MC558 – 2021s1
Teste 4

Tiago de Paula Alves

187679

---

1. Seja MM o problema da multiplicar duas matrizes quadradas: uma instância $I_{\text{MM}} = (A,B,n)$ de MM consiste de duas matrizes quadradas A e B de ordem n e a saída é a matriz $C = A \times B$.

Seja MQ o problema de calcular o quadrado de uma matriz quadrada: uma instância $I_{\text{MQ}} = (P,n)$ de MQ consiste de uma matriz quadrada P de ordem n e a saída é a matriz $Q = P \times P$.

Suponha que MM tenha cota inferior $\Omega\left(n^{2.5}\right)$. Mostre que MQ tem cota inferior $\Omega\left(n^{2.5}\right)$. Descreva claramente as funções τ_I e τ_S. Justifique.

Considere a seguinte transformação τ_I de uma instância I_{MM} para I_{MQ} definida por $\tau_I(A,B,n) = (P,2n)$ onde

$$P_{2n\times 2n} = \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & (A)_{1,1} & \dots & (A)_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & (A)_{n,1} & \dots & (A)_{n,n} \\ (B)_{1,1} & \dots & (B)_{1,n} & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ (B)_{n,1} & \dots & (B)_{n,n} & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Mais especificamente,

$$(P)_{i,j} = \begin{cases} (A)_{i,j-n} & \text{se } 1 \le i \le n \text{ e } n < j \le 2n \\ (B)_{i-n,j} & \text{se } n < i \le 2n \text{ e } 1 \le j \le n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então, uma solução $Q_{2n\times 2n} = P \cdot P$ de MQ será dada por

$$Q = PP = \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & \\ & BA \end{bmatrix}$$

E podemos tomar $\tau_S(Q) = C$ com $C_{n\times n}$ sendo as primeiras n colunas das primeiras n linhas de Q. Desse modo, temos uma solução $C = A \cdot B$ para MM pois,

$$
\begin{aligned}
(C)_{i,j} &= (Q)_{i,j} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} (P)_{i,k}(P)_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (P)_{i,k}(P)_{k,j} + \sum_{k=n+1}^{2n} (P)_{i,k}(P)_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} 0 + \sum_{k=n+1}^{2n} (A)_{i,k-n}(B)_{k-n,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(B)_{k,j} \\
&= (AB)_{i,j}
\end{aligned}
$$

Tanto τ_I quanto τ_S fazem apenas a criação de uma nova matriz e, dependendo da representação das matrizes, cópias dos elementos. Portanto, o tempo de execução pode depender no máximo da quantidade de elementos na matriz, fazendo com que $T_{\tau_I}(n) \in O\left((2n)^2\right) = O\left(n^2\right)$ e $T_{\tau_S}(n) \in O\left(n^2\right)$.

Logo, temos uma função $f \in O\left(n^2\right)$ tal que MM $\propto_f$ MQ. Note que $f \in o\left(n^{2.5}\right)$, portanto a cota inferior $\Omega\left(n^{2.5}\right)$ de MM também deve ser uma cota inferior para MQ.

---

2. Um fabricante de plásticos planeja criar um novo produto a partir de misturas de 4 compostos químicos que chamaremos simplesmente de 1, 2, 3 e 4. Estes compostos são feitos de três elementos A, B e C (e outros elementos irrelevantes). [...]

Composto Químico	1	2	3	4
Porcentagem de A	30	20	40	20
Porcentagem de B	20	60	30	40
Porcentagem de C	40	15	25	30
Custo por Kg	20	30	20	15

O novo produto deve ser constituído de exatamente 20% do elemento A, pelo menos 30% do elemento B e pelo menos 20% do elemento C. Devido a efeitos colaterais dos compostos 1 e 2, eles não podem exceder 30% e 40% da composição do novo produto, respectivamente. Nesta questão você deve projetar um programa linear para encontrar o modo mais barato de fazer a mistura para um quilo do produto.

Considere $p_{X,i}$ como a proporção do elemento X no composto i e como r_i a proporção do composto i na mistura. Então, a porcentagem p_X do elemento X na mistura final é dada por:

$$p_X = \sum_i p_{X,i} r_i = p_{X,1} r_1 + p_{X,2} r_2 + p_{X,3} r_3 + p_{X,4} r_4$$

Com isso, temos que as restrições da mistura devem ser dadas por

$$\begin{aligned} p_A &= p_{A,1} r_1 + p_{A,2} r_2 + p_{A,3} r_3 + p_{A,4} r_4 = 20\% \\ p_B &= p_{B,1} r_1 + p_{B,2} r_2 + p_{B,3} r_3 + p_{B,4} r_4 \geq 30\% \\ p_C &= p_{C,1} r_1 + p_{C,2} r_2 + p_{C,3} r_3 + p_{C,4} r_4 \geq 20\% \end{aligned}$$

O objetivo do programa seria então **minimizar** o custo s por Kg da mistura a partir dos custos c_i de cada composto, que é dado por:

$$s = c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 + c_4 r_4$$

Além disso, a mistura é feita apenas dos compostos i que não podem ser negativos, então

$$\begin{gathered} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 100\% \\ 0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 \end{gathered}$$

As últimas restrições são somente nas proporções dos compostos 1 e 2 na mistura: $r_1 \leq 30\%$ e $r_2 \leq 40\%$.

Variáveis: $r_i \doteq$ proporção do composto $i = 1, 2, 3, 4$ na mistura

Função objetivo: $\min s = 20r_1 + 30r_2 + 20r_3 + 15r_4$

Restrição (i): (proporção de A)

$$0.3r_1 + 0.2r_2 + 0.4r_3 + 0.2r_4 = 0.2$$

Restrição (ii): (proporção de B)

$$0.2r_1 + 0.6r_2 + 0.3r_3 + 0.4r_4 \geq 0.3$$

Restrição (iii): (proporção de C)

$$0.4r_1 + 0.15r_2 + 0.25r_3 + 0.3r_4 \geq 0.2$$

Restrição (iv): (limite de uso do composto 1)

$$r_1 \leq 0.3$$

Restrição (v): (limite de uso do composto 2)

$$r_2 \leq 0.4$$

Proporção da mistura: $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1$

Não-negatividade: $r_1, r_2, r_3, r_4 \geq 0$
