1. Razlaga pojmov

Graf G je množica točk v prostoru in povezav med temi točkami. Označimo ga z $G = (V, E)$, kjer je $V(G)$ množica točk in $E(G)$ množica povezav grafa G. *Odprta okolica ali soseščina* N vozlišča v je množica vozlišč, ki je sosedna vozlišču v, torej $N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$. *Kartezični produkt grafov* $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G = G_1 \Box G_2$, ki ima množico točk $V(G) = V_1 \times V_2$ in množico povezav $E(G)$, kjer je $(u, v)(x, y) \in E(G)$, če je $u = x$ in $vy \in E(G_2)$ ali $ux \in E(G_1)$ in $v = y$. *Dominantna množica* $D \subseteq V(G)$ grafa G je takšna množica, da ima vsako vozlišče grafa, ki ni v D ($v \in V(G) \setminus D$), soseda v D. Z drugimi besedami, vsako vozlišče $v \in V(G)$ je ali element množice D ali pa je sosednje kakemu vozlišču, ki pripada množici D.
Dominantno število $\gamma(G)$ je moč najmanjše dominantne množice grafa G.
Množica S je *totalno dominantna*, če je $N(S) = V(G)$, kar pomeni, da je vsako vozlišče iz $V(G)$ sosednje vozlišču iz množice S.
Z γ_t označujemo *totalno dominantno število*, ki predstavlja velikost najmanjše totalno dominantne množice.
Podmnožica $S \subset V(G)$ je γ_t-set, če je to totalno dominantna množica grafa G, z močjo $\gamma_t(G)$.
Naj bo $G = (V, E)$ graf in $f : V \to P(\{1, 2 \ldots, k\})$ funkcija, ki vsakemu vozlišču iz V priredi množico barv iz $\{1, 2 \ldots, k\}$. Če za vsak $v \in V$ za katerega je $f(v) = \emptyset$ velja $\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{1, 2 \ldots, k\}$ potem f imenujemo *k-mavrična dominantna funkcija* grafa G, krajše kRDF funkcija. *Težo* $\omega(f)$ funkcije f, definiramo z $\omega(f) = \sum_{v \in V} \mid f(v) \mid$. Najmanjša vrednost mavrične dominantne funkcije grafa G se imenuje *k-mavrično dominanto število*, in jo označimo z $\gamma_{rk}(g)$.
Za graf G je *k-mavrično totalno dominantna funkcija* f, krajše kRTDF, k-mavrična dominantna funkcija s pogojem, da podgraf grafa G, ki ga določa množica $\{v \in V(G) \mid f(v) \neq \emptyset\}$ nima izoliranih vozlišč. Teža funkcije kRTDF je $\omega(f) = \sum_{v \in V} \mid f(v) \mid$. Za dan graf G, imenujemo težo najmanjše kRTDF funkcije *k-mavrično totalno dominantno število*, in jo označimo z $\gamma_{rkt}(G)$.

2. Dani problem

1. Najdi funkcijo $b(k)$, da za $k \geqq 3$, za katero je dana neenakost ozka:

$$b(k) \cdot \gamma_t \geqq \gamma_{krt}(G). \tag{1}$$

Z drugimi besedami, najdi $b(k) = \inf_G \frac{\gamma_{krt}(G)}{\gamma_t(G)}$.

2. Najdi funkcijo $a(k)$, da za $k \geqq 3$, za katero je dana neenakost ozka:

$$\gamma_{krt}(G) \geqq a(k) \cdot \gamma_{kr}(G). \tag{2}$$

Z drugimi besedami, najdi $a(k) = \sup_G \frac{\gamma_{krt}(G)}{\gamma_{kr}(G)}$

3. Neenakosti, dokazane v pdfju

Total k-Rainbow domination numbers in graphs

3.1. **Izrek 2.** Naj bo $k \geqq 2, k \in \mathbb{N}$ in G povezani graf stopnje $n \leqq k$. Potem:

$$\gamma_t(G) \leqq \gamma_{trk}(G) \leqq k \cdot \gamma_t(G). \tag{3}$$

Zanima nas le zgornja meja neenakosti, saj je to rešitev prvega zastavljenega problema.

Dokaz. Naj bo S $\gamma_t(G)$ set in definiramo $g : V(G) \to 2^{[k]}$, kjer $g(x) = \{1, 2, \ldots, k\}$ za $x \in S$ in $g(x) = \emptyset$ za $x \in V(G) \backslash S$. Torej je g kRTFD za G in $\gamma_{trk}(G) \leqq \omega(g) = k \cdot \gamma_t(G)$ □

Enakost je dosežena natanko tedaj, ko ima G $\gamma_{trk}(G)$ funkcijo, f, da je za $\forall v \in V(G)$ ali $f(v) = \{1, 2, \ldots, k\}$ ali $f(v) = \emptyset$.