Gliederung Vertiefungsseminar MI

Matthias Kemmer, Julius Hackel, Markus Bullmann, Stefan Gerasch

3. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

1.1 Prinzip der FM-Synthese 2

1.2 Beispiele 3

1.3 Geschichte der FM-Synthese 4

2 Technisches und Formeln **7**

2.1 Grundlegende Erläuterungen 7

2.1.1 Auffrischung: Sinus- und Kosinusfunktion mit Parametern 7

2.1.2 Erklärung: Parameter der FM-Synthese nach Chowning 9

2.2 Besonderheiten der FM-Synthese 10

2.2.1 Phasenmodulation als FM 10

2.2.2 Seitenfrequenzbänder (Evtl. Besselfunktion) 13

2.2.3 Harmonische Frequenzverhältnisse(Inkl. Vibrato) 13

2.3 Einfache vs. komplexe FM Synthese 13

2.3.1 Kaskadenschaltung 13

2.3.2 Parallelschaltung 13

2.3.3 FM8 - Demo (Auf ADSR/Filter eingehen) 13

2.4 Praktische Anwendung der FM-Synthese 13

2.4.1 Nachbildung eines Instruments 13

2.4.2 Modulationsframework (Theorie -¿ Praxis) 14

2.4.3 Demo: Parameter und Effekte - Grafiken (evtl. Plotten) 14

3 Praxis **14**

3.1 Do-It-Yourself (Projekt hochladen, Kopfhörer!) 14

4 Fazit **14**

1 Einführung

1.1 Prinzip der FM-Synthese

Die FM Synthese ist eine für die Musikwelt sehr wichtige Anwendung der Frequenzmodulation, welche bereits aus der Nachrichtentechnik bekannt ist. Generell wird dabei die Frequenz eines Trägersignals durch ein weiteres Modulationssignal verändert, die Amplitude bleibt jedoch unangetastet. In der Nachrichtentechnik können durch die unterschiedlichen Frequenzen im modulierten Trägersignal Informationen übertragen werden.

Die momentane Amplitude des modulierten Signals lässt sich durch folgende Formel beschreiben:

$$e(t) = A \sin(\alpha t + I \sin(\beta t))\text{[Cho73]}$$

Bei der äußeren Sinusfunktion handelt es sich um das Trägersignal, welches in seiner Frequenz durch das Modulationssignal (Innerer Sinus) moduliert wird.

Abbildung 1 veranschaulicht die Frequenzmodulation eines Signals durch ein zweites Signal.

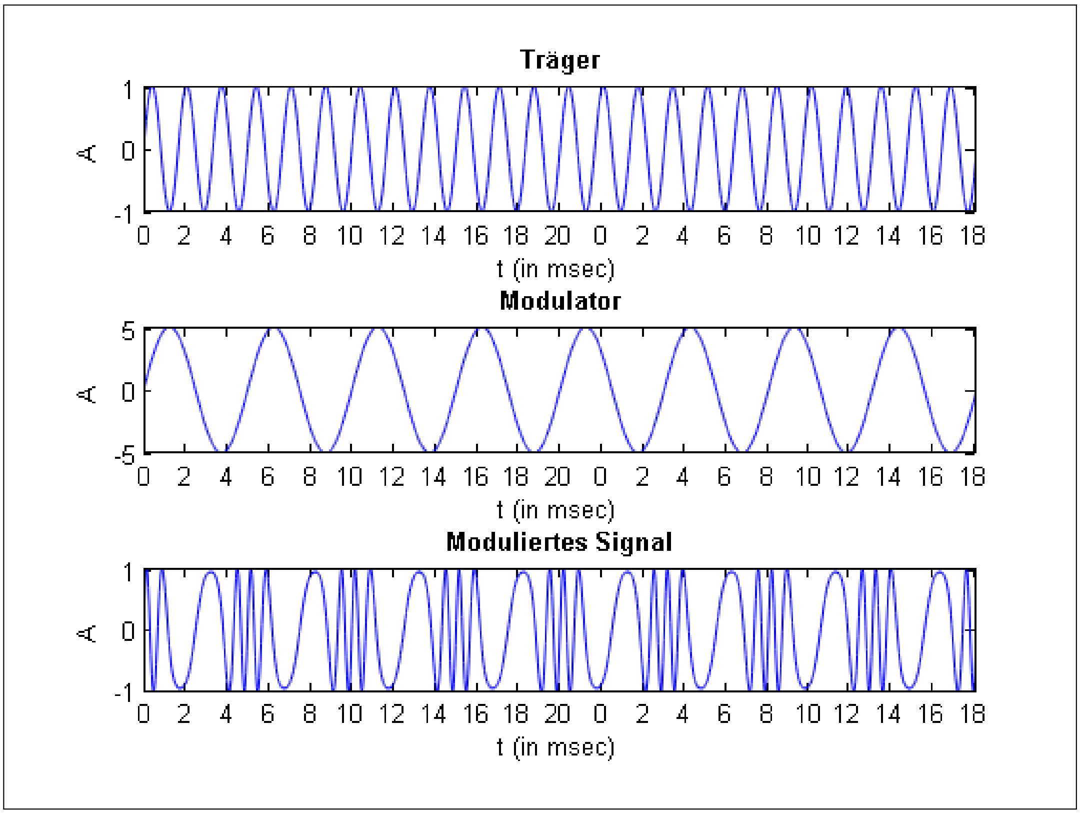

Abbildung 1: Vergleich Träger/Modulator
Quelle: Eigene Darstellung mit Matlab

Die Frequenzmodulationssynthese ist in ihren Grundzügen recht einfach zu verstehen und man kann mit geringem Aufwand bereits sehr komplexe, wenn auch oft unkontrollierbare Signale mit komplexen Klangspektren (bzw. Frequenzspektren) erzeugen. Wie sich im Folgenden jedoch noch herausstellen wird, ist es dagegen sehr schwierig und erfordert viel Zeit und Aufwand, durch die FM-Synthese gezielt Signale zu erzeugen und diese zu kontrollieren.

Praktisch gesehen kann die Frequenzmodulations-Synthese dazu verwendet werden, um zum Einen Klangbilder echter Instrumente digital nachzubilden, jedoch auch, um ganz neue Töne zu erzeugen, die so in der realen Welt nicht vorkommen.

1.2 Beispiele

In diesem Kapitel werden einige konkrete Beispiele der FM-Synthese anhand von Träger- und Modulationsfunktion sowie der daraus resultierenden Funktion aufgezeigt. Die Grafiken zeigen jeweils Plots von allen drei Signalen, welche mit Matlab erzeugt wurden. Die Frequenzen der Träger- und Modulationsfunktion wurden so gewählt, dass sie in einem Frequenzbereich liegen, der vom menschlichen Ohr wargenommen werden kann. (Siehe Kapitel "Menschliches Ohr").

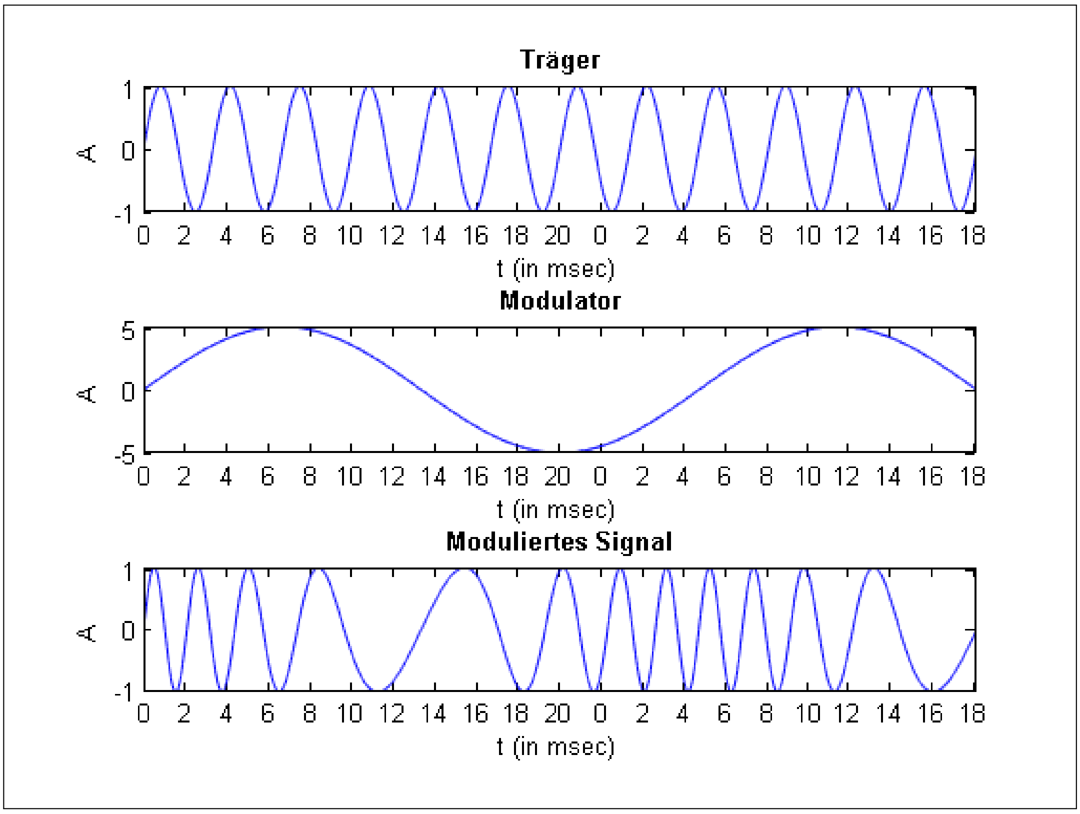

Abbildung 2: Beispiel 1
Quelle: Eigene Darstellung mit Matlab

In Beispiel 1 (siehe Abbildung 2) wurden folgende Signale verwendet:

Trägersignal:	$y(t) = \sin(2\pi 600 * t)$
Modulator:	$y(t) = 5\sin(2\pi 75 * t)$
Gesamtfunktion:	$y(t) = \sin(2\pi 600 * t + 5\sin(2\pi 75 * t))$

Konkrete Bedeutung der Werte: Die Trägerfrequenz von 600 Hz bedeutet, dass die Trägerfunktion 600 mal pro Sekunde schwingt, d.h. eine Periode ist genau $\frac{1}{600}$ Sekunden lang. Der Modulator hat eine Frequenz von 75 Hz, wodurch er 75 Schwingung pro Sekunde macht und eine Periode dann $\frac{1}{75}$ Sekunden lang ist. Für die Modulation gilt im Allgemeinen, dass der sogenannte Frequenzhub der Modulation (Erklärung siehe Kapitel "Technisches und Formeln") immer dann Maximal ist (in positiver oder negativer Richtung), wenn die Änderung der Modulationsfunktion (also deren

Steigung) ihr Maximum bzw. Minimum hat. In der Grafik ist das immer dann der Fall, wenn der Modulatur den Funktionswert 0 hat.

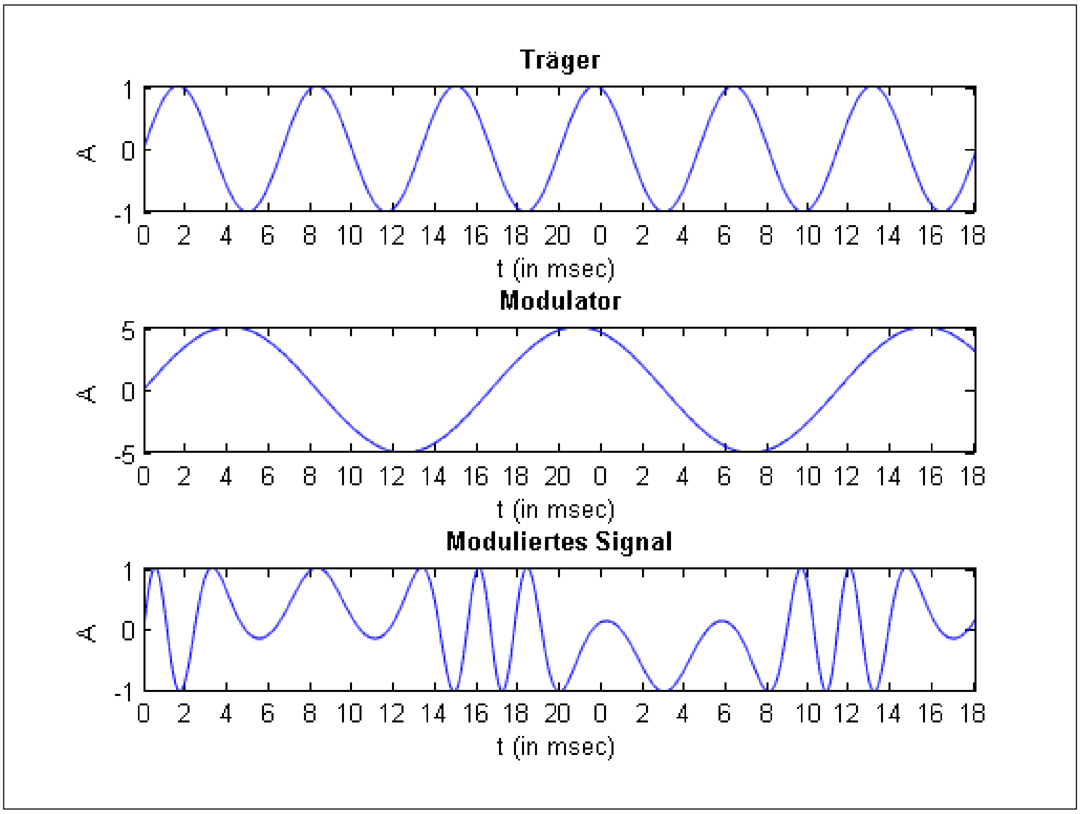

Abbildung 3: Beispiel 2
Quelle: Eigene Darstellung mit Matlab

Das zweite Beispiel in Abbildung 3 zeigt eine Frequenzmodulation, bei der sich auch die Amplitude des Signals ändert. Dies geschieht rein durch die Phasenverschiebung des äußeren Sinus durch den Modulator, die tatsächliche Amplitude der Funktion bleibt dabei unangetastet. Der Träger hat in diesem Beispiel eine Frequenz von 300 Hz, der Modulator 120 Hz. Der Modulationsindex beträgt wieder 5. Die Formel des Modulierten Signals sieht wie folgt aus:

$$y(t) = \sin(2\pi 300 * t + 5\sin(2\pi 120 * t))$$

An diesem Beispiel kann man sehr gut erkennen, dass die FM-Synthese mit wenig Aufwandt komplexe Signale erzeugen kann, diese jedoch schlecht kontrollierbar bzw. erklärbar sind.

Als gute akustische Beispiele für die Anwendung der FM-Synthese in der Musikwelt können die Stücke "Sabelith" und "Turenas" von John Chowning selbst genannt werden. Beide Stücke wurden ausschließlich mit FM-Synthese erzeugt und beinhalten viele verschiedene Klangarten sowie Instrumente.

1.3 Geschichte der FM-Synthese

Die Grundlegende Technik hinter der FM-Synthese stammt, wie bereits erwähnt, aus der Nachrichtentechnik. Dort wird das Verfahren "Frequenzmodulation" genannt. Prof. Dr. John Chowning selbst gibt als Quelle zu seiner Entdeckung das Buch "Radio Engineering" von Frederick

Emmons Terman aus dem Jahre 1947 an [Nel15, s. xy]. Im Jahr 1967 entdeckte John Chowning eine neue Eigenschaft der Frequenzmodulation. Während er mit unterschiedlichen Modulationsfrequenzen experimentierte und dabei verschiedene Vibrato erzeugte (unter Vibrato versteht man einen schwingenden Ton, d.h. eine pulsierende Änderung des Tons), verschwand der Vibrato plötzlich bei höheren Modulationsfrequenzen und Obertöne wurden hörbar, die sich vom eigentlichen Trägersignal abhebten.[Cro15]

Chowning selbst war sehr erstaunt über die entstandenen Töne. In einem Interview von 2005 sagte er dazu:

"I was experimenting with just a sinusoid and kept increasing the vibrato rate, so all of a sudden it didn't sound like listening to a change in pitch in time, but rather i began to hear timbral differences. So the vibratio became very, very fast, hundreds of times per second, and very, very deep, as if the violinist had a different fingerboard, and the finger was whipping up and down at very high rates and very great distances. That would be sort of a physical metaphor for this."[Nel15, s. xy]

Es dauerte weitere 3 Jahre, bis Chowning die mathematischen Zusammenhänge hinter seiner Entdeckung vollständig ergründet hatte. Bis dahin war er außerdem bereits in der Lage, verschiedene Instrumente wie Trommeln oder Blasinstrumente nachzubilden. Da Chowning selbst leidenschaftlicher Komponist war, veröffentlichte er im Jahre 1971 sein erstes, rein durch FM-Synthese generiertes Stück mit dem namen "Sabelithe". Sein zweites Stück, "Turenas',' folgte ein Jahr später. Um die Stärken seiner neuen Technik zu demonstrieren, verwandelt Chowning beispielsweise in "Sabelithe" den Klang einer Trommel in den einer Trompete.[Nel15, s. xy]

Abbildung 4: John Chowning am CCRMA
Quelle: `http://arts.mit.edu/wp-content/uploads/2014/07/ChowningYamaha.jpg`

Da Prof. Chowning seine Entdeckung nicht auf eigenes Risiko hin patentieren lassen wollte, lies er dies durch das OTL (Stanford Office of Technology Licensing) durchführen. Er selbst sagte dazu:

"I didn't want to deal with lawyers — I wanted to do my music. I didn't care about the money as much as I cared for my compositions. It was natural for me to say, 'Please take it.' "[Cro15]

Seine neue Entdeckung war jedoch zu Beginn nicht sehr angesehen und auch viele der Firmen, welchen das neue Patent angeboten wurde, wussten nichts damit anzufangen und lehnten ab. Andy Moorer, ein Kollege Chownings in Stanford und später Mitgründer des CCRMA, sagte dazu: "[...] It was really discouraging. John was so proud of having put this damn thing together and people didn't really get he idea of spatializing the sound."[Nel15, s. xy]

Offiziell veröffentlichte John Chowning seine neue Entdeckung der Frequenzmodulations-Synthese in einem Paper, welches 1973 im "Journal of the Audio Engineering Society" unter dem Titel "The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequenzy Modulation" erschien.

Erst im Jahr 1974, als ein junger Ingeneur namens Kazukiyo Ishimura von der Firma Yamaha zu einer Vorstellung des Verfahren geschickt wurde, erkannte dieser binner wenigen Minuten, welches Potenzial hinter dieser neuen Anwendung der Frequentmodulation steckt. Yamaha Lizensierte das Verfahren noch im gleichen Jahr. Ishimura wurde später Chef des Yamaha Konzerns [Cro15].

Im Jahr 1975, nach einiger Zeit Abwesenheit von Stanford, kehrte Chowning dorthin zurück und gründete zusammen mit einigen seiner Kollegen das CCRMA (Center for Computer Research in Music and Acoustics), welches sich auf Computermusik spezialisiert hat. Eine Fotografie der Gründer von CCRMA ist auf Abbildung 5 zu sehen.

Abbildung 5: Gründer von CCRMA. Stehend von Links nach rechts: Leland Smith, John Grea, John Chowning und Loren Rush. Sitzend: Andy Moorer.
Quelle: [Nel15] - Abbildung 4.1

Nachdem Yamaha die Technik der FM-Synthese lizenziert hatte, brachten die Firma nach einem Prototypen im Jahre 1980 den ersten digitalen FM-Synthesizer GS1 und zwei Jahre später mit dem GS2 eine kleinere und handlichere Version des GS1 heraus. Die Geräte kosteten um die 30.000 DM für den GS1 bzw. 16.000 DM für den GS2 und waren deshalb nur für ausgewählte Musiker gedacht. Der Durchbruch gelang im Jahre 1983 mit dem DX7. Dieser konnte parallel 16 Stimmen verarbeiten und kostete ca. 4.700 DM. Preislich ähnliche und damals übliche analoge subtraktive Synthesizer konnten lediglich 4 Stimmen verarbeiten [Fie01]. Ein Bild des DX7 ist in Abbildung 6 zu sehen.

Abbildung 6: Yamaha DX7
Quelle: `http://www.electricdruid.net/images/interface/larger/YamahaDX7.jpg`

Durch den großen Erfolg des DX7 konnte Yamaha in den nachfolgenden Jahren viele Weiterentwicklungen auf den Markt bringen. In den Jahren 1983 bis 1989 brachte Yamaha über 20 weitere digitale Synthesizer heraus. Über die Zeit wurden jedoch andere Syntheseverfahren günstiger und für den Markt besser geeignet, weshalb Yamaha 1990 mit dem SY77 Synthesizer ein Gerät entwickelte, das FM-Synthese und ein anderes digitales Klangsyntheseverfahren namens Sampling in einem vereinte.[Fie01]

Ab Mitte der 1990er wurden Personal Computer leistungsfähig genug, um Synthesizer ohne Verzögerung durch eine Midi Tastatur ansprechbar zu machen. Heutzutage findet digitale Audioverarbeitung nahezu ausschließlich softwareseitig statt, weshalb Hardwaresynthesizer wie der DX7 an Bedeutung verloren haben. Speziell dieser wurde jedoch durch die Firma Native Instruments in Form des FM7 und dessen Weiterentwicklung, dem FM8, in Software nachgebaut und findet heute noch Verwendung. Auch ist der DX7 heute bei Nostalgikern noch sehr beliebt.[Fie01]

2 Technisches und Formeln

2.1 Grundlegende Erläuterungen

2.1.1 Auffrischung: Sinus- und Kosinusfunktion mit Parametern

Die einfachste Form eines Tons lässt sich durch eine Sinus- oder Kosinusschwingung beschreiben. Dabei handelt es sich mathematisch gesehen um eine Sinus- oder eine Kosinusfunktion. Beide gehören zu den trigonometrischen Funktionen, auch Winkelfunktionen genannt. Damit einige später folgende mathematische und für die FM-Synthese erforderliche Berechnungen besser verstanden werden können, wird hier kurz auf die Grundlagen zu Sinus- und Kosinus Funktionen eingegangen.

Sinus und Kosinus sind periodische Funktionen, d.h. die Funktionswerte wiederholen sich nach einer sogenannten Periode. Mathematisch ausgedrückt muss es dafür eine konstante p geben, für die bei einem beliebigen x gilt: $f(x+p) = f(x)$.

Am besten verdeutlichen kann man dies anhand des Einheitskreises. Abbildung 7 zeigt, wie sich Sinus und Kosinus aus den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks im Einheitskreis berechnen lassen:

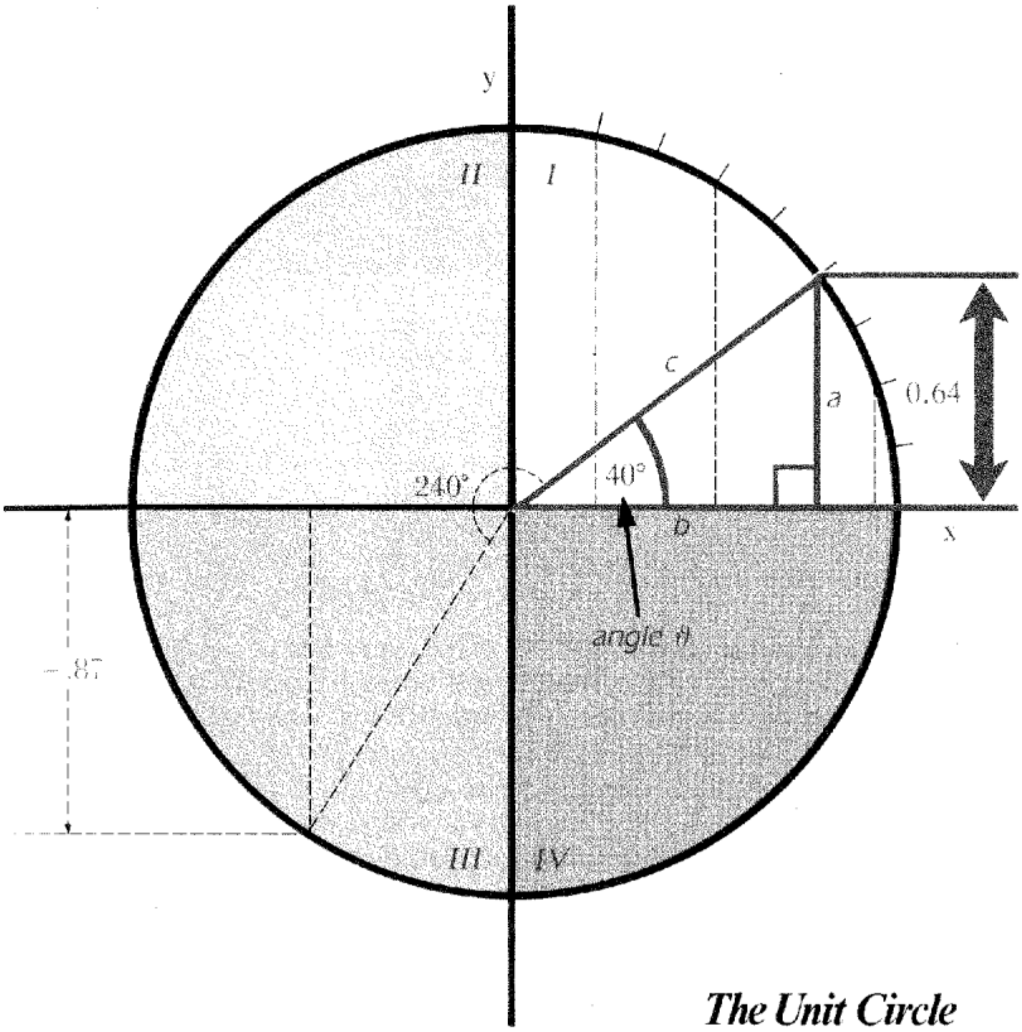

Abbildung 7: Der Einheitskreis
Quelle: [CB86] - Fig. 2.6

Dabei gilt:

$\sin(\pi) = \frac{\text{gegenüberliegende Seite}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$, wobei die Hypotenuse im Einheitskreis eine Länge von 1 hat.

$\rightarrow \sin(\pi) = \frac{a}{1} = a$.

$\cos(\pi) = \frac{\text{anliegende Seite}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b$ [CB86, s. 22 - 27]

Der aktuelle Winkel im Einheitskreis kann auch im sogenannten Bogenmaß angegeben werden. Das Bogenmaß beschreibt, wie weit man den Bogen des Einheitskreises im Uhrzeigersinn abgelaufen ist. Dabei ist π die sogenannte Kreiszahl und ein Bogenmaß von 2π gibt eine ganze Umdrehung im Einheitskreis an bzw. π dann eine halbe Umdrehung. Um nun auf eine Sinusfunktion überzuleiten, muss das Bogenmaß in Abhängigkeit von der Zeit t angegeben werden, die Formel lautet

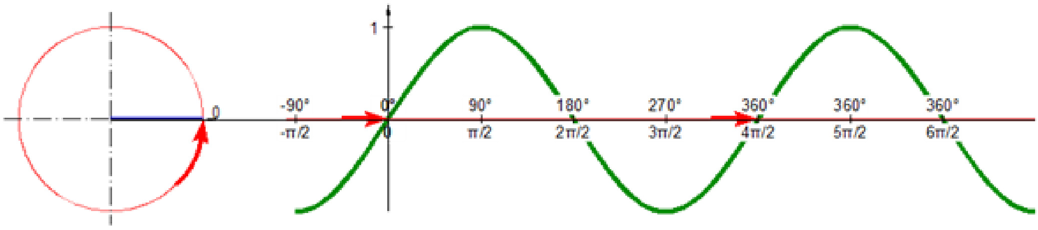

Abbildung 8: Vom Einheitskreis zum Sinus
Quelle: `http://www.ulrich-rapp.de/stoff/mathematik/Sinus_Einheitskreis.gif`

also dann $\sin(2\pi * t)$. Damit festgelegt werden kann, wie oft der Einheitskreis in einer Sekunde abgelaufen wird, multipliziert man das Bogenmaß 2π mit dem Faktor f. Dabei entspricht f der Frequenz der Funktion, also wie viele Schwingungen in einer Sekunde durchlaufen werden. Der Wert $2\pi * f$ wird auch als Kreisfrequenz bezeichnet. Man spricht bei Sinus- und Kosinusfunktion auch von Winkelfunktionen, denn man kann den Funktionswert der Funktion auch anhand des Winkels (in Bogenmaß) im Einheitskreis angeben. Eine Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen dem Einheitskreis und der Sinusfunktion zeigt Abbildung 8.

Der Unterschied von der Kosinusfunktion zur Sinusfunktion ist, dass der Kosinus bei dem Funktionswert 1 beginnt und Sinus bei Funktionswert 0. Aus diesem Zusammenhang lassen sich folgende Beziehungen (Auch: Komplementärformeln) zwischen Sinus und Kosinus feststellen:

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$

[Sti81, s. 218]

Überträgt man diese mathematischen Erkenntnisse nun auf einen Ton, so kann man dessen Funktion wie folgt beschreiben: $y(t) = y_0 * \sin(2\pi f * t)$

Um 90°oder $\frac{\pi}{2}$ verschoben gilt: $y(t) = y_0 * \cos(2\pi f * t)$

Bei y_0 handelt es sich um die Amplitude des Tons, also dessen Lautstärke. Alle Funktionswerte der Funktion werden mit diesem Faktor multipliziert und dadurch größer oder kleiner.

F ist wie oben bereits beschrieben die Frequenz des Tons. Sie gibt die Anzahl der Schwingungen (Perioden) pro Sekunde an und wird in $f = \frac{1}{T}$ angegeben, wobei T die Periodendauer ist. Die Einheit ist Hertz(Hz). Je größer die Frequenz eines Tones ist, desto höher klingt er für das Ohr.

Physikalisch gesehen ist ein Ton eine periodische Änderung des Luftdruckt, also Luftmoleküle die um ihre Ruhelage in Schwingung versetzt werden[**?**]. Als Medium kann jedoch auch etwas anderer als Luft dienen, zum Beispiel Wasser.

Für das menschliche Ohr hören sich Sinus- und Cosinusschwingungen gleich an, da diese lediglich um $\frac{1}{4}$ der Periode verschoben sind.

2.1.2 Erklärung: Parameter der FM-Synthese nach Chowning

In diesem Kapitel wird auf die unterschiedlichen Parameter eingegangen, welche in der Formel der einfachen Frequenzmodulation von John Chowning vorkommen. Zudem wird deren Funktion im Einzelnen beschrieben.

Die Parameter werden mit der Gleichung in Sinus-Darstellung vorgestellt, d.h. Trägersignal und Modulator sind Sinusfunktionen. Dieselbe Erklärung funktioniert jedoch analog dazu auch mit

Cosinus-Funktionen für den Träger und den Modulator. Die Gleichung für eine frequenzmodulierte Welle lautet wie folgt:

$$e(t) = Asin(\alpha t + Isin(\beta t))$$

− $e(t)$ beschreibt die Amplitude des Modulierten Signals zum Zeitpunkt t
− A stellt die höchste Amplitude des modulierten Signals dar
− α ist die Kreisfrequenz des Trägersignals in $\frac{1}{s}$
− β ist die Kreisfrequenz des Modulators in $\frac{1}{s}$
− I stellt den Modulationsindex dar. Dieser setzt sich wie folgt zusammen: $I = \frac{d}{m}$ mit:
→ d: Frequenzhub der Modulation, d.h. der größte momentane Unterschied zwischen der Frequenz des Trägers und der des modulierten Signals
Auch: Frequenzänderung, welche durch die Modulation der Trägerfrequenz verursacht wird
→ m: Kreisfrequenz des Modulators

[Cho73]

Der Modulationsindex beschreibt also das Verhältnis des Frequenzhubs zur Modulationsfrequenz. Man kann anhand der Formel bereits erkennen, dass bei einem Modulationsindex von 0 keine Modulation stattfindet. Dabei wird der Frequenzhub der Modulation auch gleich 0, da $I = \frac{d}{m}$ und somit $d = 0 * m = 0$ gilt.

$$e(t) = A\sin(\alpha t + 0\sin(\beta t)) \Rightarrow e(t) = a\sin(\alpha t)$$

Die Frequenz in Hz (Schwingungen pro Sekunde) ergibt sich, wenn man die Kreisfrequenz (siehe oben) durch 2π teilt. Anhand der Frequenz des Modulators kann man sehen, wie oft der oben beschriebene Frequenzhub pro Sekunde durchlaufen wird. Beispiel: Bei einer Modulationsfrequenz von 440 Hz wird der Frequenzhub 440 mal pro Sekunde durchlaufen.

2.2 Besonderheiten der FM-Synthese

2.2.1 Phasenmodulation als FM

Frequenzmodulation (FM) und Phasenmodulation (PM) können unter dem Oberbegriff Winkelmodulation zusammen gefasst werden. Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen PM und FM genauer beschrieben werden. Zuerst wird die mathematische Herleitung der beiden Modulationen beschrieben. Anschließend wird die Ähnlichkeit der beiden Verfahren erörtert und im Kontext der Akustik beschrieben.

Wie der Name Winkelmodulation andeutet wird der Phasenwinkel eines Trägersignales in Abhängigkeit eines Modulationssignals verändert. Die Amplitude des Trägersignals bleibt dabei stets unverändert. In der allgemeinsten Form kann ein winkelmoduliertes Signal als Sinusfunktion eines sich zeitlich ändernden Winkels beschrieben werden.

$$s(t) = A * sin(\theta(t)) \tag{1}$$

Dabei wird $\theta(t)$ als *momentaner Winkel* bezeichnet und ist als Summe der konstanten Kreisfrequenz ω_0 multipliziert mit der Zeit t und der *momentanen Phase* $\varphi(t)$ definiert:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$$

Wird nun die momentane **Phase** des Trägersignals proportional zum Modulationssignal $p(t)$ verändert, erhält man das **phasenmodulierte** Signal $s_{PM}(t)$. Für die momentane Phase ergibt sich folgende einfache Formel:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + k_{PM} * p(t) \tag{2}$$

Für akustische Anwendungen wird der konstante Teil φ_0 der Phase nicht benötigt und wird als 0 angenommen. Bei k_{PM} handelt es sich um eine Proportionalitätskonstante, welche Modulatorkonstante genannt wird. Wird nun $\theta(t)$ in die allgemeine Formel 1 für ein moduliertes Signal substituiert und das obige $\varphi(t)$ eingesetzt, ergibt sich die Formel für das phasenmodulierte Signal

$$s_{PM}(t) = A * sin(\omega_0 t + \varphi(t)) = A * sin(\omega_0 t + k_{PM} * p(t)) \tag{3}$$

Für die Herleitung der Frequenzmodulation muss zuvor noch der Begriff der *momentan Frequenz* $\omega_m(t)$ eingeführt werden. Diese entspricht der Änderung des Phasenwinkels in Abhängigkeit der Zeit. Daher kann die momentan Frequenz durch die erste Ableitung des Phasenwinkels nach der Zeit $\dot{\theta}(t)$ bestimmt werden.

$$\omega_m(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d[\omega_0 t + \varphi(t)]}{dt} = \frac{d\omega_0 t}{dt} + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \tag{4}$$

ANALOGIE PHYSIK/BEGRÜNDUNG WARUM ABLEITUNG

Wird die momentane **Frequenz** des Trägersignals proportional zum Modulationssignal $f(t)$ verändert, erhält man das **frequenzmodulierte** Signal $s_{FM}(t)$. Für die momentane Frequenz ergibt sich analog zur Phasenmodulation folgende Formel:

$$\omega_m(t) = \omega_0 + k_{FM} * f(t) \tag{5}$$

Bei k_{FM} handelt es sich wieder um eine Modulatorkonstante. Um nun das frequenzmodulierte Signal zu erhalten muss die momentan Frequenz, analog wie bei der Phasenmodulation, in $s(t)$ eingesetzt werden. Jedoch kommt ω_m nicht direkt in $s(t)$ oder $\theta(t)$ vor. Aus Formel 4 ist jedoch bekannt, dass die momentane Frequenz gleich der Ableitung des momentan Winkels $\theta(t)$ ist. Im Umkehrschluss bedeutet das, dass die Integration von ω_m nach der Zeit gleich $\theta(t)$ sein muss.

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_m(t)dt = \int_0^t \omega_0 + k_{FM} * f(t)dt = \omega_0 t + k_{FM} * \int_0^t f(t)dt$$

Setzt man diesen Term in $s(t)$ ein erhält man die Formel für ein frequenzmoduliertes Signal

$$s_{FM}(t) = A * sin(\omega_0 t + k_{FM} * \int_0^t f(t)dt) \tag{6}$$

Es sei angemerkt, dass wissentlich die Integrationskonstante mit Null gleichgesetzt wurde und somit nicht in den Formeln auftritt, da sie für unsere Beobachtungen unerheblich ist und die Terme nur unnötig verkomplizieren würde.

Wie einführlich erklärt ist die Phasenmodulation mit der Frequenzmodulation verwand. Wie ähnlich die beiden Verfahren sind, ist leicht ersichtlich an den Formeln für die modulierten Signalen 3 und 6. Beide Formeln sind bis auf die letzte Addition gleich. Daraus lässt sich eine Bedingung ableiten, welche beschreibt wann eine FM durch eine PM oder umgekehrt dargestellt werden kann. Dies ist genau dann möglich wenn die Signale $s_{PM}(t)$ und $s_{FM}(t)$ gleich sind. Daraus ergibt sich für die Modulationssignale $p(t)$ und $f(t)$ folgende Beziehung:

$$k_{PM} * p(t) = k_{FM} * \int_0^t f(t)dt \tag{7}$$

Vorausgesetzt k_{PM} ist gleich k_{FM}, dann können beide Faktoren aus der Gleichung eliminiert werden. Ist es nun möglich für $f(t)$ eine Ableitung zu finden, kann eine PM durch eine FM dargestellt werden. Durch die Ableitung von $\int f(t)$ wird das Integral aufgehoben und die Gleichung reduziert sich zu einem einfachen $p(t) = f(t)$. Umgekehrt gilt, dass genau dann eine FM durch eine PM dargestellt werden kann, wenn $p(t)$ integrierbar ist. Unter diesen Bedingungen sind beide Verfahren mathematisch betrachtet gleich. Die unterschiedlichen Namen (FM, PM) zeigen somit nur, welche Größe des Modulationssignals $(p(t), f(t))$ proportional ist. [1] Eine weitere erwähnenswerte Eigenschaft lässt sich gewinnen, wenn der momentane Phasenwinkel beider Verfahren gegenüber gestellt wird. Während $\varphi(t)$ für PM durch die Formel 2 gegeben ist, muss $\varphi(t)$ für FM durch gleichsetzten der Formeln 4 und 5 gewonnen werden:

$$\begin{aligned}\omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \omega_0 + k_{FM} * f(t) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= k_{FM} * f(t)\end{aligned}$$

Draus ergibt sich für ein gemeinsames Modulationssignal $m(t)$ folgender Zusammenhang

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(t) &= k_{PM} * m(t) : \mathbf{PM} \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= k_{FM} * m(t) : \mathbf{FM}\end{aligned}}$$

Da $d\varphi(t)/dt$ die Ableitung und somit die Änderung von $\varphi(t)$ ist, ändert sich $\varphi(t)$ wenn die Ableitung sich ändert und umgekehrt. PM und FM treten also immer gleichzeitig auf.

Bisher wurde nur das modulierte Signal betrachtet und dessen Abhängigkeit von den allgemeinen Modulationssignalen $p(t)$ bzw. $f(t)$. Für die bisherigen Erkenntnisse war es einfach nicht notwendig, sich auf eine spezifische Modulationssignale festzulegen. Diese allgemeine Betrachtung ist jedoch mehr für die Nachrichtentechnik interessant als für einen FM Synthesizer. Daher werden die folgenden Formeln im Kontext der Akustik betrachtet und weniger streng mathematisch wie bisher. So kann zum Beispiel das menschliche Gehör keine Phasenverschiebungen wahrnehmen. Dies erlaubt Umformungen von Termen die mathematisch nicht korrekt sind, jedoch am Ergebnis, also dem hörbaren Klang, keine Auswirkung haben. Des Weiteren wird im Folgenden ein sinusförmiges Signal als Modulator verwendet, welches sowohl für die PM als auch die FM verwendet wird und wie folgt definiert ist

$$m(t) = f(t) = p(t) = sin(\omega_m t) \tag{8}$$

Wobei ω_m die Modulationskreisfrequenz darstellt. Eingesetzt in die Formeln für PM und FM ergibt sich

$$\begin{aligned}s_{PM}(t) &= A * sin(\omega_0 t + k_{PM} * sin(\omega_m t)) \\ s_{FM}(t) &= A * sin(\omega_0 t + k_{FM} * \int_0^t sin(\omega_m t) dt)\end{aligned}$$

Die von Chowning vorgestellte Formel gleicht der Formel für eine PM. [CHOWNING] Wobei Chowning seine Formel als Frequenzmodulation vorstellt. Wieso diese Aussage trotzdem korrekt ist, wird im Folgenden gezeigt. Im ersten Schritt muss das Integral innerhalb von s_{FM} ausgerechnet werden:

$$s_{FM}(t) = A * sin(\omega_0 t - \frac{k_{FM}}{\omega_m} * cos(\omega_m t))$$

Mathematisch gesehen, unterscheidet sich diese Formel zu einer Phasenmodulation. Genauer gesagt, ergibt sich durch die Integration eine Verschiebung von einer Phase, da ein negativer Kosinus genau eine Phase verschoben zu einem Sinus ist. Wie bereits erwähnt, nimmt das Gehör jedoch keine Phasenverschiebungen wahr, sondern nur Frequenzen. Unter dieser Annahme, kann der negative Kosinus mit einem positiven Sinus ausgetauscht werden, ohne eine hörbare Veränderung des Tons zu erzeugen.

$$e(t) = A * sin(\omega_0 t + \frac{k_{FM}}{\omega_m} * sin(\omega_m t))$$

Die dadurch gewonnene Formel entspricht somit der von Chowning vorgestellten Formel für eine Frequenzmodulation und ist im Kontext der Akustik korrekt.

2.2.2 Seitenfrequenzbänder (Evtl. Besselfunktion)

Was sind SFB? Warum sind sie wichtig? (Ton Charakter etc) Warum treten sie auf? Wie berechnet man sie (Fourier Analyse/Bessel Funktion)

Frequenz allein reicht nicht aus um Töne zu unterscheiden. Obertöne sind ausschlaggebend

Ein natürlicher Klang setzt sich nicht aus einer einzigen Frequenz zusammen, sondern aus mehreren Teiltönen. Jeder Teilton entspricht einem Sinuston mit einer bestimmten Frequenz. Der Tiefton mit der niedrigsten Frequenz, wird als Grundton bezeichnet. In der Regel bestimmt der Grundton die wahrgenommene Tonhöhe. **(Besonderer Fall: Wenn Grundton aufgehoben wird, siehe Chowing Fig 1)** Die restlichen Teiltöne werden Obertöne genannt und bestimmen die Klangfarbe. Warum die Teiltöne entscheidend für den Klangcharakter sind erkennt man an der Funktionsweise des menschlichen Ohr. Die Schallwellen eines Klangs versetzten im Ohr, genauer in der Gehörschnecke, eine Flüssigkeit in Schwingung. Dadurch, dass die Gehörschnecke sich verengt, treffen die unterschiedlichen Frequenzen an unterschiedlichen Stellen auf die Haare, welche die entsprechenden elektrischen Signale an das Gehirn weiterleiten.

Das Frequenzspektrum eines natürlichen Tons ist selten statisch sondern variiert mit der Zeit. Diese Änderung der Teiltöne lässt das menschliche Ohr Töne unterschiedlich wahrnehmen. Durch die FM-Synthese lassen sich, im Vergleich zu anderen Syntheseverfahren, auf einfachen Weg komplexe und vielfältige Frequenzspektren künstlich erzeugen.

2.2.3 Harmonische Frequenzverhältnisse(Inkl. Vibrato)

2.3 Einfache vs. komplexe FM Synthese

2.3.1 Kaskadenschaltung

2.3.2 Parallelschaltung

2.3.3 FM8 - Demo (Auf ADSR/Filter eingehen)

2.4 Praktische Anwendung der FM-Synthese

2.4.1 Nachbildung eines Instruments

Da es bei der FM Synthese nicht möglich ist im vorfeld zu wissen was für ein Signal herauskommt. Ist es schwer mit dieser Technik ein echt wirkendes Instrument nachzubilden. Trotzdem gibt es einige Methoden den generierten Klang natürlicher wirken zu lassen. Diese werden im weiteren Verlauf diese Kapitels vorgestellt und anschließend versucht den Klang eines Instruments zu erzeugen.

Hüllkurven Da bei vielen Instrumenten die Lautstärke während der Laufzeit eines Tones variiert, und ein abruptes Ein oder Ausschalten des Tones nicht besonders gut klingt, ist die nutzung einer Hüllkurve oder ADSR-Hüllkurve ein wichtiger Bestandteil der Nachbildung eines Instrumentes. ADSR steht für die einzelnen Phasen eines Tons: Attack, Decay, Sustain und Release. Diese Phasen sollen hier vereinfacht erklärt werden. Beim Drücken einer Taste wird der Ton angeschlagen und die Lautstärke des Tons steigt schnell bis zu einem maximal Wert an. Diese Phase wird Attack-Phase genannt. Nachdem die maximale Lautstärke erreicht wurde, startet die Decay Phase. In dieser Phase sinkt die Lautstärke schnell auf einen geringeren Wert ab. Danach befindet sich der Ton in der Sustain Phase und die Lautstärke bleibt gleich, solange der Ton gespielt wird. Sobald die Taste losgelassen wird, nimmt die Lautstärke wieder bis zu ihrem minimal Wert ab.

In Abb. 1 ist der Verlauf der Lautstärke einer Standard ADSR-Hüllkurve noch einmal grafisch dargestellt.

Da allerdings bei vielen Instrumenten die Lautstärke in den einzelnen Phasen der ADSR-Hüllkurve nicht gleichmäßig steigt oder sinkt, ist es nötig die Kurven zu variieren. Zum Biespiel steigt bei vielen Instrumenten die Lautstärke in der Attack Phase exponentiell an und fällt in der Decay und Release Phase auch exponentiell ab. Manche Synthesizer bieten zusätzlich auch noch eine Hold Phase vor der Attack Phase, da manche Instrumente einige Zeit benötigen bis sie nach dem Anschlagen des Tones in die Attack Phase eintreten. In Abb. 2 ist der Verlauf der Lautstärke einer komplexen ADSR-Hüllkurve grafisch dargestellt. In Abb3-5 sehen sie für Instrumenten typische Hüllkurven.

Abb3. Blechblasinstrumente

Variabler Modulationsindex Auch wenn das Hinzufügen einer ADSR-Hüllkurve den Klang des synthetisierten Tones schon stark verbessert, hört sich der erzeugte Ton leider noch nicht wie ein echtes Instrument an. Um den Ton noch realistischer klingen zu lassen kann der Modulationsindex über die Zeit oder die Amplitude variiert werden und somit die Anzahl der Oberschwingungen verändert werden. Bei Blasinstrumenten wird der Modulationsindex typischerweise über die Amplitude variiert während bei Holzblasinstrumenten

2.4.2 Modulationsframework (Theorie -¿ Praxis)

2.4.3 Demo: Parameter und Effekte - Grafiken (evtl. Plotten)

3 Praxis

3.1 Do-It-Yourself (Projekt hochladen, Kopfhörer!)

4 Fazit

Literatur

[CB86] John M. Chowning and David Bristow. *FM Theory & Applications - By Musicians for Musicians.* Number 4-636-17482-8. Yamaha Music Foundation, 1986.

[Cho73] John M. Chowning. The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation. *Journal of the Audio Engineering Society*, pages 526–534, 1973.

[Cro15] Zachary Crockett. The father of the digital synthesizer. http://priceonomics.com/the-father-of-the-digital-synthesizer/, 23.03.2015.

[Fie01] Markus Fiedler. Die fm-synthese, ein Überblick. http://www.markus-fiedler.de/fm/fm.html, 2001.

[Nel15] Andrew J. Nelson. *The sound of innovation - Stanford and the computer music revolution.* Number 978-0-262-02876-9 in Inside Technology. MIT Press, 2015.

[Sti81] Peter Stingl. *Mathematik für Fachhochschulen.* Number 3-446-13481-6. Carl Hanser Verlag München Wien, 1981.