ANALISI MATEMATICA 1 A.A. 2021-22 - Appello 13-1-2022- Prof. Cipriani

Cognome-nome: **Codice Persona**

Quiz: una e una sola delle risposte è corretta. Indicarla con una croce. Per annullare una risposta cerchiarla.

1. (1 punto) L'equazione $|z^5| - 3^5 = 0$ ha in $\mathbb{C}$

(a) solo le soluzioni $z = \pm 3$ e $z + \pm 3i$;

(b) esattamente 5 soluzioni distinte;

(c) infinite soluzioni;

(d) solo le soluzioni $z = \pm 3$;

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

2. (1 punto) Sia $z \in \mathbf{C}$. A meno di multipli di 2π, $\arg \frac{1}{\bar{z}} =$

(a) $\frac{1}{\arg \bar{z}}$;

(b) $\arg \bar{z}$;

(c) $\frac{1}{\arg z}$;

(d) $\arg z$;

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

3. (1 punto)

$$\text{Il limite} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x) - \sin x}{\sqrt[3]{x} + x^2} \quad \text{e' uguale a}$$

(a) $= -\infty$;

(b) $= +\infty$;

(c) $= -\frac{1}{2}$;

(d) $= 0$;

(e) Non esiste.

4. (1 punto) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2 volte derivabile e convessa su $\mathbb{R}$. Allora

(a) f' è crescente;

(b) $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

(c) esiste min f;

(d) $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

1. $3^5 = |z^5| = |z|^5 \Rightarrow 3 = |z| \Rightarrow \infty$ soluzioni: c)

2. $\frac{1}{z} = \frac{\bar z}{\bar z \cdot z} = \frac{\bar z}{|z|^2} \Rightarrow \operatorname{Arg}\frac{1}{z} = \operatorname{Arg}\bar z$ d)

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{\sqrt[3]{x} + x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = 0$ d)

4. $\left.\begin{array}{l} \exists f'' \\ f \text{ convessa} \end{array}\right\} \Rightarrow f'' \geq 0 \Rightarrow f'$ crescente a)

5. $\int_0^{1/3} f(3x)\,dx = \quad 3x = y \Rightarrow x = \frac{1}{3}y \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dy$

$\underline{x=0 \Rightarrow y=0} \quad \underline{x = 1/3 \Rightarrow y = 1}$

$= \frac{1}{3}\int_0^1 dy\, f(y) = \frac{1}{3} I$ e)

6 $f(x) = (x - \sinh x)^7 \quad \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2} \quad x \to +\infty$

$x \to +\infty \Rightarrow f(x) = (\sinh x)^7 \cdot \left(\frac{x}{\sinh x} - 1\right)^7 \sim \left(\frac{e^x}{2}\right)^7 (-1)^7 \neq x^7$ $\cancel{d)}$

$x \to 0 \quad g(x) = x - \sinh x \quad g'(x) = 1 - \cosh x \quad g'' = -\sinh x$

$g'''(x) = -\cosh x \quad \underline{g(0) = g'(0) = g''(0) = 0 \quad g'''(0) = -1}$

$\underline{g(x) = -\frac{1}{3!}x^3} + o(x^3) \Rightarrow f(x) \sim \left(-\frac{1}{3!}\right)^7 \cdot x^{21} \quad x \to 0$ a)

---

7. $3 + x > \sqrt{x^2 - 1}$: $\quad x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow (3+x)^2 > x^2 - 1 \Rightarrow \cancel{x^2} + 6x + 9 > \cancel{x^2} - 1$

$\Rightarrow 6x > -10 \Rightarrow \begin{cases} x > -5/3 \\ |x| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-5/3, -1] \cup [1, +\infty)$ d)

---

8 $2 = \int_0^2 f(x)\,dx \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx =$ Media di f su $[0,2]$ $\left.\begin{array}{l} \\ f \in C(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow$ <u>Teo Media</u>

$\exists\, x \in [0,2] \;/\; f(x) = 1.$ d)

5. (1 punto) Sia $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. Allora l'integrale $\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x)\,dx$ e' uguale a

(a) $3I$;

(b) $\frac{1}{9}I$;

(c) I;

(d) $9I$;

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

6. (1 punti) Sia f la funzione definita su $\mathbb{R}$ da $f(x) = (x - \sinh x)^7$. Allora $\exists K \in \mathbb{R}$ tale che

(a) $f(x) \sim Kx^{21}$ per $x \to 0$;

(b) $f(x) \sim Kx^7$ per $x \to 0$;

(c) $f(x) \sim Kx^{10}$ per $x \to 0$;

(d) $f(x) \sim x^7$ per $x \to +\infty$;

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

$\sinh x = \mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

7. (2 punti) L'insieme delle soluzioni $x \in \mathbb{R}$ della disequazione $\quad 3 + x > \sqrt{x^2 - 1} \quad$ e' dato da

(a) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;

(b) $(-\frac{5}{3}, -1) \cup (1, +\infty)$;

(c) $[-\frac{5}{3}, -1] \cup [1, +\infty)$;

(d) $(-\frac{5}{3}, -1] \cup [1, +\infty)$;

(e) $(-\frac{5}{3}, +\infty)$.

8. (2 punti) Sia $f \in C(\mathbb{R})$. Se $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$, si può dedurre che

(a) $\cancel{f(x) \geq 0}$ su $[0, 2]$;

(b) $\cancel{\int_0^2 (f(x))^2\,dx = 4}$

(c) $\int_{-2}^0 f(-x)\,dx = -2$

(d) l'equazione $f(x) = 1$ ha almeno una soluzione in $[0, 2]$.

(e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

9. (2 punti) L'integrale $\int_0^2 \frac{2x+3}{(x^2+x)^\alpha}\,dx$ esiste finito

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(b) $\alpha < \frac{1}{2}$;

(c) se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$;

(d) se e solo se $\alpha < 1$;

(e) se e solo se $\alpha < 2$.

$= \left| (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{n^2} \right|$

10. (2 punti) Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log(1+n)}{n^2+1}$ e posto $a_n := \frac{\log(1+n)}{n^2+1}$, è vero che

$\sum_n a_n$

(a) ~~la serie converge semplicemente ma non assolutamente;~~

(b) ~~la serie è irregolare;~~

(c) ~~$a_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$;~~

(d) la serie converge assolutamente;

(e) ~~Nessuna delle altre risposte è corretta.~~

6.TEORIA (Appello)

1. (1 punto) Enunciare il (Primo) Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

9. $f_\alpha(x) = \frac{2x+3}{(x^2+x)^\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}.$

$\alpha \le 0 \implies f \in C(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}([0,2])$

$\alpha > 0$: $\quad x \to 0^+ \quad f_\alpha(x) \sim \frac{3}{x^\alpha}$ integrabile in $U(0^+)$ se $\alpha < 1$

e $\quad f_\alpha \in C((0,2]) \implies f_\alpha \in \mathcal{R}([0,2]) \iff \alpha < 1.$ d)

10. $a_n = \frac{\ln(1+n)}{n^2+1} = \frac{\ln(1+n)}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{n^{2-\alpha}} \le C_\alpha \cdot \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ $\quad \alpha \in (0,1) \Downarrow 2-\alpha \in (1,2)$

$\implies$ d) $\quad C_\alpha := \sup_{x \ge 1} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$

4. (1 punto) Enunciare il Lemma di Fermat.

2. (2 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange (se nella dimostrazione si usa il Teorema di Rolle allora dimostrare anche quello).

3. (2 punti) Enunciare e dimostrare una condizione sufficiente affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga.

7. ESERCIZI (Appello completo)

1. (4 punti) Data

$$f(x) = 1 + (\log(1+x))^2 - e^{x^2},$$

determinare $K \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tali che

$$f(x) \sim Kx^n \quad \text{per } x \to 0.$$

Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza/divergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(\log\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right)^2 - e^{\frac{2}{n^2}}}{n^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$n \to +\infty \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n} \to 0$

$= f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$

$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad n \to +\infty$

$$\begin{cases} g(x) = \ln(1+x) \quad g'(x) = (1+x)^{-1} \quad g''(x) = -(1+x)^{-2} \quad g'''(x) = 2(1+x)^{-3} \\ g(0) = 0 \quad g'(0) = 1 \quad g''(0) = -1 \quad g'''(0) = 2 \\ g(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{cases}$$

$x \to 0$

$$\begin{cases} h(x) = e^{x^2} \quad h'(x) = 2x e^{x^2} \quad h''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} = 2(1+2x^2)e^{x^2} \\ h'''(x) = 8x e^{x^2} + 2(1+2x^2) 2x e^{x^2} \\ h(0) = 1 \quad h'(0) = 0 \quad h''(0) = 2 \quad h'''(0) = 0 \\ h(x) = 1 + x^2 + o(x^3) \end{cases}$$

$$f(x) = \cancel{1} + \left(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)\right)^2 - \left(\cancel{1} + x^2 + o(x^3)\right)$$

$$= \cancel{1} + \cancel{x^2} - x^3 + o(x^3) - (\cancel{1} + \cancel{x^2} + o(x^3))$$

$$= -x^3 + o(x^3) \Rightarrow K = -1, \; n = 3$$

$$a_n \sim \frac{-\left(\sqrt{2}/n\right)^3}{n^\alpha \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = -2^{3/2} \cdot \frac{n^{-3}}{n^\alpha \cdot n^{-1/2}} = -\frac{2^{3/2}}{n^{\alpha + 3 - 1/2}} = -\frac{2^{3/2}}{n^{\alpha + 5/2}}$$

$$\alpha + 5/2 > 1 \iff \alpha > 1 - 5/2 = \frac{2-5}{2} = -3/2 \Rightarrow$$

$$\sum_n a_n \text{ converge} \iff \alpha > -3/2$$

2. (4 punti) Calcolare l'integrale

$$I := \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

" $f(x)$ "

$f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \Rightarrow$

$f \in C([1/2, 1]) \Rightarrow$

$f \in \mathcal{R}([1/2, 1]) \Rightarrow$

$\exists\, I \in \mathbb{R}$.

$\frac{1}{x} = y \qquad x = y^{-1} \qquad dx = -y^{-2} dy$

$$I = -\int_2^1 dy \cancel{\frac{1}{y^2}} \cancel{\cdot y^2} \operatorname{arctg}(y) = + \int_1^2 dy\, 1 \cdot \operatorname{arctg}(y) = \text{p.p.}$$

$$= \left[y \operatorname{arctg}(y) \right]_1^2 - \int_1^2 dy \frac{y}{1+y^2} = 2\operatorname{arctg}(2) - \operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{2}\left[\ln(1+y^2) \right]_1^2$$

$$= 2\operatorname{arctg}(2) - \pi/4 - \frac{1}{2}\ln(5/2).$$

3. (4 punti) Sia f la funzione definita da $\qquad f(x) = (x^3 - |x|)^{\frac{1}{3}}$

1 • Determinare il dominio di f e studiarne la continuità. Calcolare i limiti di f al bordo del dominio. Trovare eventuali asintoti. Determinare gli zeri di f e il segno di f.

2 • Studiare la derivabilità di f, calcolare la derivata di f, classificare i punti di non derivabilità.

3 • Studiare la monotonia di f, discutendo la presenza di estremi locali e globali.

4 • Tracciare un grafico qualitativo della funzione f (non è richiesto lo studio della derivata seconda).

1. $D(f) = \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$ poiché composta di f. continue

$$\lim_{\pm\infty} f = \lim_{\pm\infty} x\left(1 - \frac{|x|}{x^3}\right)^{1/3} = \pm\infty$$

$$f(x) > 0 \iff x^3 > |x| \quad \begin{cases} x > 0 & 0 \le x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) \\ x < 0 & 0 < x^3 + x = x(x^2+1) < 0 \end{cases}$$

$$\iff x > +1$$

$$f(x) = 0 \iff x = 0, 1 .$$

---

2. per $x \neq 0$ f è derivabile come composta di f. derivabili

$x < 0$ $\quad f(x) = (x^3 + x)^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3+x)^{-2/3}(3x^2+1) = \frac{x^2 + 1/3}{(x^3+x)^{2/3}} > 0$$

$x > 0$ $\quad f(x) = (x^3 - x)^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3-x)^{-2/3}(3x^2-1) = \frac{x^2 - 1/3}{(x^3-x)^{2/3}}$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix} \Rightarrow x = 0 \quad \text{Cuspide}$$

---

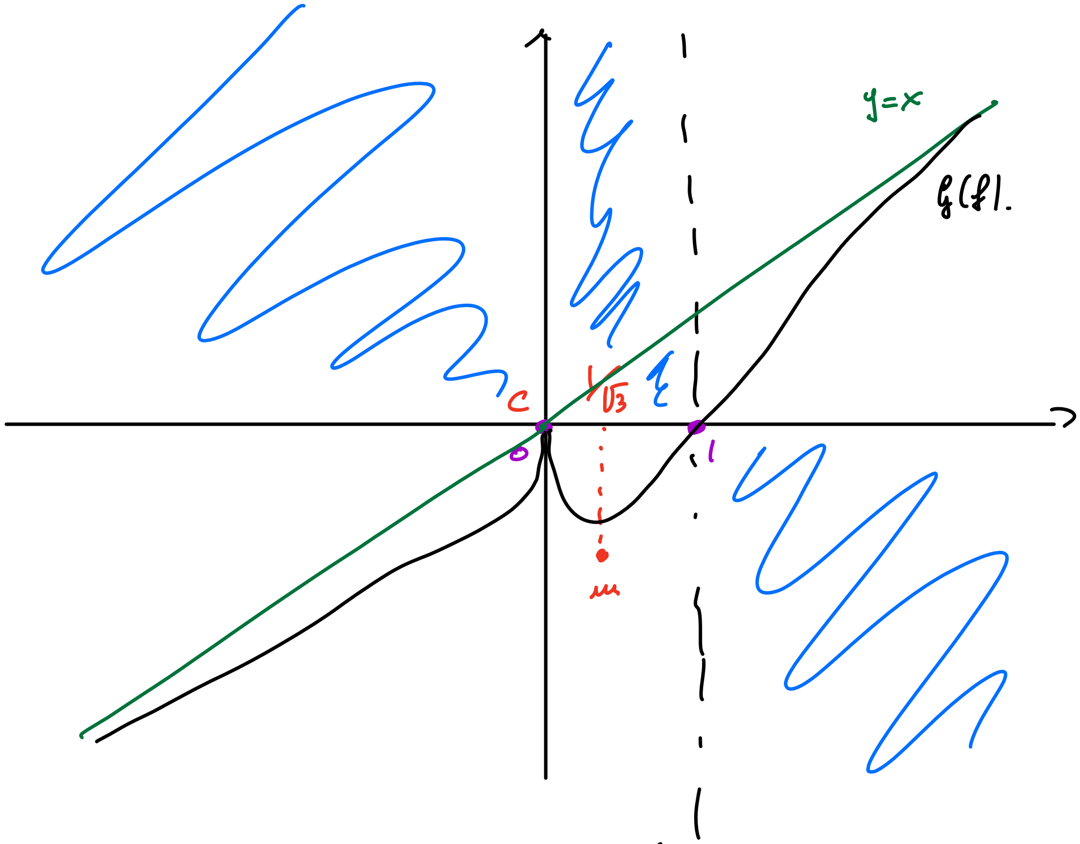
3. $x < 0$ $\quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescente.

$x > 0$ $\quad f'(x) \geq 0 \iff x^2 > 1/3 \iff x > 1/\sqrt{3} \Rightarrow$

$x > 1/\sqrt{3}$ crescente

$x \in (0, 1/\sqrt{3})$ decrescente

$f(1/\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow x_0 = 1/\sqrt{3}$ Min.



$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\,(1-|x|/x^3)^{1/3}}{\cancel{x}} = +1 = m.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty} x(1-|x|/x^3)^{1/3} - x =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{x\cdot\left[(1-|x|/x^3)^{1/3} - 1\right]} = \lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{|x|}{x^3} = 0 = q$$

$\boxed{y = x}$ Asintoto Obliquo per $x \to \pm\infty$

1. Data $f:[0,1) \to \mathbb{R}$ continua. Allora f

a). è ~~necess. integr.~~ su $[0,1]$.

b) se f può essere estesa con continuità a $[0,1]$ allora f è integr.

c) è ~~limitata~~

d) se f è ~~derivabile~~ allora è integr. su $[0,1)$.

e) nessuna delle altre.

2. Sia F funz. integr.

$$F(x) := \int_1^x \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^2+1}\, dt \quad . \quad \text{Allora}$$

~~a) F non è deriv. su $\mathbb{R}$.~~

b) F ~~ha ∞ pti di Max locale~~

c) F ha ∞ pti critici che non sono né Max né Min.

d) F ha ~~almeno~~ un pto di Min locale.

e) ~~nessuna delle altre è giusta.~~

$D(F) = \mathbb{R}$. $\quad F'(x) = \dfrac{(\operatorname{sen} x)^2}{x^2+1} = 0$

$\iff \operatorname{sen} x = 0 \iff x_k = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \infty$ pti critici

$F'(x) \geq 0 \Rightarrow F$ crescente $\Rightarrow x_k$ sono flessi orizzontali

8. Al variare di $\alpha > 0$ l'integr.

$$I_\alpha := \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{\sqrt{1-x}}\,dx \quad \text{converge}$$

a) ~~sse $\alpha > 1$~~

b) ~~sse $\alpha < 1$~~

c) per ~~nessun~~ $\alpha > 0$

d) $\forall\ \alpha > 0$

e) ~~nessuna~~ dalle altre.

$$f_\alpha(x) := \frac{\operatorname{arctg}\left(1/x^\alpha\right)}{\sqrt{1-x}} \qquad x \in (0,1)$$

f_α ha asintoto verticale per $x \to 1^-$:

$$\lim_{x \to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty.$$

$f_\alpha \in C([0,1)) \subset \mathcal{R}([0,b]) \quad \forall\ b \in (0,1).$

Ma $f_\alpha(x) \sim \dfrac{\pi/4}{(1-x)^{1/2}}$, poiché $\frac{1}{2} < 1$

f_α è integr. vicino a $1^- \Longrightarrow f_\alpha \in \mathcal{R}((0,1))$

$\forall \alpha > 0.$

8. Calcolare

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\, dx$$

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1} \qquad e^{2x}-1 \neq 0$$

$$e^{2x} \neq 1$$

$$x \neq 0$$

$f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. poiché composta di f. cont.

$$[\ln 2, \ln 5] \subset (0, +\infty) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$f \in C([\ln 2, \ln 5]) \subset \mathcal{R}([\ln 2, \ln 5]).$$

$e^x = y \qquad x = \ln y \qquad dx = \frac{1}{y} dy$

$x = \ln 2 \Rightarrow y = 2 \quad , \quad x = \ln 5 \Rightarrow y = 5$

$$I = \int_2^5 dy \cdot \frac{1}{y} \frac{y^3}{y^2-1} = \int_2^5 dy \, \frac{y^2}{y^2-1} = \int_2^5 dy \, \frac{y^2-1+1}{y^2-1} =$$

$$= \int_2^5 dy \left(1 + \frac{1}{y^2-1} \right) = \int_2^5 dy\, 1 + \int_2^5 dy \, \frac{1}{y^2-1} =$$

$$= 3 + \int_2^5 dy \, \frac{1}{(y+1)(y-1)} = 3 + \int_2^5 dy \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} \right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3 - \frac{1}{2}\int_2^5 dy \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} \right) = 3 + \frac{1}{2}\int_2^5 dy \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right)$$

$$= 3 + \frac{1}{2}\Big[\ln|y-1| - \ln|y+1| \Big]_2^5 = 3 + \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| \right]_2^5 =$$

$$= 3 + \ln\left|\frac{5-1}{5+1}\right| - \ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right|$$

$$= 3 + \ln 4/6 - \ln 1/3 = 3 + \ln \frac{4}{\cancel{6}_2}\cdot\cancel{3} = 3 + \ln 2 .$$