

Modélisation des systèmes proie-prédateur par les équations de Lotka-Volterra

Ecole d'ingénieurs Sup'Galilée — Université Paris XIII
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
1^{ère} année

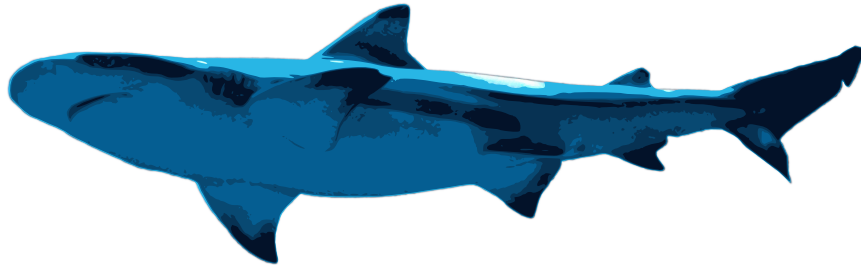
Margaux BRULIARD
Mathieu RIGAL
Mitul VYAS

12 juin 2017



Table des matières

1 Introduction	2
1.1 Contexte et enjeux	2
1.2 Présentation des équations de Lotka-Volterra	2
2 Propriétés des solutions	3
2.1 Existence, unicité et aspect positif de la solution maximale	3
2.2 Existence et unicité globale	4
2.3 Etude de la stabilité des points d'équilibre	4
2.4 Aspect périodique de la solution	6
3 Approximation des solutions	7
3.1 Etude générale des méthodes à un pas	7
3.2 Première approche : Euler explicite	9
3.3 Deuxième approche : Crank-Nicolson	10
3.4 Troisième approche : RK4	11
3.5 Comparaison des schémas	11
4 Conclusion	12
4.1 Retour au problème de Vito Volterra	12
4.2 Les limites du modèle	12
A Courbes obtenues	13
A.1 Evolution des prédateurs en fonction des proies	13
A.2 Evolution des proies et des prédateurs en fonction du temps	15
Bibliographie	17



1 Introduction

1.1 Contexte et enjeux

Un système « proie-prédateur » est un modèle simplifié de système biologique dans lequel deux catégories d'individus, les proies et les prédateurs, interagissent par le biais de la prédation. Cette dernière peut être définie comme l'acte des prédateurs de capturer et de se nourrir des proies. De nombreux exemples existent, et font intervenir des acteurs différents dans des écosystèmes variés.

La prédation implique une évolution complexe des deux populations considérées : l'augmentation naturelle du nombre de proies par reproduction entraîne une augmentation du nombre de prédateurs, ce qui intensifie la prédation et conduit à une diminution du nombre de proies, et donc du nombre de prédateurs. Les systèmes proie-prédateur impactent également l'évolution d'une espèce sur une bien plus grande échelle de temps via la sélection naturelle. En effet, si cette dernière favorise trop les prédateurs par rapport aux proies, celles-ci seront incapables de se défendre ou de s'enfuir, condamnées à une disparition certaine. Dans le cas contraire, les prédateurs seraient impuissants face aux proies, et leur sort serait peu enviable. En imposant la nécessité d'une « coévolution », les systèmes proie-prédateur constituent donc un véritable mécanisme de régulation à deux niveaux.

L'étude de tels systèmes répond à différents en-

jeux, comme la capacité à mieux comprendre et anticiper la disparition de certains prédateurs ou de certaines proies, la capacité à lutter biologiquement contre des espèces parasites par l'introduction de prédateurs, ou encore la meilleure compréhension de l'impact de l'Homme, prédateur efficace vis-à-vis de nombreuses espèces. Il est également intéressant de noter que les systèmes proie-prédateur permettent de comprendre des phénomènes économiques complexes, par exemple à travers le modèle de Goodwin [3]. Grâce à celui-ci, il est entre autres possible d'étudier l'évolution du taux d'emploi en fonction du salaire. Dans ce cas, le salaire joue le rôle de prédateur, tandis que le taux d'emploi correspond à la proie.

1.2 Présentation des équations de Lotka-Volterra

C'est afin de modéliser l'évolution de deux populations d'un système proie-prédateur que les équations de Lotka-Volterra (1) ont été introduites indépendamment par Alfred James Lotka et par Vito Volterra, respectivement en 1925 et en 1926. Ces équations sont explicitées ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy}{dt}(t) = y(t)(\sigma x(t) - \gamma) \end{cases} \quad (1)$$

La signification de chacun des termes peut être trouvée dans le tableau suivant :

$x(t)$	rapport du nombre de proies au temps t sur une référence X_0
$y(t)$	rapport du nombre de prédateurs au temps t sur une référence Y_0
α	taux de reproduction des proies
β	taux de mortalité des proies par prédateur rencontré
γ	taux de mortalité des prédateurs
σ	taux de reproduction des prédateurs par proie rencontrée
X_0	nombre référence de proies
Y_0	nombre référence de prédateurs

Bien que ces équations soient désignées par les noms des deux mathématiciens, les deux méthodes utilisées pour parvenir au même résultat sont différentes. L'approche de Volterra est détaillée dans les lignes qui suivent.

Contexte historique :

En 1925, le mathématicien et physicien italien Vito Volterra s'est intéressé à un phénomène étrange : après la fin de la Première Guerre Mondiale, les filets des pêcheurs contenaient plus de poissons cartilagineux — à savoir les requins et les raies — et moins de poissons à nageoires rayonnées — poissons habituellement ciblés par la pêche. Pour résoudre ce mystère, Vito Volterra choisit de distinguer ces deux familles de poissons comme étant des proies ou des prédateurs, afin de modéliser leurs interactions par le système (1).

Justification des équations :

Considérons $X : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{N}$ le nombre de proies fonction du temps t et ΔX la variation du nombre de proies entre un temps t et $t + \Delta t$. De la même manière, introduisons Y le nombre de prédateurs fonction du temps et ΔY la variation de ce nombre entre t et $t + \Delta t$.

À un temps t donné, la variation de X est due à deux facteurs :

- La reproduction, représentée par le taux de natalité α par unité de temps Δt ;
- La mort par prédation, représenté par β le coefficient de proies mortes par prédateur rencontré et par unité de temps Δt ;

On obtient donc l'équation :

$$\Delta X = X(\alpha - \beta Y)\Delta t \quad (2)$$

On caractérise par ailleurs la variation de Y , due aux facteurs suivants :

- La mort de vieillesse, représentée par le taux de mortalité γ par unité de temps Δt ;

- L'impact de la prédation sur la reproduction, quantifié par σ le coefficient de natalité par proie rencontrée et par unité de temps Δt ;

Il vient alors :

$$\Delta Y = Y(\sigma X - \gamma)\Delta t \quad (3)$$

Si les équations (2) et (3) décrivent *à priori* l'évolution du système proie/prédateur, les fonctions solutions de ces équations sont néanmoins difficiles à manipuler en raison de leur caractère discret. Pour faire l'approximation selon laquelle les équations sont continues, il est donc nécessaire de diviser les nombres $X(t)$ et $Y(t)$ par des valeurs de référence X_0 et Y_0 choisies arbitrairement grandes. On obtient donc :

$$\begin{cases} \frac{\Delta X(t)}{X_0} = \frac{X(t)}{X_0}(\alpha - \beta Y_0 \times \frac{Y(t)}{Y_0})\Delta t \\ \frac{\Delta Y(t)}{Y_0} = \frac{Y(t)}{Y_0}(\sigma X_0 \times \frac{X(t)}{X_0} - \gamma)\Delta t \end{cases} \iff \begin{cases} \Delta x(t) = x(t)(\alpha - \beta^* y(t))\Delta t \\ \Delta y(t) = y(t)(\sigma^* x(t) - \gamma)\Delta t \end{cases} \quad (4)$$

Avec $x(t) = X(t)/X_0$, $y(t) = Y(t)/Y_0$, $\beta^* = \beta Y_0$ et $\sigma^* = \sigma X_0$.

Finalement, en faisant tendre Δt vers 0, on retrouve le système de Lotka-Volterra (1).

2 Propriétés des solutions

2.1 Existence, unicité et aspect positif de la solution maximale

On introduit le vecteur $V = (x, y)^T$ ainsi que la fonction f suivante :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ y(\sigma x - \gamma) \end{pmatrix}$$

L'équation de Lotka-Volterra devient alors l'équation autonome :

$$V'(t) = f(V(t))$$

On impose de plus la condition initiale $V(t_0) = V_0$.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz). *Si f est localement lipschitzienne par rapport à V , il y a existence et unicité du problème de Cauchy sur un intervalle ouvert de la forme $]t_0 - a, t_0 + a[$.*

f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R}^2 , donc est localement lipschitzienne. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a existence et unicité locale de la solution du problème de Cauchy associé à l'équation de Lotka-Volterra.

On remarque ensuite que toute fonction vectorielle de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} Ke^{\alpha t} \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation de Lotka-Volterra. On se place dans le cas où la condition initiale sur y vérifie $y_0 > 0$. Supposons qu'il existe $t \in I_{\max}$ tel que $y(t) \leq 0$. Par continuité de y , $\exists t^*$ tel que $y(t^*) = 0$. On introduit le réel $K^* = x(t^*)e^{-\alpha t^*} \Rightarrow K^*e^{\alpha t^*} = x(t^*)$. Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} K^*e^{\alpha t} \\ 0 \end{pmatrix}$ sont solutions du même problème de Cauchy. Par unicité de la solution, on en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} K^*e^{\alpha t} \\ 0 \end{pmatrix} \forall t \in I_{\max}$. Impossible car $y_0 > 0$. Ainsi $y(t) > 0 \forall t \in I_{\max}$.

De même, en remarquant que toute fonction vectorielle de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ Ke^{-\gamma t} \end{pmatrix}$ est solution de l'équation de Lotka-Volterra, on peut montrer que $x(t) > 0 \forall t \in I_{\max}$ si $x_0 > 0$.

La solution est bien strictement positive sur I_{\max} quelque soient les conditions initiales $(x_0, y_0) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, ce qui revient à dire que si les proies et les prédateurs sont présents en un temps initial, leur nombre ne devient jamais nul sur I_{\max} , pour les temps croissants comme décroissants. On prendra $x_0, y_0 > 0$ par la suite.

2.2 Existence et unicité globale

Dans un premier temps, on prouve que la solution maximale est bornée sur son ensemble de définition I_{\max} . On considère pour cela la fonction ϕ explicitée ci-dessous :

$$\phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \sigma u + \beta v - \gamma \ln u - \alpha \ln v$$

Cette fonction est une intégrale première de l'équation de Lotka-Volterra [2], ce qui signifie que si $(x, y)^T$ est solution de (1), alors $\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \equiv \text{cste}$. En effet, $\forall t \in I_{\max}$, on a $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ et :

$$\begin{aligned} \phi' \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \sigma x' + \beta y' - \gamma \frac{x'}{x} - \alpha \frac{y'}{y} \\ &= \sigma(\alpha x - \beta xy) + \beta(\sigma xy - \gamma y) \\ &\quad - \gamma(\alpha + \beta y) - \alpha(\sigma x - \gamma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = K, \quad K \in \mathbf{R}$$

D'autre part, on sait qu'au voisinage de ∞ , $\ln x = o(x)$, d'où $\exists A > 0$, $\exists B > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall x > A, \quad \gamma \ln x &< \frac{\sigma x}{2} \\ \forall y > B, \quad \alpha \ln y &< \frac{\beta y}{2} \end{aligned}$$

On distingue alors plusieurs possibilités :

Premier cas :

On a t tel que $x(t) \leq A$ et $y(t) \leq B$.

Deuxième cas :

On a t tel que $x(t) > A$ et $y(t) > B$:

$$\begin{aligned} K &\equiv \sigma x + \beta y - \gamma \ln x - \alpha \ln y > \frac{\sigma x + \beta y}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sigma x}{2} < \frac{\sigma x + \beta y}{2} < K \\ \frac{\beta y}{2} < \frac{\sigma x + \beta y}{2} < K \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{2K}{\sigma} \\ y < \frac{2K}{\beta} \end{cases} \end{aligned}$$

Troisième cas :

On a t tel que $x(t) > A$ et $y(t) \leq B$:

$$\begin{aligned} K &\equiv \sigma x + \beta y - \gamma \ln x - \alpha \ln y > \frac{\sigma x}{2} - \alpha \ln(B) \\ \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{2(K + \alpha \ln(B))}{\sigma} \\ y &\leq B \end{cases} \end{aligned}$$

Quatrième cas :

On a t tel que $x(t) \leq A$ et $y(t) > B$:

$$\begin{aligned} K &\equiv \sigma x + \beta y - \gamma \ln x - \alpha \ln y > \frac{\beta y}{2} - \gamma \ln(A) \\ \Rightarrow \begin{cases} x &\leq A \\ y < \frac{2(K + \gamma \ln(A))}{\beta} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, $\forall t \in I_{\max}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 < x(t) &< \max \left(A, \frac{2K}{\sigma}, \frac{2(K + \alpha \ln(B))}{\sigma} \right) \\ 0 < y(t) &< \max \left(B, \frac{2K}{\beta}, \frac{2(K + \gamma \ln(A))}{\beta} \right) \end{aligned}$$

On trouve donc que la solution maximale de l'équation de Lotka-Volterra est bornée sur I_{\max} .

Théorème 2. Soit la solution maximale diverge sur $I_{\max} \subsetneq \mathbf{R}$, soit $I_{\max} = \mathbf{R}$.

D'après le théorème 2, on a nécessairement $I_{\max} = \mathbf{R}$. La solution maximale est donc globale, et on en déduit que tout problème de Cauchy associé à un système de Lotka-Volterra admet une unique solution globale.

2.3 Etude de la stabilité des points d'équilibre

Les points d'équilibre d'une équation différentielle $y' = f(t, y)$ sont les y^* tels que $f(t, y^*) = 0$ pour tout t . On en déduit que les points $(0, 0)$ et $(\gamma/\sigma, \alpha/\beta)$ sont les points d'équilibre du système de Lotka-Volterra. On se propose d'étudier leur stabilité.

Définition 1 (Point d'équilibre stable). Un point d'équilibre V^* est dit stable si :
 $\forall \varepsilon, \exists \delta, \|V_0 - V^*\| \leq \delta \implies \|V(t) - V^*\| \leq \varepsilon \forall t$

Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit instable.

Si en plus de la stabilité on a :

$$\exists \eta, \|V_0 - V^*\| \leq \eta \implies \|V(t) - V^*\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

Point d'équilibre (0,0)

On montre qu'il s'agit d'un point d'équilibre instable. Le théorème 3 donne un critère permettant d'établir la stabilité ou l'instabilité d'un point d'équilibre.

Théorème 3. Soit $y' = f(t, y(t))$ une équation différentielle non linéaire et soit y^* un point d'équilibre associé.

On note $J(y)$ la matrice jacobienne en y de f . Alors :

- i) Si toutes les valeurs propres de $J(y^*)$ sont strictement négatives, alors y^* est asymptotiquement stable.
- ii) S'il existe au moins une valeur propre strictement positive de $J(y^*)$, alors y^* est instable.

Considérons la matrice jacobienne J de f :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \sigma y & \sigma x - \gamma \end{pmatrix}$$

$$\implies J(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \gamma > 0$$

α est une valeur propre strictement positive de J , d'où le point d'équilibre (0,0) est instable d'après le théorème 3.

Point d'équilibre $(\gamma/\sigma, \alpha/\beta)$

On montre qu'il s'agit d'un point d'équilibre stable. Il est pour cela nécessaire de définir la notion de fonction de Lyapunov :

Définition 2 (Fonction de Lyapunov). On appelle fonction de Lyapunov associée au point d'équilibre V^* toute fonction \mathcal{L} vérifiant les propriétés suivantes :

- i) \mathcal{L} est continue sur $\mathcal{V} \longrightarrow \mathbf{R}$ avec \mathcal{V} un voisinage de V^* .
- ii) $\forall V \in \mathcal{V} \setminus \{V^*\}, \mathcal{L}(V^*) < \mathcal{L}(V)$.
- iii) $\forall V \in \mathcal{V}, \nabla \mathcal{L}(V) \cdot f(V) \leq 0$.

Théorème 4. S'il existe une fonction de Lyapunov associée au point d'équilibre V^* , alors ce point d'équilibre est stable.

On considère alors la fonction ϕ définie dans la partie précédente. On introduit ψ telle que :

$$\psi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \phi \begin{pmatrix} \gamma/\sigma \\ \alpha/\beta \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } \phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \sigma u + \beta v - \gamma \ln u - \alpha \ln v$$

On montre alors que ψ est une fonction de Lyapunov associée au point d'équilibre $(\gamma/\sigma, \alpha/\beta)$:

- i) Etant donné que $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ sont strictement positives, on peut trouver \mathcal{V} un voisinage de $(\gamma/\sigma, \alpha/\beta)$ sur lequel ψ est \mathcal{C}^2 . En particulier, ψ est continue sur \mathcal{V} .
- ii) On veut montrer la propriété suivante :

$$\forall V \in \mathcal{V}, \psi(V^*) \leq \psi(V)$$

Cela revient à montrer que $\psi(V) \geq 0 \forall V \in \mathcal{V}$. On calcule pour cela un développement limité à l'ordre deux de la fonction ψ au voisinage \mathcal{V} de V^* . Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $h = V - V^*$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \psi(V) &= \psi(V^*) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(V^*)h_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y}(V^*)h_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(V^*)h_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(V^*)h_2^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(V^*)h_1h_2 + o(\|h\|^2) \\ &= 0 + (\sigma - \frac{\gamma}{\gamma/\sigma})h_1 + (\beta - \frac{\alpha}{\alpha/\beta})h_2 \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^2 h_1^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 h_2^2 \\ &\quad + 0 \times h_1h_2 + o(\|h\|^2) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\gamma} h_1^2 + \frac{\beta^2}{2\alpha} h_2^2 + o(\|h\|^2) \\ &> 0 \forall V \in \mathcal{V} \setminus \{V^*\} \end{aligned}$$

- iii) Soit $V \in \mathcal{V}$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla \psi(V) \cdot f(V) &= \begin{pmatrix} \partial_x \psi(V) \\ \partial_y \psi(V) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ y(\sigma x - \gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma - \gamma/x \\ \beta - \alpha/y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(\alpha - \beta y) \\ y(\sigma x - \gamma) \end{pmatrix} \\ &= \sigma x(\alpha - \beta y) - \gamma(\alpha - \beta y) \\ &\quad + \beta y(\sigma x - \gamma) - \alpha(\sigma x - \gamma) \\ &= (\sigma \alpha - \alpha \sigma)x + (\gamma \beta - \beta \gamma)y \\ &\quad + (\beta \sigma - \sigma \beta)xy - \gamma \alpha + \alpha \gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

En conclusion, la fonction ψ est une fonction de Lyapunov associée au point d'équilibre $(\gamma/\sigma, \alpha/\beta)$. Ce point d'équilibre est donc stable d'après le théorème 4.

2.4 Aspect périodique de la solution

On notera désormais V^* le point d'équilibre $(\gamma/\sigma, \alpha/\beta)$. Dans le but de démontrer la périodicité de la solution, on considère les quarts de plan $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq 4}$:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > \gamma/\sigma \text{ et } y \leq \alpha/\beta\} \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq \gamma/\sigma \text{ et } y > \alpha/\beta\} \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < \gamma/\sigma \text{ et } y \geq \alpha/\beta\} \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq \gamma/\sigma \text{ et } y < \alpha/\beta\}\end{aligned}$$

On commence par énumérer les propriétés de x et de y dans chacun des $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq 4}$, que l'on obtient facilement à l'aide des équations (1) :

- Dans Γ_1 x et y sont croissantes ;
- Dans Γ_2 x est décroissante et y croissante ;
- Dans Γ_3 x et y sont décroissantes ;
- Dans Γ_4 x est croissante et y décroissante ;

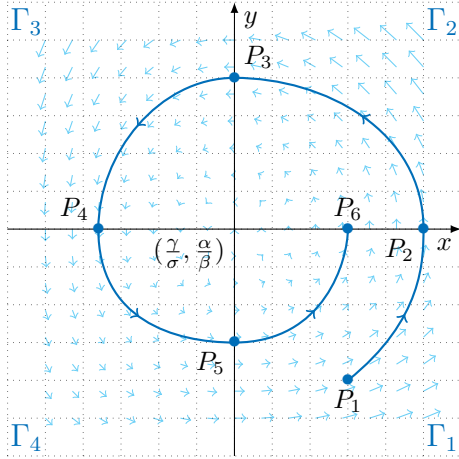


FIGURE 1 – La solution finit toujours par changer de quart de plan dans le sens trigonométrique

On montre alors que la solution finit toujours par changer de quart de plan dans le sens trigonométrique (voir FIG. 1). Supposons par exemple qu'à un temps t_1 donné, la solution se trouve en un point $P_1 \in \Gamma_1$. Montrons qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que la solution soit dans Γ_2 à partir du temps t_2 .

On raisonne par l'absurde en faisant l'hypothèse que la solution reste dans Γ_1 pour tout $t \geq t_1$.

On sait que y est croissante dans Γ_1 , et qu'elle est majorée d'après l'hypothèse faite. La dérivée de y converge donc vers 0 : $y' = y(\sigma x - \gamma) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Nécessairement $x \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\gamma}{\sigma}$, ce qui est impossible car x est croissante dans Γ_1 et $x > \frac{\gamma}{\sigma} > 0$.

L'hypothèse selon laquelle la solution reste dans Γ_1 pour tout $t \geq t_1$ est fautive. Par croissance de x et de y dans Γ_1 , on en déduit qu'il existe un temps $t_2 > t_1$ à partir duquel la solution est dans Γ_2 .

En menant un raisonnement similaire, on démontre que la solution passe de Γ_2 à Γ_3 , puis de Γ_3 à Γ_4 , et de Γ_4 à Γ_1 . La solution a bien un comportement cyclique (voir FIG. 1).

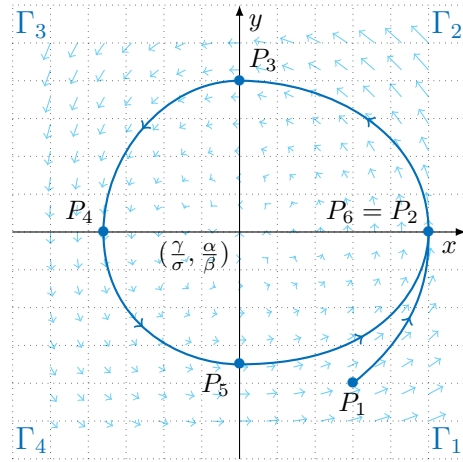


FIGURE 2 – La solution a mêmes coordonnées en t_2 et t_6

On montre ensuite que la solution au temps t_6 (temps à partir duquel la solution est une seconde fois dans Γ_2) se confond avec la solution au temps t_2 (voir FIG. 2). On sait d'ores et déjà que $y(t_2) = y(t_6)$. Il faut alors prouver que $x(t_2) = x(t_6)$.

On a vu que l'intégrale première de l'équation de Lotka-Volterra était constante le long de la solution : $\exists K \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}, \phi \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = K$ avec x et y solutions du système (1). Notamment, $\phi \begin{pmatrix} x(t_6) \\ y(t_6) \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\implies \sigma x(t_6) + \beta y(t_6) - \gamma \ln x(t_6) - \alpha \ln y(t_6) &= \\ \sigma x(t_2) + \beta y(t_2) - \gamma \ln x(t_2) - \alpha \ln y(t_2) & \\ \implies \sigma x(t_6) - \gamma \ln x(t_6) &= \sigma x(t_2) - \gamma \ln x(t_2)\end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité $x(t_6) = x(t_2)$, il suffit de montrer que la fonction $h : x \mapsto \sigma x - \gamma \ln x$ est injective. On étudie alors les variations de h . h est dérivable sur \mathbf{R}_+^* , de dérivée :

$$h'(x) = \sigma - \frac{\gamma}{x}$$

Or on se restreint dans notre cas à l'ensemble $] \gamma/\sigma, +\infty[$, sur lequel h' est strictement positive. Ainsi h est strictement croissante sur $] \gamma/\sigma, +\infty[$, et est donc injective sur cet ensemble. On obtient bien $x(t_6) = x(t_2)$.

Enfin, on peut démontrer la périodicité de la solution. On pose pour ce faire $T = t_6 - t_2$. On a alors $V(t_6) = V(t_2 + T)$ avec V solution de l'équation de Lotka-Volterra. On introduit alors la fonction W définie sur \mathbf{R} telle que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, W(t) = V(t - T)$$

En particulier, on a $W(t_6) = V(t_2) = V(t_6)$. On utilise par la suite une propriété clé induite par l'aspect autonome des équations de Lotka-Volterra.

On sait par définition que le graphe de V est tangent en tout point au champ de f . Si on translate de T « vers la droite » le graphe de V , on obtient le graphe de W , qui est également tangent en tout point au champ de f car le système est autonome. Ainsi, $W(t) = V(t - T)$ est aussi solution de l'équation de Lotka-Volterra. Comme de plus $W(t_6) = V(t_6)$, il vient par unicité de la solution :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}, W(t) &= V(t) \\ \implies \forall t \in \mathbf{R}, V(t) &= V(t - T) \end{aligned}$$

On a bien montré que l'unique solution globale de l'équation de Lotka-Volterra était périodique, de période $T = t_6 - t_2$.

3 Approximation des solutions

Dans cette partie, on souhaite approcher numériquement les solutions des équations de Lotka-Volterra sur un intervalle de la forme $[0, T]$. On discrétise pour cela cet intervalle en $N + 1$ points $(t_i)_{0 \leq i \leq N}$ définis par $t_0 = 0$ et $t_{i+1} = t_i + h$, où $h = T/N$.

3.1 Etude générale des méthodes à un pas

Dans cette section, on introduit les notions de consistance, de stabilité, de convergence d'un schéma, d'ordre d'un schéma et de schéma symplectique. Ces notions permettront par la suite de comparer la pertinence des schémas à un pas implémentés. Ces schémas seront de la forme suivante :

$$\begin{cases} u_0 = V(t_0) = (x(0), y(0))^T \\ u_{n+1} = u_n + h\phi(t_n, u_n, u_{n+1}, h) \end{cases}$$

Si on note $\tilde{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la solution exacte des équations de Lotka-Volterra et $\tilde{u}_n = \begin{pmatrix} x(t_n) \\ y(t_n) \end{pmatrix}$, on espère alors que $u_n = u(t_n)$ soit une bonne approximation de $\tilde{u}_n \forall n \in \{0, \dots, N\}$.

Définition 3 (Consistance). On considère l'erreur de troncature définie par :

$$r_n = \frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{h} - \phi(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, h)$$

Un schéma est dit consistant dès lors que $h \sum_{n=0}^{N-1} |r_n| = O(h)$ (avec $h \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$).

En d'autres termes, la consistance permet d'affirmer si le choix de la fonction ϕ est cohérent avec l'équation différentielle considérée.

Définition 4 (Stabilité). Un schéma est dit stable si $\exists M \geq 0$ tel que pour toutes les suites $(v_n), (w_n)$ définies par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + h\phi(t_n, v_n, v_{n+1}, h) \\ w_{n+1} = w_n + h\phi(t_n, w_n, w_{n+1}, h) + \varepsilon_n \end{cases}$$

on a l'inégalité

$$\max_{0 \leq n \leq N} |w_n - v_n| \leq M \left(|w_0 - v_0| + \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| \right)$$

La stabilité d'un schéma s'interprète par le fait que l'écart entre une approximation *idéale* et une approximation soumise à des petites perturbations ε_n reste mesuré. En l'occurrence, les ε_n introduits à chaque itération peuvent correspondre à des arrondissements effectués par la machine ou encore à des approximations de calcul.

Théorème 5 (Condition suffisante de stabilité). *Il suffit que la fonction ϕ soit lipschitzienne par rapport à sa deuxième et sa troisième variable pour avoir la stabilité.*

Une démonstration du théorème 5 utilisant le lemme de Gronwall peut être trouvée dans [1] pour le cas où, sans perte de généralité, ϕ ne dépend que de t_n, u_n et h .

Définition 5 (Convergence d'une méthode). On dit d'une méthode qu'elle est convergente si l'erreur globale $\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - \tilde{u}_n|$ converge vers 0 quand $N \rightarrow \infty$.

La convergence de la méthode nous assure ainsi qu'en choisissant une discrétisation suffisamment importante de $[0, T]$, l'approximation numérique se rapproche aussi près que l'on veut de la solution exacte de manière uniforme.

Théorème 6 (Condition suffisante de convergence). *Il suffit que le schéma soit stable et consistant pour avoir la convergence.*

Le théorème 6 se démontre simplement en remarquant que

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h\phi(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, h) + hr_n$$

La méthode étant stable, il vient :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - \tilde{u}_n| \leq M \left(|u_0 - \tilde{u}_0| + h \sum_{n=0}^{N-1} |r_n| \right)$$

Or dans notre cas on suppose que $u_0 = \tilde{u}_0$, d'où par consistance de la méthode :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u_n - \tilde{u}_n| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

□

Définition 6 (Ordre d'un schéma). On dit qu'un schéma est d'ordre au moins p si pour tout n dans $\{0, \dots, N\}$ l'erreur de troncature vérifie :

$$r_n = O(h^p)$$

Un schéma est d'ordre exactement p s'il est d'ordre au moins p mais n'est pas d'ordre au moins $p+1$.

On notera que plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus l'approximation de la solution est précise — pour un pas h fixé suffisamment petit.

Théorème 7. *Dire qu'un schéma est d'ordre au moins p équivaut à l'égalité suivante :*

$$\frac{\partial^l \phi}{\partial h^l}(t, X, X, 0) = \frac{1}{l+1} f^{(l)}(t, X)$$

quelque soit $0 \leq l \leq p-1$.

On démontre le théorème 7 dans les lignes suivantes.

Supposons que f est de classe C^p . On a par la même occasion que ϕ est de classe C^p et que \tilde{u} est de classe C^{p+1} .

Un développement de Taylor de ϕ par rapport à h en 0 (en remarquant qu'alors $\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n$) est donné par :

$$\phi(t, \tilde{u}_n, \tilde{u}_n, h) = \sum_{l=0}^p \frac{1}{l!} \frac{\partial^l \phi}{\partial h^l}(t, \tilde{u}_n, \tilde{u}_n, 0) h^l + o(h^p)$$

De même, un développement de Taylor de $\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n$ par rapport à h au voisinage de 0 est :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n &= \tilde{u}(t_n + h) - \tilde{u}(t_n) \\ &= \sum_{l=1}^{p+1} \frac{1}{l!} h^l \tilde{u}^{(l)}(t_n) + o(h^{p+1}) \\ &= \sum_{l=0}^p \frac{1}{(l+1)!} h^{l+1} f^{(l)}(t_n, \tilde{u}_n) + o(h^{p+1}) \end{aligned}$$

Or le schéma est d'ordre au moins p si $r_n = o(h^{p-1})$:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{h} - \phi(t, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, h) &= o(h^{p-1}) \\ \Rightarrow \sum_{l=0}^p \frac{h^l}{l!} \left(\frac{f^{(l)}(t, \tilde{u}_n)}{l+1} - \frac{\partial^l \phi}{\partial h^l}(t, \tilde{u}_n, \tilde{u}_n, 0) \right) &= o(h^{p-1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^l \phi}{\partial h^l}(t, X, X, 0) = \frac{1}{l+1} f^{(l)}(t, X)$$

$$\forall 0 \leq l \leq p-1$$

□

Théorème 8. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le schéma est d'ordre au moins 1*
- (ii) $\phi(t, X, X, 0) = f(t, X)$
- (iii) *Le schéma est consistant*

Une démonstration du théorème 8 est faite ci-dessous.

D'après le théorème 7, (i) \Leftrightarrow (ii) est immédiat.

Il suffit de montrer que (ii) \Leftrightarrow (iii). On a :

$$\begin{aligned} h \sum_{n=0}^{N-1} |r_n| &= h \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{h} - \phi(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, h) \right| \\ &= h \sum_{n=0}^{N-1} |f(t_n, \tilde{u}_n) + \phi(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, 0) + O(h)| \\ &= h \sum_{n=0}^{N-1} (|f(t_n, \tilde{u}_n) + \phi(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, 0)| + O(h)) \\ &= h \sum_{n=0}^{N-1} |f(t_n, \tilde{u}_n) + \phi(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, 0)| + O(h) \end{aligned}$$

Or pour avoir la consistance il faut que $h \sum_{n=0}^{N-1} |r_n| = O(h)$.

$$\iff \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(t_n, \tilde{u}_n) + \phi(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, 0)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \int_0^T |f(t, \tilde{u}(t)) + \phi(t, \tilde{u}(t), \tilde{u}(t), 0)| dt = 0$$

$$\iff \forall t \in \mathbf{R}, |f(t, X) + \phi(t, X, X, 0)| = 0$$

par positivité de l'intégrale et par continuité de $|f(t, \tilde{u}(t)) + \phi(t, \tilde{u}(t), \tilde{u}(t), 0)|$

□

Une dernière propriété désirable pour un schéma numérique est, dans le cas où la solution exacte est périodique, d'obtenir une approximation de la solution également périodique.

Cette propriété étant difficile à évaluer, on se place dans le cas simplifié de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad (5)$$

Toute solution de ce système vérifie $x'x = -y'y$, d'où en intégrant $x^2 + y^2 = c \in \mathbf{R}$. Ainsi la trajectoire des solutions est décrite par l'ensemble des cercles de centre $(0,0)^T$. Le problème étant autonome, il y a de plus périodicité.

Par ailleurs la fonction $k : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est constante le long des solutions de (5), donc est une intégrale première. Soit $Z_{n+1} = Z_n + h\phi_g(t_n, Z_n, Z_{n+1}, h)$ le schéma approchant la solution. Pour avoir périodicité de l'approximation numérique, il est nécessaire d'avoir conservation de l'intégrale première, sans quoi la courbe associée serait une spirale. On se contentera donc de vérifier que $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, $k(Z_{n+1}) = k(Z_n)$.

Définition 7 (Schéma symplectique). On dira qu'un schéma est symplectique si pour tout n dans $\{0, \dots, N-1\}$ on a :

$$k(Z_{n+1}) = k(Z_n)$$

A priori, un schéma symplectique sera plus à même de préserver l'aspect périodique de la solution exacte des équations de Lotka-Volterra. On gardera toutefois à l'esprit que le critère de conservation de l'intégrale première n'est pas suffisant pour affirmer si l'approximation d'une solution de (5) est périodique. Par exemple, on peut obtenir une approximation qui conserve l'intégrale première, mais dont les variations accélèrent dans le temps.

3.2 Première approche : Euler explicite

On considère le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} y_0 = \tilde{y}_0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t, y_n) \end{cases}$$

f n'est plus forcément la fonction associée aux équations de Lotka-Volterra. Pour simplifier les calculs on supposera que les y_n et $f(t, y_n)$ sont des scalaires. f sera prise lipschitzienne par rapport à x .

Ici la fonction ϕ est donnée par $\phi(t, x, y, h) = f(t, x)$. On remarque que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\phi(t, x, x, 0) = f(t, x)$, donc le schéma Euler explicite est consistant et au moins d'ordre 1 d'après le théorème 8.

D'autre part on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial h}(t, x, x, 0) = 0$$

Mais on a pas nécessairement $f'(t, x) = 0$. La méthode n'est donc pas au moins d'ordre 2, donc est exactement d'ordre 1.

La fonction f étant lipschitzienne par rapport à x , on a que ϕ est lipschitzienne par rapport à x et y , et la méthode est stable d'après le théorème 5.

La méthode est stable et consistante, donc converge uniformément vers la solution exacte.

Enfin, on cherche à savoir si la méthode d'Euler explicite est symplectique. On la soumet pour cela au système (5) : $Z_{n+1} = Z_n + h\phi_g(t_n, Z_n, Z_{n+1}, h)$. On note $Z_{1,n}$ la première coordonnée du n -ième itéré, et $Z_{2,n}$ la deuxième coordonnée. Pour que le schéma soit symplectique, il faut que $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$ on ait $Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 = Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2$. Or on a :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + hZ_{2,n} \\ Z_{2,n+1} = Z_{2,n} - hZ_{1,n} \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} Z_{1,n+1}^2 = Z_{1,n}^2 + h^2 Z_{2,n}^2 + 2hZ_{1,n}Z_{2,n} \\ Z_{2,n+1}^2 = Z_{2,n}^2 + h^2 Z_{1,n}^2 - 2hZ_{1,n}Z_{2,n} \end{cases} \\ \implies & Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 = (1 + h^2)(Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2) \\ & \neq Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2 \end{aligned}$$

Le schéma Euler explicite n'est pas symplectique.

3.3 Deuxième approche : Crank-Nicolson

Le schéma de Crank-Nicolson est donné par :

$$\begin{cases} y_0 = \tilde{y}_0 \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})) \end{cases}$$

On a $\phi(t, x, y, h) = \frac{1}{2}(f(t, x) + f(t + h, y))$. On voit immédiatement que $\phi(t, x, x, 0) = f(t, x)$, donc la méthode de Crank-Nicolson est consistante et au moins d'ordre 1 d'après les théorèmes 7 et 8. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial h}(t, x, x, h) &= \frac{1}{2}f'_t(t + h, x) \\ &= \frac{1}{2}f'(t, x) \text{ quand } h = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial h^2}(t, x, x, h) &= \frac{1}{2}f''_{tt}(t + h, x) \\ &\neq \frac{1}{3}f''(t, x) \text{ quand } h = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème 7, la méthode de Crank-Nicolson est exactement d'ordre 2.

Etant donné le caractère lipschitzien de f , le théorème 5 nous donne la stabilité du schéma. La méthode est stable et consistante, donc converge uniformément vers la solution exacte.

On étudie enfin l'aspect symplectique du schéma Crank-Nicolson. On considère pour cela le système (5) : $Z_{n+1} = Z_n + h\phi_g(t_n, Z_n, Z_{n+1}, h)$. On exprime $Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2$ en fonction de $Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2$:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + Z_{2,n+1}) \\ Z_{2,n+1} = Z_{2,n} - \frac{h}{2}(Z_{1,n} + Z_{1,n+1}) \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + Z_{2,n+1}) \\ Z_{2,n+1} = Z_{2,n} - \frac{h}{2}(Z_{1,n} + Z_{1,n+1}) + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + Z_{2,n+1}) \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + Z_{2,n+1}) \\ \frac{4+h^2}{4}Z_{2,n+1} = \frac{4-h^2}{4}Z_{2,n} - hZ_{1,n} \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + Z_{2,n+1}) \\ Z_{2,n+1} = \frac{4-h^2}{4+h^2}Z_{2,n} - \frac{4h}{4+h^2}Z_{1,n} \end{cases} \end{aligned}$$

On pose alors $A = \frac{4h}{4+h^2}$ et $B = \frac{4-h^2}{4+h^2}$. On a :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} Z_{1,n+1} = Z_{1,n} + \frac{h}{2}(Z_{2,n} + BZ_{2,n} - AZ_{1,n}) \\ Z_{2,n+1} = BZ_{2,n} - AZ_{1,n} \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} Z_{1,n+1} = (1 - \frac{hA}{2})Z_{1,n} + \frac{h}{2}(1+B)Z_{2,n} \\ Z_{2,n+1} = BZ_{2,n} - AZ_{1,n} \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} Z_{1,n+1}^2 = (1 - \frac{hA}{2})^2 Z_{1,n}^2 + \frac{h^2(1+B)^2}{4} Z_{2,n}^2 \\ \quad + 2 \times (1 - \frac{hA}{2}) \times \frac{h}{2}(1+B) Z_{1,n} Z_{2,n} \\ Z_{2,n+1}^2 = A^2 Z_{1,n}^2 + B^2 Z_{2,n}^2 \\ \quad - 2ABZ_{1,n} Z_{2,n} \end{cases} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} &Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 \\ &= \left[A^2 + \left(1 - \frac{hA}{2}\right)^2 \right] Z_{1,n}^2 \\ &\quad + \left[B^2 + \frac{h^2(1+B)^2}{4} \right] Z_{2,n}^2 \\ &\quad + 2 \left[\left(1 - \frac{hA}{2}\right) \times \frac{h}{2}(1+B) - AB \right] Z_{1,n} Z_{2,n} \end{aligned}$$

Or on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left[A^2 + \left(1 - \frac{hA}{2}\right)^2 \right] &= \left[\left(1 + \frac{h^2}{4}\right) A^2 + 1 - hA \right] \\ &= \left[\left(\frac{4+h^2}{4}\right) A^2 + 1 - hA \right] \\ &= [hA + 1 - hA] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[B^2 + \frac{h^2(1+B)^2}{4} \right] \\ &= \left[\left(1 + \frac{h^2}{4}\right) B^2 + \frac{h^2(1+2B)}{4} \right] \\ &= \left[\frac{4+h^2}{4} B^2 + \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{2} B \right] \\ &= \left[\frac{4-h^2}{4} B + \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{2} B \right] \\ &= \left[\frac{(4-h^2)^2}{4(4+h^2)} + \frac{h^2(4+h^2)}{4(4+h^2)} + \frac{2h^2(4-h^2)}{4(4+h^2)} \right] \\ &= \frac{(1+1-2)h^4 + (-8+4+8)h^2 + 16}{4h^2 + 16} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{h}{2} \left(1 - \frac{hA}{2}\right) (1+B) - AB \right] \\ &= \left[- \left(1 + \frac{h^2}{4}\right) AB + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} A + \frac{h}{2} B \right] \\ &= -\frac{h}{2} B - \frac{h^2}{4} A + \frac{h}{2} \\ &= -\frac{h}{2} \frac{4-h^2}{4+h^2} - \frac{h^2}{4} \frac{4h}{4+h^2} + \frac{h}{2} \\ &= \frac{h^3/2}{4+h^2} - \frac{2h}{4+h^2} - \frac{h^3}{4+h^2} + \frac{h/2(4+h^2)}{4+h^2} \\ &= \frac{(1/2 + 1/2 - 1)h^3 + (-2+2)h}{4+h^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 = Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2$$

Le schéma de Crank-Nicolson est donc symplectique.

3.4 Troisième approche : RK4

On étudie le schéma numérique Runge Kutta d'ordre 4 défini pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = u(t_0) \\ u_{n,1} = f(t_n, u_n) \\ u_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}u_{n,1}) \\ u_{n,3} = f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}u_{n,2}) \\ u_{n,4} = f(t_n + h, u_n + hu_{n,3}) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(u_{n,1} + 2u_{n,2} + 2u_{n,3} + u_{n,4}) \end{cases}$$

On a $\phi(t, x, y, h) = \frac{1}{6}(u_{n,1} + 2u_{n,2} + 2u_{n,3} + u_{n,4})$. Pour $h = 0$, on a $u_{n,1} = u_{n,2} = u_{n,3} = u_{n,4} = f(t_n, u_n)$, et donc $\phi(t, x, x, 0) = f(t, x)$. La méthode de Runge Kutta 4 est donc consistante et au moins d'ordre 1 d'après les théorèmes 7 et 8.

La démonstration permettant d'affirmer que la méthode Runge Kutta 4 est d'ordre 4 est assez fastidieuse. Pour gagner du temps, il est possible de se rapporter à un tableau dit de Butcher. On pourra se ramener à [1] pour plus de détails.

De par le caractère lipschitzien de f , le théorème 5 implique la stabilité du schéma, et donc sa convergence.

En considérant le système (5) : $Z_{n+1} = Z_n + h\phi_g(t_n, Z_n, Z_{n+1}, h)$, on peut montrer que $Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 = (1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576})(Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2)$ et donc que la méthode de Runge Kutta 4 n'est pas symplectique :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Z_{1,n+1} \\ Z_{2,n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{1,n} \\ Z_{2,n} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{h}{6} \left[\begin{pmatrix} Z_{2,n} \\ -Z_{1,n} \end{pmatrix} + 2 \left[\begin{pmatrix} Z_{2,n} \\ -Z_{1,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -Z_{1,n} \\ -Z_{2,n} \end{pmatrix} \right] \right. \\ &+ 2 \left[\begin{pmatrix} Z_{2,n} \\ -Z_{1,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} -Z_{1,n} \\ -Z_{2,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -Z_{2,n} \\ Z_{1,n} \end{pmatrix} \right] \right] \\ &+ \begin{pmatrix} Z_{2,n} \\ -Z_{1,n} \end{pmatrix} + h \left[\begin{pmatrix} -Z_{1,n} \\ -Z_{2,n} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} -Z_{2,n} \\ Z_{1,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} Z_{1,n} \\ Z_{2,n} \end{pmatrix} \right] \right] \right] \\ &= \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} \right] Z_{1,n} + \left[h - \frac{h^3}{6} \right] Z_{2,n} \\ - \left[h - \frac{h^3}{6} \right] Z_{1,n} + \left[1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} \right] Z_{2,n} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 &= (A^2 + B^2) (Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A^2 = \left[1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} \right]^2 \\ B^2 = \left[h - \frac{h^3}{6} \right]^2 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} A^2 = 1 - h^2 + \frac{h^4}{3} - \frac{h^6}{24} + \frac{h^8}{576} \\ B^2 = h^2 - \frac{h^4}{3} + \frac{h^6}{36} \end{cases} \\ \Rightarrow &A^2 + B^2 = 1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576} \end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$Z_{1,n+1}^2 + Z_{2,n+1}^2 = \left(1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576} \right) (Z_{1,n}^2 + Z_{2,n}^2)$$

Le schéma Runge Kutta 4 n'est pas symplectique.

3.5 Comparaison des schémas

Les trois méthodes étudiées se distinguent donc par leur ordre et par leur aspect symplectique ou non. On récapitule ces critères dans le tableau suivant :

Schéma numérique	Ordre	Coefficient « symplectique »
Euler explicite	1	$1 + h^2$
Crank-Nicolson	2	1
Runge Kutta 4	4	$1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^8}{576}$

De l'ordre des schémas, on déduit que la méthode de Runge Kutta 4 converge plus vite vers la solution que la méthode de Crank-Nicolson, qui elle-même converge plus rapidement que la méthode d'Euler explicite.

D'autre part seule la méthode de Crank-Nicolson est symplectique. La méthode de Runge Kutta 4 présente néanmoins un coefficient « symplectique » qui converge relativement vite vers 1 quand $h \rightarrow 0$ en comparaison avec le schéma Euler explicite. Runge Kutta 4 trahit donc moins le caractère périodique des solutions des équations (5) qu'Euler explicite.

Enfin, on remarque que pour tout $h > 0$, le coefficient « symplectique » du schéma Euler explicite est strictement supérieur à 1. On s'attend donc à ce que la courbe de la solution numérique de (5) soit une spirale s'éloignant de son centre. C'est également le cas pour la méthode de Runge Kutta 4 pour $h > 2\sqrt{2} \approx 2,82843$. Pour $h < 2\sqrt{2}$, le coefficient « symplectique » de ce schéma est strictement inférieur à 1, donc on s'attend plutôt à ce que la spirale se rapproche du point d'équilibre stable.

Au final, on préférera utiliser le schéma de Crank-Nicolson pour sa plus grande fidélité quant à la propriété de périodicité des solutions exactes et sa convergence relativement rapide vers la solution. Pour une discrétisation suffisamment importante de l'intervalle de résolution, le schéma de Runge Kutta 4 reste également une bonne option, préférable à la méthode Euler explicite.

Toutes ces conclusions peuvent être confrontées aux courbes données en annexe.

4 Conclusion

4.1 Retour au problème de Vito Volterra

On va voir dans ce qui suit que les équations de Lotka-Volterra permettent de comprendre le problème auquel a été confronté Vito Volterra. Pour rappel, il s'agissait d'expliquer pourquoi, alors que l'activité de pêche était ralentie au cours de la Première Guerre Mondiale, la population de poissons habituellement pêchés a diminué tandis que la population de prédateurs a augmenté.

On exprime pour cela le nombre moyen de proies et de prédateurs dans le temps pour $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, x_0, y_0$ donnés, avec \mathcal{T} la période :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{T}} x(t) dt = \frac{1}{\sigma \mathcal{T}} \int_{\mathcal{T}} \left(\frac{y'(t)}{y(t)} - \gamma \right) dt \\ &= \frac{1}{\sigma \mathcal{T}} [\ln(y(t)) + \gamma t]_0^{\mathcal{T}} \\ &= \frac{1}{\sigma \mathcal{T}} \left(\ln \left(\frac{y(\mathcal{T})}{y(0)} \right) + \gamma \mathcal{T} \right) \\ &= \frac{\gamma}{\sigma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{T}} y(t) dt = \frac{1}{\beta \mathcal{T}} \int_{\mathcal{T}} \left(\alpha - \frac{x'(t)}{x(t)} \right) dt \\ &= \frac{1}{\beta \mathcal{T}} [\alpha t - \ln(x(t))]_0^{\mathcal{T}} \\ &= \frac{1}{\beta \mathcal{T}} \left(\alpha \mathcal{T} - \ln \left(\frac{x(\mathcal{T})}{x(0)} \right) \right) \\ &= \frac{\alpha}{\beta}\end{aligned}$$

En moyenne, il y a donc $\frac{\gamma}{\sigma}$ proies et $\frac{\alpha}{\beta}$ prédateurs.

On se replace dans le contexte historique : durant la guerre, la pêche était moins intense, d'où une prédation amoindrie de la part de l'Homme, et donc de tous les prédateurs confondus. Si on note β le coefficient de prédation avant la guerre et $\hat{\beta}$ ce même coefficient pendant la guerre, on a $\beta > \hat{\beta}$. D'autre part, les prédateurs « naturels » (poissons cartilagineux) étant moins concurrencés

par l'Homme, ils pouvaient se reproduire plus facilement. Si on note σ et $\hat{\sigma}$ les coefficients de reproduction des prédateurs par proie rencontrée, respectivement avant et pendant la guerre, on a $\sigma < \hat{\sigma}$. A priori, les autres coefficients α et γ n'ont pas été impactés par la guerre.

Finalement, en notant \bar{x} et \bar{y} la moyenne des proies et des prédateurs avant la guerre, et \hat{x} et \hat{y} ces mêmes quantités pendant la guerre, il vient :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{\gamma}{\hat{\sigma}} < \frac{\gamma}{\sigma} = \bar{x} \\ \hat{y} &= \frac{\alpha}{\hat{\beta}} > \frac{\alpha}{\beta} = \bar{y}\end{aligned}$$

Grâce aux équations de Lotka-Volterra, on retrouve bien une augmentation moyenne de la population de prédateurs ainsi qu'une diminution moyenne de la population de proies.

4.2 Les limites du modèle

Si les équations de Lotka-Volterra permettent de représenter l'évolution d'un système proie-prédateur, il ne faut pas oublier qu'elles se basent sur modèle et que, comme tout modèle, les hypothèses de simplification faites impliquent des incohérences.

Notamment, si l'on se place dans le cas d'une condition initiale où le nombre de proies est très faible, on se doute fort que cette population est vouée à disparaître, tandis que la théorie fondée sur les équations de Lotka-Volterra nous dit que le nombre de proies ne peut pas devenir nul.

Par ailleurs, si l'on suppose un moment que le coefficient de prédation est nul — les prédateurs n'interagissent pas avec les proies, l'équation régissant l'évolution des proies d'après Lotka-Volterra est $x' = \alpha x$, et donc leur population connaît une croissance exponentielle. Cela est impossible dans la réalité, et ce pour plusieurs raisons : les ressources sont limitées sur Terre, ou encore la qualité de vie des proies se dégrade au fur et à mesure que leur nombre augmente. Pour palier à ce problème, on pourra par exemple remplacer α par $\alpha \left(1 - \frac{x}{x_{\max}}\right)$ avec x_{\max} la proportion maximale théorique X/X_0 d'individus que peut admettre la population, avec X_0 fixé.

A Courbes obtenues

Toutes les courbes présentées dans cette partie ont été obtenues grâce à des programmes écrits en C et interfacés avec gnuplot. On les accompagnera de commentaires qui permettront de mettre en relief les résultats théoriques obtenus dans les parties précédentes.

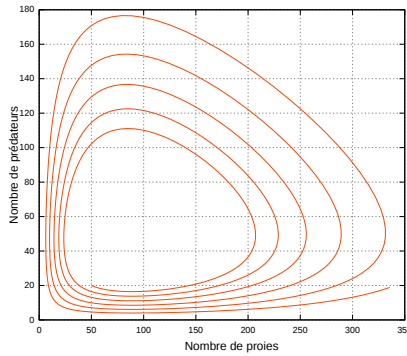
Pour pouvoir comparer les courbes, on approchera à chaque fois la solution sur l'intervalle de temps $[0, T]$ avec $T = 35$ unités de temps. Les paramètres indiqués ci-dessous ont été utilisés pour chaque schéma numérique :

Paramètre	α	β	γ	σ	$x(t = 0)$	$y(t = 0)$
Valeur	1.2	0.025	1.05	0.012	50	20

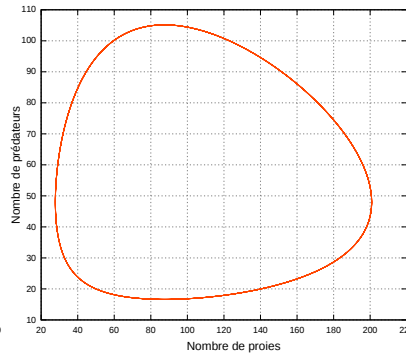
A.1 Evolution des prédateurs en fonction des proies

Dans cette section, on s'intéresse à l'approximation de l'évolution du nombre de prédateurs en fonction du nombre de proies. Dans les pages qui suivent, on étudie quatre niveaux de discrétisation différents : $N = 1\,000$, $N = 10\,000$, $N = 100\,000$ et $N = 100$.

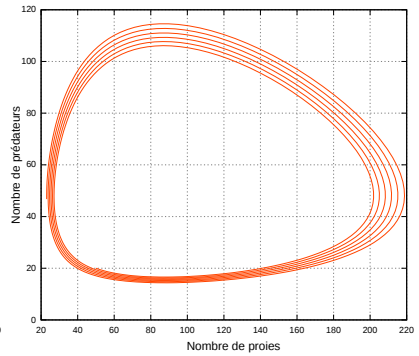
— Faible nombre de points —
 $N = 1\,000$, $h = 0.035000$



Euler explicite

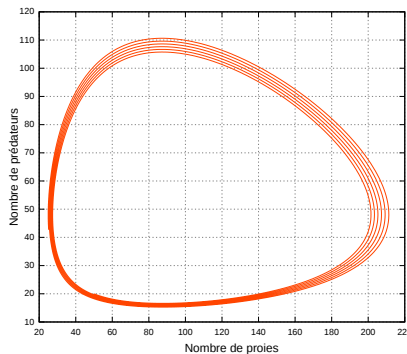


Crank-Nicolson

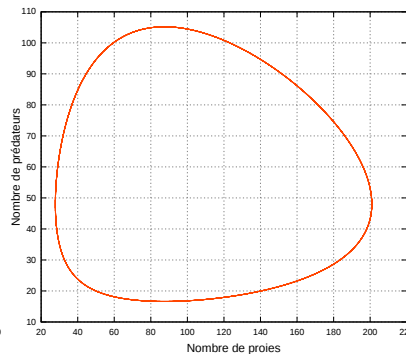


Runge Kutta 4

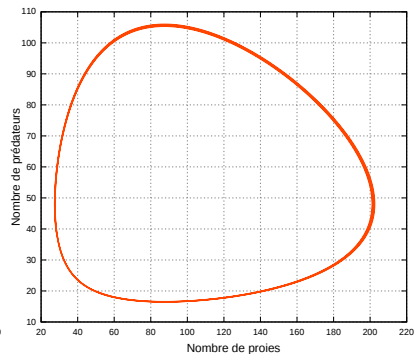
— Nombre intermédiaire de points —
 $N = 10\,000$, $h = 0.003500$



Euler explicite

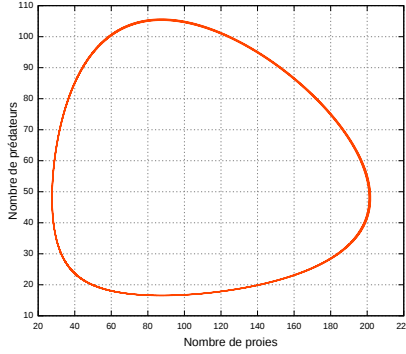


Crank-Nicolson

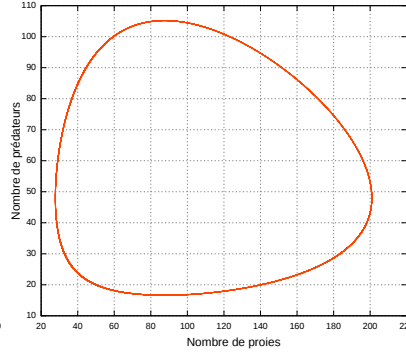


Runge Kutta 4

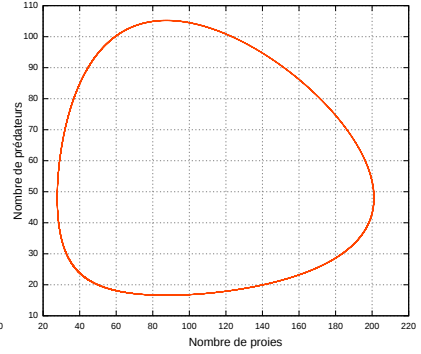
— **Grand nombre de points** —
 $N = 100\,000$, $h = 0.000350$



Euler explicite

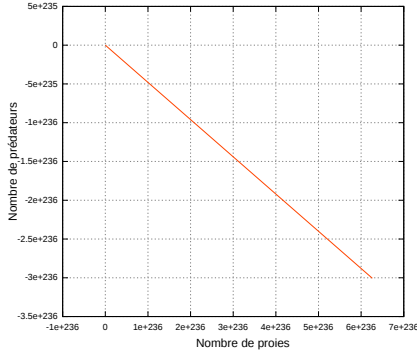


Crank-Nicolson

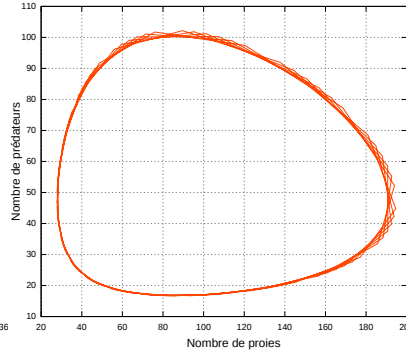


Runge Kutta 4

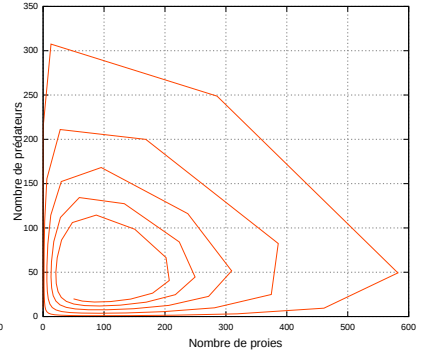
— **Très faible nombre de points** —
 $N = 100$, $h = 0.350000$



Euler explicite



Crank-Nicolson



Runge Kutta 4

— **Commentaires** —

Faible nombre de points — Dès $N = 1\,000$, le schéma de Crank-Nicolson semble respecter la périodicité puisque la courbe tracée est fermée. Ce n'est pas le cas des deux autres méthodes, pour lesquelles le graphe n'est clairement pas périodique. On remarquera quand même que le graphe obtenu par la méthode de Runge Kutta 4 s'éloigne moins vite de la solution que celui obtenu avec la méthode d'Euler explicite.

Nombre intermédiaire de points — Pour $N = 10\,000$, les schémas d'Euler explicite et de Runge Kutta 4 ne sont pas périodiques, mais s'éloignent moins vite de la solution que pour $N = 1\,000$. Le schéma de Crank-Nicolson donne un résultat similaire au cas $N = 1\,000$, ce qui met en évidence l'efficacité de cette méthode.

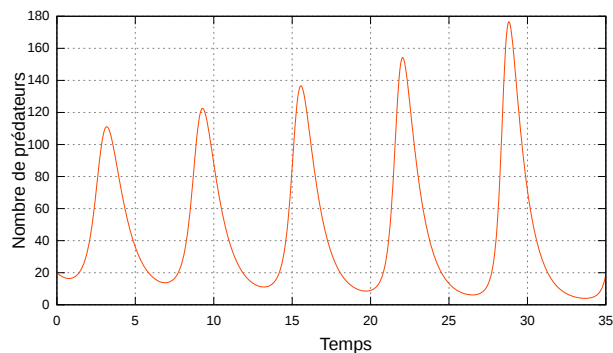
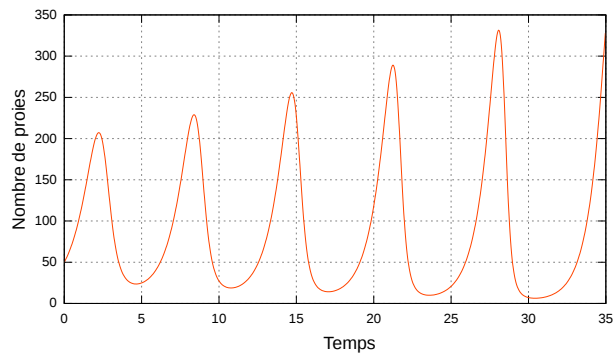
Grand nombre de points — Pour $N = 100\,000$, les graphes obtenus par les méthodes de Crank-Nicolson et de Runge Kutta 4 sont très proches, et ce en dépit du fait que Runge Kutta 4 est en théorie non périodique contrairement à Crank-Nicolson. Quant à lui, le schéma d'Euler explicite s'éloigne toujours significativement de la solution, comme en témoigne l'épaisseur du trait.

Très faible nombre de points — Pour tester l'efficacité du schéma Crank-Nicolson, on se place dans des conditions quelque peu extrêmes en choisissant un nombre de points très faible : $N = 100$. On remarque que le graphique obtenu oscille (il n'y a pas périodicité), mais il ne s'éloigne pas trop de la solution exacte. En revanche, Euler explicite et Runge Kutta 4 divergent rapidement voire très rapidement.

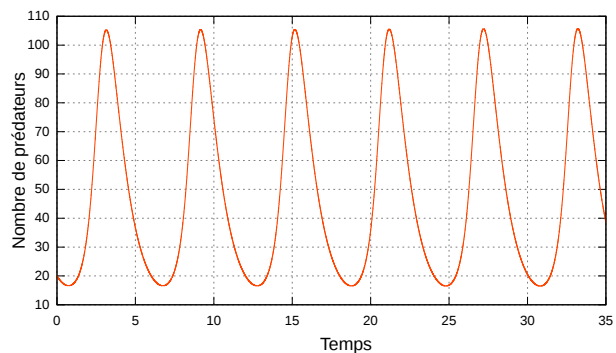
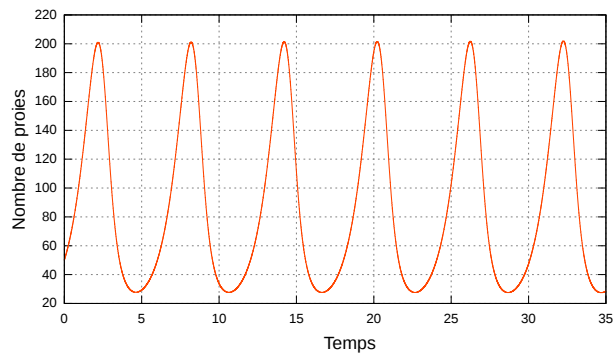
A.2 Evolution des proies et des prédateurs en fonction du temps

On reprend les mêmes paramètres que dans la partie précédente, mais on trace cette fois le nombre de proies et le nombre de prédateurs en fonction du temps.

— Euler explicite —

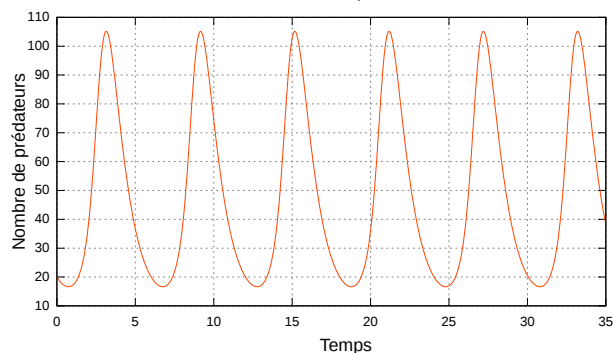
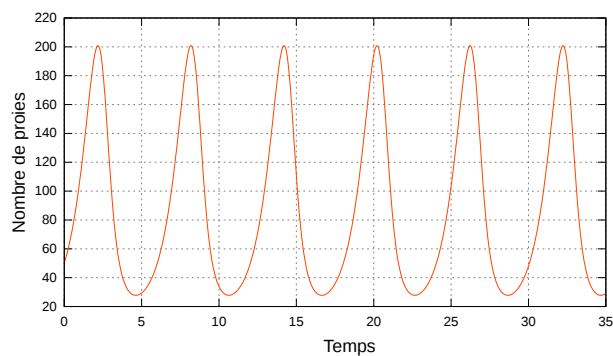


$N = 1\,000$, $h = 0.035000$

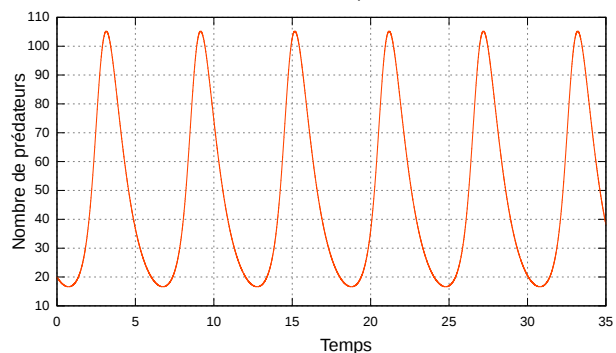
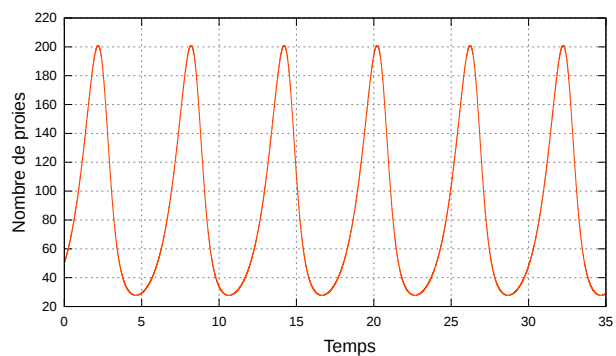


$N = 100\,000$, $h = 0.000350$

— Crank-Nicolson —

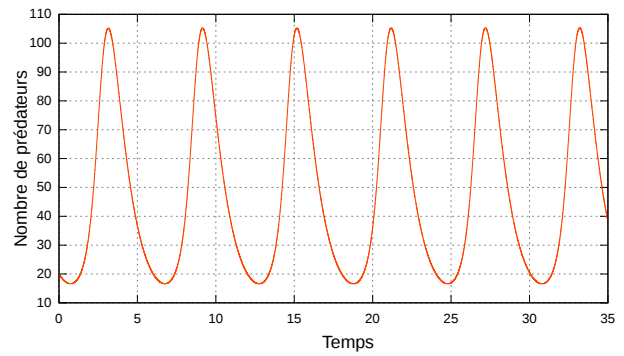
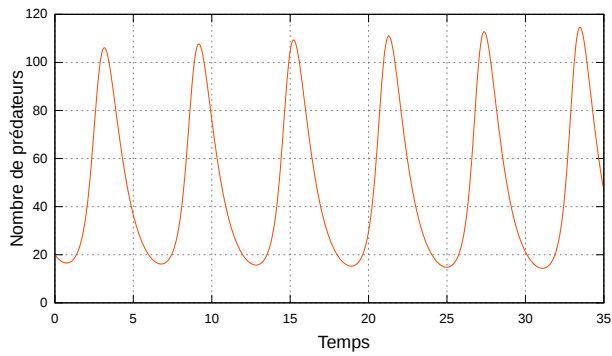
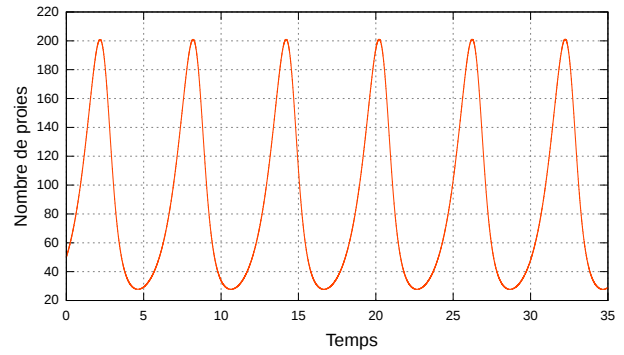
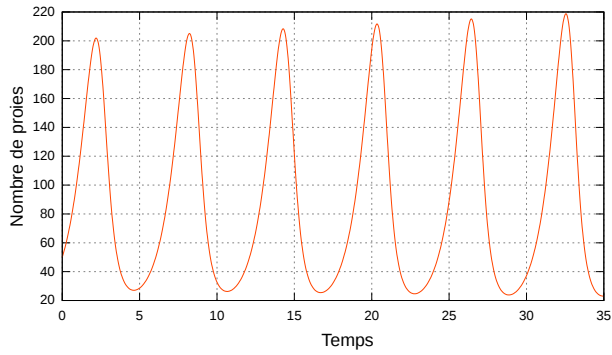


$N = 1\,000$, $h = 0.035000$



$N = 100\,000$, $h = 0.000350$

— Runge Kutta 4 —



$N = 1\,000, h = 0.035000$

$N = 100\,000, h = 0.000350$

Bibliographie

- [1] J.-P. DEMAILLY. *Analyse Numérique et Equations Différentielles*. EDP Sciences, 17, avenue du Hoggar, Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112, 91944 Les Ulis Cedex A - France, nouvelle édition edition, 2006.
- [2] G. VIAL. *Système proie-prédateur de Lotka-Volterra*. Cours disponible au format pdf à l'adresse <http://w3.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/gregory.vial/files/cplts/volterra.pdf>, 2011.
- [3] L. WEBER. *A Contribution To Goodwin's Growth Cycle Model From A System Dynamics Perspective*. Cours disponible au format pdf à l'adresse <http://www.systemdynamics.org/conferences/2005/proceed/papers/WEBER196.pdf>.