Politecnico Milano - Appello AM1 20220201 - Prof. Cipriani

Cognome, nome e firma:

Codice Persona:

QUIZ A RISPOSTA MULTIPLA Una e una sola delle 5 risposte è corretta. Indicarla con una croce. Per annullare una risposta data, racchiudere la croce in un cerchio.

1. (1 punto) Sia $z = 3 + \sqrt{3}i$. Allora
$$\arg(z^{22}) =$$

(a) $5\pi/3$;

(b) $2\pi/3$;

(c) $5\pi/6$;

(d) $7\pi/6$;

(e) nessuna delle altre risposte è corretta;

2. (1 punto) L'insieme $A := \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = |z - i|\}$ è

(a) l'intersezione di due circonferenze;

(b) un punto;

(c) la retta $\{z \in \mathbf{C} : Re\, z = \frac{3}{2}\}$;

(d) l'unione di due rette;

(e) nessuna delle altre risposte è corretta.

3. (1 punto)
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n^7}\right)}{\log\left(1 + n^5\right)}$$

(a) $= -\infty$;

(b) $= -12$;

(c) $= -\frac{7}{5}$;

(d) $= 0$;

(e) non esiste.

4. (1 punto) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $J = f(I)$ l'immagine di f. Possiamo affermare che:

(a) se f è strettamente monotona, f è invertibile se e solo se I è un intervallo;

(b) se I è un intervallo limitato, f assume su I massimo assoluto e minimo assoluto;

(c) se I è un intervallo chiuso , allora J è un intervallo chiuso;

(d) se $I = \mathbb{R}$, allora $J = \mathbb{R}$;

(e) nessuna delle altre risposte è corretta.

5 (1 punto) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con f derivabile una volta e g derivabile due volte in tutto $\mathbb{R}$. Allora, presi $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, risulta che

$$\int_a^b f(x)g''(x)\,dx =$$

(a) $= f(x)g(x)|_a^b - \displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$;

(b) $= f'(x)g'(x)|_a^b - \displaystyle\int_a^b f'(x)g'(x)\,dx$;

(c) $= f(x)g'(x)|_a^b - \displaystyle\int_a^b f'(x)g'(x)\,dx$;

(d) $= f'(x)g''(x)|_a^b - \displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$;

(e) nessuna delle altre risposte è corretta.

6. (1 punto) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\,dx$.

(a) non esiste poichè la funzione integranda non è integrabile

(b) $= \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$;

(c) $= 0$;

(d) $= -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$;

(e) nessuna delle altre risposte è corretta.

7. (2 punti) Sia data la funzione $f(x) := e^{x^2} \cdot \cos x - 1$ (attenzione: **non** ci sono parentesi). È vero che

(a) $f(x) \sim x^2$ per $x \to 0$;

(b) $f(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$;

(c) $f(x) \sim -\frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$;

(d) $f(x) = o\left(x^2\right)$ per $x \to 0$;

(e) nessuna delle altre risposte è corretta.

8. (2 punti) Sia F la funzione integrale definita da $F(x) = \int_0^x \frac{|\sin t|}{t^2+1}\,dt$. È vero che

(a) F ha infiniti punti di massimo o di minimo locale;

(b) F ha infiniti punti angolosi;

(c) F è strettamente crescente;

(d) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$;

(e) nessuna delle altre risposte è corretta.

9. (2 punti) Quale delle seguenti affermazioni garantisce la derivabilità di f in $x = 0$?

(a) $f(0) = 0$ e $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$;

(b) $lim_{x \to 0} f(x) = 0$;

(c) f continua in $x = 0$;

(d) $f(x) \sim 1$ per $x \to 0$;

(e) f ha un minimo in $x = 0$.

10 (2 punti) Nel punto $x = 1$, la funzione $f(x) = \begin{cases} 2a \log(x) & \text{per } x > 1 \\ b \cos(\pi x) + x & \text{per } x \leq 1 \end{cases}$ risulta

(a) continua per qualunque scelta di a e b, ma non necessariamente derivabile;

(b) continua per infinite coppie (a, b) ma derivabile solo per $(a, b) = (\frac{1}{2}, 1)$,

(c) continua se e solo se $(a, b) = (0, 1)$,

(d) non derivabile qualunque sia la coppia (a, b),

(e) continua e derivabile per qualunque scelta di a e b.

TEORIA

T1. (3 punti) Enunciare e dimostrare il Criterio del Rapporto per la convergenza di serie.

T2. (3 punti) Enunciare e dimostrare il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo.

ESERCIZI

E1. (5 punti) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = x\frac{\log(|x|) + 1}{\log(|x|) - 3},$$

- Determinare il dominio, eventuali simmetrie e studiare la continuità di f. Determinare gli zeri e il segno di f.
- Calcolare i limiti di f al bordo del dominio e determinare tutti gli eventuali asintoti.
- Studiare la derivabilità di f e calcolarne la derivata sul suo dominio $D(f')$.
- Studiare la monotonia di f, discutendo la presenza di estremi locali e globali.
- Tracciare un grafico qualitativo della funzione f (**non è richiesto lo studio di** f'').

.

E2. (4 punti) Calcolare l'integrale

$$I := \int_1^3 x\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx.$$

E3. (3 punti) Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(n)}{n^\alpha},$$

al variare del parametro $\alpha \in [1, +\infty)$.