

# Svängningstid av metallbalk

En rapport i kursen Mekanik; TFYA93

28 januari 2026

**Manfred Clase** mancl774  
**Elliot Eriksson** eller228  
Civilingenjörsprogrammet inom DataTeknik(D)  
Linköpings universitet, Linköping 2025-12-02

## Sammanfattning

Genom experimentering togs en modell för en metallbalks svängningstid fram.  
Experimenten resulterade i följande modell för svängningstiden  $T$ :

$$T = \rho^{1/2} E^{-1/2} h^{-1} L^2 C$$

Variablerna är:  $L$ ,  $b$  och  $h$  = balkens längd, bredd och höjd,  $E$  = balkmaterialets elasticitetsmodul, och  $g$  = tyngdaccelerationen. Den dimensionslösa konstanten  $C$  uppmättes till  $C = 6.60 \pm 0.0286$ . Den maximala relativa avvikelsen som uppmättes från oberoende mätningar var 6%. Inledningsvis gjordes modelleringen med en ansats av följande form:

$$T = \rho^x E^y h^z b^u L^v C$$

Med denna ansats så lösades  $x$  och  $y$  med hjälp av en dimensionsanalys vilket härleddes dessa okända exponenterna. Efter detta utfördes ett stort antal mätningar på olika metallbalkar av olika material och mått för att experimentellt framställa de resterande okända värdena.

# Innehållsförteckning

## Innehållsförteckning

<b>1 Inledning</b>	<b>1</b>
<b>2 Metod</b>	<b>1</b>
2.1 Experimentuppställning . . . . .	1
2.2 Ingående variabler . . . . .	2
2.3 Hypotes . . . . .	2
2.4 Dimensionsanalys . . . . .	2
<b>3 Resultat</b>	<b>4</b>
3.1 Mätning av exponenter . . . . .	4
3.2 Bestämning av konstanten . . . . .	5
3.3 Felanalys . . . . .	6
3.4 Modellprövning . . . . .	6
<b>4 Slutsats och Diskussion</b>	<b>7</b>
4.1 Slutsats . . . . .	7
4.2 Diskussion . . . . .	7
<b>5 Bilagor</b>	<b>7</b>

# 1 Inledning

Som ett moment i kursen mekanik genomfördes en laboration; vars syfte var att ta fram ett fysikaliskt uttryck för svängningstiden för en i ena änden inspänd rektangulär metallbalk.

## 2 Metod

### 2.1 Experimentuppställning

En metallbalk spändes fast i ena änden med hjälp av två skruvstäder se figur 1, och den fria längden utanför fastspänningen mättes noggrant med ett måttband. Den uppmätta längden fungerade som balkens svajande del. Därefter sattes balken i svängning genom en lätt manuell påverkan. Måtten på balken togs fram genom avmätning med hjälp av skjutmått. Svängningstiden registrerades med den tillhandahållna frekvensmätaren, som användes för att bestämma den fundamentala svängningsfrekvensen och därmed perioden. Mätningen upprepades flera gånger för att minimera slumpmässiga fel och för att kunna beräkna ett medelvärde för perioden.



Figur 1: Experimentuppställning

## 2.2 Ingående variabler

I Tabell 1 sammanfattas de variabler som antas påverka svängningstiden för den inspända balken.

Tabell 1: Ingående variabler för modellen av svängningstiden

Variabel	Beteckning	Enhet	Dimension
Svängningstid	$T$	s	$T$
Densitet	$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	$ML^{-3}$
Elasticitetsmodul	$E$	$\text{N}/\text{m}^2$	$ML^{-1}T^{-2}$
Höjd	$h$	m	$L$
Bredd	$b$	m	$L$
Längd	$L$	m	$L$

Svängningstiden  $T$  för en inspänd balk antas bero på både material- och geometriska egenskaper hos balken. De ingående variablerna presenteras i Tabell 1. Materialets densitet  $\rho$  och elasticitetsmodul  $E$  beskriver balkens materiella egenskaper, medan balkens längd  $L$ , bredd  $b$  och höjd  $h$  beskriver dess geometri. Alla balkar antas vara helt homogena.

Svängningstiden har dimensionen tid, medan övriga variabler har dimensioner som kan uttryckas i grundläggande mekaniska storheter. Dessa variabler används vid dimensionsanalys för att härleda ett dimensionslöst samband som beskriver hur svängningstiden beror av balkens egenskaper.

## 2.3 Hypotes

Hypotesen grundades på de mätbara värdena tillhörande balkarna. Det vill säga längd, bredd, tjocklek, densitet samt elasticitetsmodul. Då vi saknade verktyg för att påverka temperaturen hos materialen uteslötts denna. Efter ett antal enkla observationer så ansattes följande uttryck som hypotes:

$$T = \rho^x E^y h^z b^u L^v C \quad (1)$$

## 2.4 Dimensionsanalys

Utifrån ekvation (1) så kunde en dimensionsanalys utföras. Dimensionsanalysen syftar till att jämföra variablernas dimensioner i höger- och vänsterled för att utesluta okända exponenter. Ekvation ger

$$[\text{s}] = [\text{kg}/\text{m}^3]^x [\text{Pa}]^y [\text{m}]^z [\text{m}]^u [\text{m}]^v$$

Vidare ger detta:

$$[\text{s}] = [\text{kg}]^x [\text{m}]^{-3x} [\text{kg}]^y [\text{m}]^{-y} [\text{s}]^{-2y} [\text{m}]^z [\text{m}]^u [\text{m}]^v$$

Detta ger följande ekationsystem:

$$[\text{s}] = [\text{kg}^{x+y}] [\text{m}]^{(-3x-y+z+u+v)} [\text{s}]^{(-2y)}$$

Som kan skrivas om på följande sätt:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x - y + z + u + v = 0 \\ -2y = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Därefter kan  $y$  bestämmas:

$$-2y = 1 \implies y = -\frac{1}{2}.$$

Och sedan bestäms  $x$  som följande:

$$x + y = 0 \implies x = -y = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Då  $x$  och  $y$  i ekvationsystemet är känt så kan detta utnyttjas för att få en relation mellan  $z, u, v$ .

$$-3x - y + z + u + v = 0$$

Sätt in  $x = \frac{1}{2}$  och  $y = -\frac{1}{2}$ :

$$-3 \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) + z + u + v = 0$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + z + u + v = 0$$

$$-1 + z + u + v = 0 \implies z + u + v = 1.$$

Sammanfattningsvis ger dimensionsanalysen:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z + u + v = 1.$$

Det betyder att  $x$  och  $y$  är bestämda entydigt, medan  $z, u, v$  är frihetsgrader som måste bestämmas av ytterligare villkor som kan tas fram genom experimentell framställning.

### 3 Resultat

#### 3.1 Mätning av exponenter

För att bestämma exponenterna varierades endast en av variablerna:  $b$ ,  $h$  och  $L$  åt gången. Då det saknades varians i bredd( $b$ ) hos de tillgodosedda balkarna i laboratoriet uteslöts tester av variabeln. I stället lades fokuset på höjden vars exponentsamband ges av figur 2 samt längden vars exponentsamband illustreras i figur 3

För att utvinna exponenterna utnyttjas följande uttryck för höjden:

$$T = C_h h^u$$

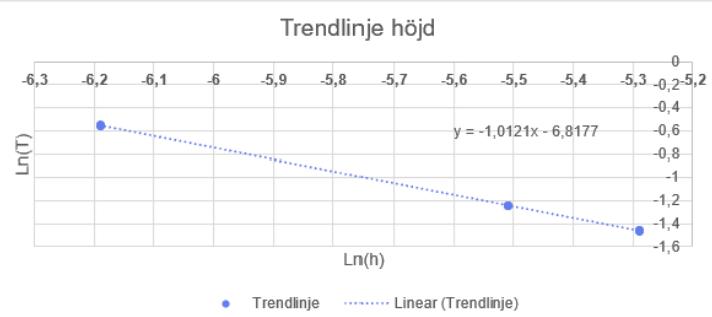
Eftersom vi vill utvinna exponenten  $u$ ; logaritmerar vi båda sidor så att vi kan linearisera uttrycket:

$$\ln(T) = \ln(C_h h^u)$$

Detta med hjälp av logaritmklagarna skrivs som:

$$\ln(T) = \ln(C_h) + u * \ln(h)$$

Vi plottar sedan i excel med våra mätvärden en trendlinje som ser ut enligt figur 2. trendlinjen med  $\ln(T)$  som funktion av  $\ln(h)$  lämnar oss med en rät linje med riktningskoefficienten  $u$ :



Figur 2: Trendlinje höjd

$$y = -1.0121x - 6.8177$$

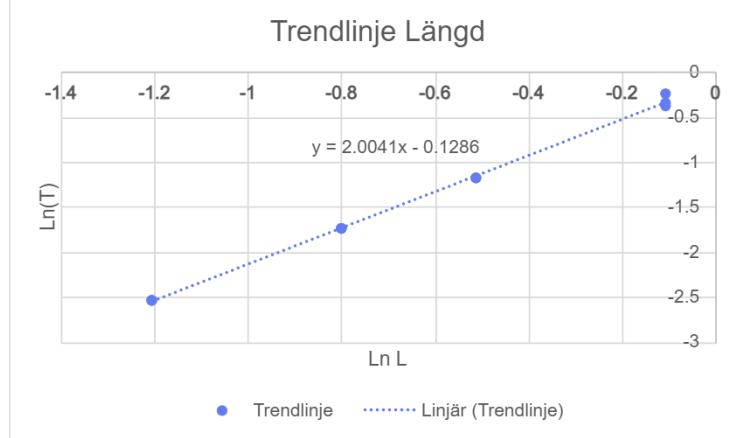
Riktningskoefficienten finner sig tillräckligt nära -1 för att tillåta experimentell avmätning av  $u$ . Detta innebär i praktiken att vi avrundar  $x$  koefficient till -1:

$$u = -1$$

I figur 3 visualiseras plotningen av den logaritmerade svängningstiden med avseende på den logaritmerade Längden. Precis som i tidigare linearisering nyttjar vi sambandet:

$$\ln(T) = \ln(C_L) + v * \ln(L)$$

Lineariseringen lämnar oss med följande räta linje:



Figur 3: Trendlinje Längd

$$y = 2.0041x - 0.1286$$

Även i detta fall finner sig koefficienten tillräckligt nära ett heltal. Precis som tidigare använder vi oss av experimentell avmätning och fastställer exponenten för  $L$ :

$$v = 2$$

I detta skede kunde den uteblivna exponenten tas fram genom tidigare fastställt samband:

$$z + u + v = 1 \implies z = 0$$

Slutsatsen av dessa exponentmätningar ger oss att:

$$z - 1 + 2 = 1 \implies z = 0 \implies b^0 = 1$$

vilket innebär att bredden saknar signifikans i modellen som har formulerats enligt följande:

$$T = \rho^{1/2} E^{-1/2} h^{-1} L^2 C$$

### 3.2 Bestämning av konstanten

För att beräkna konstanten  $C$  skrevs den ursprungliga ekvationen om till:

$$C = \frac{T \sqrt{E} h}{\sqrt{\rho} L^2}$$

Konstanten beräknades punktvis från de olika mätvärdena i excel-arket bifogat i bilaga 5. Genom att ta medelvärdet av alla dessa iterationer beräknades konstanten till 6.60.

### 3.3 Felanaly

För att göra en uppskattning av osäkerheten på konstanten beräknades standardosäkerheten. Eftersom konstanten inte grundar sig i oändliga mätningar resulterar det i en skattning av det och leder till att följande formler kan nyttjas:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3)$$

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2} \quad (4)$$

$$u(x) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}} \quad (5)$$

genom att applicera ekvationen för approximationen av medelvärde i formeln 3 nås en skattning av medelvärdet och genom ekvationen för skattning av standardavvikelse i formeln 4 nås en skattning som nyttjas vidare. Därefter fås standardosäkerheten ut genom ekvationen för standardosäkerheten i figur 5 denna ekvationen utgår från tidigare skattning för standardavvikelsen. Genom att applicera dessa formler i excel fås standardosäkerheten till:

$$\sigma = 0.028$$

För att täcka 95% av fallen multipliceras standardosäkerheten med 2 och resulterar i följande standardosäkerhet för att täcka fallen och innebär en säkrare osäkerhetsmarginal för större andel av fallen:

$$2\sigma = 0.06$$

$$C = 6.60 \pm 0.06$$

### 3.4 Modellprövning

I bifogad bilaga 5 syns 3 blåmarkerade rader där modellprövning skett med mått för alla relevanta variabler. Utifrån de tre oberoende mätningarna kunde det fastställas att modellen gav en god uppskattning av balkens periodtid. Avvikelsen gentemot modellen hade en maximal relativ osäkerhet på

$$-6.48E - 02$$

Då det endast sker 3 försök blir resultatet begränsat och osäkerheten avrundas till:

$$6\%$$

## 4 Slutsats och Diskussion

### 4.1 Slutsats

Försöket visar att det med dimensionsanalys, linjäriseringar och experimentellt framtagna värden som verktyg går att ta fram en väl fungerande modell över hur en metallbalks periodtid påverkas av olika faktorer såsom dess höjd, längd och materialegenskaper.

Bredden som ursprungligen var en del av hypotesen visade sig vara försumbar efter vidare experimentering och resulterade i en mer lättarbetad modell.

### 4.2 Diskussion

Den framtagna modellen har vissa begränsningar. Den bygger på förenklingar såsom att balken är perfekt elastisk och homogen samt att svängningarna är små och linjära. I verkligheten kan materialets variationer, balkens geometri och ett stort antal andra faktorer påverka resultaten, vilket innebär att modellen endast ger en approximativ beskrivning av systemets dynamik.

För att förbättra mätningarna bör de variabler som mest påverkar beräkningen av konstanten mätas med högre noggrannhet. Analys av felfortplantning visar att framför allt balkens fria längd, tjocklek och svängningstid har störst inverkan på resultatet, medan påverkan från bredden är mindre. Därför är det viktigt att använda precisionsinstrument, såsom skjutmått, och att upprepa tidsmätningar för att minska slumpmässiga fel.

För att undersöka systemet mer ingående bör ytterligare försök göras med olika balkmaterial och geometrier. Exempelvis hade det varit av högt intresse att undersöka balkbreddens inverkan mer noggrant då det är möjligt att balkarna inte innehöll en tillräckligt stor varians i bredd. Detta skulle möjliggöra en mer omfattande validering av modellen och ge en bättre förståelse för vilka faktorer som domineras systemets beteende.

Slutligen bör man beakta att experimentella fel, som friktion vid fastspänning och mänskliga begränsningar i avgörandet om dubbla svängningar (att mätaren mäter frekvensen två gånger per period) sker kan definitivt introducera fel. Genom att upprepa mätningarna flera gånger och beräkna medelvärden och standardavvikelse kan dessa fel reduceras och modellen göras mer tillförlitlig.

## 5 Bilagor

All mätdata lades in i en Microsoft Excel-fil, all mätdata som framställdes ligger tillgänglig på <https://github.com/MC0117/TFYA93> I tabell

Metall	Densitet (kg/m³)	Elasticitetsmodul (Nm²)	Tjocklek h (m)	Bredd (m)	Tvärsnitts Area (m²)	Längd (m)	Uppmättfrekvens (Hz)	Periodtid (s)	In L / Ln h	In T	Beräknat C
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,9	1,28	0,78125	-0,10536052	-0,246860078	7,41E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,9	1,47	0,680272109	-0,10536052	-0,385262401	6,45E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,9	1,41	0,709219858	-0,10536052	-0,343589704	6,73E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,6	3,222	0,310366232	-0,51082562	-1,170002285	6,63E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,6	3,226	0,309981401	-0,51082562	-1,171242275	6,62E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,6	3,228	0,309789343	-0,51082562	-1,17186275	6,61E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,45	5,685	0,176822507	-0,7985077	-1,734306894	6,70E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,45	5,68	0,176056338	-0,7985077	-1,736951233	6,68E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,45	5,681	0,176025348	-0,7985077	-1,737127274	6,68E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,3	12,54	0,079744817	-1,2039728	-2,628923535	6,81E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,3	12,56	0,079817834	-1,2039728	-2,530517161	6,80E+00
Koppar	8.96E+03	1.20E+11	2,10E-03	2,01E-02	4,22E-05	0,3	12,56	0,079817834	-1,2039728	-2,530517161	6,80E+00
koppar	8.96E+03	1.20E+11	3,10E-03	2,01E-02	6,23E-05	0,45	8,354	0,119703136	-0,7985077	-2,122740466	6,71E+00
koppar	8.96E+03	1.20E+11	3,10E-03	2,01E-02	6,23E-05	0,45	8,38	0,119331742	-0,7985077	-2,125847914	6,69E+00
koppar	8.96E+03	1.20E+11	3,10E-03	2,01E-02	6,23E-05	0,45	8,25	0,121212121	-0,7985077	-2,1102132	6,79E+00
koppar	8.96E+03	1.20E+11	3,10E-03	2,01E-02	6,23E-05	0,6	4,74	0,210970464	-0,51082562	-1,556037136	6,66E+00
koppar	8.96E+03	1.20E+11	3,10E-03	2,01E-02	6,23E-05	0,6	4,74	0,210970464	-0,51082562	-1,556037136	6,65E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	3,10E-03	1,05E-02	3,28E-05	0,45	4,748	0,210614996	-0,51082562	-1,557723477	6,64E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	3,10E-03	1,05E-02	3,28E-05	0,45	8,32	0,120192308	-0,7985077	-2,118662255	6,51E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	3,10E-03	1,05E-02	3,28E-05	0,45	8,35	0,119760479	-0,7985077	-2,122261539	6,48E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	3,10E-03	1,05E-02	3,28E-05	0,45	8,359	0,119631535	-0,7985077	-2,123338803	6,47E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	4,05E-03	2,05E-02	8,30E-05	0,45	10,72	0,093283582	-0,7985077	-2,372111156	6,60E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	4,05E-03	2,05E-02	8,30E-05	0,45	10,73	0,093198645	-0,7985077	-2,373043557	6,59E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	4,05E-03	2,05E-02	8,30E-05	0,45	10,738	0,093127212	-0,7985077	-2,373788852	6,59E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	2,05E-03	2,05E-02	4,20E-05	0,8	1,74	0,574712644	-6,18991549	-0,553885113	6,51E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	2,05E-03	2,05E-02	4,20E-05	0,8	1,73	0,578034682	-6,18991549	-0,548121409	6,55E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	2,05E-03	2,05E-02	4,20E-05	0,8	1,74	0,574712644	-6,18991549	-0,553885113	6,51E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	4,05E-03	2,05E-02	8,30E-05	0,8	3,48	0,287356322	-5,5090384	-1,247032294	6,43E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	4,05E-03	2,05E-02	8,30E-05	0,8	3,48	0,287356322	-5,5090384	-1,247032294	6,43E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	4,05E-03	2,05E-02	8,30E-05	0,8	3,48	0,287356322	-5,5090384	-1,247032294	6,43E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	5,05E-03	2,05E-02	1,04E-04	0,8	4,305	0,232288037	-5,28836704	-1,459771738	6,48E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	5,05E-03	2,05E-02	1,04E-04	0,8	4,31	0,232018561	-5,28836704	-1,460937904	6,47E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	5,05E-03	2,05E-02	1,04E-04	0,8	4,328	0,231053604	-5,28836704	-1,465105542	6,45E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	5,10E-03	4,25E-02	4,25E-02	0,8	4,324	0,231267345			6,52E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	5,10E-03	4,25E-02	4,25E-02	0,8	4,323	0,231320842			6,52E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	5,10E-03	4,25E-02	4,25E-02	0,8	4,323	0,231320842			6,52E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	5,10E-03	2,05E-02	4,25E-02	0,8	4,381	0,228258388			6,43E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	5,10E-03	2,05E-02	4,25E-02	0,8	4,381	0,228258388			6,43E+00
Mässing	8,40E+03	1,05E+11	5,10E-03	2,05E-02	4,25E-02	0,8	4,381	0,228258388			6,43E+00
Aluminium	2,70E+03	6,90E+10	3,05E-03	2,05E-02	4,25E-02	0,6	6,94	0,144092219	1,54E-01	-6,48E-02	
Stål	7,80E+03	2,00E+11	4,10E-03	2,01E-02	4,25E-02	0,8	4,83	0,207039337	2,03E-01	1,78E-02	
Järn	7,87E+03	2,10E+11	6,10E-03	2,55E-02	4,25E-02	0,8	7,28	0,137362637	1,34E-01	2,48E-02	

Figur 4: Mätdata