

Modèle et objectif

On s'intéresse à la construction d'une pièce rectangulaire Ω par méthode SLM ($\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$, $\Gamma_N \cap \Gamma_D$). On souhaite donc faire passer une source de chaleur le long d'une trajectoire prédéfinie afin de faire fusionner le lit de poudre. Cependant, il ne faut pas que la température puisse être trop élevée sous peine de créer des contraintes résiduelles thermiques qui nuiraient à la qualité de la pièce.

Le travail présenté dans ce document consiste à, ayant choisi une trajectoire de type ligne droite pour le laser, optimiser la distance entre les lignes afin de fusionner la poudre ($\forall x \in \Omega$, $\exists t \in [0, t_F]$ tel que $T(x, t) > T_{phase}$) tout en maîtrisant la température dans le solide ($\forall x \in \Omega, \forall t \in [0, t_F]$, $T(x, t) < T_{sup}$).

Modélisation thermique

On commence par introduire le modèle thermique utilisé ici. Il est semblable à celui utilisé dans l'article de Lukas. On rajoute ici de la diffusion car notre modèle est seulement 2D et on veut tout de même modéliser la perte de chaleur dans les couches inférieures. Les conditions aux limites sont les conditions de Dirichlet car autour du solide, on a uniquement de la poudre qui est adiabatique. On cherche un champ de température $T(x, t) : [0, t_F] \times D \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \rho \partial_t T + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} (T - T_{ini}) - \text{div}(\lambda \nabla T) = Q & \text{in } (0, t_F) \times D \\ T = T_{ini} & \text{in } (0, t_F) \times \partial\Omega \\ T(0) = T_{ini} & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

Le solide et la poudre ont des valeurs différentes pour les paramètres physiques suivants (en notant χ_{solid} la fonction caractéristique du solide):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{solid} * \chi_{solid} + \rho_{powder} * (1 - \chi_{solid}) \\ \lambda &= \lambda_{solid} * \chi_{solid} + \lambda_{powder} * (1 - \chi_{solid}) \\ \beta &= \beta_{solid} * \chi_{solid} + \beta_{powder} * (1 - \chi_{solid}) \end{aligned} \quad (2)$$

Trajectoire de la source

On considère une trajectoire en ligne droite comme sur le schéma ci-dessous (Figure XXX). On estime que la vitesse du laser est constante et égale à 1. On prend pour pas de temps $\delta t = 2 * \delta x$. La source est modélisée par une gaussienne centrée en un point (Figure XXX).

On modélise dans un premier temps le temps pour changer de ligne comme nul. De plus, on considère un temps final t_F , temps nécessaire pour effectuer toute la trajectoire comme constant. On estime que, que les lignes droites soient "dans le domaine de calcul ou non", la source va y passer. Ainsi, on décorrèle le temps final de la trajectoire de lasage ce qui permet de le considérer comme un paramètre fixe lors de l'optimisation (Figure XXX).

Afin de modéliser l'arrêt de la source lorsqu'on sort de la zone de travail, on choisit de multiplier la source à une fonction de heaviside qui s'annule lorsque le laser sort de la zone de travail. Ainsi, la zone continue de parcourir "pour de faux" des lignes hors du domaine de travail sans perturber la thermique. Cette approche induit deux discontinuités différentes :

- discontinuité de la source avec la fonction de heaviside.
- discontinuité des paramètres de la fonction de heaviside : le temps t_s auquel la source sort du domaine de travail et s'éteint est fortement discontinu par rapport à l'écartement entre les lignes ΔL (il s'agit même d'une fonction en escaliers).

On peut éliminer la deuxième discontinuité en introduisant une deuxième variable, \tilde{s} à optimiser et qui représente la longueur parcourue par le laser. Cette longueur n'est pas nécessairement proportionnelle à la longueur d'une ligne et donc on peut estimer que la source doit s'éteindre au milieu de la dernière ligne. La source est alors modélisée par une gaussienne centrée en un point mouvant, dépendant du temps et de l'écartement entre les lignes ΔL et d'une fonction de heaviside qui vaut 0 lorsque l'on a "dépassé l'abscisse curviligne finale \tilde{s} " : $1_{tV < \tilde{s}}$. On a toujours ici la discontinuité de la source avec la fonction de heaviside. Cependant, l'abscisse curviligne est, elle, continue, ce qui nous évite la deuxième discontinuité.

Theorie

Probleme

On veut minimiser les endroits n'ayant pas subi de changement phase tout en ne dépassant jamais une valeur seuil de la température (T_{sup}), en tout point et en tout instant de fabrication.

Les paramètre d'optimisation sont :

- la distance entre deux lignes de parcours du laser ΔL . On borne ΔL par 0 et par la largeur de la pièce ($\Delta L \in [0, L_{max}]$).
- l'"abscisse curviligne" finale \tilde{s} qui détermine l'arrêt de la source. On borne \tilde{s} par 0 et par un nombre de ligne maximal (déterminé par le temps final constant t_F choisi) multiplié par le temps de parcours d'une seule ligne.
A vérifier quand même... ça ou le temps qu'on reste sur le rectangle?

Equation de la chaleur

On pose $\tilde{T} = T - T_{ini}$ (i.e. $T = \tilde{T} + T_{ini}$). On a alors, d'après l'équation 1 (l'arrêt de la source est modélisée par la fonction source Q elle même. On écrit donc bien l'équation jusqu'à t_F fixé) :

$$\begin{cases} \left(\rho \partial_t \tilde{T} + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \tilde{T} - \text{div}(\lambda \nabla \tilde{T}) \right) = Q(\Delta L, \tilde{s}) & \text{in } (0, t_F) \times D \\ \tilde{T} = 0 & \text{in } (0, t_F) \times \Gamma_D \\ \tilde{T}(0) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3)$$

Le problème variationnel lié à la chaleur est alors le suivant :

trouver $\tilde{T} \in V = \{w \in H^1([0, t_M], \Omega) \text{ tel que } w|_{\Gamma_D} = 0\}$ tel que

$$\forall v \in V, \forall t \in [0, t_M], \quad \int_{\Omega} \rho \partial_t \tilde{T} v + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \tilde{T} v dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla \tilde{T} \nabla v dx - \int_{\Omega} Q(\Delta L, \tilde{s}) v dx = 0 \quad (4)$$

Changement de phase

On souhaite ici que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \left[\left(\|T\|_{\infty} - T_{fu} \right)^- \right]^2 = 0 \quad (5)$$

On approxime la norme infinie par une norme r et on a donc la fonction objectif suivante :

$$J(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} \left[\left(\left(\int_0^{t_F} |T|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2 = \int_{\Omega} \left[\left(\left(\int_0^{t_M} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2 \quad (6)$$

Contrainte

On veut éviter que la température dépasse une température seuil T_{sup} . On impose pour cela une contrainte :

$$C(\Delta L, \tilde{s}) = \int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(T - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} = \int_0^{t_M} \int_{\Omega} [(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} \quad (7)$$

Source

La source est une gaussienne qui parcourt la trajectoire et qui s'éteint quand l'"abscisse" dépasse l'"abscisse curviligne" finale \tilde{s} . On note t le temps ($t = \Delta t * i$), t_{Li} le temps pour parcourir une ligne, V la vitesse de parcours, $(x_C(t), y_C(t, \Delta L))$ le "centre de la gaussienne" à l'instant t . On a alors :

$$\begin{aligned} x_C(t) &= \left(t - \text{Ent} \left[\frac{t}{t_{Li}} \right] * t_{Li} \right) \\ Y_C(T) &= \text{Ent} \left[\frac{t}{t_{Li}} \right] * \Delta L \end{aligned} \quad (8)$$

On pose la alors la fonction $S(t, x, y, \Delta L) = P \exp \left(-100 \left((x - x_C(t))^2 + (y - y_C(t, \Delta L))^2 \right) \right)$

On modélise l'action d'éteindre la source pas la fonction de heaviside régularisée suivante :

$$h_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -\epsilon \\ 0.5 \left(1 + \frac{t}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin(\pi \frac{t}{\epsilon}) \right) & \text{si } -\epsilon < t < \epsilon \\ 1 & \text{si } \epsilon < t \end{cases}$$

Cette fonction est \mathcal{C}^1 , avec

$$h'_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} \left(1 + \cos(\pi \frac{t}{\epsilon}) \right) & \text{si } -\epsilon < t < \epsilon \\ 0 & \text{si } \epsilon < t \end{cases}$$

On a alors

$$Q(t, x, y, \Delta L, \tilde{s}) = S(t, x, y, \Delta L) * h_\epsilon(\tilde{s} - tV) \quad (9)$$

Problème d'optimisation

On s'intéresse donc au problème suivant :

$$\min_{\substack{\Delta L \in [0, L_{max}] \\ \tilde{s} \in [0, S_{max}]} } J(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} \left[\left(\left(\int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2$$

$$\text{tel que } C(\Delta L, \tilde{s}) = \int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} \leq 0$$

avec \tilde{T} solution de l'Equation 3.

On va utiliser l'algorithme d'Uzawa pour gérer la contrainte. On pose lag_{sup} le multiplicateur de Lagrange. On s'intéresse au problème modifié :

$$\min_{\substack{\Delta L \in [0, L_{max}] \\ \tilde{s} \in [0, S_{max}]} } J(\Delta L, \tilde{s}) \quad (10)$$

avec

$$\tilde{J}(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} \left[\left(\left(\int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2 + \text{lag}_{sup} \left[\int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} \right] \quad (11)$$

et on aura a chaque itération

$$\text{lag}_{sup}^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } C(\Delta L^n) \leq 0 \\ \text{lag}_{sup}^n + \mu_{lag} C(\Delta L^n, \tilde{s}^n) & \text{si } C(\Delta L^n, \tilde{s}^n) > 0 \end{cases} \quad (12)$$

Derivation du problème

Afin de déterminer la dérivée, on utilise une méthode adjoint :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta L, \tilde{s}, v, q, \mu) = & \int_{\Omega} \left[\left(\left(\int_0^{t_F} |v + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2 dx + \text{lag}_{sup} \left[\int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(v + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} \right] \\ & + \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \rho(\partial_t v) q + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} v q - \text{div}(\lambda \nabla v) q - Q(\Delta L, \tilde{s}) q dx dt + \int_{\Omega} \rho v(0) q(0) dx + \int_0^{t_F} \int_{\Gamma_D} \mu v ds dt \end{aligned} \quad (13)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Delta L, \tilde{s}, v, q, \mu) = & \int_{\Omega} \left[\left(\left(\int_0^{t_F} |v + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^{-2} dx + \text{lag}_{sup} \left[\int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(v + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} \right] \right. \\
& + \int_{\Omega} \rho v(0) q(0) dx + \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \rho \partial_t(vq) dx dt - \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \rho (\partial_t q) v dx dt \\
& + \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \lambda \nabla v \nabla q dx dt + \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \frac{\lambda}{ep_{car}^2} v q - Q(\Delta L, \tilde{s}) q dx dt + \int_0^{t_F} \int_{\Gamma_D} \mu v - (\lambda \nabla v) q ds dt \\
& \left. \right] \quad (14)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Delta L, \tilde{s}, v, q, \mu) = & \int_{\Omega} \left[\left(\left(\int_0^{t_F} |v + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^{-2} dx + \text{lag}_{sup} \left[\int_0^{t_F} \int_{\Omega} [(v + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx dt - \text{tol}_{sup} \right] \right. \\
& + \int_{\Omega} \rho v(t_F) q(t_F) dx - \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \rho (\partial_t q) v dx dt \\
& + \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \lambda \nabla v \nabla q dx dt + \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \frac{\lambda}{ep_{car}^2} v q - Q(\Delta L, \tilde{s}) q dx dt + \int_0^{t_F} \int_{\Gamma_D} \mu v - (\lambda \nabla v) q ds dt \\
& \left. \right] \quad (15)
\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à v et en appliquant à la solution \tilde{T} de l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned}
\partial_v \mathcal{L}(\Delta L, \tilde{s}, \tilde{T}, q, \mu)(\phi) = & \text{lag}_{sup} \int_0^{t_F} \int_{\Omega} 2[(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+] \phi dx dt \\
& + \int_{\Omega} 2 \left(\left(\int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^{-\frac{1}{r}} \left(\int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}-1} \int_0^{t_F} r |\tilde{T} + T_{ini}|^{r-1} \phi dt dx \\
& + \int_0^{t_F} \int_{\Omega} -\rho \partial_t q \phi + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \phi q + \lambda \nabla \phi \nabla q dx dt + \int_{\Omega} \rho q(t_F) \phi(t_F) dx \\
& + \int_0^{t_F} \int_{\Gamma_D} (\mu \phi - (\lambda \nabla \phi) n q) ds dt \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_v \mathcal{L}(\Delta L, \tilde{s}, \tilde{T}, q, \mu)(\phi) = & \text{lag}_{sup} \int_0^{t_F} \int_{\Omega} 2[(\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+] \phi dx dt \\
& + \int_{\Omega} 2 \left(\left(\int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^{-\frac{1}{r}} \left(\int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}-1} \int_0^{t_F} r |\tilde{T} + T_{ini}|^{r-1} \phi dt dx \\
& + \int_0^{t_F} \int_{\Omega} -\rho \partial_t q \phi + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \phi q - \text{div}(\lambda \nabla q) \phi dx dt + \int_{\Omega} \rho q(t_F) \phi(t_F) dx \\
& + \int_0^{t_F} \int_{\Gamma_D} (\mu \phi - (\lambda \nabla \phi) n q - (\lambda \nabla q) n \phi) ds dt \quad (17)
\end{aligned}$$

On en déduit alors l'équation des adjoints :

$$\begin{cases} \rho \partial_t p - \frac{\lambda}{ep_{car}^2} p + \text{div}(\lambda \nabla p) = 2 \text{lag}_{sup} \text{ind}_{Cont}(t) + 2 N_{Moins} N_r^{1-r} (\text{ind}_{Phase}(t))^{r-1} & \text{in}(0, t_F) \times \Omega \\ p = 0 & \text{in}(0, t_F) \times \Gamma_D \\ p(t_F) = 0 & \text{in } \Omega \\ \mu = (\lambda \nabla q) n & \text{in}(0, t_F) \times \Gamma_D \end{cases} \quad (18)$$

avec

$$\begin{aligned}
\text{ind}_{Cont}(t) &= (\tilde{T} + T_{ini} - T_{sup})^+ \\
\text{ind}_{Phase}(t) &= |\tilde{T} + T_{ini}| \\
N_r &= \left(\int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \\
N_{Moins} &= (\text{Norme} - T_{fu})^- = \left(\int_0^{t_F} |\tilde{T} + T_{ini}|^r dt \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \Big)^-
\end{aligned} \tag{19}$$

Et la forme variationnelle suivante : trouver $p \in V$ tel que

$$\forall \phi \in V, \quad \int_{\Omega} \rho \partial_t p \phi - \lambda \nabla p \nabla \phi - \frac{\lambda}{ep_{car}^2} p \phi - \left(2\text{lag}_{sup} \text{ind}_{Cont}(t) + 2N_{Moins} N_r^{1-r} (\text{ind}_{Phase}(t))^{r-1} \right) dx = 0 \tag{20}$$

De plus, on obtient alors la dérivée de la fonction objectif par rapport à ΔL et \tilde{s} :

$$\begin{aligned}
\partial_{\Delta L} \tilde{J}(\Delta L, \tilde{s}) &= - \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \partial_{\Delta L} Q p dx dt \\
\partial_{\tilde{s}} \tilde{J}(\Delta L, \tilde{s}) &= - \int_0^{t_F} \int_{\Omega} \partial_{\tilde{s}} Q p dx dt
\end{aligned} \tag{21}$$

avec

$$\begin{aligned}
\partial_{\Delta L} Q &= h_{\epsilon}(\tilde{s} - tV) S(t, x, y, \Delta L) * (-200)(y - y_C(t, \Delta L)) * (-1) * \partial_{\Delta L} y_C(t, \Delta L) \\
&= h_{\epsilon}(\tilde{s} - tV) S(t, x, y, \Delta L) * (-200)(y - y_C(t, \Delta L)) * (-1) * (-1) * \text{Ent} \left[\frac{t}{t_{Li}} \right] \\
&= h_{\epsilon}(\tilde{s} - tV) S(t, x, y, \Delta L) * (-200)(y - y_C(t, \Delta L)) \text{Ent} \left[\frac{t}{t_{Li}} \right]
\end{aligned} \tag{22}$$

et

$$\partial_{\tilde{s}} Q = S(t, x, y, \Delta L) * h'_{\epsilon}(\tilde{s} - tV) \tag{23}$$

Discrétisation temporelle

On utilise un schéma implicite pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\rho + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \Delta t \right) \tilde{T}_{j+1} v dx + \int_{\Omega} \lambda \Delta t \nabla \tilde{T}_{j+1} \nabla v dx - \int_{\Omega} \left(Q_{j+1} \Delta t - \rho \tilde{T}_j \right) v dx = 0 \\ \tilde{T}_0 = T_{ini} \end{cases} \tag{24}$$

$$J(\Delta L, \tilde{s}) = \int_{\Omega} \left[\left(\left(\sum_{j=0}^{N_F} \Delta t |\tilde{T}_j + T_{ini}|^r \right)^{\frac{1}{r}} - T_{fu} \right)^- \right]^2 \tag{25}$$

$$C(\Delta L, \tilde{s}) = \sum_{j=0}^{N_F} \Delta t \int_{\Omega} [(\tilde{T}_j + T_{ini} - T_{sup})^+]^2 dx - \text{tol}_{sup} \tag{26}$$

$\forall \phi \in V,$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\rho + \frac{\lambda}{ep_{car}^2} \Delta t \right) p_j \phi + \lambda \Delta t \nabla p_j \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \Delta t \left(2\text{lag}_{sup,j} \text{ind}_{Cont,j} + 2N_{Moins} N_r^{1-r} (\text{ind}_{Phase,j})^{r-1} \right) \phi - \int_{\Omega} \rho p_{j+1} \phi dx = 0 \\ p_{N_F} = 0 \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\Delta L} \tilde{J}(\Delta L, \tilde{s}) &= - \sum_0^{t_F} \Delta t \int_{\Omega} \partial_{\Delta L} Q_j p dx = - \sum_0^{t_F} \Delta t \int_{\Omega} h_{\epsilon}(\tilde{s} - t_j V) S(t_j, x, y, \Delta L) * (-200)(y - y_C(t_j, \Delta L)) \text{Ent} \left[\frac{t_j}{t_{Li}} \right] p_j dx \\
\partial_{\tilde{s}} \tilde{J}(\Delta L, \tilde{s}) &= - \sum_0^{t_F} \int_{\Omega} \partial_{\tilde{s}} Q_j p_j dx = - \sum_0^{t_F} \int_{\Omega} S(t_j, x, y, \Delta L) * h'_{\epsilon}(\tilde{s} - t_j V) p_j dx
\end{aligned} \tag{28}$$