \le n^{1/2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ für $n \ge N$.
Aber $|u(g_n)| \ge \sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$. Also Widerspruch zur Stetigkeit von u.

Beispiel 1.4.5

a) *„$L^p(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d)$“. Sei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar und*

$$(*) \qquad \int_{|x|\le R} |h(x)|dx \le CR^n \text{ für } R > 1$$

für ein festes $C < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann wird durch

$$u_h(f) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)f(x)dx$$

eine Distribution $u_h \in S'(\mathbb{R}^d)$ definiert, d.h. man erhält eine Einbettung von Funktionen h mit $(*)$ nach $u_h \in S'(\mathbb{R}^d)$.

b) *Sei $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und langsam wachsend, d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ gibt es $N_\alpha, C_\alpha \le \infty$ mit*

$$|D^\alpha\psi(x)| \le C_\alpha(1 + |x|)^{N_\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann kann man für jedes $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ ein Produkt $\psi \cdot u \in S'(\mathbb{R}^d)$ definieren durch $(\psi \cdot u)(f) = u(\psi f)$ für $f \in S(\mathbb{R}^d)$.

c) Dirac Distribution: $\delta_x \in S'(\mathbb{R}^d)$. $\delta_x(f) = f(x)$ *für* $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

d) $h(x) = e^{|x|^2}$. *Dann* $u_h \notin S'(\mathbb{R}^d)$, *den* $f(x) = e^{-|x|^2} \in S(\mathbb{R}^d)$

$$u_h(f) = \int h(x)g(x)dx = \int 1dx = \infty.$$

Beweis: a) Benutze 4.4.

$$\begin{aligned} |u_h(f)| &= \int h(x)f(x)dx \\ &= \int h(x)(1+|x|^2)^{-2-n}(1+|x|^2)^{2+n}f(x)dx \\ &\leq \int |h(x)|(1+|x|^2)^{-2-n}dx \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{2+n}|f(x)| \\ &\leq C||f||_N \end{aligned}$$

Für $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt mit Hölder $\int_{|x|\leq R}|h(x)|dx \leq \left(\int_{|x|\leq R}|h(x)|^p dx\right)^{1/p} R^{d/p'}$. Hier ist $(*)$ erfüllt mit $n > d/p'$.
b) z.B. $\psi f \in S(\mathbb{R}^d)$.

□

Definition 1.4.6 (Prinzip der Dualität) *Sei* $T : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d)$ *linear und stetig. Dann definiere die* ***duale Abbildung*** $T' : S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$ *durch* $(U \in S'(\mathbb{R}^d), f \in S(\mathbb{R}^d))$

$$(T'u)(f) = u(T(f)).$$

Bemerkung. $f_n \xrightarrow{S} f \Rightarrow Tf_n \xrightarrow{S} Tf$. $u(Tf_n) \to u(Tf)$, $T'u(f_n) \to T'u(f)$, da T und u stetig und linear nach Definition.

Definition 1.4.7 $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}' : S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$ *mit*

$$(\mathcal{F}'u)(f) = u(\hat{f}), \quad f \in S, \ u \in S'.$$

Bemerkung. $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \to u_h \in S'(\mathbb{R}^d)$. Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$(\mathcal{F}'u_h)(f) = u_h(\hat{f}) = \int h(x)\hat{f}(x)dx \overset{\text{Sec. 3}}{=} \int \hat{h}(x)f(x)dx = u_{\hat{h}(x)}(f), \ \forall f \in S.$$

Also $\mathcal{F}'u_h = u_{\mathcal{F}h}$.
Notation: $\mathcal{F}' \hat{=} \mathcal{F}$. Dann $\boxed{\mathcal{F}(u_h) = u_{\mathcal{F}h},\ \hat{u}_h = u_{\hat{h}}.}$

Proposition 1.4.8 $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$ *ist bijektiv.*

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(f) = (\mathcal{F}u)(\tilde{f}), \ \textit{wobei}\ \tilde{f}(x) = f(-x).$$

Beweis: $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id}_S$. Dualität:

$$(\mathcal{F}^{-1})'\mathcal{F}' = (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1})' = \mathrm{id}_S' = \mathrm{id}_{S'}.$$

$\Rightarrow (\mathcal{F}')^{-1} = (\mathcal{F}^{-1})'$ und damit bijektiv. Außerdem

$$(F^{-1}u)(f) = u(\mathcal{F}^{-1}f) = u(\mathcal{F}f(-\bullet)) = \mathcal{F}'u(f(-\bullet)) = \mathcal{F}'u(\tilde{f}).$$

□

Definition 1.4.9 *Sei* $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. *Definiere* $D^\alpha u$ *durch*

$$(D^\alpha u)(f) = (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha f) \ \textit{und}\ D^\alpha u \in S'(\mathbb{R}^d).$$

Bemerkung:

a) $D^\alpha : S(\mathbb{R}^d) \to S(\mathbb{R}^d)$.

$$D^\alpha u := (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha_S)'u \text{ (im Sinne der Dualität)}$$

denn $(D^\alpha_{S'}u)(f) = (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha f)$.

b) Sei $h \in S(\mathbb{R}^d)$ und $u_h \in S'(\mathbb{R}^d)$.

$$D^\alpha(u_h)(f) = (-1)^{|\alpha|}u_h(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|}\int h(x)D^\alpha f(x)dx \overset{\text{p.I.}}{=} \int (D^\alpha h)(x)f(x)dx.$$

Also: $\boxed{D^\alpha(u_h) = u_{D^\alpha h}.}$

Proposition 1.4.10 *Sei $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine langsam wachsende Funktion, $u \in S'^{\mathbb{R}^d}$. Dann gilt*

$$D_{x_i}(h \cdot u) = (D_{x_i}h) \cdot u + hD_{x_i}u$$

sowie für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$

$$D^{\alpha+\beta}u = D^\alpha(D^\beta u).$$

Beweis: Übung.

□

Beispiel 1.4.11

a) Sei $d = 1$, $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Behauptung: $D(u_H) = \delta_0$, denn für $\phi \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$(Du_h)(\phi) = -u_h(D\phi) = -\int H(x)\phi'(x)dx = \int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0)$$

Außerdem: für δ_a

$$(D^\alpha\delta_a)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha\phi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\phi(0).$$

Vorschau: Zu $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ gibt es eine langsam wachsende, stetige Funktion $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, sodass $u = D^\alpha\psi$.

Proposition 1.4.12 *Für $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gilt:*

a) $\mathcal{F}(D^\alpha u) = (2i\pi\cdot)^\alpha\mathcal{F}u$.

b) $D^\alpha(\mathcal{F}u) = \mathcal{F}((-2i\pi\cdot)^\alpha u)$.

Beweis: a) Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$ erhält man nach Kapitel 3

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}(D^\alpha u)](f) &\overset{\text{Def.}}{=} (D^\alpha u)(\mathcal{F}f) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\mathcal{F}f) \\
&= (-1)^{|\alpha|}u(\mathcal{F}((-2i\pi\cdot)^\alpha f)) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} (-1)^{|\alpha|}(\mathcal{F}u)((-2i\pi\cdot)^\alpha f) \\
&= [(2i\pi)^\alpha\mathcal{F}u](f)
\end{aligned}$$

b) analog.

□

Erinnerung: Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}^d$, $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
(\tau^Y f)(x) &:= f(x-y) \\
(\delta^a f)(x) &:= f(ax) \\
\tilde{f}(x) &:= f(-x)
\end{aligned}$$

Dann folgt mit einfacher Substitution

$$\begin{aligned}
u_{\tau^y g}(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} \tau^Y(g) f dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) f(x) dx \\
&\overset{\text{Subst.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x+y) dx = u_g(\tau^{-y} f) \\
u_{\delta^a g}(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(ax) f(x) dx \\
&\overset{\text{Subst.}}{=} a^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(\frac{1}{a} x) dx \\
&= a^{-d} u_g(\delta^{1/a} f) \\
u_{\tilde{g}}(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(-x) dx \\
&= u_g(\tilde{f})
\end{aligned}$$

Proposition 1.4.13 *Es gelten für $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}^d$, $a > 0$ die Regeln:*

a) $\mathcal{F}(\tau^y u) = e^{-2i\pi yx} \hat{u}$.

b) $\tau^y \hat{u} = \mathcal{F}(e^{2i\pi xy} u)$.

c) $\mathcal{F}(\delta^a u) = a^{-d} \delta^{1/a} \hat{u}$.

d) $\mathcal{F}(\tilde{u}) = \widetilde{\mathcal{F}(u)}$.

Beweis: a) Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned}
[F(\tau^y u)](f) &\overset{\text{Def}}{=} (\tau^y u)(\hat{f}) \\
&\overset{\text{Def}}{=} u(\tau^{-y} \hat{f}) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} u(\mathcal{F}(e^{-2i\pi xy} f)) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \hat{u}(e^{-2i\pi xy} f) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} [e^{-2i\pi xy} \hat{u}](f)
\end{aligned}$$

b), c), d) analog

$\square$

Satz 1.4.14 *Zu $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ existiert eine langsam wachsende Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$, sodass*

$$\begin{aligned} u &= D^\gamma \varphi (= D^\gamma u_\varphi) \\ (u(f) &= (-1)^{|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^\gamma f(x) dx) \end{aligned}$$

Beweis: Idee: Verwende Darstellungssatz von Riesz für L^1.

1. Für $N \in \mathbb{N}$ definiere $S_N := (S(\mathbb{R}^d), ||.||_N)$, wobei
$$||f||_N = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |x^\beta D^\alpha f(x)|$$
und sei S'_N der Dualraum von S_N. Definiert man
$$I_N := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| \leq N\}$$
und $M := \#I_N$ zu $f \in S(\mathbb{R}^d)$ und außerdem
$$\psi_f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad \psi_{f,\alpha}(x) = (1+|x|)^N D^{\alpha+1} f(x), \quad \alpha \in I_N$$
mit $1 = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}_0^d$. Dann ist $\psi_{f,\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in I_N$, d.h. $\psi_f \in L^1(\mathbb{R}^d)^M$. Außerdem ist ψ_f durch f eindeutig bestimmt.

2. Sei nun $u \in S'(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 4.3 ist dann $u \in S'_N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Definiere außerdem $L(\psi_f) := u(f)$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Nach 1. ist dann L wohldefiniert.

   Weiter $|L(\psi_f)| = |u(f)| \leq C||f||_N = C \sup_x \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |x^\beta D^\alpha f(x)$
$$\begin{aligned} |L(\psi_f)| &= |u(f)| \leq C||f||_N \\ &= C \sup_x \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |x^\beta D^\alpha f(x) \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_x (1+|x|)^N |D^\alpha f(x)| \\ &\overset{x_0 = x_{0,\alpha}}{=} C \sum_{|\alpha| \leq N} (1+|x_{0,\alpha})^N |D^\alpha f(x_{0,\alpha}|) \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq N} (1+|x_0|)^N \left(\int_{-\infty}^{x_{0,d}} ... \int_{-\infty}^{x_{0,k+1}} ... \int_{x_{0,k}}^{\infty} ... D^{\alpha+1}(f(y_1, ..., y_d)) dx \right) \\ &\leq C||\psi_f||_{L^1(\mathbb{R}^d)^M} \end{aligned}$$
   Definiere nun $\mathcal{L}^M := \{\psi_f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^M : f \in S(\mathbb{R}^d)\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)^M$. Wegen $\alpha\psi_f + \psi_g = \psi_{\alpha f + g}$ und der Linearität von U ist L linear auf $\mathcal{L}^M$ und nach obigem beschränkt auf $(\mathcal{L}^M, ||.||_{L^1(\mathbb{R}^d)^M})$, d.h. $L \in (\mathcal{L}^M)'$. Nach Hahn-Banach existiert nun eine Erweiterung $\tilde{L} \in (L^1(\mathbb{R}^d)^M)'$ und nach Darstellungssatz von Riesz gilt
$$(L^1(\mathbb{R}^d)^M)' \cong (L^1(\mathbb{R}^d)')^M \cong L^\infty(\mathbb{R}^d)^M.$$
   Damit gilt
$$\begin{aligned} u(f) = \tilde{L}(\psi_f) &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_{f,\alpha} g_\alpha dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^N D^{\alpha+1} f(x) g_\alpha(x) dx \end{aligned}$$

mit $g_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ für $\alpha \in I_N$. Mit mehrfacher partieller Integration kann man dies weiter vereinfachen zu

$$u(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\varphi} D^{\tilde{\gamma}} f dx$$

mit $\tilde{\gamma} = (N+1, ..., N+1)$ und $\tilde{\varphi} =$ Linearkombinationen aus $(1+|x|)^N g_\alpha$ und deren Stammfunktionen. Insbesondere ist $\tilde{\varphi}$ langsam wachsende Funktion. Nochmals partielles Integrieren liefert dann ein stetiges φ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit gewünschter Eigenschaft.

□

1.5 Faltung und Distributionen

Wir begnügen uns damit Distributionen u mit Schwarzfunktionen f zu falten. Die Definition wird motiviert durch

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = u_g(f(x-\cdot)).$$

Definition 1.5.1 *Sei $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ und $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Dann definiere*

$$(f * u)(x) := u(f(x-\cdot)), \; x \in \mathbb{R}^d.$$

Satz 1.5.2 *Sei $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Dann ist die Funktion $x \mapsto (f*u)(x)$ eine langsam wachsende $C^\infty-$Funktion, mit*

$$D(f*u) = (D^\alpha f) * u = f * (D^\alpha u).$$

Beweis: Nach Kapitel 4 existiert zu $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ ein $N \in \mathbb{N}$, $C < \infty$ mit

$$|u(f)| \leq C||f||_N.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |(f*u)(x)| &= |u(f(x-\cdot))| \\ &\leq C \sup_y \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |y^\alpha D^\beta f(x-y)| \\ &= C \sup_y \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} |(x-y)^\alpha D^\beta f(y)| \\ &\leq C \cdot \tilde{C}(1+|x|)^N, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} \geq \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq N} (1+|y|)^N |D^\beta f(u)|$.

Zeige nun

$$D_{x_i}(f*u) = (D_{x_i} f * u).$$

Betrachte dazu den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{n}[(f*u)(x+he_i) - (f*u)(x)] \overset{\text{Def.}}{=} u(\frac{1}{n}[f(x+he_i-\cdot) - f(x-\cdot)])$$

Da jedes $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gleichmäßig stetig (und alle Ableitungen ebenso) ist, folgt für festes $x \in \mathbb{R}^d$ und $N \in \mathbb{N}$.

$$||[\frac{1}{n}f(x+he_i-\cdot) - f(x-\cdot)] - D_{x_i}f(x-\cdot)||_N \to 0 \text{ für } h \to 0.$$

Mit der Stetigkeit von u folgt nun

$$\begin{aligned} D_{x_i}(f * u)(x) &= u(D_{x_i} f(x - \cdot)) \\ &= ((D_{x_i} f) * u)(x) \end{aligned}$$

Wiederholung des Arguments liefert

$$D^\alpha(f * u) = (D^\alpha f) * u).$$

Die letzte Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} (D^\alpha f * u)(x) &= u((D^\alpha f)(x - \cdot)) \\ &= u((-1)^{|\alpha|} D^\alpha (f(x - \cdot)) \\ &= (D^\alpha u)(f(x - \cdot)) = (f * D^\alpha u)(x) \end{aligned}$$

$\square$

Für alternative Darstellungen benötigen wir das folgende

Lemma 1.5.3 *Seien $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$u\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(u - \cdot) g(y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}^d} u(f(y - \cdot)) g(y) dy.$$

Beweis:

1. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei $(Q_m)_{m=1}^{(2N^2)^d}$ die Zerlegung von $[-N, N]^d$ in Würfel der Seitenlänge $1/N$ mit Mittelpunkt y_m. Zeige nun, dass die Riemannsumme $R_N(x) := \sum_{m=1}^{(2N^2)^d} f(y_m - x) g(y_m)|Q_m|$ in $S(\mathbb{R}^d)$ gegen $\int_{\mathbb{R}^d} f(y - x) g(y) dy$ konvergiert, d.h.

   $$||R_N - \int_{\mathbb{R}^d} f(y - \cdot) g(y) dy||_{x,\beta} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} | \sum_{m=1}^{(2N^2)^d} x^\alpha D^\beta (f(y_m - x)) g(y_m) |Q_m| - \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha D^\beta_x (f(y - x)) g(y) dy| \overset{N \to}{\to}$$

   Es gilt zum einen:

   $$\begin{aligned} x^\alpha (-1)^{|\beta|} (D^\beta f)(y_m - x) g(y_m) |Q_m| &- (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{Q}_m} x^\alpha (D^\beta f)(y - x) g(y) dy \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{Q_m} x^\alpha ((D^\beta f)(u_m - x) g(y_m) - (D^\beta f)(y - x) g(y)) dy \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{Q_m} x^\alpha (y_m - y) [\nabla_y (D^\beta f(\cdot - x) g)](\xi) dy = (*) \end{aligned}$$

   für $\xi = y + \theta(y_m - y)$, $\theta \in [0, 1]$. Wegen $|y| \leq |\xi| + \theta |y_m - y| \leq |\xi| + \frac{\sqrt{d}}{N} \leq |\xi| + 1$ für $N > \sqrt{d}$, folgt

   $$|(*)| \leq c_1 \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1 + |x|)^M} \frac{\sqrt{d}}{N} \int_{Q_m} \frac{1}{(1 + |y|)^M} dy$$

   Damit erhält man

   $$\begin{aligned} |D_N(x)| &\leq c_1 \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1 + |x|)^M} \frac{\sqrt{d}}{N} \int_{|y| \leq N} \frac{1}{(1 + |y|)^M} dy + \int_{|y| > N} |x^{|\alpha|} D^\beta f(y - x) g(y) dy \\ &\leq c_1 \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1 + |x|)^M} \frac{\sqrt{d}}{N} \int_{|y|_\infty \leq N} \frac{1}{(1 + |y|)^M} dy + c_2 \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1 + |x|)^M} \int_{|y|_\infty > N} \frac{1}{(1 + |y|)^M} dy \\ &\to 0 \text{ für } N \to 0 \text{ (unabhängig von x)} \end{aligned}$$

2. Mit 1. erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
u\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y-\cdot)g(y)dy\right) &= \lim_{N\to\infty} u(R_N) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{(2N^2)^d} u(f(y_m-\cdot))g(y_m)|Q_M| \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(f(y-\cdot))g(y)dy
\end{aligned}$$

da $y \mapsto u(f(y-\cdot))g(y) \in S(\mathbb{R}^d)$ und damit Riemann-integrierbar

□

Damit erhält man

Proposition 1.5.4 *Für $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$(f*u)(g) = u(\tilde{f}*g)\ \forall g \in S(\mathbb{R}^d)$$

($f*u$ als Distribution aufgefasst).

Beweis: Nach Kapitel 3 gilt $\tilde{f}*g \in S(\mathbb{R}^d)$, d.h. die rechte Seite ist wohldefiniert. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
u(\tilde{f}*g) &= u\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y-\cdot)g(y)dy\right) \\
&\overset{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^d} u(f(y-\cdot))g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (f*u)(y)g(y)dy \\
&= (f*u)(g).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.5 *Für $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$f*(g*u) = (f*g)*u.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
[(f*g)*u](x) &= u((f*g)(x-\cdot) \\
&= u\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y-\cdot)f(y)dy\right) \\
&\overset{5.3}{=} \int_{\mathbb{R}^d} u(g(x-y-\cdot))f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (g*u)(x-y)f(y)dy \\
&= [f*(g*u)](x).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.6 *Für $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt*

a) $\mathcal{F}(f * u) = \hat{f} \cdot \hat{u}$.

b) $\mathcal{F}(f \cdot u) = \hat{f} * \hat{u}$.

Beweis: a) Für $g \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * u)(g) &= (f * u)(\hat{g}) \overset{5.4}{=} u(\tilde{f} * \tilde{g}) \\ (\hat{f} \cdot \hat{u})(g) &= \hat{u}(\hat{f} \cdot g) = u(\mathcal{F}(\hat{f} \cdot g)) = u(\mathcal{F}(\hat{f}) * \hat{g}) = u(\tilde{f} * g). \end{aligned}$$

b) analog.

□

So kommt man schließlich zu einem Dichtheitsresultat:

Satz 1.5.7 *Zu jedem $u \in S'(\mathbb{R}^d)$ existiert eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $f_k \to u$ „im distributiven Sinne", d.h.*

$$u_{f_k}(g) \overset{k\to\infty}{\to} u(g) \ \forall g \in S(\mathbb{R}^d).$$

Beweis: Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi(x) = 1$ auf $B(0,R)$ für ein $R > 0$ und setze $\varphi_k(x) = \varphi(\frac{1}{k}x)$. Zeige zunächst zwei Hilfsbehauptungen. Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k f = f$ in $S(\mathbb{R}^d)$.

2. $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k \mathcal{F}(\varphi_k f) = \hat{f}$ in $S(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: 1. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||\varphi_k f - f||_{\alpha,\beta} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta((\varphi_k(x) - 1)f(x))| \\ &\overset{\text{Leibnitz}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \sum_{\gamma_1=0}^{\beta_1} \dots \sum_{\gamma_d=0}^{\beta_d} \binom{\beta_1}{\gamma_1} \cdot \dots \cdot \binom{\beta_d}{\gamma_d} (D^\gamma(\varphi_k - 1))(D^{\beta\gamma} f)| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left[|x^\alpha(\varphi_k(x) - 1)D^\beta f(x) + \sum_{\gamma\neq 0} \binom{\beta}{\gamma} \frac{1}{k^{|\gamma|}} |x^\alpha (D^\gamma \varphi)(\frac{x}{k}) D^{\beta-\gamma} f(x)| \right] \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha(\varphi_k(x) - 1)D^\beta f(x)| + \frac{1}{k} c_\beta ||\varphi||_N ||f||_N \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nun ist $\varphi_k(x) - 1 = 0$ für $|x| < kR$ und $|x^\alpha D^\beta f(x)| \leq c\frac{1}{|x|} \leq c\frac{1}{kR}$ für $|x| \leq kR$. Damit folgt

$$||\varphi_k f - f||_{\alpha,\beta} \leq \frac{c}{kR} + \frac{1}{k} c_\beta ||\varphi||_N ||f||_N \to 0 \ \ (k \to 0).$$

2. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ beliebig. Nach 1. und wegen der Stetigkeit von $\mathcal{F} : S \to S$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(\varphi_k f) = \hat{f}$$

in $S(\mathbb{R}^d)$ für alle $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Nach 1. und da $\mathcal{F}(\varphi_j f) \in S(\mathbb{R}^d)$ folgt dann auch

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k \mathcal{F}(\varphi_j f) = \mathcal{F}(\varphi_j f)$$

in $S(\mathbb{R}^d)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wähle nun zu $\epsilon > 0$ ein $j_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $||\mathcal{F}(\varphi_j f) - \hat{f}||_{\alpha,\beta} < \epsilon$ und $||\mathcal{F}(\varphi_k f) - \mathcal{F}(\varphi_j f)||_{\alpha,\beta} < \epsilon$ für alle $k, j \geq j_\epsilon$. Dann gilt für $j \geq j\epsilon$

$$\begin{aligned}
||\varphi_k \mathcal{F}(\varphi_k f) - \hat{f}||_{\alpha,\beta} &\leq ||\varphi_k \mathcal{F}(\varphi_k f) - \varphi_k \mathcal{F}(\varphi_j f)||_{\alpha,\beta} \\
&+ ||\varphi_k \mathcal{F}(\varphi_j f) - \mathcal{F}(\varphi_j f)||_{\alpha,\beta} \\
&+ ||\mathcal{F}(\varphi_j f) - \hat{f}||_{\alpha,\beta} \\
&\to 2\epsilon \text{ für } k \to \infty
\end{aligned}$$

□

Sei nun $u \in S'(\mathbb{R}^d)$. Dann definiere

$$f_k := \varphi_k(\hat{\varphi} * u) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ nach Satz 5.2.}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
u_{f_k}(g) &\overset{5.6}{=} \varphi_k \cdot \mathcal{F}(\varphi_k \cdot \mathcal{F}^{-1}(u))(g) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\varphi_k \mathcal{F}(\varphi_k g)) \\
&\to \mathcal{F}^{-1} u(\hat{g}) = u(g) \ (k \to \infty)
\end{aligned}$$

nach Behauptung 2.

□

1.6 Sobolevräume

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \to u_f \in S'$, $u_f(h) = \int f(x)g(x)dx$. Wann gilt $D^\alpha u_f \in S' \Rightarrow D^\alpha u_f \in L^2$?.

Definition 1.6.1 *Für $K \in \mathbb{N}$:*

$$H^K(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : D^\alpha f \in L^2, \forall |\alpha| \le K\}$$
$$\text{genauer } f \in H^\alpha \Leftrightarrow \forall |\alpha| \le K \exists f_\alpha : U - f = D^\alpha u_f$$

mit der Norm

$$||f||_K := \left(\sum_{|\alpha| \le K} ||D^\alpha f||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right)^{1/2}.$$

Bemerkung 1.6.2

a) (schwache Ableitung) Zu $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gibt es ein $f_\alpha \in L^2$, sodass für $h \in S(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\begin{aligned} \int f_\alpha(x)h(x)dx &= D^\alpha(u_f)(h) \\ &= (-1)^{|\alpha|} u_f(D^\alpha h) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int f(x)(D^\alpha h)(x)dx. \end{aligned}$$

b) Die Räume H^K sind vollständig.

c) H^K sind Hilberträume bezüglich

$$< f, g >_K = \sum_{|\alpha| \le K} \int_{\mathbb{R}^d} (D^\alpha f)(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx, \quad < f, f >_K = ||f||^2_K.$$

d) Berechne $||f||_K$ mit Hilfe von $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} ||D^\alpha f||^2_{L^2} &= ||\mathcal{F}(D^\alpha f)||^2_{L^2} \\ &= ||(2i\pi\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)||^2_{L^2} \\ &= (2\pi)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\alpha||\hat{f}(\xi)^2 d\xi \\ \Rightarrow \sum_{|\alpha| \le K} (2\pi)^{|\alpha|} \int |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{|\alpha| \le K} (2\pi)^{|\alpha|} |\xi^\alpha| \right) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \approx (1 + |\xi|^2)^K \end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned} |x^\alpha| &\le 1 + |x|^{2k} \\ (1 + |x|^K)^2 &= (1 + (\sum_d |x_i|^2)^{K/2})^2 \\ &\le (1 + (\sum_{i=1}^d |x_i|^K))^2 \\ &\le C(\sum_{|\alpha| \le K} |x^\alpha|^2) \end{aligned}$$

Also

$$||f||^2_K \cong \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{K/2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, K \in \mathbb{N}.$$

Definition 1.6.3 *Für alle $s \in \mathbb{R}$ definiere den Sobolevraum*

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{R}^d) &= \{f \in S'(\mathbb{R}^d) : (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\} \\ ||f||_{H^s} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} \\ < f,g >_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi \end{aligned}$$

für $s = K \in \mathbb{N} : ||f||_{H^s} \cong ||f||_{H^\alpha}$.

Proposition 1.6.4 *Die Räume $H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in \mathbb{R}$ sind Hilberträume, also insbesondere vollständig. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dich in $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis: $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^d) \to S'(\mathbb{R}^d)$, $H^s \overset{\mathcal{F}|_{H^s}}{\leftrightarrow} L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s)$, Isometrie von H^s auf $L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s)$, wobei $L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s)$ vollständig ist. Somit ist auch H^s vollständig und damit ein Hilbertraum.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi) &\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\to} H^s \\ S(\mathbb{R}^d) &\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\to} S(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

Also liegt $S(\mathbb{R}^d)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^d)$. Elementar: $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ in $S(\mathbb{R}^d)$.

□

Proposition 1.6.5 *$J : H^{-s} \to (H^s)'$, $J(u)(h) = \int \hat{u}(\xi)\hat{h}(\xi)d\xi$ für $u \in H^{-s}$, $h \in H^s$ definiert eine surjektive Isometrie von H^{-s} auf $(H^s)'$ - den Banachraum dual von H^s bezüglich der Dualität*

$$(f,g) = \int \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi \text{ (bilineare Abbildung).}$$

Beweis: Sei $u \in H^{-s}$, $h \in H^s$.

$$\begin{aligned} J(u)(h) &= \int \hat{u}(\xi)\hat{h}(\xi)d\xi \\ &= \int \hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{h}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}d\xi \\ &\leq \left(\int |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{1/2} \cdot \left(\int |\hat{h}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} \\ &= ||u||_{H^{-s}}||h||_{H^s} \end{aligned}$$

Da J stetig gilt $||Ju||_{(H^s)'} \leq ||u||_{H^{-s}}$. Sei nun $u \in H^{-s}$, $||u||_{H^{-s}} = 1$ gegeben. Wähle $g = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s}]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||g||_s &= \left(\int |\hat{u}(1+|\xi|^2)^{-s/2}|^s d\xi\right)^{1/2} \\ &= ||u||_{H^{-s}} = 1 \\ (Ju)(g) &= \int |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi \\ &= ||u||_{H^{-s}} = 1 \\ \Rightarrow ||Ju||_{(H^s)'} &= 1 \text{ für } ||u||_{H^{-s}} = 1 \end{aligned}$$

Somit ist $J : H^{-s} \to (H^s)'$ eine isometrische Einbettung.

Zu zeigen bleibt, J ist surjektiv. Zu $v \in (H^s)'$ gibt es ein $g \in H^s$ mit $v(h) =< h, g >_{H^s}$ nach Riesz.

$$v(h) = \int \hat{h}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}(1 + |\xi|^2)^s d\xi$$

für alle $h \in H^s$. Wähle $u = \mathcal{F}^{-1}[\overline{\hat{g}(\xi)}(1 + |\xi|^2)^s]$. Dann:

$$\begin{aligned} ||u||_{H^{-s}} &= ||\bar{g}||_{H^s} = ||g||_{H^s} \\ J(u)(h) &= < h, g >_s = v(h), \ \forall h \in H \end{aligned}$$

□

Proposition 1.6.6 *Ist $s < t$, so ist $H^t \subset H^s$.*

Beweis: Da $(1 + |\xi|^2)^s \leq (1 + |\xi|^2)^t$.

□

Satz 1.6.7 (Sobolevscher Einbettungssatz) *Sei $s > d/2$. Dann gilt*

a) $H^s \subset C_b(\mathbb{R}^d)$.

b) $H^{s+K} \subset C_b^K(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: a) Für $u \in S(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2i\pi x\xi}(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\hat{u}(1 + |\xi|^2)^{s/2} d\xi \\ &\leq \left(\int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2} \left(\int |\hat{u}|^2(1 + |\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} \end{aligned}$$

mit $\left(\int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2} \leq \infty$ und $\left(\int |\hat{u}|^2(1 + |\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} = ||u||_{H^s}$.

b) $|\alpha| \leq K$, $u \in H^{s+K} \Rightarrow D^\alpha \in H^s$, wende nun a) an $\Rightarrow$ Beh.

□

Korollar 1.6.8 *Sei $s > d/2$, dann gilt: Der Raum der endlichen Maße $M(\mathbb{R}^d) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.*

Bemerkung: $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$, $u_\mu \in S'(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} u_\mu(h) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x) d\mu(x) \\ \mu \in M(\mathbb{R}^d) &\Rightarrow u_\mu \in H^{-s}(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |u_\mu(h)| &= |\int h(x) d\mu(x)| \\ &\leq ||h||_{C_b(\mathbb{R}^d)} ||\mu||_{M(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq ||h||_{H^s} \cdot ||\mu||_{M(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Also: $u_\mu \in (H^s)'$, $||u_\mu||_{(H^s)'} \leq ||\mu||_{M(\mathbb{R}^d)}$, d.h. $u_\mu \in H^{-s}$.

z.B. $\delta_x \in H^{-s}$, $s > d/2$, $x \in \mathbb{R}^d$, denn $h \in H^s$, $h \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $\delta_x(f) = f(x)$.

Satz 1.6.9 *Sei $s < t$ (d.h. $H^t \subseteq H^s$), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^t$ und $||u_n||_{H^t} \leq 1$ und $\operatorname{supp}(u_n) \subset U$, $U \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Dann hat (u_n) eine in H^s konvergente Teilfolge.*

Ergänzung zur Einbettung. $H^t \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ für $t > s$.

Satz 1.6.10 (Kompakte Einbettung auf beschränkten Mengen) *Sei $u_n \subset H^t$, $||u_n||_{H^t} \leq C$, und für ein $M < \infty$ $\operatorname{supp} u_n \subset B(0, M)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann hat u_n eine Teilfolge, die in $H^s(\mathbb{R}^d)$ konvergiert für $s < t$.*

Beweis: 1. Schritt: $\hat{u}_n|_K, n \in \mathbb{N}$ ist relativ kompakt in $C(K)$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^d$. Denn: wähle $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \equiv 1$ auf $B(0, m)$.

$$\begin{aligned}
D^\alpha \hat{u}_n &= D^\alpha \mathcal{F}(\psi u_n) \\
&= D^\alpha [\hat{\psi} * \hat{u}_n] \\
&= (D^\alpha \hat{\psi}) * \hat{u}_n, \qquad \text{also} \\
|D^\alpha \hat{u}_n(\xi)| &\leq \int D^\alpha \hat{\psi}(\xi - \eta) \hat{u}_n(\eta) d\eta \\
&\leq \left(\int (1 + |\eta|^2)^{-t} |D^\alpha \hat{\psi}(\xi - \eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \left(\int |\hat{u}_n(\eta)|^2 (1 + |\eta|^2)^d \eta \right)^{1/2} \\
&=: f_\alpha(\xi) \cdot ||u_n||_{H^t} \\
&\leq C f_\alpha(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^d),
\end{aligned}$$

denn $(1 + |\eta|^2)^{-1} \in L^\infty$, $\xi \to |D^\alpha \hat{\psi}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (Youngsche Ungleichung).

Da $\hat{u}_n|_K$ beschränkt und gleichgradig stetig (denn $D^\alpha f_n$ gleichmäßig beschränkt), folgt aus Azela-Ascoli, dass $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergente Teilfolgen hat.

2. Schritt: u_n hat eine konvergente Teilfolge in H^s. Denn: Zu $\epsilon > 0$ wähle ein $0 < R < \infty$, sodass

$$(1 + R^2)^{s-t} \leq \frac{\epsilon}{4c^2}$$

Für $K = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq R\}$ wähle nach Schritt 1 eine Teilfolge von (u_n) (wieder u_n genannt), sodass $\hat{u}_n|_K$ gleichmäßig in $C(K)$ konvergiert. Dann

$$\begin{aligned}
||u_n - u_m||^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}_n(\xi) - \hat{u}_m(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \\
&= \int_{|\xi| \leq R} ... + \int_{|\xi| > R} ...
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi| > R} |\hat{u}_n(\xi) - \hat{u}_m(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi &\leq \sup_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2)^{s-t} ||u_n - u_m||_{H^t}^2 \\
&\leq (1 + R^2)^{s-t} (||u_n||_{H^t} + ||u_m||_{H^t}) \leq \epsilon
\end{aligned}$$

nach Wahl von R und

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi| \leq R} |\hat{u}_n(\xi) - \hat{u}_m(\xi)^2 (1 + |\xi|)^s d\xi &\leq \int_{|\xi| \leq R} (1 + |\xi|^2)^s d\xi \sup_{\xi \in K} |\hat{u_n}(\xi) - \hat{u}_m(\xi)|^2 \\
&= C_1 \cdot \text{ Konst } \cdot ||\hat{u}_n - \hat{u}_m||_{C(K)} \overset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Proposition 1.6.11 (Bernsteinsche Ungleichung) *Für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq \{\xi : |\xi| > R\}$ gilt:*

a) f hat eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C}^d$.

b) Für alle $s < r$ gilt $f \in H^r$ und

$$||f||_{H^r} \leq (1+R)^{r-s}||f||_{H^s}.$$

Beweis: a) Für $(z_1, ..., z_d) \in \mathbb{C}^d$ setze

$$F(z_1, ..., z_d) = \int_{|\xi| \leq R} \exp\left[2i\pi\left(\sum_{j=1}^{d} z_j \xi_j\right)\right] \hat{f}(\xi_1, ..., \xi_d) d\xi_1 ... \xi_d.$$

Nach der Umkehrformel: $F(x_1, ..., x_d) = f(x_1, ..., x_d)$ für $x_1, ..., x_d \in \mathbb{R}$. Also ist F eine Fortsetzung von f von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{C}^d$. Zu zeigen: F ist partiell komplex differenzierbar nach $z_1, ..., z_d$. Sei $w = w_1, ..., w_d \in \mathbb{C}^d$ fest. Auf der Kugel $K = \{z \in \mathbb{C}^d : |z - w| \leq 1\}$ ist $\exp\left[2i\pi\left(\sum_{j=1}^{d} z_j \xi_j\right)\right]$, $|\xi| \leq R$, $z \in K$ gleichmäßig beschränkt. Also ist Differentiation nach $w_1, ..., w_d$ unter dem Integral erlaubt und die Behauptung folgt.

b)

$$\begin{aligned} ||f||_{H^r}^2 &= \int |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^r d\xi \\ &\leq \sup_{|\xi| \leq R} (1+|\xi|^2)^{r-s} \int_{|\xi| \leq R} |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2) d\xi \\ &\leq (1+R^2)^{r-s} ||f||_{H^s}^2 \\ &\leq (1+R)^{2(r-s)} ||f||_{H^s}^2 \end{aligned}$$

□

1.7 Der Funktionalkalkül des Laplace Operators

Definition 1.7.1 (des Laplace Operators) *Für $f \in S(\mathbb{R}^d)$: $\Delta f(\cdot) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(\cdot)$.*

$$\begin{array}{ccc} S(\mathbb{R}^d) & \xrightarrow{\Delta} & S(\mathbb{R}^d) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}} \\ S(\mathbb{R}^d) & \xrightarrow[M]{} & S(\mathbb{R}^d) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta f)(\xi) &= \sum_{j=1}^{d} \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f\right)(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^{d} (2i\pi)^2 \xi_j^2 (\xi) \\ &= -(2\pi)^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

$$Mg(\xi) = -(2\pi)^2 |\xi|^2 g(\xi)$$

$$\boxed{\Delta = \mathcal{F}^{-1} \circ M \circ \mathcal{F}.}$$

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^d), \;\; f \in D(A): \;\; \mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = -(2\pi)^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi).$$

Bemerkung 1.7.2

a) *Der ungewohnte Faktor* $(2\pi)^2$ *kommt von der Definition der Fouriertransformation durch* $e^{\underline{2\pi} i\xi x}$.

b) $H^2 = \{f \in S' : \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \in L^2(\mathbb{R}^d), i = 1, 2\}$

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f$$

ist in Ordnung, falls man $\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}$ *als distributionelle oder* ***schwache*** *Ableitungen versteht.*

$$\int \varphi(x) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x)\right] dx = (-1)^2 \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi(x)\right) dx$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

c) $\Delta : H^2 \to L^2$ *ist stetig und mit der Graphennorm*

$$||f||_{H^2} \cong ||f||_{L^2} + ||\Delta f||_{L^2}$$

ist Δ *insbesondere auf* L^2 *ein abgeschlossener Operator, d.h.* $f_n \in D(A)$, $f_n \to f$ *in* L^2, $\Delta f_n \to g$ *in* $L^2 \Rightarrow f \in D(A)$, $\Delta f = g$.

Beweis:

$$\begin{aligned} ||f||_{H^2}^2 &= \int |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^2 d\xi \\ &\approx \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int \left[|\hat{f}(\xi)||\xi|^2\right]^2 d\xi \\ &\approx ||f||_{L^2}^2 + ||\Delta f||_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Also: $||\Delta u||_{L^2} \leq ||u||_\Delta \approx ||u||_{H^2}$ - Stetigkeit.

□

Bemerkung 1.7.3 (Ziele des Funktionalkalküls) *Definition neuer Operatoren, z.B.*

- $e^{-t\Delta} \Rightarrow$ *Lösung der Wärmeleitungsgleichung:* $y'(t) = \Delta y(t)$, $y(0) = y_0$.
- $e^{-it\Delta} \Rightarrow$ *Lösung der Schrödingergleichung* $y'(t) = (i\Delta)y(t)$.
- $\sin(t\Delta^{1/2})$, $\cos(t\Delta^{1/2}) \Rightarrow$ *Lösung der Wellengleichung* $y''(t) = \Delta y(t)$.

Berechnen der Operatorennormen, z.B.

$$||\Delta^n e^{-z\Delta}|| = ?$$

Übertragung von Funktionalgleichungen in Operatorengleichungen, z.B.

$$e^{-t\lambda} e^{-s\lambda} = e^{-(s+t)\lambda} \Rightarrow e^{-t\Delta} e^{-s\Delta} = e^{-(s+t)\Delta}?$$

Definition 1.7.4 *Der Funktionalkalkül des Laplaceoperators ist eine Abbildung*

$$\Phi : B_b(\mathbb{R}_+) \to B(L^2(\mathbb{R}^d))$$

mit

(i) $\Phi(\varphi+\phi) = \Phi(\varphi)+\Phi(\phi)$. $\Phi(\varphi\cdot\phi) = \Phi(\varphi)\circ\Phi(\phi)$. ***Algebrahomomorphismus*** *von* $B_b(\mathbb{R}_+)$ *- punktweise Operationen - nach* $B(L^2)$ *- Operatorverknüpfungen.*

(ii) $||\Phi(\varphi)|| = ||\varphi||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. ***Beschränktheit*** *des Kalküls.*

(iii) Sei $\varphi_n(t)| \leq 1$, $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$, $n \to \infty$ *für alle* $t > 0$. *Dann gelte*

$$\Phi(\varphi_n)f \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(\varphi)f,\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Konvergenzeigenschaft*.*

(iv) Für $r_\mu(t) = \frac{1}{\mu-t}$ *folgt* $\Phi r_\mu = R(\mu, \Delta)$.

Notation: Schreibe $\Phi(\varphi) := \varphi(\Delta)$.
Idee zur Konstruktion von I:

$$-\Delta = \mathcal{F}^{-1}M\mathcal{F}$$

mit $Mg(\xi) = (4\pi^2 \cdot |\xi|^2)g(\xi)$, $m(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2$,

$$D(M) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) :\ m \cdot g \in L^2,\ \text{d.h. } |\xi|^2 g(\xi) \in L^2\}.$$

Konstruiere zuerst

Definition 1.7.5 (Funktionalkalkül für M)

$$M^2 g = M(Mg) = M(m \cdot g) = m^2 g, M^g = (m^n)g.$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \sum a_n \lambda^n, \\ p(M)g &= \left(\sum a_n M^n\right) g = \left(\sum a_n m^n\right) g = [p(m)]\, g \end{aligned}$$

wobei $p(m)(u) = p(m(u))$ *(Komposition von Funktionen).*
Sei $\varphi \in B_b(\mathbb{R}_+)$*:*

$$\Phi_M(\varphi)g = \varphi(M)g = \boxed{\varphi(m)}g,\ \varphi(m) = \varphi \circ m$$

Nachweis der Eigenschaften (i)-(iv) für M*:* (i)

$$\begin{aligned} \varphi(M)g + \psi(M)g &= (\varphi \circ m)g + (\psi \circ m)g \\ &= [(\varphi + \psi) \circ m]\, g \\ &= (\varphi + \psi)(M)g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\varphi(M) \cdot \psi(M)]\,(g) &= \varphi(M)\,[\psi(M)g] \\ &= \varphi(M)\,[(\psi \circ m)g] \\ &= (\varphi \circ m)(\psi \circ m)g \\ &= [(\varphi \cdot \psi) \circ m]\, g \\ &= (\varphi \cdot \psi)(M)g \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} ||\varphi(M)||_{B(L^2)} &= \int |\varphi(M)g(x)|^2 dx \\ &= \int |\varphi(m(x))g(x)|^2 dx \\ &= ||m \circ \varphi||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &= \operatorname*{ess\ sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(m(x))| \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda > 0} |\varphi(\lambda)| \end{aligned}$$

(iii) Zu zeigen:

$$\varphi_n(M)f \quad \to \quad \varphi(M)f \text{ in } L^2(\mathbb{R}^d).$$

$$|\varphi(M)f - \varphi_n(M)f||_{L^2}^2 \quad = \quad \int |\varphi(m(x)) - \varphi_n(m(x))|^2 |f(x)|^2 dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

nach Satz von Lebesgue, da $|\varphi(m(x)) - \varphi_n(m(x))|^2 \to 0$ für $n \to \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.
(iv) Zu zeigen:

$$r_\mu(M) \quad = \quad R(\mu, M)$$

$$\begin{aligned} R(\mu, M) &= (\mu - M)^{-1}, \\ (\mu - M)g &= (\mu - m(x))g(\cdot) \\ \Rightarrow (\mu - M)^{-1}g &= (M - m(\cdot))^{-1}g(\cdot) = r_\mu(M) \end{aligned}$$

□

Definition 1.7.6 (Konstruktion des Funktionalkalküls für Δ)

$$\varphi(-\Delta) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(M)\mathcal{F}.$$

Nachprüfen der Eigenschaften von Φ: (i)

$$\begin{aligned} \varphi(-\Delta)\psi(-\Delta) &= \left(\mathcal{F}^{-1}\varphi(M)\mathcal{F}\right)\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi(M)\mathcal{F}\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\varphi(M)\psi(M)]\mathcal{F} \\ &= (\varphi \cdot \psi)(-\Delta) \end{aligned}$$

(ii)

$$||\varphi(-\Delta)|| \overset{\text{Isometrien}}{=} ||\varphi(M)|| = ||\varphi||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \varphi_n(M)f &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(M)f,\ f \in L^2 \\ \Rightarrow \varphi_n(-\Delta)g = \mathcal{F}^{-1}[\varphi_n(M)(\mathcal{F}g)] &\quad \to \quad \mathcal{F}^{-1}[\varphi(M)(\mathcal{F}g)] \text{ da } \mathcal{F} \text{ stetig.} \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} (\lambda - M)r_\mu(M) &= \text{id} \\ \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[(\lambda - M)r_\mu(M)]\mathcal{F} &= \text{id} \\ \Rightarrow R(\lambda, -\Delta) &= r_\mu(-\Delta) \end{aligned}$$

□

Beispiel. Definition von $-(-\Delta)^{1/2}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(-(-\Delta)^{1/2}f)(\xi) &= 2\pi|\xi|\hat{f}(\xi): \\ (-(-\Delta))^2 &= -\Delta \end{aligned}$$

1.8 Das Cauchyproblem für die Schrödinger- und die Wellengleichung

Motivation 1.8.1

$$y'(t) = a(y(t)) + f(t),\ y(0) = y_0,$$

wobei $a \in \mathbb{R},\ f \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds.$$

Bemerkung 1.8.2 (Cauchyproblem für die Schrödingergleichung)

$$(+)\ u'(t) = i\Delta u(t) + f(t),\ u(0) = y_0,$$

wobei $y_0 \in L^2(\mathbb{R}^d),\ f(t) \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \int_0^\infty ||f(t)||_{L^2}dt < \infty,\ A = i\Delta.$

Notation: $\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}(u(t,\cdot))(\xi)$ für festes $t \in \mathbb{R}$ heißt partielle Fouriertransformation bezüglich x.

Anwendung der partiellen Fouriertransformation auf (+).

$$\partial_t\hat{u}(t,\xi) = i(-4\pi^2|\xi|^2)\hat{u}(t,\xi) + \hat{f}(t,\xi) \tag{1.2}$$

Für festes $\xi \in \mathbb{R}^d$ ist das eine gewöhnliche Differentialgleichung wie in 8.1. Die Lösung von (1) für festes ξ ist

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 i|\xi|^2}\hat{y}_0(\xi) + \int_0^\infty e^{-4i\pi^2(t-s)|\xi|^2}\hat{f}(s,\xi)ds \tag{1.3}$$

Mit der inversen partiellen Fouriertransformation bezüglich ξ (t fest) erhält man

$$u(t,\xi) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4i\pi^2|\xi|^2}\hat{y}_0(\xi)\right](x) + \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-4i\pi^2|\xi^2(t-s)}\hat{f}(x,\xi)\right]ds \tag{1.4}$$

wobei im letzten Ausdruck mit Hilfe von Fubini die Integration und $\mathcal{F}^{-1}$ vertauscht wurden. Mit Hilfe des Funktionalkalküls kann man (3) interpretieren als

$$\boxed{u(t) = e^{it\Delta}y_0 + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}f(s)ds,} \tag{1.5}$$

denn

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{it\Delta}y_0)(\xi) &= e^{itm(\xi)}\hat{y}_0(\xi),\quad m(\xi) = 4\pi|\xi|^2 \\ &= e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{y}_0(\xi) \end{aligned}$$

Proposition 1.8.3 *Die Operatoren* $T(t) = e^{it\Delta}$ *erfüllen:*

(i) $T(t+s) = T(s)T(t),\ t,s \in \mathbb{R}.$

(ii) $T^{-1}(t) = T(-t) = T(t)^*$, *d.h. die* $T(t)$ *sind eine unitäre Gruppe in* $B(L^2)$. $||T(t)|| = 1.$

(iii) $T_t f \overset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ *in* L^2, $f \in L^2$.

(iv) Für $f \in D(\Delta)$ *gilt:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)-I}{t} f = i\Delta f, \quad \frac{d}{dt} e^{it\Delta}|_{t=0} f = i\Delta f.$$

Beweis: (i)

$$\begin{aligned} T(t) &= \varphi_t(-\Delta),\ \varphi_t(x) = e^{-i\lambda t} \\ \varphi_t(\lambda)\varphi_s(\lambda) = \varphi_{s+t}(\lambda) &\Rightarrow T(t)T(s) = T(t+s) \\ \varpi_t(\lambda)\cdot\varphi_{-t}(\lambda) = 1 &\Rightarrow T(t)\cdot T(-t) = \mathrm{id} \end{aligned}$$

(ii)

$$||T(t)|| = \sup_{\lambda>0} |e^{i\lambda t}| = 1.$$

(iii)

$$|\rho_t(\lambda)| \le 1, \varphi_t(\lambda) \to 1 \Rightarrow T(t)f \to T(0) = \mathrm{id}\,.$$

(iv) Da $f \in D(\Delta)$, ist $(i\Delta)f = g \in L^2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{-i\lambda t}(e^{-i\lambda t}-1) &\to 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{t}(e^{i\lambda\Delta}-I)(i\Delta)^{-1}g &\to g \\ \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{(T(t)-I)}{t} f &= i\Delta f. \end{aligned}$$

Funktionalkalkül des Laplace: $\phi(-\Delta)f = F^{-1}[\phi(4\pi^2|\xi|^2\hat{f}(\xi)], \phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ beschr. Borel. Cauchyproblem für die Schrödingergleichung:

$$\begin{cases} u_t(t,x) & = i\Delta_x u(t,x) + f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

mit $u_0 \in S(\mathbb{R}^d), f\colon \mathbb{R}_+ \to S(\mathbb{R}^d), \int_0^\infty \|f(t)\|_{L^1} dt < \infty$
Lsg.: $u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$

$$T(t) = e^{it\Delta},\ \text{d.h. } \widehat{T(t)f}(\xi) = e^{it\cdot(4\pi^2|\xi|^2)}\hat{f}(\xi)$$

$T(t)$ unitäre Gruppe auf $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.8.3 $T(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_t(x-y)f(y)dy,\ t>0$ *für* $f \in S(\mathbb{R}^d)$, *wobei:* $k_t(x) = (t\pi^2 it)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}}$

Beweis: $f \in S(\mathbb{R}^d), k_t \in S'(\mathbb{R}^d)$ $(|k_t(x)| = |(4\pi^2 t)^{-\frac{d}{2}}|)$
d.h. $k_t * f \in S'(\mathbb{R}^d)$ und $(k_t * f)^\wedge = \hat{k_t}\cdot\hat{f}$, siehe § über Faltung von Distributionen.

Andererseits: $\widehat{T(t)f}(\xi) = e^{-it4\pi^2|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$. Z.z.: $\hat{k_t}(\xi))e^{-it4\pi^2|\xi|^2}$
Bekannt: $\left(e^{-\pi|x|^2}\right)^\wedge(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. Mit Dilatation: $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{u}}$ folgt:

$$\left(u^{-\frac{d}{2}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{u}}\right)^\wedge(\xi) = e^{-\pi u|\xi|^2}$$

Mit $u = 4\pi s$: $\left((4\pi s)^{-\frac{d}{2}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{4\pi s}}\right)^{\wedge} = e^{-4\pi^2 s|\xi|^2}$ $(*)$

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \int_{\mathbb{R}^d} (4\pi z)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4z}} \hat{f}(x)dx, \quad l_s(x) = (4\pi s)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4s}} \\ F_2(z) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi^2 z|\xi|^2} f(\xi)d\xi \end{aligned}$$

wobei $z = s + it$ mit $s > 0$, $t \in \mathbb{R}$.
F_1 und F_2 sind analytisch auf $\mathbb{C}_+ = \{s + it | s, t \in \mathbb{R}, s > 0\}$ und $F_1(s) = F_2(s)$ für $s > 0$, $t = 0$, denn:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_{\mathbb{R}^d} l_s(x)\hat{f}(x)fx \int_{\mathbb{R}^d} \hat{l_s}(\xi)f(\xi)d\xi \\ &\overset{(*)}{=} F_2(s) \end{aligned}$$

Also $F_1(s+it) = F_2(s+it)$, $t \in \mathbb{R}$ fest. $F_1(it) = \lim_{s\to\infty} F_1(s+it) = \lim_{s\to 0} F_2(s+it) = F_2(it)$. Damit

$$\hat{k_t}(f) = k_t(\hat{f}) = \int e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{f}(\xi)d\xi, \quad F_1 = F_2 \text{ auf } i\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \hat{k_t}(\xi) \overset{\wedge}{=} e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}$$

□

Korollar 1.8.4 $T_t\colon L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R})$ *und* $\|T_t\|_{L^1\to L^\infty} \leq (4\pi^2|t|^2)^{-\frac{d}{2}}$

Beweis:

$$|T_t f(x)| \leq \int \underbrace{|k_t(x-s)|}_{=(4\pi^2|t|)^{-\frac{d}{2}}} |f(s)|ds = (4\pi^2|t|)^{-\frac{d}{2}} \|f\|_{L^1} \quad \forall x$$

□

1.9 Wellengleichung

Motivation 1.9.1 *$u''(t) = -au(t) + f(t)$ mit $u(0) = u_0, u_t(0) = u_1$, $a > 0$ (1) hat die Lösung:*

$$u(t) = u_0 cos(\sqrt{a}t) + \frac{u_1}{\sqrt{a}} sin(\sqrt{a}t) + \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^t sin(\sqrt{a}(t-s))f(s)ds$$

Wellengleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = \Delta_x u(t,x) + f(t,x) \\ mit\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x) \end{array}\right\} (2),$$

mit $u_0, u_1 \in S(\mathbb{R}^d), f(t) \in S(\mathbb{R}^d), \int_0^\infty \|f(t)\|_{L^1}dt < \infty$ Für t fest, partielle Fouriertransformation in x:

$$\xi \mapsto \hat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\xi\cdot x}u(t,x)dx$$

Wende part. Fouriertransformation auf (2) an: t fest, $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(t,\xi) = 4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(t,\xi) + \hat{f}(t,\xi) \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi) \end{array}\right\} (3),$$

Sei $\xi \in \mathbb{R}^d$ fest und betrachte (3)für jedes ξ als eine gewöhnliche Differentialgleicung für die Funktion $t \mapsto \hat{u}(t,\xi)$. Nach (1) gilt dann:

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\cos(2\pi|\xi|(t-s))\hat{f}(s,\xi)ds \qquad (4)$$

Das ist die Lösung von (3) für festes ξ. Nun wenden wir für festes t die inverse partielle Fouriertransformation bezüglich ξ an. Dann folgt aus (4):

$$\begin{aligned} u(t,x) = F^{-1}\left[\cos(2\pi|\xi|t)\hat{u}_0(\xi)\right](x) \quad &+ \quad F^{-1}\left[\sin(2\pi|\xi|t)\frac{1}{2\pi|\xi|}\hat{u}_1(\xi)\right](x) \\ &+ \quad \int_0^t F^{-1}\left[\sin(2\pi|\xi|(t-s))\frac{1}{2\pi|\xi|}\hat{f}(s,\xi)\right](x)ds \qquad (5) \end{aligned}$$

Interpretiere (5) mit Hilfe des Funktionalkalküls. Mit $\varphi(-\Delta)f)^\wedge = 4\pi^2|\xi|^2\hat{f}(\xi)$, $(\varphi((-\Delta)^{\frac{1}{2}})f)^\wedge = 2\pi|\xi|\hat{f}(\xi)$, $\varphi(\lambda) = \cos(\lambda t), \varphi(\lambda) = \frac{sin(\lambda t)}{\lambda}$ folgt:

$$\begin{aligned} F^{-1}[\cos(2\pi|\xi t)\hat{u}_0(\xi)] &= F^{-1}[\cos(\sqrt{4\pi^2|\xi|^2}t)FF^{-1}\hat{u}_0(\xi)] \\ &= \cos((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}t)u_0(\xi) \end{aligned}$$

$$F^{-1}\left[\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi]}\hat{u}_1(\xi)\right] = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\sin((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}t)u_1(x)$$

$$\int_0^t F^{-1}\left[\frac{\sin(2\pi|\xi|(t-s))}{2\pi|\xi|}\hat{f}(s,\xi)\right]ds = \int_0^t (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\sin((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}t-s))f(s,x)ds$$

Damit erhält (5) die Form:

$$u(t) = \cos((-\Delta)^{\frac{1}{2}}t)\hat{u}_0 + (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\sin((-\Delta)^{\frac{1}{2}}t)\hat{u}_1 + \int_0^t (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\sin((-\Delta)^{\frac{1}{2}}(t-s))f(s)ds \qquad (6)$$

Für $d=1$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = \Delta_x u(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \qquad (7)$$

Satz 1.9.2 (d'Alembert) *Die Gleichung (7) mit $d=1$ hat die Lösung:*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x+t)+u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy \qquad (8)$$

Beweis:

$$\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy = (\chi_{[-t,t]} * u_1)(x)$$

$$(\chi_{[-t,t]})^\wedge(\xi) = \int_{-t}^{t} = e^{-2\pi i\xi x}dx = \frac{1}{2\pi i\xi}\left(e^{2\pi i\xi t} - e^{-2\pi i\xi t}\right)$$

Partielle Fouriertransformation von (8):

$$\begin{aligned} \hat{u}(t,\xi) &= \frac{1}{2}\left(e^{-2\pi i\xi t} + e^{2\pi i\xi t}\right)\hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{4\pi i\xi}\left(e^{-2\pi i\xi t} - e^{-2\pi i\xi t}\right) \\ &= \cos(2\pi t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{2\pi|\xi|}\sin(2\pi t|\xi|)\hat{u}_1(\xi) \end{aligned}$$

Das stimmt mit (5) überein, d.h. $u(t,x)$ ist die Lösung.

$\square$

Folgerung 1.9.3

$$u(t,x) = \underbrace{\frac{1}{2}u_0(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} u_1(y)dy}_{=F(x+t)} + \underbrace{\frac{1}{2}u_0(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} u_1(y)dy}_{=G(x-t)}$$

Definition 1.9.4 *Seien $d = 3$, $f \in S(\mathbb{R}^d)$*

$$\begin{aligned} M_t(f)(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(x - t\gamma)d\sigma(\gamma) \\ &= \int_{|x-y|=t} f(y)d\tilde{\sigma}_t(y) \end{aligned}$$

$\tilde{\sigma}_t(y)$ normierte Oberflächenmaß oder Sphäre um x mit Radius t.

Satz 1.9.5 *$u_0, u_1 \in S(\mathbb{R}^3), f \equiv 0$. Dann hat (2) die Lösung*

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(tu_t(u_0)(x)\right) + tu_t(u_1)(x)$$

Beweis: Stein, Shakarchi: Fourieranalysis, Chap. 6.

$\square$

2 Spekraltheorie selbstadjungierter Operatoren

2.1 Beschränkte normale Operatoren

Definition 2.1.1 *Seien H_j Hilberträume mit $< .,. >_j$, $j = 1, 2$. Zu jedem $T \in B(H_1, H_2)$ gibt es einen Hilbertraum adjungierten Operator $T^* \in B(H_2, H_1)$ mit*

$$< Tx, y >=< x, T^*y > .$$

Bemerkung 2.1.2

a) *A^* ist eindeutig, $A^* \in B(H)$ mit $||A^*|| = ||A||$.*

b) *Beziehung zwischen der Hilbertraum-Adjungierten T^* und der Banachraum-Adjungierten T':*

$$\begin{aligned} \Phi_1 : H_1 &\rightarrow H_1', \Phi_1(x)(y) =< y, x >_1 \\ \Phi_2 : H_2 &\rightarrow H_2', \Phi_2(x)(y) =< y, x >_2, \ x, y \in Hz. \end{aligned}$$

(Riesz-Homomorphismen).

Behauptung:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\Phi_1"] & H_1' \\ H_2 \arrow[u, "T^*"] \arrow[r, "\Phi_2"'] & H_2' \arrow[u, "T'"'] \end{tikzcd} \quad , \quad T^* = \Phi_1^{-1}(T')\Phi_2.$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(T^*x)(y) &= < y, T^*x >_1 \\ &= < Ty, x >_2 \\ &= < \Phi_2(x), Ty >_1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Proposition 2.1.3 *Seien $S, T \in B(H_1, H_2)$, $R \in B(H_2, H_3)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann*

a) $(S + T)^* = S^* + T^*$.

b) $(\lambda S)^* = (\overline{\lambda})S^*$, $(\lambda S)^* = \lambda S'$.

c) $(RS)^* = S^*R^*$.

d) $S^{**} = S$.

e $||SS^*|| = ||S^*S|| = ||S||^2$.

f) $\text{Kern}(S) = \text{Bild}(S^*)^\perp$, $\text{Kern}(S^*) = \text{Bild}(S)^\perp$.

Beweis: e)

$$||Sx||^2 =< Sx, Sx >=< x, S^*Sx >\leq ||x||^2||S^*S|| = ||x||^2||S^*|| \cdot ||S^*|| = ||x||^2||S||^2$$

Supremum über x mit $||x|| = 1$:

$$||S||^2 \leq ||S^*S|| \leq ||S||^2.$$

Definition 2.1.4

*a) $T : H_1 \to H_2$ ist **unitär**, falls T invertierbar ist und $T^{-1} = T^*$.*

*b) $T \in B(H)$ ist **selbstadjungiert**, falls $T^* = T$.*

*c) $T \in B(H)$ ist **normal** fallst $TT^* = T^*T$.*

Bemerkung 2.1.5

a) Selbtstadjungierte und unitäre Operatoren sind normal.

b) T unitär $< Tx, Ty >=< x, T^*Ty >=< x, TT^*y >=< x, TT^{-1}y >? < x, y > \Rightarrow$ eine unitäre Abbildung erhält das Skalarprodukt und $||Tx|| = ||x||$.

Beispiel 2.1.6 *$H = L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $m \in L^\infty(\Omega)$.*

$$T : H \to H, \quad Tf(\omega) = m(\omega)f(\omega).$$

Dann gilt $||T|| = ||m||_{L^\infty}$.

$$\begin{aligned} < Tf, g > &= \int_\Omega m(x)f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int f(x)\overline{\overline{m(x)}g(x)}dx \\ &= < f, T^*g > \end{aligned}$$

$\Rightarrow T^*g(x) = \overline{m(x)}g(x)$. Also

- *T selbstadjungiert $\Leftrightarrow m(x) \in \mathbb{R}$.*
- *T unitär $\Leftrightarrow |m(x)| = 1$.*

$$T^{-1}f(x) = m(x)^{-1}f(x), \;\; m(x)^{-1} = \overline{m(x)}$$

.

Satz 2.1.7 *Sei $T \in B(H)$. Dann*

a) T normal: $r(T) = ||T||$.

b) T selbstadjungiert $\Rightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

c) T unitär $\Rightarrow \sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}$.

Beweis: a)

$$||T^2||^2 = ||(T^2)(T^2)^*|| = ... = ||TT^*||^2 = ||T||^4.$$

$\Rightarrow ||T^2|| = ||T||^2 \Rightarrow ||T^{2^n}|| = ||T||^{2n}$.
b),c) Übung.

□

Satz 2.1.8 *$T \in B(H)$ ist selbstadjungiert genau dann, wenn $< Tx, x >\in \mathbb{R}\ \forall x \in H$ und*

$$||T|| = \sup_{||x||=1} < Tx, x > .$$

Beweis: Übung.

Satz 2.1.9 *$P \in B(H) \backslash \{0\}$ sei eine Projektion. Dann sind äquivalent:*

a) P ist eine Orthogonalprojektion, d.h. $\text{Kern}\, P \perp \text{Bild}\, P$.

b) $||P|| = 1$.

c) P selbstadjungiert.

d) P normal.

e) $< Px, x > \geq 0$.

Beweis: Funkana Übung, Buch Werner.

Satz 2.1.10 (Lax-Milgram) *Sei H ein komplexer Hilbertraum mit $< ., . >$ und $b : H \times H \to \mathbb{C}$ sei eine sesquilineare Form ($b(x, \lambda y) = \overline{\lambda} b(x, y)$).*

a) Falls $|b(x, y)| \leq C||x|| \cdot ||y||$ (+), dann existiert ein eindeutig bestimmter Operator $T \in B(H)$ mit
$$b(x, y) =< x, Tx > \ \text{ und } ||T|| \leq C.$$

b) Falls zusätzlich $b(x, x) \geq \delta ||x||^2$, $\delta \geq 0$, dann ist T invertierbar und $||T^{-1} \leq \delta^{-1}$.

Beweis: a) Sei $y \in H$ fest. Dann ist $x \to b_y(x) := b(x, y)$ ein lineares Funktional auf H mit $||b_y|| \leq C||y||$ (nach (+)). Da $b_y \in H'$, gibt es nach dem Satz von Riesz ein $z \in H$ mit $< x, z >= b_y(x) = b(x, y)$ und $||z|| = ||b_y||_{H'} \leq C||y||$.
Definiere $Ty := z$. Dann ist $||Ty|| \leq ||z|| \leq C||y||$.
$$< x, Ty >=< x, z >= b(x, y)$$
$||T|| \leq C$, T linear.
b) Es gilt $b(x, x) \geq \delta ||x||^2$. Für T aus a) und $y \in H$ gilt
$$< y, Ty >= b(y, y) \geq \delta ||y||^2.$$

- Aus $Ty = 0$ folgt $||y|| = 0$, d.h. T ist injektiv.
- $\text{Bild}\, T$ ist abgeschlossen, denn für $y_n \in H$ mit $T(y_n) \to z \in H$ folgt
$$||y_n - y_m||^2 \leq \delta^{-1} b(y_n - y_m, y_n - y_m) = \delta^{-1} < y_n - y_m, T(y_n - y_m) > \leq \delta^{-1} 2 \sup ||y_n|| \cdot ||T(y_n) - T(y_m)||$$
Da $\sup ||y_n|| < 0$, $T(y_n) \to z$, gilt $||y_n - y_m|| \to 0$ für $n, m \to \infty$. Also (y_n) sind Cauchy Folge und $y = \lim y_n$ existiert. Dann $Ty = \lim Ty_n = z$ und $z \in \text{Bild}\, T$, d.h. $\text{Bild}\, T$ ist abgeschlossen.
- $\text{Bild}\, T = H$. Wähle $z \in (\text{Bild}\, T)^\perp$. Dann
$$||z||^2 \leq \delta^{-1} < z, Tz >= 0 \Rightarrow z = 0$$
Somit gilt $\text{Bild}\, T = H$.

Also $T \in B(H)$ ist surjektiv und $T^{-1} \in B(X)$ (open-map).
$$||T^{-1}x||^2 \leq \delta^{-1} < T^{-1}, T^{-1}Tx > \leq \delta^{-1} ||T^{-1}x|| \cdot ||x||$$
Also $||T^{-1}x|| \leq \delta^{-1} ||x||$.

2.2 Funktionalkalkül für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Notation $\mathcal{P}$: Menge der Polynome auf $\mathbb{R}$ mit komplexen Koeffizienten.

Definition 2.2.1 (Funktionalkalkül für Polynome) *Sei $A \in B(X)$, X Hilbertraum, $<.,.>$, A selbstadjungiert. Für*

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_n \lambda^n, \ \ a_n \in \mathbf{K}$$

setze

$$p(A) = \sum_{j=0}^{n} a_n A^n \in B(X).$$

Definition 2.2.2 *Die Abbildung $p \in \mathcal{P} \to p(A) \in B(X)$ hat die Eigenschaften ($f, g \in \mathcal{P}, \lambda \in \mathbb{C}$)*

(i) $(\alpha f + g)(A) = \alpha f(A) + g(A)$, *linear.*
$(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$, *multiplikativ.*

(ii) $f_0(\lambda) \equiv 1$, $f_1(\lambda) = \lambda \Rightarrow f_0(A) = \mathrm{id}_X$, $f_1(A) = A$.

(iii) $f(A)^* = \overline{f}(A)$.

(iv) $\boxed{\|p(A)\| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot \|A\|^j}$ *für* $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$

Beweis: (i) Übung, (ii) folgt aus Definition, (iii)

$$p(A)^* = (\sum_{j=0}^{n} a_j A^n)* = \sum_{j=0}^{n} (a_n A^n)^* = \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j (A^*)^n = \overline{p}(A^*) = \overline{p}(A)$$

(iv) $\|p(A)\| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot \|A^j\| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j| \cdot \|A\|^j$.

□

Satz 2.2.3 (Spektralabbildungssatz) *Für einen selbstadjungierten Operator $A \in B(X)$ und $p \in \mathcal{P}$ gilt*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Beweis: „$\supseteq$“ Sei $\mu \in \sigma(A)$. Zu zeigen: $p(\mu) \in \sigma(p(A))$. Dazu wähle ein Polynom q, sodass

$$p(\mu) - p(\lambda) = (\mu - \lambda) q(\lambda), \ \ \lambda > 0$$
$$\Rightarrow p(\mu) - p(A) = (\mu - A) q(A) = q(A)(\mu - A)$$

Da $\mu - A$ keine Inverse hat ($\mu \in \sigma(A)$), hat auch $p(\mu) - p(A)$ keine Inverse, d.h. $p(\mu) \in \sigma(p(A))$.

„$\subseteq$“ Sei $\mu \in \sigma(p(A))$. Zeige: $\mu \in p(\sigma(A))$. Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Wurzeln von $\lambda \to \mu - p(\lambda)$, d.h. $\mu - p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)$, (+). Damit folgt $\mu - p(A) = a(A - \lambda_1) \cdot ... \cdot (A - \lambda_n)$. Wäre $\lambda_1, ..., \lambda_n \notin \sigma(A)$, dann folgt

$$(\mu - p(A))^{-1} = a^{-1} (A - \lambda_n)^{-1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_1)^{-1}$$

also wäre $\mu \notin \sigma(p(A))$. Da $\mu \in \sigma(p(A))$, ist mindestens eines der λ_i in $\sigma(A)$. Dann folgt aus (+) $\mu = p(\lambda_j)$, $\mu \in p(\sigma(A))$.

$\square$

Lemma 2.2.4 *Für $A \in B(X)$ selbstadjungiert und $p \in \mathcal{P}$ gilt*

$$\|p(A)\|_{B(X)} = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p(x)|.$$

Beweis:

$$\|p(A)\|^2 = \|p(A)p(A)^*\| = \|p(A)\overline{p}(A)\| = \|(p\cdot\overline{p})(A)\| = \||p|^2(A)\| = r(|p|^2(A))$$

da $|p(\cdot)|^2$ reell und $|p|^2(A)$ selbstadjungiert ist. Weiter ist

$$r(|p|^2(A)) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(|p|^2(A))\} \overset{2.2.3}{=} \sup\{|p|^2(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Durch Wurzelziehen erhält man

$$\|p(A)\| = \sup|\{p(\lambda) \in \sigma(A)\}|.$$

$\square$

Idee: $f(A) = \lim p_n(A)$ für $p_n \in \mathcal{P}$ mit $\|p_n - f\|_{C(\sigma(A))} \to 0$.

Satz 2.2.5 (Funktionalkalkül für stetige Funktionen) *Es gibt eine lineare, multiplikative Abbildung*

$$\Phi : C(\sigma(A)) \to B(X)\ (schreibe \Phi(f) = f(A))$$

mit $\Phi(p) = p(A)$ für $p \in \mathcal{P}$ und

(i) $\|f(A)\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

(ii) $f(A)^* = \bar{f}(A)$, *$f(A)$ normal, $f(A)$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ f reellwertig. $f(A) \geq 0 \Leftrightarrow f(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \in \sigma(A)$.*

(iii) $Ax = \lambda x \Rightarrow f(A)x = f(\lambda)x$.

(iv) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Beweis: Nach dem Satz von Weierstraß sind die Polynome dicht in $(C(\sigma A), \|\cdot\|_\infty)$, da $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Φ ist die stetige Fortsetzung der Abbildung $p \in \mathcal{P} \to p(A) \in B(X)$, d.h. für $p \in \mathcal{P}$ mit $\|p_n - f\|_\infty \to 0$ setze $\Phi(f) = \lim \lim_{n\to\infty} p_n(A)$ in $B(X)$. Das ist möglich, da $p \in \mathcal{P} \to p(A) \in B(X)$ eine Isometrie ist, wegen 2.2.3

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Da

$$\|f(A)\| = \lim_{n\to\infty} \|p_n(A)\| = \lim \lim_{n\to\infty} sup_{\lambda\in\sigma(A)}|p_n(x)| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(x)$$

gilt also

$$\|\Phi(f)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)| \text{ nach (i)},$$

d.h. Φ ist linear und multiplikativ.

$$f(A)^* = \lim p_n(A)^* = \lim \overline{p}_n(A) = \overline{f}(A)$$

Zeige nun $f(A)$ ist normal:

$$f(A) \cdot f(A)^* = f(A) \cdot \overline{f}(A) = (f \cdot \overline{f})(A) = (\overline{f} \cdot f)(A) = \overline{f}(A) \cdot f(A) = f(A)^* \cdot f(A).$$

$f(A)$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ f ist reelwertig:

$$f(A) = f(A)^* = \overline{f}(A) \Leftrightarrow f = \overline{f} \Leftrightarrow f \text{ ist reelwertig.}$$

$f \geq 0 \Rightarrow f(A) \geq 0$, d.h. $< f(A)x, x > \geq 0$ für alle x. Wähle $g \geq 0$ mit $f = g^2$. Dann

$$< f(A)x, x >=< g^2(A)x, x >=< g(A)g(A)x, x >=< g(A)x, g(A)^*x >=< g(A)x, g(A)x > \geq 0.$$

(iii) $p \in \mathcal{P}$, $Ax = \lambda x$

$$\Rightarrow p(A) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j A^j \right) x = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j \right) x$$

$\Rightarrow f(A)x = f(\lambda)x$ mit Hilfe von Approximationen von f durch Polynome p_n. (iv) „$\subseteq$“ Sei $\mu \in f(\sigma(A))$. Setze $g(\lambda) = (f(\lambda) - \mu)^{-1} \in C(\sigma(A))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(f - \mu) = (f - \mu)g \equiv 1 \\ \Rightarrow g(A)(f(A) - \mu) = (f(A) - \mu)g(A) = \mathrm{id}_X \Rightarrow \mu \notin \sigma(f(A)). \end{aligned}$$

„$\supseteq$“ Sei $\lambda \in \sigma(A)$. Zeige: $f(\mu) \in \sigma(f(A))$. Wähle $p_n \in \mathcal{P}$ mit $\|f - p_n\|_{C(\sigma(A))} \to 0$.

$$\begin{aligned} \|f(\mu) - f(A) - (p_n(\mu) - p_n(A))\|_{B(X)} \leq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\mu) - f(\lambda) - p_n(\mu) + p_n(\lambda)| \overset{n \to \infty}{\to} 0 \\ f(A)^* = \lim p_n(A)^* = \lim \overline{p}_n(A) = \overline{f}(A) \end{aligned}$$

Nach 2.2.3 gilt $p_n(\mu) \in \sigma(p_n(A))$. Wäre $f(\mu) - f(A)$ invertierbar, so wäre wegen $p_n(\mu) - p_n(A) \to f(\mu) - f(A)$ in $B(X)$ auch $p_n(\mu) - p_n(A)$ für große n invertierbar, da die Menge der invertierbaren Operatoren in $B(X)$ offen ist. Also $f(\mu) - f(A)$ nicht invertierbar, d.h. $f(\mu) \in \sigma(f(A))$.

Ziele.

1) $\Phi : B_b(\sigma(A)) \to B(X)$, B_b beschränkte Borelfunktionen.

2) Finde ein Maß μ auf $\mathbb{C}$ und eine Isometrie $U : L^2(\mathbb{C}, \mu) \to X$, sodass

$$A = UMU^{-1}, \text{ wobei } Mg(\lambda = m(\lambda)g(\lambda).$$

Nach Riesz gilt $C(\sigma(A))' = M(\sigma(A))$. Zu $|l \in C(\sigma(A))$ gibt es ein Maß μ:

$$l(f) \int_{\sigma(A)} f(\lambda d\mu(\lambda)).$$