Analisi Matematica 1 A.A. 2021-22 Prima prova 10 Novembre 2021 Compito A	Docente: Cipriani-Frigeri-Migliavacca	Numero iscrizione appello
Cognome:	Nome:	Codice persona:

Istruzioni: *I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. **Quiz. Quesiti a risposta multipla, una sola affermazione e' corretta.**

1. *Punti 1. Per quale* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si ha* $\sqrt{x}\Big(1-\cos(\frac{1}{x^2})\Big) \sim x^\alpha$ *per* $x \to +\infty$*?*

- ☐ *a)* $\alpha = 1$
- ☐ *b)* $\alpha = -\frac{7}{2}$
- ☐ *c)* $\alpha = \frac{3}{2}$
- ☐ *d)* $\alpha = 2$
- ☐ *e) Nessuna delle altre affermazioni e' corretta.*

Soluzione: poiche' $1-\cos y \sim y^2/2$ *per* $y \to 0$ *e* $y := 1/x^2 \to 0$ *per* $x \to +\infty$*, abbiamo che*

$$\sqrt{x}\Big(1-\cos(\frac{1}{x^2})\Big) \sim x^{1/2} \cdot \frac{1}{2x^4} = \frac{1}{2}x^{-7/2}.$$

La risposta corretta e' quindi la e). Nel modulo Forms x^α *e' sostituito da* $x^\alpha/2$ *e la corrispondente risposta corretta e' quindi la b)* $\alpha = -7/2$.

2. *Punti 1. Se* $z := i - 1$ *allora il numero complesso* z^{25}

- ☐ *a) ha lo stesso argomento di* z
- ☐ *b) appartiene al primo quadrante*
- ☐ *c) e' immaginario puro*
- ☐ *d) e' reale*
- ☐ *e) Nessuna delle altre affermazioni e' corretta.*

Soluzione: $|z| = |-i+i| = \sqrt{2}$, $z = -1+i = \sqrt{2}\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{Arg}(z) = \frac{3}{4}\pi$, $z = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$. *Per la prima formula di de Moivre* $\mathrm{Arg}(z^{25}) = 25 \cdot \mathrm{Arg}(z) = 25 \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{75}{4}\pi = 18\pi + \frac{3}{4}\pi$. *Poiche'* 18π *e' multiplo intero di* 2π *abbiamo* $\mathrm{Arg}(z^{25}) = \mathrm{Arg}(z) = \frac{3}{4}\pi$.

3. *Punti 2. Sia* $A := \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1-x} < x\}$*. Allora*

- ☐ *a)* $\inf A = -\infty$ *e* $\sup A = +\infty$
- ☐ *b)* $\inf A = 0$ *e* $\sup A = +\infty$
- ☐ *c)* $\inf A = 0$ *e* $\sup A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- ☐ *d)* $\inf A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *e* $\max A = 1$
- ☐ *e) Nessuna delle altre affermazioni e' corretta.*

Soluzione: se $x \in A$ *allora* $1 - x \geq 0$ *e* $x > \sqrt{1-x} \geq 0$ *cosi'* $A \subseteq (0,1]$. *Quindi* $x \in A$ *se e solo se* $x \in (0,1]$ *e* $(\sqrt{1-x})^2 < x^2$ *cioe' se e solo se* $x \in (0,1]$ *e* $x^2 + x - 1 > 0$ *cioe' se e solo se* $x \in (x_+, 1]$ *dove* $x_\pm := (-1 \pm \sqrt{5})/2$ *sono gli zeri del polinomio* $x^2 + x - 1$. *Quindi* $A = (x_+, 1]$ *e* $\inf A = x_+$, $\max A = 1$.

4. *Punti 2. Il limite* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 \cdot \sin x + x^5 - 2x^3}{e^{-x} + x^3(\ln x)^{10} - 3x^5}$ *e' pari a*

- ☐ *a)* $-\frac{2}{3}$
- ☐ *b)* $+\infty$
- ☐ *c)* 0
- ☐ *d) non esiste*

- ☐ e) $-\frac{1}{3}$.

Soluzione: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\cdot\sin x+x^5-2x^3}{e^{-x}+x^3(\ln x)^{10}-3x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sin x)/x+1-2x^{-2}}{x^{-5}\cdot e^{-x}+x^{-5}\cdot(\ln x)^{10}-3} = -\frac{1}{3}$.

5. *Punti 1. Si consideri una funzione* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *e* $x_0\in(a,b)$. *Allora*

- ☐ *a) se* f *e' continua in* x_0 *risulta che* f *e' derivabile in* x_0
- ☐ *b) se* f *e' derivabile in* x_0 *risulta che* f *e' continua in* x_0
- ☐ *c) se* f *e' derivabile in* x_0 *risulta* $f'(x_0)=0$
- ☐ *d) se* f^2 *e' derivabile in* x_0 *risulta che* f *e' derivabile in* x_0
- ☐ *e) Nessuna delle altre affermazioni e' corretta.*

Soluzione: b). Infatti a) non e' poiche' la funzione modulo e' continua ma non derivabile in $x=0$, *c) non e' poiche' la funzione identita' e' derivabile in* $x=0$ *ma la sua derivata non si annulla e d) non e' poiche' la funzione* $f(x):=x^{3/5}$ *non e' derivabile in* $x=0$ *ma* $f(x)^2=x^{6/5}$ *lo e'.*

6. **Parte Carta e Penna: 3 punti per ogni esercizio, 9 punti in totale.**

6a) Enunciare e dimostrare il Lemma di Fermat.

6b) Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$|z|^2\cdot z=-2i\overline{z}.$$

Soluzione: chiaramente $z_3:=0$ *e' soluzione. Per* $z\neq0$, *moltiplicando entrambi i membri per* z *otteniamo l'equazione* $|z|^2\cdot z^2=-2i|z|^2$ *cioe'* $|z|^2(z^2+2i)=0$ *equivalente a* $z^2=-2i$. *Le soluzioni non nulle sono quindi le 2 radici quadrate di* $-2i=2\cdot e^{-i\pi/2}$: $z_0:=\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))=1-i$, $z_1:=\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))=-1+i$.

6c) Determinare la monotonia e gli estremi locali della funzione

$$f(x):=x^{2/3}\cdot e^{-x}.$$

Soluzione: poiche' $f(x)\geq0$ *per ogni* $x\in\mathbb{R}$ *e* $f(0)=0$, $x=0$ *e' un punto di minimo assoluto. Per altro, per il Teorema di derivazione composta, esiste*

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}e^{-x}-x^{2/3}e^{-x}=\frac{1}{3}x^{-1/3}e^{-x}(2-3x) \qquad x\neq0$$

ma non esiste $f'(0)$ *(*$x=0$ *e' singolare) (*$f(x)\sim x^{2/3}$ *per* $x\to0$*). L'unico punto critico e'* $x_0=2/3$. *Per il test di monotonia, essendo* $f'(x)>0$ *per* $x\in(0,2/3)$ *e* $f'(x)<0$ *per* $x\in(-\infty,0)\cup(2/2,+\infty)$, x_0 *e' un punto di massimo.*