

Cognome, nome:

Codice Persona:

N° iscrizione: _____

Domande a risposta multipla: per ogni quesito, indicare con una croce l'unica risposta corretta.
Per annullare una risposta data, racchiudere la croce in un cerchio.

1. [punti 1] La successione $\left\{\sqrt{n}\left(1 - \cos \frac{1}{n^\alpha}\right)\right\}$ è infinitesima

- (a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- (b) $\iff \alpha > \frac{3}{4}$;
- (c) $\iff \alpha > 0$;
- (d) $\iff \alpha > \frac{1}{4}$;
- (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

2. [punti 2] Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$ oppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\lambda$;
- (b) se $\{a_n\}$ è decrescente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\lambda$;
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ può non esistere, ma $\{a_n\}$ è limitata;
- (d) Se $\lambda \neq 0$, $\{a_n\}$ è definitivamente di segno costante
- (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

3. [punti 1] Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x) & \text{se } x \geq 0, \\ \alpha - \frac{\alpha^2}{2}x^2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

- (a) È derivabile in $x = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (b) Non è derivabile in $x = 0$ per alcun valore $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (c) È derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 1$.
- (d) È inferiormente limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (e) Non è superiormente limitata per ogni $\alpha \neq 0$.

4. [punti 1] Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{2-x}\}$.

- (a) $\inf A = 1$; $\max A = 2$.
- (b) $\nexists \inf A$; $\sup A = -2$.
- (c) $\inf A = -\infty$; $\max A = 2$.
- (d) $\inf A = -2$; $\sup A = 1$.
- (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 1 (3 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}.$$

- (a) Determinarne dominio, zeri, segni ed eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.
- (b) Determinare f' con il suo dominio, i punti critici e gli estremi.
- (c) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate e determinare l'immagine $\text{Im}(f)$ (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 2 (3 punti). Determinare l'insieme $A \subset \mathbb{C}$ delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ di

$$(z^3 - (1 + \sqrt{3}i)^9)(z + \bar{z} + 1) = 0.$$

Rappresentare nel piano complesso sia A che l'insieme $B = \{w \in \mathbb{C} : w = iz \text{ con } z \in A\}$.

Teoria (5 punti). Enunciare e dimostrare il Teorema degli Zeri.