

# FM-Synthese

## Seminararbeit Medieninformatik

Julius Hackel, Markus Bullmann, Matthias Kemmer, Stefan Gerasch

22. Juni 2015

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>3</b>
1.1 Prinzip der FM-Synthese . . . . .	3
1.2 Beispiele . . . . .	4
1.3 Geschichte der FM-Synthese . . . . .	6
<b>2 Einfache FM-Synthese</b>	<b>9</b>
2.1 Grundlegende Erläuterungen . . . . .	9
2.1.1 Auffrischung: Sinus- und Kosinusfunktion mit Parametern . . . . .	9
2.1.2 Parameter der FM-Synthese nach Chowning . . . . .	11
2.2 Besonderheiten der FM-Synthese . . . . .	12
2.2.1 Zusammenhang zwischen Phasen- und Frequenzmodulation . . . . .	12
2.2.2 Klangspektrum der FM-Synthese . . . . .	15
2.2.3 Harmonische Frequenzverhältnisse . . . . .	20
<b>3 Prinzipien der komplexen FM-Synthese</b>	<b>22</b>
3.1 Parallelschaltung . . . . .	22
3.1.1 Parallelle Träger mit jeweils eigenem unabhängigen Modulator . . . . .	22
3.1.2 Parallelle Träger mit einem gemeinsamen Modulator . . . . .	25
3.1.3 Einzelter Träger mit parallel geschaltetem Modulatorenpaar . . . . .	27
3.2 Kaskadenschaltung: Einzelträger mit Modulatorenpaar in Reihe . . . . .	31
3.3 Feedbackschaltung . . . . .	36
<b>4 Praktische Anwendung der FM-Synthese</b>	<b>38</b>
4.1 Nachbildung eines Instrumentes . . . . .	38
4.1.1 Techniken zur Nachbildung eines Instrumententones mittels FM-Synthese .	38
4.1.2 Nachbildung des Klangbildes eines Querflötentones mittels FM-Synthese .	40
4.2 Implementierung eines FM-Synthesizers zur Demonstration der Synthese Parameter	46
<b>5 Fazit</b>	<b>46</b>

Folgende Abschnitte wurden von den entsprechenden Personen verfasst:

Julius Hackel: Kapitel 1 „Einführung“, sowie Kapitel 2.1 „Grundlegende Erläuterungen“  
Markus Bullmann: Kapitel 2.2 „Besonderheiten der FM-Synthese“  
Matthias Kemmer: Kapitel 3 „Prinzipien der komplexen FM-Synthese“  
Stefan Gerasch: Kapitel 4 „Praktische Anwendung der FM-Synthese“

# 1 Einführung

Die **Frequenzmodulationssynthese** ist eine für die Musikwelt sehr wichtige Anwendung der **Frequenzmodulation (FM)**, welche bereits aus der Nachrichtentechnik bekannt ist. Eine Motivation für diese Seminararbeit ist die Tatsache, dass die Musikwelt durch FM-Synthese eine Revolution erlebt hat und ohne diese Erfindung eine Vielzahl an Synthesizern niemals entstanden wäre. Die Arbeit ist im Rahmen des Vertiefungsseminars I der Vertiefung Medieninformatik an der Hochschule für angewandte Wissenschaften Würzburg-Schweinfurt entstanden.

## 1.1 Prinzip der FM-Synthese

Generell wird bei der Frequenzmodulation die Frequenz eines **Trägersignals** durch ein weiteres **Modulationssignal** verändert, die Amplitude bleibt jedoch unangetastet. In der Nachrichtentechnik können durch die unterschiedlichen Frequenzen im modulierten Träger Informationen übertragen werden. Bei der FM-Synthese kann die maximale Amplitude in besonderen Fällen jedoch von der maximalen Auslenkung des Trägers abweichen bzw. kleiner als diese werden. Die momentane Amplitude der Modulation lässt sich bei der FM-Synthese durch folgende Formel beschreiben:

$$e(t) = A \sin(\alpha t + I \sin(\beta t)) \text{[Cho73]} \quad (1)$$

Bei der äußeren Sinusfunktion handelt es sich um den Träger, welcher in seiner Frequenz durch das Modulationssignal (innerer Sinus) moduliert wird. **Abbildung 1** veranschaulicht die Frequenzmodulation eines Trägers durch den Modulator.

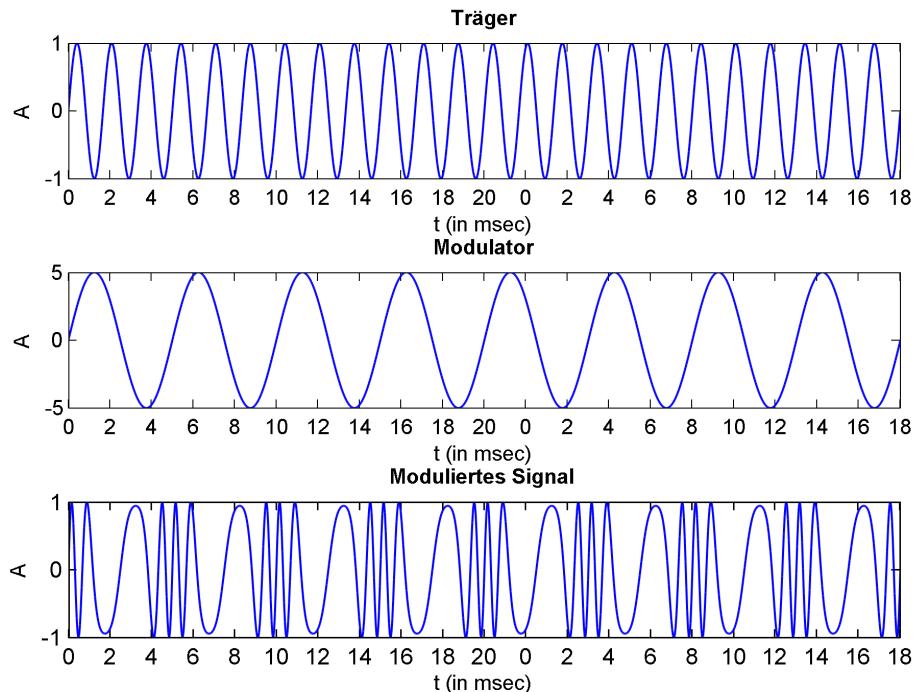


Abbildung 1: Vergleich Träger/Modulator

Technisch gesehen kann die FM-Synthese mit Oszillatoren umgesetzt werden. In der einfachsten Form benötigt man dazu einen Träger-Oszillator und einen Modulator-Oszillator. Wie eine einfache

FM-Synthese in Form einer Schaltung aussehen kann, zeigt **Abbildung 2**. Der Ausgang des ersten Oszillators geht dabei in den Eingang des Zweiten. Dabei kann entweder direkt die Frequenz des Trägers beeinflusst werden, jedoch auch dessen Phase. Bei VCA handelt es sich um einen spannungsgesteuerten Verstärker (Voltage Controlled Amplifier), EG ist ein Hüllkurvengenerator (Envelope Generator). Bei den Parametern  $f_M$  und  $f_C$  handelt es sich um die Frequenzen der beiden Oszillatoren. Über den Modulationsindex  $\beta$  kann die Stärke der Modulation festgelegt werden.

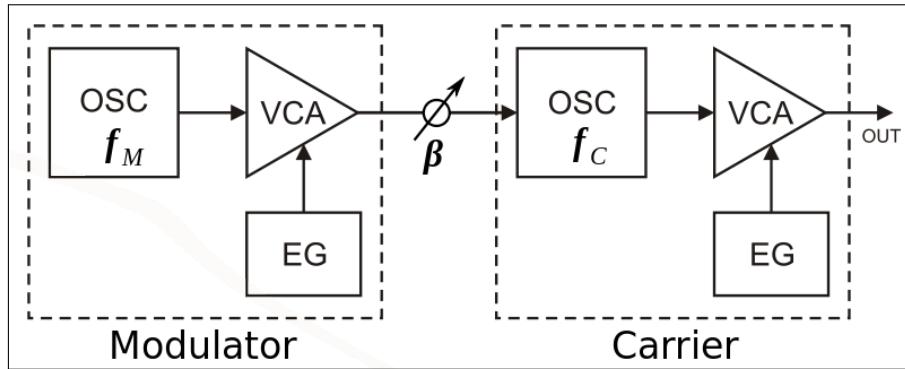


Abbildung 2: Schaltung einer einfachen FM-Synthese

Quelle: [http://mmmmaven.com/wp-content/uploads/800px-2op\\_FM.svg\\_.png](http://mmmmaven.com/wp-content/uploads/800px-2op_FM.svg_.png)

Stand 16.06.2015

Die Frequenzmodulationssynthese ist in ihren Grundzügen recht einfach zu verstehen. Es können mit geringem Aufwand bereits sehr komplexe, wenn auch oft unkontrollierbare, Signale mit komplexen Klangspektren (bzw. Frequenzspektren) erzeugt werden. Wie sich im Folgenden jedoch noch herausstellen wird, ist es dagegen sehr schwierig, durch die FM-Synthese gezielt Signale zu formen und diese zu kontrollieren.

Praktisch gesehen kann die Frequenzmodulationssynthese dazu verwendet werden, Klangbilder echter Instrumente nachzubilden, jedoch auch für die Erzeugung ganz neuer Töne, die so nicht in der Natur vorkommen.

## 1.2 Beispiele

In diesem Kapitel werden einige konkrete Beispiele der FM-Synthese anhand von Träger- und Modulationssignal sowie des daraus resultierenden Signals aufgezeigt. Die Grafiken zeigen jeweils Plots von allen drei Signalen, welche in MATLAB erzeugt wurden. Die Frequenzen der jeweiligen Funktionen wurden so gewählt, dass sie in einem Frequenzbereich liegen, der vom menschlichen Ohr wahrgenommen werden kann (siehe “**2.2.2 - Klangspektrum der FM-Synthese**”).

In Beispiel 1 (siehe **Abbildung 3**) wurden folgende Signale verwendet:

Trägersignal:	$y(t) = \sin(2\pi 600 \cdot t)$
Modulator:	$y(t) = 5 \sin(2\pi 75 \cdot t)$
Gesamtfunktion:	$y(t) = \sin(2\pi 600 \cdot t + 5 \sin(2\pi 75 \cdot t))$

Konkret bedeutet eine Trägerfrequenz von 600 Hz, dass die Trägerfunktion 600 mal in der Sekunde schwingt, d.h. eine Periode ist genau  $\frac{1}{600}$  Sekunden lang. Der Modulator hat eine Frequenz von 75 Hz, wodurch er 75 Schwingung pro Sekunde durchläuft und eine Periode dann  $\frac{1}{75}$  Sekunden lang ist. Für die Modulation gilt im Allgemeinen, dass der sogenannte Frequenzhub der Modulation (siehe Kapitel “**2.1.2 - Parameter der FM-Synthese nach Chowning**”) immer dann maximal ist, wenn die Änderung der Modulationsfunktion (also deren Steigung) ihr

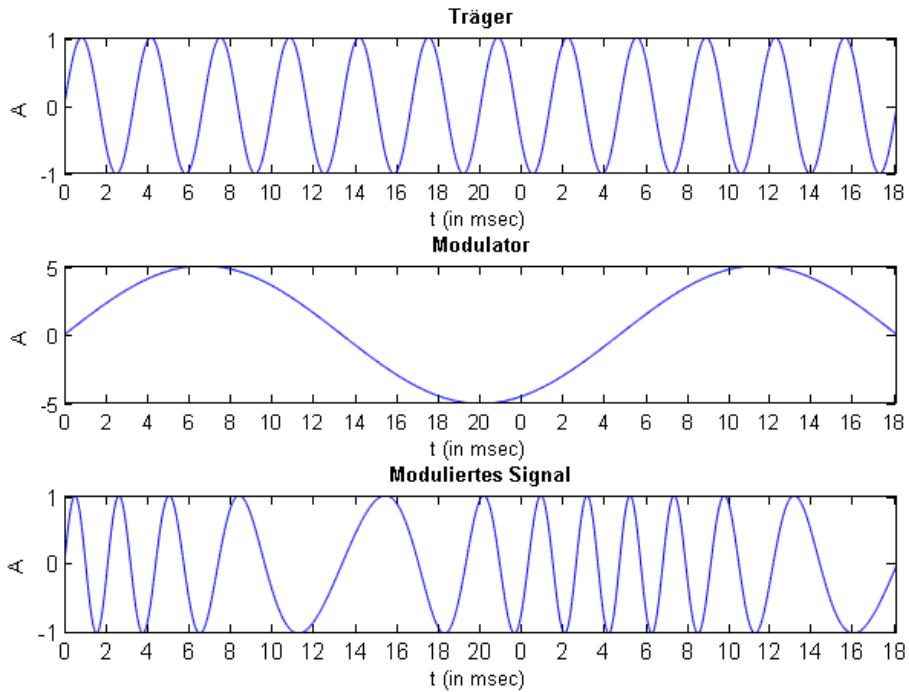


Abbildung 3: Beispiel 1. Darstellung einer Frequenzmodulation mit einer Trägerfrequenz von 600 Hz, einer Modulationsfrequenz von 75 Hz und einem Modulationsindex von 5

Maximum bzw. Minimum hat. In der Grafik tritt dies immer dann auf, wenn der Modulator den Funktionswert 0 hat.

Das zweite Beispiel in **Abbildung 4** zeigt eine Frequenzmodulation, bei der sich auch die Amplitude des Signals ändert. Dies geschieht rein durch die Phasenverschiebung des äußeren Sinus durch den Modulator, die tatsächliche Amplitude der Funktion bleibt dabei unangetastet. Die Formel des modulierten Signals sieht wie folgt aus:

$$y(t) = \sin(2\pi 300 \cdot t + 5 \sin(2\pi 120 \cdot t)) \quad (2)$$

An diesem Beispiel kann man sehr gut erkennen, dass die FM-Synthese mit wenig Aufwand komplexe Signale erzeugen kann, diese jedoch schlecht kontrollierbar bzw. erklärbar sind.

Als gute akustische Beispiele für die Anwendung der FM-Synthese in der Musikwelt können die Stücke **“Sabelith”** und **“Turenas”** von John Chowning, dem Erfinder der FM-Synthese, genannt werden. Beide Stücke wurden ausschließlich mit den Mitteln der FM-Synthese erzeugt und beinhalten viele verschiedene Klangarten sowie synthetisierte Instrumente.

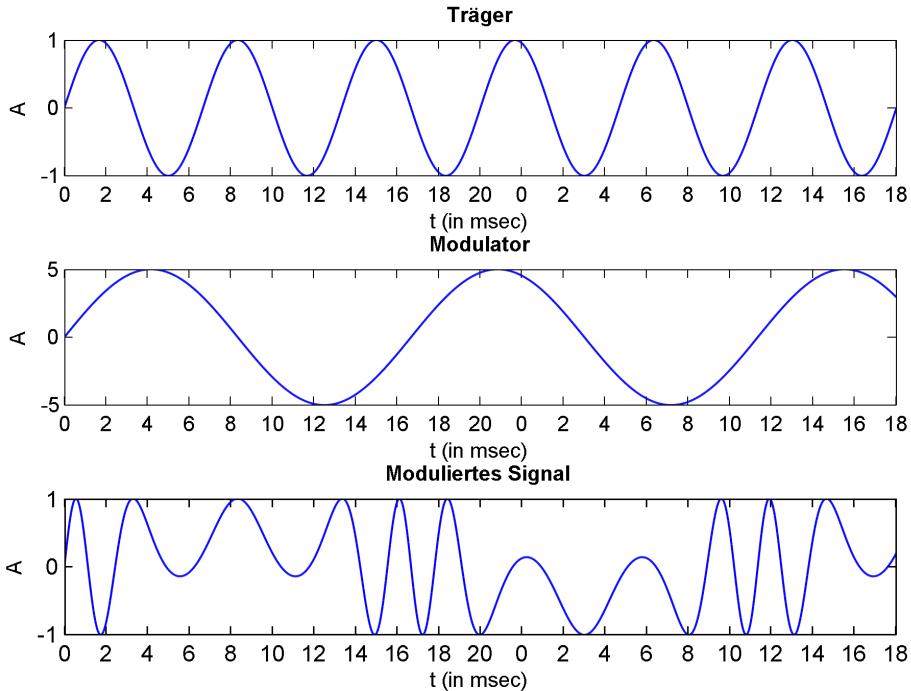


Abbildung 4: Beispiel 2. Darstellung einer Frequenzmodulation mit einer Trägerfrequenz von 300 Hz, einer Modulationsfrequenz von 120 Hz und einem Modulationsindex von 5

### 1.3 Geschichte der FM-Synthese

Die grundlegende Technik hinter der FM-Synthese stammt, wie bereits erwähnt, aus der Nachrichtentechnik. Dort wird das Verfahren “Frequenzmodulation” genannt. Prof. Dr. John Chowning selbst gibt als Quelle zu seiner Entdeckung das Buch “Radio Engineering” von Frederick Emmons Terman aus dem Jahre 1947 an [Nel15, S. 35]. Im Jahr 1967 entdeckte John Chowning eine neue Eigenschaft der Frequenzmodulation. Während er mit unterschiedlichen Modulationsfrequenzen experimentierte und dabei verschiedene Vibratos erzeugte, verschwand das Vibrato plötzlich bei höheren Modulationsfrequenzen. Obertöne wurden hörbar, die sich vom eigentlichen Trägersignal abheben. Unter einem Vibrato versteht man einen schwingenden Ton, d.h. eine pulsierende Änderung der Tonhöhe.[Cro15]

Chowning selbst war sehr erstaunt über die entstandenen Töne. In einem Interview von 2005 sagte er dazu:

*“I was experimenting with just a sinusoid and kept increasing the vibrato rate, so all of a sudden it didn’t sound like listening to a change in pitch in time, but rather i began to hear timbral differences. So the vibrato became very, very fast, hundreds of times per second, and very, very deep, as if the violinist had a different fingerboard, and the finger was whipping up and down at very high rates and very great distances. That would be sort of a physical metaphor for this.”* [Nel15, S. 34f.]

Es dauerte 3 Jahre, bis sich Chowning seiner Sache gewiss war und die mathematischen Zusammenhänge ausreichend begründen konnte. Außerdem war er zu diesem Zeitpunkt bereits in der Lage, verschiedene Instrumente wie Trommeln oder Blasinstrumente nachzubilden. Da Chowning selbst leidenschaftlicher Komponist war, veröffentlichte er im Jahre 1971 sein erstes, rein durch FM-Synthese generiertes Stück mit dem Namen “Sabelithe”. Seine zweite Komposition, “Turen-

as”, folgte ein Jahr später. Um die Stärken seiner neuen Technik zu demonstrieren, verwandelte Chowning beispielsweise in “Sabelithe” den Klang einer Trommel in den einer Trompete.[Nel15, S. 39]



Abbildung 5: John Chowning am CCRMA

Quelle: <http://arts.mit.edu/wp-content/uploads/2014/07/ChowningYamaha.jpg>  
Stand 09.06.2015

Chowning war, wie auch seine Kollegen, eher Komponist als Erfinder. Aus diesem Grund waren sie eher an der musikalischen Seite der Erfindung interessiert als an kommerziellem Erfolg. Obwohl er das Potenzial seiner Erfindung zu dieser Zeit noch nicht überblicken konnte, wendete sich Chowning an das OTL (Office of Technology Licensing) in Stanford. Er hoffte, dass es in der Musikindustrie eine sinnvolle Anwendung seiner Entdeckung gab.[Nel15, S. 42]

Zu Beginn war seine Entdeckung jedoch nicht sehr angesehen. Viele der Firmen, welchen das neue Patent angeboten wurde, wussten nichts damit anzufangen und lehnten ab. Andy Moorer, ein Kollege Chownings in Stanford und später Mitgründer des CCRMA, sagte dazu:

*[...] It was really discouraging. John was so proud of having put this damn thing together and people didn't really get the idea of spatializing the sound.”[Nel15, S. 43]*

Offiziell veröffentlichte John Chowning seine neue Entdeckung der Frequenzmodulationssynthese in einem Paper, welches 1973 im “Journal of the Audio Engineering Society” unter dem Titel “The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation” erschien.

Erst im Jahr 1974, als ein junger Ingenieur namens Kazukiyo Ishimura der Firma Yamaha zu einer Vorstellung des Verfahrens geschickt wurde, erkannte dieser binnen wenigen Minuten, welches Potenzial hinter dieser neuen Anwendung der Frequenzmodulation steckt. Yamaha lizenzierte das Verfahren noch im gleichen Jahr und Ishimura wurde später Geschäftsführer des Yamaha Konzerns [Cro15].

Im Jahr 1975, nach einiger Zeit der Abwesenheit von Stanford, kehrte Chowning dorthin zurück und gründete zusammen mit einigen seiner Kollegen das CCRMA (Center for Computer Research

in Music and Acoustics), welches sich auf computergenerierte Musik spezialisiert hat. Eine Fotografie der Gründer von CCRMA ist auf **Abbildung 6** zu sehen.



Abbildung 6: Gründer von CCRMA. Stehend von links nach rechts: Leland Smith, John Grea, John Chowning und Loren Rush. Sitzend: Andy Moorer.

Quelle: [Nel15, S. 52] - Figure 4.1

Nachdem Yamaha die Technik der FM-Synthese lizenziert hatte, brachte die Firma im Jahr 1980 nach einem Prototypen den ersten digitalen FM-Synthesizer GS1 heraus. Zwei Jahre später folgte mit dem GS2 eine kleinere und handlichere Version des GS1. Die Geräte kosteten um die 30.000 DM für den GS1 bzw. 16.000 DM für den GS2 und waren deshalb nur für ausgewählte Musiker gedacht. Der Durchbruch gelang im Jahre 1983 mit dem DX7. Dieser konnte parallel 16 Stimmen verarbeiten, welche durch 6 sogenannte Operatoren erzeugt wurden. Diese Operatoren waren in 32 vordefinierten Algorithmen unterschiedlich in Reihe, parallel oder mit Feedback zusammengeschaltet [Yam83, S. 11]. Der DX7 kostete ca. 4.700 DM, preislich ähnliche und damals übliche analoge subtraktive Synthesizer konnten lediglich 4 Stimmen verarbeiten [Fie15]. Ein Bild des DX7 ist in **Abbildung 7** zu sehen.



Abbildung 7: Yamaha DX7

Quelle: <http://www.electricdruid.net/images/interface/larger/YamahaDX7.jpg>  
Stand 09.06.2015

Durch den großen Erfolg des DX7 konnte Yamaha in den nachfolgenden Jahren viele Weiterentwicklungen auf den Markt bringen. In den Jahren 1983 bis 1989 brachte Yamaha über 20 weitere digitale Synthesizer heraus. Jedoch wurden über die Zeit andere Syntheseverfahren günstiger und für den Markt besser geeignet. Deshalb entwickelte Yamaha 1990 mit dem SY77 Synthesizer ein Gerät, das FM-Synthese und ein anderes digitales Klangsyntheseverfahren namens Sampling in Einem vereinte.[Fie15]

Ab Mitte der 1990er wurden Personal Computer leistungsfähig genug, um Synthesizer ohne Verzögerung durch eine Midi Tastatur ansprechbar zu machen. Heutzutage findet digitale Audioverarbeitung nahezu ausschließlich softwareseitig statt, weshalb Hardwaresynthesizer wie der DX7 an Bedeutung verloren haben. Speziell dieser wurde jedoch durch die Firma Native Instruments in Form des FM7 in Software nachgebaut. Dessen Weiterentwicklung, der FM8, findet heute noch Verwendung. Auch ist der DX7 heute bei Nostalgikern noch sehr beliebt.[Fie15]

## 2 Einfache FM-Synthese

In diesem Kapitel wird ausschließlich die einfache FM-Synthese betrachtet. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass lediglich ein Träger und ein Modulator für die Synthese verwendet wird. Anhand dieser Form der FM-Synthese können grundlegende Erläuterungen sehr gut und verständlich durchgeführt werden.

### 2.1 Grundlegende Erläuterungen

#### 2.1.1 Auffrischung: Sinus- und Kosinusfunktion mit Parametern

Die einfachste Form eines Tons lässt sich durch eine Sinus- oder Kosinusschwingung beschreiben. Dabei handelt es sich, mathematisch gesehen, um eine Sinus- oder eine Kosinusfunktion. Beide gehören zu den **trigonometrischen Funktionen**, auch **Winkelfunktionen** genannt. Damit einige später folgende mathematische und für die FM-Synthese erforderliche Rechnungen besser verstanden werden können, wird hier kurz auf die Grundlagen zu Sinus- und Kosinusfunktionen eingegangen.

Sinus und Kosinus sind **periodische Funktionen**, d.h. die Funktionswerte wiederholen sich nach einer sogenannten Periode. Mathematisch ausgedrückt muss es dafür eine Konstante  $p$  geben, für die bei einem beliebigen  $x$  gilt:  $f(x + p) = f(x)$ .

Am besten verdeutlichen kann man dies anhand des **Einheitskreises**. Abbildung 8 zeigt, wie sich Sinus und Kosinus aus den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks im Einheitskreis berechnen lassen:

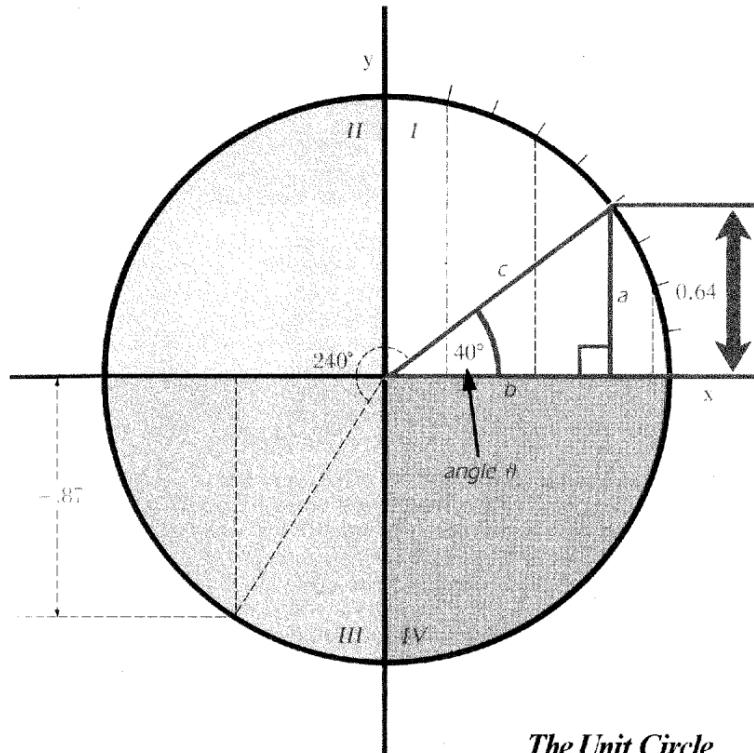
Dabei gilt:

$$\sin(\theta) = \frac{\text{gegenüberliegende Seite}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a \quad (3)$$

Da die Hypotenuse im Einheitskreis eine Länge von 1 hat, darf  $c$  gleich 1 gesetzt werden. Analog dazu ergibt sich für den Kosinus folgende Gleichung:

$$\cos(\theta) = \frac{\text{anliegende Seite}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b \quad (4)$$

[CB86, s. 22 - 27]



**The Unit Circle**

Abbildung 8: Der Einheitskreis

Quelle: [CB86] - Fig. 2.6

Der aktuelle Winkel im Einheitskreis kann auch im **Bogenmaß** angegeben werden. Das Bogenmaß beschreibt, wie weit der Bogen des Einheitskreises im Uhrzeigersinn abgelaufen wird. Dabei ist  $\pi$  die **Kreiszahl**. Ein Bogenmaß von  $2\pi$  gibt eine ganze Umdrehung im Einheitskreis an und der Wert  $\pi$  entspricht einer halben Umdrehung. Um nun auf eine Sinusfunktion überzuleiten, muss das Bogenmaß in Abhängigkeit von der **Zeit**  $t$  angegeben werden, die Formel lautet dann  $\sin(2\pi \cdot t)$ . Damit festgelegt werden kann, wie oft der Einheitskreis in einer Sekunde abgelaufen wird, multipliziert man das Bogenmaß  $2\pi$  mit dem Faktor  $f$ . Dabei entspricht  $f$  der **Frequenz** der Funktion, also wie viele Schwingungen in einer Sekunde durchlaufen werden. Der Wert  $2\pi \cdot f$  wird auch als **Kreisfrequenz** bezeichnet. Man spricht bei Sinus- und Kosinusfunktion auch von Winkelfunktionen, denn der Funktionswert der Funktion kann auch anhand des Winkels (in Bogenmaß) im Einheitskreis angegeben werden. Eine Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen dem Einheitskreis und der Sinusfunktion zeigt Abbildung 9.

Der Unterschied zwischen Kosinus- und Sinusfunktion ist, dass Kosinus bei dem Funktionswert 1 beginnt und Sinus bei Funktionswert 0. Aus diesem Zusammenhang lassen sich folgende Beziehungen (Auch: **Komplementärformeln**) zwischen Sinus und Kosinus feststellen:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad (5)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad (6)$$

[Sti81, s. 218]

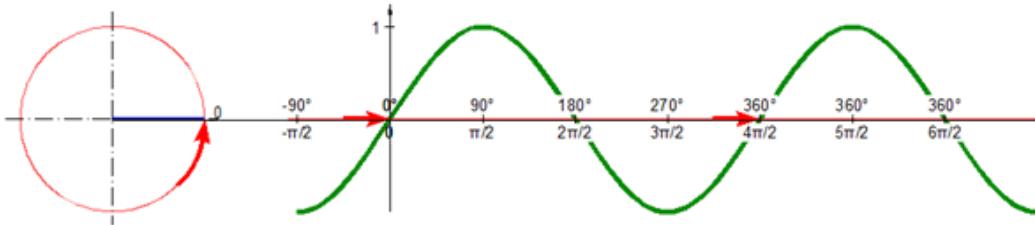


Abbildung 9: Vom Einheitskreis zum Sinus

Quelle: [http://www.ulrich-rapp.de/stoff/mathematik/Sinus\\_Einheitskreis.gif](http://www.ulrich-rapp.de/stoff/mathematik/Sinus_Einheitskreis.gif)

Stand 09.06.2015

Überträgt man diese mathematischen Erkenntnisse nun auf einen Ton, so kann man dessen Funktion wie folgt beschreiben:

$$y(t) = A \cdot \sin(2\pi f \cdot t) \quad (7)$$

Um  $90^\circ$  oder  $\frac{\pi}{2}$  verschoben gilt:  $y(t) = A \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$

Bei  $A$  handelt es sich um die **Amplitude** des Tons und somit um dessen **Lautstärke**. Alle Funktionswerte der Funktion werden mit diesem Faktor multipliziert und dadurch erhöht oder verringert.

Das  $f$  ist, wie oben bereits beschrieben, die Frequenz des Tons. Sie gibt die **Anzahl der Schwingungen (Perioden) pro Sekunde** an und wird in  $f = \frac{1}{T}$  angegeben, wobei  $T$  die Periodendauer in Sekunden ist. Die Einheit ist Hertz (Hz) oder  $\frac{1}{s}$ . Je größer die Frequenz eines Tones ist, desto höher wird er vom Menschen wahrgenommen.

Physikalisch gesehen ist ein Ton eine periodische Änderung des Luftdrucks, also Luftmoleküle die um ihre Ruhelage in Schwingung versetzt werden [PDEZ67, s. 111 f.].

Für das menschliche Ohr hören sich Sinus- und Kosinusschwingungen gleich an, da diese lediglich um  $\frac{1}{4}$  der Periode verschoben sind und es in der realen Welt ohnehin keine perfekten Schwingungen geben kann [PDEZ67, s. 3f.].

### 2.1.2 Parameter der FM-Synthese nach Chowning

In diesem Kapitel wird auf die unterschiedlichen Parameter eingegangen, welche in der Formel der einfachen FM-Synthese von John Chowning vorkommen. Zudem wird deren Funktion im Einzelnen beschrieben. Es muss angemerkt werden, dass Chowning in seinen Formeln andere Symbole verwendet als in der Nachrichtentechnik üblich. Bei den entsprechenden Symbolen ist eine Anmerkung angefügt.

Die Parameter werden mit der Gleichung in Sinusdarstellung vorgestellt, d.h. Trägersignal und Modulator sind Sinusfunktionen. Dieselbe Erklärung funktioniert analog dazu auch mit Kosinusfunktionen für den Träger und den Modulator. Die Gleichung für eine frequenzmodulierte Welle lautet wie folgt:

$$e(t) = A \sin(\alpha t + I \sin(\beta t)) \quad (8)$$

- $e(t)$  beschreibt die **Amplitude des modulierten Signals zum Zeitpunkt  $t$**
- $A$  stellt die **maximale Amplitude des modulierten Signals** dar
- $\alpha$  ist die **Kreisfrequenz des Trägersignals** in  $\frac{1}{s}$  (üblich ist hier das Symbol  $\omega_c$ )
- $\beta$  ist die **Kreisfrequenz des Modulators** in  $\frac{1}{s}$  (üblich ist hier das Symbol  $\omega_m$ ,  $\beta$  wird in der Nachrichtentechnik für den Modulationsindex verwendet)
- $I$  stellt den **Modulationsindex** dar. Dieser setzt sich wie folgt zusammen:  $I = \frac{d}{m}$  mit:

- **d: Frequenzhub der Modulation**, d.h. der größte momentane Unterschied zwischen der Frequenz des Trägers und der des modulierten Signals. Auch: Frequenzänderung, welche durch die Modulation der Trägerfrequenz verursacht wird (Hier wird üblicher Weise  $\Delta f$  als Symbol verwendet)
- **m: Kreisfrequenz des Modulators**

[Cho73]

Der Modulationsindex beschreibt also das Verhältnis des Frequenzhubs zur Modulationsfrequenz. Man kann anhand der Formel bereits erkennen, dass bei einem Modulationsindex von 0 keine Modulation stattfindet. Dabei wird der Frequenzhub der Modulation auch gleich 0, da  $I = \frac{d}{m}$  und somit  $d = 0 \cdot m = 0$  gilt.

$$e(t) = A \sin(\alpha t + 0 \sin(\beta t)) \Rightarrow e(t) = A \sin(\alpha t) \quad (9)$$

Die Frequenz in Hz (Schwingungen pro Sekunde) ergibt sich, wenn die Kreisfrequenz (siehe oben) durch  $2\pi$  teilt wird. Anhand der Frequenz des Modulators ist ersichtlich, wie oft der oben beschriebene Frequenzhub pro Sekunde durchlaufen wird. Beispiel: Bei einer Modulationsfrequenz von 440 Hz wird der Frequenzhub 440 mal pro Sekunde durchlaufen.

Die Formel der einfachen FM-Synthese sieht auf den ersten Blick recht einfach aus. Wie sich jedoch in der Praxis herausgestellt hat, erfordert es sehr viel Aufwand, die Mathematik hinter dieser Syntheseform zu beschreiben. Dies wird in den folgenden Abschnitten noch ersichtlich.

## 2.2 Besonderheiten der FM-Synthese

### 2.2.1 Zusammenhang zwischen Phasen- und Frequenzmodulation

Frequenzmodulation (FM) und Phasenmodulation (PM) können unter dem Oberbegriff Winkelmodulation zusammen gefasst werden. Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen PM und FM genauer beschrieben werden. Zuerst wird die mathematische Herleitung der beiden Modulationen beschrieben. Anschließend wird die Ähnlichkeit der beiden Verfahren erörtert und im Kontext der Akustik beschrieben. Interessanterweise führte die Publikation von Chowning zu anfänglicher Verwirrung. In seinem Artikel definiert er eine Formel, welche einer PM gleicht. Zusätzlich beschreibt er ein MUSIC V Patch der eine FM implementiert. Beides wird jedoch von ihm als FM-Synthese vorgestellt. [Ros99] Des Weiteren kann dem Yamaha Patent für die Implementierung eines FM-Synthesizer entnommen werden, dass Yamaha ihre FM-Synthese über eine Phasenmodulation erzeugte. [Oya87]

Wie der Name Winkelmodulation andeutet, wird der Phasenwinkel eines Trägersignals in Abhängigkeit eines Modulationssignals verändert. Die Amplitude  $A$  bleibt während der Modulation konstant. In der allgemeinsten Form kann ein winkelmoduliertes Signal als Sinusfunktion eines sich zeitlich ändernden Winkels beschrieben werden:

$$s(t) = A \cdot \sin(\theta(t)) \quad (10)$$

Dabei wird  $\theta(t)$  als *momentaner Phasenwinkel* bezeichnet und ist als Summe der konstanten Kreisfrequenz  $\omega_0$  multipliziert mit der Zeit  $t$  und der *momentanen Phasenverschiebung*  $\varphi(t)$  definiert:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$$

Ein Großteil der Frequenzen in diesem Kapitel beziehen sich auf eine Schwingung, welche selbst auf eine Kreisbewegung zurückgeführt werden kann. Daher macht es Sinn Frequenzen  $f$  als Kreisfrequenz  $\omega$  anzugeben. Zwischen Frequenz und Kreisfrequenz gilt  $\omega = 2\pi f$ .

Wird nun die momentane **Phasenverschiebung** des Trägersignals proportional zum Modulationssignal  $p(t)$  verändert, erhält man das **phasenmodulierte** Signal  $s_{PM}(t)$ . [Lat98, S. 209] Für die momentane Phasenverschiebung ergibt sich folgende einfache Formel:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + k_{PM} \cdot p(t) \quad (11)$$

Für akustische Anwendungen wird der konstante Teil  $\varphi_0$  der Phasenverschiebung nicht benötigt und wird, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, als Null angenommen. Bei  $k_{PM}$  handelt es sich um eine Proportionalitätskonstante, welche Modulatorkonstante genannt wird. Die Modulatorkonstante bestimmt, wie stark das Modulationssignal auf das Trägersignal einwirkt. Wird nun  $\theta(t)$  in die allgemeine Formel 10 für ein moduliertes Signal substituiert und das obige  $\varphi(t)$  eingesetzt, ergibt sich die Formel für das phasenmodulierte Signal:

$$s_{PM}(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) = A \cdot \sin(\omega_0 t + k_{PM} \cdot p(t)) \quad (12)$$

Für die Herleitung der Frequenzmodulation muss zuvor noch der Begriff der *momentanen Kreisfrequenz*  $\omega(t)$  eingeführt werden. Diese entspricht der Änderung des Phasenwinkels in Abhängigkeit der Zeit. Daher kann die momentane Kreisfrequenz durch die erste Ableitung des Phasenwinkels nach der Zeit  $\dot{\theta}(t)$  bestimmt werden. [Lat98, S. 209]

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d[\omega_0 t + \varphi(t)]}{dt} = \frac{d\omega_0 t}{dt} + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (13)$$

Wieso dieser Zusammenhang gültig ist, lässt sich einfach veranschaulichen. Bei  $\omega$  handelt es sich um die Kreisfrequenz, also wie häufig eine Schwingung einen Kreis pro Zeitspanne durchläuft, hier in Sekunden. Bei einer Kreisfrequenz von  $\omega = 2s^{-1}$  wird ein Phasenwinkel von  $4\pi$  pro Sekunde überstrichen. Wird nun die Kreisfrequenz erhöht, wird ein größerer Phasenwinkel überstrichen. Daher gibt die momentane Kreisfrequenz die Änderungsrate des momentanen Phasenwinkels zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  an. Da die Änderung einer Funktion der Ableitung dieser Funktion entspricht, ergibt sich der Zusammenhang aus der obigen Formel. Eine Analogie aus der Physik hierzu ist, der Zusammenhang zwischen dem Weg  $s(t)$  und der Geschwindigkeit  $v(t)$ . Die Geschwindigkeit gibt die Änderung des Weges pro Zeiteinheit vor. Somit gilt  $s'(t) = v(t)$ . In unserem Zusammenhang verhält sich die Kreisfrequenz analog zur Geschwindigkeit und der Phasenwinkel ist im Prinzip die Strecke ausgedrückt als Winkel.

Wird die momentane **Frequenz** des Trägersignals proportional zum Modulationssignal  $f(t)$  verändert, erhält man das **frequenzmodulierte** Signal  $s_{FM}(t)$ . [Lat98, S. 210] Für die momentane Frequenz ergibt sich analog zur Phasenmodulation folgende Formel:

$$\omega(t) = \omega_0 + k_{FM} \cdot f(t) \quad (14)$$

Bei  $k_{FM}$  handelt es sich wieder um eine Modulatorkonstante. Sie gibt an wie stark das Modulationssignal das Trägersignal beeinflusst. Um nun das frequenzmodulierte Signal zu erhalten muss die momentane Frequenz, analog wie bei der Phasenmodulation, in  $s(t)$  eingesetzt werden. Jedoch kommt  $\omega(t)$  nicht direkt in  $s(t)$  oder  $\theta(t)$  vor. Aus Formel 13 ist bekannt, dass die momentane Frequenz gleich der ersten Ableitung des momentanen Winkels  $\theta(t)$  ist. Im Umkehrschluss bedeutet das, dass die Integration von  $\omega(t)$  nach der Zeit gleich  $\theta(t)$  sein muss.

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau = \int_0^t \omega_0 + k_{FM} \cdot f(\tau) d\tau = \omega_0 t + k_{FM} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Wird dieser Term in  $s(t)$  eingesetzt, ergibt sich die Formel für ein frequenzmoduliertes Signal:

$$s_{FM}(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + k_{FM} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau) \quad (15)$$

Es sei angemerkt, dass wissentlich die Integrationskonstante mit Null gleichgesetzt wurde und somit nicht in den Formeln auftritt, da sie für unsere Beobachtungen unerheblich ist und die Terme nur unnötig verkomplizieren würde.

Wie einführliech erklärt, ist die Phasenmodulation mit der Frequenzmodulation verwandt. Wie ähnlich die beiden Verfahren sind, ist leicht an den Formeln für die modulierten Signalen 12 und 15 ersichtlich. Beide Formeln sind bis auf die letzte Addition gleich. Daraus lässt sich eine Bedingung ableiten, welche beschreibt wann eine FM durch eine PM oder umgekehrt dargestellt werden kann. Dies ist genau dann möglich, wenn die Signale  $s_{PM}(t)$  und  $s_{FM}(t)$  identisch sind. Daraus ergibt sich für die Modulationssignale  $p(t)$  und  $f(t)$  folgende Beziehung:

$$k_{PM} \cdot p(t) = k_{FM} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (16)$$

Vorausgesetzt  $k_{PM}$  ist gleich  $k_{FM}$ , dann können beide Faktoren aus der Gleichung eliminiert werden. Ist es nun möglich, für  $f(t)$  eine Ableitung zu finden, kann eine PM durch eine FM dargestellt werden. Durch die Ableitung von  $\int_0^t f(\tau) d\tau$  wird das Integral aufgehoben und die Gleichung reduziert sich zu einem einfachen  $p(t) = f(t)$ . Umgekehrt gilt, dass genau dann eine FM durch eine PM dargestellt werden kann, wenn  $p(t)$  integrierbar ist. Unter diesen Bedingungen sind beide Verfahren, mathematisch betrachtet, gleich. Daher kann nur anhand der Betrachtung eines modulierten Signals nicht darauf zurück geschlossen werden, ob es mit einer Phasen- oder Frequenzmodulation erzeugt wurde. Die unterschiedlichen Namen (FM, PM) zeigen somit nur, welche Größe des Modulationssignals ( $f(t), p(t)$ ) proportional ist. [Lat98, S. 210]

Eine weitere, erwähnenswerte Eigenschaft lässt sich gewinnen, wenn die momentane Phasenverschiebung beider Verfahren gegenüber gestellt wird. Während  $\varphi(t)$  für PM durch die Formel 11 gegeben ist, muss  $\varphi(t)$  für FM durch gleichsetzten der Formeln 13 und 14 gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \omega_0 + k_{FM} \cdot f(t) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= k_{FM} \cdot f(t) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für ein gemeinsames Modulationssignal  $m(t)$  folgender Zusammenhang:

$\varphi(t) = k_{PM} \cdot m(t) : \mathbf{PM}$
$\frac{d\varphi(t)}{dt} = k_{FM} \cdot m(t) : \mathbf{FM}$

Da  $\frac{d\varphi(t)}{dt}$  die Ableitung und somit die Änderung von  $\varphi(t)$  ist, ändert sich  $\varphi(t)$  wenn die Ableitung sich ändert und umgekehrt. PM und FM treten also immer gleichzeitig auf.

Bisher wurde nur das modulierte Signal betrachtet und dessen Abhängigkeit von den allgemeinen Modulationssignalen  $p(t)$  bzw.  $f(t)$ . Für die bisherigen Erkenntnisse war es einfach nicht notwendig, sich auf spezifische Modulationssignale festzulegen. Diese allgemeine Betrachtung ist jedoch mehr für die Nachrichtentechnik, als für einen FM-Synthesizer interessant. Daher werden die folgenden Formeln im Kontext der Akustik betrachtet und weniger streng mathematisch, wie bisher. So kann zum Beispiel das menschliche Gehör keine initiale Phasenverschiebungen wahrnehmen. Dies erlaubt Umformungen von Termen, die mathematisch nicht korrekt sind, jedoch am Ergebnis, also dem hörbaren Klang, keine Auswirkung haben. Deshalb ist es korrekt, bei den obigen Umformungen den initialen Phasenwinkel  $\varphi_0$  zu ignorieren. Des Weiteren wird im Folgenden ein sinusförmiges Signal als Modulator verwendet, welches sowohl für die PM als auch für die FM verwendet wird und wie folgt definiert ist:

$$m(t) = f(t) = p(t) = \sin(\omega_m t) \quad (17)$$

Wobei  $\omega_m$  die Modulationskreisfrequenz darstellt. Eingesetzt in die Formeln für PM und FM ergibt sich:

$$\begin{aligned}s_{PM}(t) &= A \cdot \sin(\omega_0 t + k_{PM} \cdot \sin(\omega_m t)) \\ s_{FM}(t) &= A \cdot \sin(\omega_0 t + k_{FM} \cdot \int_0^t \sin(\omega_m \tau) d\tau)\end{aligned}$$

Die von Chowning vorgestellte Formel gleicht der Formel für eine PM, [Cho73] wobei Chowning seine Formel als Frequenzmodulation vorstellt. Wieso diese Aussage trotzdem korrekt ist, wird im Folgenden gezeigt. Im ersten Schritt muss das Integral innerhalb von  $s_{FM}(t)$  ausgerechnet werden:

$$s_{FM}(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t - \frac{k_{FM}}{\omega_m} \cdot \cos(\omega_m t))$$

Mathematisch gesehen unterscheidet sich diese Formel zu einer Phasenmodulation. Genauer gesagt ergibt die Integration eine Verschiebung von  $\frac{\pi}{2}$ , da ein negativer Kosinus genau eine viertel Periode phasenverschoben zu einem Sinus ist. Wie bereits erwähnt, nimmt das Gehör jedoch keine initiale Phasenverschiebungen wahr. Unter dieser Annahme, kann der negative Kosinus mit einem positiven Sinus ausgetauscht werden, ohne eine hörbare Veränderung des Tones zu erzeugen.

$$e(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \frac{k_{FM}}{\omega_m} \cdot \sin(\omega_m t))$$

Die dadurch gewonnene Formel ähnelt in der Struktur der von Chowning vorgestellten Formel schon sehr. Jedoch ist in der obigen Formel der Modulationsindex  $I$  nicht direkt ersichtlich. Dieser ist bei Chowning als  $I = d/\beta$  definiert. Wobei  $d$  dem Frequenzhub entspricht und  $\beta$  der Modulationsfrequenz  $\omega_m$  (s. Kapitel 2.1.2). Für den Frequenzhub  $\Delta f$  gilt: [Lat98, S. 219]

$$\Delta f = k_{FM} \cdot [\dot{f}(t)]_{\max}$$

Da  $f(t)$  eine Sinusfunktion darstellt, entspricht die Ableitung  $\dot{f}(t)$  einer Kosinusfunktion und somit ist ihr Maximum gleich 1 und entfällt in der obigen Formel. Somit reduziert sich der Frequenzhub zu  $\Delta f = k_{FM}$  und kann in die obige Formel eingesetzt werden. Dadurch kann nun  $\Delta f/\omega_m$  durch den Modulationsindex  $I$  substituiert werden und es ergibt sich die originale Formel nach Chowning:

$$e(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + I \cdot \sin(\omega_m t)) \tag{18}$$

Diese Formel entspricht somit der von Chowning vorgestellten Formel für eine FM-Synthese und ist im Kontext der Akustik korrekt. Zusammengefasst wurde ersichtlich, dass die Formel von Chowning, streng mathematisch betrachtet, keine FM-Synthese darstellt, sondern eine „PM-Synthese“. Dieser feine Unterschied spielt jedoch in der Akustik kaum eine Rolle. Im nächsten Kapitel werden Klangspektren berechnet um den Klangcharakter zu bestimmen. Um ein solches Klangspektrum zu bestimmen, muss bekannt sein welche Formel tatsächlich implementiert wurde.

### 2.2.2 Klangspektrum der FM-Synthese

Ein Ton wird durch eine einfache Sinusschwingung erzeugt. Die Lautstärke eines Tones, hängt von der Amplitude der Schwingung ab. Je größer die Amplitude desto lauter wirkt der Ton. Die Frequenz einer Schwingung empfindet der Mensch als Tonhöhe. Je größer die Frequenz desto höher wird der Ton empfunden. Das menschliche Ohr nimmt Frequenzen zwischen 16 Hz und 20 kHz wahr. Mit zunehmendem Alter nimmt die obere Hörschwelle ab. [Bor80, S. 199] Ein natürlicher Klang setzt sich nicht aus einer einzigen Frequenz zusammen, sondern aus mehreren Teiltönen. Jeder Teilton entspricht einem Sinuston mit einer bestimmten Frequenz, welche ein ganzzahliges Vielfaches des tiefsten Teiltones ist. Der tiefste Teilton, also der Teilton mit der niedrigsten Frequenz, wird als Grundton bezeichnet. [Bor80, S. 87] Dabei kann das menschliche Gehör die Tonhöhe

bestimmen, auch wenn der Grundton schwach ausgeprägt oder nicht vorhanden ist. [PDEZ67, S. 4] Abbildung 10 zeigt die Wellenform eines Geigentones und dem dazu gehörigen Frequenzspektrum. Obwohl der Grundton wenig dominiert, die ersten acht Frequenzen sind in etwa gleichstark, würde das Ohr die Tonhöhe richtig erkennen. Außerdem nehmen wir neben der Tonhöhe und Lautstärke eines Tones etwas Weiteres war. Das Spektrum eines Tones vermittelt uns ein Gefühl für unterschiedliche Klänge. Dieses Empfinden wird als Klangfarbe bezeichnet und lässt uns z.B. zwischen verschiedenen Instrumenten unterscheiden. [PDEZ67, S. 5] [Rai06, S. 226] Die stark vereinfachte Funktionsweise des menschlichen Ohrs, gibt Ausschluss darüber, warum Teiltöne entscheidend für den Klangcharakter sind. Die Schallwellen eines Klanges versetzen im Ohr, genauer in der Gehörschnecke, eine Flüssigkeit in Schwingung. Dadurch, dass die Gehörschnecke sich verengt, treffen die unterschiedlichen Frequenzen in Kombination mit der Amplitude, an unterschiedlichen Stellen auf Sinneshaare, welche die entsprechenden elektrischen Signale an das Gehirn weiterleiten. [PDEZ67, S. 87 f.]

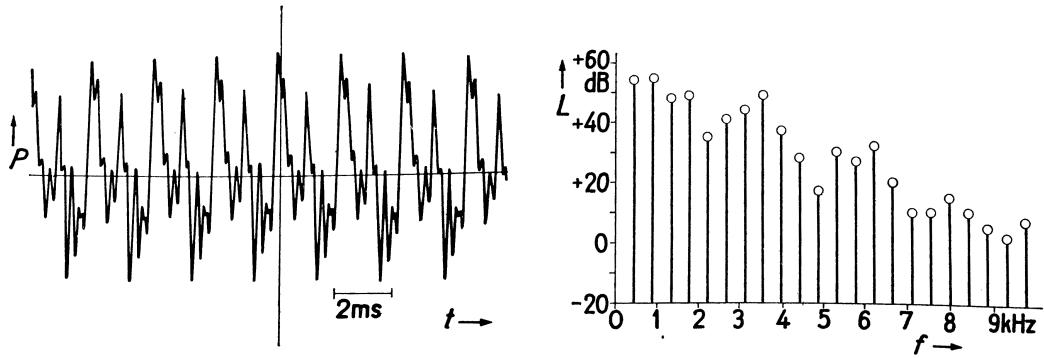


Abbildung 10: Links: Schalldruck eines Geigenklangs; Rechts: Frequenzspektrum dieses Klanges  
Quelle: [PDEZ67, S. 4]

Bei der FM-Synthese treten Seitenschwingungen durch die zeitliche Änderung der Frequenz auf. Um daher einen ungefähren Eindruck eines synthetisierten Tones zu bekommen, reicht es nicht aus, die berechnete Kurve (Wellenform) zu betrachten, welche eine Funktion der Zeit ist. Daher muss eine alternative Darstellung des Signals gesucht werden. Hierzu eignet sich ein **Frequenzspektrum**. Es berechnet die Intensität einer gegebenen Frequenz und ist somit eine Funktion der Frequenz. Das Frequenzspektrum lässt sich durch Fourier-Analyse bestimmen. So kann jede periodische, komplexe Sinuswelle als Fourier-Reihe dargestellt werden. Diese ist als Addition aus mehreren Teilsinuswellen mit unterschiedlichen Amplituden definiert. [Rai06, S. 33] Durch mathematische Umformungen (siehe Kap. 3.1.1) kann die Formel 18 der FM-Synthese als folgende Summe dargestellt werden: [Cho73]

$$\begin{aligned}
 s(t) = A \cdot & \{ J_0(I) \cdot \sin(\omega_c t) \\
 & + J_1(I) \cdot [\sin(t \cdot (\omega_c + \omega_m)) - \sin(t \cdot (\omega_c - \omega_m))] \\
 & + J_2(I) \cdot [\sin(t \cdot (\omega_c + 2\omega_m)) + \sin(t \cdot (\omega_c - 2\omega_m))] \\
 & + J_3(I) \cdot [\sin(t \cdot (\omega_c + 3\omega_m)) - \sin(t \cdot (\omega_c - 3\omega_m))] \\
 & + \dots \}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Hier bezieht sich  $J_\nu(x)$  auf die Bessel-Funktionen erster Ordnung, mit  $\nu, x \in \mathbb{R}$ . [Tem96, S. 223] Im Zusammenhang mit der FM-Synthese werden jedoch nur ganzzahlige  $\nu$  Werte benötigt. Um diesen Umstand zu verdeutlichen wird im Folgenden  $\nu$  als  $n$  angegeben. Abbildung 11 stellt die ersten drei Bessel-Funktionen dar.

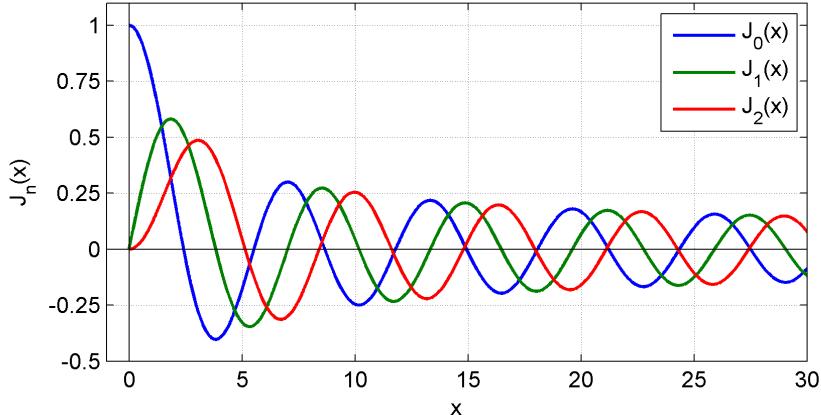


Abbildung 11: 2D-Plot der Bessel Funktionen  $J_0$ ,  $J_1$  und  $J_2$ .

Allgemein sind die Bessel-Funktionen Lösungen für die Besselsche Differentialgleichung. [Tem96, S. 220] Bei der FM-Synthese treten sie in Erscheinung, sobald die Formel 18 der FM-Synthese als Fourier-Reihe dargestellt wird. Eine Fourier-Reihe setzt sich aus der Addition aus Sinus Funktionen multipliziert mit einem Fourier-Koeffizienten zusammen. Für die FM-Synthese entspricht dieser Koeffizient der Bessel-Funktionen erster Ordnung. [Lat98, S. 221] Die genaue mathematische Herleitung soll an dieser Stelle nicht behandelt werden. Es soll jedoch angemerkt sein, dass  $J_n(x)$  nicht elementar berechnet werden kann und numerisch bestimmt werden muss. [AS64, S. 385] Funktionswerte können in geeigneten Tabellen nachgeschlagen werden. [Dav27]

Wie oben beschrieben, besteht ein Klang nicht nur aus seinem Grundton sondern auch aus Seitenfrequenzbändern. Theoretisch treten unendlich viele solcher Frequenzbänder auf, jedoch werden diese nicht mehr vom Ohr wahrgenommen, wenn sie eine gewisse Grenze an Intensität unterschreiten. [Lat98, S. 221] Die Amplitude der Trägerschwingung lässt sich durch  $J_0(I)$  berechnen, wobei  $I$  für den Modulationsindex steht. Dies lässt sich auch einfach aus Formel 19 entnehmen. Der erste Additionsterm  $J_0(I) \sin(\omega_c t)$  entspricht der Trägerfrequenz. Bei einem Modulationsindex von  $I = 0$  findet keine Frequenzmodulation statt. An Abbildung 11 wird ersichtlich, dass  $J_0(0) = 0$  ist. Für alle weiteren Bessel-Funktionen gilt  $J_n(0) = 0$ , damit reduziert sich die Addition aus Formel 19 auf die Grundschwingung  $1 \cdot \sin(\omega_c t)$  und deckt sich somit mit unserer Erwartung, dass keine Modulation stattfindet. Die Amplitude der n-ten Seitenschwingung berechnet sich durch  $J_n(I)$  wobei  $n$  für die n-te Seitenfrequenz steht. Für Oberschwingungen ist  $n$  immer positiv, für Unterschwingungen negativ. Bei negativen  $n$  Werten gilt folgender Zusammenhang: [Tem96, S. 223]

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Die Formel drückt aus, dass für ungerade Seitenschwingungen das Vorzeichen invertiert werden muss, bei geraden Seitenschwingungen allerdings nicht. Dies ist auch in der Summenformel 19 ersichtlich. Für ungerade  $n$  Werte werden die Sinus Werte subtrahiert, bei geraden  $n$  addiert. Dies wird offensichtlich, wenn  $J_n(I)$  mit der Klammer multipliziert wird, wie in Formel 27 in Kapitel 3.1.1.

Wird nun der Modulationsindex stetig erhöht, wird Energie von der Grundfrequenz auf die Seitenbänder verteilt. Dieser Vorgang wird durch den Verlauf der Bessel-Funktionen bestimmt. Dies lässt sich an Abbildung 11 verdeutlichen. Wird  $I$  größer, fällt die Amplitude von  $J_0(I)$  ab und die restlichen Bessel-Funktionen steigen an.  $J_0(I)$  durchläuft den Nullpunkt bei  $\approx 2,5$ . Das bedeutet bei einem Modulationsindex von ungefähr 2,5 ist der Grundton nicht im Frequenzspektrum vorhanden. Es besteht daher nur noch aus Seitenfrequenzen. In Abbildung 12 wird der Modulationsindex von 0 bis 4 inkrementiert. Es wird ersichtlich, wie immer mehr Seitenfrequenzen

entstehen und dabei die Grundfrequenz abnimmt. In Abbildung 12 wird der Betrag der Amplitude dargestellt, somit wird die Grundfrequenz für  $I = 3$  im Vergleich zu  $I = 2$  wieder größer, da die Bessel-Funktion den Nullpunkt durchlaufen hat und im negativen Bereich größer wird, bis das lokale Minimum erreicht wird und der Betrag wieder bis 0 abnimmt.

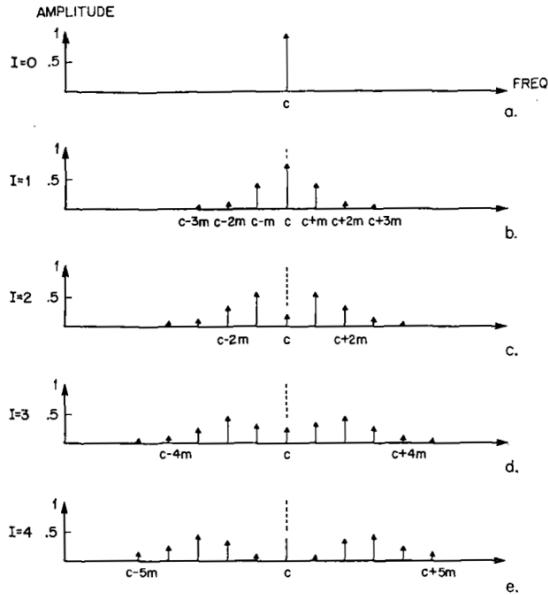


Abbildung 12: Beispiel zur Veranschaulichung der zunehmenden Bandbreite in Abhängigkeit eines wachsenden Modulationsindex.  $c$  entspricht der Trägerfrequenz;  $c \pm n \cdot m$  entspricht der  $n$ -ten Seitenfrequenz.

Quelle: [Cho73]

An Abbildung 12 ist auch zu erkennen, dass die Seitenfrequenzen sich symmetrisch in negativer und positiver Richtung zur Grundfrequenz ausbreiten. Dies wird auch an Formel 19 ersichtlich. Der innere Teil vom Sinus entspricht der Seitenfrequenz, wobei  $(\omega_c + n \cdot \omega_m)$  der  $n$ -ten Oberschwingung entspricht und  $(\omega_c - n \cdot \omega_m)$  der  $n$ -ten Unterschwingung.  $J_n(I)$  gibt die Amplitude der  $n$ -ten Unter- und Oberschwingung an. Dies ist ein Vorteil der FM-Synthese im Vergleich zu anderen Sound-Synthese Verfahren. Durch eine relativ simple Änderung des Modulationsindex können komplexe Klänge mit reichem Klangspektrum erzeugt werden. Die Bandbreite  $B_{FM}$  des Klangspektrums bei der FM-Synthese entspricht: [Lat98, S. 221]

$$B_{FM} = 2nf_m = 2(I + 1)f_m \quad (20)$$

Die Bandbreite des synthetisierten Tones ist somit abhängig vom Modulationsindex und der Modulationsfrequenz. Dieser Zusammenhang lässt sich aus dem graphischen Verlauf der Bessel-Funktionen mit einem variablen Wert  $n$  ablesen (s. 13). Für einen festen Wert  $I$ , nimmt  $J_n(I)$  ab. Für ein ausreichend großes  $n$  können weitere Seitenfrequenzen ignoriert werden, da ihre Amplituden vernachlässigbar klein werden. Durch die obige Formel kann auch ein Zusammenhang zwischen Modulationsindex und Anzahl der Seitenfrequenzbänder hergestellt werden. Die Anzahl der signifikanten Seitenfrequenzen  $n$  ist in etwa  $I + 1$ . Wird ein zeitabhängiger Modulationsindex  $I(t)$  verwendet, kann die Bandbreite des Spektrums zusätzlich variiert werden. Dies schafft weitere Möglichkeiten bei der Klanggestaltung.

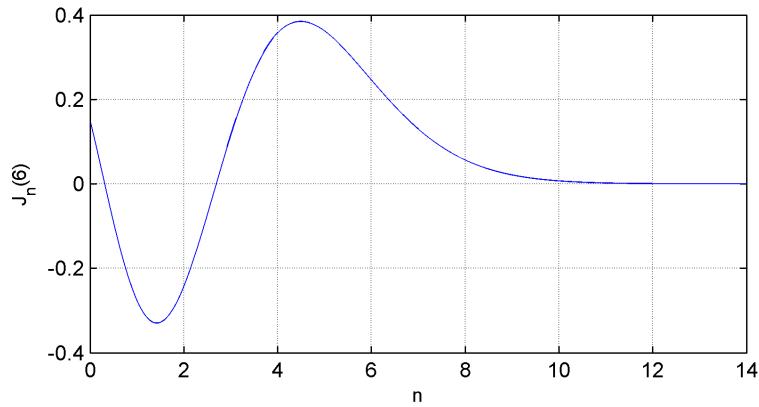


Abbildung 13: Bessel-Funktionen in Abhängigkeit von  $n$  für  $I = 6$ . Am Verlauf der Kurve ist ersichtlich, dass die Amplituden der Seitenfrequenzen ab  $n = 7$  so gut wie nicht mehr vorhanden sind.

Wie in Kapitel „1.1 Prinzip der FM-Synthese“ beschrieben, ist es jedoch schwer das Ergebnis der FM-Synthese vorherzusehen. Dies liegt zum Einen an dem schwingenden Verlauf der Bessel-Funktionen und deren Wirken auf die Seitenschwingungen. Abbildung 14 stellt die Bessel-Funktionen  $J_0$  bis  $J_{15}$  dreidimensional, in Abhängigkeit des Modulationsindexes dar. Durch genaue Betrachtung des Funktionsverlaufs lässt sich ein Gefühl für die Veränderung der Seitenfrequenzen entwickeln.

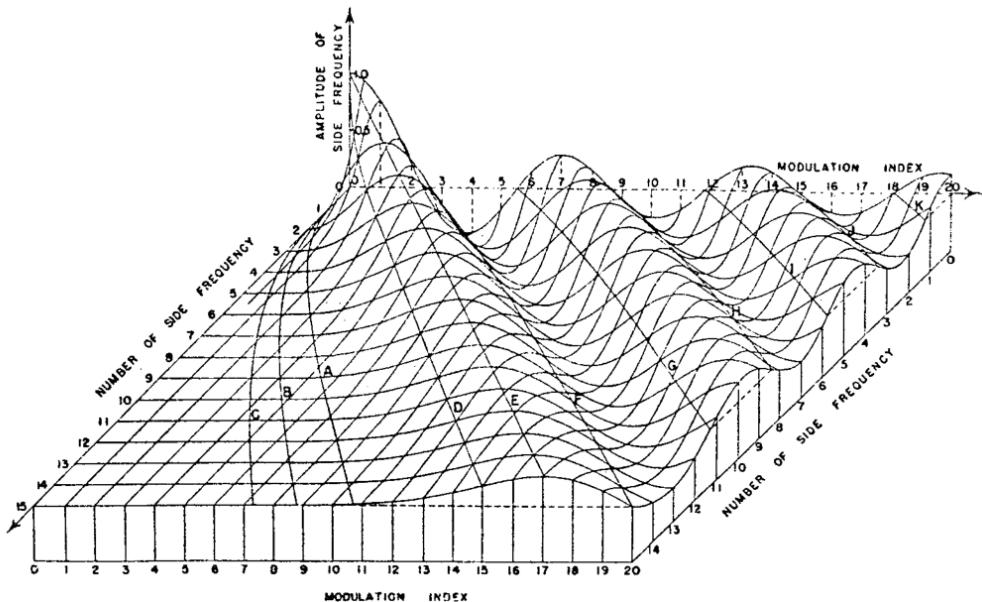


Abbildung 14: 3D Darstellung der Bessel-Funktionen  $J_0$  bis  $J_{15}$  und Modulationsindex  $I$  von 0 bis 20.

Quelle: [Cho73]

Zwei weitere Effekte erschweren die Vorhersehbarkeit. Der erste Effekt betrifft negative Seitenfrequenzen. Eine negative Frequenz entspricht einer Phasenverschiebung von  $\pi$ . Daher muss das Vorzeichen der Amplitude einer solchen Frequenz invertiert werden und der Betrag der Frequenz wird verwendet. Dies lässt sich anschaulich als Punktspiegelung am Ursprung vorstellen.

Chowning bezeichnet diesen Umstand als Reflexion der Frequenzen. Der zweite Effekt betrifft Frequenzen, die den selben Zahlenwert haben. Dabei werden die Amplituden der gleichen Frequenzen algebraisch addiert. Dies kann auch zuvor reflektierte Frequenzen betreffen. Daher kann es unter Umständen schwer sein, einen gegebenen Klang durch FM-Synthese zu rekonstruieren, da keine direkte Kontrolle über die Teiltöne, wie bei der additiven Synthese, gegeben ist. Abbildung 15 veranschaulicht das Verhalten der Seitenfrequenzen.

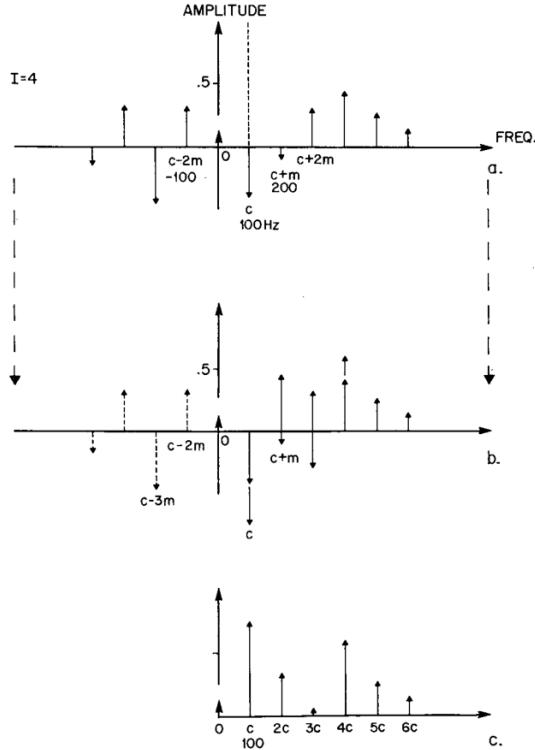


Abbildung 15: In *a* sind alle Frequenzen an ihren ursprünglichen Positionen eingezeichnet. In *b* wurden negative Frequenzen in den positiven Frequenzbereich reflektiert. *c* entspricht dem endgültigen Spektrum. Für  $f_c = f_m = 100$  und  $I = 4$ .

Quelle: [Cho73]

### 2.2.3 Harmonische Frequenzverhältnisse

Bisher wurde nur wenig auf die beiden Frequenzparameter eingegangen. Diese können theoretisch beliebige Werte annehmen, so lange sie innerhalb des hörbaren Frequenzbereichs liegen. Ist das Ziel jedoch harmonische Klänge für Musik zu synthetisieren, müssen Trägerfrequenz und Modulationsfrequenz in einem besonderen Verhältnis stehen. Genauer gesagt muss das Verhältnis durch eine rationale Zahl beschrieben werden können, also durch einen Bruch aus zwei ganzen Zahlen  $N_1$  und  $N_2$ . Somit gilt:

$$\frac{f_c}{f_m} = \frac{N_1}{N_2}$$

Ist der Bruch  $N_1/N_2$  zusätzlich gekürzt, ergibt sich für die Grundfrequenz  $f_0$  der modulierten Schwingung folgende Gleichung:

$$f_0 = \frac{\omega_c}{N_1} = \frac{\omega_m}{N_2}$$

Für die Positionen der Seitenfrequenzen in der harmonischen Reihe des Klangs gilt:

$$k = N_1 + n \cdot N_2 \quad (21)$$

Wobei  $k$  der Nummer der Harmonischen entspricht und  $n$  der  $n$ -ten Seitenfrequenz. Unter den obigen Bedingungen lassen sich weitere, für die Klangerzeugung hilfreiche Aussagen treffen: [Cho73]

- 1) Die Trägerfrequenz ist immer die  $N_1$ -te Harmonische.
- 2) Für  $N_2 = 1$  enthält das Spektrum alle Harmonischen und der Grundton entspricht der Modulationsfrequenz.
- 3) Wenn  $N_2$  gerade ist, enthält das Spektrum nur ungerade Harmonische.
- 4) Ist  $N_2 = 3$ , fehlt jede dritte Harmonische in der Reihe der Harmonischen.

Die tatsächliche Anzahl der Harmonischen im modulierten Signal mit ausreichend großer Amplitude ist abhängig vom Modulationsindex. Für kleine Indizes und Frequenzverhältnisse mit  $N_1 \neq 1$  kann der Grundton nicht im erzeugten Klang vorhanden sein. Die Seitenschwingungen im negativen Frequenzbereich werden, wie weiter oben beschrieben, am Ursprung ins Positive gespiegelt. Solang das Verhältnis eine rationale Zahl ist, werden diese Frequenzen genau auf die positiven Frequenzen der Harmonischen reflektiert und auf diese addiert. Es entstehen somit keine neuen Frequenzen neben den Harmonischen. Ist das Verhältnis der beiden Frequenzen jedoch irrational, zum Beispiel  $f_c/f_m = 1/\sqrt{2}$ , treffen die reflektierten Frequenzen nicht genau auf die positiven Frequenzen und erzeugen somit Seitenfrequenzen, die kein ganzzahlig Vielfaches der Grundfrequenz sind. Es resultiert ein disharmonisches Klangspektrum.

Ein weiteres, erwähnenswertes Frequenzverhältnis tritt auf, wenn die Modulationsfrequenz relativ gering ist. Wie in „1.3 Geschichte der FM-Synthese“ beschrieben, entdeckte Chowning nach eigener Angabe die FM-Synthese beim Experimentieren mit einem Vibrato. Der Begriff Vibrato kommt aus der Musik und beschreibt eine oszillierende, leichte Variation der Tonhöhe und somit der Frequenz. Dieser Effekt ist gerade bei Violinisten erwünscht und lässt den Ton „reicher“ und „zarter“ klingen. [Tob70, S. 422] Da der Vibrato eine Abweichung der Tonhöhe und somit eine periodische Änderung der Frequenz ist, lässt sich einfach nachvollziehen wie Chowning beim Experimentieren mit verschiedenen Zahlenwerten die FM-Synthese entdeckte. Von einem Vibrato wird gesprochen, wenn die Modulationsfrequenz unter 20 Hz liegt. In Abbildung 16 ist ein Vibrato in einem Spektrogramm dargestellt, die oszillierende Trägerfrequenz lässt sich gut erkennen.

Die beschriebenen Zusammenhänge zwischen Träger- und Modulationsfrequenz stellen interessante Eigenschaften der FM-Synthese dar. Sie können einen praktischen Mehrwert bringen bei der Nachbildung von Tönen. So kann zum Beispiel gezielt ein harmonisches Klangspektrum erzeugt werden oder eben nicht, je nachdem welches Instrument rekonstruiert werden soll.

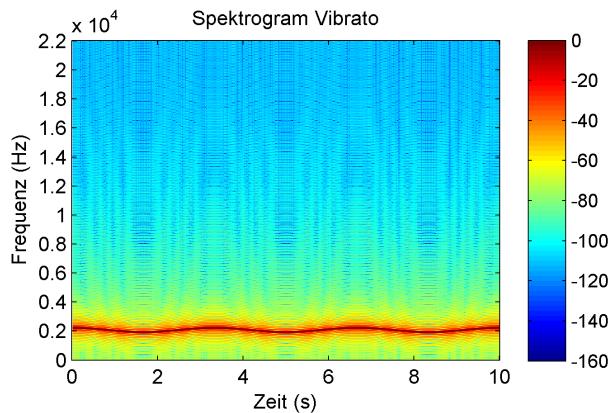


Abbildung 16: Gut sichtbarer Vibrato bei einer Trägerfrequenz von 2093 Hz, was einem C4 Ton entspricht. Die Modulationsfrequenz ist mit 0.3 Hz sehr niedrig gewählt und der Modulationsindex relativ hoch mit  $I = 500$ .

### 3 Prinzipien der komplexen FM-Synthese

Die bisherige Darstellung der Soundsynthese durch Frequenzmodulation (FM) hat sich auf die *einfache* FM konzentriert, d.h. auf die Modulation eines einzelnen Trägers durch einen einzigen Modulator. Dadurch konnten die Prinzipien der Einflussnahme auf die Sounderzeugung über die Parameter von Trägerfrequenz, Modulationsfrequenz sowie den Modulationsindex analytisch klar isoliert werden. In der Praxis ist diese Limitation nicht notwendig, so dass zur Erzeugung komplexer Klangspektren auf den gleichzeitigen Einsatz mehrerer Träger und Modulatoren zurückgegriffen wird. Diese können dabei flexibel miteinander verschaltet werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von der *komplexen* FM. Im Folgenden werden die Prinzipien der komplexen FM näher beleuchtet. Auch hier wird zunächst mit einer künstlichen Limitation gearbeitet und der bisher betrachtete Fall entweder um einen weiteren Träger erweitert oder um einen weiteren Modulator. Denkbar sind unter diesen Bedingungen zwei grundsätzliche Verschaltungsmuster, und zwar zum einen eine Parallelschaltung, zum anderen eine Reihenschaltung. Als spezielle Form der Reihenschaltung kann die Rückkopplung des Trägersignals auf sich selbst gesehen werden; diese sogenannte Feedback-Schaltung wird ebenfalls vorgestellt.

#### 3.1 Parallelschaltung

##### 3.1.1 Parallele Träger mit jeweils eigenem unabhängigen Modulator

Zur Vollständigkeit soll die simpelste Erweiterung der einfachen FM nicht unerwähnt bleiben, und zwar die Situation zweier paralleler Träger, denen je ein eigener Modulator zugeordnet ist:

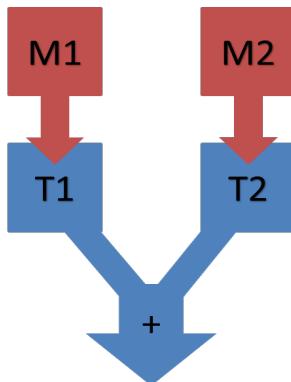


Abbildung 17: Schema der Schaltung zweier Träger mit jeweils eigenem Modulator.

Dabei handelt es sich strenggenommen noch um keine komplexe FM, da die Signalpfade beider Träger erst auf der Ebene des Gesamtausgangssignals gemischt werden und sich ansonsten nicht weiter beeinflussen. Jedes Träger-Modulator-Paar, also  $T_1$  mit  $M_1$  sowie  $T_2$  mit  $M_2$ , folgt dabei für sich genommen den Prinzipien der einfachen FM, so dass für jedes Paar die Lage der Seitenfrequenzbänder gesondert bestimmt und addiert werden kann, womit sich das Gesamt-Ausgangssignal  $T_1 < M_1 + T_2 < M_2$  ergibt. Lage und Amplitude der Seitenfrequenzbänder folgen direkt aus der gewählten Funktion für die Frequenzmodulation, auch wenn die Herleitung nichttrivial ist und Kenntnis der Eigenschaften der Besselfunktion voraussetzt.

Alle Spektren und Wellenformen in diesem Kapitel der Seminararbeit wurden auf Basis der unten angegebenen Funktion für die FM modelliert. Auf einen Koeffizienten  $A$ , der üblicherweise für die Amplitude des gesamten Ausgangssignals vorne auf die Funktion aufmultipliziert wird, wird im Lauf der folgenden Ausführungen für verbesserte Übersichtlichkeit stets verzichtet:

$$f_{FM}(t) = \sin(w_c t + I \sin(w_m t)) \quad \text{mit } w_c t \text{ als Träger- und } w_m t \text{ als Modulationsfreq. (22)}$$

Um eine Funktion für das Frequenzspektrum zu erhalten, expandiert man diese über das trigonometrische Additionstheorem  $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$  und erhält

$$\sin(w_c t + I \sin(w_m t)) = \sin(w_c t) \cos(I \sin(w_m t)) + \cos(w_c t) \sin(I \sin(w_m t)). \quad (23)$$

Die inneren Terme  $\cos(I \sin(w_m t))$  und  $\sin(I \sin(w_m t))$  können nun über die Besselfunktion wie folgt ausgedrückt werden. Die Herleitung geschieht über die Erzeugerfunktion; siehe [AS64, S.361, Satz 9.1.42 und Satz 9.1.43]:

$$\sin(I \sin(w_m t)) = 2J_1(I) \sin(w_m t) + 2J_3(I) \sin(3w_m t) + \dots + 2J_{2n+1}(I) \sin((2n+1)w_m t) + \dots \quad (24)$$

$$\cos(I \sin(w_m t)) = J_0(I) + 2J_2(I) \cos(2w_m t) + \dots + 2J_{2n}(I) \cos(2nw_m t) + \dots \quad (25)$$

Man setzt dies in den Ausdruck 23 ein und expandiert alle auftretenden Terme  $\sin(w_c t) \cos(2nw_m t)$  über das Additionstheorem  $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$  sowie alle Terme der Form  $\cos(w_c t) \sin((2n+1)w_m t)$  über  $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$ . Letztlich gilt:

$$\begin{aligned} \sin(w_c t + I \sin(w_m t)) &= J_0(I) \sin(w_c t) \\ &+ J_1(I)(\sin(w_c t + w_m t) - \sin(w_c t - w_m t)) \\ &+ J_2(I)(\sin(w_c t + 2w_m t) + \sin(w_c t - 2w_m t)) \\ &+ J_3(I)(\sin(w_c t + 3w_m t) - \sin(w_c t - 3w_m t)) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (26)$$

([Cho73, S.528]). Zieht man die Besselkoeffizienten in die Klammer, lässt sich die Lage der Seitenfrequenzbänder bereits aus der Funktion auslesen:

$$\begin{aligned} \sin(w_c t + I \sin(w_m t)) &= J_0(I) \sin(w_c t) \\ &+ J_1(I) \sin(w_c t + w_m t) - J_1(I) \sin(w_c t - w_m t) \\ &+ J_2(I) \sin(w_c t + 2w_m t) + J_2(I) \sin(w_c t - 2w_m t) \\ &+ J_3(I) \sin(w_c t + 3w_m t) - J_3(I) \sin(w_c t - 3w_m t) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Die erste Zeile zeigt hier die Lage der Trägerfrequenz an, während jede folgende Zeile stets die Lage eines oberen Seitenbands angibt (erster Term) sowie das dazugehörige untere Seitenband (zweiter Term).

Die Funktion 27 kann übersichtlich zusammengefasst werden ([Sch]) zu

$$\sin(w_c t + I \sin(w_m t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(I) \sin(w_c t + nw_m t) \quad (28)$$

Das Frequenzspektrum für die einfache FM weist also sowohl oberhalb der Trägerfrequenz als auch unterhalb Seitenbändern stets im Abstand  $w_m$  auf. Die jeweiligen Amplituden werden dabei durch die Laufvariable  $n$  der Besselfunktion bestimmt, und zwar in Abhängigkeit vom Modulationsindex, welcher als Argument an diese übergeben wird. Die Besselfunktion liefert dabei ab einem Modulationsindex größer ca. 2,5 auch negative Vorzeichen für die Amplituden der Seitenfrequenzen zurück, wie die grafischen Darstellung der Besselfunktion mit den Achsen *Modulationsindex* und *Nummer des Seitenbands* zeigt (siehe hierzu 14).

In der Darstellung 27 lässt sich am Vorzeichen des jeweiligen Terms zusätzlich auch ablesen, dass Besselkoeffizienten mit ungerader Laufvariablen  $n$  zu negativen Amplitudenwerten des jeweiligen unteren Seitenbandes führen. Untere Seitenbänder können nun bei Trägerfrequenzen nahe 0

Hz oder einem ausreichend großen Modulationsindex natürlich auch im negativen Hz-Bereich landen. Da negative Frequenzen, also Seitenbänder links der 0 Hz, einer Phasenverschiebung um 180 Grad entsprechen, erhält man das endgültige, akustisch wahrgenommene Frequenzspektrum durch die Spiegelung dieser negativen Frequenzen je einmal an Abszisse und Ordinate. Dies entspricht einer Phasenverschiebung (Spiegelung Abszisse), und zwar nun im positiven Bereich (Spiegelung Ordinate). Dabei kann es natürlich zur Auslöschung von Bändern durch die Addition ursprünglich negativer Amplituden der unteren Seitenbänder mit negativen Frequenzen auf bereits vorhandene positive Amplituden der oberen Seitenbänder im positiven Bereich kommen. Umgekehrt kann natürlich auch eine Verstärkung die Folge sein, wenn negative Seitenfrequenzbänder links der 0 Hz mit positiver Amplitude auf positive Bänder mit positiver Amplitude fallen.

Die für beide Paare  $T1 < M1 + T2 < M2$  anhand dieser Prinzipien ermittelten Frequenzspektren können für diese Form der Parallelschaltung in einem abschließenden Schritt einfach addiert werden und liefern so das gesamte Frequenzspektrum des gemischten Ausgangssignals.

Dies lässt sich in MATLAB komfortabel visualisieren. Zunächst das erste Paar  $T1$  und  $M1$ :

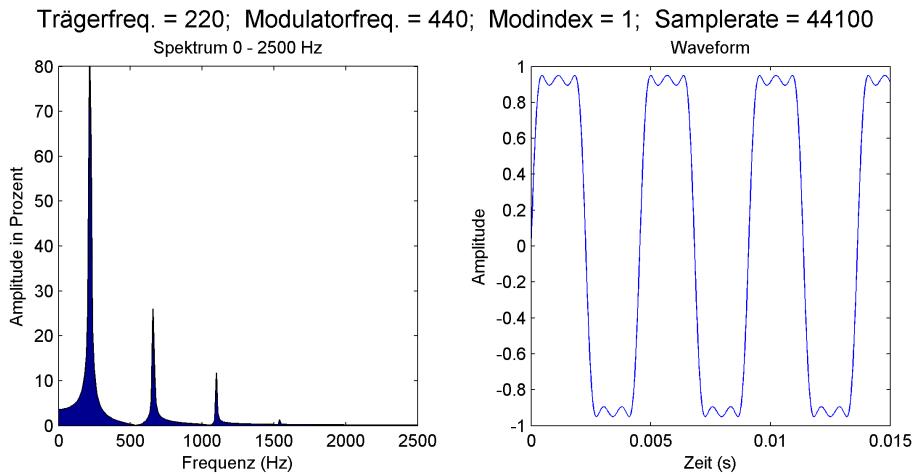


Abbildung 18: Einfache FM mit  $f_c = 220$ ,  $w_m = 440$ ,  $I = 1$ .

Hier das Spektrum für  $T2$  und  $M2$ :

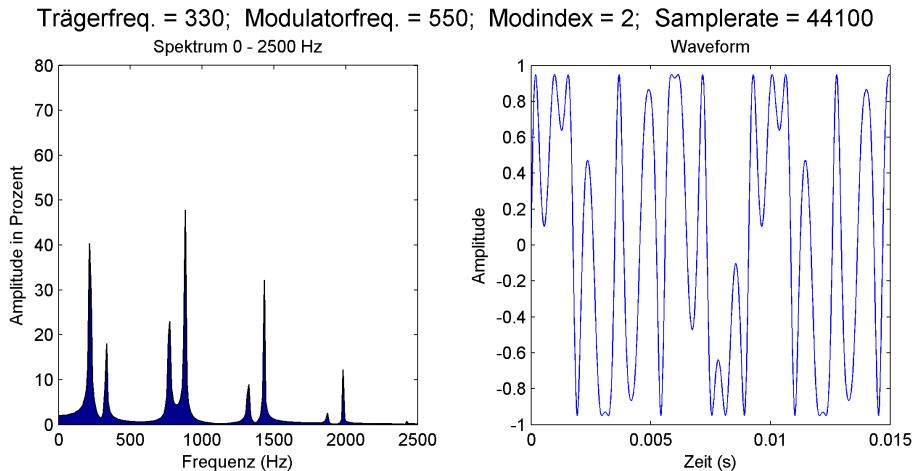


Abbildung 19: Einfache FM mit  $f_c = 330$ ,  $w_m = 550$ ,  $I = 2$ .

Bei den Spektren für beide einfachen FM sieht man sehr gut, dass sich die Seitenfrequenzbänder in Abständen der Modulationsfrequenz um die Trägerfrequenz nach beiden Seiten hin ausbreiten.

Abschließend das Spektrum für die Parallelschaltung beider Träger-Modulator-Paare. Man sieht sehr gut, dass sich die Einzelspektren aus den beiden Plots oben aufaddieren:

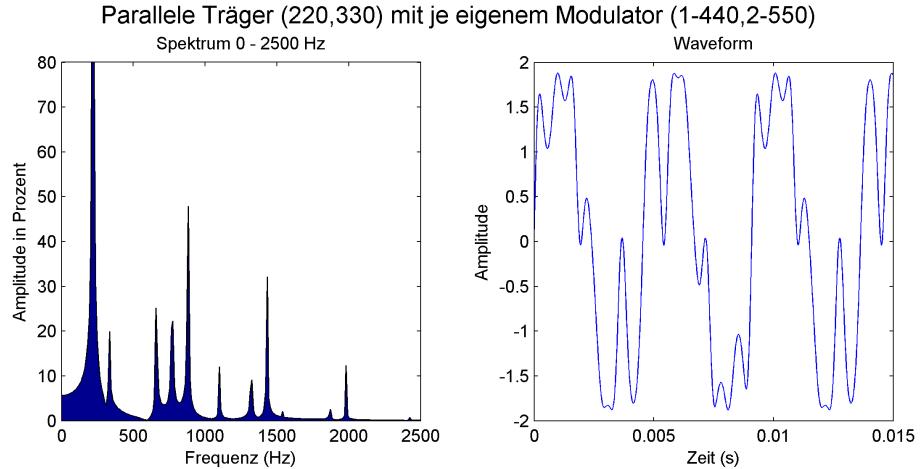


Abbildung 20: Parallele FM mit  $f_{c1} = 220$ ,  $f_{c2} = 330$ ,  $w_{m1} = 440$ ,  $w_{m2} = 550$ ,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 2$ .

### 3.1.2 Parallele Träger mit einem gemeinsamen Modulator

Teilen sich zwei Träger  $T_1$  und  $T_2$  denselben Modulator  $M$ ,

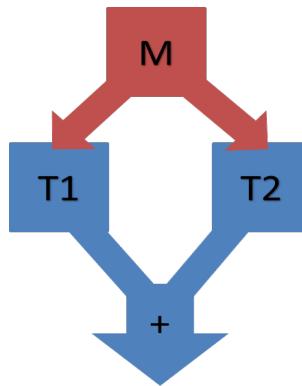


Abbildung 21: Schema der Schaltung zweier Träger mit gemeinsamem Modulator.

so kann das Frequenzspektrum ebenfalls als Summe zweier unabhängiger einfacher FM betrachtet werden. Hierzu berechnet man zunächst das Frequenzspektrum des einen Trägers  $T_1$  bei der Modulationsfrequenz und Modulationsindex des Modulators  $M$ . Anschließend berechnet man das Frequenzspektrum für den zweiten Träger  $T_2$ , wobei wieder Frequenz und Modulationsindex von Modulator  $M$  bezogen werden. Aufsummiert ergibt sich das Gesamtspektrum. Das Interessante an dieser Form der Parallelschaltung besteht in der Möglichkeit, nur einen einzigen Modulator zur Modulation mehrerer vorhandener Träger, deren Modulatoren dieselbe Modulationsfrequenz aufweisen, zu verwenden. Dadurch können die freigewordenen Modulatoren für andere Zwecke verwendet werden, z.B. um einen der Träger parallel durch zwei Modulatoren zu modulieren (siehe 3.1.3) oder sogar zum Modulieren des bereits eingesetzten Modulators (was dann der Kaskadschaltung entspräche, siehe 3.2).

Die Möglichkeit, denselben Modulator für verschiedene Träger zu verwenden, bedeutet logischerweise, dass die *individuelle* Modulierbarkeit beider Träger aufgegeben wird, da sich Änderungen an den Einstellungen von  $M$  nun zwangsläufig sowohl auf  $T1$  als auch auf  $T2$  auswirken. Die gleiche Mächtigkeit zweier paralleler Träger mit demselben Modulator  $M$  im Vergleich zum Setup mit mehreren Trägern, welche jeweils ihren eigenen Modulator besitzen, wobei jedoch jeder dieser Modulatoren genau dieselben Einstellungen wie  $M$  aufweist, sei im Folgenden illustriert.

Zunächst das Spektrum zweier Träger, die jeweils von eigenen Modulatoren mit gleichen Einstellungen moduliert werden. Zuerst für den einen Träger:

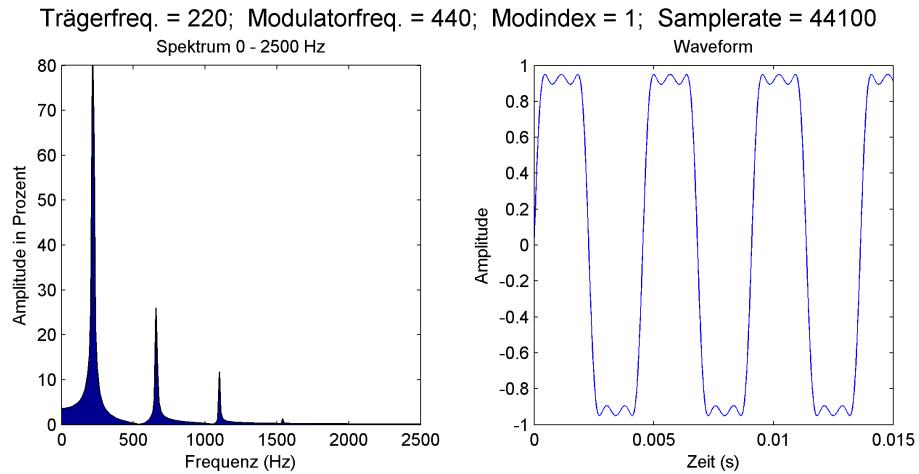


Abbildung 22: Einfache FM mit  $f_c = 220$ ,  $w_m = 440$ ,  $I = 1$ .

Nun für den zweiten Träger:

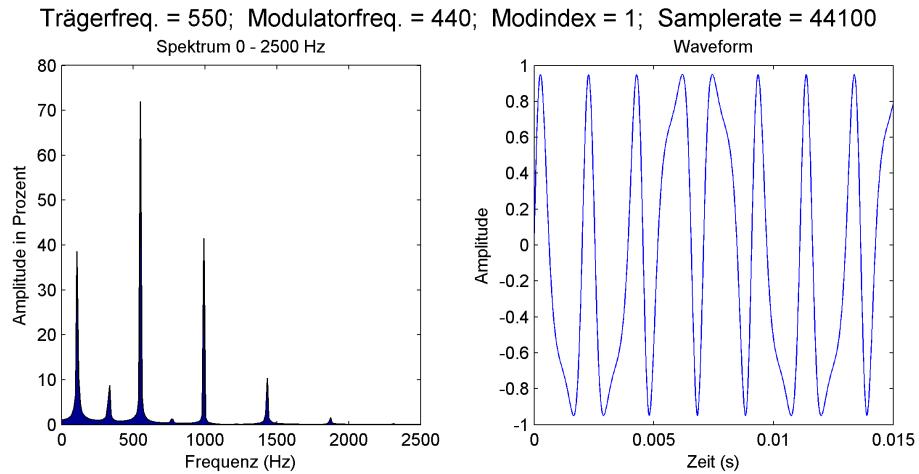


Abbildung 23: Einfache FM mit  $f_c = 550$ ,  $w_m = 440$ ,  $I = 1$ .

Die parallele Modulation von T1 durch M1 sowie von T2 durch M2 wobei M1 und M2 exakt dieselben Einstellungen besitzen:

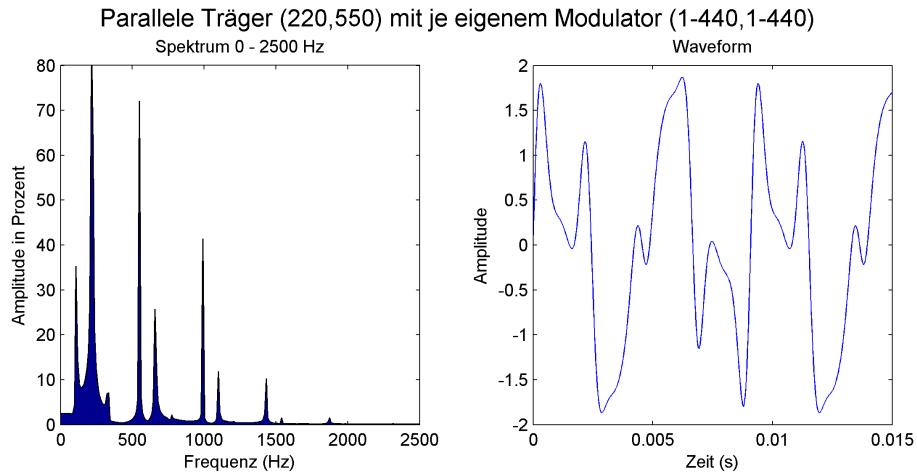


Abbildung 24: Parallele FM mit  $f_{c1} = 220$ ,  $f_{c2} = 550$ ,  $w_{m1} = 440$ ,  $w_{m2} = 440$ ,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 1$ .

Und abschließend zum Vergleich Wellenform und Frequenzspektrum zweier Träger, die sich denselben Modulator teilen:

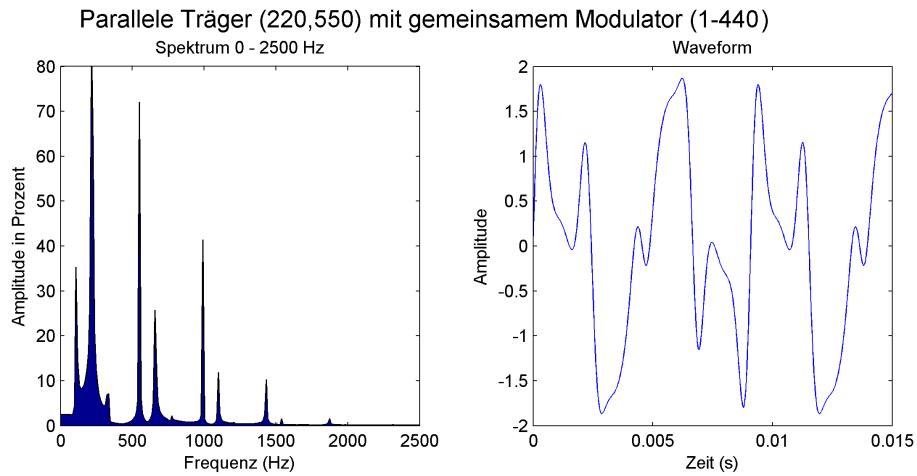


Abbildung 25: Parallele FM mit  $f_{c1} = 220$ ,  $f_{c2} = 550$ ,  $w_m = 440$ ,  $I = 1$ .

Wie man sieht, sind die Spektren für die Modulation durch zwei verschiedene Modulatoren absolut identisch mit der Modulation durch denselben Modulator, sofern alle Modulatoren dieselben Einstellungen aufweisen.

### 3.1.3 Einzelter Träger mit parallel geschaltetem Modulatorenpaar

Wird ein einzelter Träger  $T$  von zwei parallel geschalteten Modulatoren  $M1$  und  $M2$  gleichzeitig moduliert,

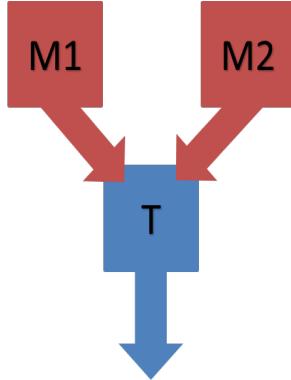


Abbildung 26: Schema der Schaltung eines Trägers mit zwei parallelen Modulatoren.

kann das erzeugte Frequenzspektrum nicht mehr einfach als Summe der Spektren zweier einfacher FM begriffen werden. Da sich die Auswirkungen der beiden Modulatoren auf den Träger gegenseitig beeinflussen, entstehen zahlreiche *Kombinationsseitenfrequenzen* ([CB86, S.117]) bzw. *Intermodulationsfrequenzen* ([Sch]). Das ist bereits aus der Funktion für diese Art der Parallelmodulation ersichtlich. Mit [Sch77, S.46] wird 22 wie folgt um einen weiteren Modulator erweitert:

$$f_{FM\,parallel}(t) = \sin(w_c t + I_1 \sin(w_{m1} t) + I_2 \sin(w_{m2} t)) \quad (29)$$

Nach mehrmaliger Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme zeigt sich im Vergleich mit dem Ausdruck 23 bereits, dass diese Formel eine Vielzahl zusätzlicher Terme generiert:

$$\begin{aligned} & \sin(w_c t + I_1 \sin(w_{m1} t) + I_2 \sin(w_{m2} t)) \\ &= \sin(w_c t) \cos(I_1 \sin(w_{m1} t)) \cos(I_2 \sin(w_{m2} t)) \\ &+ \cos(w_c t) \sin(I_1 \sin(w_{m1} t)) \cos(I_2 \sin(w_{m2} t)) \quad (30) \\ &+ \cos(w_c t) \cos(I_1 \sin(w_{m1} t)) \sin(I_2 \sin(w_{m2} t)) \\ &- \sin(w_c t) \sin(I_1 \sin(w_{m1} t)) \sin(I_2 \sin(w_{m2} t)) \end{aligned}$$

Substituiert man auch hier wieder jedes  $\sin(I \sin(w_{mx} t))$  mit 24 und  $\cos(I \sin(w_{mx} t))$  mit Formel 25 und wendet erneut die trigonometrischen Additionstheoreme an, so ergibt sich übersichtlich:

$$\sin(w_c t + I_1 \sin(w_{m1} t) + I_2 \sin(w_{m2} t)) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_i(I_1) J_k(I_2) \sin(w_c t + i w_{m1} t + k w_{m2} t) \quad (31)$$

Damit ergeben sich exakt  $i \times k$  Kombinationen der Besselfunktionskoeffizienten. Das bedeutet, dass bereits für alle Kombinationen der Indizes von -2 bis +2 ganze 25 verschiedene Terme generiert werden: 16 für die Kombinationsmöglichkeiten von 1 und 2 jeweils mit positivem und negativem Vorzeichen; weitere 9 für die Kombinationen von 0 mit 1 oder 2 inklusive beider Vorzeichen; schließlich noch die einzelne Kombination von 0 mit sich selbst. Nachdem jeder Term für ein Seitenband steht, kann man sich die Komplexität des resultierenden Spektrums leicht ausmalen.

Die entsprechenden Additionsterme lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \sin(w_c t + I_1 \sin(w_{m1} t) + I_2 \sin(w_{m2} t)) \\
& = J_0(I_1)J_0(I_2) \sin(w_c t) \\
& + J_0(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t + w_{m2} t) - J_0(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t - w_{m2} t) \\
& + J_0(I_1)J_2(I_2) \sin(w_c t + 2w_{m2} t) + J_0(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t - 2w_{m2} t) \\
& + J_1(I_1)J_0(I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t) - J_1(I_1)J_0(I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t) \\
& + J_1(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t + w_{m2} t) - J_1(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t - w_{m2} t) \\
& - J_1(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t + w_{m2} t) + J_1(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t - w_{m2} t) \\
& + J_1(I_1)J_2(I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t + 2w_{m2} t) + J_1(I_1)J_2(I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t - 2w_{m2} t) \\
& - J_1(I_1)J_2(I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t + 2w_{m2} t) - J_1(I_1)J_2(I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t - 2w_{m2} t) \\
& + J_2(I_1)J_0(I_2) \sin(w_c t + 2w_{m1} t) + J_2(I_1)J_0(I_2) \sin(w_c t - 2w_{m1} t) \\
& + J_2(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t + 2w_{m1} t + w_{m2} t) + J_2(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t + 2w_{m1} t - w_{m2} t) \\
& + J_2(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t - 2w_{m1} t + w_{m2} t) - J_2(I_1)J_1(I_2) \sin(w_c t - 2w_{m1} t - w_{m2} t) \\
& + J_2(I_1)J_2(I_2) \sin(2w_c t + 2w_{m1} t + 2w_{m2} t) + J_2(I_1)J_2(I_2) \sin(2w_c t + 2w_{m1} t - 2w_{m2} t) \\
& + J_2(I_1)J_2(I_2) \sin(2w_c t - 2w_{m1} t + 2w_{m2} t) + J_2(I_1)J_2(I_2) \sin(2w_c t - 2w_{m1} t - 2w_{m2} t) \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{32}$$

Sofern zwei Zeilen eine Kombination von Besselkoeffizienten mit gleicher Laufvariable  $n$  aufweisen, steht die obere Zeile für das obere Seitenfrequenzband, die Zeile darunter für das untere Seitenfrequenzband. Das gilt unter der Voraussetzung, dass die Modulationsfrequenz von M1 größer ist als jene von M2 - sonst stehen die linken Terme beider Zeilen für das obere Frequenzband und die rechten Terme für das untere. Entscheidend ist also, ob die Summe beider Modulatoren zusammen ein negatives Vorzeichen besitzen (unteres Seitenband) oder ein positives (oberes Seitenband). Die Lage eines Frequenzbands ergibt sich damit stets durch den Abstand eines Vielfachen der ersten Modulatorfrequenz vom Träger nach beiden Seiten, und um diesen Punkt herum dann jeweils um ein Vielfaches der zweiten Modulatorfrequenz nach beiden Seiten versetzt. Die Amplitude des jeweiligen Bandes liefert das Produkt der Besselkoeffizienten, welche die Modulationsindizes als Argumente bekommen.

Eine Abkürzung, um auf die Additionsterme für das Spektrum oben zu gelangen, sei hier noch kurz präsentiert: Sieht man sich z.B. die beiden Zeilen mit den Besselkoeffizienten  $J_1 J_2$  an, so lässt sich einsehen, dass diese beiden Zeilen zusammen die Kombinationen der Laufvariablen  $(1,2), (1,-2), (-1,2), (-1,-2)$  abdecken (sprich, die Wechselwirkung zwischen erstem und zweitem Frequenzband). Daraus folgt bereits, dass 4 Terme benötigt werden. Innerhalb jedes einzelnen Terms bekommt jeweils  $w_{m1}$  als Koeffizient die erste Vektorkomponente,  $w_{m2}$  die zweite Vektorkomponente. Für den Vektor  $(1,-2)$  lautet der Term somit  $J_1(I_1)J_2(I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t - 2w_{m2} t)$ . Der gesamte Term erhält als Vorzeichen noch das Produkt der Vorzeichen der Vektorkomponenten, jeweils potenziert mit dem Betrag der jeweiligen Komponente. Für das gewählte Beispiel wäre das folglich  $(1)^1 * (-1)^2 = 1$ , und der Term bekommt damit ein positives Vorzeichen. Die Bedingung des Potenzierens der Vorzeichen leitet sich dabei aus folgender Eigenschaft der Besselfunktion ([AS64, S.358, Satz 9.1.5]) ab:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{33}$$

Um die Zusammenhänge grafisch zu veranschaulichen, nehmen wir zunächst einen Träger und modulieren ihn durch M1. Um den Effekt von Reflexionen an der 0 Hz-Barriere durch negative Frequenzen zu verringern, wird diesmal die Trägerfrequenz auf 1250Hz gesetzt.

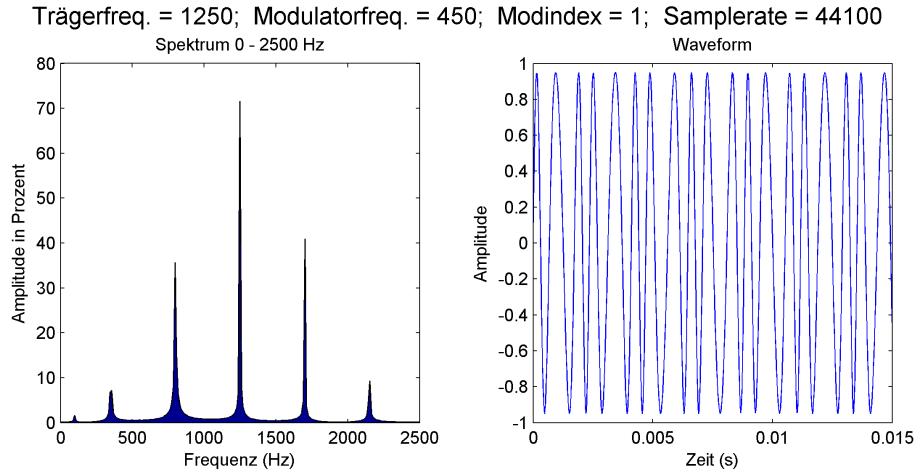


Abbildung 27: Einfache FM mit  $f_c = 1250$ ,  $w_m = 450$ ,  $I = 1$ .

Man sieht im Spektrum, dass wie erwartet die Trägerfrequenz bei 1250 Hz liegt, und das erste Seitenband bei  $1250 + 450 = 1700$  Hz. Die Additionsterme aus Gleichung 32 legen nun nahe, dass bei einer Modulation eines Trägers durch zwei parallele Modulatoren jeweils oberhalb und unterhalb jedes von  $M_1$  erzeugten Seitenbandes in Abständen der Frequenz von  $M_2$  wiederum eben dessen Seitenbänder liegen sollten. Zum Vergleich betrachten wir also zuerst noch einen Träger mit einer Frequenz, die dem ersten Seitenband von eben, 1700 Hz, entspricht, und modulieren diesen durch  $M_2 = 180$  Hz, da wir so eine Prognose für die Seitenbänder von  $M_2$  bei einer gemeinsamen Modulation des Trägers erhalten. Beide Modulationsindizes erhalten den Wert 1, da die Besselfunktionen mit steigenden Laufvariablen  $i$  und  $k$  für dieses Argument kontinuierlich kleiner werden. Damit werden die Frequenzbänder niedriger Ordnung stets erkennbarer sein als ihre Nachbarn höherer Ordnung, und der Vergleich der beiden gewählten Einzelmodulationen mit der Parallelmodulation gewinnt an Aussagekraft.

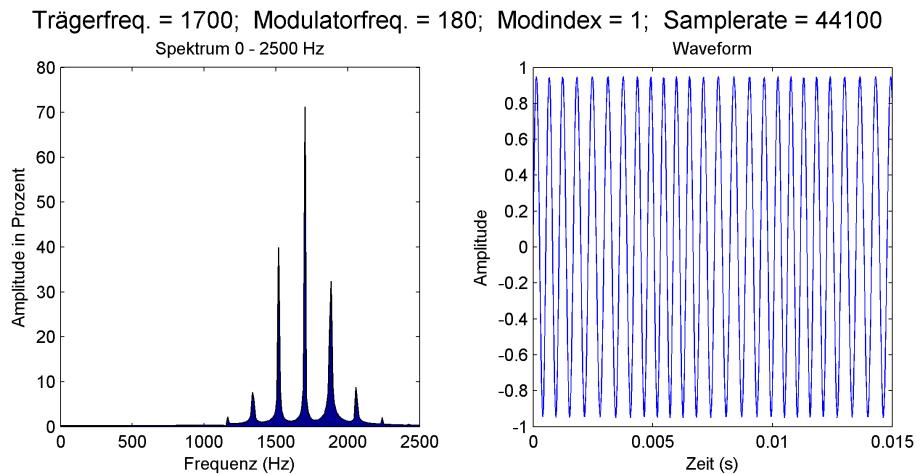


Abbildung 28: Einfache FM mit  $f_c = 1700$ ,  $w_m = 180$ ,  $I = 1$ .

Hier nun die Anwendung beider Modulatoren mit unveränderten Einstellungen auf den Träger des ersten Spektrums mit einer Trägerfrequenz von 1250 Hz. Es steht zu erwarten, dass der erste Modulator Seitenbänder bei 800 Hz und 1700 Hz erzeugt, der zweite von dort ausgehend jeweils oberhalb und unterhalb eines im Abstand von 180 Hz. Die beiden Spektren oben sollten sich im

folgenden gemeinsamen Spektrum wiederfinden lassen, zuzüglich Frequenzbändern von 180 Hz oberhalb und unterhalb von 1250 Hz:

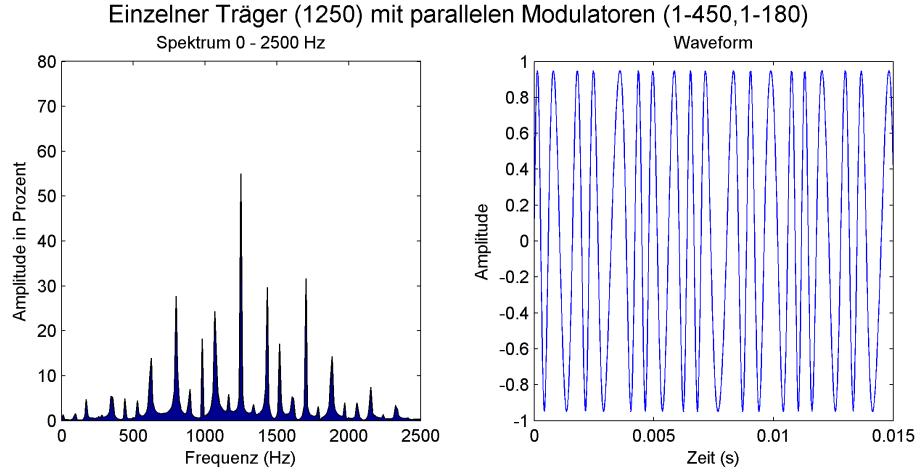


Abbildung 29: Parallelle FM mit  $f_c = 1250$ ,  $w_{m1} = 450$ ,  $w_{m2} = 180$ ,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 1$ .

Die Prognose bestätigt sich: Betrachtet man den Bereich um 1700 Hz, so findet man dort das Spektrum von 3.1.3. Auch die Seitenbänder im Abstand von 180 Hz um den Träger sind klar zu erkennen.

### 3.2 Kaskadenschaltung: Einzelträger mit Modulatorenpaar in Reihe

Den bisher betrachteten Schaltungen war gemein, dass unabhängig davon, ob ein Träger, mehrere Träger, ein Modulator oder mehrere Modulatoren verwendet worden sind, in keinem der Fälle ein Modulator selbst durch einen weiteren Modulator moduliert worden ist. Diese Kombinationsmöglichkeit eines Trägers sowie zweier Modulatoren stellt jedoch ein weiteres mächtiges Instrument der FM dar und soll im Folgenden beschrieben werden.

Die Modulation eines Trägers durch einen Modulator, der selbst wiederum durch einen weiteren Modulator moduliert wird, also die Reihenschaltung  $T < M1 < M2$ ,



Abbildung 30: Schema der Reihenschaltung mit einem Träger und zwei Modulatoren.

lässt sich in die bisher gewählte Formel für die einfache FM,

$$f_{FM}(t) = \sin(w_c t + I \sin(w_m t)) \quad (34)$$

wie folgt integrieren ([Sch77, S.48]):

$$f_{FMkaskade}(t) = \sin(w_c t + I_1 \sin(w_{m1} t + I_2 \sin(w_{m2} t))) \quad (35)$$

Bereits an der Funktion lässt sich der verschachtelte Charakter der Kaskadenschaltung ablesen: Der Modulationswert  $I \sin(w_m t)$  wird durch den Wert einer weiteren, kompletten Frequenzmodulation  $I_2 \sin(w_{m1} t + I_2 \sin(w_{m2} t))$  ersetzt.

Für die Herleitung des Frequenzspektrums brauchen keine ausschweifenden Umformungen durch Additionstheoreme mehr vorgenommen oder Eigenschaften der Besselfunktion ausgenutzt werden: Hat man 34, 35 sowie 36 bereits bestimmt, so kann in der Formel für das Frequenzspektrum 34, also in

$$\sin(w_c t + I \sin(w_m t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(I) \sin(w_c t + n w_m t) \quad (36)$$

einfach  $\sin(w_m t)$  durch  $\sin(w_{m1} t + I_2 \sin(w_{m2} t))$  ersetzt werden. Eine Reihe einfacher Umformungen führt dann zur Formel für das Frequenzspektrum der Kaskadenschaltung:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(I_1) \sin(w_c t + n I_2(\sin(w_{m2} t))) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(I_1) \sin(w_c t + n(w_{m1} t + I_2(\sin(w_{m2} t)))) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(I_1) \sin((w_c t + n w_{m1} t) + (I_2 n(\sin(w_{m2} t)))) \end{aligned} \quad (37)$$

Da hier die beiden Klammern in der Sinusfunktion zusammen exakt einer eigenständigen FM entsprechen, kann das Argument für den Sinus auch durch die Formel zur Berechnung ihres Spektrums (36) substituiert werden. Es ergibt sich damit für das Frequenzspektrum der Kaskadenschaltung (siehe [Sch]):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(I_1) J_k(n I_2) \sin(w_c t + n w_{m1} t + k w_{m2} t) \quad (38)$$

Damit entspricht die Formel für das Frequenzspektrum der Kaskadenschaltung exakt jener für die Parallelschaltung 31, mit einem kleinen Zusatz: Es wird bei der Kaskadenschaltung zusätzlich der Modulationsindex  $I_2$  des äußersten Modulators  $M2$  mit der Laufvariablen  $n$  des ersten Besselkoeffizienten multipliziert und erst anschließend als Argument an die Besselfunktion gereicht. Damit ändern sich auch bei den Additionstermen für das Spektrum im Vergleich zur Parallelschaltung

32 lediglich die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
& \sin(w_c t + I_1 \sin(w_{m1} t) + I_2 \sin(w_{m2} t)) \\
&= J_0(I_1)J_0(\mathbf{0}I_2) \sin(w_c t) \\
&+ J_0(I_1)J_1(\mathbf{0}I_2) \sin(w_c t + w_{m2} t) - J_0(I_1)J_1(\mathbf{0}I_2) \sin(w_c t - w_{m2} t) \\
&+ J_0(I_1)J_2(\mathbf{0}I_2) \sin(w_c t + 2w_{m2} t) + J_0(I_1)J_1(\mathbf{0}I_2) \sin(w_c t - 2w_{m2} t) \\
&+ J_1(I_1)J_0(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t) - J_1(I_1)J_0(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t) \\
&+ J_1(I_1)J_1(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t + w_{m2} t) - J_1(I_1)J_1(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t - w_{m2} t) \\
&- J_1(I_1)J_1(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t + w_{m2} t) + J_1(I_1)J_1(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t - w_{m2} t) \\
&+ J_1(I_1)J_2(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t + 2w_{m2} t) + J_1(I_1)J_2(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t + w_{m1} t - 2w_{m2} t) \quad (39) \\
&- J_1(I_1)J_2(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t + 2w_{m2} t) - J_1(I_1)J_2(\mathbf{1}I_2) \sin(w_c t - w_{m1} t - 2w_{m2} t) \\
&+ J_2(I_1)J_0(\mathbf{2}I_2) \sin(w_c t + 2w_{m1} t) + J_2(I_1)J_0(\mathbf{2}I_2) \sin(w_c t - 2w_{m1} t) \\
&+ J_2(I_1)J_1(\mathbf{2}I_2) \sin(w_c t + 2w_{m1} t + w_{m2} t) + J_2(I_1)J_1(\mathbf{2}I_2) \sin(w_c t + 2w_{m1} t - w_{m2} t) \\
&+ J_2(I_1)J_1(\mathbf{2}I_2) \sin(w_c t - 2w_{m1} t + w_{m2} t) - J_2(I_1)J_1(\mathbf{2}I_2) \sin(w_c t - 2w_{m1} t - w_{m2} t) \\
&+ J_2(I_1)J_2(\mathbf{2}I_2) \sin(2w_c t + 2w_{m1} t + 2w_{m2} t) + J_2(I_1)J_2(\mathbf{2}I_2) \sin(2w_c t + 2w_{m1} t - 2w_{m2} t) \\
&+ J_2(I_1)J_2(\mathbf{2}I_2) \sin(2w_c t - 2w_{m1} t + 2w_{m2} t) + J_2(I_1)J_2(\mathbf{2}I_2) \sin(2w_c t - 2w_{m1} t - 2w_{m2} t) \\
&+ ...
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass damit erstens die Trägerfrequenz ausschließlich durch  $I_1$  definiert wird, da  $I_2$  bei der Trägerfrequenz mit 0 multipliziert wird und die Besselfunktion mit Laufvariable 0 für das Argument 0 genau den Wert 1 zurückgibt. Zweitens muss sich für höhere Seitenbänder der Modulationsindex für  $M2$ , also  $I_2$ , und damit auch die Gesamtheit der Kombinationsseitenfrequenzen höherer Ordnung im Vergleich zur Parallelmodulation stärker auf das resultierende Spektrum auswirken, da  $I_2$  dort ja mit größeren  $n$  multipliziert wird. Drittens entfallen alle Kombinationsseitenfrequenzen mit dem Besselkoeffizienten mit Laufvariable  $n = 0$  des inneren Modulators vollständig, da die dadurch bedingte Multiplikation mit  $n = 0$  im Argument für die Besselfunktionen mit Laufvariable  $> 0$  des äußeren Modulators immer den Wert 0 zurückliefern (siehe 11).

Visualisiert in MATLAB zeigt sich, dass sich erwartungsgemäß um jedes Seitenband von  $T$  und  $M1$  die Seitenbänder von  $M1$  und  $M2$  ausbreiten. Mit denselben Einstellungen wie in 3.1.3 sieht das Spektrum von  $T$  moduliert durch  $M1$  natürlich immer noch genauso aus:

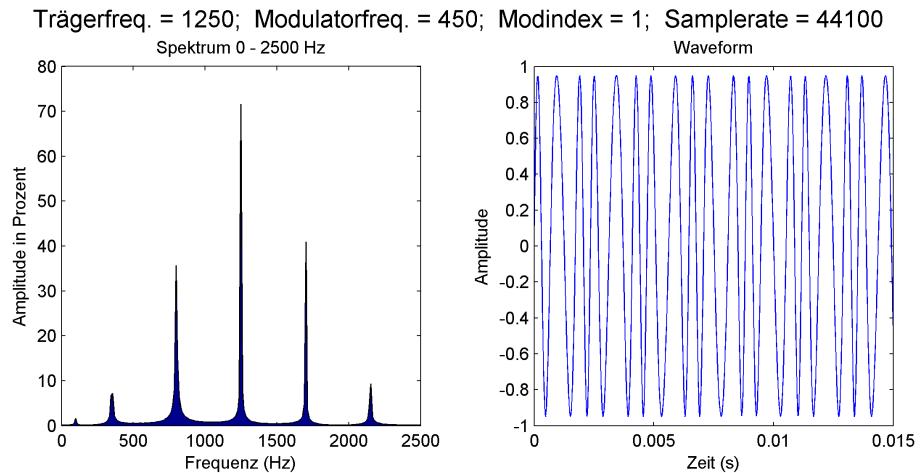


Abbildung 31: Einfache FM mit  $f_c = 1250$ ,  $w_m = 450$ ,  $I = 1$ .

Nun das Spektrum von  $T$  nach der Modulation durch  $M1$ , moduliert durch  $M2$ . Zum Nachstellen wurde ein Träger mit 1700Hz moduliert, da dort das erste Seitenband aus obiger Modulation landet, und durch einen Modulator mit den Einstellungen von  $M2$  moduliert:

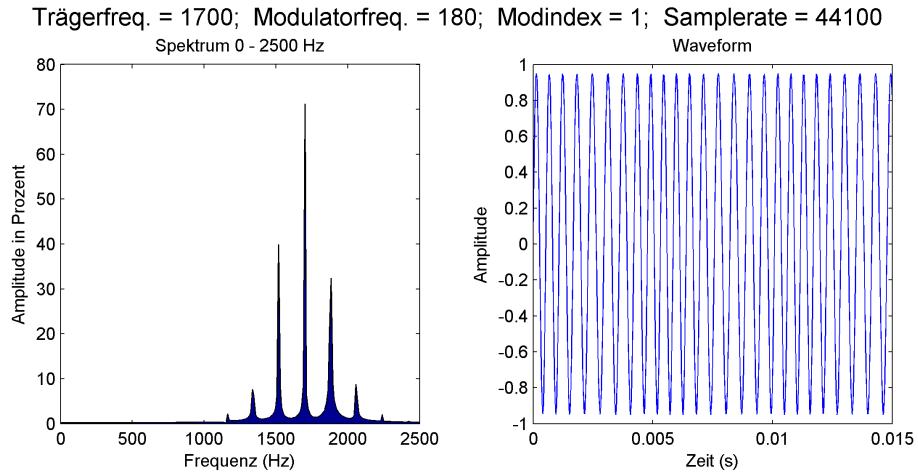


Abbildung 32: Einfache FM mit  $f_c = 1700$ ,  $w_m = 180$ ,  $I = 1$ .

Und nun das Gesamtspektrum der Kaskadenschaltung:

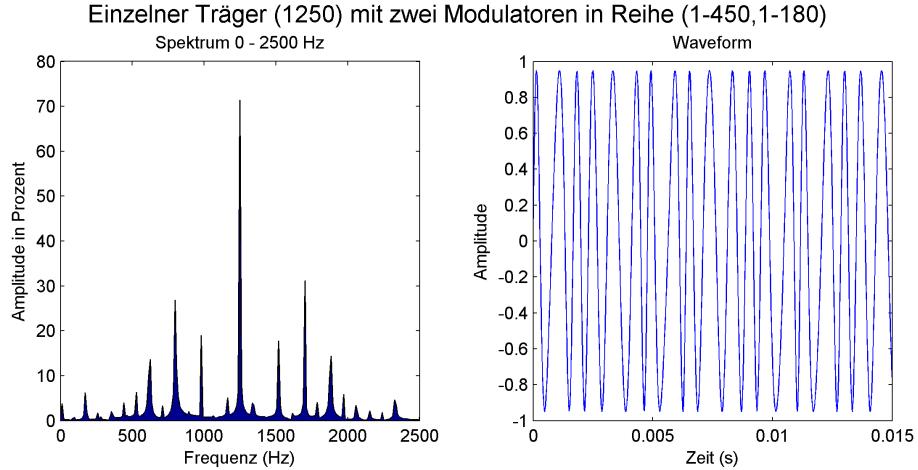


Abbildung 33: Kaskaden-FM mit  $f_c = 1250$ ,  $w_{m1} = 450$ ,  $w_{m2} = 180$ ,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 1$ .

Zum Vergleich hier nochmals das Gesamtspektrum der Parallelschaltung eines Trägers mit zwei Modulatoren:

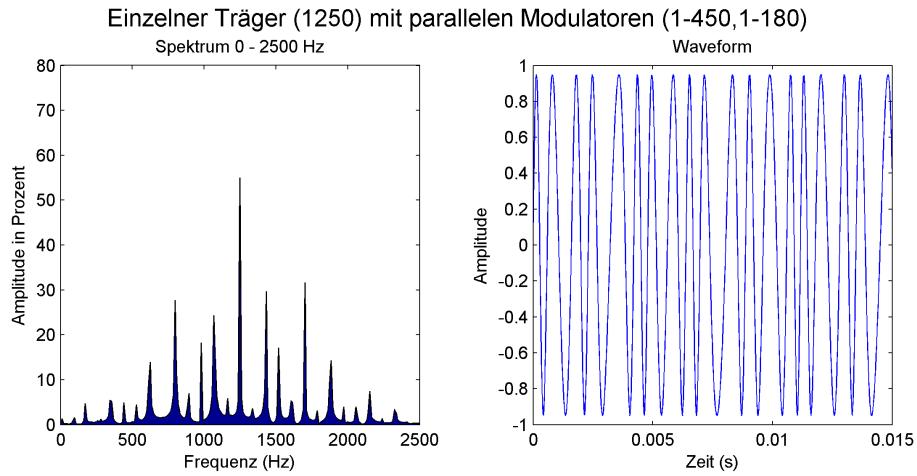


Abbildung 34: Parallele FM mit  $f_c = 1250$ ,  $w_{m1} = 450$ ,  $w_{m2} = 180$ ,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 1$ .

Die Spektren ähneln sich stark, es zeigt sich aber, dass wie erwartet die Trägerfrequenz mehr Energie erhält, da der eine Besselkoeffizient mit Laufvariable 0 durch die Multiplikation des Arguments mit 0 den Wert 1 zurückliefert, anstelle eines niedrigeren Werts wie bei der Parallelenschaltung. Auch fällt auf, dass alle Nicht-Kombinationsseitenfrequenzen des äußeren Modulators entfallen (also alle Kombinationen, in welchen der Besselkoeffizient des inneren Modulators  $M1$  die Laufvariable 0 besitzt). Dies liegt ebenfalls an der Multiplikation von  $I_2$  mit  $n$ , siehe 3.2. Der Vergleich wird nochmals wiederholt mit den Einstellungen  $I_1 = 2$  und  $I_2 = 3$ . Zuerst wieder die Kaskadenschaltung:

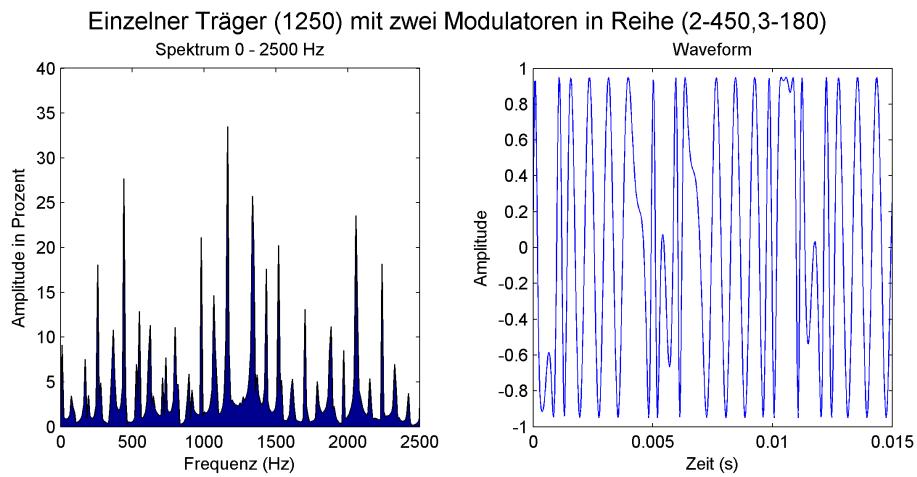


Abbildung 35: Kaskaden-FM mit  $f_c = 1250$ ,  $w_{m1} = 450$ ,  $w_{m2} = 180$ ,  $I_1 = 2$ ,  $I_2 = 3$ .

Und die Parallelschaltung mit zwei Modulatoren auf denselben Träger:

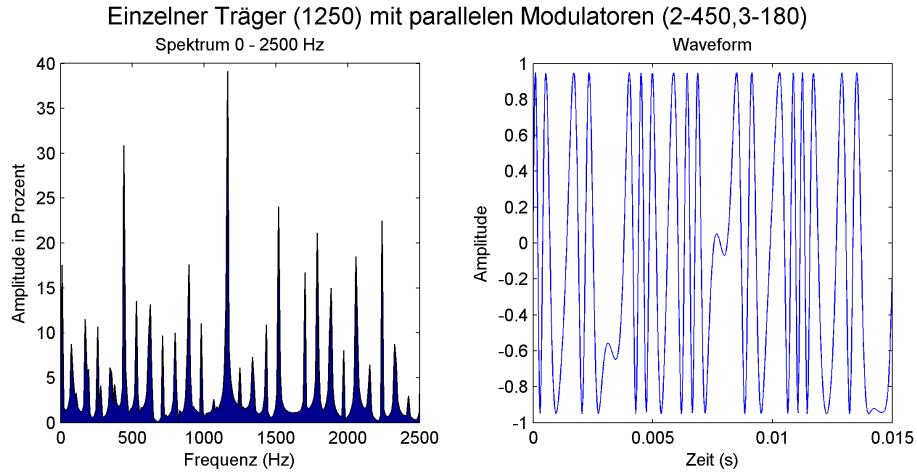


Abbildung 36: Parallele FM mit  $f_c = 1250$ ,  $w_{m1} = 450$ ,  $w_{m2} = 180$ ,  $I_1 = 2$ ,  $I_2 = 3$ .

Da ein höherer Modulationsindex grundsätzlich die Bandbreite erhöht und ein reicheres Spektrum erzeugt [Cho73], lassen sich schon für die gewählten Indizes von 2 und 3 rein visuell die Unterschiede zwischen der parallelen Modulation eines Trägers sowie der Kaskadenschaltung kaum noch nachvollziehen. Dennoch sind dieselben Prinzipien am Werk wie im vorherigen Beispiel.

### 3.3 Feedbackschaltung

Eine Spezialform der komplexen FM besteht darin, das Ausgangssignal des Trägers zur Modulation des Trägers heranzuziehen anstelle eines Modulators wie in der einfachen FM.

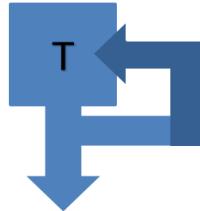


Abbildung 37: Schema der Feedback-Schaltung.

Die Formel für eine Feedbackschaltung kann rekursiv wie folgt angegeben werden:

$$f_{FM\,feedback}(t_n) = \sin(w_c t_n + I f_{FM\,feedback}(t_{n-1})) \quad \text{mit} \quad f_{FM\,feedback}(t_0) = 0 \quad (40)$$

In MATLAB oder in einer beliebigen Programmiersprache kann diese Formel dann natürlich komfortabel iterativ oder rekursiv implementiert werden. Das Frequenzspektrum berechnet sich [Sch] über:

$$f_{FM\,feedback}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{nI} J_n(nI) \sin(nw_c t) \quad (41)$$

Man sieht sofort, dass die Einflussnahme auf die Feedbackschaltung durch den Modulationsindex (d.h. die Amplitude, mit der man dem Ausgangssignal der Schaltung erlaubt, auf sich selbst zurückzuwirken) lediglich die Steilheit des Abfalls der Amplituden von den näher am Träger liegenden Seitenbändern im Vergleich zu den weiter außenliegenden beeinflusst. Die Variable  $n$

hängt dabei nur von der Laufvariable der Besselfunktion ab und durchläuft in jedem Fall ganz-zahlig die Werte von 1 bis  $\infty$ . In jedem Fall ist die Lage der Seitenfrequenzbänder also immer ein ganzzahliges Vielfaches der Trägerfrequenz.

Der Amplitudenabfall von Band zu Band erfolgt dabei, wenn man die Einflussnahme von  $n$  auf das Argument an die Besselfunktion und somit den Wert dieser herausrechnet, im Verhältnis  $\frac{1}{2}$  zu  $\frac{1}{3}$  zu  $\frac{1}{4}$  zu  $\frac{1}{5}$  etc. Damit weist er Ähnlichkeit zum Spektrum einer Sägezahnwelle auf, bei der die Obertöne in genau in diesen Verhältnissen zum Grundton stehen. Feedback-FM bietet damit die Möglichkeit, mit nur einem Operator Töne zu erzeugen, die einen rauen Charakter ähnlich einer Sägezahnwelle aufweisen.

Im Folgenden sehen wir das Spektrum einer einfachen Feedbackschaltung eines Trägers, der sich selbst moduliert; einmal mit Trägerfrequenz von 220, einmal mit Trägerfrequenz von 440:

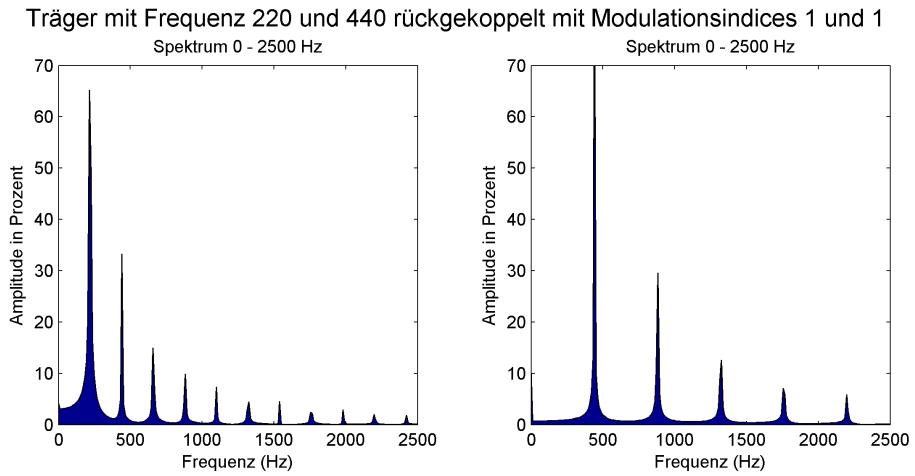


Abbildung 38: Feedback-FM mit  $f_{c1} = 220$ ,  $f_{c2} = 440$ ,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 1$ .

Man erkennt, dass jedes Frequenzband exakt um ein Vielfaches der Trägerfrequenz von dieser entfernt liegt. Im Vergleich abschließend noch das Spektrum zweier Feedbackschaltungen mit gleicher Trägerfrequenz, einmal mit Modulationsindex von 0.5, einmal mit Modulationsindex von 1.5:

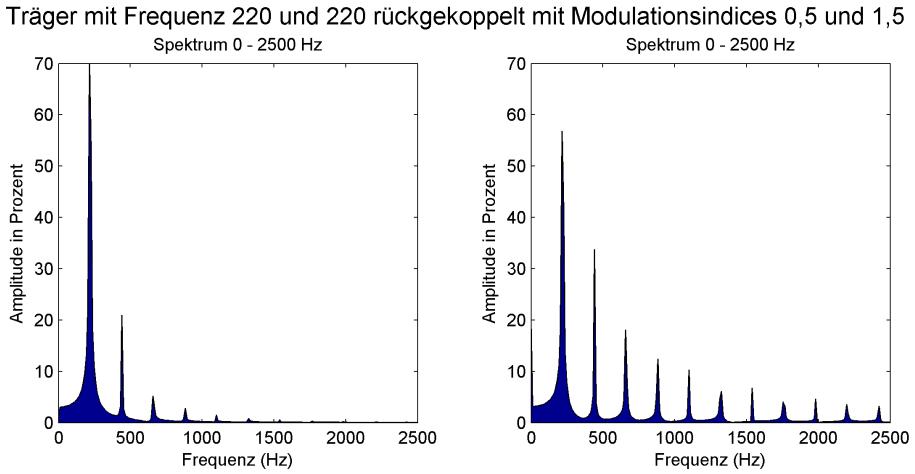


Abbildung 39: Parallelle FM mit  $f_{c1} = 220$ ,  $f_{c2} = 220$ ,  $I_1 = 0.5$ ,  $I_2 = 1.5$ .

Man erkennt, dass sich mit steigendem Feedback das Abfallen der Seitenbänder vom Träger ausgehend verlangsamt.

## 4 Praktische Anwendung der FM-Synthese

### 4.1 Nachbildung eines Instrumentes

Da es bei der FM-Synthese schwer fällt, vorauszusagen wie das durch die Synthese erzeugte Spektrum aussehen wird, ist es ein schwieriges Unterfangen, mit dieser Technik ein echt wirkendes Instrument nachzubilden, siehe 1.1 - Prinzip der FM-Synthese. Trotzdem gibt es einige Techniken, die den generierten Klang natürlicher wirken lassen. Diese werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels vorgestellt. Anschließend wird der Versuch unternommen, das Klangbild eines Querflötentones nachzubilden.

#### 4.1.1 Techniken zur Nachbildung eines Instrumententones mittels FM-Synthese

Bei der Synthese eines Tones mittels FM-Synthese müssen zunächst die Parameter der Formel für die FM-Synthese festgelegt werden. Hierzu kann das Frequenzspektrum und das Spektrogramm des nachzubildenden Tones verwendet werden. Eine ausführliche Erklärung der einzelnen Parameter ist in Kapitel 2 - Einfache FM-Synthese zu finden.

Es liegt nahe, als Startpunkt für die Nachbildung die Grundfrequenz zu wählen, da sie die Tonhöhe des Klangs bestimmt. Sie ist im Spektrum die niedrigste Frequenz mit wahrnehmbarer Ausprägung [Bar09, S. 53]. Diese Frequenz kann als Trägerfrequenz  $f_c$  verwendet werden. Der Abstand der einzelnen Frequenzen zueinander ist der zweite Anhaltspunkt. Dieser Abstand findet als Modulationsfrequenz  $f_m$  Verwendung. Für harmonische Töne ist ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz als Modulationsfrequenz nötig [Cho73, S. 528]. Der Modulationsindex  $I$  kann mithilfe der Besselfunktionen gefunden werden - siehe hierzu 2.2.2 - Klangspektrum der FM-Synthese. Alternativ kann eine grobe Schätzung vorgenommen werden; hierzu ist die folgende Faustregel nützlich:

$$I + 1 = \text{Anzahl der Seitenfrequenzen mit signifikanter Ausprägung} \quad (42)$$

Die Formel 42 kann mit Hilfe der Formel der Bandbreite aus 20 hergeleitet werden [Lat98, S. 221]. Sollte mittels normaler FM-Synthese kein zufriedenstellendes Ergebnis erzielt werden können, kann mit der komplexen FM-Synthese experimentiert werden.

Bei der komplexen FM-Synthese finden mehrere Träger oder mehrere Modulatoren Verwendung. Diese können in Reihe oder parallel geschaltet werden. Außerdem kann auch die so genannte Feedback Frequenzmodulation genutzt werden, welche das Signal mit dem jeweils vorangegangenen Sample moduliert [Hor98, S. 399 f.]. Feedback-FM-Synthese kann außerdem eingesetzt werden, um Rauschen zu erzeugen. Sie kann aber auch ein sehr komplexes Spektrum mit besonders vielen Seitenfrequenzen erzeugen. Die komplexe FM-Synthese findet Einsatz, wenn mit der normalen FM-Synthese nicht ausreichend komplexe Spektren erzeugt werden können. Dies kann zum Beispiel der Fall sein, wenn mehrere exponentiell fallende Seitenfrequenzen erzeugt werden sollen. Wenn bei einfacher FM-Synthese der Modulationsindex erhöht wird, um eine größere Zahl an Seitenfrequenzen zu erzeugen, verändert sich die Stärke der Grundfrequenz. Dieses Verhalten wird definiert durch die Besselfunktionen - nachzulesen im Kapitel 2.2.2 - Klangspektrum der FM-Synthese. Damit dieses Phänomen vermieden werden kann, muss auf die komplexe FM-Synthese zurückgegriffen werden (siehe 3 - Prinzipien der komplexen FM-Synthese).

Eines der wichtigsten Grundbestandteile eines jeden Instrumententones ist die so genannte ADSR-Hüllkurve. Die Hüllkurve wird genutzt, um die Amplitude des künstlich erzeugten Signals

über den zeitlichen Verlauf festzulegen [Cho73, S. 532f]. ADSR steht für die einzelnen Phasen eines Tones: Attack, Decay, Sustain und Release. Diese Phasen sollen hier vereinfacht erklärt werden. Beim Drücken einer Taste wird der Ton angeschlagen und die Lautstärke des Tones steigt schnell bis zu einem maximalen Wert an. Diese Phase wird Attack genannt. Nachdem die maximale Lautstärke erreicht wurde, startet die Decay-Phase. In dieser Phase sinkt die Lautstärke schnell auf einen geringeren Wert ab. Danach befindet sich der Ton, solange die Taste gedrückt wird, in der Sustain-Phase und die Lautstärke bleibt konstant oder fällt leicht ab. Sobald die Taste losgelassen wird, befindet sich der Ton in der Release-Phase und die Lautstärke nimmt wieder bis zu ihrem minimalen Wert ab. In Abbildung 40 ist der Verlauf der Lautstärke einer Standard-ADSR-Hüllkurve noch einmal grafisch dargestellt.

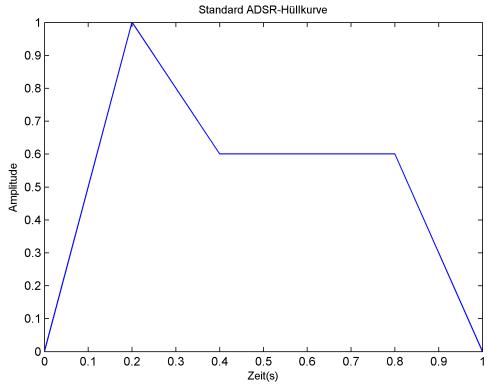


Abbildung 40: Standard-ADSR-Hüllkurve

Da allerdings bei vielen Instrumenten die Lautstärke in den einzelnen Phasen der ADSR-Hüllkurve nicht gleichmäßig steigt oder sinkt, ist es nötig, beliebig komplexe Kurven abilden zu können. Bei vielen Instrumenten steigt beispielsweise die Lautstärke in der Attack-Phase exponentiell an und fällt in der Decay- und Release-Phase auch wieder exponentiell ab. Manche Synthesizer bieten zusätzlich auch noch eine Hold-Phase vor der Attack-Phase, für Instrumente, die einige Zeit benötigen, bis sie nach dem Anschlagen des Tones in die Attack-Phase eintreten. In Abbildung 41 wurden weitere, für verschiedene Instrumente typische Hüllkurven dargestellt. Diese verdeutlichen, dass die ADSR-Hüllkurve beliebig schlichte sowie komplexe Formen annehmen kann.

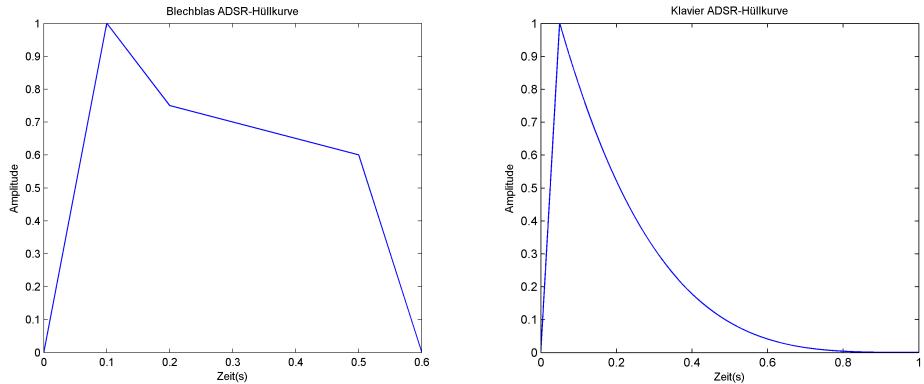


Abbildung 41: Typische ADSR-Hüllkurve eines Blechblasinstrumentes [Cho73] und eines Klaviers

Auch wenn das Hinzufügen einer ADSR-Hüllkurve den Klang des synthetisierten Tones schon natürlicher wirken lässt, hört sich der erzeugte Ton noch nicht wie ein echtes Instrument an. Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung, stellt die Variierung des Modulationsindex über die Zeit

oder die Amplitude dar. Somit kann die Anzahl der Seitenfrequenzen verändert werden, was zu einem lebendigeren Klang führt. [Cho73, S. 532]

Ein weiteres geeignetes Hilfsmittel zur Verbesserung des Klanges stellen Filter dar. Filter können genutzt werden, um das von der FM-Synthese erzeugte Signal zu manipulieren. Dabei werden ungewollte Frequenzen gedämpft bzw. komplett herausgefiltert oder gewollte Frequenzen verstärkt. Typische Vertreter von Filtern sind Hochpassfilter, Tiefpassfilter, Bandpass und Bandsperre. [Sto11, S. 100-104]

Das bisher erzeugte Signal ist noch ein ideales Signal, welches so in der Natur nicht vorkommen kann. Bei Luftverwirbelungen und Unebenheiten des Instrumentes tritt Rauschen auf. Dieses Rauschen trägt zum typischen Klangbild eines Instrumentes bei und muss auch nachgebildet werden. Ein Rauschen kann mittels Feedback-FM-Synthese erzeugt werden, dafür muss der Modulationsindex sehr hoch angesetzt werden. Das von der Feedback-FM-Synthese erzeugte Signal gleicht hierbei einem weißen Rauschen. Anschließend kann dieses Rauschen mittels Multibandpassfilter um die jeweiligen ausgeprägten Frequenzen gefiltert werden. Würde das Rauschen nicht gefiltert, kann neben dem Ton auch das Rauschen als solches wahrgenommen werden. [Bar09, S. 152]

Um den Klang des synthetisierten Tones noch natürlicher zu gestalten, könnte dem Ton zusätzlich ein Hall-Effekt hinzugefügt werden. Hall entsteht bei der diffusen Reflexion des Schalls an den Wänden eines Raumes, welche zu einer großen Anzahl an Echos führen. [Sto11, S. 108]

#### 4.1.2 Nachbildung des Klangbildes eines Querflötentones mittels FM-Synthese

Im Laufe dieses Kapitels soll der Ton einer Querflöte mittels FM-Synthese erzeugt und mit den oben beschriebenen Techniken verfeinert werden. Das Instrument *Querflöte* wurde ausgewählt, da es sehr harmonische Spektren erzeugt. Auf die Nutzung eines Instrumentes mit einem disharmonischen Spektrum wurde vorsätzlich verzichtet, da die FM-Synthese mit harmonischen Spektren kontrollierbarer ist. Alle Beispiele sind in MATLAB erstellt und können mit dem beiliegenden Source-Code nachgestellt werden. In Abbildung 42 und 43 sind Spektrogramm, Waveform und Spektrum des originalen Querflötentones abgebildet. Mit den Informationen aus den vorliegenden Grafiken wird versucht, dieses spezifische Klangbild nachzubilden.

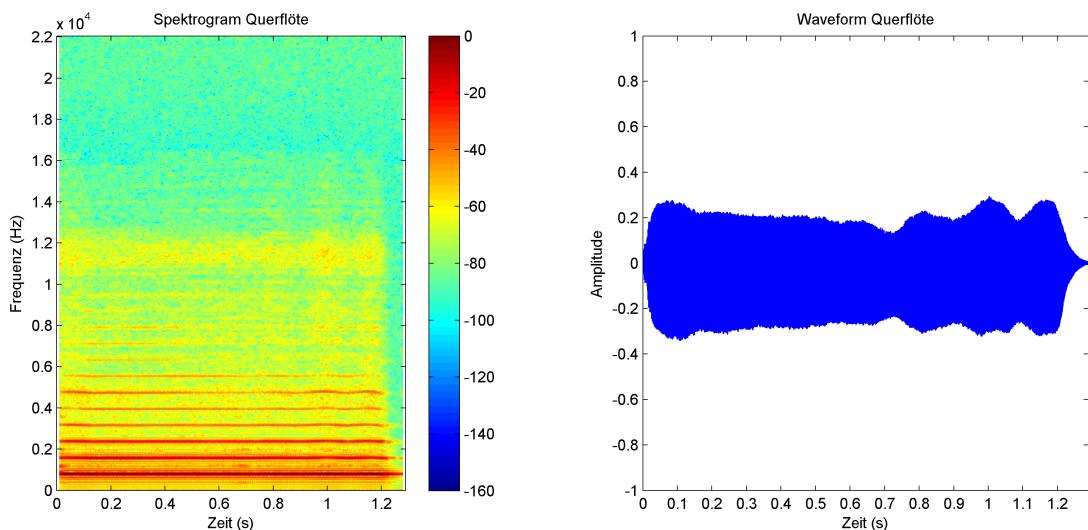


Abbildung 42: Plot des Spektrogramms und der Waveform eines echten Querflötentones

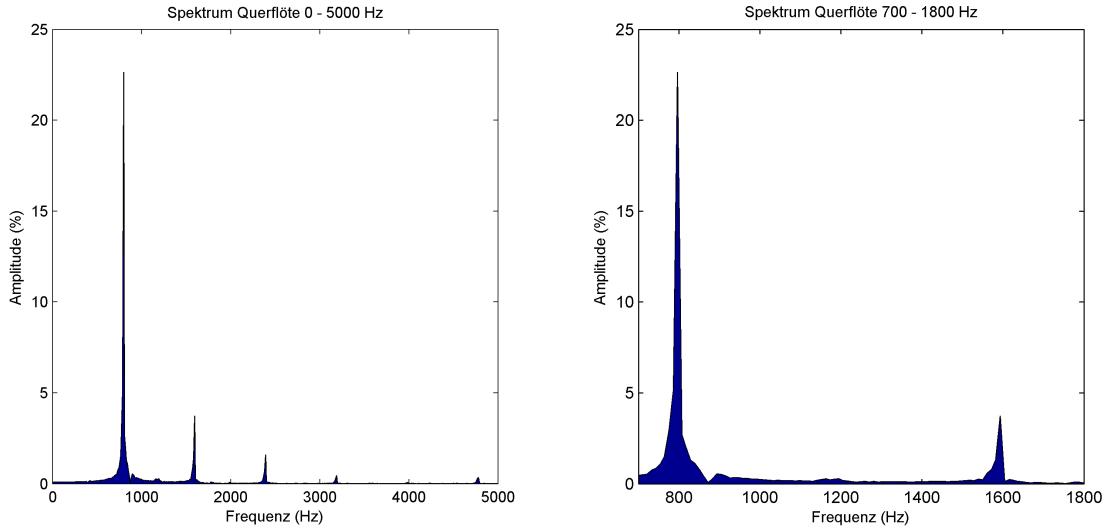


Abbildung 43: Plot des Spektrums eines echten Querflötentones

Anhand des Spektrums können bereits einige Erkenntnisse für die FM-Synthese gewonnen werden. Zunächst ist zu bemerken, dass die Grundfrequenz am stärksten ausgeprägt ist und bei etwa 800 Hz liegt. Um das Klangbild möglichst genau nachzubilden, muss die Frequenz allerdings durch Vergrößern der Grafik ausgelesen werden. Bei dieser genaueren Betrachtung wird sichtbar, dass die Frequenz bei 791 Hz ihren maximalen Ausschlag erreicht. Diese Frequenz wird bei der FM-Synthese als Trägerfrequenz  $f_c$  genutzt. Der Klang entspricht somit am ehesten einem G5 (in deutscher Notation einem g<sup>2</sup>) mit 784 Hz [Bor80, S. 181]. Im Spektrum sind außerdem noch mehrere Seitenfrequenzen zu erkennen. Die erste dieser Seitenfrequenzen befindet sich bei etwa dem doppelten der Grundfrequenz. Bei erneuter genauerer Betrachtung wird erkennbar, dass sie ihren maximalen Amplitudenwert bei exakt dem doppelten der Grundfrequenz (1582 Hz) hat. Somit ist der Abstand zwischen Grundfrequenz und erster Seitenfrequenz genauso groß wie die Grundfrequenz selbst. Hierbei ist zu bemerken, dass der Abstand von einem ganzzahligen Multiplikator mit der Grundfrequenz typisch für einen harmonischen Klang ist [Cho73, S. 528]. Die nächsten Seitenfrequenzen haben jeweils wieder denselben Abstand von 791 Hz zur jeweiligen vorangegangenen Seitenfrequenz. Aus dieser Beobachtung kann die Modulationsfrequenz  $f_m$  von 791 Hz geschlossen werden. Anhand der Anzahl der sichtbaren Seitenfrequenzen im Spektrum kann eine ungefähre Abschätzung des Modulationsindexes  $I$  mit der Faustformel aus 42 vorgenommen werden. Somit wird der Modulationsindex  $I$  für die ersten Tests auf 0.5 eingestellt.

Ein erstes Spektrum der FM-Synthese mit den eben festgelegten Werten kann in Abbildung 44 begutachtet werden. Beim Evaluieren der Ergebnisse dieses Spektrums fällt auf, dass die erste Seitenfrequenz im Verhältnis zur Grundfrequenz einen viel stärkeren Ausschlag aufweist als es bei der *Querflöte* der Fall ist. Zudem fällt danach die Amplitude der 2. und 3. Seitenfrequenz viel stärker ab als bei dem Instrument. Untersucht man jetzt noch das Spektrogramm (ebenfalls in Abbildung 44), fällt im Vergleich zum Spektrogramm der Querflöte die sehr viel geringere Anzahl an Seitenfrequenzen auf. Die Seitenfrequenzen bei 4000 Hz und darüber sind bei dem Instrument noch deutlich sichtbar während sie bei der FM-Synthese schon bei 4000 Hz kaum noch existent sind. Wird versucht, den Modulationsindex zur Steigerung der Anzahl an Seitenfrequenzen zu erhöhen, verlagert sich die Amplitude der Trägerfrequenz auf die Seitenfrequenzen. Somit werden die Seitenfrequenzen stärker und die Trägerfrequenz schwächer, dargestellt in Abbildung 45.

Eine Umgehung dieses Problems bietet sich durch die komplexe FM-Synthese. Hierbei werden mehrere Modulatoren verschachtelt, um so eine größere Anzahl an Seitenfrequenzen zu erzeugen.

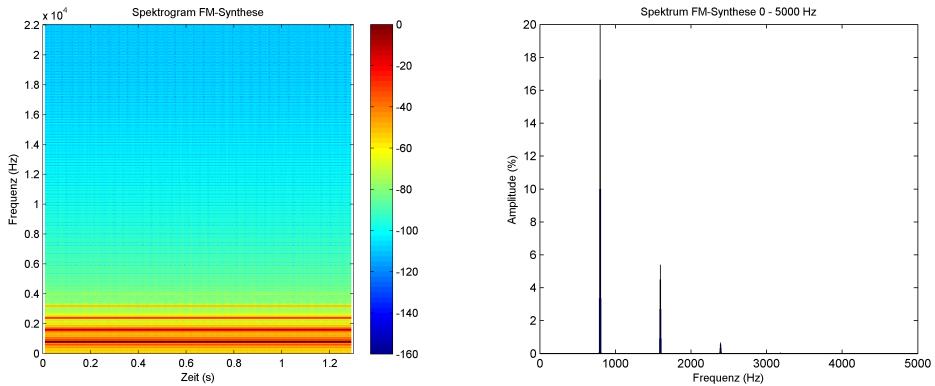


Abbildung 44: Plot des Spektrogramms und des Spektrums der FM-Synthese mit den Parametern  $f_c = 791$  Hz,  $f_m = f_c$  und  $I = 0.5$

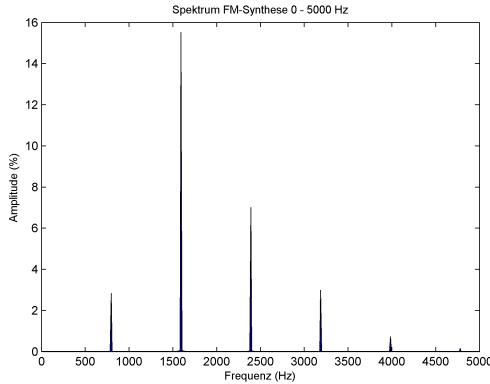


Abbildung 45: Plot des Spektrums der FM-Synthese mit den Parametern  $f_c = 791$  Hz,  $f_m = f_c$  und  $I = 2$

Allerdings ist es bei der komplexen FM-Synthese im Vergleich zur einfachen FM-Synthese nochmal schwerer abzuschätzen, wie stark die Amplituden der einzelnen Seitenfrequenzen ausgeprägt sein werden. Deshalb braucht es einige Experimente, um auf das gewünschte Ergebnis zu stoßen. In Abbildung 46 kann das Resultat der FM-Synthese mit 4 Modulatoren betrachtet werden. Dieses Spektrum ähnelt dem der Querflöte schon sehr viel stärker. Auch das Spektrogramm weist in den Intensitäten der Seitenfrequenzen eine deutliche Ähnlichkeit auf.

Da die FM-Synthese mit den in Abbildung 46 genannten Parametern ein zufriedenstellendes Signal erzeugt, kann jetzt mit der Veredelung des Tones begonnen werden. Zuerst wird dem Signal ein Vibrato hinzugefügt. Durch das Hinzufügen des Vibratos schwingt der erzeugte Ton leicht und wirkt lebendiger und nicht so künstlich. Dies kann bewerkstelligt werden, indem die Modulationsfrequenz leicht erhöht oder verringert wird. Auch hierbei muss experimentiert werden, welche Erhöhung der Modulationsfrequenz das gewünschte Ergebnis erzeugt. Als sehr ähnlich zum Originalton hat sich in diesem Fall eine Erhöhung um 2.5 Hz herausgestellt. Unsere neue Modulationsfrequenz ist somit  $f_m = f_c + 2.5$ . In Abbildung 47 wird die Auswirkung des Vibratos sichtbar, es bilden sich um die Seitenfrequenzen weitere, recht gering ausgeprägte Frequenzausschläge.

Der nächste wichtige und einfach hinzuzufügende Bestandteil des synthetisierten Tones ist die ADSR-Hüllkurve. Um generell eine Querflöte nachzuahmen, wäre eine Hüllkurve wie in Abbildung 48 (links) gezeigt möglich. Allerdings wird versucht, das Klangbild des Tones der Querflöte so gut wie möglich nachzuahmen. Hierfür wurde eine komplexere Hüllkurve nach dem Beispiel der Wa-

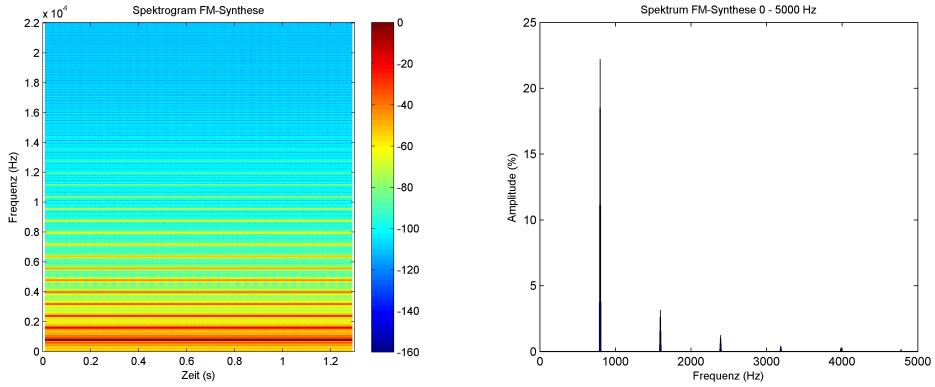


Abbildung 46: Plot des Spektrogramms und des Spektrums der FM-Synthese mit 4 Modulatoren als Kaskadenschaltung und den Parametern  $f_c = 791\text{Hz}$ ,  $f_{m1} = f_{m2} = f_{m3} = f_{m4} = f_c$ ,  $I_1 = 0.3$ ,  $I_2 = 0.5$ ,  $I_3 = 1$  und  $I_4 = 1$

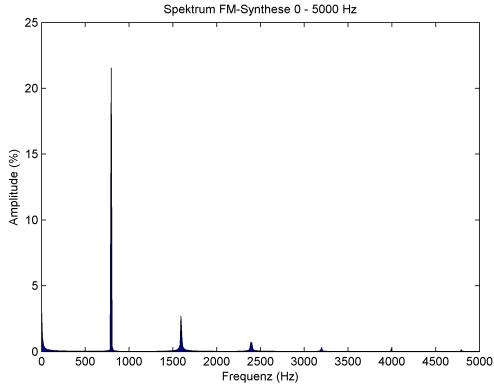


Abbildung 47: Plot des Spektrums der FM-Synthese mit 4 Modulatoren, Vibrato und den Parametern  $f_c = 791\text{Hz}$ ,  $f_{m1} = f_{m2} = f_{m3} = f_{m4} = f_c + 2.5$ ,  $I_1 = 0.3$ ,  $I_2 = 0.5$ ,  $I_3 = 1$  und  $I_4 = 1$

veform des originalen Tones generiert. Bei dieser Hüllkurve wurde Attack, Decay und Release von der allgemeinen Hüllkurve übernommen und die Sustain-Phase angepasst, zu sehen in Abbildung 48 (rechts).

Nach Hinzufügen der ADSR-Hüllkurve fällt im Spektrogramm auf, dass die Seitenfrequenzen trotz geringerer Amplitude bei Attack- und Release-Phase einen größeren Ausschlag als beim Instrument aufweisen. Dieser Ausschlag kann verringert werden, indem der Modulationsindex mit der ADSR-Hüllkurve variiert wird. Durch diese Anpassung steigt die Anzahl der Seitenfrequenzen zu Beginn des Klangs an und setzen somit verzögert ein. Beim Abklingen werden die Seitenfrequenzen ebenfalls abgeschwächt und ähneln dem Original etwas mehr.

Nachdem Vibrato, variabler Modulationsindex und ADSR-Hüllkurve hinzugefügt wurden, hat sich das Spektrogramm zur Abbildung 46 kaum geändert. Es wird nur der Vibrato durch die etwas breiteren Seitenfrequenzen und die ADSR-Hüllkurve durch Ansteigen des Spektrums zu Beginn des Tones und Abfallen des Spektrums nach 1.2 Sekunden sichtbar. Der Ton ähnelt in Tonhöhe und Intensität dem originalen Querflötenton schon stark. Allerdings fehlen noch die typischen Blas- und Luftverwirbelungsgeräusche sowie das sehr dominante Anblasgeräusch. Um die typischen Blasgeräusche zu erzeugen, wird zunächst ein Rauschen mittels Feedback-FM-Synthese mit hohem Modulationsindex erzeugt. Würde das Rauschen ohne weitere Arbeitsschritte dem synthe-

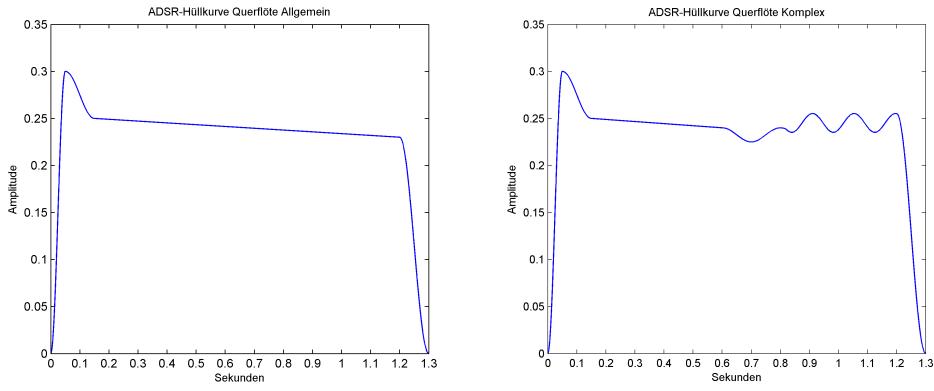


Abbildung 48: Plot der ADSR-Hüllkurve einer Querflöte und der hier genutzten, komplexeren Hüllkurve

tisierten Signal hinzugefügt, könnte es stark herausgehört werden. Um dies zu verhindern, muss das Rauschen noch gefiltert werden. Hierzu wird ein Multibandpassfilter erstellt. In Abbildung 49 ist der genutzte Filter grafisch dargestellt. Wie am Bild ersichtlich, ist der Filter durchaus komplex. Ein besonders großer Ausschlag ist am Anfang des Frequenzspektrums zu sehen, welcher sich zwischen 800 und 1600 Hz befindet. Gerade dieses Frequenzband ist bei der originalen Querflöte stark mit Rauschen ausgeprägt. Zusätzlich wurden Frequenzbänder mit fallender Amplitude zwischen 1.600 und 10.000 Hz angelegt. Zwischen 11.000 Hz und 12.000 Hz ist ein weiteres Frequenzband mit starker Ausprägung modelliert, da bei diesen Frequenzen besonders die Blas- und Luftverwirbelungsgeräusche auftreten. Oberhalb der 12.000 Hz wurden noch weitere Frequenzbänder mit niedrigerer Amplitude erstellt. Diese sollen ein Grundrauschen abbilden.

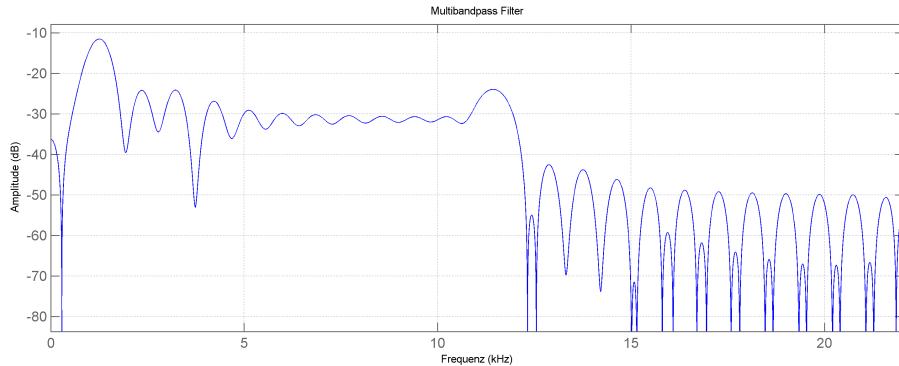


Abbildung 49: Plot des Multibandpassfilters der zum Filtern des mit Feedback-FM-Synthese erzeugten Rauschens genutzt wurde

Das gefilterte Rauschen wird anschließend noch mit einer ADSR-Hüllkurve veredelt. Dieser Schritt ist nötig, da während der Attack-Phase des Originaltons, wie im Spektrogramm in Abbildung 42 zu sehen, das Rauschen durch das Anblasen des Instrumentes sehr scharf heraussticht. Zusätzlich kann noch ein sehr leises Rauschen der Feedback-FM-Synthese ohne Filter über das gesamte Frequenzspektrum gelegt werden, um auch in den höheren Frequenzen einen leichten Ausschlag im Spektrogramm kenntlich zu machen.

Trotz des verstärkten Rauschens zu Beginn des Tones fehlt noch das stark hörbare Anblasgeräusch. Beim Betrachten des Spektrums und des Spektrogramms fallen noch zwei recht starke Ausschläge zu Beginn des Signals auf. Ein Ausschlag befindet sich bei 904 Hz und der Zweite bei

1182 Hz. Beide Frequenzen können mit einem einfachen Sinus erzeugt und mit einer ADSR-Hüllkurve, die nur eine kurze Attack-Phase aufweist und danach komplett abfällt, modelliert und zum Signal hinzugefügt werden. In Abbildung 50 ist das Ergebnis der FM-Synthese mit den in diesem Kapitel besprochenen Veredelungen gezeigt. In den Plots sind die Ähnlichkeiten zum originalen Ton deutlich sichtbar.

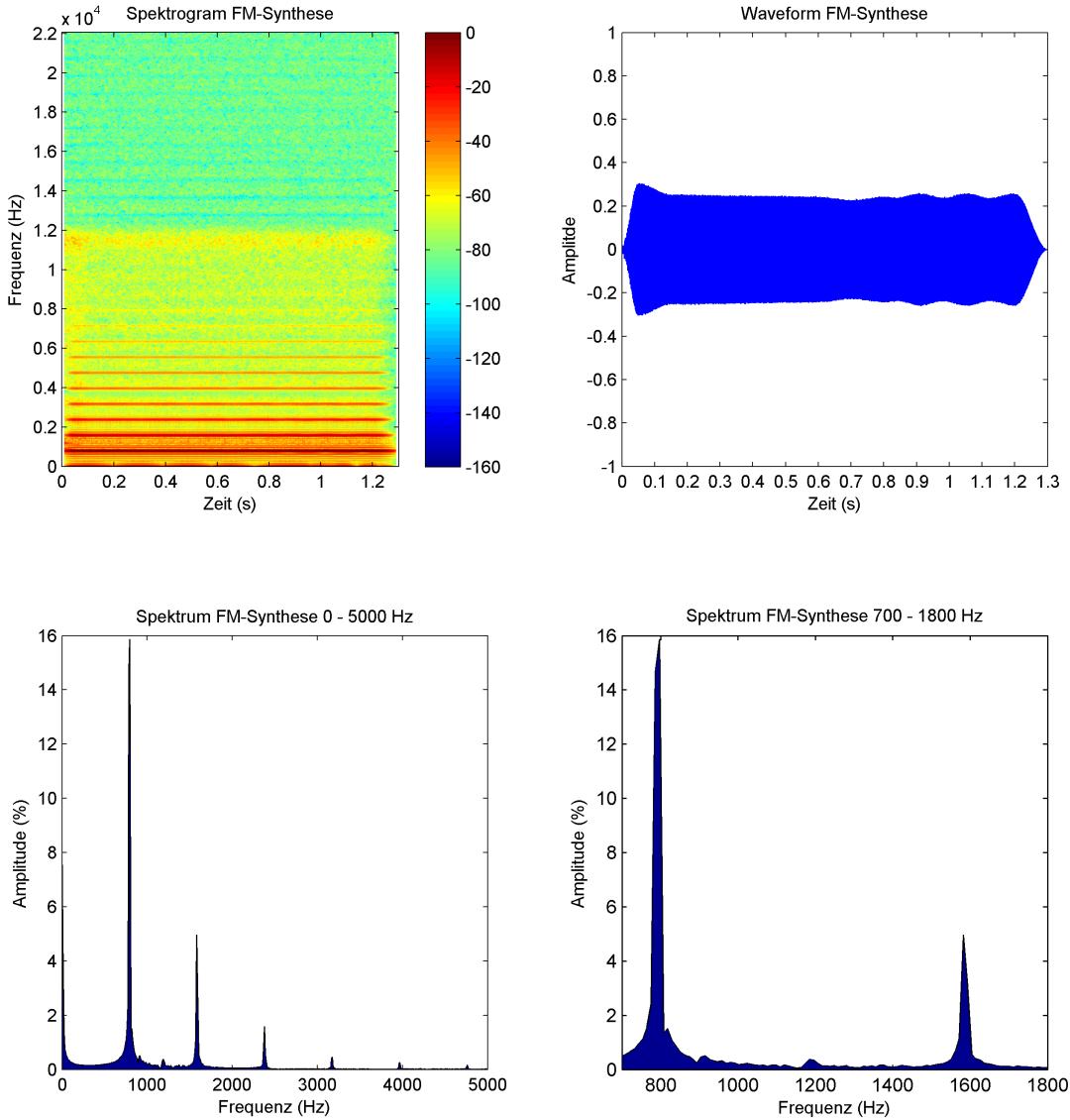


Abbildung 50: Plot des fertigen Tones der FM-Synthese mit 4 Modulatoren, ADSR-Hüllkurve, Variablen Modulationsindex, Vibrato, Rauschen, Variabler Trägerfrequenz und Anblasgeräusch

Der in diesem Kapitel synthetisierte Ton nähert sich dem originalen Flötenton stark an. Sowohl die Tonhöhe wie auch das Klangbild konnten sehr gut nachgebildet werden. Durch das genutzte Vibrato, den variablen Modulationsindex und die variable Trägerfrequenz wirkt der erzeugte Klang lebendig. Einzig das scharfe Anblasgeräusch unterscheidet sich noch etwas von dem des originalen Tones. Wäre man allerdings nicht in der Lage die beiden Töne zu vergleichen würde der synthetisierte Ton durchaus als ein echtes Instrument erkannt werden. Dieses Ergebnis zeigt,

dass es sehr wohl möglich ist, mit der FM-Synthese einen natürlich wirkenden Instrumententon zu erzeugen, allerdings ist dies mit erheblichem Aufwand verbunden.

## 4.2 Implementierung eines FM-Synthesizers zur Demonstration der Synthese Parameter

Zu Beginn dieser Arbeit wurde zum besseren Verständnis der FM-Synthese ein kleiner Software-Synthesizer in C++ mit Hilfe des JUCE Frameworks implementiert. Das JUCE Framework wurde hierfür ausgewählt, da es gerade für ein Audioprogramm gut geeignet ist. Es bietet bereits Funktionen zur Ausgabe eines Audiosignals und Möglichkeiten zur Erstellung einer Benutzeroberfläche. Zudem ist es Cross-Plattform fähig.

Zunächst wurde eine einfache FM-Synthesizer Klasse geschrieben und diese an das Audio Ausgabesystem des JUCE Frameworks angebunden. Dabei ruft die Soundkarte eine Methode des Programms auf und erwartet, dass der übergebene Puffer mit Audiodaten gefüllt wird. Das Programm füllt den gegebenen Puffer mit Daten, die mit der FM-Synthesizer Klasse generiert wurden. Später wurde das Programm dann noch um die visuelle Darstellung des erzeugten Audiosignals erweitert. Außerdem ist es möglich, dem FM-Synthesizer einen Hüllkurvengenerator zu übergeben, welcher bei der Erzeugung des Audiosignals den Amplitudenwert für die einzelnen Samples bereitstellt. Die Amplitudenwerte werden ebenfalls visuell dargestellt.

Da gerade die Änderung der Parameter und das jeweils resultierende Klangbild zum Verständnis hilfreich sind, wurden Möglichkeiten in das Programm implementiert, um sowohl den Modulationsindex als auch die Modulationsfrequenz sowie die Oktave zu ändern. Das Ändern der Parameter ist mittels einfachem Tastendruck möglich. Zusätzlich wurde das Programm so angepasst, dass es ermöglicht wird, verschiedene Tonhöhen zu spielen. Die Tasten "C", "D", "E", "F", "G", "A" und "B" entsprechen dabei jeweils ihrem tonalem Äquivalent. Beim Drücken der Taste startet die Hüllkurve in die Attack-Phase, geht dann über in die Decay- und schließlich in die Sustain-Phase. Wird die Taste losgelassen, startet die Release-Phase und der Ton klingt ab. Mit den Tasten "1" und "2" kann der Modulationsindex inkrementiert sowie dekrementiert werden. Um die Modulationsfrequenz zu ändern, können die Pfeil hoch und Pfeil runter Tasten genutzt werden. Die Octave lässt sich mit den Tasten "+" und "-" verändern.

Das entstandene Programm bietet eine gute Möglichkeit, die Parameter der FM-Synthese während der Wiedergabe eines Tones zu verändern und hilft so zu verstehen was beim Ändern dieser passiert. Natürlich ist das entstandene Programm nicht so flexibel und mächtig wie beispielsweise das Programm FM8 von Native Instruments. Trotzdem bietet es einen einfachen Einstieg in die FM-Synthese und der für Parameter resultierenden Spektren und Klänge. Somit wurde das Ziel, das mit der Programmierung des Tools gesetzt wurde, erreicht.

## 5 Fazit

Chownings Entdeckung führte zu einer Revolution des Synthesizer Marktes. Der DX7 von Yamaha war einer der erfolgreichsten Synthesizer und trug maßgeblich zu dieser Revolution bei. Obwohl die zugrundeliegende Formel simpel wirkt, sind die mathematischen Hintergründe nicht trivial. Durch komplexe Anordnung von Trägern und Modulatoren können beliebig komplexe Klänge erzeugt werden. Dies führt zu einer mächtigen, jedoch wenig intuitiven Technik. Musiker können durch Experimentieren verschiedener Parametern und Konfigurationen interessante Klänge erzeugen. Außerdem kann die FM-Synthese dazu verwendet werden, um ganze Instrumente nachzubilden. Wie in dieser Arbeit gezeigt wurde, ist dies bei sorgfältiger Ausnutzung der Eigenschaften von einfacher und komplexer FM-Synthese sowie unter Wahl der geeigneten Parametern mit einem gewissen Maß an Erfindungsreichtum sehr gut zu bewerkstelligen.

## Literatur

- [AS64] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. Dover Publications, 1964. ISBN 0-486-61272-4.
- [Bar09] J. Barkowsky. *Einführung in die musikalische Akustik*. Taschenbücher zur Musikwissenschaft. Florian Noetzel, Heinrichshofen-Bücher, 2009. ISBN 978-3-795-90909-3.
- [Bor80] Hans Borucki. *Einführung in die Akustik - 2., durchges. Aufl.* Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1980. ISBN 3-411-01581-0.
- [CB86] John M. Chowning and David Bristow. *FM Theory & Applications - By Musicians for Musicians*. Yamaha Music Foundation, 1986. ISBN 4-636-17482-8.
- [Cho73] John M. Chowning. The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation. *Journal of the Audio Engineering Society*, pages 526–534, 1973.
- [Cro15] Zachary Crockett. The father of the digital synthesizer. <http://priceconomics.com/the-father-of-the-digital-synthesizer/>, Stand 23.03.2015.
- [Dav27] W. J. Davis, H. T.; Kirkham. A new table of the zeros of the bessel functions  $J_0(x)$  and  $J_1(x)$  with corresponding values of  $J_1(x)$  and  $J_0(x)$ . *Bull. Amer. Math. Soc.* 33 (1927), no. 6, pages 760–772, 1927. <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183492347>.
- [Fie15] Markus Fiedler. Die fm-synthese, ein Überblick. <http://www.markus-fiedler.de/fm/fm.html>, Stand 09.06.2015.
- [Hor98] Andrew Horner. Nested modulator and feedback fm matching of instrument tones. *IEEE TRANSACTIONS ON SPEECH AND AUDIO PROCESSING, VOL. 6, NO. 4*, pages 398–409, 1998.
- [Lat98] B. P. Lathi. *Modern Digital and Analog Communication Systems 3rd ed.* Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0-19-511009-9.
- [Nel15] Andrew J. Nelson. *The sound of innovation - Stanford and the computer music revolution*. Inside Technology. MIT Press, 2015. ISBN 978-0-262-02876-9.
- [Oya87] A. Oya. Electronic musical instrument. <https://www.google.de/patents/US4643066>, Februar 17 1987. US Patent 4,643,066.
- [PDEZ67] Prof. Dr. Richard Feldtkeller Prof. Dr. Eberhard Zwicker. *Das Ohr als Nachrichtenempfänger - 2. Aufl.* S. Hirzel Verlag Stuttgart, 1967. ISBN 978-3777601045.
- [Rai06] Daniel R. Raichel. *The Science and Applications of Acoustics Second Edititon*. Springer Science, 2006. ISBN 0-387-26062-5.
- [Ros99] D.P. Rossum. Method and apparatus for synthesizing musical sounds by frequency modulation using a filter. <https://www.google.de/patents/US5900570>, Mai 4 1999. US Patent 5,900,570.
- [Sch] B. Schottstaedt. Introduction to fm. <https://ccrma.stanford.edu/software/snd/snd/fm.html>.
- [Sch77] B. Schottstaedt. The simulation of natural instrument tones using frequency modulation with a complex modulating wave. *Computer Music Journal*, 1(4):pp. 46–50, 1977.
- [Sti81] Peter Stingl. *Mathematik für Fachhochschulen*. Carl Hanser Verlag München Wien, 1981. ISBN 3-446-13481-6.

- [Sto11] D. Stotz. *Computergestützte Audio- und Videotechnik: Multimedia-technik in der Anwendung - 2. Aufl.* Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-23252-7.
- [Tem96] Nico M. Temme. *Special Functions An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics.* John Wiley & Sons, Inc., 1996. ISBN 0-471-11313-1.
- [Tob70] J.V. Tobias. *Foundations of modern auditory theory.* Number Bd. 1 in Foundations of Modern Auditory Theory. Academic Press, 1970. LCCN 78091432.
- [Yam83] Yamaha. Dx7 operating manual, 1983.