Thermoelasticité
[2, 1, 3]

1 Déformation et cinématique du milieu continu

On considère une transormation du milieu qui à un vecteur $\underline{X}$ du domaine de référence Ω_0 associe un vecteur x selon la relation :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{x}, t) \tag{1}$$

1.1 Déformation du milieu continu

1.1.1 Grandes déformations

- gradient de la transformation ϕ :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \partial_{X_j}\phi_i(\underline{X}, t)e_i \otimes e_j = \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X}, t) \tag{2}$$

- transport :
  - vecteur :
  $$\underline{dM} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t).\underline{dM_0}$$
  - volume :
  $$d\Omega_t = \det\left(\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\right).d\Omega_0$$
  - surface orientée :
  $$\underline{da} = J(\underline{X}, t)^t\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t)\underline{dA}$$
- déformation :
$$\underline{dM}.\underline{dM'} = \underline{dM_0}\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t)\underline{dM_0}'$$
avec $\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) =^t \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$
  - tenseur de Green-Lagrange :
  $$\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) - \underline{\underline{I}}\right)$$
  On a alors
  $$\underline{dM}.\underline{dM'} - \underline{dM_0}.\underline{dM_0}' = 2\underline{dM_0}\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)\underline{dM_0}'$$
- déplacement :
$$\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \underline{x} - \underline{X}$$

$$\underline{\underline{F}}(\vec{X}, t) = \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t)$$

$$\underline{\underline{e}}(\vec{X}, t) = \tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t) +^t \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t) +^t \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t)\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t)\right)$$

1.1.2 Déformations infinitésimales

On prend pour hypothèse $||\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t)|| << 1$. On a alors :

- dérivation Lagrangienne-Eulerienne : $\underline{\underline{\nabla}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}$ (où ∇ est le gradient par rapport aux variables de références et grad par rapport aux actuelles). En effet :

$$\underline{\underline{T}}_t(\underline{x}, t) = \underline{\underline{T}}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{x} = \underline{X} + \underline{\xi}(\underline{X}, t)$$

$$\underline{\underline{\nabla T}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\mathrm{grad}T}}(\underline{x}, t)\underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\mathrm{grad}T}}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{\mathrm{grad}T}}(\underline{x}, t)\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t) \approx \underline{\underline{\mathrm{grad}T}}(\underline{x}, t)$$

- tenseur de Green Lagrange linéarisé (tenseur des déformations linéarisé). Ce tenseur est symétrique :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t) +^t \underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X}, t)\right) \approx \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathrm{grad}\xi}}(\underline{X}, t) +^t \underline{\underline{\mathrm{grad}\xi}}(\underline{X}, t)\right)$$

1.1.3 Conditions de compatibilités

La question est de savoir, à partir d'une matrice symétrique quelconque $\underline{\underline{\epsilon}}$ si on est capable d'en déduire un champ de déplacement $\underline{\xi}$. On a pour vérifier ça une condition de compatibilité:

$$\partial_{i,j}\epsilon_{k,l} + \partial_{k,l}\epsilon_{i,j} - \partial_{i,k}\epsilon_{j,l} - \partial_{j,l}\epsilon_{i,k} = 0$$

1.2 Cinématique du milieu continu

1.2.1 Cas Lagrangien

On pose $\underline{\dot{x}} = \underline{U}(\underline{X}, t)$. On avait $vctdM = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t).\underline{dM_0}$. En dérivant, on obtient :

$$\underline{d\dot{M}} = \underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{X}, t).\underline{dM_0}$$

et donc :

$$\underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{X}, t) = \partial_t \underline{\underline{\nabla \phi}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t)$$

- taux de déformation Lagrangien :

$$\underline{\underline{\dot{e}}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2}\left({}^t\underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t).\underline{\underline{\nabla \phi}}(\underline{X}, t) +^t \underline{\underline{\nabla \phi}}(\underline{X}, t).\underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t)\right)$$

1.2.2 Cas Eulérien

On a :

$$\underline{d\dot{M}} = \underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{X}, t).\underline{dM_0} = \underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{X}, t)\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t)\underline{dM} = \underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t)\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t)\underline{dM}$$

Or, $\underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X}, t).\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\text{grad} U}}(\underline{x}, t)$. D'où

$$\underline{d\dot{M}} = \underline{\underline{\text{grad} U}}(\underline{x}, t).\underline{dM}$$

- taux de déformation Eulérien :

$$\underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2}\left({}^t\underline{\underline{\text{grad} U}}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{\text{grad} U}}(\underline{x}, t)\right)$$

FIGURE LIVRE SALENÇON

1.3 Dérivation particulaire

- fonction scalaire : on pose $\mathcal{B} = b(\underline{x}, t) = b\left(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t\right) = B(\underline{X}, t)$ et $\underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{U}_{lag}(\underline{X}, t) = \partial_t \underline{\phi}(\underline{X}, t)$.
  On a alors :

$$\dot{\mathcal{B}} = \partial_t b(\underline{x}, t) + \text{grad}\, b(\underline{x}, t).\underline{U}(\underline{x}, t) = \frac{\mathrm{d}b(\underline{x}, t)}{\mathrm{d}t}$$

- fonction vectorielle : on pose $\underline{a}(\underline{x}, t) = \underline{A}(\underline{X}, t)$. On a alors

$$\underline{\dot{a}} = \partial_t \underline{a}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{\text{grad}\, a}}(\underline{x}, t).\underline{U}(\underline{x}, t)$$

- intégrale sur le volume : on pose $\mathcal{I} = \int_{\Omega_t} b d\Omega_t$. On a alors

$$\dot{\mathcal{I}} = \int_{\Omega_t} (\partial_t b + \text{grad}\, b.\underline{U} + b\, \text{div}\underline{U})\, d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \partial_t b d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} b\underline{U} \cdot \underline{n} ds$$

2 Equation de bilans, lois de conservation

2.1 Bilan thermomécanique

On fait le bilan de ce qui s'exerce sur le volume Ω.

- Volumique :
  - force volumique f_v.
  - densité de chaleur produite r.
- Surfacique (sur la surface $\partial\Omega$ de normale $\underline{n}$):
  - force surfacique $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$.
  - flux de chaleur $\underline{q}$

2.2 Equations de conservation

2.2.1 Masse

On a conservation de la masse totale du volume ce qui nous donne les équations suivantes (globale et locale), avec $\underline{U}$ la vitesse Eulérienne :

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\int \Omega_t \rho dv = 0 \\ \\ \partial_t \rho + \rho div \underline{U} = 0 \end{array}} \tag{3}$$

2.2.2 Quantité de mouvement

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \underline{U} dv - \int_{\partial\Omega_t} \underline{T} ds - \int_{\Omega_t} \underline{f} dv = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \underline{U} dv - \int_{\Omega_t} \mathrm{div}(\underline{\underline{\sigma}}) ds + \int_{\Omega_t} \underline{f} dv = 0 \\ \\ \rho\left(\partial_t \underline{U} + (\mathrm{div}(\underline{U})\underline{U})\right) = \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \mathrm{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + f \end{array}} \tag{4}$$

2.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

On pose K l'énergie cinétique :

$$K = \int_{\Omega_t} \rho \frac{1}{2} \underline{U} \cdot \underline{U} v \tag{5}$$

On note P^e et P^i les puissances extérieures et intérieures exercées sur le solide. On explicite ici P^i (avec $\underline{\underline{d}}$ le taux de déformation Eulérien) :

$$P^i = -\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} dv \tag{6}$$

On a alors le théorème suivant :

$$\frac{d}{dt} K = P^e + P^i \tag{7}$$

2.3 Thermodynamique

2.3.1 Premier principe

On note E l'énergie interne et $e_e n$ l'énergie interne massique. On note Q la chaleur reçue par le système. On a alors :

$$\frac{d}{dt}(K + E) = P^e + Q \tag{8}$$

On en déduit donc grâce au théorème de l'énergie cinétique que :

$$\frac{d}{dt} E = Q - P^i \tag{9}$$

Or, $Q = \int_{\Omega_t} r dv + \int_{\partial\Omega_t} (-\underline{q} n) ds$. On a alors :

$$\boxed{\frac{d}{dt} e_{en} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + r - \mathrm{div} \underline{q}} \tag{10}$$

2.3.2 Second principe : loi de Clausius Duheim

En notant T la température, S l'entropie et s l'entropie massique, on a

$$\begin{array}{l} \frac{dS}{dT} \geq \frac{Q}{T} = -\int_{\partial\Omega_t} \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} ds + \int_{\Omega_t} \frac{r}{T} dv \\ \\ \rho \frac{d}{dt} s + \mathrm{div}\left(\frac{\underline{q}}{T}\right) - \frac{r}{T} \geq 0 \end{array} \tag{11}$$

En utilisant le premier principe pour éliminer r et en posant ψ l'énergie libre massique ($\psi = e_{en} - Ts$), on obtient l'inégalité de Clausius-Duheim:

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho\left(\frac{d\psi}{dt} + s\frac{dT}{dt}\right) - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{\mathrm{grad}\, T} \geq 0} \tag{12}$$

2.4 Passage des équations énergétiques en Lagrangien

On rappelle les formules de transport :

$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{X} + \underline{\xi}(\underline{X}, t) \\ \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t) \\ \underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2}\left({}^t\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) - \underline{\underline{1}}\right) \\ \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = \frac{\rho_0(\underline{X})}{\rho(\underline{x}, t)} \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot^t \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) \end{cases} \tag{13}$$

De plus, les grandeurs thermodynamiques sont liées à la matière et les fonctions ne sont donc pas modifiées :

$$\begin{cases} T_{lag}(\underline{X}, t) = T(\underline{x}, t) \\ \underline{\underline{e}}_{lag}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{e}}(\underline{x}, t) \\ \underline{\underline{s}}_{lag}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{s}}(\underline{x}, t) \end{cases} \tag{14}$$

On en déduit donc l'expression Lagrangienne de l'équation de l'énergie 10 :

$$\boxed{\rho_0 \dot{e_{en}} = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} + r_0 - \mathrm{div}_{\underline{X}} \underline{q_0}} \tag{15}$$

et l'inélagité de Clausius Duheim Lagrangienne :

$$\boxed{\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0 \left(\dot{\psi} + s\dot{T}\right) - \frac{\underline{\underline{q_0}}}{T} \underline{\nabla T} \geq 0} \tag{16}$$

3 Loi de comportement

3.1 Hypothèse

On suppose que l'énergie interne massique, l'entropie massique, l'énergie libre massique et le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff ne dépendent que de la température et du tenseur des déformations $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$.

3.2 Loi de comportement en l'absence de liaisons internes

On a $\psi = \psi(T, \underline{\underline{e}})$ d'où

$$\dot{\psi} = \partial_T \psi(T, \underline{\underline{e}})\dot{T} + \sum_{i,j} \partial_{e_{i,j}} \psi(T, \underline{\underline{e}}) \dot{e_{i,j}} = \partial_T \psi(T, \underline{\underline{e}})\dot{T} + \partial_{\underline{\underline{e}}} \psi(T, \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{\dot{e}}} \tag{17}$$

On a alors une nouvelle formulation de l'équation de Clausius Duheim ($\underline{\underline{e}}$ et $\underline{\underline{\dot{e}}}$ sont symétriques):

$$\underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0 \left(\partial_T \psi(T, \underline{\underline{e}})\dot{T} + \partial_{\underline{\underline{e}}} \psi(T, \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{\dot{e}}} + s(T, \underline{\underline{e}})\dot{T}\right) - \frac{\underline{\underline{q_0}}}{T} \cdot \underline{\nabla T} \geq 0 \tag{18}$$

La première partie est une forme linéraire en $\dot{T}$ et $\underline{\underline{\dot{e}}}$. En les prenant nuls, on en déduit que la dissipation thermique est non négative (inégalité de conduction) :

$$-\underline{q_0} \cdot \underline{\nabla T} \geq 0$$

.

La forme linéraire doit garder un signe constant **Pourquoi ça??** en on en déduit qu'elle est constante et donc toujours nulle **encore pourquoi?** :

$$\begin{cases} \forall \underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\dot{e}}} \,\text{symetrique}, \,\forall T, \,\dot{T} \\ \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0 \left(\partial_T \psi(T, \underline{\underline{e}})\dot{T} + \partial_{\underline{\underline{e}}} \psi(T, \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{\dot{e}}} + s(T, \underline{\underline{e}})\dot{T}\right) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

On en déduit alors (avec un peu de travail sur la symétrie de l'énergie libre) que

$$\boxed{\forall T, \forall \underline{\underline{e}} \,\text{symetrique}, \qquad s(T, \underline{\underline{e}}) = -\partial_T \psi(T, \underline{\underline{e}})} \tag{20}$$

$$\boxed{\forall T, \forall \underline{\underline{e}} \,\text{symetrique}, \qquad \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) = \rho_0 \partial_{\underline{\underline{e}}} \psi(T, \underline{\underline{e}})} \tag{21}$$

3.3 Loi de comportement avec liaison interne

On a alors

$$\boxed{-\underline{q_0} \cdot \underline{\nabla T} \geq 0} \tag{22}$$

$$\boxed{\forall T, \forall \underline{\underline{e}} \,\text{symetrique}, \qquad s(T, \underline{\underline{e}}) = -\partial_T \psi(T, \underline{\underline{e}})} \tag{23}$$

$$\boxed{\forall T, \forall \underline{\underline{e}} \,\text{symetrique tel que } \forall p \in [\![1, n]\!] \; (1 \leq n \leq 6) \; \phi_p(\underline{\underline{e}}) = 0, \qquad \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) = \rho_0 \partial_{\underline{\underline{e}}} \psi(T, \underline{\underline{e}}) + \sum_p \partial_{\underline{\underline{e}}} \phi_p(\underline{\underline{e}})} \tag{24}$$

3.4 Hypothèses en thermoélasticité

3.4.1 Hypothèses de linéarisation

- hypothèse de la transformation infinitésimale = petits déplacements :
$$\|\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t)\| << 1 \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{25}$$
Cette hypothèse entraine celle de la déformation infinitésimale = petites déformations :
$$\|\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)\| << 1 \quad \text{sur } \Omega_0 \tag{26}$$
- hypothèse des petites variations de température : $\tau(\underline{x}, t) = |T(\underline{x}, t) - T_0|$ petit sur Ω_t.
- hypothèse des petits déplacements : on peut confondre la géométrie actuelle avec la géométrie de référence.
- hypothèses des petites perturbations (HPP) : rassemble les trois hypothèses précédentes.

3.4.2 Isotropie

Il n'y a pas de direction privilégiée. L'énergie libre ne dépend donc que des invariants de la matrice de déformation :

$$\psi = \psi(T, I_1, I_2, I_3)$$

avec

$$I_1 = \text{tr}\underline{\underline{e}}; \qquad I_2 = \frac{1}{2}\text{tr}\underline{\underline{e}}^2; \qquad I_3 = \frac{1}{3}\text{tr}\underline{\underline{e}}^3 \,.$$

Pour un matériau avec liaisons internes, on a alors

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \left(\partial_{I_1} \psi \, \underline{\underline{1}} + \partial_{I_2} \psi \, \underline{\underline{e}} + \partial_{I_3} \psi \, \underline{\underline{e}}^2 \right) + \sum_p \eta_p \left(\partial_{I_1} \phi_1 \, \underline{\underline{1}} + \partial_{I_2} \phi_p \, \underline{\underline{e}} + \partial_{I_3} \phi_p \, \underline{\underline{e}}^2 \right) \tag{27}$$

3.5 Simplification des lois de comportement

3.5.1 Sous transformation infinitésimale et petites variations de températures

On sait que $\rho_0 \psi$ ne dépend que de $\underline{\underline{e}}$ et de $T - T_0$ qui sont proches de 0. On a donc le développement suivant :

$$\rho \psi(T, \underline{\underline{e}}) = cste + \underline{\underline{\pi_0}} : \underline{\underline{e}} - \rho_0 s_0 \tau + \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{e}} \tau - \frac{1}{2} \rho_0 b \tau^2 \tag{28}$$

On déduit alors des lois de comportement que

$$\boxed{\begin{cases} \underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\pi_0}} + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{k}} T \\ \\ s = s_0 + \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{k}} : \underline{\underline{e}} + b\tau \end{cases}} \tag{29}$$

avec $\underline{\underline{\pi_0}}$ et s_0 les contraintes et l'entropie initiales.

On a utilisé pour l'instant que l'aspect petite déformation de l'hypothèse de transformation infinitésimale. On rajoute maintenant l'hypothèse $\|\underline{\underline{\nabla \xi}}\| << 1$. On a alors

$$\begin{cases} \underline{\underline{e}} \approx \underline{\underline{\epsilon}} = \left(\underline{\underline{\nabla \xi}} + ^t \underline{\underline{\nabla \xi}} \right) / 2 \approx \left(\underline{\underline{\text{grad} \xi}} + ^t \underline{\underline{\text{grad} \xi}} \right) / 2 \\ \\ \frac{\rho}{\rho_0} \approx (1 - \text{tr} \, \underline{\underline{\epsilon}}) \\ \\ \underline{\underline{\sigma}} \approx \underline{\underline{\pi_0}} (1 - \text{tr} \, \underline{\underline{\epsilon}}) + \underline{\underline{\text{grad} \, \xi}} \cdot \underline{\underline{\pi_0}} + \underline{\underline{\pi_0}} \cdot \underline{\underline{\text{grad} \, \xi}} + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{k}} \tau \end{cases} \tag{30}$$

3.6 Etat initial naturel

A l'état initial naturel, on a

$$\underline{\underline{\pi}} = 0; \qquad \underline{\underline{e}} = 0; \qquad \tau = 0 \tag{31}$$

d'où, $\underline{\underline{\pi_0}} = 0$ et donc

$$\underline{\underline{\sigma}} \approx \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{k}}\tau \tag{32}$$

3.6.1 Isotropie

En ajoutant l'hypothèse d'isotropie, on a enfin :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\operatorname{tr}\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} - k\tau\underline{\underline{1}} \\ \\ \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\operatorname{tr}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} + \alpha\tau\underline{\underline{1}} \end{cases}} \tag{33}$$

avec λ, μ les coefficients de Lamé, ν le coefficient de Poisson, E le module d'Young et α le coefficient de dilatation thermique.

3.7 Etat précontraint

On ajoute une contrainte constante $\underline{\underline{\sigma_P}}$ à la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et on calcule la déformation infinitésimale liée à $\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma_P}}$

4 Résolution du problème d'évolution de la thermoélasticité

On a un problème avec au moins 11 inconnues :

- 6 inconnues pour le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$
- 3 inconnues pour le déplacement $\underline{\xi}$
- 1 inconnue pour la masse volumique ρ
- 1 inconnue pour la température T

On a donc besoin de au moins 11 équations.

4.1 Hypothèse quasistatique

On se place dans une hypothèse quasistatique pour l'élastictité (pas pour la chaleur a priori) **C'est bien ça non? Sinon on doit considérer l'équation de le chaleur stationnaire ce qui est faux car on bouge la source**. On néglige donc les termes inertiels et on consière

$$\underline{a}(\underline{x}, t) = 0 \tag{34}$$

On n'a alors besoin que de 11 équations et celles-ci sont données par :

- les équations de la dynamique (3) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t)\underline{f}(\underline{x}, t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_t \\ \text{conditions aux limites} \end{cases} \tag{35}$$

- l'équation de continuité (1) :

$$\frac{\rho_0(\underline{X})}{\rho(\underline{X})} = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \tag{36}$$

- la loi de comportement thermoélastique (6) :

$$\underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}}) = \rho_0 \partial_{\underline{\underline{e}}}\psi(T, \underline{\underline{e}}) + \sum_p \partial_{\underline{\underline{e}}}\phi_p(\underline{\underline{e}}) \tag{37}$$

- la deuxième équation de comportement et la conservation de l'énergie donnent l'équation de la chaleur :

$$\left\{\begin{aligned} &\rho_0 \dot{e_{en}} - \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} + \mathrm{div}_{\underline{X}} \underline{q_0} + r_0 = 0 \\ &\rho_0 \dot{e_{en}} - \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} = \rho_0 T \dot{s} \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Or,

$$s(T, \underline{\underline{e}}) = -\partial_T \psi(T, \underline{\underline{e}}) \tag{39}$$

d'où en dérivant s et en utilisant les lois de comportement,

$$T \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} : \underline{\underline{\dot{e}}} + \rho_0 T \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T^2} \dot{T} - \mathrm{div}_{\underline{X}} \underline{q_0} = r_0 \tag{40}$$

On ajoute à ça la loi de Fourier avec $\underline{\underline{K_0}}$ le tenseur de conductivité thermique :

$$\underline{q_0} = -\underline{\underline{K_0}}(T, \underline{\underline{e}}) \cdot \underline{\nabla T} \tag{41}$$

On obtient alors l'équation thermique **(C'est là qu'intervient le gradient de T a priori. Nous, on découple les équations mais c'est faux)** à laquelle on ajoute les conditions aux limites pour la chaleur :

$$\boxed{T \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} : \underline{\underline{\dot{e}}} + \rho_0 T \frac{\partial \psi(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T^2} \dot{T} + \mathrm{div}_{\underline{X}} \left(\underline{\underline{K_0}}(T, \underline{\underline{e}}) \cdot \underline{\nabla T} \right) = r_0} \tag{42}$$

Dans le cas de la thermoélasticité découplée, on néglige $T \frac{\partial \underline{\underline{\pi}}(T, \underline{\underline{e}})}{\partial T} : \underline{\underline{\dot{e}}}$. On peut enfin considérer le cas stationnaire pour lequel $\dot{T} = 0$.

4.2 Linéarisation

On se met sous l'hypothèse HPP :

- $\|\underline{\underline{\nabla \xi}}(\underline{X}, t)\| << 1 \implies \|\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)\| << 1$
- $\tau(\underline{x}, t)$ "petit"
- "petits" déplacements

On a alors :

- les équations de la dynamique (3) :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t) \underline{f}(\underline{x}, t) = 0 \quad \mathrm{sur}\, \Omega_t \\ \text{conditions aux limites} \end{array}\right. \tag{43}$$

- l'équation de continuité (1) :

$$\rho(\underline{x}, t) = \rho_0(\underline{x}) \left(1 - \mathrm{tr}\, \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) t) \right) \tag{44}$$

- la loi de comportement thermoélastique (6) :

$$\left\{\begin{aligned} &\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\sigma_0}} + \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}, t) - \underline{\underline{k}}(\underline{x}) \tau(\underline{x}, t) \\ &\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}, t) = \left(\underline{\underline{\mathrm{grad}\, \xi}}(\underline{x}, t) +^t \underline{\underline{\mathrm{grad}\, \xi}}(\underline{x}, t) \right) /2 \end{aligned}\right. \tag{45}$$

- la deuxième équation de comportement et la conservation de l'énergie donnent l'équation thermique :

$$\boxed{T \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial T} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - b\dot{T} + \mathrm{div} \left(\underline{\underline{K_0}} \cdot \underline{\nabla T} \right) = r_0} \tag{46}$$

References

[1] Samuel FOREST, Michel AMESTOY, Gilles DAMAMME, Serge KRUCH, Vincent MAUREL et Matthieu MAZIERE : *Mécanique Des Milieux Continus*. Ecole des Mines de Paris, 2015.

[2] Jean SALENÇON : *Mécanique Des Milieux Continus: Tome 2: Thermoélasticité*. 2001.

[3] François SIDOROFF : Mécanique des milieux continus. page pp.166, 1980.