

Formulation de la contrainte de cercle

Objectif

On cherche à ce que chaque couche de construction de la pièce soit un cercle (le cercle de même aire et de même barycentre que ceux de la pièce pour la section considérée), c'est-à-dire que $\forall z \in [0, H]$, il faut minimiser

$$\int_{\partial\Omega \cap (z=h)} d_{\mathcal{C}(\Omega \cap (z=h))}(s)^2 ds \quad (1)$$

avec

$$d_{\mathcal{C}(\Omega \cap (z=h))}(x) = \sqrt{\left(X(x) - \frac{\int_{\Omega \cap (z=h)} X(x) dx}{\int_{\Omega \cap (z=h)} dx}\right)^2 + \left(Y(x) - \frac{\int_{\Omega \cap (z=h)} Y(x) dx}{\int_{\Omega \cap (z=h)} dx}\right)^2} - \sqrt{\frac{\int_{\Omega \cap (z=h)} dx}{\pi}} \quad (2)$$

Problème d'optimisation

On s'intéresse donc au problème suivant:

$$\min_{\Omega} J(\Omega) = \int_{\partial\Gamma_N} g(s)u(s)ds \quad (3)$$

tel que, pour α donné,

$$P(\Omega) = \int_0^H P_h(\Omega) dh = \int_0^H \left[\int_{\partial\Omega \cap (z=h)} d_{\mathcal{C}(\Omega \cap (z=h))}(x)^2 dx \right] dh < \alpha \quad (4)$$

où $u \in H^1(\Omega)$ l'unique solution du problème élastique suivant (avec $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$ et $\Gamma \cap \Gamma_N = \Gamma_N \cap \Gamma_D = \Gamma_D \cap \Gamma = \emptyset$):

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u)) &= 0 & \text{in } \Omega \\ Ae(u).n &= g & \text{on } \Gamma_N \\ Ae(u).n &= 0 & \text{on } \Gamma \\ u &= 0 & \text{on } \Gamma_D \end{cases} \quad (5)$$

Reformulation de la contrainte et dérivation

On note $\delta_h(x)$ la gaussienne normalisée qui permet d'approximer la fonction de dirac qui vaut 1 lorsque $x.ez = h$ et 0 ailleurs. On a dans notre cas :

$$\delta_h(x) = \frac{\exp\left(-\left(Z(x) - h\right)^2 * c_g\right)}{\int_D \exp\left(-\left(Z(x) - h\right)^2 * c_g\right)} \quad (6)$$

On peut alors reconsidérer les différentes intégrales intervenant dans le problème et poser:

$$A(\Omega, h) = \int_{\Omega \cap (z=h)} dx = \int_{\Omega} \delta_h(x) dx \quad (7)$$

$$Cx(\Omega, h) = \int_{\Omega \cap (z=h)} X(x) dx = \int_{\Omega} \delta_h(x) X(x) dx \quad (8)$$

$$Cy(\Omega, h) = \int_{\Omega \cap (z=h)} Y(x) dx = \int_{\Omega} \delta_h(x) Y(x) dx \quad (9)$$

$$Dx(\Omega, h, \cdot) : \begin{cases} D & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \rightarrow X(x) - \frac{Cx(\Omega, h)}{A(\Omega, h)} \end{cases} \quad (10)$$

$$Dy(\Omega, h, \cdot) : \begin{cases} D & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \rightarrow Y(x) - \frac{Cy(\Omega, h)}{A(\Omega, h)} \end{cases} \quad (11)$$

$$DE(\Omega, h, \cdot) : \begin{cases} D & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \rightarrow Dx(\Omega, h, x)^2 + Dy(\Omega, h, x)^2 \end{cases} \quad (12)$$

$$dist(\Omega, h, \cdot) : \begin{cases} D & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \rightarrow d_{C(\Omega \cap \{z=h\})}(x) = \sqrt{DE(\Omega, h, x)} - \sqrt{\frac{A(\Omega, h)}{\pi}} \end{cases} \quad (13)$$

Et la contrainte peut être reformulée sous la forme :

$$P(\Omega) = \int_0^H \int_{\partial\Omega} \delta_h(x) dist(\Omega, h, x)^2 dx dh \quad (14)$$

Dérivation de la contrainte

$$P'(\Omega)(\theta) = \int_0^H \left[\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \left(\delta_h(s) dist(\Omega, h, s)^2 \right)}{\partial n} + H(s) \delta_h(s) dist(\Omega, h, s)^2 \right) \theta(s) n(s) ds \right. \\ \left. + \int_{\partial\Omega} 2\delta_h(s) dist(\Omega, h, s) dist'(\Omega, h, s)(\theta) ds \right] dh \quad (15)$$

$$\begin{aligned} dist'(\Omega, h, x)(\theta) &= \frac{DE'(\Omega, h, x)(\theta)}{2\sqrt{DE(\Omega, h, x)}} - \frac{A'(\Omega, h)}{2\sqrt{\pi A(\Omega, h)}} \\ &= \frac{2Dx(\Omega, h, x)Dx'(\Omega, h, x)(\theta) + 2Dy(\Omega, h, x)Dy'(\Omega, h, x)(\theta)}{2\sqrt{DE(\Omega, h, x)}} - \frac{A'(\Omega, h)}{2\sqrt{\pi A(\Omega, h)}} \\ &= \frac{-Dx(\Omega, h, x)}{A(\Omega, h)\sqrt{DE(\Omega, h, x)}} \left(Cx'(\Omega, h)(\theta) - \frac{Cx(\Omega, h)}{A(\Omega, h)} A'(\Omega, h)(\theta) \right) + \frac{-Dy(\Omega, h, x)}{A(\Omega, h)\sqrt{DE(\Omega, h, x)}} \left(Cy'(\Omega, h)(\theta) - \frac{Cy(\Omega, h)}{A(\Omega, h)} A'(\Omega, h)(\theta) \right) \\ &\quad - \frac{A'(\Omega, h)}{2\sqrt{\pi A(\Omega, h)}} \\ &= \frac{-Dx(\Omega, h, x)}{A(\Omega, h)\sqrt{DE(\Omega, h, x)}} \int_{\partial\Omega} \delta_h(s') \left(X(s') - \frac{Cx(\Omega, h)}{A(\Omega, h)} \right) \theta(s') n(s') ds' \\ &\quad + \frac{-Dy(\Omega, h, x)}{A(\Omega, h)\sqrt{DE(\Omega, h, x)}} \int_{\partial\Omega} \delta_h(s') \left(Y(s') - \frac{Cy(\Omega, h)}{A(\Omega, h)} \right) \theta(s') n(s') ds' - \frac{A'(\Omega, h)}{2\sqrt{\pi A(\Omega, h)}} \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{-Dx(\Omega, h, x)\delta_h(s')Dx(\Omega, h, s')}{A(\Omega, h)\sqrt{DE(\Omega, h, x)}} \theta(s') n(s') ds' + \int_{\partial\Omega} \frac{-Dy(\Omega, h, x)\delta_h(s')Dy(\Omega, h, s')}{A(\Omega, h)\sqrt{DE(\Omega, h, x)}} \theta(s') n(s') ds' - \int_{\partial\Omega} \frac{\delta_h(s')}{2\sqrt{\pi A(\Omega, h)}} \theta(s') n(s') ds' \end{aligned} \quad (16)$$

On a alors, en permuttant les intégrales,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} 2\delta_h(s) \text{dist}(\Omega, h, s) \text{dist}'(\Omega, h, s)(\theta) ds &= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{-2\delta_h(s) \text{dist}(\Omega, h, s) Dx(\Omega, h, s) \delta_h(s') Dx(\Omega, h, s')}{A(\Omega, h) \sqrt{DE(\Omega, h, s)}} \theta(s') n(s') ds ds' \\
&+ \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{-2\delta_h(s) \text{dist}(\Omega, h, s) Dy(\Omega, h, s) \delta_h(s') Dy(\Omega, h, s')}{A(\Omega, h) \sqrt{DE(\Omega, h, s)}} \theta(s') n(s') ds ds' - \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{2\delta_h(s) \text{dist}(\Omega, h, s) \delta_h(s')}{2\sqrt{\pi A(\Omega, h)}} \theta(s') n(s') ds ds' \\
&= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \overbrace{\frac{2\delta_h(s) \text{dist}(\Omega, h, s) Dx(\Omega, h, s)}{A(\Omega, h) \sqrt{DE(\Omega, h, s)}}}^{A^1(\Omega, h)} ds * (-1) \delta_h(s') Dx(\Omega, h, s') \theta(s') n(s') ds' \\
&+ \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \overbrace{\frac{2\delta_h(s) \text{dist}(\Omega, h, s) Dy(\Omega, h, s)}{A(\Omega, h) \sqrt{DE(\Omega, h, s)}}}^{A^2(\Omega, h)} ds * (-1) \delta_h(s') Dy(\Omega, h, s') \theta(s') n(s') ds' \\
&+ \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \overbrace{\frac{\delta_h(s) \text{dist}(\Omega, h, s)}{\sqrt{\pi A(\Omega, h)}}}^{A^3(\Omega, h)} ds * (-1) \delta_h(s') \theta(s') n(s') ds' \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(-A^1(\Omega, h) * Dx(\Omega, h, s) - A^2(\Omega, h) * Dy(\Omega, h, s) - A^3(\Omega, h) \right) \delta_h(s) \theta(s) n(s) ds
\end{aligned} \tag{17}$$

$$P'(\Omega)(\theta) =$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^H \left(\int_{\partial\Omega} \theta(s) n(s) \left(\frac{\partial \delta_h(s)}{\partial n} \text{dist}(\Omega, h, s)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta_h(s) \left[2 * \text{dist}(\Omega, h, s) \frac{\partial \text{dist}(\Omega, h, s)}{\partial n} + \text{dist}(\Omega, h, s)^2 H(s) - A^1(\Omega, h) Dx(\Omega, h, s) - A^2(\Omega, h) Dy(\Omega, h, s) - A^3(\Omega, h) \right] \right) ds \right) dh \\
&= \int_0^H \left(\int_{\partial\Omega} \theta(s) n(s) \left(\frac{\partial \delta_h(s)}{\partial z} n_z(s) \text{dist}(\Omega, h, s)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta_h(s) \left[2 * \text{dist}(\Omega, h, s) \frac{\partial \text{dist}(\Omega, h, s)}{\partial n} + \text{dist}(\Omega, h, s)^2 H(s) - A^1(\Omega, h) Dx(\Omega, h, s) - A^2(\Omega, h) Dy(\Omega, h, s) - A^3(\Omega, h) \right] \right) ds \right) dh
\end{aligned} \tag{18}$$

Résolution 2D

Adaptation de la contrainte

On s'intéresse d'abord à une unique section. On prend pour cela un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$, domaine sur lequel on va appliquer la contrainte. En optimisant seulement selon cette contrainte et en oubliant la partie mécanique, on a le problème suivant :

$$\min_{\Omega} J(\Omega) = P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} d_{\mathcal{C}((\Omega))}(x)^2 dx \tag{19}$$

avec

$$d_{\mathcal{C}(\Omega)}(x) = \sqrt{\left(X(x) - \frac{\int_{\Omega} X(x) dx}{\int_{\Omega} dx} \right)^2 + \left(Y(x) - \frac{\int_{\Omega} Y(x) dx}{\int_{\Omega} dx} \right)^2} - \sqrt{\frac{\int_{\Omega} dx}{\pi}} \tag{20}$$

On a alors la dérivée de forme suivante :

$$P'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta(s)n(s) \left[2 * dist(\Omega, s) \frac{\partial dist(\Omega, s)}{\partial n} + dist(\Omega, s)^2 H(s) - A^1(\Omega) Dx(\Omega, s) - A^2(\Omega) Dy(\Omega, s) - A^3(\Omega) \right] ds \quad (21)$$

avec

$$A^1(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \frac{2dist(\Omega, s)Dx(\Omega, s)}{A(\Omega)\sqrt{DE(\Omega, s)}} ds; \quad A^2(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \frac{2dist(\Omega, s)Dy(\Omega, s)}{A(\Omega)\sqrt{DE(\Omega, s)}} ds; \quad A^3(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \frac{dist(\Omega, s)}{\sqrt{\pi A(\Omega)}} ds \quad (22)$$

Choix de code

Afin de pouvoir utiliser la fonction freefem d'intégration le long d'un contour, il faut introduire une nouvelle fonction level set (distVraie dans le code, à distinguer de phi qui est la level set classique). Celle-ci décrit le même domaine que la level set classique phi, cependant, elle vaut 0 sur les bords du domaine de calcul D . Cette nouvelle fonction n'est pas utilisée uniquement pour calculer les intégrales mais c'est notre level set principale, c'est elle qu'on modifie dans le code (les résultats sont meilleurs de cette manière là).

Le calcul de la fonction distVraie est expliqué dans la suite.

La fonction de densité utilisée pour connaître l'aire est du type

$$X = \epsilon 1_{distVraie > 0} + (1 - \epsilon) 1_{distVraie \leq 0} \quad (23)$$

Résultats et validation des choix de code

- Résultats pour une initialisation en ellipse, avec la levelset distVraie :

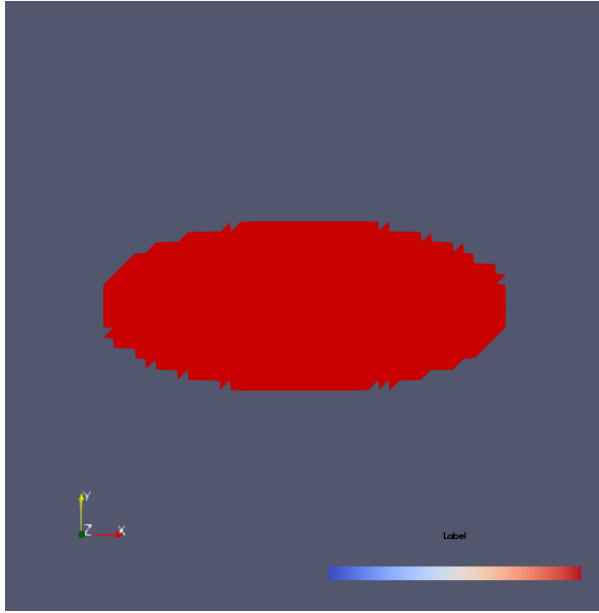


Figure 1: Initialisation

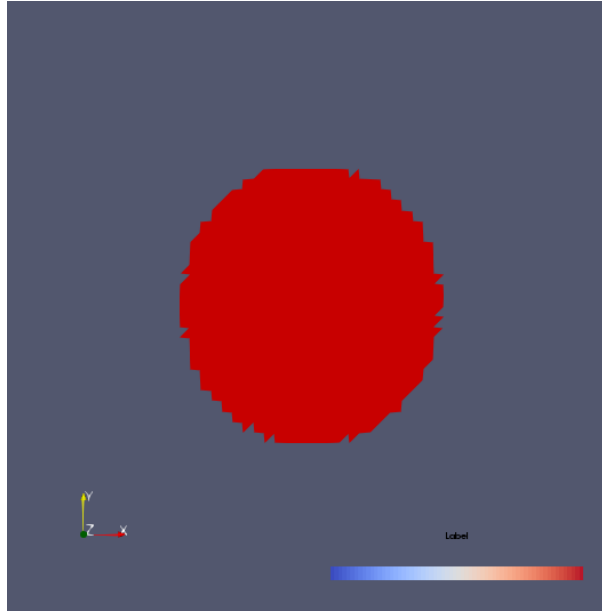


Figure 2: Après 17 itérations

- Résultats pour une initialisation avec trous, avec la levelset distVraie :

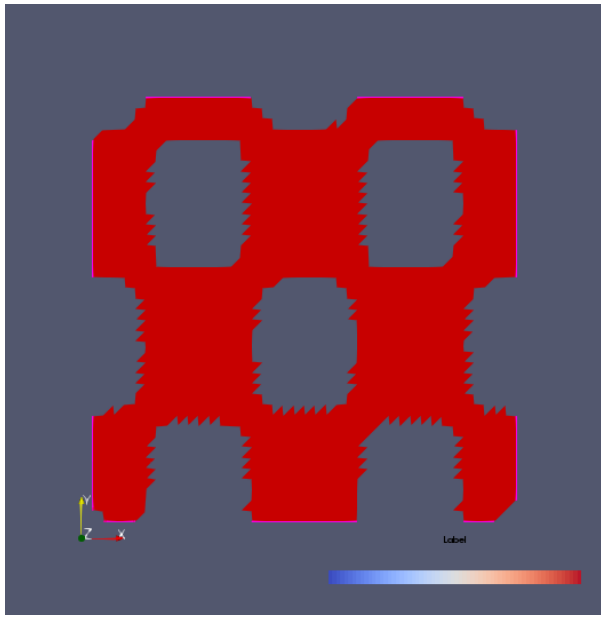


Figure 3: Initialisation

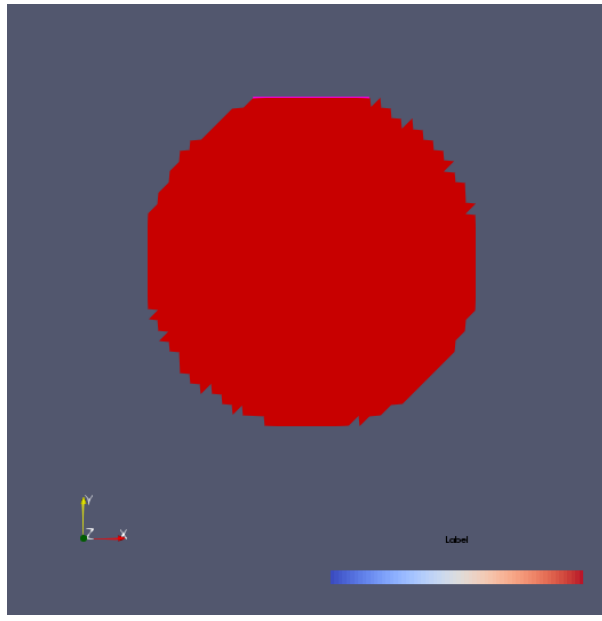


Figure 4: Après 37 itérations

- A gauche, en modifiant la fonction levelset phi, en utilisant distVraie pour les calculs d'intégrale et en utilisant phi pour les intégrales du probleme variationnel de la normale et de la vitesse. Au centre, en modifiant la fonction levelset phi, en utilisant distVraie pour les calculs d'intégrale et pour les intégrales du probleme variationnel de la vitesse et en utilisant phi pour les intégrales du probleme variationnel de la normale. A droite, en modifiant la fonction levelset phi et en utilisant distVraie pour les calculs d'intégrale et pour les intégrales du probleme variationnel de la vitesse et de la normale. Dans tous les cas, l'initialisation est celle de la Figure ??.

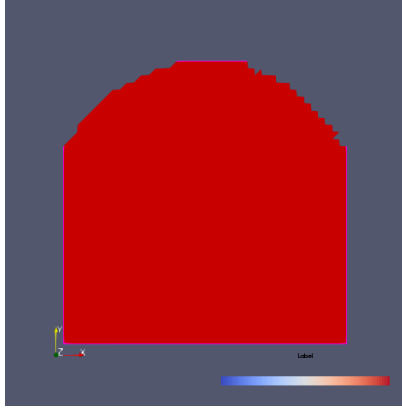


Figure 5: Après 56 itérations

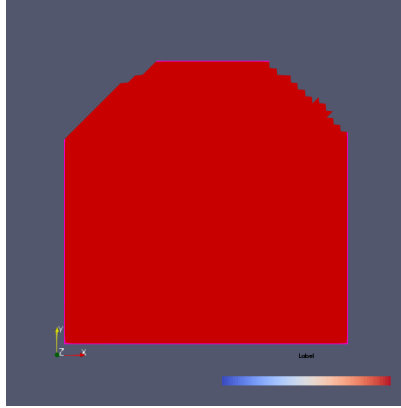


Figure 6: Après 78 itérations

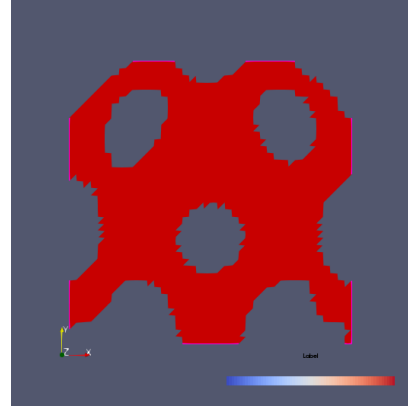


Figure 7: Après 65 itérations

- Deux types de redistanciation ont été testés (avec la fonction distance de Freefem et mshdist de Charles Dapogny). Peu de différences ont été constatés et la fonction distance a donc été retenue pour la vitesse d'exécution.

Résolution 3D, contrainte géométrique seule

On rappelle la fonction objectif et sa dérivée de forme :

$$\min_{\Omega} J(\Omega) = P(\Omega) = \int_0^H \left[\int_{\partial\Omega \cap (z=h)} d_{\mathcal{C}(\Omega \cap (z=h))}(x)^2 dx \right] dh \quad (24)$$

$$P'(\Omega)(\theta) =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left(\int_{\partial\Omega} \theta(s)n(s) \left(\frac{\partial \delta_h(s)}{\partial n} \text{dist}(\Omega, h, s)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta_h(s) \left[2 * \text{dist}(\Omega, h, s) \frac{\partial \text{dist}(\Omega, h, s)}{\partial n} + \text{dist}(\Omega, h, s)^2 H(s) - A^1(\Omega, h) Dx(\Omega, h, s) - A^2(\Omega, h) Dy(\Omega, h, s) - A^3(\Omega, h) \right] \right) ds \right) dh \\ &= \int_0^H \left(\int_{\partial\Omega} \theta(s)n(s) \left(\frac{\partial \delta_h(s)}{\partial z} n_z(s) \text{dist}(\Omega, h, s)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta_h(s) \left[2 * \text{dist}(\Omega, h, s) \frac{\partial \text{dist}(\Omega, h, s)}{\partial n} + \text{dist}(\Omega, h, s)^2 H(s) - A^1(\Omega, h) Dx(\Omega, h, s) - A^2(\Omega, h) Dy(\Omega, h, s) - A^3(\Omega, h) \right] \right) ds \right) dh \end{aligned} \quad (25)$$

Afin de les calculer, on discrétise le domaine de calcul selon l'axe (Oz), en posant une décomposition régulière de pas dh , ($z_0 = h_0, h_1, \dots, h_N = z_1$). On a alors

$$P(\Omega) = \int_0^H P_h(\Omega) dh = \sum_{i=0}^{i=N} dh \int_{\partial\Omega \cap (z=h_i)} d_{C(\Omega \cap (z=h_i))}(x)^2 dx \quad (26)$$

$$\begin{aligned} P'(\Omega)(\theta) &= \sum_{i=0}^{i=N} dh \left(\int_{\partial\Omega} \theta(s)n(s) ds \left(\frac{\partial \delta_{h_i}(s)}{\partial z} n_z(s) \text{dist}(\Omega, h_i, s)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta_{h_i}(s) \left[2 * \text{dist}(\Omega, h_i, s) \frac{\partial \text{dist}(\Omega, h_i, s)}{\partial n} + \text{dist}(\Omega, h_i, s)^2 H(s) - A^1(\Omega, h_i) Dx(\Omega, h_i, s) - A^2(\Omega, h_i) Dy(\Omega, h_i, s) - A^3(\Omega, h_i) \right] \right) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

On a alors un vitesse d'advection pour chaque section (on résout le problème variationnel de régularisation de la vitesse pour chaque couche en utilisant les mêmes coefficients puis, par linéarité, on a $v = \sum_{i=0}^{i=N} dh * v_{h_i}$)

Choix de code

La fonction de Dirac utilisée est celle de l'eq 6. On veut cependant éviter de l'utiliser trop souvent pour ne pas perdre en précision. On construit alors un maillage particulier. Pour chaque hauteur h_i , on a un maillage 2D de la section, avec un label particulier. Ainsi, la section $z = h_0 = z_0$ a pour label 6, la section $z = h_1 = z_0 + dh$ a pour label 7, la section $z = h_N = z_1$ a pour label 6+N. La figure ?? illustre cela.

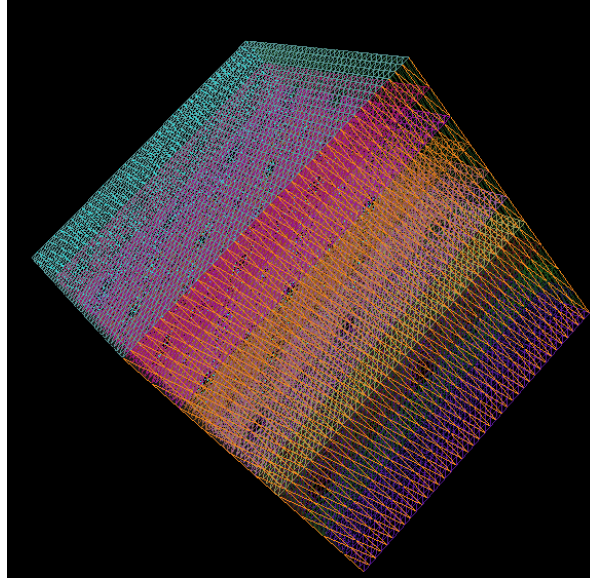


Figure 8

On utilise là encore une fonction différente de la level set classique comme fonction levelset. En effet, on veut à nouveau "décoller" la fonction des bords du domaine de calcul. Cependant, cette action ne doit être effectuée que sur

le bords latéraux du domaine et pas sur la section inférieure ni sur la section supérieure. On initialise donc la levelset de cette manière là et c'est cette fonction qui est advectée. Après chaque advection, on la recalcule de manière à ce qu'elle vérifie toujours cette propriété. Afin de calculer cette fonction, on applique un problème variationnel du type :

$$\begin{aligned} distaux &= 0 * (phi \leq 0) + phi * (phi > 0) \\ \forall v, \int_{\Omega} distVraie * v - \int_{\Omega} \phi * v + (\text{on parois laterales, } distVraie &= distaux) \end{aligned} \quad (28)$$

Résultats

On a ci-dessous les résultats pour une initialisation en ellipse et une initialisation de 4 trous.

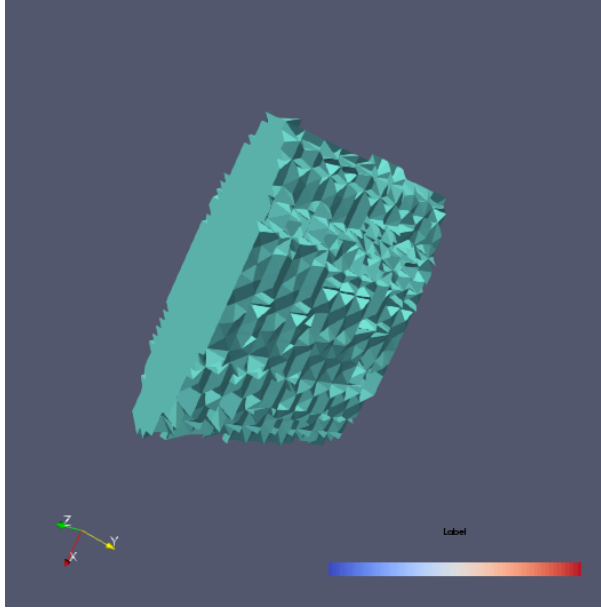


Figure 9: Initialisation

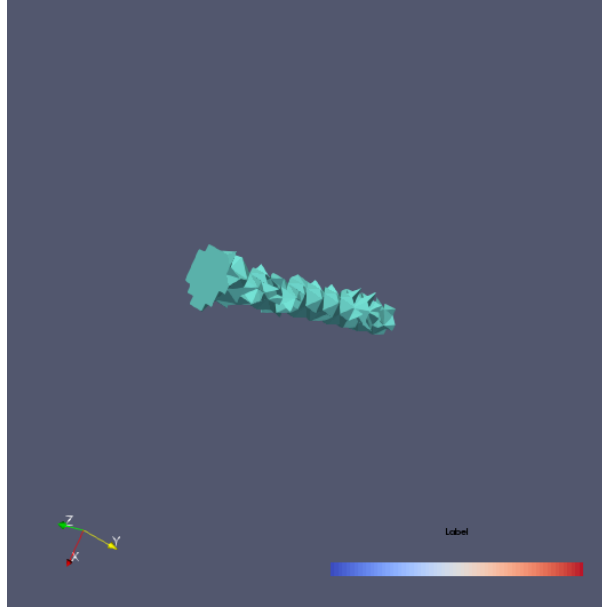


Figure 10: Après 48 itérations

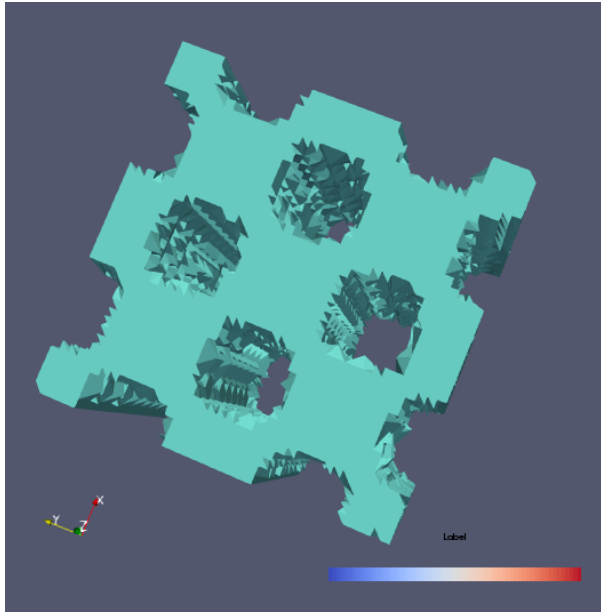


Figure 11: Initialisation

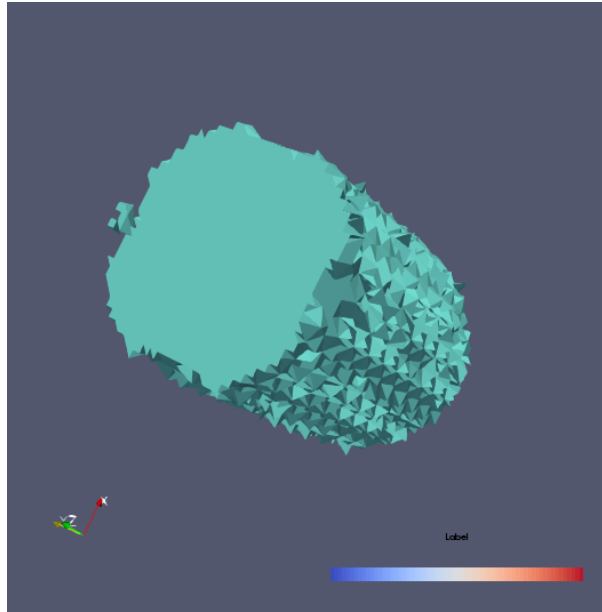


Figure 12: Après 32 itérations

Resolution 3D : Minimisation de la compliance, du volume et de la contrainte

On ajoute maintenant le problème élastique. On applique les conditions aux limites de Dirichlet sur la surface inférieure du domaine ($z = z_0$) et on applique une force selon Oy sur le centre de la surface supérieure du domaine $z = z_1$. On applique la contrainte de circularité à toutes les sections exceptée celle du haut, sur laquelle Neumann est appliquée. En revanche, la section sur laquelle Dirichlet est appliquée doit satisfaire la contrainte de circularité.

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\Omega} J(\Omega) = \int_{\partial\Gamma_N} g(s)u(s)ds \quad (29)$$

tel que,

$$\left(\int_{\Omega} dx - V_{cible} \right)^2 = 0 \quad (30)$$

et

$$P(\Omega) = \int_0^H P_h(\Omega)dh = \int_0^H \left[\int_{\partial\Omega \cap (z=h)} d_{\mathcal{C}(\Omega \cap (z=h))}(x)^2 dx \right] dh = 0 \quad (31)$$

où $u \in H^1(\Omega)$ l'unique solution du problème élastique suivant (avec $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D$ et $\Gamma \cap \Gamma_N = \Gamma_N \cap \Gamma_D = \Gamma_D \cap \Gamma = 0$):

$$\begin{cases} -div(Ae(u)) &= 0 & \text{in } \Omega \\ Ae(u).n &= g & \text{on } \Gamma_N \\ Ae(u).n &= 0 & \text{on } \Gamma \\ u &= 0 & \text{on } \Gamma_D \end{cases} \quad (32)$$

Multiplicateurs de Lagrange fixes pour le traitement des contraintes

On traite les contraintes en les ajoutant à la fonction objectif, coefficientés d'un multiplicateur fixe. On a alors le problème suivant (il n'est pas nécessaire de prendre la contrainte de volume au carré car on traite ici le cas où $V_{cible} = 0$) :

$$\min_{\Omega} \tilde{J}(\Omega) = l_{compl} * \int_{\partial\Gamma_N} g(s)u(s)ds + l_{vol} * \left(\int_{\Omega} dx - V_{cible} \right) + l_{cercle} P(\Omega) \quad (33)$$

Résultats

On considère la même initialisation pour tous les cas suivant, il s'agit de l'initialisation de la figure ??.

$$V_{cible} = 0. \int_D dx$$

- 1er cas : $l_{compl} = 1$; $l_{vol} = 7$; $l_{cercle} = 10$

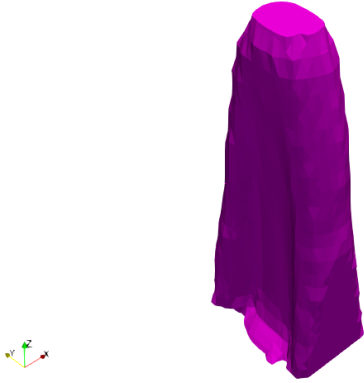


Figure 13: Après 121 itérations

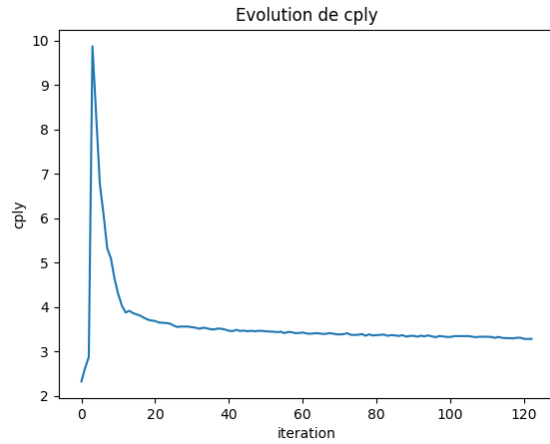


Figure 14: Evolution de la compliance

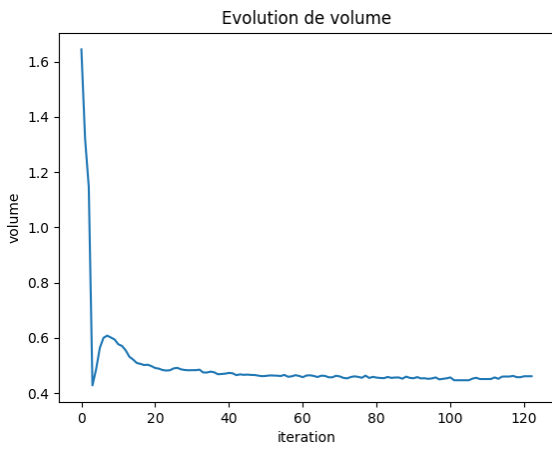


Figure 15: Evolution du volume

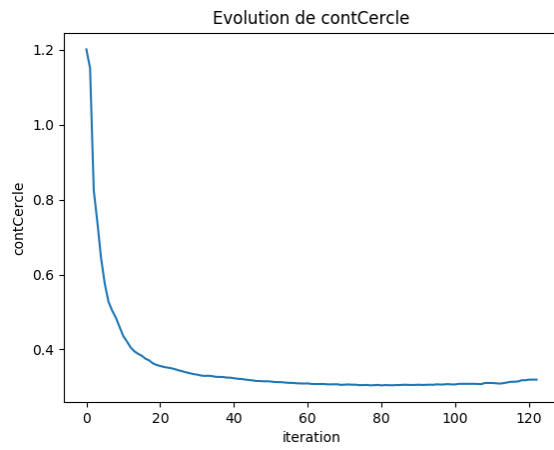


Figure 16: Evolution de la contrainte de cercle

- second cas : $l_{compl} = 1$; $l_{vol} = 10$; $l_{cercle} = 5$

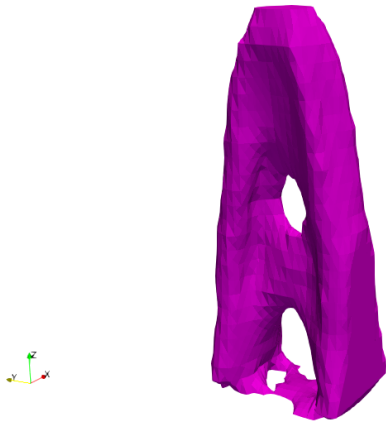


Figure 17: Après 151 itérations

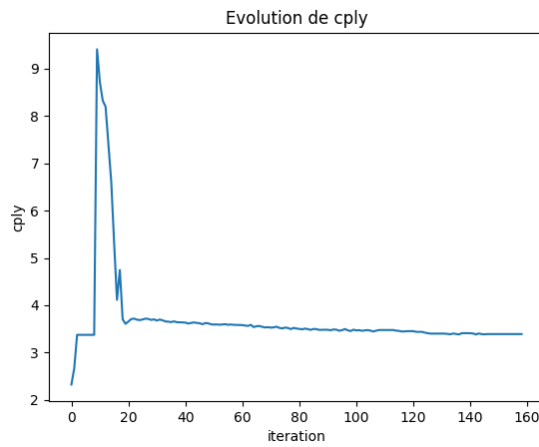


Figure 18: Evolution de la compliance

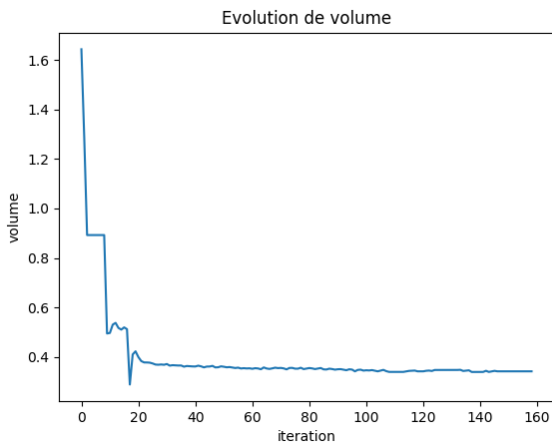


Figure 19: Evolution du volume

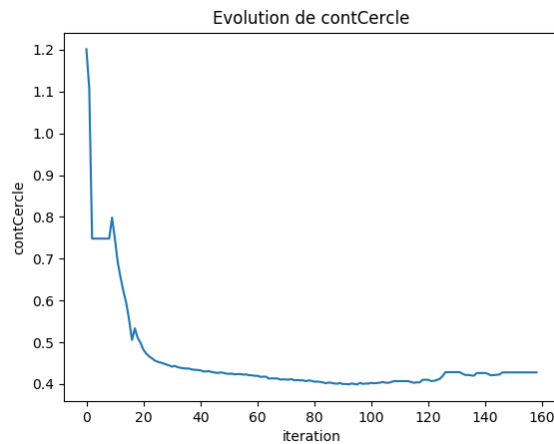


Figure 20: Evolution de la contrainte de cercle

Multiplicateurs pour les contraintes non fixes

On modifie maintenant les multiplicateurs de Lagrange en fonction du résultat de l'itération précédente. On prend ici V_{cible} différent de 0 mais on n'a pas à passer la contrainte au carré car ceci est régulé naturellement par le multiplicateur de Lagrange. Hum Hum...

$$l_{Vol} = 0.5 * \frac{\int_{\partial\Omega} (-Ae(u)e(u))ds}{\int_{\partial\Omega} 1ds} + \text{step} \frac{Vol - V_{cible}}{V_{cible}}$$

$$l_{Cercle} = \begin{cases} 0 & \text{si } P(\Omega) \leq 0 \\ l_{Cercle} + \text{step } P(\Omega) & \text{sinon} \end{cases} \quad (34)$$

On a alors le résultat suivant :

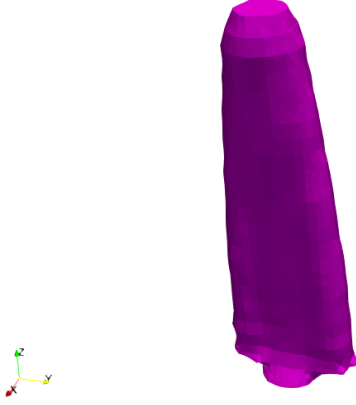


Figure 21: Après 81 itérations

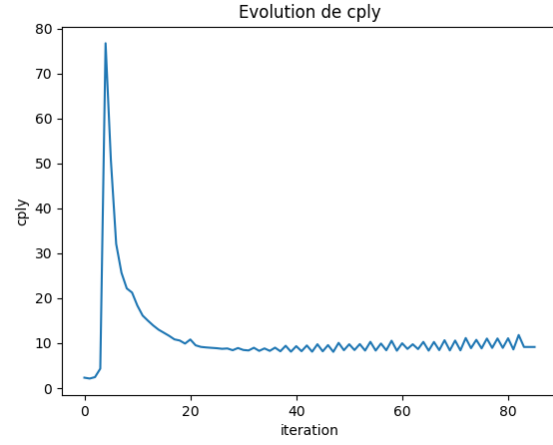


Figure 22: Evolution de la compliance

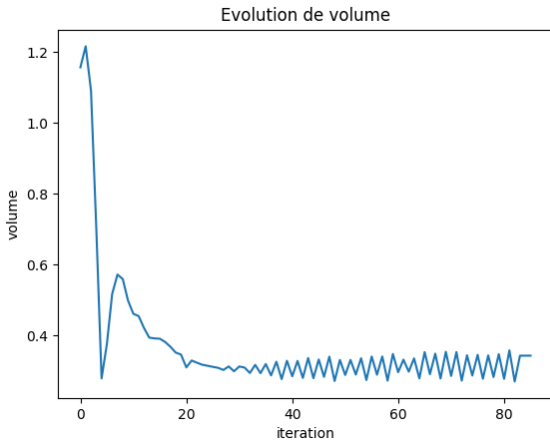


Figure 23: Evolution du volume

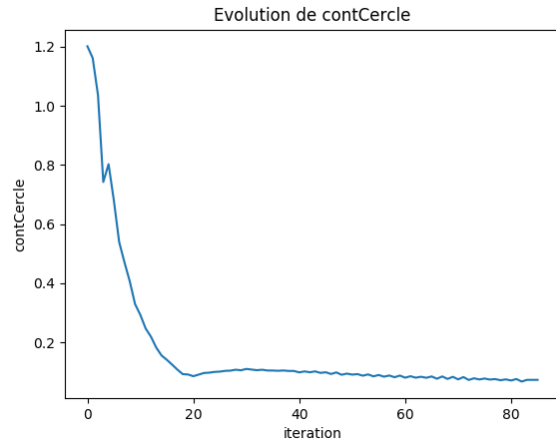


Figure 24: Evolution de la contrainte de cercle