

Implementation of a full-wave code for the numerical simulation of Plasma-Wave interaction, using a B-Splines finite elements method

18 Juin - 31 Août 2018

Margaux BRULIARD¹
Superviseur: Ahmed RATNANI²

Max-Planck Institute of Plasma Physics¹

27 Septembre 2018



Max-Planck-Institut
für Plasmaphysik

Sommaire

- 1 Présentation de l'IPP
 - L'institut Max-Planck
 - Objectifs du stage
- 2 Polynômes de Bernstein
 - Base des polynômes de Bernstein
 - Les courbes de Bézier
- 3 Les B-splines
- 4 Résolution d'une équation de Poisson 1D
- 5 Présentation des équations de Maxwell
- 6 Maxwell 1D
 - Réduction des équations dans le cas 1D
 - Formulation variationnelle et discrétisation
 - séquence de DeRham
 - Résultats obtenus
 - Energie du système
- 7 Maxwell 2D
 - le système 2D
 - Discrétisation du système
- 8 Conclusion

L'Institut Max-Planck

- Institut de physique
- membre de la Société Max-Planck
- fait partie de la Communauté Européenne de l'énergie atomique
- 2 sites en Allemagne :
 - Garching (1960)
 - Greifswald (1994)



FIGURE – Marienplatz - centre de Munich

NMPP

- Numerical Methods for Plasma Physics
- responsable du NMPP : Dr. Eric SONNENDRÜCKER
- 1 des 11 divisions de IPP
- Crée des méthodes numériques avancées pour la résolution de problèmes

MagnetoHydroDynamics

- chef d'équipe : Ahmed RATNANI
- sujets de travail
 - Isoparametric and Isogeometric Analysis (IGA)
 - Compatible Finite Elements Methods
 - High Order Discontinuous Galerkin Method
 - Mesh Generation

Objectifs du stage

Objectifs du stage

- étudier l'évolution d'une onde électromagnétique et implémenter les calculs nécessaires en se basant sur une méthode des éléments finis et les B-Splines
- Utiliser les résultats et les codes précédents pour améliorer le module SPL de Python

le module SPL et la librairie FEEC

- librairie Python pour le calcul via éléments finis et B-Splines
- transformation du code Python en Fortran
- disponible en OpenSource sur github : <https://github.com/pyccel/spl>

Définitions

Définition de la base des polynômes de Bernstein

soit $t \in [0, 1]$, on peut définir $\forall p \geq 0, B_0^p, B_1^p, \dots, B_p^p$:

$$B_i^p(t) = \binom{p}{i} t^i (1-t)^{p-i}$$

Définition par récurrence

$$\forall p \geq 1 \quad B_i^p(t) = \begin{cases} (1-t)B_i^{p-1} & i = 0 \\ (1-t)B_i^{p-1}(t) + tB_{i-1}^{p-1}(t) & \forall i \in \{1, \dots, p-1\} \\ tB_{i-1}^{p-1}(t) & i = p \end{cases} \quad (1)$$

les courbes de Bézier

Définition

soit les **points de contrôle** P_0, P_1, \dots, P_p où p est le degré de la courbe de Bézier. De plus nous utilisons la base des polynômes de Bernstein de degré p . Ainsi la courbe de Bézier correspondante s'exprime comme suit :

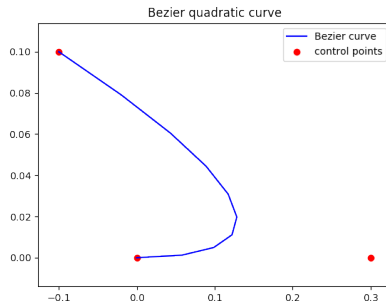
$$C(t) = \sum_{i=0}^p P_i \cdot B_i^p(t)$$

- Les courbes de Bézier ont donc la même forme que les polynômes de Bernstein

Un exemple simple

- $P_0 = (0, 0)$
- $P_1 = (0.3, 0)$
- $P_2 = (-0.1, 0.1)$

$$\forall t \in [0, 1] \begin{cases} B_0^2(t) = (1 - t)^2 \\ B_1^2(t) = 2t(1 - t) \\ B_2^2(t) = t^2 \end{cases}$$



Exemples

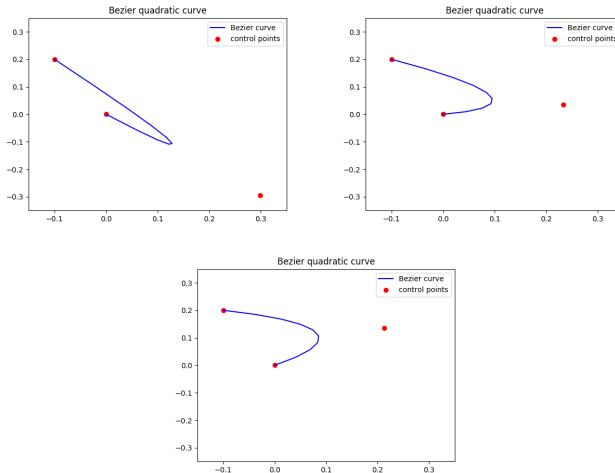


FIGURE – Exemples de courbe de Bézier quadratiques

Définitions et propriétés des B-Splines

Première Définition

On définit $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{m-1}$ une séquence croissante de réels. nous pouvons alors définir une famille de B-Splines de degré p (notée as $(N_i^p)_i$) par récurrence :

$$\forall 0 \leq i \leq m-1 \quad \begin{cases} N_i^0(t) = 1 & t \in [t_i, t_{i+1}[\\ N_i^0(t) = 0 & \text{if not} \end{cases} \quad (2)$$

$$\forall p \geq 1 \text{ and } i \leq m-p-1 \quad N_i^p(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_i^{p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(t)$$

Hypothèse de construction

On suppose lors des calculs de construction des B-Splines que : $\frac{x}{0} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Les B-Splines

Dérivation d'une B-Spline

Nous pouvons définir la dérivée de la fonction de base $N_i^p(t)$ comme :

$$(N_i^p)'(t) = \frac{p}{t_{i+p} - t_i} N_i^{p-1}(t) - \frac{p}{t_{i+1+p} - t_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(t)$$

Quelques propriétés

- Partition de l'unité
- Support compact

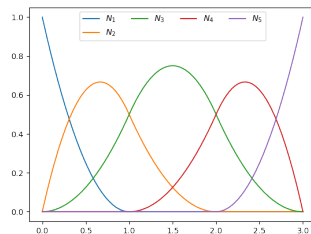


FIGURE – Une famille de B-Splines de degré 2

Les courbes B-Splines

Courbe Spline

Une courbe spline est une courbe paramétrique basée sur une famille de Splines (ex : B-splines) et plusieurs points de contrôle P_0, P_1, \dots, P_{n-1} .

$$S : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} N_i^p(t) \cdot P_i \quad t \in [0, 1] \quad (3)$$

- $\Omega = [0, 6]$
- la liste de knots : $T = [0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6]$
- points de contrôle :

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0) \\ P_1 &= (0.5, 0.8) \\ P_2 &= (2.1, 0.5) \\ P_3 &= (3.4, 0.9) \\ P_4 &= (4, 2.3) \\ P_5 &= (5.5, 1.4) \\ P_6 &= (6, 0.6) \end{aligned}$$

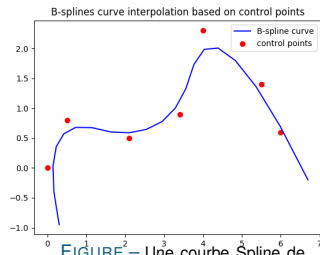


FIGURE – Une courbe Spline de degré 2 für Plasmaphysik

L'équation

Rappelons rapidement l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = [0, 1] \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

On pose $v \in V_h$, où V_h est un espace test et :

$$\begin{aligned} (4) &\iff -\Delta u = f \\ &\iff -\Delta u \cdot v = f \cdot v \\ &\iff -\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v \\ &\iff \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v - \underbrace{\int_{\partial\Omega} u \cdot v \cdot n}_{=0} = \int_{\Omega} f \cdot v \end{aligned}$$

Et donc on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = \int_{\Omega} f \cdot v, \quad \forall v \in \mathcal{V}_h$$

(5)



Max-Planck-Institut
für Plasmaphysik

Construction du système

On cherche à présent à discrétiser notre équation pour travailler avec les familles de B-Splines.

On choisit :

$$\begin{cases} u = \sum_j u_j N_j^p \\ v = N_i^p \end{cases}$$

et ainsi (5) devient :

$$\sum_j u_j \underbrace{\int_{\Omega} \vec{\nabla} N_i^p \cdot \vec{\nabla} N_j^p}_{S_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \cdot N_i^p}_{F_i}$$

avec **S** la matrice de rigidité et **F** le vecteur second membre.

Résultats

Prenons un exemple simple :

$$\begin{cases} -\Delta u = 2 \\ \Omega = [0, 1] \\ u(0) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

dont on connaît la solution exact : $u_e(x) = x(1 - x)$

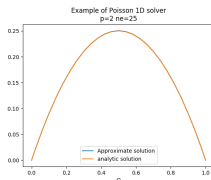
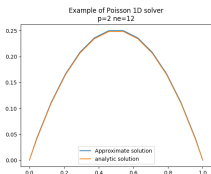
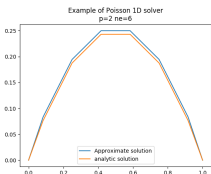


FIGURE – Résolution du problème de Poisson 1D

Présentation Générale

Selon le livre de M. BOSSAVIT :

$$-\partial_t \mathcal{D} + \nabla \times H = j \quad (7)$$

$$\partial_t \mathcal{B} + \nabla \times E = 0 \quad (8)$$

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 E + \rho \quad (9)$$

$$\mathcal{B} = \mu_0 (H + m) \quad (10)$$

- $E(x, t)$ l'intensité du champs électrique
- $\mathcal{B}(x, t)$ densité du flux magnétique
- $\mathcal{D}(x, t)$ est l'induction magnétique
- $H(x, t)$ le champs magnétique
- ρ la densité de charge
- $j(x, t)$ vecteur de courant
- μ_0 la perméabilité magnétique dans le vide
- ϵ_0 la permittivité électrique dans le vide
- $x \in \mathbb{R}^d$ variable spatiale
- $t \in \mathbb{R}^+$ variable temporelle

Présentation Générale

Simplifions légèrement ces équations :

$$-\partial_t \mathcal{D} + \nabla \times H = j$$

$$\iff -\partial_t(\epsilon_0 E + \rho) + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} B - m\right) = j$$

$$\iff -\epsilon_0 \partial_t E + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B = j - \partial_t \rho + \nabla \times m$$

et si **on suppose que** $m = 0, p = 0$, alors

$$\begin{cases} -\epsilon_0 \partial_t E + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B = j \\ \partial_t B + \nabla \times E = 0 \\ \mathcal{D} = \epsilon_0 E \\ B = \mu_0 H \end{cases}$$

Présentation Générale

On retrouve donc **les lois de Faraday et d'Ampère**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times E(x, t) = -\partial_t B(x, t) & (\textit{Faraday's law}) \quad (11) \\ \nabla \cdot E(x, t) = \frac{\rho(x, t)}{\epsilon_0} & (\textit{Gauss' law}) \quad (12) \\ \nabla \times B(x, t) = \mu_0 j(x, t) + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t E(x, t) & (\textit{Ampere's law}) \quad (13) \\ \nabla \cdot B(x, t) = 0 & (\textit{Gauss' law for magnetism}) \quad (14) \end{array} \right.$$

Dans le reste du projet, on s'intéresse principalement au calcul des champs E et B en les nommant par abus de langage "champs électrique" et "champs magnétique"

Réduction des équations au cas 1D

Dans le cas présent on choisit d'étudier une onde électromagnétique dans la direction x et polarisée dans la direction y .

$$\blacksquare E_x = B_x = 0$$

$$\blacksquare \partial_{y\cdot} = \partial_{z\cdot} = 0$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y E_z - \partial_z E_y + \partial_t B_x = 0 \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z + \partial_t B_y = 0 \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x + \partial_t B_z = 0 \\ -\epsilon_0 \partial_t E_x + \frac{1}{\mu_0} (\partial_y B_z - \partial_z B_y) = j_x \\ -\epsilon_0 \partial_t E_y + \frac{1}{\mu_0} (\partial_z B_x - \partial_x B_z) = j_y \\ -\epsilon_0 \partial_t E_z + \frac{1}{\mu_0} (\partial_x B_y - \partial_y B_x) = j_z \end{array} \right.$$

se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x E_y + \partial_t B_z = 0 \\ \epsilon_0 \partial_t E_y + \frac{1}{\mu_0} \partial_x B_z = -j_y \end{array} \right.$$

Formulation Variationnelle

Reprenons notre système :

$$\begin{cases} \epsilon_0 \partial_t E(x, t) + \frac{1}{\mu_0} \partial_x \mathcal{B}(x, t) = -j \\ \partial_t \mathcal{B}(x, t) + \partial_x E(x, t) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

(16)

Commençons par chercher une formulation variationnelle 'faible' pour (15) :

On prend $v \in V_h$ une fonction dans un espace test

$$\begin{aligned} (15) &\iff \int_{\Omega} \epsilon_0 \partial_t E \cdot v + \frac{1}{\mu_0} \partial_x \mathcal{B} \cdot v dx = \int_{\Omega} -j \cdot v dx \\ &\iff \int_{\Omega} \epsilon_0 \partial_t E \cdot v dx + \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \mathcal{B} \cdot \partial_x v dx = \int_{\Omega} -j \cdot v dx \end{aligned}$$

La seconde équation (16) est alors considérée comme 'forte' et n'est pas modifiée

Discrétisation des espaces

- $E \in H^1 \implies \mathbb{S}^p$
- $B \in L^2 \implies \mathbb{S}^{p-1}$
- $(N_i^p)_{0 \leq i \leq n-1}$ la famille de B-Splines, base de \mathbb{S}^p
- $(D_i^{p-1})_{0 \leq i \leq n-2}$ famille de B-Splines, base de \mathbb{S}^{p-1} , où

$$(N_i^p)'(x) = D_i^{p-1}(x) - D_{i+1}^{p-1}(x)$$

On peut donc discrétiser nos champs E et B :

- $E(x, t) = \sum_{j=0}^{n-1} e_j N_j^p(x)$
- $B(x, t) = \sum_{j=0}^{p-1} b_j D_j^{p-1}$

et on choisit $v = N_j^p(x)$ comme fonction test

Discrétisation du système

Reprenons (15) en utilisant la discrétisation de E et B :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_0 \dot{E}_j \underbrace{\int_{\Omega} N_j^p(x) N_i^p(x) dx}_{M_{ij}} - \frac{1}{\mu_0} \sum_{j=0}^{n-2} \mathcal{B}_j \underbrace{\int_{\Omega} D_j^{p-1}(x) (N_i^p(x))' dx}_{R_{ij}} = \sum \underbrace{\int_{\Omega} -j(\bar{x}_i) \cdot N_i^p(x) dx}_{J_i}$$

d'où

$$(15) \iff \epsilon_0 M \dot{E} - \frac{1}{\mu_0} R B = J$$

Discrétisation du système

Regardons à présent l'équation (16) :

$$(16) \iff \sum_{j=0}^{n-2} \dot{B}_j D_j^{p-1}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} E_j (N_j^p)'(x) = 0$$

Sachant que l'on a choisit $(D_i^{p-1})_i$ tel que

$$(N_i^p(x))' = D_i^{p-1}(x) - D_{i+1}^{p-1}(x)$$

Discrétisation du système

alors on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{n-1} E_j (N_j^p)'(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} E_j \left(D_j^{p-1}(x) - D_{j+1}^{p-1}(x) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} E_j D_j^{p-1}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} E_j D_{j+1}^{p-1}(x) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} E_j D_j^{p-1}(x) - \sum_{j=1}^n E_{j-1} D_j^{p-1}(x) \\
 &= E_0 D_0^{p-1}(x) + \sum_{j=1}^{n-1} (E_j - E_{j-1}) D_j^{p-1}(x) + E_{n-1} D_n^{p-1}(x)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\text{avec } G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1,n}(\mathbb{R})$$

$$\dot{B} - GE = 0$$

Les projecteurs



FIGURE – DeRham sequence 1D

Résultats obtenus

On choisit comme exemple :

- $j = 0$
- we have homogenous Dirichlet boundary conditions
- $E(x, 0) = E^0$ and $B(x, 0) = B^0$ are known

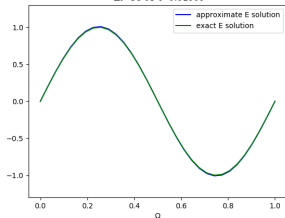
où la solution analytique est connue :

- $E(x, t) = \sin(2\pi x) \cos(t)$
- $B(x, t) = \cos(2\pi x) \sin(t)$

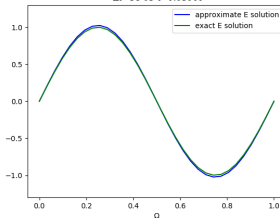
Résultats obtenus

Euler Explicite :

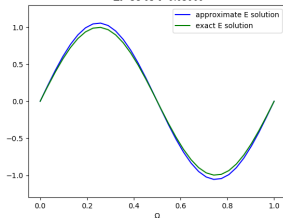
Computing Electrical (E) and Magnetic field (B) with Euler Explicit scheme
 $\Delta t = 5e-05$ $t = 0.01000$



Computing Electrical (E) and Magnetic field (B) with Euler Explicit scheme
 $\Delta t = 5e-05$ $t = 0.03000$



Computing Electrical (E) and Magnetic field (B) with Euler Explicit scheme
 $\Delta t = 5e-05$ $t = 0.05000$



Résultats obtenus

Euler Implicite :

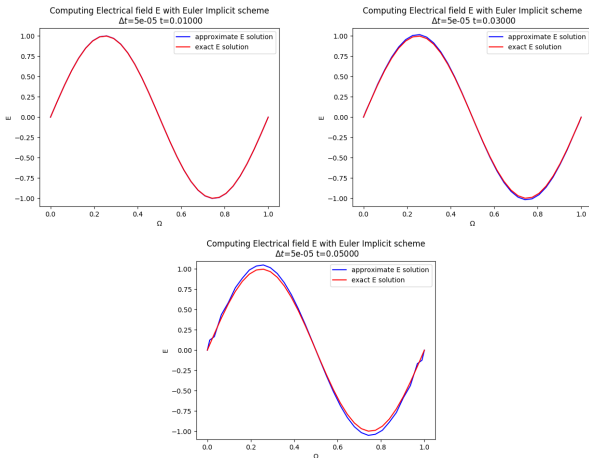


FIGURE – Résultats numérique pour le champs électrique Maxwell 1D (Euler Implicit Scheme), $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$

Résultats obtenus

Runge Kutta 4 :

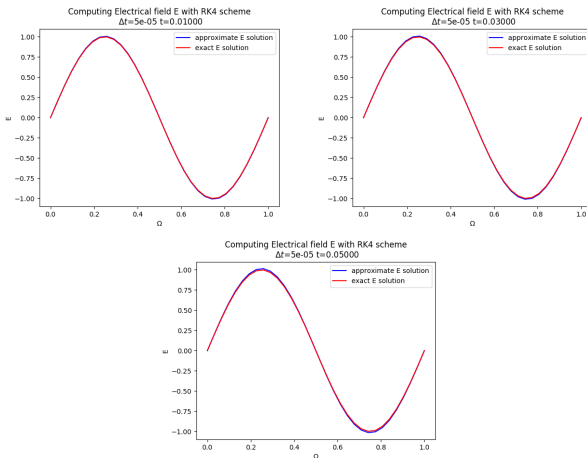


FIGURE – Résultats numériques pour le champs électrique Maxwell 1D (Runge Kutta 4 scheme), $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$

Calcul de l'énergie du système

Energie électromagnétique

$$U_{em}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon_0 \cdot E(x, t)^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}(x, t)^2) dx \quad (18)$$

A partir des résultats numériques obtenus E^τ et B^τ à l'instant t^τ , on peut approximer $U_{em}(t)$:

$$\begin{aligned} U_{em}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0 \cdot E(x, t)^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}(x, t)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0 E(x, t)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}(x, t)^2 dx \end{aligned}$$

Energie du système

et

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} E(x, t)^2 dx &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=0}^n e_i^T N_i^p(x) \right)^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=0}^n e_i^T N_i^p(x) \right) \left(\sum_{j=0}^n e_j^T N_j^p(x) \right) dx \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e_i^T e_j^T \int_{\Omega} N_i^p(x) N_j^p(x) dx \\
 &= (E^T)^T M E
 \end{aligned}$$

pour un instant $t = t^T$ donné.

Résultats

Les schémas Euler présentent une énergie décroissante.

Le schéma de Runge Kutta 4 tend quand à lui vers une énergie constante même si l'on peut constater une légère décroissance lorsque le temps final devient grand.

Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell 2D

Reprenons la formule générale des équations de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} -\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \\ \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_y E_z - \partial_z E_y + \partial_t B_x = 0 \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z + \partial_t B_y = 0 \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x + \partial_t B_z = 0 \\ -\epsilon_0 \partial_t E_x + \frac{1}{\mu_0} (\partial_y B_z - \partial_z B_y) = j_x \\ -\epsilon_0 \partial_t E_y + \frac{1}{\mu_0} (\partial_z B_x - \partial_x B_z) = j_y \\ -\epsilon_0 \partial_t E_z + \frac{1}{\mu_0} (\partial_x B_y - \partial_y B_x) = j_z \end{array} \right.$$

Réduction dans le cas 2D

On définit deux **modes** dans le cas des équations de Maxwell 2D :

Le mode Electrique Transverse (TE) :

On suppose que le champs électrique ne se déplace pas dans le sens de propagation (ici la direction z)

donc :

$$\begin{cases} \partial_x E_y - \partial_y E_x + \partial_t B_z = 0 \\ -\epsilon_0 \partial_t E_x + \frac{1}{\mu_0} \partial_y B_z = j_x \\ -\epsilon_0 \partial_t E_y - \frac{1}{\mu_0} \partial_x B_z = j_y \end{cases}$$

Le mode Magnétique Transverse (TM) :

On suppose que le champs électrique se déplace uniquement dans le sens de propagation (ici la direction z)

d'où :

$$\begin{cases} \partial_y E_z + \partial_t B_x = 0 \\ -\partial_x E_z + \partial_t B_y = 0 \\ -\epsilon_0 \partial_t E_z + \frac{1}{\mu_0} (\partial_x B_y - \partial_y B_x) = j_z \end{cases}$$

Réduction dans le cas 2D

Nous choisissons de travailler avec le mode électrique transverse par la suite

$$\begin{cases} \partial_x E_y - \partial_y E_x + \partial_t B_z = 0 \\ -\epsilon_0 \partial_t E_x + \frac{1}{\mu_0} \partial_y B_z = j_x \\ -\epsilon_0 \partial_t E_y - \frac{1}{\mu_0} \partial_x B_z = j_y \end{cases}$$

et si on pose $E = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ et $B = B_z$ alors on retrouve bien notre système de départ :

$$\begin{cases} -\epsilon_0 \partial_t E + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B = j \\ \partial_t B + \nabla \times E = 0 \end{cases}$$

les opérateurs $\nabla \times$

2 opérateurs $\nabla \times$ différents :

soit $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^2$

$$\blacksquare \nabla \times u = \begin{pmatrix} \partial_y u \\ -\partial_x u \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \nabla \times v = \partial_x u_y - \partial_y u_x$$

Discrétisation des espaces

Dans le cas 2D, on utilisera les espaces suivants :

$$V = \text{span}\{N_i^p(x)N_j^p(y), 0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1\}$$

$$W_{div} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} N_i^p(x)D_j^{p-1}(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ D_i^{p-1}(x)N_j^p(y) \end{pmatrix}, 0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1\right\}$$

$$= \text{span}\{\psi_{i,j}^1, \psi_{i,j}^2, 0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1\}$$

$$X = \text{span}\{D_i^{p-1}D_j^{p-1}, 0 \leq i \leq N_x - 2, 0 \leq j \leq N_y - 2\}$$

- $(N_i^p(x))_i$ une famille de B-Splines de degré p
- $(D_i^{p-1})_i$ une famille de B-Splines de degré $p-1$
- $D_i^{p-1} = \frac{p}{t_{i+p} - t_i} N_i^{p-1}$

Discrétisation du système

De la même façon que dans le cas 1D, nous choisissons une équation du système dont la formulation sera 'faible'.

Ici on prend :

$$\int_{\Omega} \nabla \times E \cdot \phi dx + \int_{\Omega} \partial_t \mathcal{B} \cdot \phi dx = 0 \quad \phi \in V_h$$

$$\int_{\Omega} E \cdot \nabla \times \phi dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} (E \times n) \cdot \phi dS}_{=0} + \int_{\Omega} \partial_t \mathcal{B} \cdot \phi dx = 0 \quad (\text{formule de Green})$$

$$\int_{\Omega} E \cdot \nabla \times \phi dx + \int_{\Omega} \partial_t \mathcal{B} \cdot \phi dx = 0$$

avec : $\nabla \times \phi \in W_{div} \implies V_h = V$, et $E \in W_{div}$, $\mathcal{B} \in V$

Discrétisation du système

On discrétise B et $E = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

- $B = \sum_{i_1=0}^{N_x-1} \sum_{i_2=0}^{N_y-1} b_{i_1, i_2} N_{i_1}^p(x) N_{i_2}^p(y)$
- $E_x = \sum_{i_1=0}^{N_x-1} \sum_{i_2=0}^{N_y-1} e_{i_1, i_2}^x N_{i_1}^p(x) D_{i_2}^{p-1}(y)$
- $E_y = \sum_{i_1=0}^{N_x-1} \sum_{i_2=0}^{N_y-1} e_{i_1, i_2}^y D_{i_1}^{p-1}(x) N_{i_2}^p(y)$
- $E = \sum_{i_1=0}^{N_x-1} \sum_{i_2=0}^{N_y-1} e_{i_1, i_2}^x \psi_{i_1, i_2}^1 + e_{i_1, i_2}^y \psi_{i_1, i_2}^2$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} E \cdot \nabla \times \phi dx &= \sum_{j_1=0}^{N_x-1} \sum_{j_2=0}^{N_y-1} e_{j_1, j_2}^x \int_{\Omega} N_{j_1}^p(x) D_{j_2}^{p-1}(y) N_{i_1}^p(x) (N_{i_2}^p(x))' dx \\ &+ \sum_{j_1=0}^{N_x-1} \sum_{j_2=0}^{N_y-1} e_{j_1, j_2}^y \int_{\Omega} -D_{j_1}^{p-1}(x) N_{j_2}^p(y) (N_{i_1}^p(x))' N_{i_2}^p(x) dx \end{aligned}$$

Discrétisation du système

On pose :

$$(R_1)_{i_1, i_2, j_1, j_2} = \int_{\Omega} N_{j_1}^p(x) D_{j_2}^{p-1}(y) N_{i_1}^p(x) (N_{i_2}^p(x))' dx$$

$$(R_2)_{i_1, i_2, j_1, j_2} = \int_{\Omega} -D_{j_1}^{p-1}(x) N_{j_2}^p(y) (N_{i_1}^p(x))' N_{i_2}^p(x) dx$$

et donc on obtient **la matrice rotationnelle R** :

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}$$

On regarde également la seconde partie de l'équation :

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathcal{B} \cdot \phi = \sum_{j_1=0}^{N_x-1} \sum_{j_2=0}^{N_y-1} b_{j_1, j_2} \int_{\Omega} N_{j_1}^p(x) N_{j_2}^p(y) N_{i_1}^p(x) N_{i_2}^p(y) dx$$

On obtient finalement la discrétisation de notre 1ère équation

$$RE + M_v \dot{\mathcal{B}} = 0$$

M_v est la matrice de masse de l'espace V

Discrétisation du système

Nous allons utiliser une 'formulation forte' pour la seconde équation du système

$$\epsilon_0 \partial_t E = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B - j$$

et on a :

$$\begin{aligned} \nabla \times B &= \sum_{j_1=0}^{N_x-1} \sum_{j_2=0}^{N_y-1} b_{j_1,j_2} \begin{pmatrix} N_{j_1}^p(x)(D_{j_2}^{p-1}(y) - D_{j_2+1}^{p-1}(y)) \\ -(D_{j_1}^{p-1}(x) - D_{j_1+1}^{p-1}(x))N_{j_2}^p(y) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j_1=0}^{N_x-1} \sum_{j_2=0}^{N_y-1} b_{j_1,j_2} (\psi_{j_1,j_2}^1 - \psi_{j_1,j_2+1}^1 - \psi_{j_1,j_2}^2 + \psi_{j_1+1,j_2}^2) \\ &= \left(\sum_{j_1=0}^{N_x-1} b_{j_1,0} \psi_{j_1,0}^1 + \sum_{j_1=0}^{N_x-1} \sum_{j_2=1}^{N_y-1} (b_{j_1,j_2} - b_{j_1,j_2-1}) \psi_{j_1,j_2}^1 \right) \\ &\quad - \left(\sum_{j_1=1}^{N_x-1} \sum_{j_2=0}^{N_y-1} (b_{j_1,j_2} - b_{j_1-1,j_2}) \psi_{j_1,j_2}^2 + \sum_{j_2=0}^{N_y-1} b_{0,j_2} \psi_{0,j_2}^2 \right) \end{aligned}$$

Discrétisation du système

A l'aide du **produit de Kronecker** nous pouvons exprimer $\nabla \times \mathcal{B}$:

$$\nabla \times \mathcal{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_1 \otimes I_{N_y} \\ -I_{N_x} \otimes G_2 \end{pmatrix}}_{=G} \mathcal{B}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N_x-1, N_x}(\mathbb{R})$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N_y-1, N_y}(\mathbb{R})$$

et on rappelle que J est le vecteur second membre.

On obtient la seconde équation discrétisée :

$$\epsilon_0 \dot{E} = \frac{1}{\mu_0} GB - J$$

Un exemple de résolution

On a le système discrétisé suivant :

$$\begin{cases} \dot{E} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \mathbb{G} B - \frac{1}{\epsilon_0} J \\ \dot{B} = -(M_V)^{-1} R E \end{cases}$$

Choisissons un exemple simple. Soit la solution analytique suivante :

$$\begin{aligned} H(x, y, t) &= \cos(k_1 x + \sigma_1) \sin(k_2 y + \sigma_2) \cos(\omega t) \\ E_x(x, y, t) &= -\frac{k_2}{\omega} \cos(k_1 x + \sigma_1) \sin(k_2 y + \sigma_2) \sin(\omega t) \\ E_y(x, y, t) &= \frac{k_1}{\omega} \sin(k_1 x + \sigma_1) \cos(k_2 y + \sigma_2) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

avec $j = 0$, $k_1 = k_2 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\omega = \pi$ et $H_z(x, y, 0)$, $E_x(x, y, 0)$ et $E_y(x, y, 0)$ connus

Alors notre système devient :

$$\begin{cases} \dot{E} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \mathbb{G} B \\ \dot{B} = -(M_V)^{-1} R E \end{cases}$$

Pour aller un peu plus loin :

■ les projecteurs de la séquence de DeRham 2D

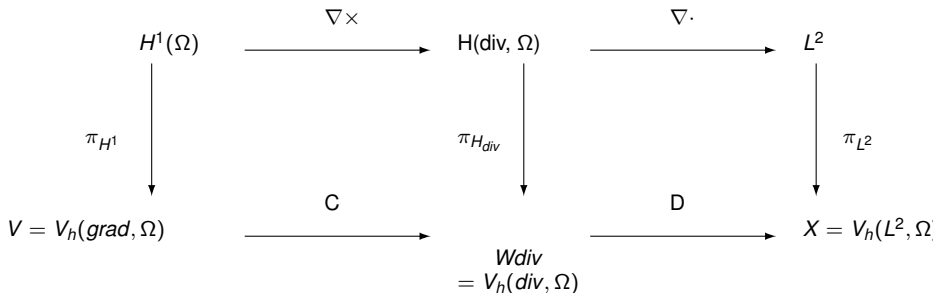


FIGURE – DeRham sequence 2D

■ le schéma Leap-Frog

Conclusion

- découverte d'un institut de recherche
- travailler dans un lieu multiculturel
- la méthode des éléments finis
- découverte de la méthode d'interpolation des B-Splines
- les équations de Maxwell
- ...

liens github

- Le module Python SPL : <https://github.com/pyccel/spl>
- pour retrouver mon projet : https://github.com/MBruliard/electromagnetic_wave