

Cognome e nome :

Matricola:

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA (punti 10, soglia 4)

Per ogni quesito, indicare con una croce l'unica risposta corretta.

Per annullare una risposta già data, racchiudere la croce in un cerchio.

1. [punti 2] Sia $z = 1 + i$. Allora, nel piano complesso, il numero z^{83}

- (a) si trova nel primo quadrante;
- (b) si trova terzo quadrante;
- (c) si trova secondo quadrante; ✓
- (d) si trova quarto quadrante;
- (e) si trova sull'asse reale.

2. [punti 2] La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 - \frac{n^2}{e^n} \right)$

- (a) diverge a $+\infty$;
- (b) diverge a $-\infty$;
- (c) è irregolare.
- (d) converge; ✓
- (e) nessuna delle altre.

3. [punti 1] Il limite $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \sin n) \log \frac{1}{n}$ e' pari a

- (a) $L = -\infty$; ✓
- (b) $L = +\infty$;
- (c) $L = 0$;
- (d) $L = 1$;
- (e) L non esiste.

4. [punti 1] Sia $P_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio di grado 9. È certamente vero che

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_9(x) = +\infty$;
- (b) P_9 è una funzione dispari;
- (c) l'equazione $P_9(x) = 8$ ha almeno una soluzione; ✓
- (d) P_9 ammette almeno un punto di massimo e un punto di minimo;
- (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

5. [punti 1] Sia $f(x) = |x|^3$. E' vero che

- (a) f non è derivabile solo in $x = -1$;
- (b) f non è derivabile solo in $x = 0$;
- (c) f è derivabile in tutto \mathbb{R} ; ✓
- (d) f non è derivabile solo in $x = 0$ e in $x = -1$;
- (e) nessuna delle altre risposte Ã corretta.

6. [punti 2] Per $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$L := \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x^\alpha}$$

esiste finito e diverso da zero

- (a) $\alpha = 1$;
- (b) $\alpha \in (2, 3)$;
- (c) $\alpha = 4$; ✓
- (d) $\alpha > 4$;
- (e) Nessuna delle altre risposte Ã corretta.

7. [punti 1] Al variare di $\alpha > 0$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$

esiste finito se e solo se

- (a) $\alpha > 1$;
- (b) $\alpha > \frac{2}{3}$; ✓
- (c) $\alpha < 1$;
- (d) $\alpha < \frac{2}{3}$;
- (e) nessuna delle altre risposte Ã corretta.

ESERCIZI (punti 14, soglia 7)

Esercizio 1. [punti 3]

- Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{C}$ delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $\frac{z}{\bar{z}} = i$.
- Disegnare nel piano complesso l'insieme $B \subset \mathbb{C}$ delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ del sistema
$$\begin{cases} \frac{z}{\bar{z}} = i \\ |z + i| \leq 1. \end{cases}$$

Esercizio 2. [punti 4] Studiare, al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$, il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \beta^{n \frac{\log n}{n}}$.

Esercizio 3. [punti 3] Calcolare l'integrale $I := \int_9^{16} \frac{\log \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$.

Esercizio 4. [punti 4] Data la funzione $f(x) := (x - 2)^{\frac{2}{3}}(x + 3)^{\frac{1}{3}}$ determinarne

- a) dominio $D(f)$, continuità, eventuali asintoti;
- b) derivata prima f' e suo dominio $D(f')$, classificare gli eventuali punti di non derivabilità;
- c) estremi locali;
- d) grafico (non è richiesto lo studio della convessità).

TEORIA [punti 8] , soglia 4

1. [punti 4] Enunciare e dimostrare il Teorema di Bolzano-Weierstrass sull'esistenza di punti di accumulazione per insiemi infiniti e limitati.

2. [punti 4] Enunciare e dimostrare il Lemma di Fermat.