

# Optimisation de trajectoire : optimisation de la largeur entre les droites avec contrainte de température

Mathilde Boissier

Avril 2018

## Modèle et objectif

On s'intéresse à la construction d'une pièce rectangulaire  $\Omega$  par méthode SLM ( $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ ,  $\Gamma_N \cap \Gamma_D$ ). On souhaite donc faire passer une source de chaleur le long d'une trajectoire prédéfinie afin de faire fusionner le lit de poudre. Cependant, il ne faut pas que la température puisse être trop élevée sous peine de créer des contraintes résiduelles thermiques qui nuiraient à la qualité de la pièce.

Le travail présenté dans ce document consiste à, ayant choisi un nombre de ligne droite à parcourir pendant la trajectoire, optimiser la distance de chaque ligne au bord du rectangle afin de fusionner la poudre ( $\forall x \in \Omega$ ,  $\exists t \in [0, t_F]$  tel que  $T(x, t) > T_{phase}$ ) tout en maîtrisant la température dans le solide ( $\forall x \in \Omega$ ,  $\forall t \in [0, t_F]$ ,  $T(x, t) < T_{sup}$ ).

## Modélisation thermique

On commence par introduire le modèle thermique utilisé ici. Il est semblable à celui utilisé dans l'article de Lukas. On rajoute ici de la diffusion car notre modèle est seulement 2D et on veut tout de même modéliser la perte de chaleur dans les couches inférieures. Les conditions aux limites sont les conditions de Dirichlet car autour du solide, on a uniquement de la poudre qui est adiabatique. On cherche un champ de température  $T(x, t) : [0, t_F] \times D \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} \rho \partial_t T + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} (T - T_{ini}) - \text{div}(\lambda \nabla T) = Q & \text{in } (0, t_F) \times D \\ T = T_{ini} & \text{in } (0, t_F) \times \partial\Omega \\ T(0) = T_{ini} & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

Le solide et la poudre ont des valeurs différentes pour les paramètres physiques suivants (en notant  $\chi_{solid}$  la fonction caractéristique du solide):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{solid} * \chi_{solid} + \rho_{powder} * (1 - \chi_{solid}) \\ \lambda &= \lambda_{solid} * \chi_{solid} + \lambda_{powder} * (1 - \chi_{solid}) \\ \beta &= \beta_{solid} * \chi_{solid} + \beta_{powder} * (1 - \chi_{solid}) \end{aligned} \quad (2)$$

## Trajectoire de la source

On considère une trajectoire en ligne droite comme sur le schéma ci-dessous (Figure ??). On estime que la vitesse du laser est constante et égale à 1. On prend pour pas de temps  $\delta t = 2 * \delta x$ . La source est modélisée par une gaussienne centrée en un point (Figure ??).

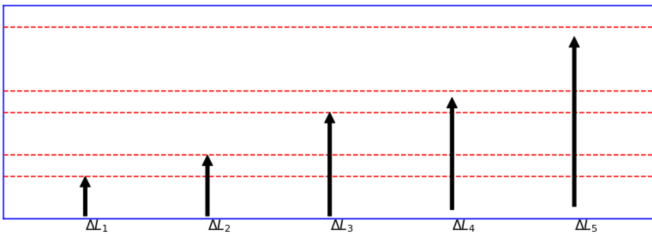


Figure 1: Trajectoire de la source

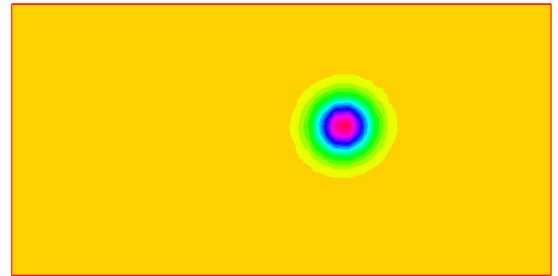


Figure 2: forme de la source

On modélise dans un premier temps le temps pour changer de ligne comme nul. Le temps pour effectuer la trajectoire est constant car le nombre de ligne est fixé. Cette approche induit des discontinuités de trajectoire qui restent simples à gérer (voir ensuite).

# Theorie

## Probleme

On veut minimiser les endroits n'ayant pas subi de changement phase tout en ne dépassant jamais une valeur seuil de la température ( $T_{sup}$ ), en tout point et en tout instant de fabrication.

Les paramètre d'optimisation sont la distance de chaque ligne  $i$  au bord du rectangle  $\Delta L_i$ . On borne  $\Delta L_i$  par 0 et par la largeur de la pièce ( $\Delta L \in [0, L_{max}]$ ). **A revoir pour ces bornes qui ont été changées**

## Equation de la chaleur

On pose  $\tilde{T} = T - T_{ini}$  (i.e.  $T = \tilde{T} + T_{ini}$ ). On a alors, d'après l'équation 1 (l'arrêt de la source est modélisée par la fonction source  $Q$  elle même. On écrit donc bien l'équation jusqu'à  $t_F$  fixé) :

$$\begin{cases} \left( \rho \partial_t \tilde{T} + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \tilde{T} - \text{div}(\lambda \nabla \tilde{T}) \right) = Q(\Delta L, \tilde{s}) & \text{in } (0, t_F) \times D \\ \tilde{T} = 0 & \text{in } (0, t_F) \times \Gamma_D \\ \tilde{T}(0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3)$$

Le problème variationnel lié à la chaleur est alors le suivant :

trouver  $\tilde{T} \in V = \{w \in H^1([0, t_M], \Omega) \text{ tel que } w|_{\Gamma_D} = 0\}$  tel que

$$\forall v \in V, \forall t \in [0, t_M], \quad \int_{\Omega} \rho \partial_t \tilde{T} v + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \tilde{T} v dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla \tilde{T} \nabla v dx - \int_{\Omega} Q(\Delta L, \tilde{s}) v dx = 0 \quad (4)$$

## Changement de phase

On souhaite ici que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \left[ \left( \|T\|_{\infty} - T_{fu} \right)^- \right]^2 = 0 \quad (5)$$

On approxime la norme infinie par une norme  $r$  et on a donc la fonction objectif suivante :

$$J(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} \left[ \left( \left( \int_0^{t_F} |T|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2 = \int_{\Omega} \left[ \left( \left( \int_0^{t_M} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2 \quad (6)$$

## Contrainte

On veut éviter que la température dépasse une température seuil  $T_{sup}$ . On impose pour cela une contrainte :

$$C(\Delta L, \tilde{s}) = \int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(T - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} = \int_0^{t_M} \int_{\Omega} [(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} \quad (7)$$

## Source

On note  $t$  le temps ( $t = \Delta t * it$ ),  $t_{Li}$  le temps pour parcourir une ligne,  $V$  la vitesse de parcours,  $(x_C(t), y_C(t, \Delta L))$  le "centre de la gaussienne" à l'instant  $t$ . On peut alors modéliser l'abscisse et l'ordonnée de la source comme suit : On a alors :

$$\begin{aligned} x_C(t) &= x_{M0} + \left( t - \text{Ent} \left[ \frac{t}{t_{Li}} \right] * t_{Li} \right) \\ Y_C(T) &= y_{M0} + h_{\epsilon} (t < t_{Li}) * \Delta L_1 + \sum_{i=2}^{nb_{Ligne}} h_{\epsilon} (t \geq (i-1)t_{Li}) h_{\epsilon} (t < i * t_{Li}) \Delta L_i \end{aligned} \quad (8)$$

On a alors la fonction source  $Q(t, x, y, \Delta L) = P \exp \left( -100 \left( (x - x_C(t))^2 + (y - y_C(t, \Delta L))^2 \right) \right)$

## Problème d'optimisation

On s'intéresse donc au problème suivant :

$$\min_{\substack{\Delta L \in [0, L_{max}] \\ \tilde{s} \in [0, S_{max}]}} J(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} \left[ \left( \left( \int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2$$

$$\text{tel que } C(\Delta L, \tilde{s}) = \int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} \leq 0$$

avec  $\tilde{T}$  solution de l'Equation 3.

## Algorithme du Lagrangien

On va tout d'abord tester l'algorithme d'Uzawa pour gérer la contrainte. On pose  $\text{lag}_{sup}$  le multiplicateur de Lagrange. On s'intéresse au problème modifié :

$$\min_{\substack{\Delta L \in [0, L_{max}] \\ \tilde{s} \in [0, S_{max}]}} J(\Delta L, \tilde{s}) \quad (9)$$

avec

$$\tilde{J}(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} \left[ \left( \left( \int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2 + \text{lag}_{sup} \left[ \int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} \right] \quad (10)$$

et on aura a chaque itération

$$\text{lag}_{sup}^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } C(\Delta L^n) \leq 0 \\ \text{lag}_{sup}^n + \mu_{lag} C(\Delta L^n, \tilde{s}^n) & \text{si } C(\Delta L^n, \tilde{s}^n) > 0 \end{cases} \quad (11)$$

## Augmented Lagrangian Method (ALM)

Le deuxième algorithme testé est celui du Lagrangien augmenté (ALM dans la suite). (VOIR NOCEDAL XXX)

On pose

$$\psi(c, \lambda; \mu) = \begin{cases} -\lambda * c + \frac{1}{2\mu} * c^2 & \text{si } c - \lambda * \mu \leq 0 \\ -\frac{\mu}{2} \lambda^2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

On a alors, avec  $\lambda$  paramètre à mettre à jour et  $\mu$  paramètre de pénalisation fixé, une nouvelle fonction objectif du type :

$$\tilde{J}(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} \left[ \left( \left( \int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2 + \psi \left( \text{tol}_{sup} - \left[ \int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt \right], \lambda; \mu \right) \quad (13)$$

## Calcul des dérivées : méthode sans adjoint pour la température

On veut trouver la dérivée de  $\tilde{J}$  par rapport à  $\Delta L$  et  $\tilde{s}$ . On procède alors de la manière suivante :

### Derivation de la source

On dérive la source par rapport à  $\Delta L_i$  :

$$\begin{cases} \partial_{\Delta L_1} Q = h_{\epsilon}(t < t_{Li}) \\ \partial_{\Delta L_i} Q = h_{\epsilon}(t < i * t_{Li}) * h_{\epsilon}(t \geq (i-1) * t_{Li}) \quad \forall i \in \{2, \dots, nb_{Ligne}\} \end{cases} \quad (14)$$

## Derivation du tout

$\tilde{J}(\Delta L, \tilde{s}) = \tilde{j}(\tilde{T}(\Delta L, \tilde{s}))$ . On a donc :

$$\partial_{\Delta L} \tilde{J}(\Delta L, \tilde{s}) = \partial_{\tilde{T}} \tilde{j}(\tilde{T}(\Delta L, \tilde{s}))(\partial_{\Delta L} \tilde{T}(\Delta L, \tilde{s})) \quad (15)$$

En dérivant l'équation vérifiée par  $\tilde{T}$  en fonction de  $\Delta L$ , on obtient l'équation vérifiée par  $\partial_{\Delta L} \tilde{T}$  :

$$\begin{cases} \left( \rho \partial_t \partial_{\Delta L} \tilde{T} + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \partial_{\Delta L} \tilde{T} - \text{div}(\lambda \nabla \partial_{\Delta L} \tilde{T}) \right) = \partial_{\Delta L} Q(\Delta L, \tilde{s}) & \text{in } (0, t_F) \times D \\ \partial_{\Delta L} \tilde{T} = 0 & \text{in } (0, t_F) \times \Gamma_D \\ \partial_{\Delta L} \tilde{T}(0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (16)$$

et le problème variationnel associé ainsi que sa discrétisation en temps sont similaires à ceux liés à  $\tilde{T}$ . On a aussi accès à la dérivée de la fonction objectif de changement de phase par rapport à  $\tilde{T}$  :

$$\partial_{\tilde{T}} J(\tilde{T})(\phi) = \int_{\Omega} 2 \left( \left( \int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^{-} \frac{1}{r} \left( \int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}-1} \int_0^{t_F} r |\tilde{T} + T_{ini}|^{r-1} \phi dt dx \quad (17)$$

De même, on a accès à la dérivée de la contrainte par rapport à  $\tilde{T}$  :

$$\partial_{\tilde{T}} C(\tilde{T})(\phi) = \int_0^{t_F} \int_{\Omega} 2 [(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+] \phi dx dt \quad (18)$$

- Algorithme d'Uzawa : On obtient alors la dérivée de la fonction objectif par rapport à  $\tilde{T}$ :

$$\partial_{\tilde{T}} \tilde{j}(\tilde{T})(\phi) = \partial_{\tilde{T}} J(\Delta L, \tilde{s})(\phi) + \text{lag}_{sup} \partial_{\tilde{T}} C(\Delta L, \tilde{s})(\phi) \quad (19)$$

et donc la dérivée pour  $\tilde{J}$  par rapport à  $\Delta L$  :

$$\partial_{\Delta L} \tilde{J} = \partial_{\tilde{T}} J(\Delta L, \tilde{s})(\partial_{\Delta L} \tilde{T}) + \text{lag}_{sup} \partial_{\tilde{T}} C(\Delta L, \tilde{s})(\partial_{\Delta L} \tilde{T}) \quad (20)$$

- ALM : On obtient alors la dérivée de la fonction objectif par rapport à  $\tilde{T}$ :

$$\partial_{\tilde{T}} \tilde{j}(\tilde{T})(\phi) = \partial_{\tilde{T}} J(\Delta L, \tilde{s})(\phi) + \partial_1 \psi(\text{tol}_{sup} - C(\Delta L, \tilde{s}), \lambda; \mu) \partial_{\tilde{T}} C(\Delta L, \tilde{s})(\phi) \quad (21)$$

et donc la dérivée pour  $\tilde{J}$  par rapport à  $\Delta L$  :

$$\partial_{\Delta L} \tilde{J} = \partial_{\tilde{T}} J(\Delta L, \tilde{s})(\partial_{\Delta L} \tilde{T}) + \partial_1 \psi(\text{tol}_{sup} - C(\Delta L, \tilde{s}), \lambda; \mu) \partial_{\tilde{T}} C(\Delta L, \tilde{s})(\partial_{\Delta L} \tilde{T}) \quad (22)$$

## Discrétisation temporelle

On utilise un schéma implicite pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left( \rho + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \Delta t \right) \tilde{T}_{j+1} v dx + \int_{\Omega} \lambda \Delta t \nabla \tilde{T}_{j+1} \nabla v dx - \int_{\Omega} (Q_{j+1} \Delta t - \rho \tilde{T}_j) v dx = 0 \\ \tilde{T}_0 = T_{ini} \end{cases} \quad (23)$$

$$J(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} \left[ \left( \left( \sum_{j=0}^{N_F} \Delta t |\tilde{T}_j + T_{ini}|^r \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^{-} \right]^2 \quad (24)$$

$$C(\Delta L, \tilde{s}) = \sum_{j=0}^{N_F} \Delta t \int_{\Omega} [(\tilde{T}_j + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx - \text{tol}_{sup} \quad (25)$$

$$\partial_{\Delta L} J(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} 2 \left( \left( \sum_{j=0}^{N_F} (\Delta t |\tilde{T}_j + T_{ini}|^r) \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^{-} \frac{1}{r} \left( \sum_{j=0}^{N_F} (\Delta t |\tilde{T}_j + T_{ini}|^r) \right)^{\frac{1}{r}-1} \sum_{j=0}^{N_F} \Delta t \left( r |\tilde{T}_j + T_{ini}|^{r-1} \partial_{\Delta L} \tilde{T} \right) dx \quad (26)$$

$$\partial_{\tilde{s}} C(\Delta L \tilde{s}) = \sum_{j=0}^{N_F} \Delta t \left( \int_{\Omega} 2[(\tilde{T}_j + T_{ini} - T_{sup})^+] \partial_{\tilde{s}} \tilde{T} \right) dx \quad (27)$$

## Algorithme

On pose

$$\begin{cases} Norme^r = \int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt = \sum_{i=0}^{N_{t_F}} \Delta t |\tilde{T}_i + T_{ini}|^r \\ NormeMoins = \min(Norme - T_{fu}, 0) \end{cases} \quad (28)$$

Lorsqu'on simule le passage du laser, à chaque itération, on calcule :

- la source  $Q$  et la température  $\tilde{T}$
- les dérivées par rapport à  $\Delta L$  et  $\tilde{s}$  de la source et les dérivées de la température  $\partial_{\Delta L} \tilde{T}$  et  $\partial_{\tilde{s}} \tilde{T}$
- $Norme = Norme + \Delta t |\tilde{T}_i + T_{ini}|^r$
- $derPhaseDeltaL = derPhaseDeltaL + \Delta t |\tilde{T}_i + T_{ini}|^{r-1} * \partial_{\Delta L} \tilde{T}$
- $derPhaseStilde = derPhaseStilde + \Delta t |\tilde{T}_i + T_{ini}|^{r-1} * \partial_{\tilde{s}} \tilde{T}$
- $Contrainte = Contrainte + \Delta t \int_{\Omega} \left( (\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+ \right)^2 dx$
- $derSupDeltaL = derSupDeltaL + \Delta t \int_{\Omega} 2 \left( (\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+ \right) \partial_{\Delta L} \tilde{T}$
- $derSupStilde = derSupStilde + \Delta t \int_{\Omega} 2 \left( (\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+ \right) \partial_{\tilde{s}} \tilde{T}$

A la fin de cette simulation, on calcule :

- $Norme = (Norme)^{1/r}$
- $NormeMoins = \min(Norme - T_{fu}, 0)$
- $J = \int_{\Omega} (NormeMoins^2 dx)$
- $derPhaseDeltaL = \int_{\Omega} 2 * NormeMoins * Norme^{1-r} * derPhaseDeltaL dx$
- $derPhaseStilde = \int_{\Omega} 2 * NormeMoins * Norme^{1-r} * derPhaseStilde dx$
- Dans le cas de Uzawa :
  - $L = J + Lag * Contrainte$
  - $\partial_{\Delta L} L = derPhaseDeltaL + Lag * derSupDeltaL$
  - $\partial_{\tilde{s}} L = derPhaseStilde + Lag * derSupStilde$
- Dans le cas de ALM :
  - $L = J + \psi(\text{tol}_{sup} - Contrainte, Lag, \mu)$
  - $\partial_{\Delta L} L = derPhaseDeltaL + \partial_1 \psi(\text{tol}_{sup} - Contrainte, Lag, \mu) derSupDeltaL$
  - $\partial_{\tilde{s}} L = derPhaseStilde + \partial_1 \psi(\text{tol}_{sup} - Contrainte, Lag, \mu) derSupStilde$

## Pas de descente

**A choisir** On considère un coefficient pour chaque variable ( $coef_{\Delta L}$ ,  $coef_{\tilde{s}}$ ). Il est initialisé à l'écart maximum que peuvent prendre les valeurs divisé par 10 :

$$coef_{DeltaL} = (\Delta L_{max} - \Delta L_{min}) / 10 \quad (29)$$

. A chaque itération, le pas de descente est calculé de manière à ce que la différence entre l'ancienne valeur et la nouvelle soit de la valeur du coefficient. On aura donc :

$$|\Delta L_{i+1} - \Delta L_i| = coef_{\Delta L} \quad (30)$$

Ce coefficient est divisé par 5 lorsque l'itération est ratée et multiplié par 1.5 lorsque l'itération est réussie.