Ing.dell'Automazione, Elettrica, Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

AM1 - Prof. Cipriani   Appello del 03 luglio 2023 - Aula 26.15 - h 15.00

Cognome e nome :

Codice Persona:

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

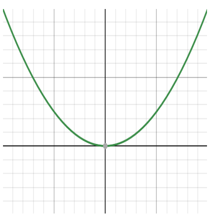
Per ogni quesito, indicare con una croce l'unica risposta corretta.
Per annullare una risposta già data, racchiudere la croce in un cerchio.

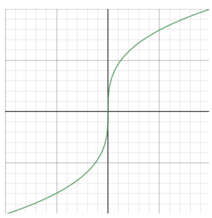
1. [punti 1] L'equazione $z \cdot \bar{z} = 1 + i$ ha nel campo complesso
   (a) infinite soluzioni;
   (b) almeno una soluzione reale;
   (c) almeno una soluzione immaginaria;
   (d) nessuna soluzione; ✓
   (e) nessuna delle altre risposte è corretta.

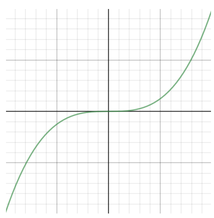
2. [punti 2] Sia P_n un polinomio di grado n. $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) \cdot P_n(-x) = -\infty$ vale
   (a) se e solo se P_n è una funzione dispari;
   (b) se e solo se n è dispari; ✓
   (c) se e solo se il coefficiente del termine di grado n è negativo;
   (d) mai;
   (e) nessuna delle altre risposte è corretta.

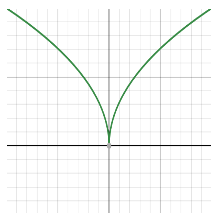
3. [punti 1] L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \log(300 + x^3) < 5\}$ è della forma (con $a, b \in \mathbb{R}$)
   (a) $(a, +\infty)$;
   (b) $(-\infty, a)$;
   (c) (a, b); ✓
   (d) $(-b, -a) \cup (a, b)$
   (e) nessuna delle altre risposte è corretta.

4. [punti 1] Quale dei seguenti può essere un grafico qualitativo, in un intorno di $x = 0$, della funzione f definita da $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}} \cdot \sin x$?

a 

b 

c 

d 

5. [punti 1] Quale delle seguenti funzioni è una primitiva della funzione f definita da $f(x) = \frac{2x}{1+x^4}$?

(a) $\arctan x^2$; ✓
(b) $\log(1 + x^4)$;
(c) $\frac{1}{(1+x^4)^2}$;
(d) $\frac{\log(1+x^4)}{2x^2}$;
(e) nessuna.

6. [punti 2] Sia F la funzione integrale definita da $F(x) = \int_1^x |t - 3|^{\frac{1}{3}}\, dt$. È vero che

(a) F è discontinua in $x = 3$;
(b) F ha un punto di flesso a tangente orizzontale in $x = 3$; ✓
(c) F non è derivabile in $x = 3$;
(d) F ha un punto di minimo in $x = 3$;
(e) nessuna delle altre risposte è corretta.

7. [punti 2] Si consideri $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) La serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1/3$. ✓
(b) la serie converge semplicemente $\forall\,\alpha > 0$, ma non converge assolutamente per alcun α.
(c) la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$.
(d) la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha > 0$.
(e) nessuna delle altre risposte è corretta.

Cognome e nome :

ESERCIZI A

Esercizio 1. [punti 5] Data la funzione f definita da $\mathbf{f(x) = 2\arcsin(1/x) + \sqrt{x^2 - 1}}$ determinarne
a) (1 punto) dominio, limiti, continuita'
b) (1 punto) derivabilita' e derivata prima
c) (2 punti) monotonia ed estremi
d) (1 punto) grafico.
Soluzione.
a) $D = (-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $f(\pm 1) = \pm\pi$, $f \in C(D)$ come composta di funzioni continue.
b) f e' derivabile in $D = (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$ in qunto ivi composta di funzioni derivabili. Applicando in Teorema della Derivata della Funzione Composta abbiamo

$$f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{1 - x^{-2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^3 - 2|x|}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} \qquad |x| > 1.$$

c) Punti critici: $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt{2}$. Segno di f': $f'(x) > 0$ se solo se $x > \sqrt{2}$, f': $f'(x) < 0$ se solo se $x < \sqrt{2}$. Estremi: $x = \sqrt{2}$ minimo locale. Poiche' f e' continua in $x = -1$ e $\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = +\infty$ si ha che $x = -1$ e' minimo relativo. Poiche' f e' continua in $x = -1$ e $\lim_{x\to(+1)^+} f'(x) = +\infty$ si ha che $x = +1$ e' massimo relativo. Poiche' $\pi/2 + 1 = f(\sqrt{2}) > f(-1) = -\pi$ si ha che $x = -1$ e' minimo assoluto.
d)

Esercizio 2. [punti 3]

(2.1) (2 punti) Determinare i numeri complessi $z = x + \mathrm{i}y$ tali che $z^3 + 1 \in \mathbb{R}$.

(2.2) (1 punto) Disegnare nel piano di Gauss l'insieme

$$B = \{w \in \mathbb{C} \,:\, w = \mathrm{i}(z+1), \ \ \text{dove } z \text{ è soluzione del punto (2.1)}\}\,.$$

Soluzione.
2.1) Poiche' $1 \in \mathbb{R}$ abbiamo che $z^3 + 1 \in \mathbb{R}$ se e solo se $z^3 \in \mathbb{R}$. In forma algebrica $z = x + iy$ e $z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \in \mathbb{R}$ se e solo se $3x^2y - y^3 = 0$ cioe' se $y(3x^2 - y^2) = 0$ le soluzioni essendo $y = 0$ e $y = \pm\sqrt{3}x$. L'insieme A delle soluzioni e' quindi unione di queste 3 rette.
2.2) B si ottiene da A traslando A verticalmente di una unita' e ruotando poi di 90° in senso antiorario. Quindi B e' unione dell'asse Y e delle rette $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$.

Esercizio 3. [punti 4] Determinare per quali valori del parametro $\alpha > 0$ esiste finito il valore dell'integrale,

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{|x^2 + 2x - 3|^\alpha} \, dx \, .$$

Soluzione.
Poiche' per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim \frac{\log x}{x^{2\alpha}}$, la funzione e' integrabile nell'intorno di $+\infty$ se e solo se $\alpha > 1/2$.
Poiche' per $x \to 0^+$ si ha $f(x) \sim 3^{-\alpha} \log x$, la funzione e' integrabile in un intorno di $x = 0^+$ per ogni $\alpha > 0$.
Poiche' $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ ed f e' continua in $D := (0, +1) \cup (+1, +\infty)$, si ha che f e' integrabile su ogni intervallo $(a, b) \subset D$.
Poiche' per $x \to 1$ si ha $|f(x)| \sim \frac{|\log(1+x-1)|}{|x-1|^\alpha |x+3|^\alpha} \sim 2^{-\alpha} \frac{|x-1|}{|x-1|^\alpha} = 2^{-\alpha} \frac{1}{|x-1|^{\alpha-1}}$, si ha che f e' integrabile in un intorno di $x = 1$ se e solo se $\alpha < 2$.
In conclusione f e' integrabile in $(0, +\infty)$ e I esiste finito se e solo se $1/2 < \alpha < 2$.

Cognome e nome :

TEORIA

T1. Enunciare e dimostrare il Teorema degli Zeri.

T2. (2 punti) Fornire la definizione di punto critico o stazionario ed enunciare, senza dimostrarlo, il Lemma di Fermat.