**ANALISI MATEMATICA 1 Appello 20230607, h. 15.00, Aula 8.0.1. Docente Cipriani.**

**Cognome e nome :**

**Codice Persona**:

**DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA. Per ogni quesito, indicare con una croce l'unica risposta corretta. Per annullare una risposta data, racchiudere la croce in un cerchio.**

(soluzioni CANCELLATE)

1. [punti 1] $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$
   (a) $= 1$;
   (b) non esiste;
   (c) $= 0$;
   (d) $= +\infty$;
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

2. [punti 1] Sia $f(x) = \sin(x^2)$. E' vero che
   (a) $f$ è periodica di periodo $2\pi$;
   (b) $f$ è periodica di periodo $\sqrt{2\pi}$;
   (c) $f$ è periodica di periodo $(2\pi)^2$;
   (d) $f$ non è periodica;
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

3. [punti 1] Dire che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è limitata equivale a dire che
   (a) $\sup\{f(x)\mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\} < +\infty$;
   (b) $\exists K \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| < K \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
   (c) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito $\forall x_0 \in \mathbb{R}$;
   (d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ esistono entrambi finiti;
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

4. [punti 1] La serie $\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{(\frac{3}{2})}}$
   (a) diverge con somma $+\infty$;
   (b) converge semplicemente ma non assolutamente;
   (c) non converge semplicemente ne diverge a $\pm\infty$;
   (d) converge assolutamente
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

5. [punti 2] Sia $f$ definita da $f(x) = \dfrac{1}{\log(1+e^x)}$. E' vero che

   (a) $f$ non è definita su tutto $\mathbb{R}$;
   (b) $f(x) > \frac{1}{e^x}$ definitivamente per $x \to +\infty$;
   (c) $f$ è integrabile su $(0, +\infty)$;
   (d) $f$ cambia segno in $x = 0$ ;
   (e) $f$ è integrabile su $(-\infty, 0)$:

6. [punti 1] Sia $F$ una primitiva, su $(0, +\infty)$, della funzione $f$ definita da $f(x) = x \log x$. E' vero che, su $(0, +\infty)$,

   (a) $F$ ha un punto di massimo ma non ha punti di minimo;
   (b) $F$ ha un punto di minimo ma non ha punti di massimo;
   (c) $F$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale;
   (d) $F$ ha un punto di massimo e uno di minimo;
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

7. [punti 2] Sia $f$ definita su $(0, +\infty)$ da $f(x) = (\log x)^7$. La funzione inversa $f^{-1}$ di $f$

   (a) è $f^{-1}(x) = (\log x)^{\frac{1}{7}}$;
   (b) è $f^{-1}(x) = e^{(\frac{x}{7})}$
   (c) è $f^{-1}(x) = e^{x^{(\frac{1}{7})}}$;
   (d) è $f^{-1}(x) = e^{(x^7)}$;
   (e) non esiste.

8. [punti 1] Il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $z = i\bar{z}$ è

   (a) una semiretta;
   (b) una retta;
   (c) una circonferenza;
   (d) un punto;
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

9. [punti 2] Per $\alpha > 0$, l'integrale
$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^2 - \sin x^2}\, dx$$

   (a) converge se e solo se $\alpha > 0$;
   (b) converge se e solo se $\alpha < 3$
   (c) converge se e solo se $\alpha > 5$;
   (d) non converge per alcun $\alpha > 0$;
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

**Cognome e nome :**

**ESERCIZI**

**Esercizio 1.** [punti 5] Data la funzione definita da $f(x) = e^{\sqrt[3]{(x-1)(3-x)}}$

1. determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio e la continuita';
2. determinarne la derivata prima e il carattere dei punti di non derivabilita';
3. determinarne monotonia ed estremi;
4. disegnarne un grafico qualitativo con le informazioni ottenute (non è richiesto lo studio di $f''$);
4. dimostrare poi che l'equazione $e^{\sqrt[3]{(x-1)(3-x)}} = e(x-1)+1$ ha almeno tre soluzioni distinte.

**Esercizio 2.** [punti 4] Dopo aver giustificato l'integrabilita' della funzione $f(x) := \arctan \sqrt{x}$, calcolare

$$I := \int_0^3 \arctan \sqrt{x}\, dx.$$

**Svolgimento.**
Poiche' per $n \to +\infty$ si ha $a_n := \frac{n+(-1)^n \log n}{2n^\alpha+3n} \sim \frac{n}{2n^\alpha+3n} =: b_n$, la serie converge se e solo se la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge. Poiche' per $\alpha \leq 1$ esiste $\lim_{n\to+\infty} b_n > 0$, la Condizione Necessaria per la Convergenza non e' soddisfatta e la serie non converge. Poiche' per $\alpha > 1$ si ha $b_n \sim \frac{1}{2n^{\alpha-1}}$, con un confronto con al serie armonica generalizzata si deduce che la serie converge se e solo se $\alpha > 2$.

**Cognome e nome :**

**TEORIA**

**T1.** (5 punti) Enunciare e dimostrare il Teorem degli Zeri. Vedi testo.

**T2.** (3 punti) Fornire la definizione di continuita' di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ in un punto $x_0 \in D$.

**Svolgimento**.

$f$ e' continua in $x_0 \in D$ se $x_0$ e' anche di accumulazione per il dominio $D$ e se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Affermare che esistono e sono finiti i limiti $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$ e che sono uguali, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ non e' equivalente in quanto $f$ potrebbe avere una discontinuita' di salto.