Besonderheiten der FM-Synthese

Markus Bullmann

Gliederung

- Winkelmodulation
  - Phasenmodulation
  - Frequenzmodulation
- Klangspektren
- Frequenzverhältnisse

Winkelmodulation

↓

Änderung des Winkels

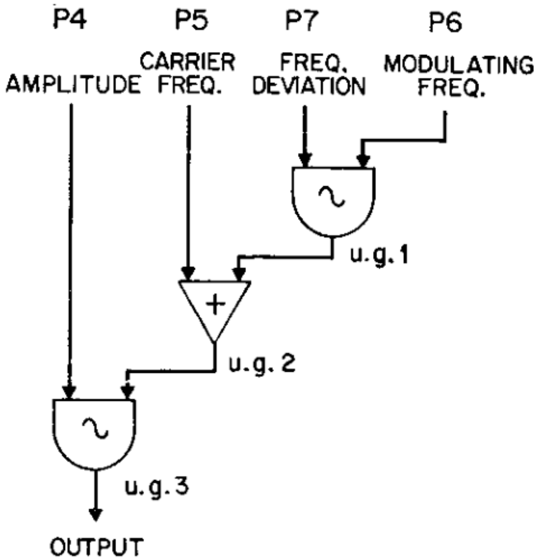
↙ ↘

Änderung der Phase | Änderung der Frequenz

↓ ↓

Phasenmodulation | Frequenzmodulation

FM oder PM?



$$A \cdot \sin(\alpha t + I \cdot \sin(\beta t))$$

Winkelmodulation

Moduliertes Signal: $s(t) = A \cdot \sin(\theta(t))$

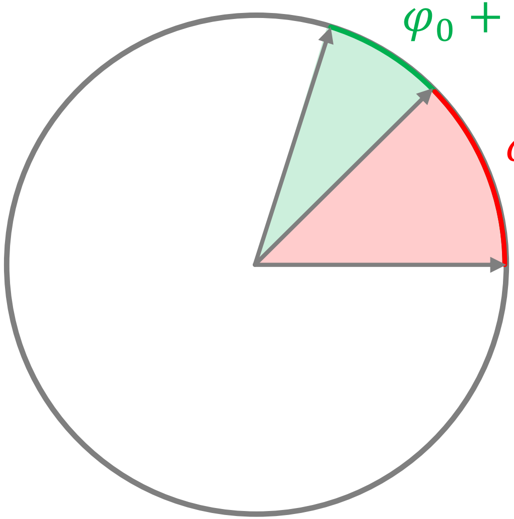
Momentaner Winkel: $\theta(t) = \omega_0 t + \underbrace{\varphi(t)}_{\text{Momentane Phasenverschiebung}}$

Phasenmodulation

Phasenverschiebung des Trägersignals proportional zu $m(t)$

$$\Rightarrow s_{PM}(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \underset{\varphi(t)}{\boxed{\varphi_0 + k \cdot m(t)}})$$

Phasenmodulation



$$s_{PM}(t) = A \cdot \sin(\underline{\omega_0 t} + \underline{\varphi_0 + k \cdot m(t)})$$

Frequenzmodulation

Frequenz des Trägersignals
proportional zu $m(t)$

Aber wie? …

Zeitabhängigkeit

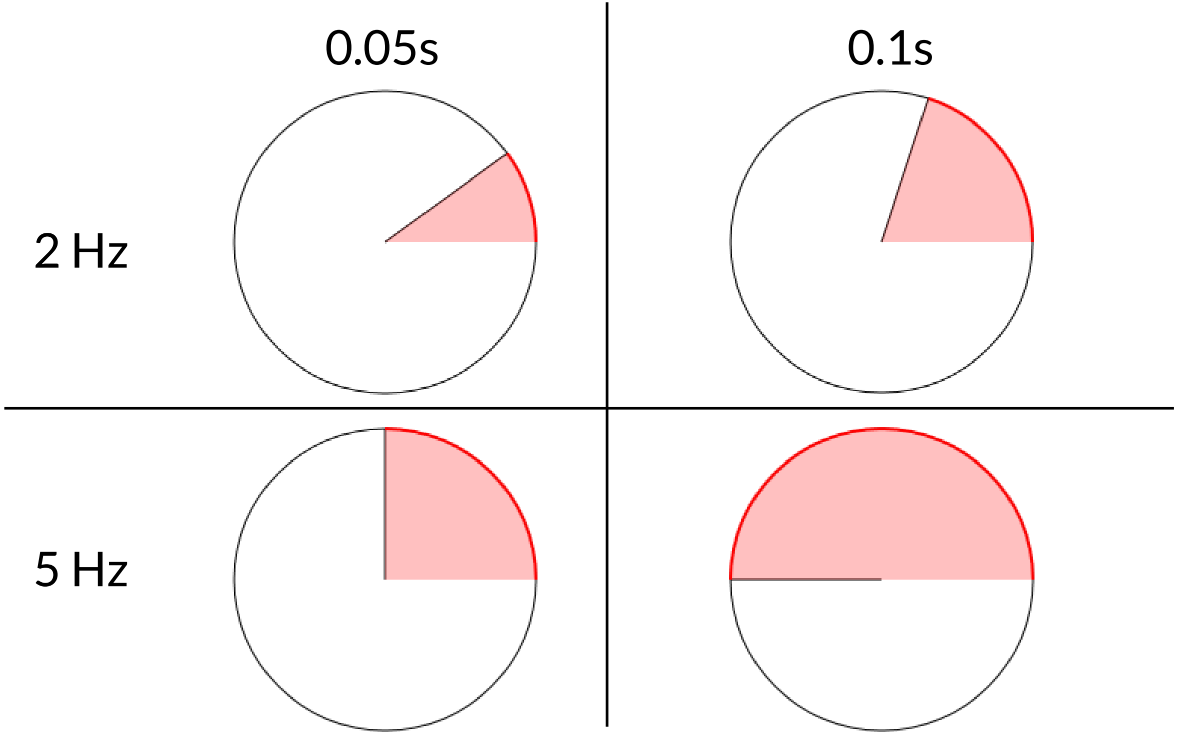
Bisher:

$$s(t) = A \cdot \sin(\theta(t))$$
$$\theta(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$$
$$\varphi(t) = \varphi_0 + k \cdot m(t)$$

Und jetzt auch noch:

Momentane Frequenz: $\omega(t) = \omega_0 + k \cdot m(t)$

Momentane Frequenz



Momentane Frequenz

- Beobachtung: Frequenz ist Änderung des Winkels

$$\Rightarrow \omega(t) = \dot{\theta}(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Frequenzmodulation

Wir wissen: $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$

$$\Rightarrow \theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$$

Mit:

$$\omega(t) = \omega_0 + k \cdot m(t)$$

$$\theta(t) = \omega_0 t + k \cdot \int_0^t m(\tau) d\tau$$

Frequenzmodulation

$$s_{FM}(t) = A \cdot \sin(\theta(t))$$

$$\theta(t) = \omega_0 t + k \cdot \int_0^t m(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow s_{FM}(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + k \cdot \int_0^t m(\tau) d\tau)$$

FM & PM

PM: $$s_{PM}(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + k \cdot m(t))$$

FM: $$s_{FM}(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + k \cdot \int_0^t m(\tau) d\tau)$$

Modulationssignal

Wir nehmen an:

$$\omega_0 = \omega_c; \varphi_0 = 0$$

$$m(t) = \sin(\omega_m t)$$

$$s_{PM}(t) = A \cdot \sin(\omega_c t + k \cdot \sin(\omega_m t))$$

$$s_{FM}(t) = A \cdot \sin(\omega_c t + k \cdot \int_0^t \sin(\omega_m \tau) d\tau)$$

$$s_{FM}(t) = A \cdot \sin(\omega_c t - \frac{k}{\omega_m} \cdot \cos(\omega_m t))$$

$$\Delta f = k$$

$$I = \frac{\Delta f}{\omega_m}$$

$$= A \cdot \sin(\omega_c t - I \cdot \cos(\omega_m t))$$

$$-\cos(x) = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$$

$$\approx A \cdot \sin(\omega_c t + I \cdot \sin(\omega_m t))$$

- unsere Herleitung:

$$s_{FM}(t) = A \cdot \sin(\omega_c t + I \cdot \sin(\omega_m t))$$

- nach Chowning:

$$e(t) = A \cdot \sin(\alpha t + I \cdot \sin(\beta t))$$

KLANGSPEKTREN

Klangspektren

- Fourier-Analyse
  - FFT in MATLAB
  - Fourier-Reihe bestimmen „per Hand“

Fourier-Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(I) \sin(w_c t + n \cdot w_m t)$$

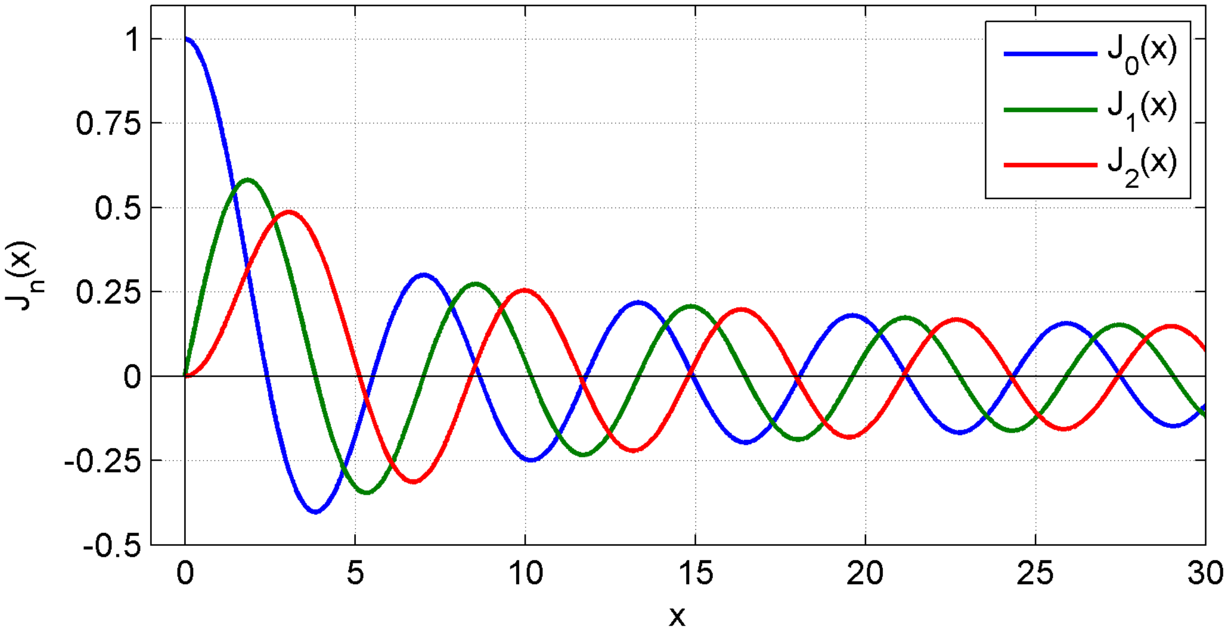
Fourier-Reihe

$$
\begin{aligned}
s(t) = A \cdot \{ \; & \text{Trägerschwingung} \\
& \boxed{J_0(I) \cdot \sin(\omega_c t)} \\
& + \boxed{\begin{array}{l} J_1(I) \cdot \sin[t \cdot (\omega_c + \omega_m)] \\ + J_2(I) \cdot \sin[t \cdot (\omega_c + 2\omega_m)] \\ + J_3(I) \cdot \sin[t \cdot (\omega_c + 3\omega_m)] \end{array}} \begin{array}{c} - \\ + \\ - \end{array} \boxed{\begin{array}{l} J_1(I) \cdot \sin[t \cdot (\omega_c - \omega_m)] \\ J_2(I) \cdot \sin[t \cdot (\omega_c - 2\omega_m)] \\ J_3(I) \cdot \sin[t \cdot (\omega_c - 3\omega_m)] \end{array}} \\
& + \ldots \}
\end{aligned}
$$

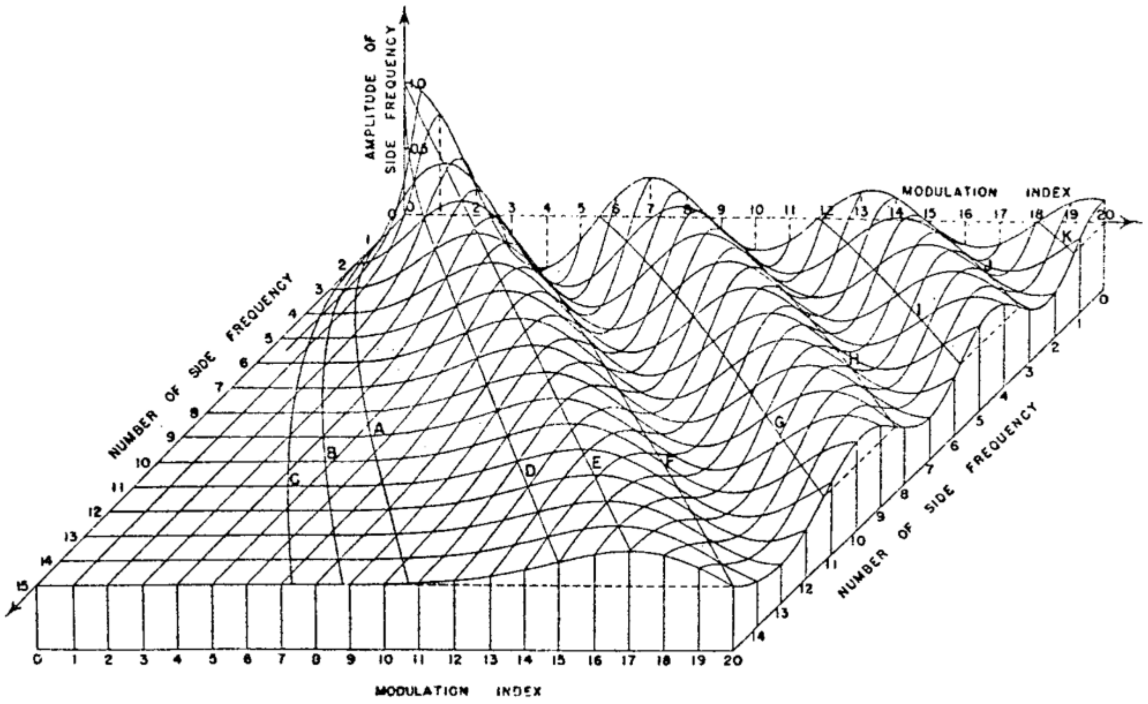
Oberschwingungen

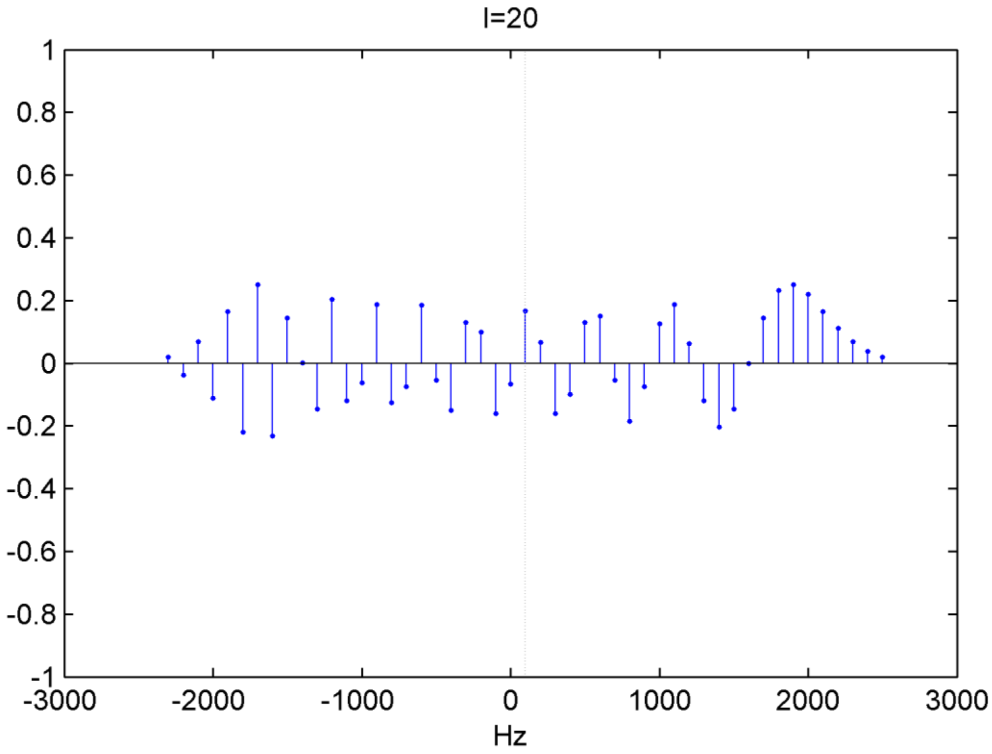
Unterschwingungen

Bessel-Funktionen

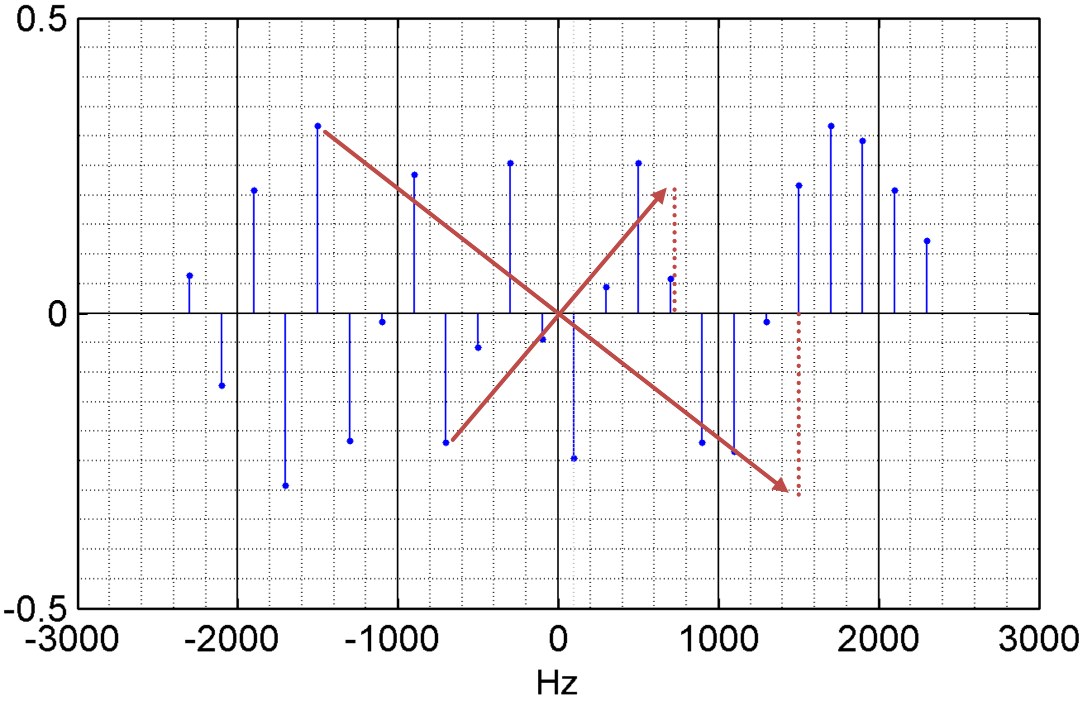


Bessel-Funktionen

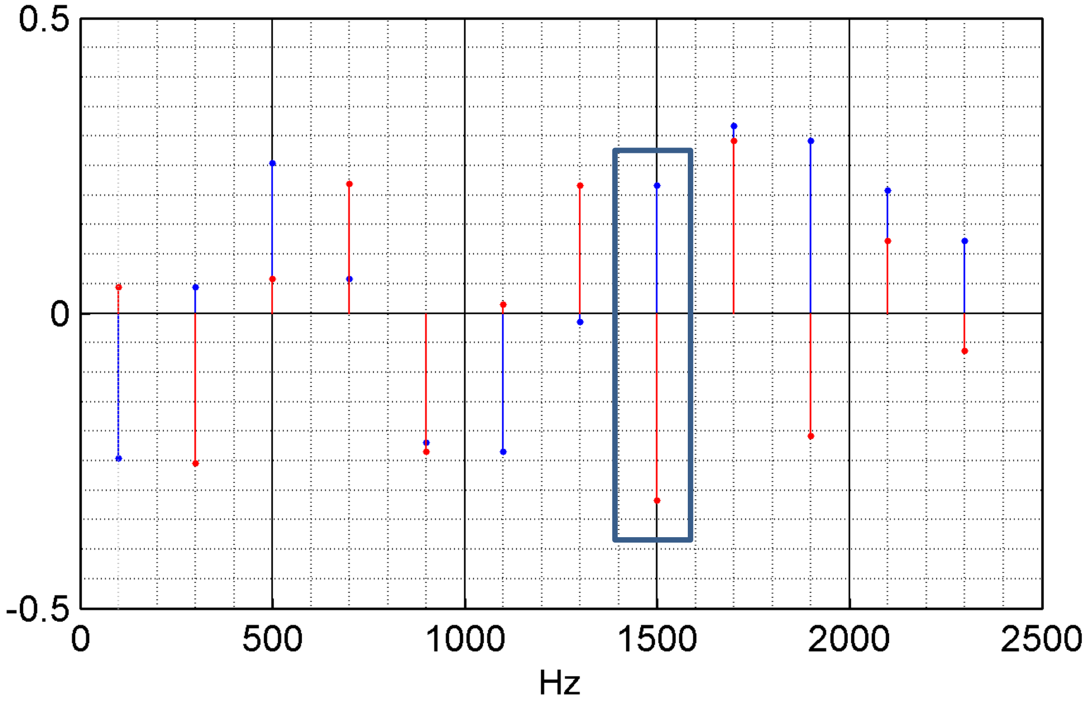



I=20
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-3000
-2000
-1000
0
1000
2000
3000
Hz

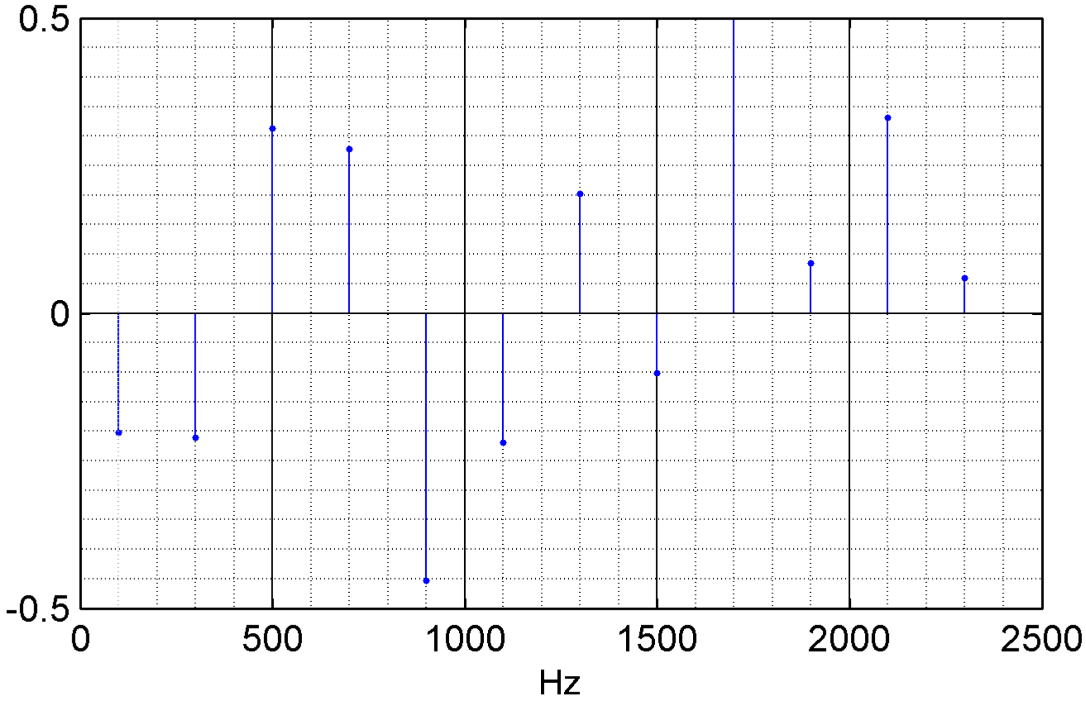
Negative Frequenzen



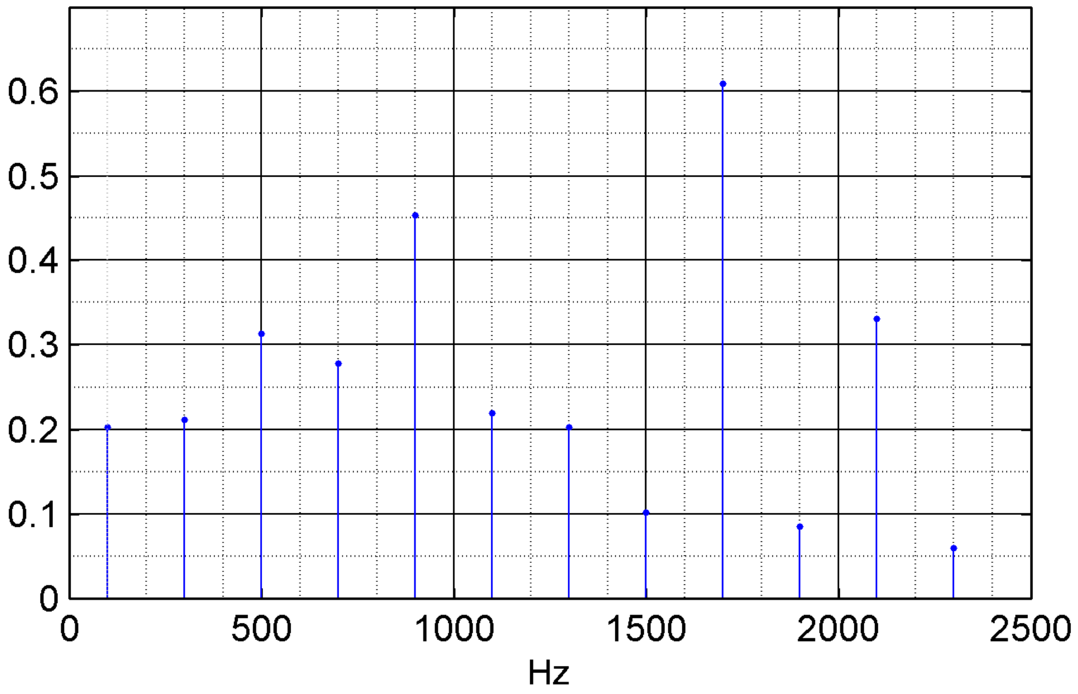
Negative Frequenzen



Negative Frequenzen



Negative Frequenzen



FREQUENZVERHÄLTNISSE

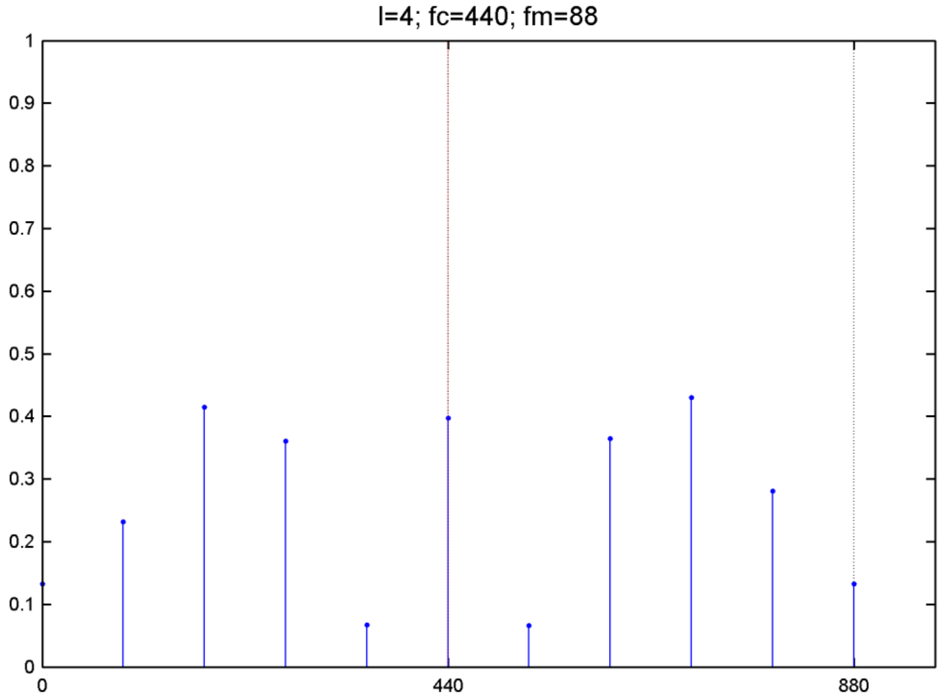
Frequenzverhältnisse

$$\frac{f_c}{f_m} = \frac{N1}{N2}$$

Frequenzverhältnisse

1. Die Trägerfrequenz ist immer die N1−te Harmonische.

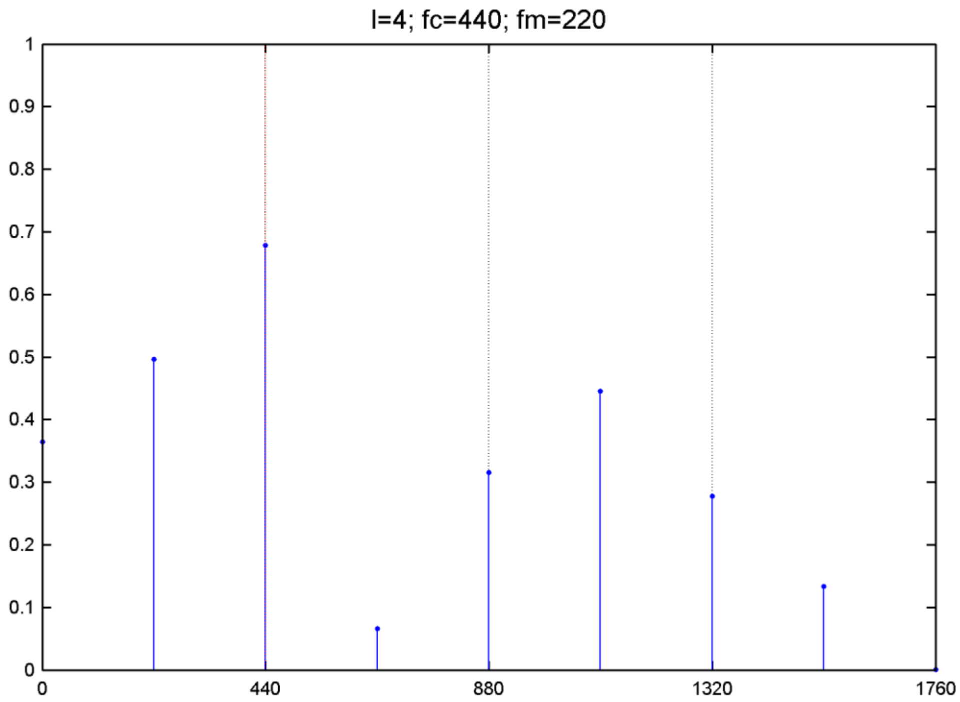
Frequenzverhältnisse



Frequenzverhältnisse

2. Für N2 = 1 enthält das Spektrum alle Harmonischen und der Grundton entspricht der Modulationsfrequenz.

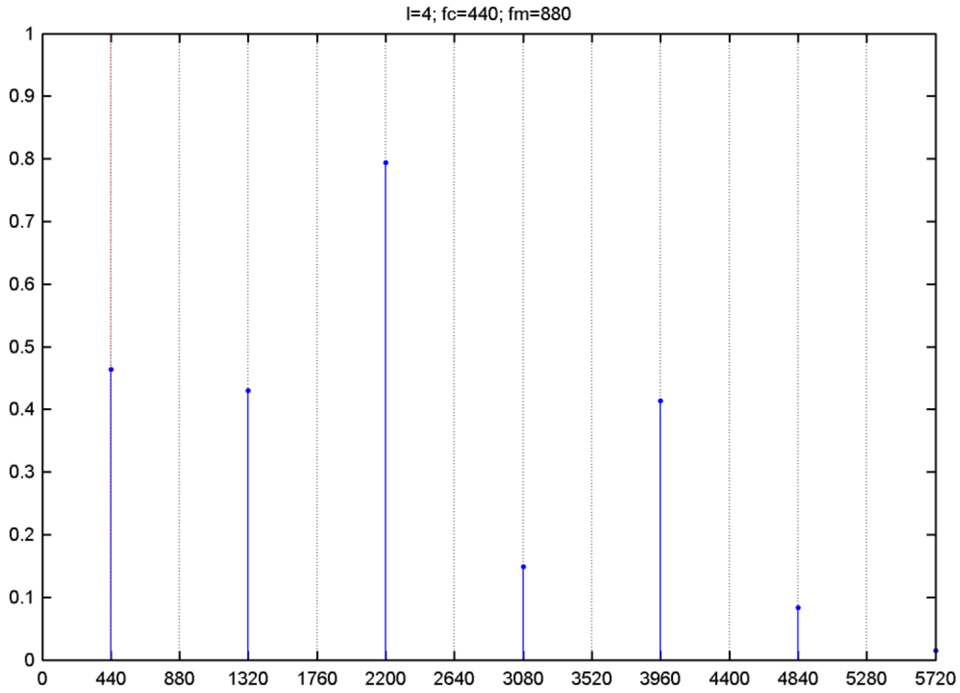
Frequenzverhältnisse



Frequenzverhältnisse

3. Wenn N2 gerade ist, enthält das Spektrum nur ungerade Harmonische.

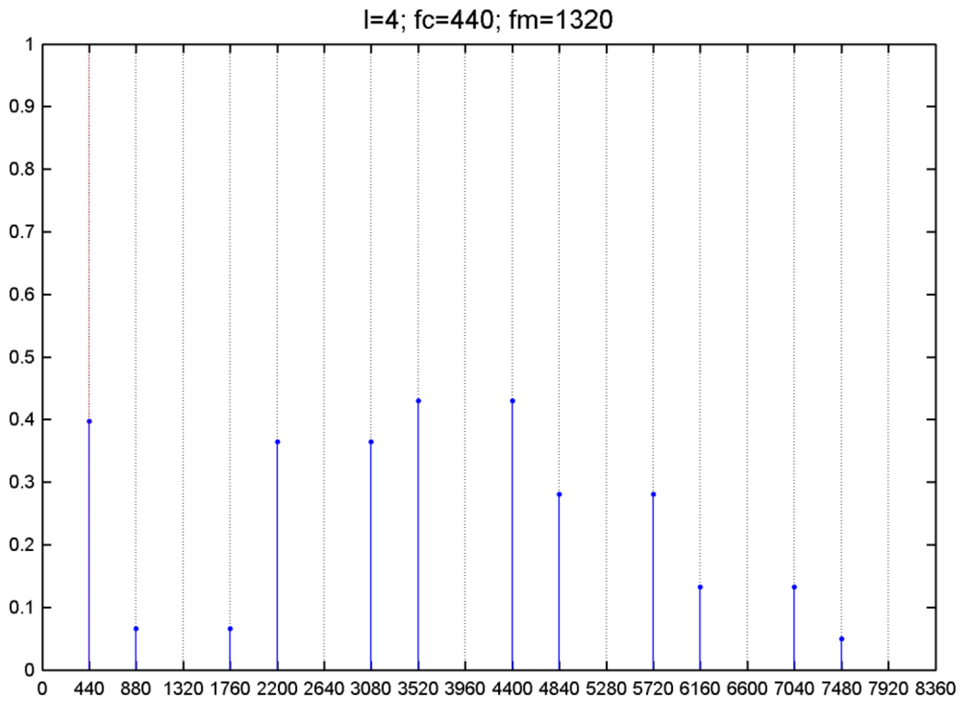
Frequenzverhältnisse



Frequenzverhältnisse

4. Ist N2 = 3, fehlt jede dritte Harmonische

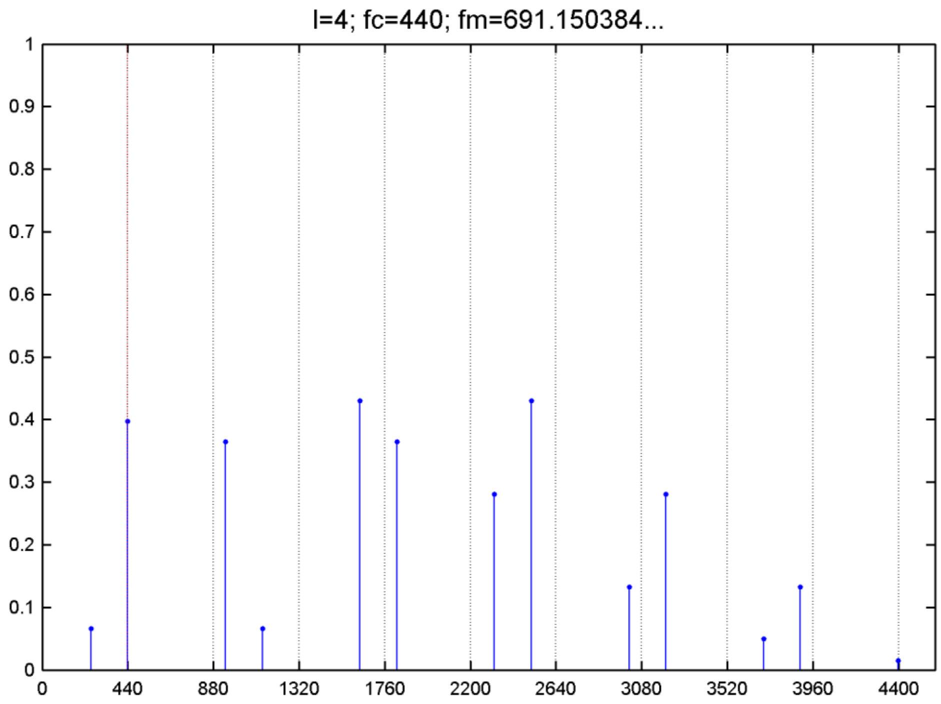
Frequenzverhältnisse



Frequenzverhältnisse

5. Ist $\frac{N1}{N2}$ irrational, resultiert ein disharmonisches Klangspektrum

Frequenzverhältnisse



Fazit

- PM und FM sind sehr ähnlich
- Mächtig aber contra intuitiv
- Komplexität hinter einfacher Formel versteckt

Quellen

[Bor80] Hans Borucki. *Einführung in die Akustik - 2., durchges. Aufl.* Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1980. ISBN 3-411-01581-0.

[Cho73] John M. Chowning. The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation. *Journal of the Audio Engineering Society*, pages 526–534, 1973.

[Dav27] W. J. Davis, H. T.; Kirkham. A new table of the zeros of the bessel functions $J_0(x)$ and $J_1(x)$ with corresponding values of $J_1(x)$ and $J_0(x)$. *Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), no. 6*, pages 760–772, 1927. http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183492347.

[Lat98] B. P. Lathi. *Modern Digital and Analog Communication Systems 3rd ed.* Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0-19-511009-9.

[Oya87] A. Oya. Electronic musical instrument. https://www.google.de/patents/US4643066, Februar 17 1987. US Patent 4,643,066.

Quellen

[PDEZ67] Prof. Dr. Richard Feldtkeller Prof. Dr. Eberhard Zwicker. *Das Ohr als Nachrichtenempfänger - 2. Aufl.* S. Hirzel Verlag Stuttgart, 1967. ISBN 978-3777601045.

[Rai06] Daniel R. Raichel. *The Science and Applications of Acoustics Second Edititon.* Springer Science, 2006. ISBN 0-387-26062-5.

[Ros99] D.P. Rossum. Method and apparatus for synthesizing musical sounds by frequency modulation using a filter. https://www.google.de/patents/US5900570, Mai 4 1999. US Patent 5,900,570.

[Tem96] Nico M. Temme. *Special Functions An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics.* John Wiley & Sons, Inc., 1996. ISBN 0-471-11313-1.

[Tob70] J.V. Tobias. *Foundations of modern auditory theory.* Number Bd. 1 in Foundations of Modern Auditory Theory. Academic Press, 1970. LCCN 78091432.

ENDE