ÉQUATIONS DE LOTKA-VOLTERRA

Ecole d'ingénieurs Sup'Galilée — Université Paris XIII
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
1$^{\text{ère}}$ année

Margaux BRULIARD
Mathieu RIGAL
Mitul VYAS

12 juin 2017

Introduction

Enjeux

Équations de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)\,(\sigma x(t) - \gamma) \end{cases} \tag{1}$$

- **Objectif :** modéliser les systèmes proie-prédateur
- **Enjeux :** anticiper la disparition d'espèces, comprendre l'impact de l'Homme, lutter contre les espèces envahissantes
- **Contexte historique :** équations établies par Alfred James Lotka et Vito Volterra

Remarque : ces équations sont aussi utiles pour comprendre des phénomènes économiques complexes.

Introduction

Obtention des équations

Démarche de V. Volterra :

$X : \mathbf{R} \to \mathbf{N}$ le nombre de proies
$Y : \mathbf{R} \to \mathbf{N}$ le nombre de prédateurs

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta X = X(\alpha - \beta Y)\Delta t \\ \Delta Y = Y(\sigma X - \gamma)\Delta t \end{cases}$$

Problème : X et Y ne sont pas continues.
Solution : On pose $x = X/X_0$ et $y = Y/Y_0$ avec X_0, Y_0 grands, et on suppose x, y continues et dérivables.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta x = x(\alpha - \beta^\star y)\Delta t & \text{avec } \beta^\star = \beta Y_0 \\ \Delta y = y(\sigma^\star x - \gamma)\Delta t & \text{avec } \sigma^\star = \sigma X_0 \end{cases}$$

En faisant tendre Δt vers 0, on retrouve les équations de Lotka-Volterra.

Propriétés des solutions

Existence, unicité et positivité de la solution maximale

- **Existence et unicité :**
  Posons $V = (x, y)^T$, les équations (1) deviennent :

$$V' = f(V), \qquad \text{avec } f : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u(\alpha - \beta v) \\ v(\sigma u - \gamma) \end{pmatrix}$$

  f est $\mathcal{C}^1$, donc est localement lipschitzienne. Il y a existence et unicité de la solution maximale de (1) d'après Cauchy-Lipschitz.

- **Aspect positif :**
  Si $x_0, y_0 > 0$, alors $x(t), y(t) > 0 \; \forall t \in I_{\max}$.
  La démonstration se fait par l'absurde.

Propriétés des solutions

Solution maximale

Démonstration de l'aspect positif :

On remarque que $\forall K,\ t \mapsto (Ke^{\alpha t}, 0)^T$ est solution de (1).

Soient $x_0, y_0 > 0$. Supposons l'existence d'un t tel que $y(t) < 0$. Par continuité de y, $\exists t^\star,\ y(t^\star) = 0$.

Posons $K^\star = x(t^\star)e^{-\alpha t^\star} \Rightarrow K^\star e^{\alpha t^\star} = x(t^\star)$.

On en déduit que $t \mapsto (K^\star e^{\alpha t}, 0)^T$ et $(x, y)^T$ sont solution du même problème de Cauchy, d'où par unicité : $y \equiv 0$. Impossible car $y_0 > 0$.

Ainsi $y(t) > 0\ \forall t \in I_{\max}$ dès lors que $y_0 > 0$.

La démonstration pour x est similaire.

$\square$

Propriétés des solutions

Aspect global

Démonstration de l'aspect global :

Il suffit de montrer que la solution est bornée sur $I_{\max}$

On vérifie : $\exists K,\ \sigma x + \beta y - \gamma \ln(x) - \alpha \ln(y) \equiv K$

Comme $\ln(u) = \underset{\infty}{o}(u)$, on a $\exists A > 0, B > 0$ tels que

$\forall u > A,\ \forall v > B,\ \gamma \ln(u) < \frac{\sigma u}{2}$ et $\alpha \ln(v) < \frac{\beta v}{2}$.

Ainsi $\forall t$ tel que $(x(t), y(t)) \in]A, \infty[\times]B, \infty[$ il vient :

$$K \equiv \sigma x + \beta y - \gamma \ln(x) - \alpha \ln(y) > \frac{\sigma x + \beta y}{2}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{\sigma x}{2} < \frac{\sigma x + \beta y}{2} < K \\ \frac{\beta y}{2} < \frac{\sigma x + \beta y}{2} < K \end{cases} \implies \begin{cases} x < \frac{2K}{\sigma} \\ y < \frac{2K}{\beta} \end{cases}$$

Propriétés des solutions

Solution globale

Démonstration de l'aspect global (suite) :

Si t est tel que $x(t) \in]A, \infty[$ et $y(t) \notin]B, \infty[$ il vient :

$$\begin{aligned} K &\equiv \sigma x + \beta y - \gamma \ln(x) - \alpha \ln(y) \\ &> \frac{\sigma x}{2} - \alpha \ln(B) \end{aligned}$$

Si t est tel que $x(t) \notin]A, \infty[$ et $y(t) \in]B, \infty[$ il vient :

$$\begin{aligned} K &\equiv \sigma x + \beta y - \gamma \ln(x) - \alpha \ln(y) \\ &> \frac{\beta y}{2} - \gamma \ln(A) \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\forall t \in I_{\max}, \begin{cases} 0 < x < \max(A, \frac{2K}{\sigma}, \frac{2(K+\alpha \ln(B))}{\sigma}) \\ 0 < y < \max(B, \frac{2K}{\beta}, \frac{2(K+\gamma \ln(A))}{\beta}) \end{cases} \qquad \square$$

Margaux B.
Mathieu R.
Mitul V.

Propriétés des solutions

Points d'équilibre

Premier point d'équilibre : $(0,0)^T$
Soit J la matrice jacobienne de f :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \sigma y & \sigma x - \gamma \end{pmatrix} \Longrightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

α est une valeure propre strictement positive, d'où $(0,0)^T$ est instable.

Deuxième point d'équilibre : $(\gamma/\sigma, \alpha/\beta)^T$
Soit $\phi : (u,v)^T \mapsto \sigma u + \beta v - \gamma \ln(u) - \alpha \ln(v)$.
On montre que $\psi : (u,v)^T \mapsto \phi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \phi\begin{pmatrix} \gamma/\sigma \\ \alpha/\beta \end{pmatrix}$ est une fonction de Lyapunov associée à $(\gamma/\sigma, \alpha/\beta)^T$.

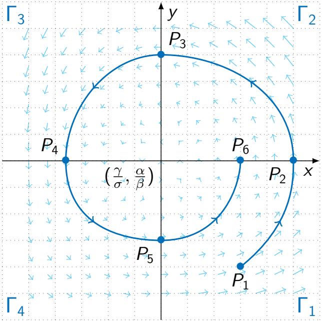
$(\gamma/\sigma, \alpha/\beta)^T$ est stable.

Propriétés des solutions

Aspect périodique

On montre que les solutions de (1) sont périodiques.

Première étape : les solutions sont cycliques



On part de $P_1 \in \Gamma_1$ et on suppose que la solution reste toujours dans Γ_1 :

y est majorée, croissante.
$\Rightarrow y' \to 0$
$\Rightarrow y(\sigma x - \gamma) \to 0$
$\Rightarrow x \to \gamma/\sigma \quad$ car $y > 0$
Impossible car $x > \gamma/\sigma$ et x est croissante dans Γ_1.

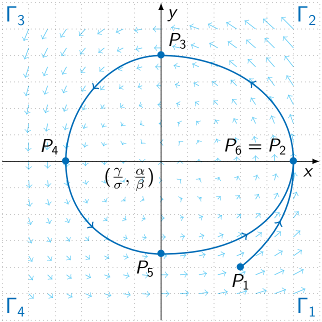
La solution passe donc de Γ_1 à Γ_2.

En procédant de la même manière, on montre qu'elle passe de Γ_2 à Γ_3, puis de Γ_3 à Γ_4, et enfin de Γ_4 à Γ_1.

Propriétés des solutions

Aspect périodique

Deuxième étape : la courbe est fermée



Il faut montrer $\begin{cases} x(t_6) = x(t_2) \\ y(t_6) = y(t_2) \end{cases}$.

On sait déjà que $y(t_6) = y(t_2)$.

On a $\phi(x,y)(t_6) = \phi(x,y)(t_2)$.

$$\Rightarrow \sigma x(t_6) - \gamma \ln(x(t_6)) = \sigma x(t_2) - \gamma \ln(x(t_2))$$

Il reste à montrer l'injectivité de $h : u \mapsto \sigma u - \gamma \ln(u)$ sur $]\frac{\gamma}{\sigma}, \infty[$.

h est dérivable sur $]\frac{\gamma}{\sigma}, \infty[$: $\forall u > \frac{\gamma}{\sigma},\ h'(u) = \sigma - \frac{\gamma}{u} > 0$.

h est strictement croissante, donc injective sur $]\frac{\gamma}{\sigma}, \infty[$.

On a enfin $x(t_6) = x(t_2)$.

Propriétés des solutions

Aspect périodique

Troisième étape : la solution est périodique

Soit V la solution de (1) passant par P_2. On pose $T = t_6 - t_2$.
On introduit $W(t) = V(t - T)$: $W(t_6) = V(t_2) = V(t_6)$.

Le graphe de V est tangent en tout point à f. En translatant V de T « vers la droite » selon l'axe du temps on obtient W. Le système étant autonome, le graphe de W est tangent en tout point à f.

$$\Longrightarrow W \text{ est solution de } (1)$$

V et W sont solutions du même problème de Cauchy, d'où par unicité $V \equiv W$

$$\Longrightarrow \forall t,\ V(t) = V(t - T)$$

La solution est bien périodique, de période $T = t_6 - t_2$.

$\square$

Approximation numérique des solutions

Schémas utilisés

On discrétise l'intervalle de résolution $[0, T]$ en $N+1$ points : $(t_i)_{0 \leq i \leq N}$ avec $t_0 = 0$ et $t_N = T$.

On pose $h = T/N$.

Pour approcher numériquement les solutions de (1), on envisage trois schémas numériques :

Schéma	Ordre
Euler explicite	1
Crank-Nicolson	2
Runge Kutta 4	4

Ces schémas sont tous les trois stables, consistants et donc convergents.

On introduit par la suite un nouveau critère pour comparer ces schémas.

Approximation numérique des solutions

Notion de schéma symplectique

Problématique : un schéma numérique conserve-t-il la périodicité des solutions d'une équation différentielle ?

On se place dans le cadre simplifié suivant :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \tag{2}$$

$$\Longrightarrow -x'x = y'y \Longrightarrow x^2 + y^2 = K$$

Les trajectoires des solutions de (2) sont les cercles de centre $(0,0)^T$. Le système étant autonome, il y a périodicité des solutions.

$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est l'intégrale première du système (2).

Définition : on dira qu'un schéma est symplectique s'il conserve l'intégrale première de (2).

Approximation numérique des solutions

Notion de schéma symplectique

Soit $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ une approximation numérique d'une solution de (2). L'autonomie de ce système implique :

$$\exists K > 0,\ \forall n \in \{0, ..., N-1\},\ ||Z_{n+1}||_2 = K||Z_n||_2$$

On distingue trois possibilités :

- $K = 1 \Longrightarrow$ le schéma est symplectique
- $K < 1 \Longrightarrow$ le schéma n'est pas symplectique, et le graphe obtenu est une spirale qui se rapproche de son centre.
- $K > 1 \Longrightarrow$ le schéma n'est pas symplectique, et le graphe obtenu est une spirale qui s'éloigne de son centre.

Pour que l'approximation soit périodique, il faut nécessairement avoir $K = 1$.

On se contentera de vérifier si $||Z_{n+1}||_2 = ||Z_n||_2\ \forall n$.

Approximation numérique des solutions

Euler explicite

Schéma Euler explicite : $\begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + hZ_{2,n} \\ Z_{2,n+1} = Z_{2,n} - hZ_{1,n} \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} Z_{1,n+1}^2 = Z_{1,n}^2 + h^2 Z_{2,n}^2 + 2hZ_{1,n}Z_{2,n} \\ Z_{2,n+1}^2 = Z_{2,n}^2 + h^2 Z_{1,n}^2 - 2hZ_{1,n}Z_{2,n} \end{cases}$$

$$\implies Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 = (1+h^2)(Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2)$$

Le coefficient « symplectique » de ce schéma est $1 + h^2 \neq 1$.
Euler explicite n'est pas symplectique.

$\forall h > 0, 1 + h^2 > 1$: en théorie le graphique obtenu est une spirale qui s'éloigne de son centre.

Approximation numérique des solutions

Crank-Nicolson

Schéma Crank-Nicolson : $\begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + Z_{2,n+1}) \\ Z_{2,n+1} = Z_{2,n} - \frac{h}{2}(Z_{1,n} + Z_{1,n+1}) \end{cases}$

$$\Longrightarrow Z_{2,n+1} = Z_{2,n} - \frac{h}{2}\left(Z_{1,n} + Z_{1,n} + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + Z_{2,n+1})\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{4+h^2}{4} Z_{2,n+1} = \frac{4-h^2}{4} Z_{2,n} - hZ_{1,n}$$

$$\Longrightarrow Z_{2,n+1} = BZ_{2,n} - AZ_{1,n}, \quad \text{avec } A = \frac{4h}{4+h^2}, \ B = \frac{4-h^2}{4+h^2}$$

On a d'autre part :

$$Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + Z_{2,n+1}) = Z_{1,n} + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + BZ_{2,n} - AZ_{1,n})$$
$$= \left(1 - \frac{hA}{2}\right) Z_{1,n} + \frac{h}{2}(1+B)Z_{2,n}$$

Approximation numérique des solutions

Crank-Nicolson

On a : $\begin{cases} Z_{1,n+1} = \left(1 - \frac{hA}{2}\right) Z_{1,n} + \frac{h}{2}(1+B)Z_{2,n} \\ Z_{2,n+1} = BZ_{2,n} - AZ_{1,n} \end{cases}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 = &\left[\left(1 - \frac{hA}{2}\right)^2 + A^2\right] Z_{1,n}^2 + \left[\frac{h^2}{4}(1+B)^2 + B^2\right] Z_{2,n}^2 \\ &- 2\left[\frac{h}{2}\left(1 - \frac{hA}{2}\right)(1+B) + AB\right] Z_{1,n}Z_{2,n} \\ =& Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2\end{aligned}$$

Crank-Nicolson est symplectique.

En approchant numériquement la solution de (2) par le schéma Crank-Nicolson, on obtient en théorie une courbe fermée.

Approximation numérique des solutions

Runge Kutta 4

Schéma Runge Kutta 4 :

$$\begin{pmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{1,n} \\ Z_{2,n} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{h}{6} \left[\begin{array}{l} \begin{pmatrix} Z_{2,n} \\ -Z_{1,n} \end{pmatrix} \\ +2 \left[\begin{pmatrix} Z_{2,n} \\ -Z_{1,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -Z_{1,n} \\ -Z_{2,n} \end{pmatrix} \right] \\ +2 \left[\begin{pmatrix} Z_{2,n} \\ -Z_{1,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} -Z_{1,n} \\ -Z_{2,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -Z_{2,n} \\ Z_{1,n} \end{pmatrix} \right] \right] \\ + \begin{pmatrix} Z_{2,n} \\ -Z_{1,n} \end{pmatrix} + h \left[\begin{pmatrix} -Z_{1,n} \\ -Z_{2,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} -Z_{2,n} \\ Z_{1,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} Z_{1,n} \\ Z_{2,n} \end{pmatrix} \right] \right] \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}\right] Z_{1,n} + \left[h - \frac{h^3}{6}\right] Z_{2,n} \\ -\left[h - \frac{h^3}{6}\right] Z_{1,n} + \left[1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}\right] Z_{2,n} \end{pmatrix}$$

Approximation numérique des solutions

Runge Kutta 4

$$\begin{pmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}\right] Z_{1,n} + \left[h - \frac{h^3}{6}\right] Z_{2,n} \\ -\left[h - \frac{h^3}{6}\right] Z_{1,n} + \left[1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}\right] Z_{2,n} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 = \left(\left[1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}\right]^2 + \left[h - \frac{h^3}{6}\right]^2 \right) \left(Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2\right)$$

$$\Longrightarrow Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 = \left(1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576}\right) \left(Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2\right)$$

Le coefficient « symplectique » est $K = \left(1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576}\right) \neq 1$.
Runge Kutta 4 n'est pas symplectique.

Par ailleurs, $-\frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576} = 0 \Leftrightarrow \frac{h^6}{72}\left(\frac{h^2}{8} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{2}$ car $h > 0$.

- Si $h > 2\sqrt{2}$, on a $K > 1$ et le graphique de (2) est une spirale s'éloignant de son centre.
- Si $h < 2\sqrt{2}$, on a $K < 1$ et le graphique de (2) est une spirale se rapprochant de son centre.

Approximation numérique des solutions

Récapitulatif

Les trois schémas numériques envisagés ont les propriétés suivantes :

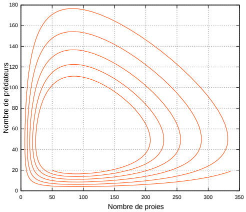
Schéma	**Ordre**	**Coefficient « symplectique »**
Euler explicite	1	$1 + h^2$
Crank-Nicolson	2	1
Runge Kutta 4	4	$1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576}$

Remarque : pour h inférieur à 1 on a $\left| -\frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576} \right| \leq h^2$*, d'où le graphique obtenu par Runge Kutta 4 diverge moins vite que celui obtenu avec Euler explicite.*

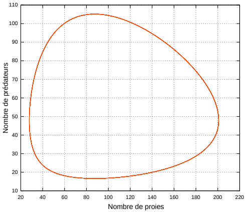
Conclusion

Courbes obtenues

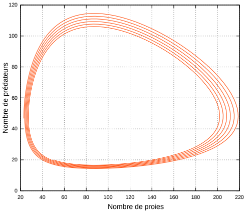
— $N = 1\,000,\ T = 35,\ h = 0.035000$ —



Euler explicite

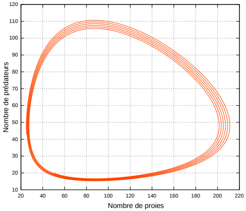


Crank-Nicolson

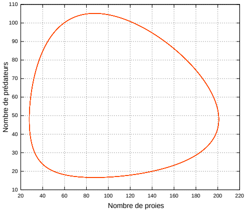


Runge Kutta 4

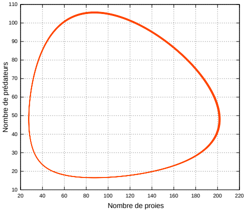
— $N = 10\,000,\ T = 35,\ h = 0.003500$ —



Euler explicite



Crank-Nicolson

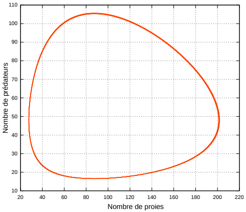


Runge Kutta 4

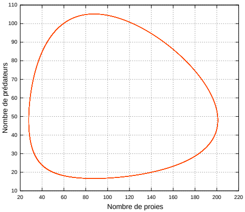
Conclusion

Courbes obtenues

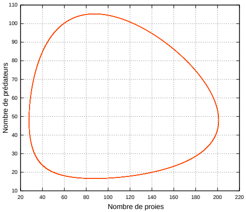
— $N = 100\ 000,\ T = 35,\ h = 0.000350$ —



Euler explicite

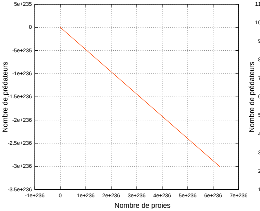


Crank-Nicolson

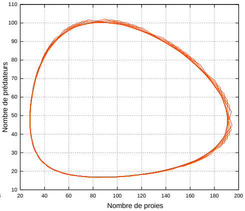


Runge Kutta 4

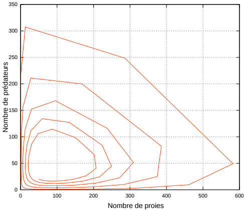
— $N = 100,\ T = 35,\ h = 0.350000$ —



Euler explicite



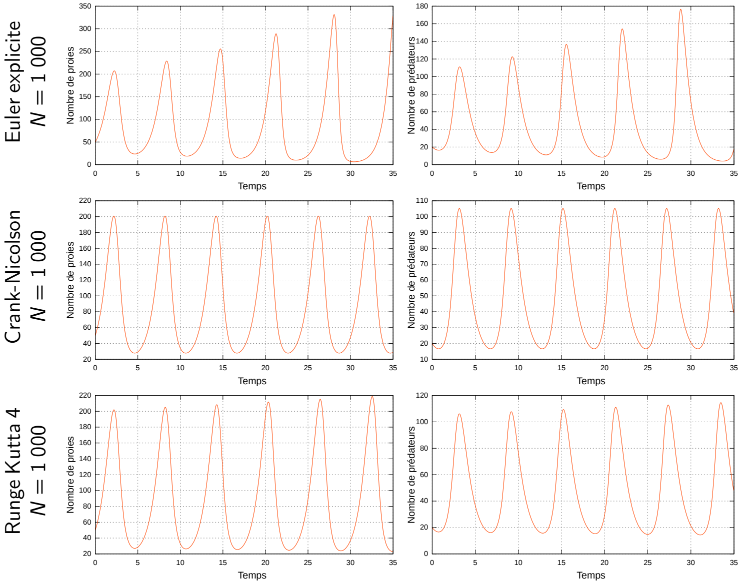
Crank-Nicolson



Runge Kutta 4

Conclusion

Courbes obtenues



Conclusion

Limites du modèle

Equations de Lotka-Volterra basées sur un modèle simplificateur $\Rightarrow$ incohérences.

- Si l'on prend $x_0 > 0$ très petit devant $y_0 > 0$, dans la réalité les proies sont vouées à disparaître. Incohérent avec la théorie des équations de Lotka-Volterra, selon laquelle x ne devient jamais nulle.
- S'il n'y a pas d'interaction entre proies et prédateurs $(\beta = \sigma = 0)$, on a $x' = \alpha x \Rightarrow$ croissance exponentielle du nombre de proies.

  Imposible en réalité (ressources limitées sur Terre...).

  Solution : on peut remplacer α par $\alpha\left(1 - \frac{x}{x_{\max}}\right)$ avec $x_{\max} = \mathrm{N}_{\max}/X_0$, $\mathrm{N}_{\max}$ le nombre maximal théorique d'individus dans la population de proies.

```
git clone
https://GitMR@bitbucket.org/GitMR/equations_lotka_volterra.git
```