Ⓓ Ⓛ Ⓜ Ⓜ Ⓙ Ⓥ Ⓢ

Tiago de Paula Alves RA: 187679

Tiago de Paula Alves

CORRIGIR A QUESTÃO 1.

1.a) Vale a pena notar aqui que $\ln(n) \in o(n^{\varepsilon})$ para qualquer $\varepsilon > 0$, pois:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}}{\varepsilon n^{\varepsilon-1}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}} = 0$$

Com isso, podemos escolher $g(n) = n^k/\ln(n)$ como contraexemplo, pois $g \in o(n^k)$ e $g \in \omega(n^{k-\varepsilon})$.

Demonstração: Suponha $k \geq 1$ e seja $g: \mathbb{R}^{>1} \mapsto \mathbb{R}^+$ dada por $g(x) = \frac{x^k}{\ln x}$. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^k/\ln x}{x^k} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

Como g é contínua e monotônica para $x > k e$, então o limite também vale para os naturais, ou seja, $g \in o(n^k)$.

Suponha agora um $\varepsilon > 0$. Como x^{ε} e $\ln x$ são contínuas, diferenciáveis e crescem indefinidamente, então comparando $g(x)$ com $x^{k-\varepsilon}$, teremos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^{k-\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^k/\ln x}{x^k/x^{\varepsilon}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\varepsilon}}{\ln x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\varepsilon\, x^{\varepsilon-1}}{x^{-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \varepsilon\, x^{\varepsilon}$$

$$= \infty$$

Novamente, como as ~~expressões são co~~ funções são contínuas e monotônicas, a comparação continua válida para os naturais. Então, podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, $g \in \omega(n^{k-\varepsilon})$ e, por isso, $g \notin O(n^{k-\varepsilon})$.

Por fim, considerando $g^*: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ a restrição de g aos naturais dada por:

$$g^*(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n=0 \text{ ou } n=1; \\ n^k/\ln(n), & \text{se } n>1. \end{cases}$$

Como $g^*(n) = g(n)$ para $n > 1$, o crescimento assintótico delas é o mesmo. Logo, teremos que $g^* \in o(n^k)$, mas não existe $\varepsilon > 0$ tal que $g^* \in O(n^{k-\varepsilon})$. Portanto, Chorãozinho está errado.

1.b) Suponha uma função $g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g \in O(n^{k-\varepsilon})$, para um real $\varepsilon > 0$. Logo, temos um $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, uma constante $c_1 \in \mathbb{R}^+$ e um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n > n_1$, sabemos que $0 \leq g(n) \leq c_1 n^{k-\varepsilon}$. Suponha ainda uma constante $c_2 \in \mathbb{R}^+$ qualquer e considere o natural $n_2 = \lceil (c_1/c_2)^{1/\varepsilon} \rceil$.

Então, para um natural $n > n_2$, teremos que

$$n > n_2 = \left\lceil \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/\varepsilon} \right\rceil \geq \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/\varepsilon}$$

Como x^ε é estritamente crescente, já que $\varepsilon > 0$, então $n^\varepsilon > c_1/c_2$. Logo,

$$c_1 n^{k-\varepsilon} = c_1 \frac{n^k}{n^\varepsilon} < c_1 \frac{n^k}{c_1/c_2} = c_2 n^k$$

Assim, seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e suponha $n > n_0$, ou seja, $n > n_1$ e $n > n_2$. Logo,

$$0 \leq g(n) \leq c_1 \cdot n^{k-\varepsilon} < c_2 n^k$$

Ou seja, para qualquer c_2 positivo, existe n_0 tal que $0 \leq g(n) < c_2 n^k$ para $n > n_0$. Portanto, $g \in o(n^k)$. Como $g \in O(n^{k-\varepsilon})$ era arbitrária, Xitoró está correto.

2.) Aplicando a fórmula de recorrência iterativamente, podemos ver que:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2n - 1 + T(n-1) \\
&= 2n - 1 + 2(n-1) - 1 + T(n-2) \\
&= 2[n + (n-1)] - [1+1] + T(n-2) \\
&= 2[n+(n-1)] - [1+1] + 2(n-2) - 1 + T(n-3) \\
&= 2[n+(n-1)+(n-2)] - [1+1+1] + T(n-3) \\
&= \dots \\
&= 2[n+(n-1)+\dots+2] - \underset{[1+\dots+1]}{\cancel{[1+1+1]}} + T(1) \\
&= 2\sum_{i=2}^{n} i - \sum_{i=2}^{n} 1 + 1 \\
&= 2\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] - (n-1) + 1 \\
&= n^2
\end{aligned}
$$

Demonstração de $T(n) = n^2$.

Caso base: Para $n=1$, temos que $T(1) = 1 = 1^2$, como esperado.

Passo indutivo: Suponha que $T(n) = n^2$ para $n \geq 1$. Assim, podemos aplicar o método da substituição em $T(n+1)$.

$$
\begin{aligned}
T(n+1) &= T(n) + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 2 - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}
$$

Portanto, como a fórmula fechada é válida para $T(n)$ quando $n=1$ ou quando $T(n-1) = (n-1)^2$, o princípio da indução finita nos permite afirmar que $T(n) = n^2$ no domínio proposto.

3.) Observando o tempo do algoritmo A, como o expoente crítico é $\log_2 8 = 3$ e $n^2 \in O(n^{3-\varepsilon})$ com $\varepsilon = 1 > 0$, o teorema Master nos diz que a recorrência determina a ordem de crescimento do tempo do algoritmo, isto é, $T_A(n) \in \Theta(n^3)$.

Agora, para o algoritmo B, como $f(n) = n^2$, então $T_B(n) \in \Omega(n^2)$. Pelo teorema Master, para que α determine o crescimento da função queremos que o expoente crítico seja $2 < \log_3 \alpha$, isto é, $\alpha > 3^2 = 9$. Com essa condição, ~~$T_B(n) \in$~~ $T_B(n) \in \Theta(n^{\log_3 \alpha})$.

Considerando as variáveis que temos controle, para que $T_B(n) \in o(T_A(n))$, α deve ser escolhido ~~como~~ de modo que $n^{\log_3 \alpha} \in o(n^3)$. Logo, teremos que $\log_3 \alpha < 3$, ou seja, $\alpha < 3^3 = 27$. Como α deve ser inteiro, a escolha de maior valor é $\alpha = 26$.