

# Contrainte de circularité "par composantes connexes" (c.c.)

April 5, 2018

## 1 Objectif du projet

L'objectif ici est d'imposer à chaque composante connexe de la forme résultante d'avoir des sections circulaires. Ainsi, lors du processus couche par couche, chaque composante connexe d'une couche de la section devra "ressembler" à un cercle.

## 2 Décomposition en composantes connexes

L'algorithme de décomposition en composantes connexes est fait sous python de la manière suivante :

- Caractérisation des éléments solides : on définit une fonction qui donne les éléments qui sont solides ou non. Si la fonction levelset d'un des sommets de l'élément est négative, on considère l'élément complètement dans le solide.
- Caractérisation des voisins d'un élément : si l'élément est à côté est dans le même "état" (solide ou vide), il est considéré comme un voisin.
- Si deux éléments sont voisins, on leur attribue un parent commun et ainsi, on sépare les différentes composantes connexes.

## 3 2 dimensions

### 3.1 Contrainte de circularité

#### 3.1.1 Théorie

En reprenant ce qui a été fait précédemment, on a une nouvelle fonction objectif sur le volume  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . On note  $NC(\Omega)$  le nombre de composantes connexes du volume  $\Omega$  et, pour  $i \in [1, NC(\Omega)]$ ,  $\delta_{\Omega,i}(x)$  représente la fonction caractéristique de la composante connexe  $i$ . On a alors

$$J(\Omega) = \sum_i^{NC(\Omega)} \int_{\partial\Omega_i} \text{dist}(\Omega, i, s)^2 ds = \sum_i^{NC(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s) \text{dist}(\Omega, i, s)^2 ds \quad (1)$$

avec

$$\text{dist}(\Omega, i, s) = \sqrt{\left( X(s) - \frac{\int_{\Omega} \delta_{\Omega,i}(x) X(x) dx}{\int_{\Omega} \delta_{\Omega,i}(x) dx} \right)^2 + \left( Y(s) - \frac{\int_{\Omega} \delta_{\Omega,i}(x) Y(x) dx}{\int_{\Omega} \delta_{\Omega,i}(x) dx} \right)^2} - \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \delta_{\Omega,i}(x) dx}{\pi}} \quad (2)$$

Afin de simplifier le problème, on réalise une première hypothèse :

**Hypothesis 3.1.**  $NC(\Omega) = NC$ , on suppose que le nombre de composantes connexes ne dépend pas de  $\Omega$  (et donc pas besoin de le dériver).

On a alors  $J(\Omega) = \sum_i^{NC} \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s) \text{dist}(\Omega, i, s)^2 ds$  et, en dérivant par rapport à  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} J'(\Omega)(\theta) &= \int_{\Omega} 2\text{dist}(\Omega, i, s)\delta_{\Omega,i}(s)\text{dist}'(\Omega, i, s)(\theta)ds + \int_{\Omega} \text{dist}(\Omega, i, s)^2\delta'_{\Omega,i}(s)(\theta)ds \\ &+ \sum_i^{NC} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial\delta_{\Omega,i}(s)}{\partial n} \text{dist}(\Omega, i, s)^2 + 2\text{dist}(\Omega, i, s)\delta_{\Omega,i}(s)\frac{\partial\text{dist}(\Omega, i, s)}{\partial n} + H(s)\text{dist}(\Omega, i, s)^2\delta_{\Omega,i}(s) \right] \theta(s)n(s)ds \end{aligned} \quad (3)$$

**Hypothesis 3.2.** *On néglige les dérivées de  $\delta_{\Omega,i}(s)$  que ce soit de forme ou le gradient.*

En notant  $\text{dist}(\Omega, i, s) = \text{dist}(s)$  et en définissant comme suit les fonctions suivante :

$$\begin{aligned} A(\Omega, i) &= \int_{\Omega_i} dx = \int_{\Omega} \delta_{\Omega,i}(x)dx; \\ Cx(\Omega, i) &= \int_{\Omega_i} X(x)dx = \int_{\Omega} X(x)\delta_{\Omega,i}(x)dx; \quad Cy(\Omega, i) = \int_{\Omega_i} Y(x)dx = \int_{\Omega} Y(x)\delta_{\Omega,i}(x)dx; \\ Dx(\Omega, i, x) &= X(x) - \frac{Cx(\Omega, i)}{A(\Omega, i)} = Dx(i, x); \quad Dy(\Omega, i, x) = Y(x) - \frac{Cy(\Omega, i)}{A(\Omega, i)} = Dy(i, x); \\ DE(\Omega, i, x) &= Dx(\Omega, i, x)^2 + Dy(\Omega, i, x)^2; \quad \text{dist}(\Omega, i, s) = \text{dist}(i, s) \\ A_1(\Omega, i) &= \int_{\partial\Omega_i} \frac{2\text{dist}(i, s')Dx(i, s')}{\sqrt{DE(\Omega, i, s')A(\Omega, i)}} ds' = A_1(i) \quad A_2(\Omega, i) = \int_{\partial\Omega_i} \frac{2\text{dist}(i, s')Dy(i, s')}{\sqrt{DE(\Omega, i, s')A(\Omega, i)}} ds' = A_2(i) \\ A_3(\Omega, i) &= \int_{\partial\Omega_i} \frac{\text{dist}(i, s')}{\sqrt{A(\Omega, i)\pi}} ds' = A_3(i) \end{aligned} \quad (4)$$

on a le théorème suivant.

**Theorem 3.3.** *Avec les notations définies précédemment et sous les hypothèses 3.1 et 3.2, on a*

$$J'(\Omega)(\theta) = \sum_i^{NC} \int_{\partial\Omega_i} \left[ 2\text{dist}(i, s)\frac{\partial\text{dist}(i, s)}{\partial n} + H(s)\text{dist}(i, s)^2 - A_1Dx(i, s) - A_2Dy(i, s) - A_3 \right] \theta(s)n(s)ds \quad (5)$$

*Proof.* En utilisant les hypothèses 3.1 et 3.2, on a

$$\begin{aligned} J'(\Omega)(\theta) &= \sum_i^{NC} \int_{\partial\Omega} \left[ \underbrace{\frac{\partial\delta_{\Omega,i}(s)}{\partial n}\text{dist}(\Omega, i, s)^2}_{\text{néglige}} + 2\text{dist}(i, s)\delta_{\Omega,i}(s)\frac{\partial\text{dist}(i, s)}{\partial n} + H(s)\text{dist}(i, s)^2\delta_{\Omega,i}(s) \right] \theta(s)n(s)ds \\ &+ \int_{\Omega} 2\text{dist}(i, s)\delta_{\Omega,i}(s)\text{dist}'(i, s)(\theta)ds + \underbrace{\int_{\Omega} \text{dist}(i, s)^2\delta'_{\Omega,i}(s)(\theta)ds}_{\text{néglige}} \end{aligned} \quad (6)$$

et donc :

$$\begin{aligned} J'(\Omega)(\theta) &= \sum_i^{NC} \int_{\partial\Omega} \left[ 2\text{dist}(i, s)\delta_{\Omega,i}(s)\frac{\partial\text{dist}(i, s)}{\partial n} + H(s)\text{dist}(i, s)^2\delta_{\Omega,i}(s) \right] \theta(s)n(s)ds \\ &+ \int_{\Omega} 2\text{dist}(i, s)\delta_{\Omega,i}(s)\text{dist}'(i, s)(\theta)ds \end{aligned} \quad (7)$$

En continuant à négliger les dérivées de la caractéristique de la composante connexe, on a aussi

:

$$\begin{aligned}
A'(\Omega, i)(\theta) &= \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s)\theta(s)n(s)ds + \overbrace{\int_{\Omega} \delta'_{\Omega,i}(x)(\theta)dx}^{\text{neglige}} = \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s)\theta(s)n(s)ds \\
Cx'(\Omega, i)(\theta) &= \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s)X(s)\theta(s)n(s)ds + \overbrace{\int_{\Omega} X(x)\delta'_{\Omega,i}(x)(\theta)dx}^{\text{neglige}} = \int_{\partial\Omega} X(s)\delta_{\Omega,i}(s)\theta(s)n(s)ds \\
Cy'(\Omega, i)(\theta) &= \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s)Y(s)\theta(s)n(s)ds + \overbrace{\int_{\Omega} Y(x)\delta'_{\Omega,i}(x)(\theta)dx}^{\text{neglige}} = \int_{\partial\Omega} Y(s)\delta_{\Omega,i}(s)\theta(s)n(s)ds
\end{aligned} \tag{8}$$

d'où

$$\begin{aligned}
Dx'(i, x)(\theta) &= \frac{-1}{A(\Omega, i)} \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s)Dx(i, s)\theta(s)n(s)ds \\
Dy'(i, x)(\theta) &= \frac{-1}{A(\Omega, i)} \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s)Dy(i, s)\theta(s)n(s)ds
\end{aligned} \tag{9}$$

Cela donne donc :

$$\begin{aligned}
J'(\Omega)(\theta) &= \sum_i^{NC} \left[ \int_{\partial\Omega} \left[ \delta_{\Omega,i}(s) \left( 2\text{dist}(i, s) \frac{\partial \text{dist}(i, s)}{\partial n} + H(s)\text{dist}(i, s)^2 \right) \theta(s)n(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \overbrace{\int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s') \frac{2\text{dist}(i, s')Dx(i, s')}{\sqrt{DE(\Omega, i, s')A(\Omega, i)}} ds'}^{\text{A1}} Dx(i, s)\delta_{\Omega,i}(s)\theta(s)n(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \overbrace{\int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s') \frac{2\text{dist}(i, s')Dy(i, s')}{\sqrt{DE(\Omega, i, s')A(\Omega, i)}} ds'}^{\text{A2}} Dy(i, s)\delta_{\Omega,i}(s)\theta(s)n(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \overbrace{\int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s') \frac{\text{dist}(i, s')}{\sqrt{A(\Omega, i)\pi}} ds'}^{\text{A3}} \delta_{\Omega,i}(s)\theta(s)n(s) \right] ds \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

d'où le résultat.  $\square$

La régularisation du problème entraîne  $NC$  problèmes variationnels du type : trouver  $Q_i$  tel que pour tout  $W \in H^1(D)$ ,

$$\begin{aligned}
\int_D \alpha^2 \nabla Q_i \nabla W + Q_i W &= \\
\int_{\partial\Omega_i} \left[ 2\text{dist}(i, s) \frac{\partial \text{dist}(i, s)}{\partial n} + H(s)\text{dist}(i, s)^2 - A_1(i)Dx(i, s) - A_2(i)Dy(i, s) - A_3(i) \right] W ds
\end{aligned} \tag{11}$$

On a alors une vitesse d'advection par composante connexe :  $vh_i = -Q_i$  et la vitesse d'advection totale est  $vh = \sum_i^{NC} vh_i$

### 3.1.2 Gestion du cercle sur le bord

Dans le cas précédent, la manière de gérer le fait le domaine  $\Omega$  puisse couper les bords du domaine de calcul est la suivante :

- on "modifie" la fonction level set  $\phi$  du domaine afin que tout le solide soit représenté à l'intérieur du domaine. Pour cela, on résout un problème variationnel afin que

$$\begin{cases} \forall x \in D \setminus (\partial D \cup \partial\Omega), \phi_{modifie}(x) = \phi(x) \\ \forall x \in \partial D \cup \partial\Omega, \phi_{modifie}(x) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

- on calcule ensuite la fonction objectif de circularité. Ainsi, une composante connexe qui coupait le bord verra l'intégralité de sa frontière compter, même la partie qui était préalablement sur le bord du domaine de calcul.
- le cercle correspondant va couper le bord du domaine. Ceci est accepté et l'algorithme va chercher à pousser la composante connexe vers ce cercle dont une partie est "fictive". La forme résultante sur le domaine de calcul sera un cercle coupé.
- l'optimum de la fonction objectif ne sera pas 0 mais on pourra alors considérer que la forme est optimale.

D'autres choix de modélisation pourraient être adoptés. Par exemple :

- on pourrait décider de calculer la distance du centre du cercle au bord du domaine de calcul. Si le rayon du cercle est supérieur à cette distance, cela signifie que le cercle va couper le bord du domaine. On prend alors pour cercle approximateur le cercle trouvé précédemment translaté dans la direction qui avait permis de trouver la distance du centre du cercle au bord du domaine de calcul, d'un facteur faisant que le bord du cercle se retrouve au bord du domaine de calcul (facteur rayon-distance du centre). Le calcul de la fonction objectif se fait alors avec ce cercle approximateur. Il faut cependant dériver cette modification par rapport à la à la forme  $\Omega$ .

### 3.1.3 Gestion des changements de topologie

On remarque qu'un changement de topologie telle qu'une fusion de deux composantes connexes ou la division de l'une d'elle en deux distinctes entraîne une discontinuité de la fonction objectif et doit donc être géré dans l'algorithme d'optimisation afin que la descente de gradient ne se bloque pas. Plusieurs possibilités sont ici possibles :

- On accepte automatiquement l'itération s'il y a eu changement de topologie.
- On adapte une fonction de tolérance qui permet certains changements de topologie et en empêche d'autres.

On a choisi pour le cas en deux dimensions d'utiliser la première solution.

### 3.1.4 Remarque de modélisation

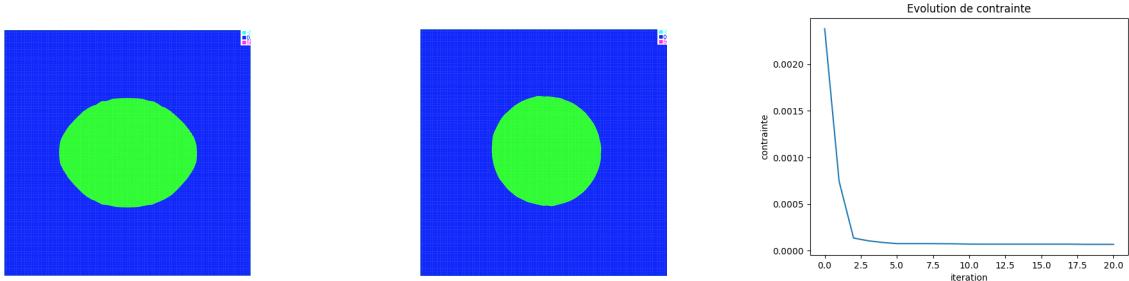
On note que la gestion ici de la contrainte de cercle impacte le résultat. En effet, si une composante connexe du solide n'est pas convexe (trou au milieu en particulier), la modélisation choisie va tendre à remplir ce vide afin d'obtenir un vrai cercle. Les tubes ne pourront être modélisés par cette méthode.

### 3.1.5 Algorithme de résolution

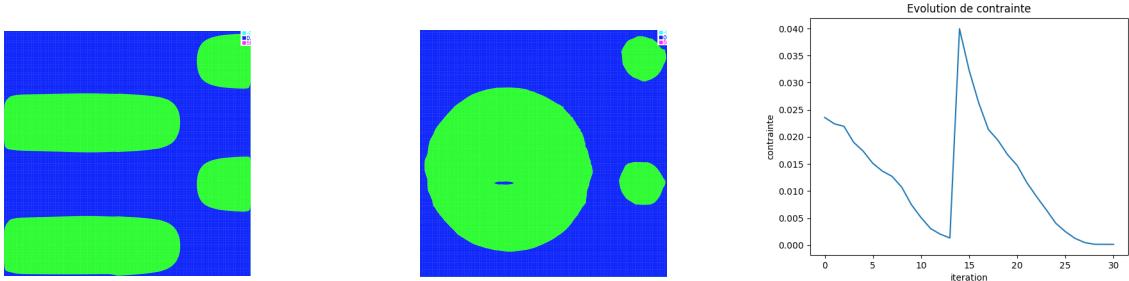
voir le code

### 3.1.6 Résultats

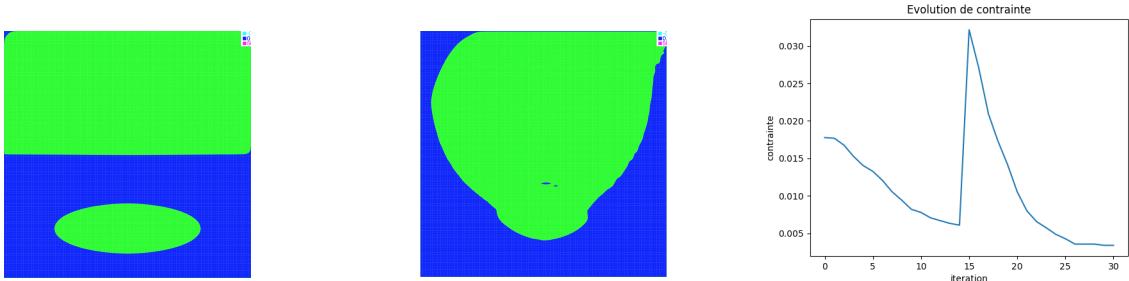
**Initialisation 1** On considère l'initialisation présentée en Figure ???. Le résultat, après 20 itérations, est présenté en Figure ???. La variation de la fonction objectif en fonction des itérations est présentée en Figure ???.



**Initialisation 2** On considère l'initialisation présentée en Figure ???. Le résultat, après 20 itérations, est présenté en Figure ???. La variation de la fonction objectif en fonction des itérations est présentée en Figure ???. On constate bien pic dans la fonction objectif au moment de fusion entre les deux composantes connexes.



**Initialisation 3** On considère l'initialisation présentée en Figure ???. Le résultat, après 20 itérations, est présenté en Figure ???. La variation de la fonction objectif en fonction des itérations est présentée en Figure ???. On constate bien pic dans la fonction objectif au moment de fusion entre les deux composantes connexes.



## 3.2 Ajout d'une contrainte de volume

### 3.2.1 Contrainte de volume

On ajoute à la fonction objectif de circularité précédente une contrainte de volume : le volume global de la section doit rester constant, c'est-à-dire que :

$$\int_{\Omega} dx = \int_{\Omega_0} dx = V_0 \quad (13)$$

On a donc une contrainte du type

$$C(\Omega) = \left( \int_{\Omega} dx - V_0 \right)^2 - \text{tol}_{\text{cont}} \quad (14)$$

On peut calculer la vitesse d'advection liée à la contrainte en résolvant un problème de régularisation et en prenant  $vh_{vol} = -Q$ :

$$\int_D \alpha^2 \nabla Q \nabla W + QW dx = \int_{\partial\Omega} 2 \left( \int_{\Omega} dx - V_0 \right) W ds \quad (15)$$

### 3.2.2 Gestion de la contrainte

En utilisant un multiplicateur de Lagrange fixe, on a la fonction Lagrangienne suivante :

$$L(\Omega) = J(\Omega) = \sum_i^{NC(\Omega)} \int_{\partial\Omega_i} \text{dist}(\Omega, i, s)^2 ds + l_{vol} C(\Omega) \quad (16)$$

et on prend pour vitesse d'advection (en utilisant le même facteur  $\alpha$  dans tous les problèmes de régularisation)

$$vh = \sum_i^{NC} vh_{cercl, i} + l_{vol} vh_{vol} \quad (17)$$

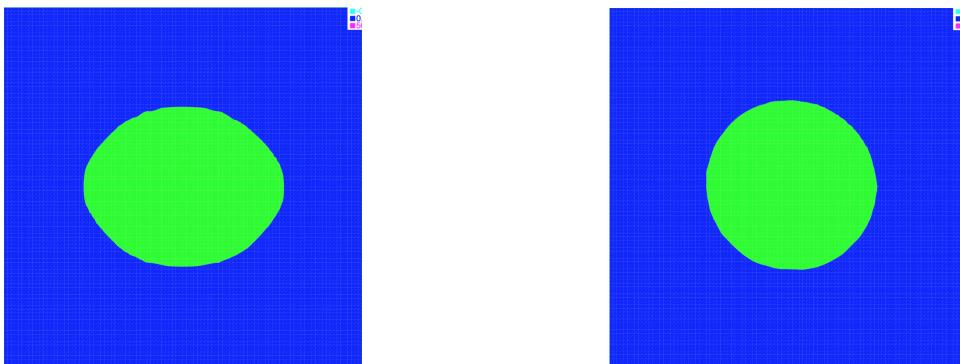
et on met à jour le multiplicateur de Lagrange de la manière suivante :

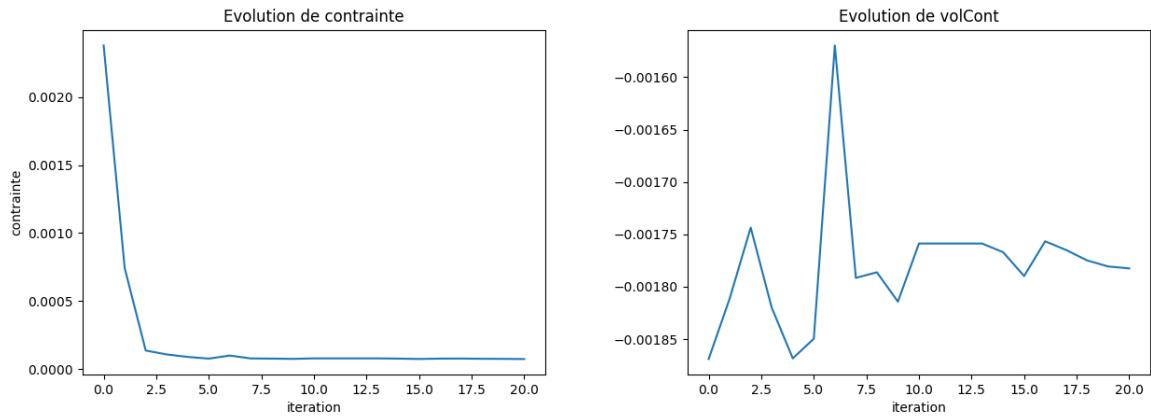
$$\begin{cases} l_{vol} = 0 & \text{si } C(\Omega) \leq 0 \\ l_{vol} = l_{vol} + \text{step}_{vol} C(\Omega) & \text{sinon} \end{cases} \quad (18)$$

### 3.2.3 Résultats

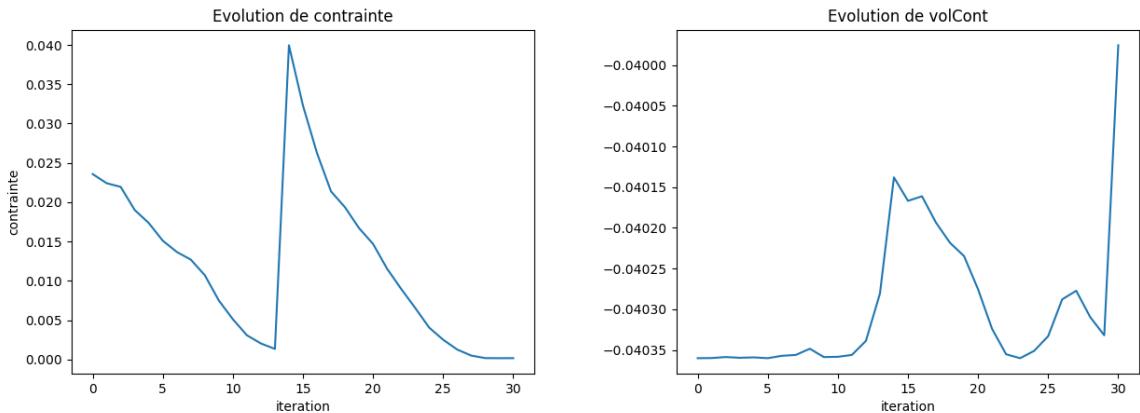
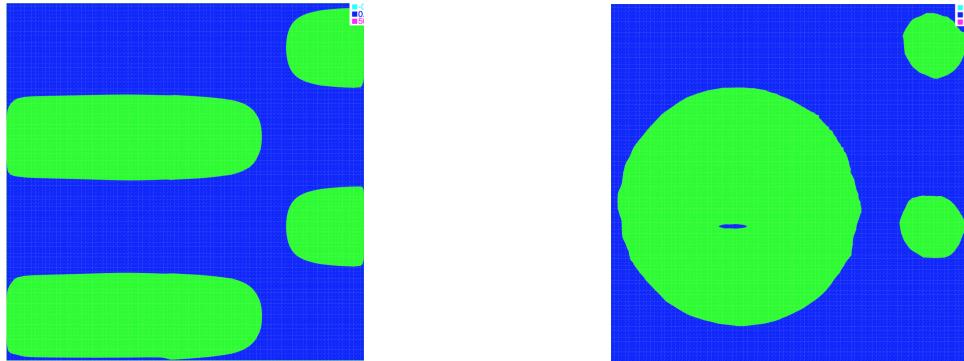
On reprend les initialisations précédentes pour tester cette partie. On choisit ici pour tolérance 1% du volume de départ pour l'initialisation 1 et 10% pour les deux suivantes. Ce choix est arbitraire et peut être adapté. En l'occurrence ici, avec ces choix là, on n'a pas de variation de volume.

**Initialisation 1** On considère l'initialisation présentée en Figure ???. Le résultat, après 20 itérations, est présenté en Figure ???. La variation de la fonction objectif en fonction des itérations est présentée en Figure ?? et celle du volume en Figure ??.

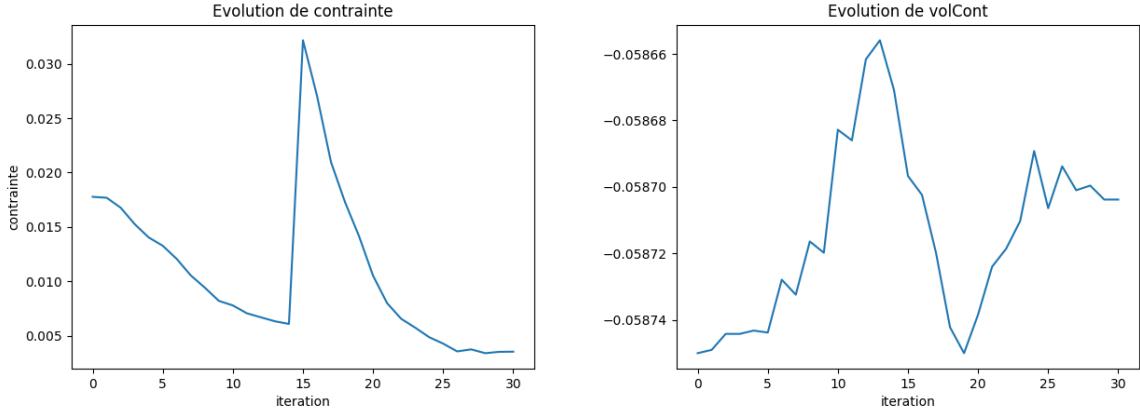
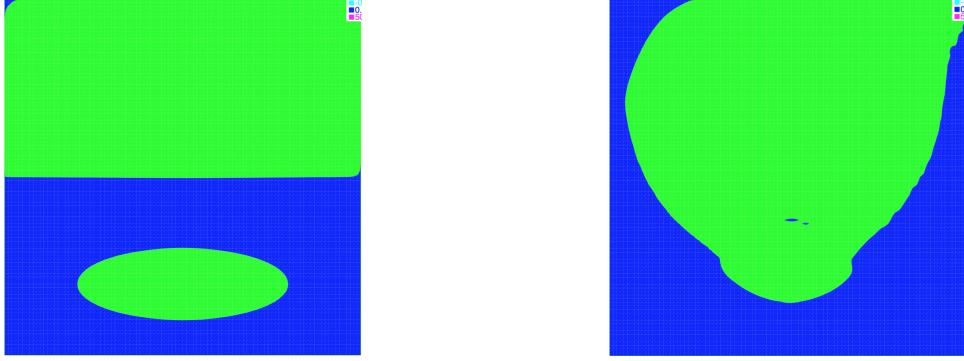




**Initialisation 2** On considère l'initialisation présentée en Figure ???. Le résultat, après 20 itérations, est présenté en Figure ???. La variation de la fonction objectif en fonction des itérations est présentée en Figure ?? et celle de volume en Figure ???. On constate bien pic dans la fonction objectif au moment de fusion entre les deux composantes connexes.



**Initialisation 3** On considère l'initialisation présentée en Figure ???. Le résultat, après 20 itérations, est présenté en Figure ???. La variation de la fonction objectif en fonction des itérations est présentée en Figure ?? et celle du volume en Figure ???. On constate bien pic dans la fonction objectif au moment de fusion entre les deux composantes connexes.



## 4 3 dimensions

### 4.1 Contrainte de circularité

#### 4.1.1 Théorie

On considère maintenant un volume  $\Omega$  en trois dimensions. Il modélise un solide construit couche par couche, de direction privilégiée ( $Oz$ ). On cherche à optimiser chaque section plane du solide d'équation ( $z = h$ ) afin que chaque composante connexe du solide sur cette section soit circulaire. En notant  $H$  la hauteur totale du solide,  $dh$  l'épaisseur d'une couche et  $N_{couche}$  le nombre de couches, on a donc la fonction objectif suivante :

$$J(\Omega) = \int_0^H \sum_i^{NC(\Omega,h)} \int_{\partial\Omega_i} \text{dist}(\Omega, i, h, s)^2 ds dh = \int_0^H \sum_i^{NC(\Omega,h)} \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s) \delta_{z=h}(s) \text{dist}(\Omega, i, h, s)^2 ds dh \quad (19)$$

On applique ici aussi l'hypothèse 3.1 et on peut donc simplifier la fonction objectif :

$$J(\Omega) = \int_0^H \sum_i^{NC(h)} \int_{\partial\Omega_i} \text{dist}(\Omega, i, h, s)^2 ds dh = \int_0^H \sum_i^{NC(h)} \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s) \delta_{z=h}(s) \text{dist}(\Omega, i, h, s)^2 ds dh \quad (20)$$

On pose une nouvelle hypothèse afin de déterminer la dérivée de forme de cette fonction objectif.

**Hypothesis 4.1.** *On néglige  $\frac{\partial \delta_{z=h}(s)}{\partial n}$ .*

En notant  $\text{dist}(\Omega, i, s) = \text{dist}(s)$  et en définissant comme suit les fonctions suivante :

$$A(\Omega, i, h) = \int_{\Omega_i} dx = \int_{\Omega} \delta_{z=h}(x) \delta_{\Omega,i}(x) dx;$$

$$Cx(\Omega, i, h) = \int_{\Omega_i} X(x) dx = \int_{\Omega} X(x) \delta_{z=h}(x) \delta_{\Omega,i}(x) dx;$$

$$Cy(\Omega, i, h) = \int_{\Omega_i} Y(x) dx = \int_{\Omega} Y(x) \delta_{z=h}(x) \delta_{\Omega,i}(x) dx$$

$$Dx(\Omega, i, h, x) = X(x) - \frac{Cx(\Omega, i, h)}{A(\Omega, i, h)} = Dx(i, h, x);$$

$$Dy(\Omega, i, h, x) = Y(x) - \frac{Cy(\Omega, i, h)}{A(\Omega, i, h)} = Dy(i, h, x);$$

$$DE(\Omega, i, h, x) = Dx(\Omega, i, h, x)^2 + Dy(\Omega, i, h, x)^2;$$

$$\text{dist}(\Omega, i, h, s) = \text{dist}(i, h, s)$$

$$A_1(\Omega, i, h) = \int_{\partial\Omega_i} \frac{2\text{dist}(i, h, s') Dx(i, h, s')}{\sqrt{DE(\Omega, i, h, s') A(\Omega, i, h)}} ds' = A_1(i, h) = A_1 \quad A_2(\Omega, i, h) = \int_{\partial\Omega_i} \frac{2\text{dist}(i, h, s') Dy(i, h, s')}{\sqrt{DE(\Omega, i, h, s') A(\Omega, i, h)}} ds' = A_2(i, h) = A_2$$

$$A_3(\Omega, i, h) = \int_{\partial\Omega_i} \frac{\text{dist}(i, h, s')}{\sqrt{A(\Omega, i, h)\pi}} ds' = A_3(i, h) = A_3$$

(21)

on a le théorème suivant.

**Theorem 4.2.** *Avec les notations définies précédemment et sous les hypothèses 3.1 et 3.2, on a*

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_0^H \sum_i^{NC(h)} \int_{\partial\Omega_i} \left[ 2\text{dist}(i, h, s) \frac{\partial \text{dist}(i, h, s)}{\partial n} + H(s) \text{dist}(i, h, s)^2 - A_1 Dx(i, h, s) - A_2 Dy(i, h, s) - A_3 \right] \theta(s) n(s) ds dh \quad (22)$$

*Proof.* En utilisant les hypothèses 3.1, 3.2 et 4.1, on a ( $\delta_{z=h}$  est indépendent de  $\Omega$ )

$$\begin{aligned} J'(\Omega)(\theta) &= \int_0^H \sum_i^{NC(h)} \left[ \int_{\partial\Omega} \overbrace{\left( \frac{\partial \delta_{\Omega,i}(s)}{\partial n} \delta_{z=h}(s) + \frac{\partial \delta_{z=h}(s)}{\partial n} \delta_{\Omega,i}(s) \right) \text{dist}(\Omega, i, s)^2}^{\text{neglige}} \theta(s) n(s) ds \right. \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left[ 2\text{dist}(i, s) \delta_{\Omega,i}(s) \delta_{z=h}(s) \frac{\partial \text{dist}(i, s)}{\partial n} + H(s) \text{dist}(i, s)^2 \delta_{\Omega,i}(s) \delta_{z=h}(s) \right] \theta(s) n(s) ds \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} 2\text{dist}(i, s) \delta_{\Omega,i}(s) \delta_{z=h}(s) \text{dist}'(i, s)(\theta) ds + \underbrace{\int_{\Omega} \text{dist}(i, s)^2 \delta_{z=h}(s) \delta'_{\Omega,i}(s)(\theta) ds}_{\text{neglige}} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Or, comme précédemment, on a

$$A'(\Omega, i, h)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s) \delta_{z=h}(s) \theta(s) n(s) ds$$

$$Cx'(\Omega, i)(\theta) = \int_{\partial\Omega} X(s) \delta_{z=h}(s) \delta_{\Omega,i}(s) \theta(s) n(s) ds; \quad Cy'(\Omega, i)(\theta) = \int_{\partial\Omega} Y(s) \delta_{z=h}(s) \delta_{\Omega,i}(s) \theta(s) n(s) ds \quad (24)$$

d'où

$$Dx'(i, h, x)(\theta) = \frac{-1}{A(\Omega, i, h)} \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s) \delta_{z=h}(s) Dx(i, h, s) \theta(s) n(s) ds \quad (25)$$

$$Dy'(i, h, x)(\theta) = \frac{-1}{A(\Omega, i, h)} \int_{\partial\Omega} \delta_{\Omega,i}(s) \delta_{z=h}(s) Dy(i, h, s) \theta(s) n(s) ds$$

Cela donne donc :

$$\begin{aligned}
J'(\Omega)(\theta) = & \int_0^H \sum_i^{NC(h)} \left[ \int_{\partial\Omega} \left[ \delta_{z=h}(s) \delta_{\Omega,i}(s) \left( 2\text{dist}(i, h, s) \frac{\partial \text{dist}(i, h, s)}{\partial n} + H(s) \text{dist}(i, h, s)^2 \right) \theta(s) n(s) \right. \right. \\
& - \overbrace{\int_{\partial\Omega} \delta_{z=h}(s') \delta_{\Omega,i}(s') \frac{2\text{dist}(i, h, s') Dx(i, h, s')}{\sqrt{DE(\Omega, i, h, s') A(\Omega, i, h)}} ds' Dx(i, h, s) \delta_{z=h}(s) \delta_{\Omega,i}(s) \theta(s) n(s)}^{\text{A1}} \\
& - \overbrace{\int_{\partial\Omega} \delta_{z=h}(s') \delta_{\Omega,i}(s') \frac{2\text{dist}(i, h, s') Dy(i, h, s')}{\sqrt{DE(\Omega, i, h, s') A(\Omega, i, h)}} ds' Dy(i, h, s) \delta_{z=h}(s) \delta_{\Omega,i}(s) \theta(s) n(s)}^{\text{A2}} \\
& \left. \left. - \int_{\partial\Omega} \delta_{z=h}(s') \delta_{\Omega,i}(s') \frac{\text{dist}(i, h, s')}{\sqrt{A(\Omega, i, h) \pi}} ds' \delta_{z=h}(s) \delta_{\Omega,i}(s) \theta(s) n(s) \right] dh \right] (26)
\end{aligned}$$

On discrétise ensuite en espace en calculant la contrainte sur chaque couche. La dérivée de forme ne dépendant ici que de  $x$  et  $y$  et donc du plan ( $z = h$ ), on simplifie le problème de régularisation, Pour chaque composante connexe de chaque couche, on résout  $NC(h)$  problèmes :

$$\begin{aligned} \int_{D \cup (z=h)} \alpha^2 \nabla Q_i \nabla W + Q_i W ds = \\ \int_{\partial \Omega_i} \left[ 2 \text{dist}(i, h, s) \frac{\partial \text{dist}(i, h, s)}{\partial n} + H(s) \text{dist}(i, h, s)^2 - A_1(i, h) D x(i, h, s) - A_2(i, h) D y(i, h, s) - A_3(i, h) \right] W ds \end{aligned} \quad (27)$$

On obtient alors pour chaque composante connexe une vitesse d'advection sur le plan,  $v_h(h, i)$ . On la multiplie par une fonction gaussienne en  $z$  centrée sur  $z = h$  et "normalisée". On a alors pour chaque section une vitesse d'advection :

$$v_h(\Omega, z = h) = \sum_{i=1}^{i=NC(h)} \frac{v_h(h, i) * \exp(-100(z - h)^2)}{\int_D \exp(-100(z' - h)^2) dx' dy' dz'} \quad (28)$$

Pour avoir la vitesse d'advection totale, il suffit ensuite de sommer sur le nombre de couches :

$$v_h(\Omega) = \sum_{couche=0}^{couche=N_{couche}} dh * v_h(\Omega, z = h_{couche}) \quad (29)$$

#### 4.1.2 Gestion des cercles sur le bord

La gestion des cercles sur les bords du domaine de calcul s'effectue de la même manière que dans le cas de la dimension 2.

#### 4.1.3 Gestion des changements de topologie

Trois méthodes différentes ont été expérimentées :

- Adaptation de la tolérance afin que les changements de topologies soient absorbés.
  - Acceptation de l'itération dès que l'une des sections subit un changement de topologie.
  - On n'inclue pas dans le calcul de la fonction objectif la section qui change de topologie (on garde son impact sur la vitesse d'advection cependant).

#### 4.1.4 Algorithme

#### 4.1.5 Résultats

**Adaptation de la tolérance** On teste ici la première technique de gestion des changements de topologie.

**Initialisation 1** On utilise ici l'initialisation présentée dans la figure ??.



Figure 1: Initialisation 1

On obtient le résultat suivant (Figure ??) après 98 itérations et la décroissance de la fonction objectif suivante:

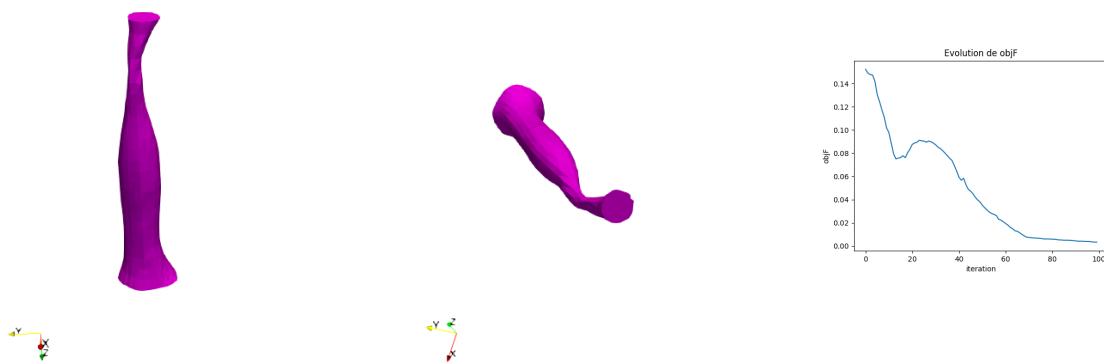


Figure 2: Résultats de l'initialisation 1 et décroissance de la fonction objectif

**Initialisation 2** On utilise ici l'initialisation présentée dans la figure ??.

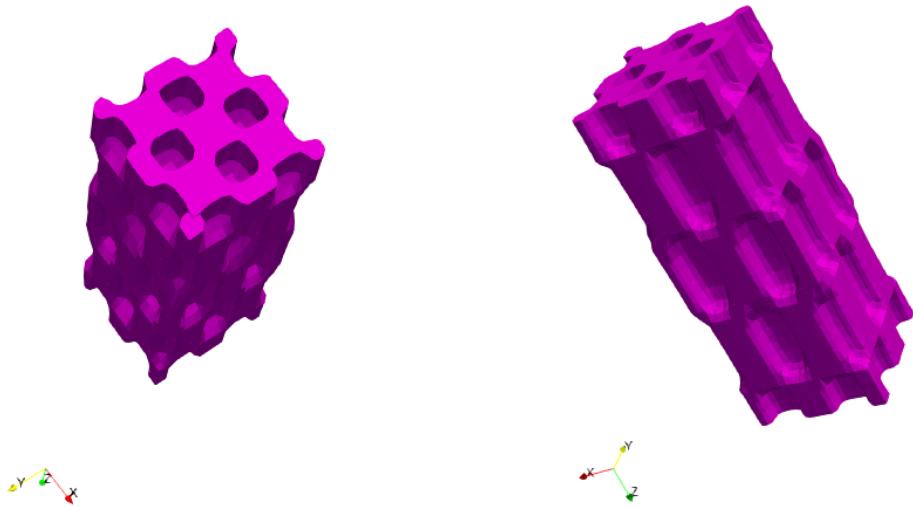


Figure 3: Initialisation 2

On obtient le résultat suivant (Figure ??) après 199 itérations et la décroissance de la fonction objectif suivante:

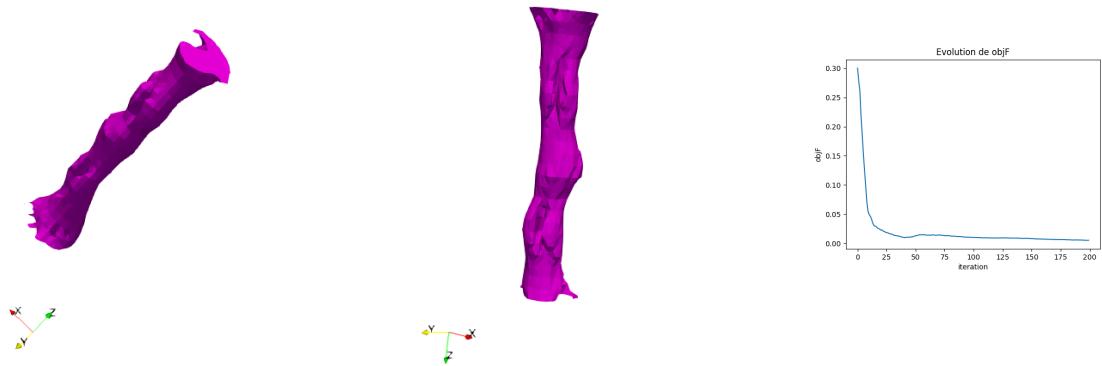


Figure 4: Résultats de l'initialisation 2 et décroissance de la fonction objectif

**Initialisation 3** On utilise ici l'initialisation présentée dans la figure ??.

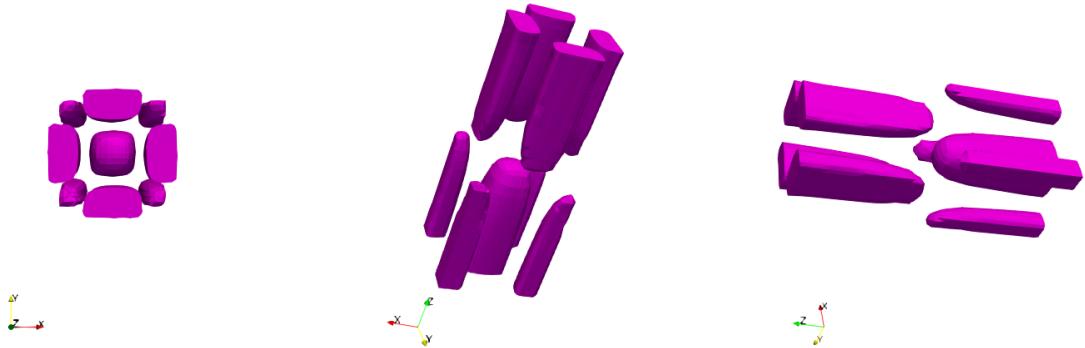


Figure 5: Initialisation 3

On obtient le résultat suivant (Figure ??) après 98 itérations et la décroissance de la fonction objectif suivante:

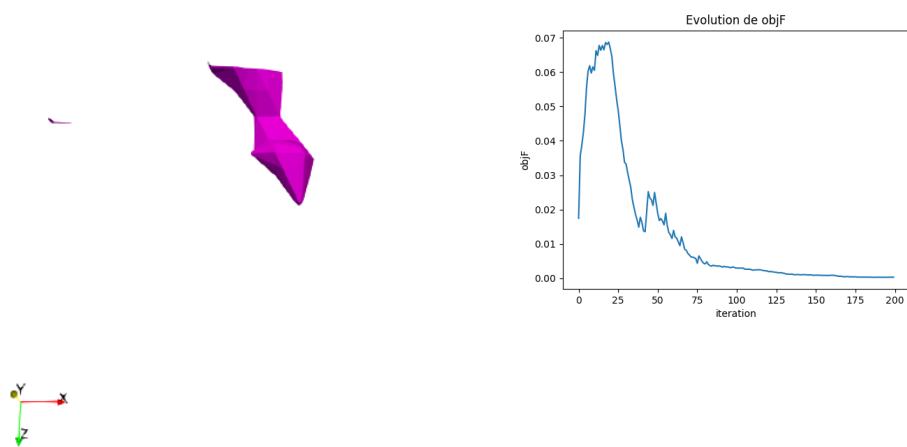


Figure 6: Résultats de l'initialisation 3 et décroissance de la fonction objectif

**Acceptation de l'itération dès que l'une des sections change de topologie** On teste ici la seconde technique de gestion des changements de topologie.

**Initialisation 1** On utilise ici l'initialisation présentée dans la figure ??.



Figure 7: Initialisation 1

On obtient le résultat suivant (Figure ??) après 119 itérations et la décroissance de la fonction objectif suivante:

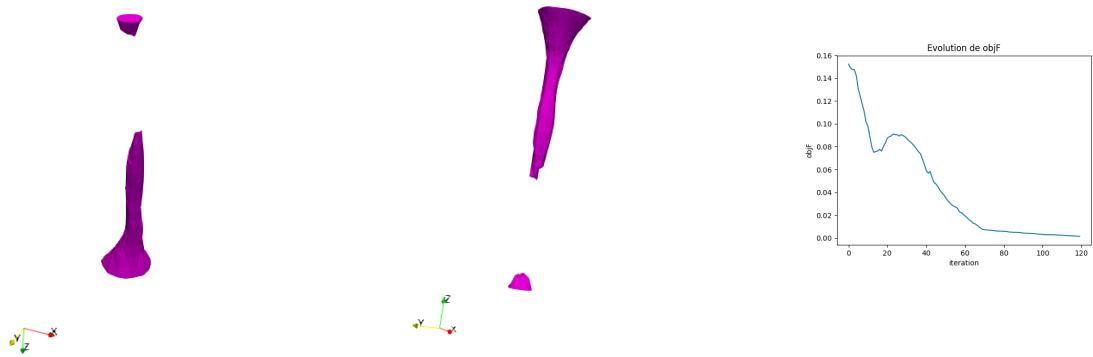


Figure 8: Résultats de l'initialisation 1 et décroissance de la fonction objectif

**Initialisation 2** On utilise ici l'initialisation présentée dans la figure ??.

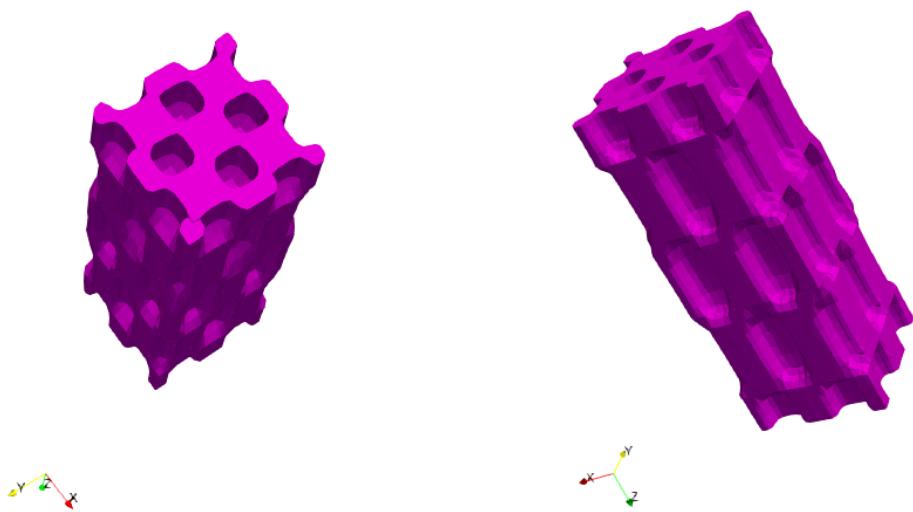


Figure 9: Initialisation 2

On obtient le résultat suivant (Figure ??) après 119 itérations et la decroissance de la fonction objectif suivante:



Figure 10: Résultats de l'initialisation 2 et décroissance de la fonction objectif

**Initialisation 3** On utilise ici l'initialisation présentée dans la figure ??.

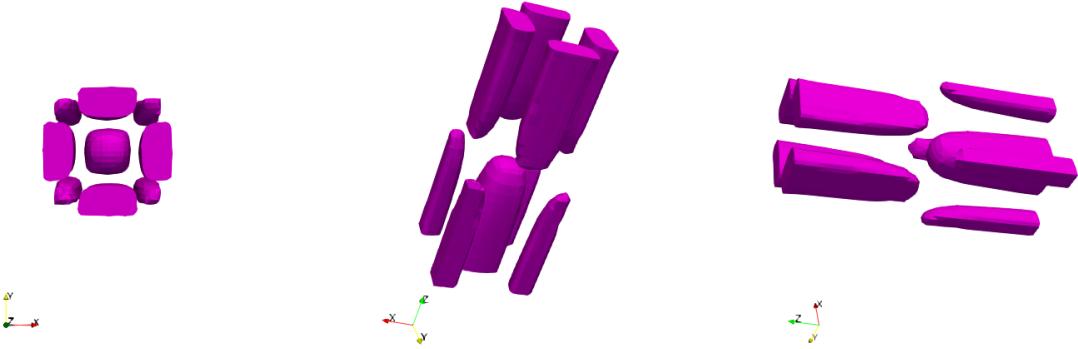


Figure 11: Initialisation 3

On obtient le résultat suivant (Figure ??) après 98 itérations et la décroissance de la fonction objectif suivante:

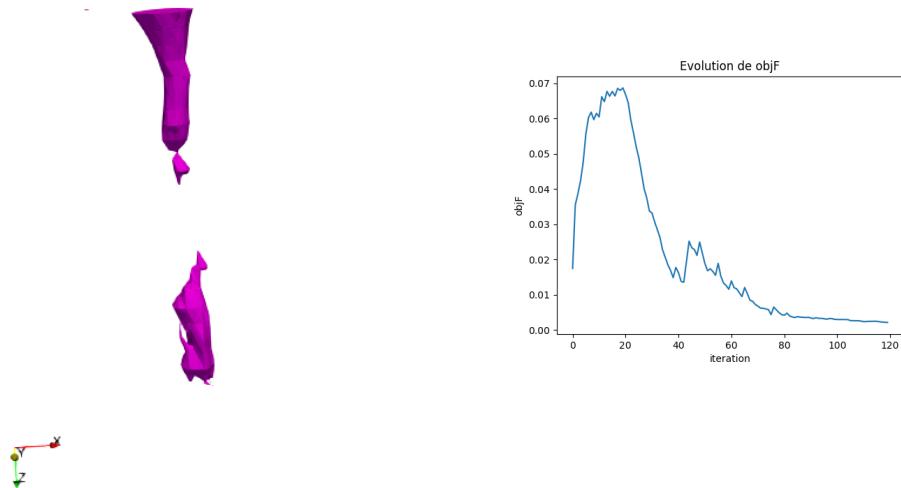


Figure 12: Résultats de l'initialisation 3 et décroissance de la fonction objectif

## 5 Optimisation de la circularité par c.c. avec contrainte de volume par section

### 5.1 Théorie

On décide maintenant, de la même manière que dans le cas 2D, d'ajouter pour chaque section une contrainte de conservation de la surface. On conserve toutes les hypothèses déjà faites et on obtient une nouvelle fonction objectif :

$$\tilde{J}(\Omega) = J(\Omega) + l_{vol} * V(\Omega) = \int_0^H \sum_i^{NC(h)} \int_{\partial\Omega_i} \text{dist}(\Omega, i, h, s)^2 ds dh + l_{vol} * \int_0^H \sum_i^{NC(h)} \left( \int_{\partial\Omega_i} ds - V_{cible}, i \right)^2 - tol \quad (30)$$

On garde donc la vitesse d'advection déjà déterminée et on ajoute une nouvelle vitesse liée au volume. En prenant la même partie bilinéaire de l'équation de régularisation de la vitesse que précédemment, on a la linéarité sur la vitesse d'advection.

Pour chaque section, on résout donc un problème variationnel du type :

$$\int_{D \cup (z=h)} \alpha^2 \nabla Q_i \nabla W + Q_i W ds = \int_{\partial \Omega_i} grh_{vol,i} W ds \quad (31)$$

avec

$$grh_{vol,i} = 2 \left( \int_{\partial \Omega_i} ds - V_{cible}, i \right) \quad (32)$$

La vitesse d'advection finale sera donc  $v = v_{cerde} + l_{vol}v_{vol}$ .

On a présenté ce résultat avec  $l_{vol}$  non précisé. On utilise ici une méthode Lagrangienne. On initialise alors  $l_{vol}$  à 0 et on le met à jour au fur et à mesure des itérations selon le schéma suivant :

$$\begin{cases} l_{vol} = 0 & \text{si } V(\Omega) \leq 0 \\ l_{vol} = l_{vol} + \text{step}_{vol} V(\Omega) & \text{sinon} \end{cases} \quad (33)$$

La gestion des cercles sur le bord ainsi et les changements de topologie sont traités de la même manière que précédemment.

## 5.2 Algorithme

## 5.3 Résultats

**Adaptation de la tolérance** On teste ici la première technique de gestion des changements de topologie.

**Initialisation 2** On utilise ici l'initialisation présentée dans la figure ??.

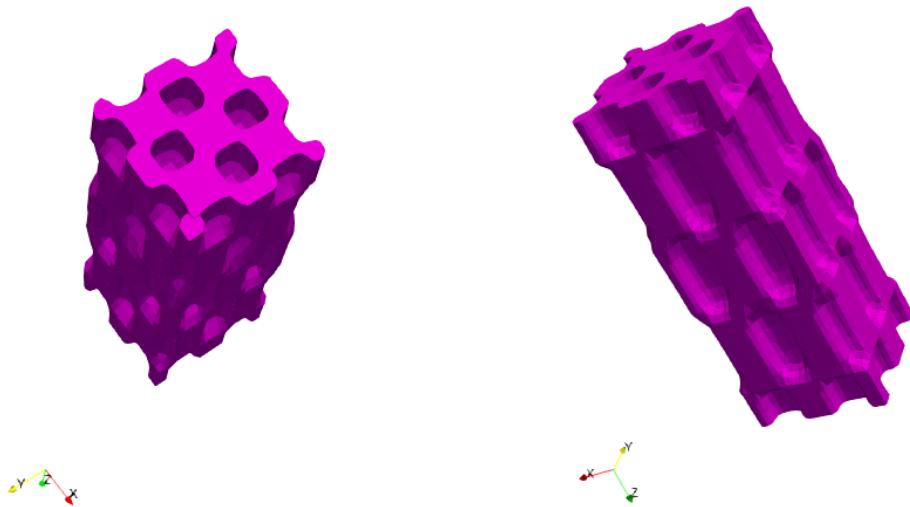


Figure 13: Initialisation 2

On obtient le résultat suivant (Figure ??) après 80 itérations et la décroissance de la contrainte de circularité et de volume suivante:

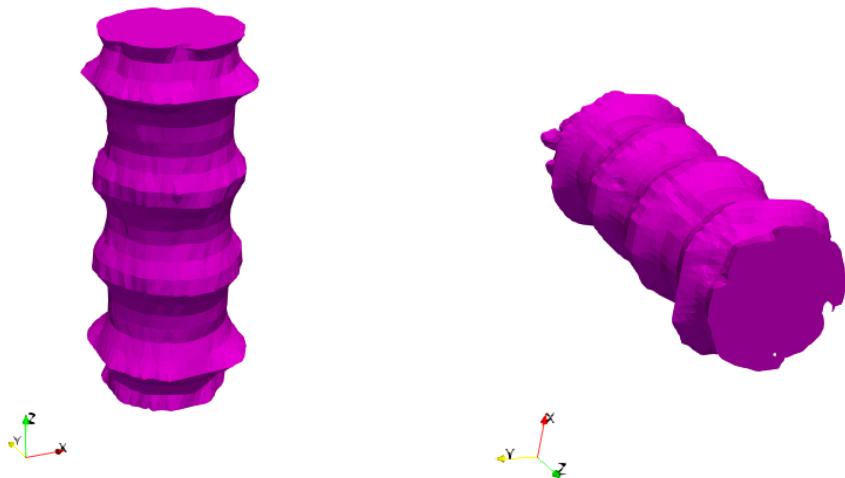


Figure 14: Résultats de l'initialisation 2

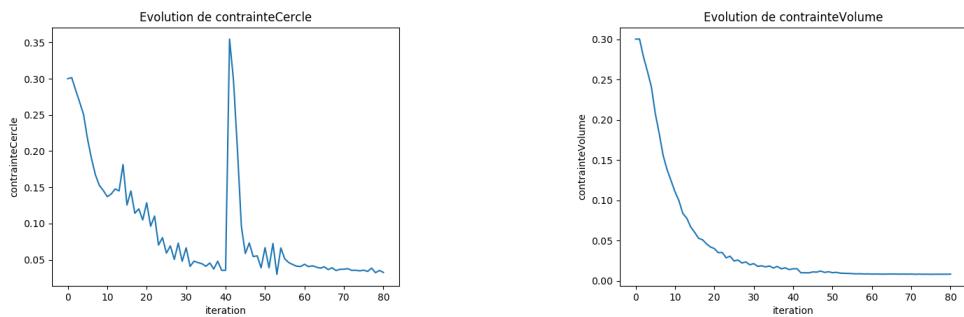


Figure 15: Evolution des grandeurs (gauche : circularité; droite : volume)

**Initialisation 3** On utilise ici l'initialisation présentée dans la figure ??.

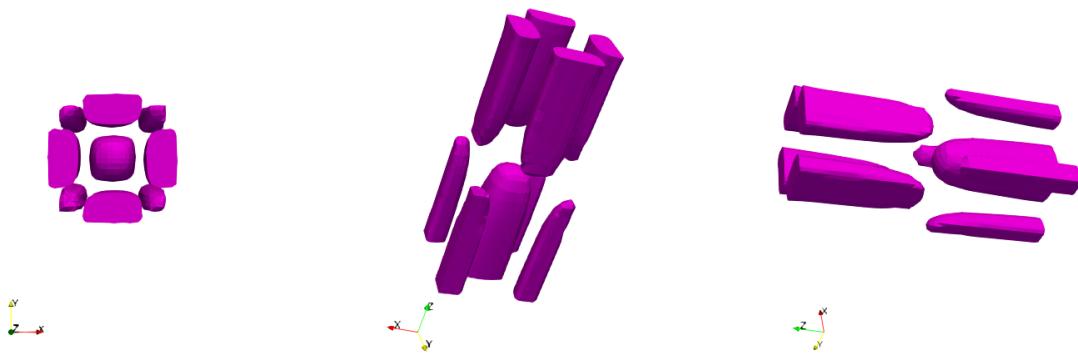


Figure 16: Initialisation 3

On obtient le résultat suivant (Figure ??) après 98 itérations et la décroissance de la fonction objectif suivante:

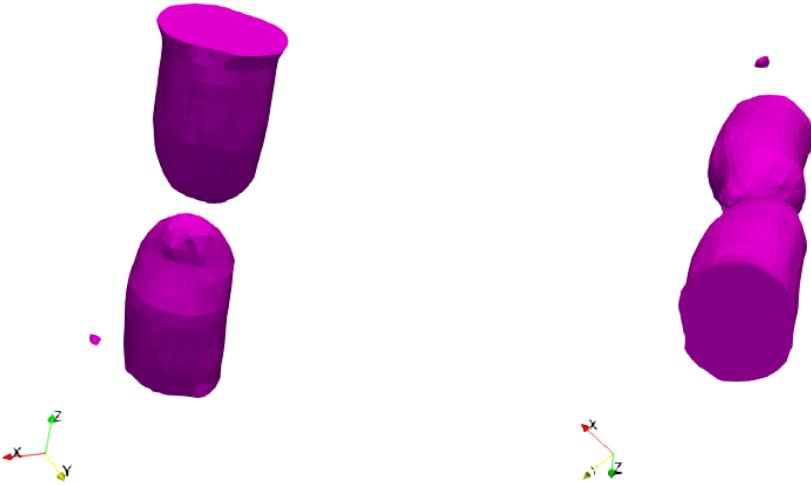


Figure 17: Résultats de l'initialisation 3 et décroissance de la fonction objectif

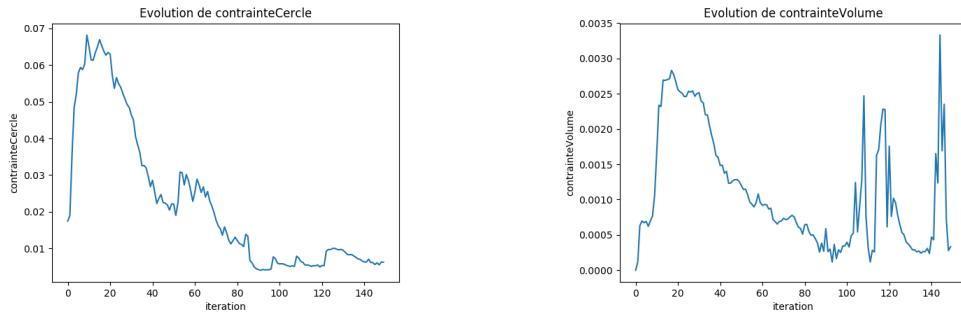


Figure 18: Evolution des grandeurs (gauche : circularité; droite : volume)

## 6 Pour la suite

### 6.1 A court terme

- En continuant ce code
  - Tests sans prendre en compte les sections voisines qui n'ont pas la même topologie
  - Test sur le résultat d'un minimisation de la compliance et du volume
  - Ajout de la contrainte lors de l'optimisation de la compliance lorsqu'on a suffisemment diminué la compliance sur différents cas tests :
    - \* Boîte avec 4 coins en bas non optimisables et Dirichlet et le centre en haut non optimisable et Neumann
    - \* Autre
  - Ajout de zones non optimisable
- Comparaison du code avec une contrainte sur chaque composante connexe de minimisation du périmètre à volume constant
- Autoriser les tubes
- Développement de stratégies similaires sur d'autres formes
- Optimisation de la compliance avec forces de torsion ou déplacement imposé en torsion.

## **6.2 A long terme**

- formes pour que "facilement réalisable" selon critères de trajectoire qui pourront être déterminés avec le projet 3