Chapitre 5 : Transformations et changements de repères

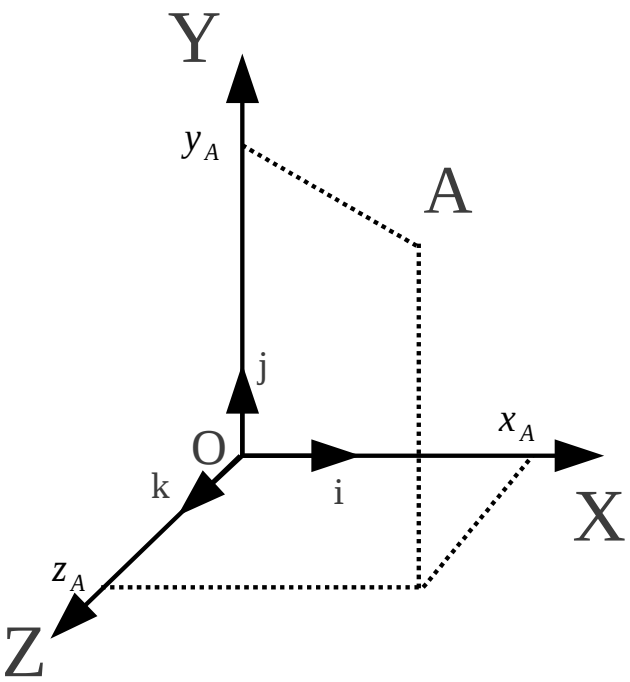
Modélisation 3D et Synthèse

Master Informatique

2019-2020

1 Repères d'une scène 3D

Repère 3D

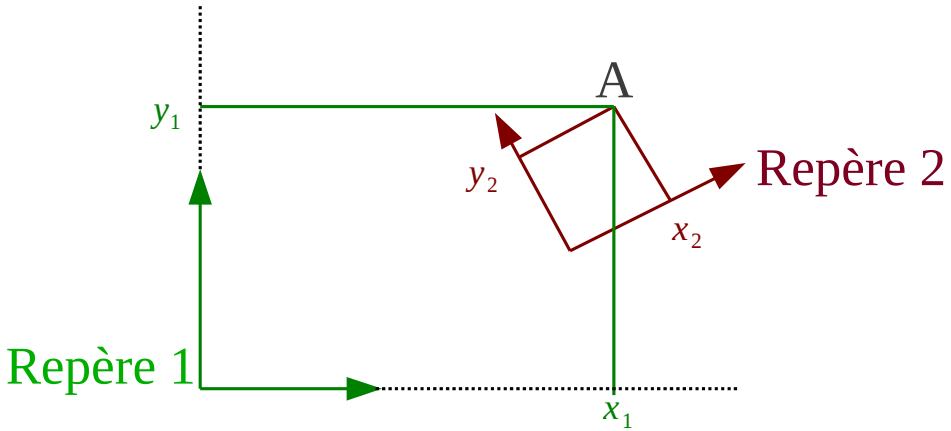


- Repère noté (O, i, j, k) (origine et vecteurs de base).
- Un point : $A = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ ou $A = (A_x, A_y, A_z)$.
- $A = O + xi + yj + zk$.

- Les repères considérés seront généralement directs :
  - Règle de la main **droite** : (Pouce,Index,Majeur) = (X, Y, Z)
- Un repère est dit orthonormé si :
  - Vecteurs (i, j, k) deux à deux orthogonaux.
  - (i, j, k) de même normes 1.

Plusieurs repères

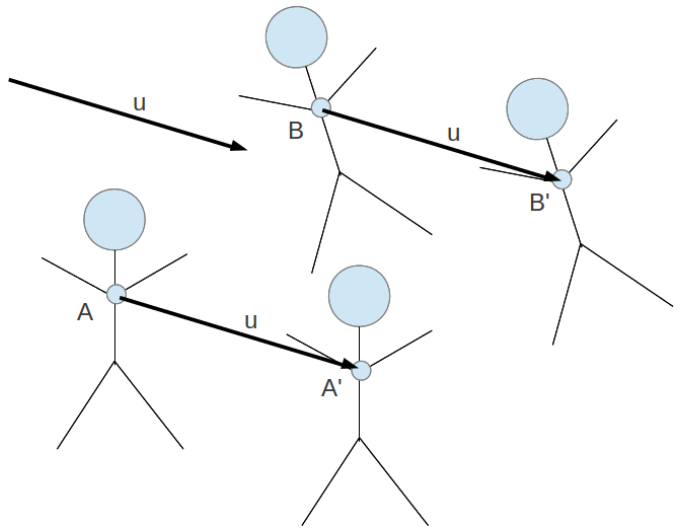
- On travaillera avec plusieurs repères : **toujours** préciser le repère en indice.
- Sur l'exemple, un même point A a les coordonnées (x_1, y_1, z_1) dans le repère 1 et (x_2, y_2, z_2) dans le repère 2.



$\Rightarrow$ Noter A_1 ou A_2 selon le repère considéré (même point mais coordonnées différentes)

Positions et directions

- Distinguer **les positions** (i.e. les points) et **les directions** (i.e. les vecteurs).
- Exemple :
  - Le point A est déplacé au point A' par le vecteur u. Le point B est déplacé au point B' par le même vecteur u.
  - Par le calcul : $A' = A + u$ et $B' = B + u$.
  - Les coordonnées d'une direction $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ indiquent une variation u_x en x et une variation u_y en y
  - Remarque $u = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = A' - A$.



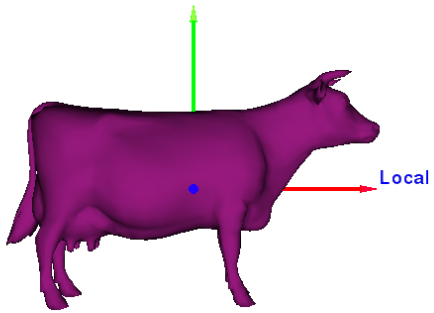
- **Attention :** dans le code on représente généralement les positions et les directions par une même classe (`Vector3` pour les tps).

Scène 3D et repères

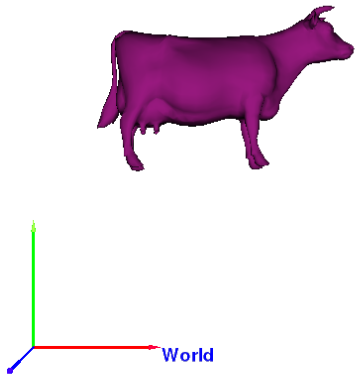
- Pour la conception d'une scène 3D et de ses objets 3D, nous considérons les repères suivants :
  - Le **repère de l'observateur** (ou **repère de la caméra** ; noté `Eye` dans la suite) : c'est dans ce repère qu'on définit le volume de visualisation (i.e. placement de l'écran et définition des paramètres de la projection).
  - Le **repère local** (ou **repère objet** ; noté `Local` dans la suite) : on conçoit un objet indépendamment du reste de la scène. On prendra le repère le plus naturel pour définir les points de l'objet.
  - Le **repère du monde** (ou **repère de scène** ; noté `World` dans la suite) : il s'agit du repère **global** de référence de tout positionnement (les repères locaux et la caméra seront placés directement ou indirectement par rapport à `World`).
- Nous placerons les repères les uns par rapport aux autres avec des changements de repères (en général par translations, rotations, changements d'échelle). Le repère "initial" étant le repère de scène `World`.
- Les positions (x, y, z) des sommets des objets 3D sont données dans le repère `Local` de l'objet qu'ils définissent, et l'objet est placé dans la scène en déplaçant son repère local (et non directement/explicitement ses points).

Exemple

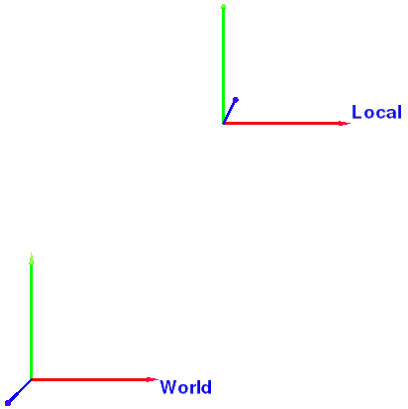
1) on dispose d'un objet défini dans son repère local



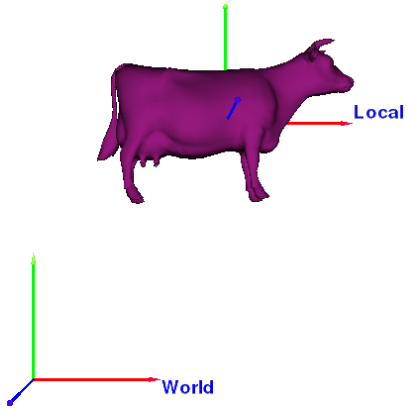
2) on souhaite



3) on place `Local` par rapport à `World`



4) on obtient (points toujours exprimés dans le repère local)



Repères et OpenGL

- **Chapitre précédent** : donner au vertex shader les positions $P_{Eye} = (x, y, z)$ (i.e. définies dans le **repère de l'observateur**).
  - Obtenir $P_{ClipCoordinates}$ (i.e. `gl_Position=...`) à partir de P_{Eye} avec la matrice de projection.
- **Dans la suite** : donner au vertex shader l'attribut `positions` $P_{Local} = (x, y, z)$ (i.e. définies dans **le repère de l'objet** à tracer). Dans le vertex shader il faudra :
  1. Obtenir P_{Eye} à partir de P_{Local} : pour cela on indiquera comment est placé le repère `Local` par rapport au repère `Eye` **avec une matrice de changement de repères** appelée `modelview` (cf la suite du cours).
  2. Puis obtenir $P_{ClipCoordinates}$ à partir de P_{Eye} avec la matrice de projection (comme précédemment).

```
gl_Position = projection * modelview * position;
```

2 Transformations et changement de repères

Coordonnées homogènes (point)

- **Un point** (une position) 3D en coordonnées homogènes :

$$P_{3D} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow P_H = \begin{pmatrix} xw \\ yw \\ zw \\ w \end{pmatrix} \text{ avec } w \in \mathbb{R}^*(w \neq 0)$$

- Passer des coordonnées homogènes en coordonnées 3D :

$$P_H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Longleftrightarrow P_{3D} = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{pmatrix}$$

Coordonnées homogènes (vecteur)

- **Un vecteur** (une direction) 3D en coordonnées homogènes :

$$u_{3D} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u_H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \text{ noter le 0}$$

- Passer des coordonnées homogènes en coordonnées 3D :

$$u_H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u_{3D} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

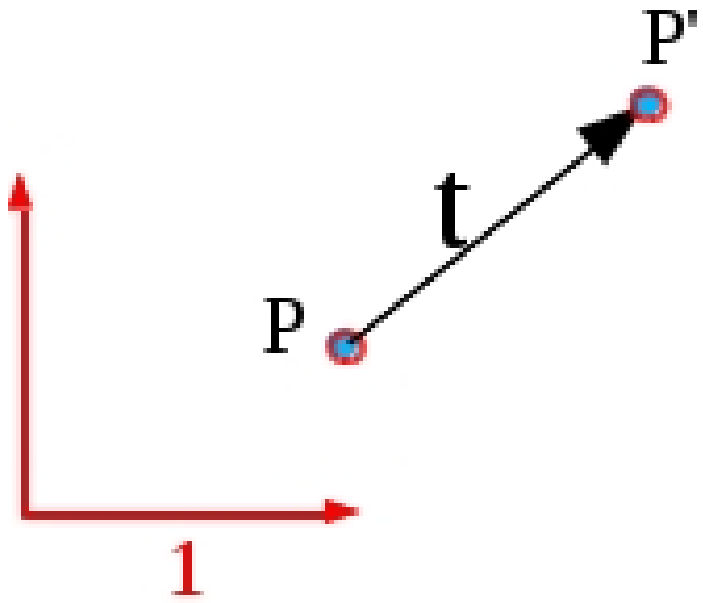
Exemple de la translation

- Rappel (cf introduction des coordonnées homogènes dans le chapitre précédent) : la translation de vecteur $t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$ peut se traduire par une matrice en coordonnées homogènes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On donne, dans les transparents suivants, 3 interprétations de cette translation (avec les mêmes coordonnées $P(x, y, z)$ et la même translation t dans les 3 cas).

Interprétation par transformation



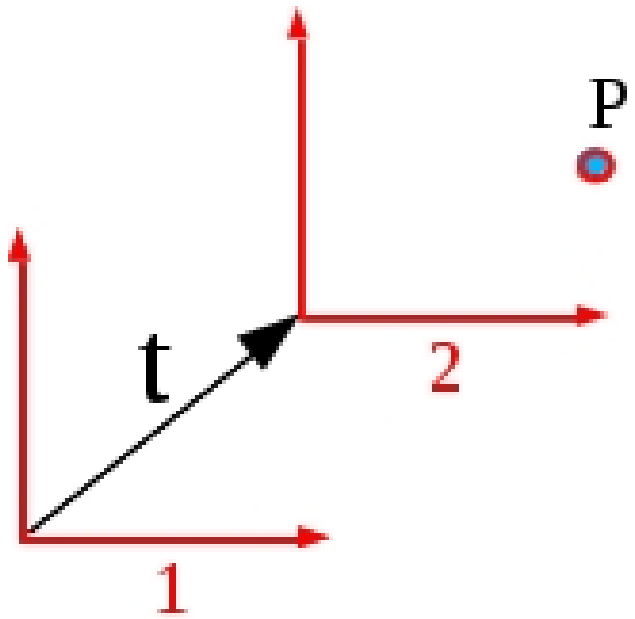
- On connait le point $P(x, y, z)$ donné dans un repère 1 et on déplace le point P en P' par la translation t.

$$P' = TP$$

T appelée matrice de transformation.

Interprétation par changement de repère

- On connait le point $P(x, y, z)$ exprimé dans un repère 2 et on déplace le repère 2 en partant du repère 1 par la translation t.

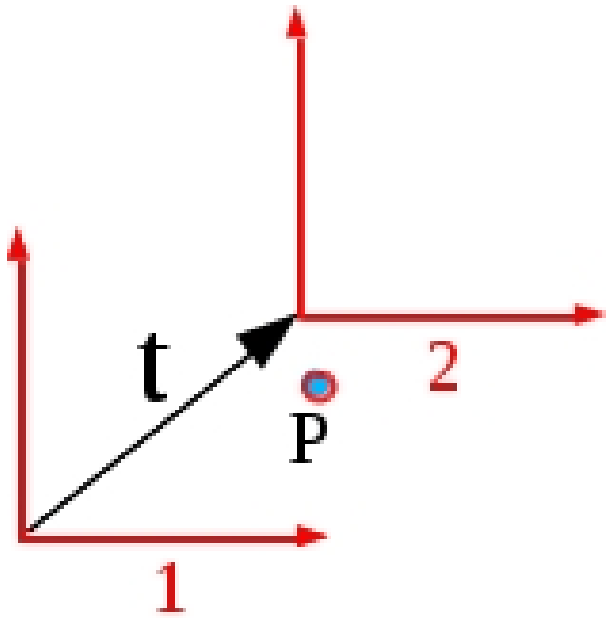


- Dans cette interprétation, T est appelée **la matrice de passage du repère** 1 **au repère** 2, et on la note $M_{1\to 2}$.
- On connait $P_2 = P(x, y, z)$. On peut déduire P_1 par :

$$P_1 = M_{1\to 2} P_2 \text{ avec } P_2 = P \text{ et } M_{1\to 2} = T$$

- Remarque : P_1 correspond à P' du transparent précédent (c'est le même calcul).

Interprétation inverse

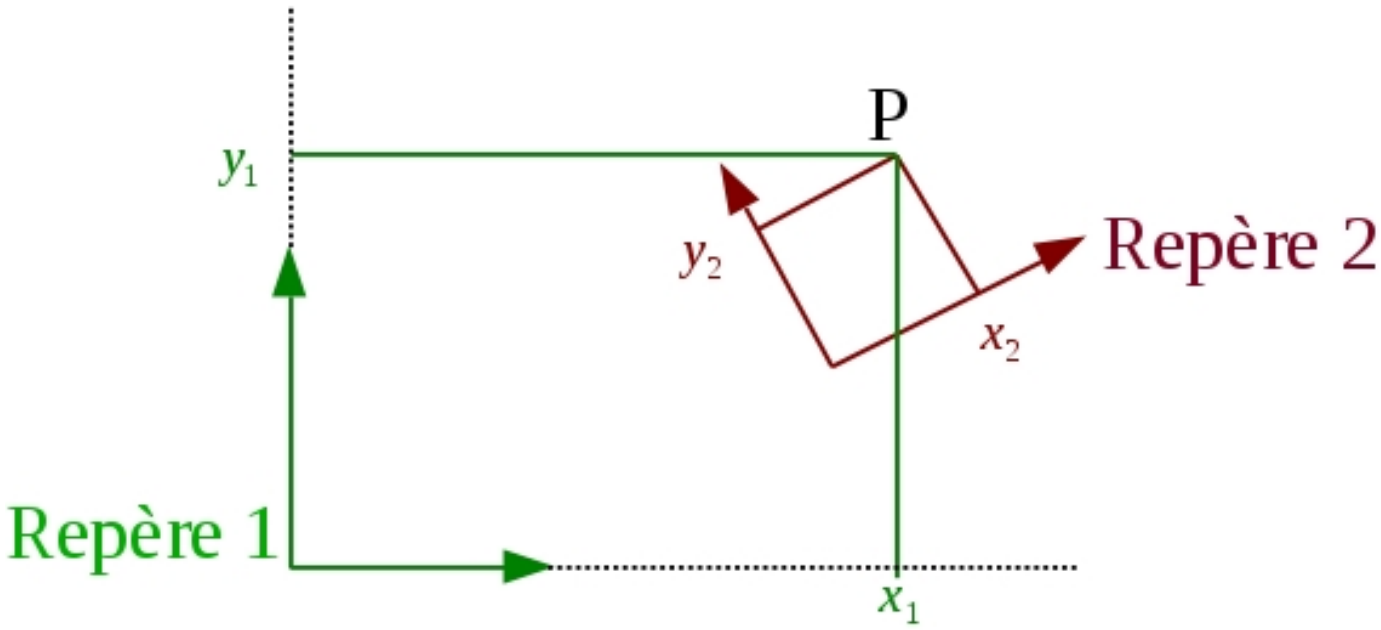


- On connait le point $P(x, y, z)$ donné dans le repère 1 et on se donne un repère 2 par rapport au repère 1 par la translation t.
- On a toujours la relation :

$$P_1 = M_{1\to 2} P_2 \textbf{ mais, cette fois,} \text{ c'est } P_1 \text{ qu'on connait : } P_1 = P$$

- Si on souhaite P_2, on peut l'obtenir par $P_2 = M_{2\to 1} P_1$.
- $M_{2\to 1}$? obtenue par **la translation opposée** $-t$.

Changement de repère (généralisation)

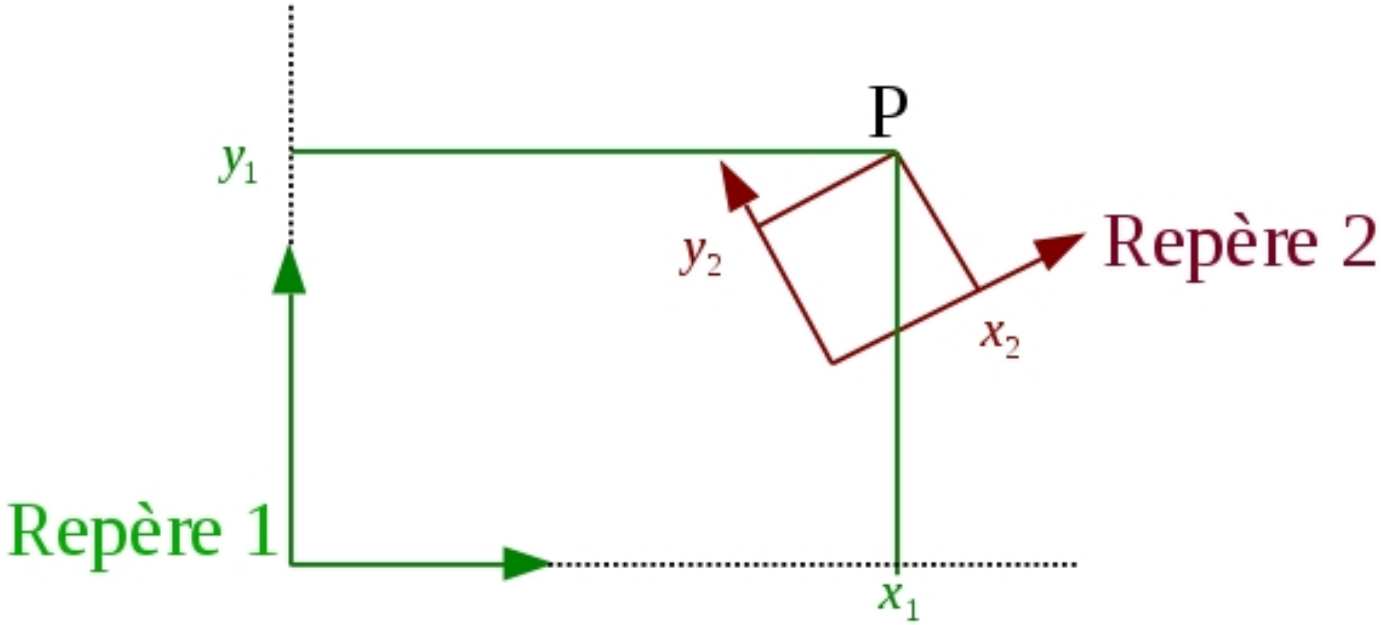


$$P_1 = M_{1\to 2} P_2$$

(bien noter la position et l'ordre des indices dans la relation).

- $M_{1\to 2}$ dans la relation indique :
  - comment le repère 1 est déplacé vers le repère 2
  - permet d'exprimer les coordonnées du point P dans le repère 1 à partir des coordonnées dans le repère 2.

Attention à la confusion ! ! !

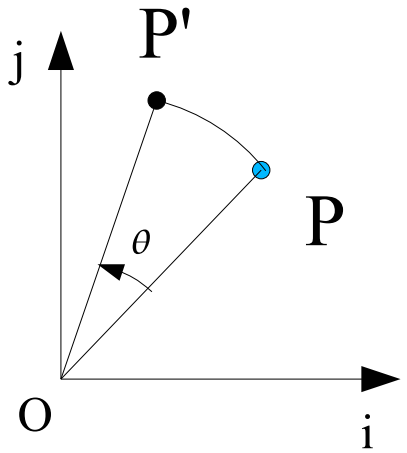


$$P_1 = M_{1\to 2} P_2$$

- "le passage du repère 1 au repère 2" signifie (i.e. noté $M_{1\to 2}$) :
  - le déplacement du repère 1 vers le repère 2 .
  - **Et non pas** "passer" d'un point P_1 (coordonnées dans le repère 1) vers P_2 (coordonnées dans le repère 2) : c'est le contraire (bien noter la position des indices dans la relation).

Rotation en 2D

Rotation d'angle θ autour de l'origine.



$$\begin{cases} x' &= x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' &= x\sin(\theta) + y\cos\theta \end{cases}$$

Comment retrouver ? Soit α l'angle (i, OP) et $r = \|OP'\| = \|OP\|$. Alors

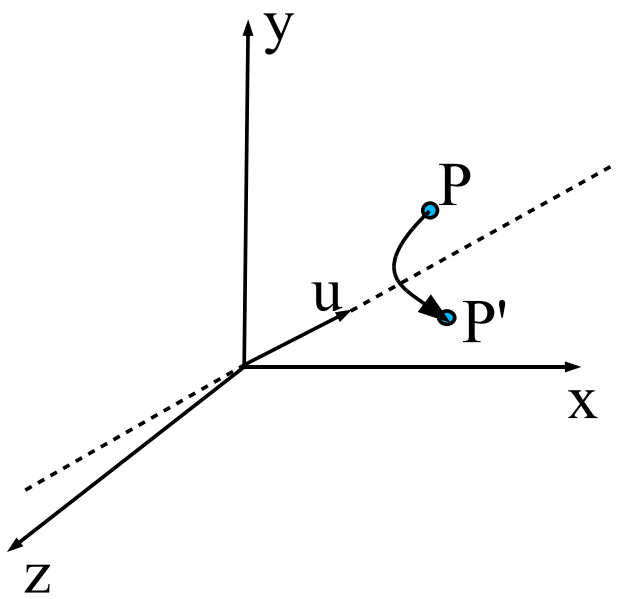
$$\begin{cases} x' &= r\cos(\alpha+\theta) \\ y' &= r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\sin(\alpha)\sin(\theta) \\ y' &= r\cos(\alpha)\sin(\theta) + r\sin(\alpha)\cos(\theta) \end{cases}$$

or $x = r\cos(\alpha)$ et $y = r\sin(\alpha)$

$$P' = RP \text{ avec } R = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotation en 3D



- La rotation en 3D s'effectue autour **d'un axe** dont on donne un vecteur directeur u (rotations considérées : axe passant par l'origine).
- Le sens de rotation est le sens trigonométrique par rapport à l'axe (« tourne » dans le sens direct quand le vecteur de l'axe pointe vers vous).
- Exemple : autour de l'axe z (droite de vecteur directeur $(0,0,1)$).

$$R_{OZ} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sin\theta & 0 \\ \sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation 3D : autres axes

$$R_{OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sin\theta \\ 0 & \sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Substituer Y à X et Z à Y

$$R_{OY} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$$

Substituer Z à X et X à Y (attention aux signes)

- La rotation autour d'un axe de vecteur u quelconque est un peu plus laborieuse à exprimer.

Avec $c = cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$ et $u = (u_x, u_y, u_z)$ **normé**.

$$\begin{pmatrix} u_x^2 + (1-u_x^2)c & u_x u_y (1-c) - u_z s & u_x u_z (1-c) + u_y s \\ u_x u_y (1-c) + u_z s & u_y^2 + (1-u_y^2)c & u_y u_z (1-c) - u_x s \\ u_x u_z (1-c) - u_y s & u_y u_z (1-c) + u_x s & u_z^2 + (1-u_z^2)c \end{pmatrix}$$

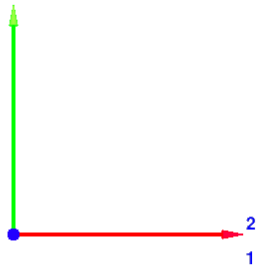
Rotation en coordonnées homogènes

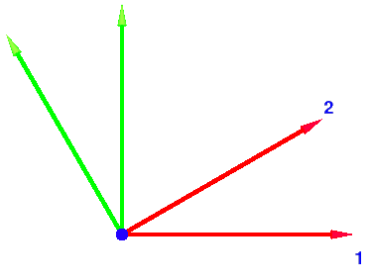
- On ajoute une ligne et une colonne par rapport à la matrice $3D$:

$$R_H = \left(\begin{array}{c|c} R_{3D} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

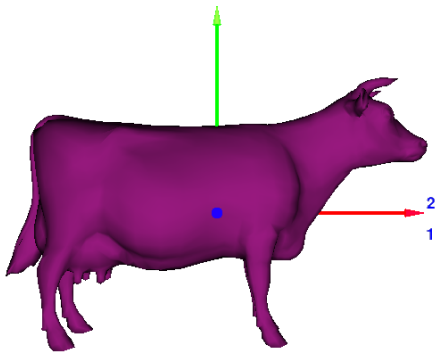
- $P' = RP$

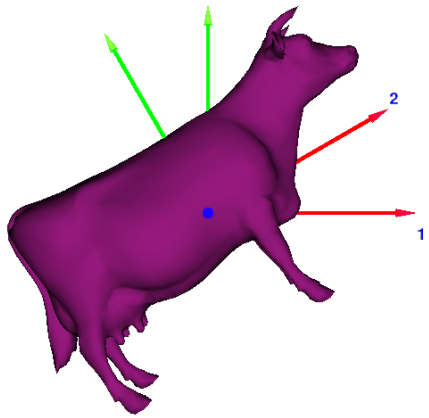
Exemple : rotation d'axe z





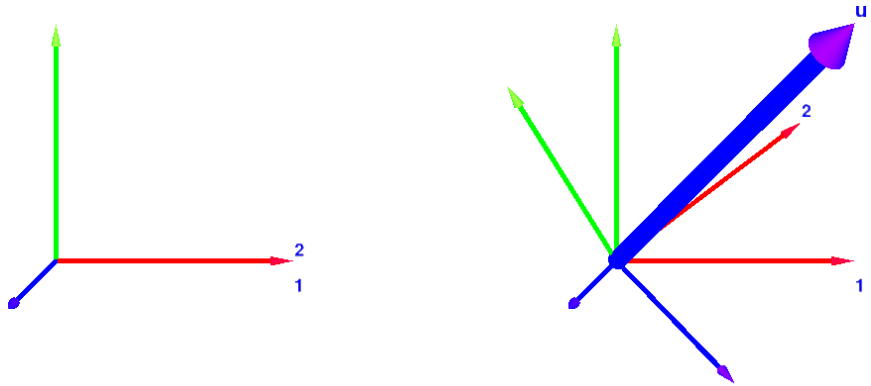
- Avec un objet défini localement dans le repère 2 :



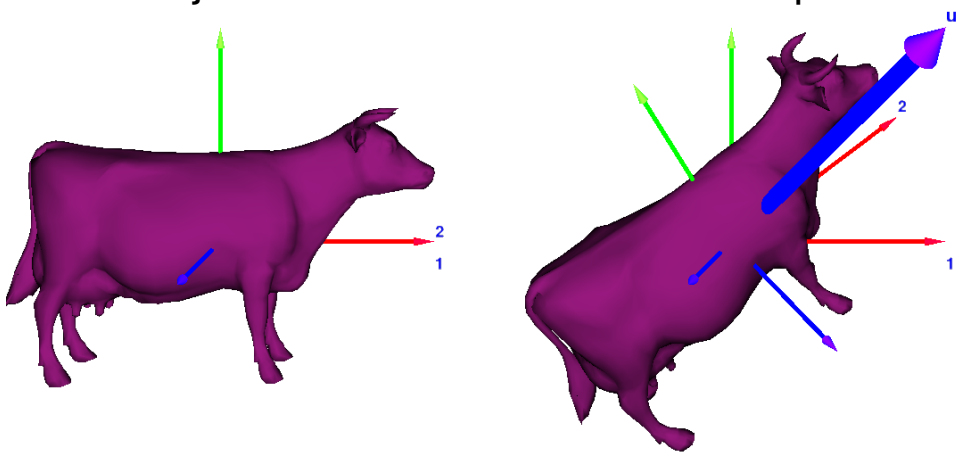


$P_1 = M_{1\to 2} P_2$ avec $M_{1\to 2} = R$ (matrice de rotation homogène du transparent précédent)

Exemple : rotation d'axe quelconque



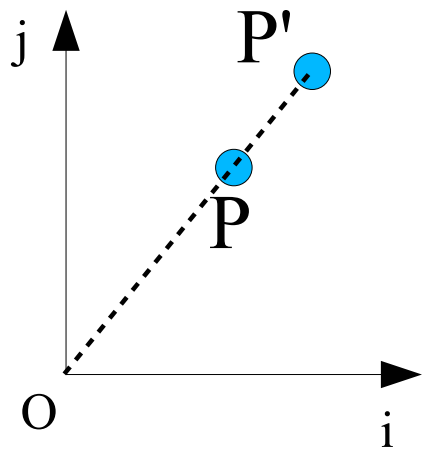
- Avec un objet défini localement dans le repère 2 :



$P_1 = M_{1\to 2} P_2$ avec $M_{1\to 2} = R$ (matrice de rotation homogène du transparent précédent)

Scale (transformation)

Changement d'échelle de rapport k.



$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases} \text{ peut être défini pour chaque coordonnée : } \begin{cases} x' = k_x x \\ y' = k_y y \\ z' = k_z z \end{cases}$$

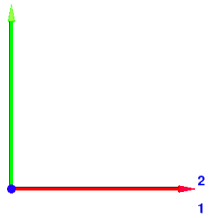
$$P' = SP \text{ avec } S = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}$$

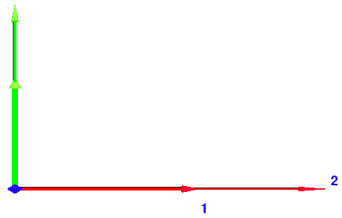
Scale en coordonnées homogènes

$$S = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

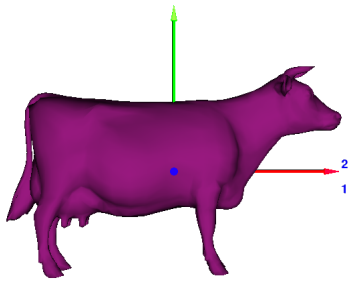
$$P' = SP$$

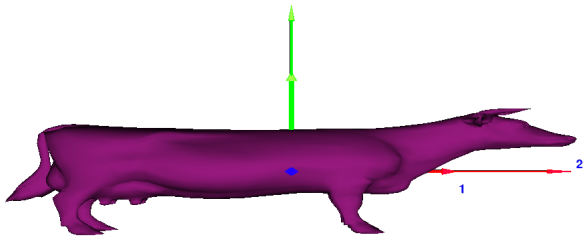
Scale (changement de repère)





- Avec un objet défini localement dans le repère 2 :





$P_1 = M_{1\to 2} P_2$ avec $M_{1\to 2} = S$ (matrice de scale homogène du transparent précédent)

Composition

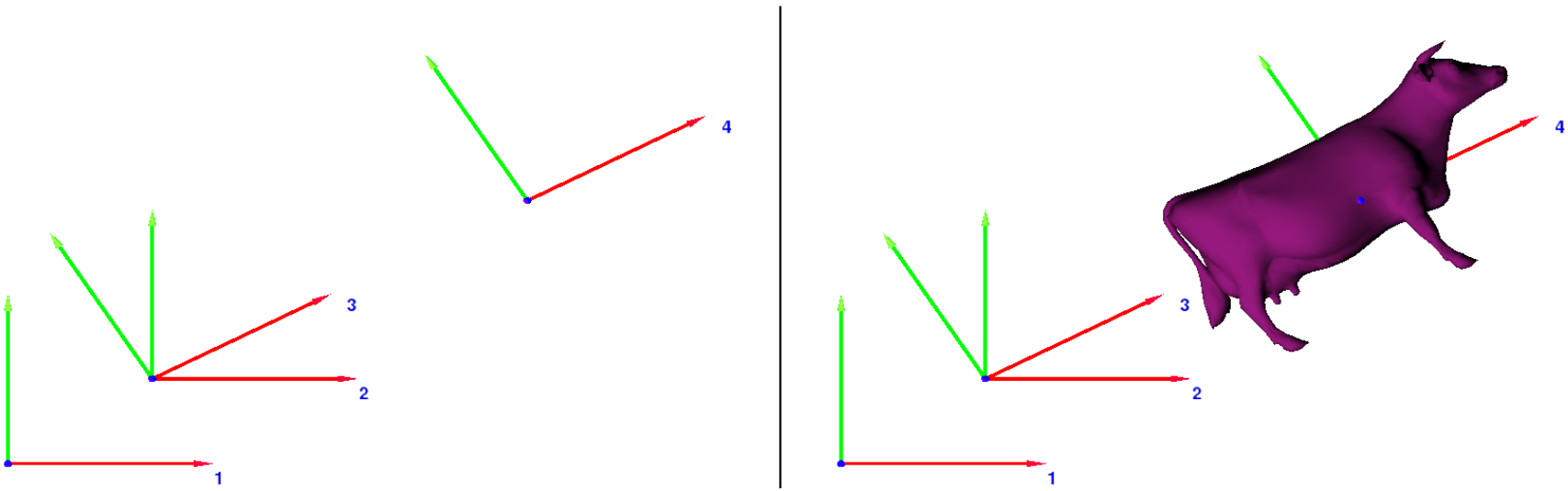
- La composition de changements de repères successifs se traduit par une unique matrice obtenue par le produit des matrices de chaque changement de repère.

$$M_{i \to j} = M_{i \to k} M_{k \to j}$$

Composition (exemple)

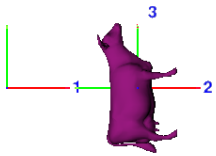
- $M_{1\to 2}$ = translation en x et y (2 placé par rapport à 1)
- $M_{2\to 3}$ = rotation (bien noter : 3 placé par rapport à 2 ; donc de centre l'origine de 2).
- $M_{3\to 4}$ = translation de vecteur (2,0,0) (4 placé par rapport à 3 ; donc déplacement sur l'axe x de 3).

$$M_{1\to 4} = M_{1\to 2} M_{2\to 3} M_{3\to 4}$$

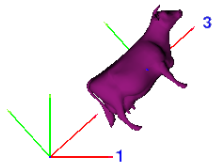


Commutation

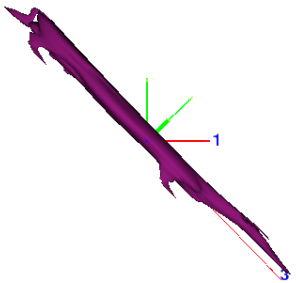
$M_{1\to 3} = TR$



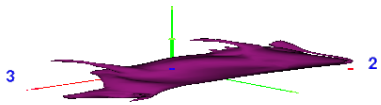
$M_{1\to 3} = RT$



$M_{1\to 3} = RS$



$M_{1\to 3} = SR$



(Attention au scale !)

Composition rigide

- Un objet 3D (sans changement d'échelle) peut être placé par une composition quelconque de translations et de rotations (n'importe quel ordre).
- Cette composition est équivalent à une simple composition TR (T = une translation, R = une rotation)
- La matrice d'une telle composition sera alors sous la forme :

$$TR = \left(\begin{array}{c|c} R_{3D} & T_{3D} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

(i.e. la rotation sur la partie 3x3 supérieure gauche et la translation en dernière colonne).

- un placement TR est appelé **transformation rigide**.

Positions et Directions

- **Attention ! ! !** une direction ne subit pas **les translations**.
- En coordonnées homogènes : soit $u = \overrightarrow{AB}$ (coordonnée $w = 0$)et $M_{1\to 2}$ une translation alors :

$$u_1 = M_{1\to 2} u_2$$

  et on obtient bien $u_2 = u_1$
- **mais** attention au code qui manipule les données 3D (non homogènes). Exemple :

```
Vector3 a,b;
Transform m; // peu importe le code : matrice homogène ou autre
b=m.transform(a) // VECTEUR ou POINT ????? (résultat différent).
// la librairie 3D devrait différencier. Par exemple : m.transformPosition(a) et m.transformDirection(a)
// mais n'offre souvent que m.transform(a) pour les POINTS 3D (comment alors obtenir une transformation de vecteur 3D ?)
```

Changements inverses

- L'inverse de $M_{1\to 2}$ (notée $M_{1\to 2}^{-1}$) permet d'obtenir $M_{2\to 1}$
- Inverse d'un produit de matrices : $(M_1 M_2 M_3)^{-1} = M_3^{-1} M_2^{-1} M_1^{-1}$ (attention à l'ordre !)
- Inverse d'une composition de changements de repères : $(M_{1\to 2} M_{2\to 3} M_{3\to 4})^{-1} = M_{4\to 3} M_{3\to 2} M_{2\to 1}$

- Dans le cas général l'inversion consiste à résoudre $MM^{-1} = I$ (pivot de gauss, par calcul de déterminant, ...),
- Mais l'inverse s'obtient aisément pour les transformations usuelles :
  - La translation inverse de T est la translation de vecteur opposé $-T$.
  - La rotation inverse de R_θ est la rotation d'angle opposé $R_{-\theta}$
  - Le changement d'échelle inverse de $S(k_x, k_y, k_z)$ est $S(\frac{1}{k_x}, \frac{1}{k_y}, \frac{1}{k_z})$.
  - L'inverse de toute matrice orthonormale (matrice 3×3 de rotation par exemple) s'obtient en la transposant :

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \text{ si orthonormal}$$

Changements de repère et application 3D

- Dans l'application on gère :
  - Le placement des objets dans la scène se traduit par $M_{World \to Local}$ (on place `Local` par rapport à `World`).
  - Le placement de la caméra dans la scène se traduit par $M_{World \to Eye}$ (on place `Eye` par rapport à `World`).
  - Les objets pour lesquels les coordonnées des points P_{Local} sont données dans `Local`.
- Pour la visualisation (OpenGL), il faut calculer P_{Eye} (pour ensuite calculer $P_{ClipCoordinates}$) :
  - Il suffit d'appliquer $P_{Eye} = M_{Eye \to Local} P_{Local}$
  - En décomposant : $M_{Eye \to Local} = M_{Eye \to World} M_{World \to Local}$
  - On dispose déjà de $M_{World \to Local}$, mais il faut **inverser** $M_{World \to Eye}$ pour avoir $M_{Eye \to World}$: il reste alors à faire le produit.
- Ce calcul de $M_{Eye \to Local}$ est généralement assurée par l'application (et non par le vertex shader), et on donne à OpenGL (i.e. au vertex shader) cette matrice $M_{Eye \to Local}$.
- La matrice $M_{Eye \to Local}$ est appelée `MODELVIEW`. (traditionnellement).

Traduction en OpenGL

- On fournira au vertex shader :
  - l'attribut position exprimé dans le repère local (i.e. P_{Local}).
  - la `modelview` (i.e. $M_{Eye \rightarrow Local}$).
  - la projection (i.e. $M_{ClipCoordinate \rightarrow Eye}$).
- Vertex Shader :

```
layout(location=0) in vec3 position;
...
uniform mat4 projection;
uniform mat4 modelview;
...
void main() {
...
  gl_Position = projection*modelview*vec4(position,1.0);
}
```

- Application :

```
shader_.uniform("modelview",p3d::modelview); // p3d::modelview gérée par l'application (variable "globale")
shader_.uniform("projection",p3d::projection); // p3d::projection gérée par l'application ("globale")
glDraw...
```

- Souvent le produit `projection*modelview` est directement calculé par l'application et donné au vertex shader ("traditionnellement" l'uniform correspondant est noté `mvp`)

Classe pour les matrices

- Nécessité d'une classe pour gérer les matrices homogènes dans l'application (dans les tps : `Matrix4`).

```
Matrix4 m1,m2,m3;
Vector3 p1,p2,u1,u2;
...
m1=Matrix4::identity(); // initialisation
m1.translate(x,y,z); // compose avec la matrice de translation (multiplication à droite)
m1.rotate(angle, axisX, axisY, axisZ); // compose avec la matrice de rotation (angle en degré).
m2=m1.inverse(); // matrice inverse
m1=m2*m3; // produit
m1*=m2; // produit (i.e. m1=m1*m2; attention à l'ordre : multiplication à droite)
p1 = m1.transformPoint(p2); // transformation d'un point
u1 = m1.transformDirection(u2); // transformation d'une direction (i.e. vecteur).
```

Attention aux notations !

- Dans le code, la matrice de passage $M_{Rep1 \to Rep2}$ sera (généralement) représentée par la variable `rep1Rep2` (par exemple : `worldLocal`, `eyeWorld`, etc).
- Le nom de la variable indique bien le changement de repère **et non** la transformation.
- Par exemple, si vous connaissez un point `P_World` (en 3D) et que vous souhaitez le connaitre dans le repère `Eye` (3D), il faut appliquer
  `P_Eye=eyeWorld.transformPoint(P_World)`
- Notez le `transformPoint/transformDirection` qui distingue points 3D et directions 3D

Exemple de code avec la modelview

- En décomposant avec `world`, `eye` et `local` :

```
worldLocal=Matrix4::dentity();
worldEye=Matrix4::identity();

// placement de l'objet par rapport à world : world->local
worldLocal.rotate(angle,1,0,0);

// placement de la caméra par rapport à world : world->eye
worldEye.translate(0,0,10);
worldEye.rotate(5,0,1,0);

// modelview = eye->local = eye->world * world->local
p3d::modelview = worldEye.inverse()*worldLocal; // noter l'inversion
drawObject(); // p3d::modelview est passée au shader
```

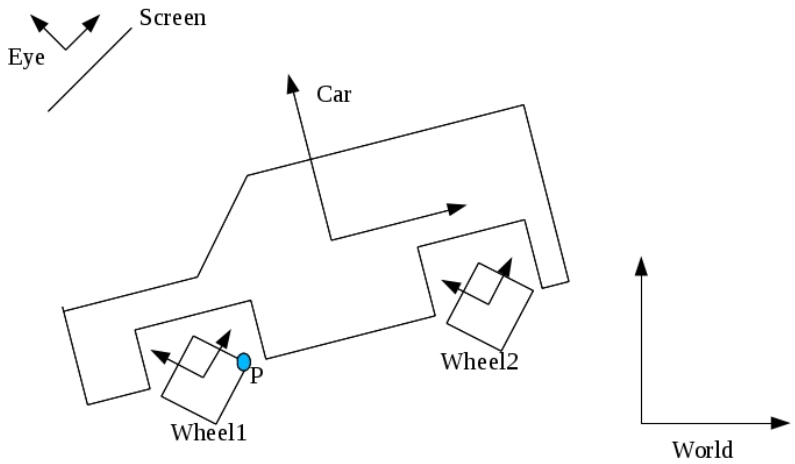
- Avec uniquement la modelview (attention aux interprétations pour la caméra ! l'objet est placé directement par rapport à la caméra ; à proscrire pour des positionnements plus complexes) :

```
p3d::modelview.setIdentity();
// placement de la caméra : eye->world
p3d::modelview.rotate(-5,0,1,0);
p3d::modelview.translate(0,0,-10);
// traduction du placement de l'objet : world->local
p3d::modelview.rotate(angle,0,1,0);
drawObject(); // p3d::modelview est passée au shader
```

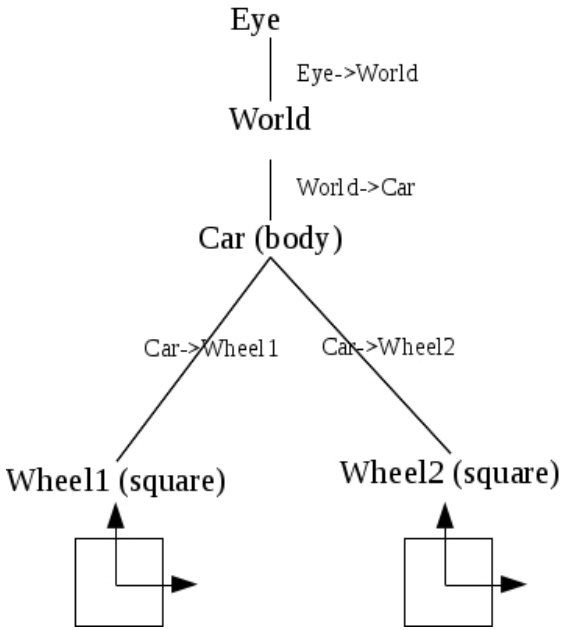
3 Conception hiérarchique

Conception hiérarchique

- On peut généraliser l'approche de placer les objets par rapport au monde, en les plaçant les uns par rapport aux autres :



- Le positionnement relatif des repères peut se représenter sous forme d'arbre :



- Chaque branche se traduit par un changement de repère $M_{\text{parentNode}\rightarrow\text{childNode}}$
- Chaque sous-arbre est conçu indépendamment de son parent (i.e. on associe à chaque noeud un `drawNode` sans se préoccuper du noeud parent).
- On remarque que les deux roues sont identiques dans leurs repères locaux (ce sera donc la même procédure qui tracera les deux roues).

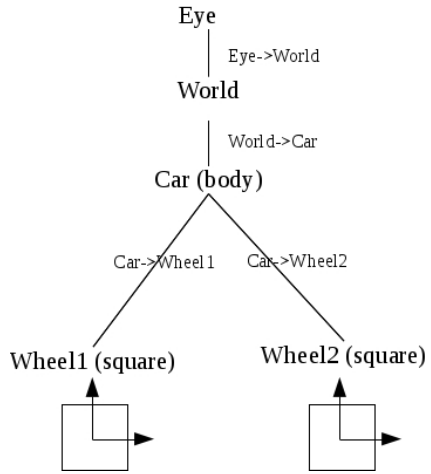
Traduction de la hiérarchie en OpenGL

- La matrice `p3d::modelview`=$M_{Eye \rightarrow Local}$ indique dans quel repère `Local` on se trouve (i.e. le repère courant).
- Descendre dans l'arbre consiste à changer le repère courant (on applique le passage du noeud à son fils).
- Lorsqu'un noeud a plusieurs enfants (tous placés par rapport au parent) : on doit mémoriser le repère du parent.
- Eviter de faire des inversions $\Rightarrow$ préférer mémoriser les repères.
- $\Rightarrow$ utilisation d'une pile pour mémoriser `p3d::modelview` (i.e. `p3d::modelview.push(); p3d::modelview.pop()`).

L'exemple

`p3d::modelview.apply(R1,R2)` est du pseudo code : correspond à une suite d'instructions (translate, rotate, etc) qui modifie la modelview pour traduire le changement de repère de `R1` à `R2` :

```
void drawWheel() { // repère local à une roue
  p3d::modelview.push(); // par précaution (inutile ici).
  drawSquare();
  p3d::modelview.pop();
}

void drawCar() { // repère local à une voiture
  p3d::modelview.push();

  // MODELVIEW = M_Eye_Car (Repere courant = Voiture)
  drawBody();

  p3d::modelview.push();
  p3d::modelview.apply(Car,Wheel1); // MODELVIEW *= M_Car_Wheel1
  // i.e. Repère courant = Wheel1
  drawWheel();
  p3d::modelview.pop(); // on revient à Car : MODELVIEW = M_Eye_Car

  p3d::modelview.apply(Car,Wheel2); // MODELVIEW *= M_Car_Wheel2;
  // i.e. Repère courant = Roue2
  drawWheel();
  p3d::modelview.pop();
}
```




```
void drawScene() {
  p3d::modelview.setIdentity();
  p3d::modelview.apply(Eye,World); // caméra
  p3d::modelview.apply(World,Car); // objet
  drawCar();
}
```

A noter

- Remarquez que c'est le noeud père (le `draw` appelant) qui place ses fils (les `draw` appelés). Par exemple : c'est la voiture qui place les roues (et non les roues qui se placent elle mêmes par rapport à la voiture) ; c'est le monde qui place la voiture ; etc.
- Remarquez les push/pop systématiques à l'entrée/sortie des `draw` : permet d'éviter tout effet de bord (aucun noeud fils doit modifier le repère courant d'un noeud après son appel).

Attention au Scale !

- Comparez le résultat de :

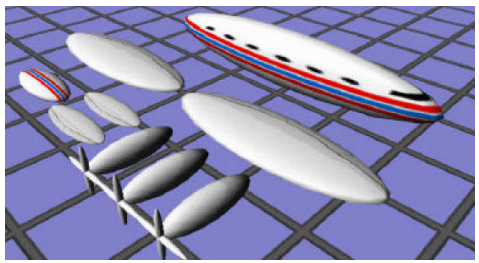
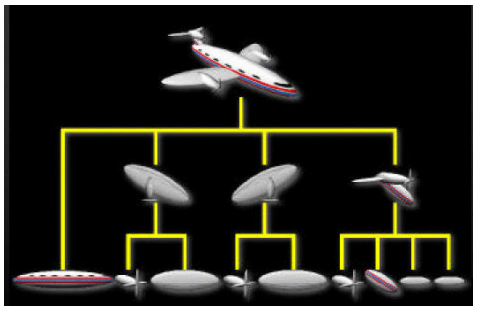
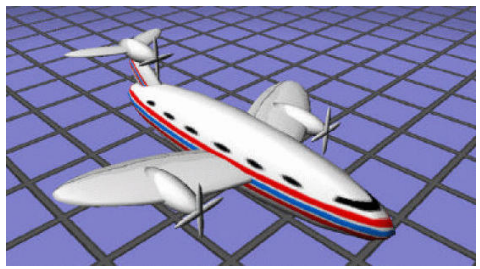
```
p3d::modelview.setIdentity();
p3d::modelview.rotate(angle,0,0,1);
p3d::modelview.scale(2,1,1);
drawSquare();
```

- et

```
p3d::modelview.setIdentity();
p3d::modelview.scale(2,1,1);
p3d::modelview.rotate(angle,0,0,1);
drawSquare();
```

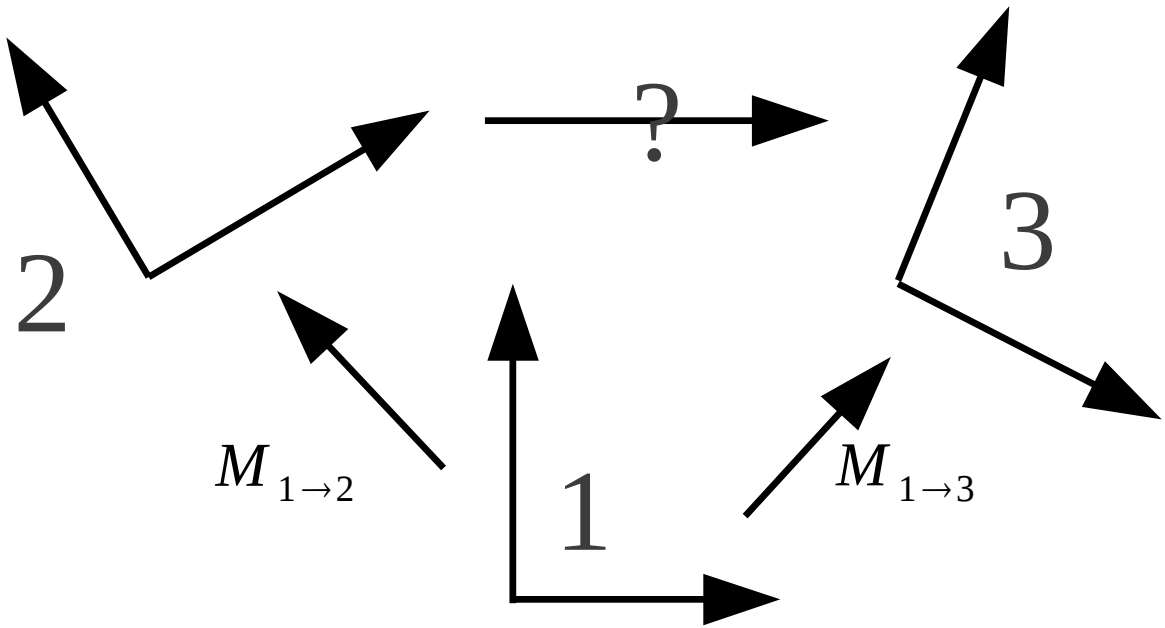
Conception hiérarchique : résumé

- Concevoir les composants dans des repères locaux les plus simples (ou intuitifs) possibles.
- Assembler les composants hiérarchiquement (sous forme d'arbres), en les positionnant relativement les uns par rapport aux autres (on place les enfants par rapport au parent par un changement de repère $M_{parentNode \rightarrow childNode}$).

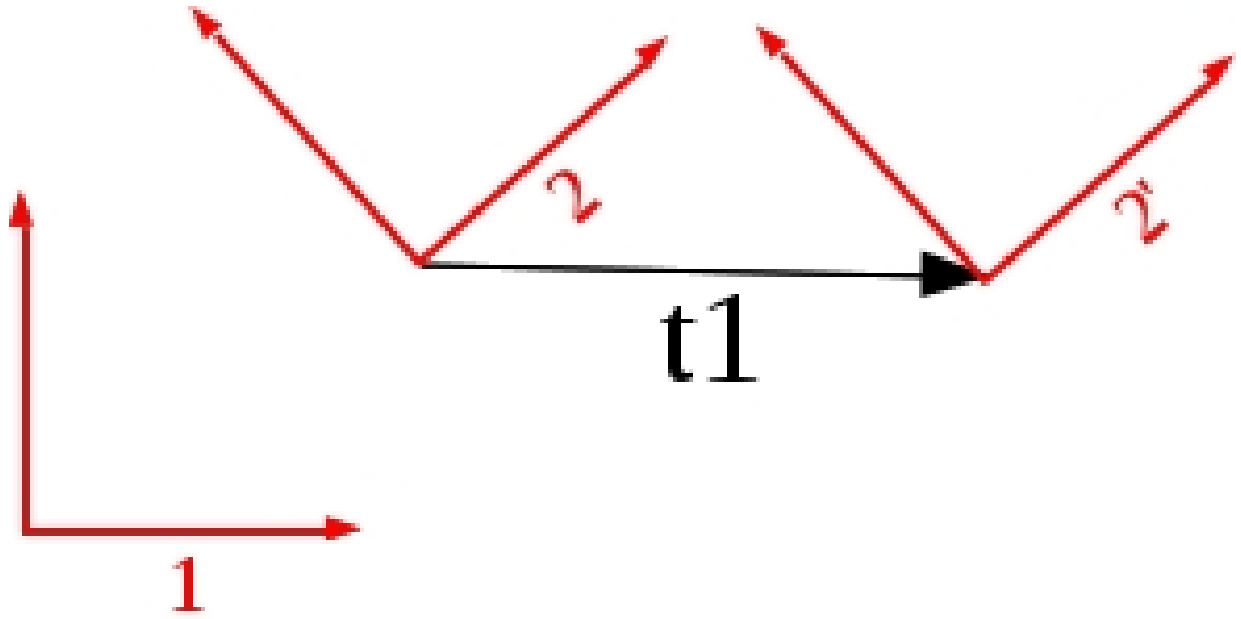
- Le principe de la conception hiérarchique est fondamentale et constitue la fondation de la majeure partie des librairies 3D (graphes de scène).

4 Quelques changements de repères usuels



- On connait $M_{1\to 2}$ et $M_{1\to 3}$, quelle est la matrice $M_{2\to 3}$?
- Solution : $M_{2\to 3} = M_{2\to 1} M_{1\to 3}$ (il reste à inverser $M_{1\to 2}$ pour avoir $M_{2\to 1}$).

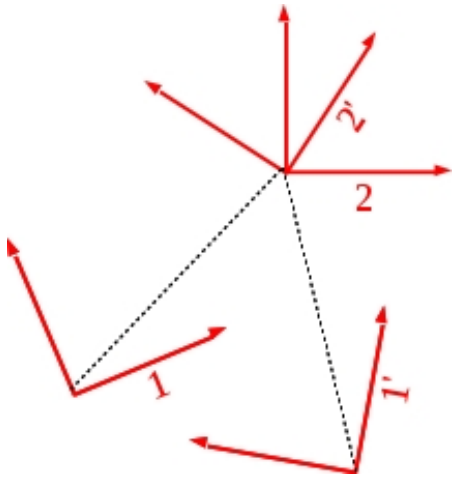
Transformation exprimée dans un autre repère



- On connait $M_{1\to 2}$, et on connait la translation t exprimée **dans 1** (de matrice T_1). On souhaite appliquer t_1 sur 2. Quel est le passage $M_{2\to 2'}$?
- Plusieurs approches possibles :
  - Exprimer le **vecteur** t_1 dans 2 : $t_2 = M_{2\to 1} t_1$ pour pouvoir construire la matrice de translation $T_2 \Rightarrow M_{2\to 2'} = T_2$.
  - On "attache" 2 à 1, puis on "bouge" 1 de t_1 sur $1'$: $M_{2\to 2'} = M_{2\to 1} M_{1\to 1'} M_{1'\to 2'}$ (avec $M_{1'\to 2'} = M_{1\to 2}$ car repères "attachés") $\Rightarrow M_{2\to 2'} = M_{2\to 1} T1 M_{1\to 2}$

Transformation exprimée dans un autre repère

- Exemple : rotation R_2 du repère 1 pour obtenir $1'$ (rotation exprimée dans 2).
- Approche possible : “attacher” le repère 1 au repère 2.



- $\Rightarrow M_{1\to 1'} = M_{1\to 2} M_{2\to 2'} M_{2'\to 1'}$
- avec $M_{2\to 2'} = R$ et $M_{2'\to 1'} = M_{2\to 1}$ (repères "attachés")
- $\boxed{\Rightarrow M_{1\to 1'} = M_{1\to 2} R M_{2\to 1}}$
- Rotation de 1 autour d’un point quelconque : prendre $M_{1\to 2}$ la plus simple possible (translation).

Passage orthonormé

- Soient $1 = (O^{(1)}, i^{(1)}, j^{(1)}, k^{(1)})$ et $2 = (O^{(2)}, i^{(2)}, j^{(2)}, k^{(2)})$, deux repères orthonormés. On connait les expressions de l'origine et de la base de 2 dans le repère 1.

  Alors :

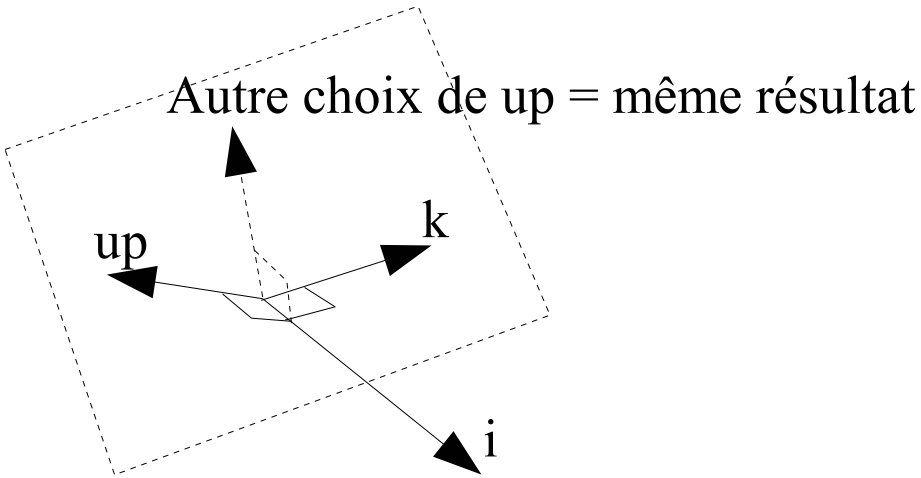
$$M_{1\to 2} = \left(\begin{array}{ccc|c} i_1^{(2)} & j_1^{(2)} & k_1^{(2)} & O_1^{(2)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- L'inverse $M_{2\to 1}$? il suffit de faire comme pour $(TR)^{-1}$: transposer le bloc haut-gauche (c'est une rotation) et d'opposer le bloc haut-droit (c'est une translation) et faire le produit des inverses.

LookAt

Placer la caméra par rapport à `World` en donnant sa position A_{World}, quel point elle regarde (point At_{World}) et son roulis par un vecteur Up_{World}.

- Construire (i, j, k) :
  - k est donné par $k = O - At$, et on le normalise.
  - i est tel que $i = up \times k$
  - enfin j est calculé par $j = k \times i$
  - La matrice $M_{World \to Eye}$ est donnée en mettant en colonne i, j, k et O (repère étant orthonormé).



5 Changement de repères et éclairage

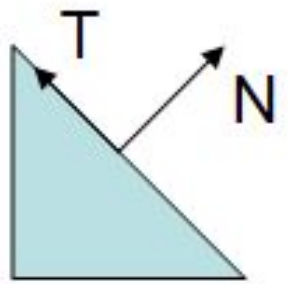
Calcul dans le repère Eye

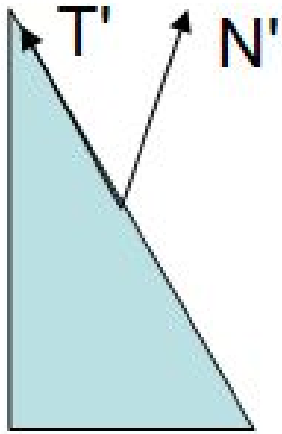
- Pour un calcul cohérent, il faut que toutes les données nécessaires (N, position des sources, L, ...) soient exprimées dans le même repère.
- $\Rightarrow$ transformation des normales :

```
void main() {
  vec4 positionEye=modelviewMatrix*vec4(position,1.0);
  vec4 normalEye=modelviewMatrix*vec4(normal,0.0); // attention ! cf transparent qui suit

  L=lightPosition-positionEye.xyz/positionEye.w;
  N=normalEye.xyz;
  ...

  gl_Position = projection*positionEye;
}
```

Attention au Scale ! (encore)

- Transformation des normales incorrecte lors d'un changement d'échelle.





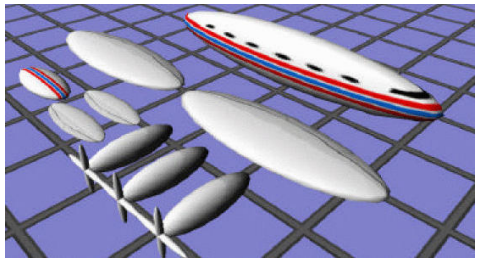
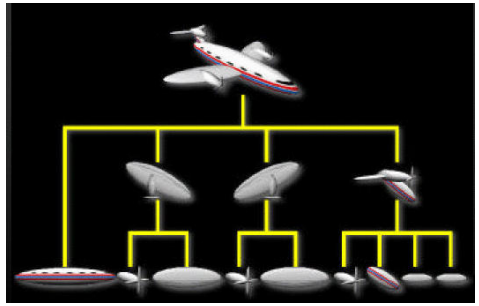
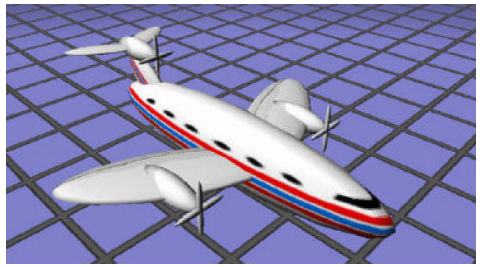
avant transformation après transformation par `modelview`

- La matrice correcte pour transformer les normales est $(M^{-1})^t$ où M est la sous-matrice 3x3 (3 premières lignes, 3 premières colonnes) de `modelview`.
- Il faut donc passer une matrice supplémentaire :

```
vec4 positionEye=modelviewMatrix*vec4(position,1.0);
vec3 normalEye=normalMatrix*normal;

L=lightPosition-positionEye.xyz/positionEye.w;
N=normalEye;
...

gl_Position = projection*positionEye;
```

6 Représentation des changements de repères par TRS - Quaternions

Représenter la conception hiérarchique

- Représenter explicitement la hiérarchie par un arbre (graphe de scène).

```
class Object3D {
  Matrix4 parentChild_; // changement de repère

  Object3D *parent_;     // référence sur le noeud parent
  std::vector<Object3D *> child_; // noeuds enfants
public:
  ...
  virtual void draw()=0; // interface : trace dans le repère local
  ...
};
```

- Le visualiseur ("renderer") se charge de parcourir tout l'arbre en composant la modelview et en traçant les géométries à chaque noeud (+ gestion des shaders/textures/etc).
- Offrir toutes les méthodes de positionnement et de changements de repères nécessaires. Ex : translate (par rapport au local ou au parent) ; rotate (idem) ; matrice worldLocal ; localWorld ; pointToWorld(P_Local) ; directionToWorld(U_Local) ; etc ; etc.
- On fera plus simple lors des TPs : uniquement un niveau.

TR(S)

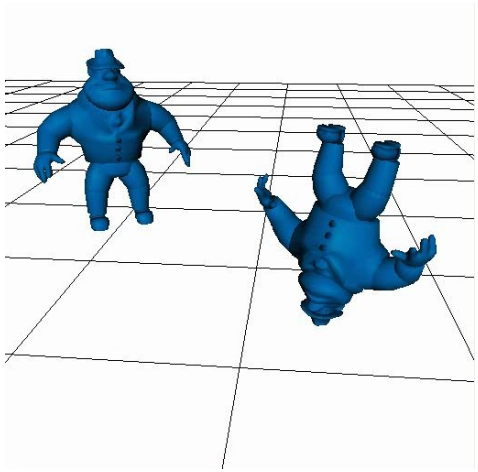
- Si les matrices homogènes s'imposent (composition simple par produit, librairie OpenGL), la représentation du placement est souvent couplée à une représentation Translation/Rotation.
- Tout placement d'un objet rigide (composition de translations et rotations) peut se réduire à *TR* : c'est à dire une translation (c'est la **position** de l'objet) et une rotation (c'est **l'orientation** de l'objet).
- On peut éventuellement compléter par un changement d'échelle *S* pour contrôler les dimensions d'un objet.

```
class Object3D {
  Vector3 position_; // T
  Quaternion orientation_;  // R
  Vector3 scale_; // S
  ...
};
```

- Quaternion ?

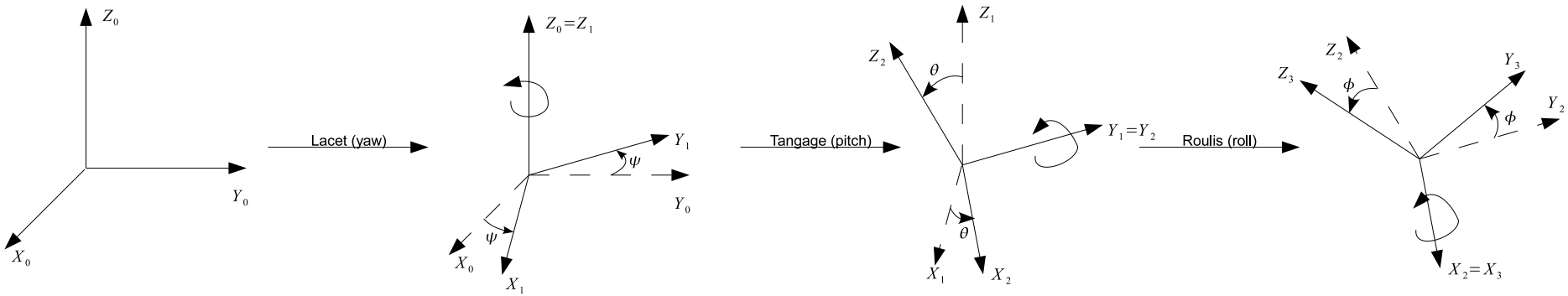
Représentation d'une orientation

- Plusieurs choix pour représenter l'orientation :
  - matrices (quel est l'axe ? l'angle ? ; erreurs numériques lors de compositions multiples ; interpolation $M = (1 - \lambda)M1 + \lambda M2$).

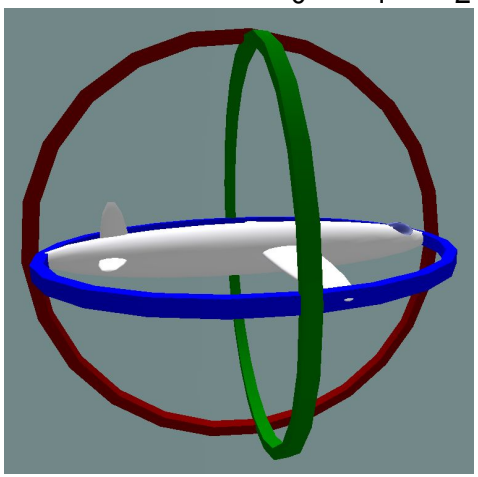


  - angle/axe : intuitif mais pas nécessairement évident à manipuler (composition)
  - angles de Cardan ("abusivement" appelés angles d'Euler en informatique graphique).
  - quaternions.

Remarques sur angles d'Euler



$\Rightarrow M_{0\to 3} = R_{Z_0} R_{Y_1} R_{X_2}$ (ordre $Z - Y - X$).



```
rotation(bleu);   // lacet (yaw)
rotation(rouge);  // tangage (pitch)
rotation(vert);   // roulis (roll)
```

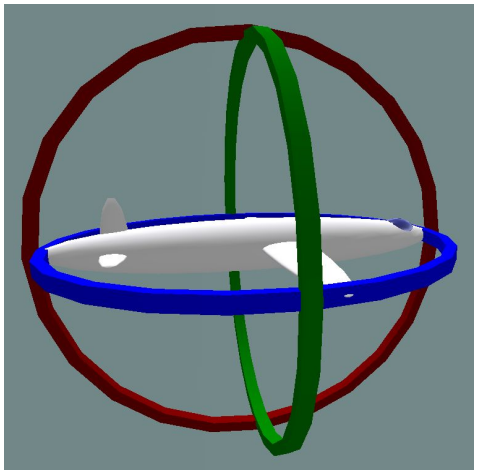
Remarque : en informatique graphique, l'ordre des axes est généralement $Y - X - Z$: autour de y (= lacet), puis autour de x (= tangage), puis autour de z (= roulis).

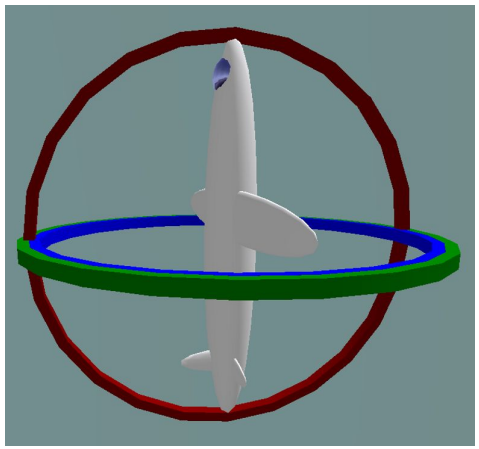
Représentation par angles d'Euler (2)

```
class Object3D {
  Vector3 position_; // position en translation
  double ay_,ax_,_az_; // orientation (angles d'Euler)
  ...
}

méthode draw :
  p3d::modelview.translate(position_.x(),position_.y(),position_.z());
  p3d::modelview.rotate(ay_,0,1,0); // yaw : autour de y
  p3d::modelview.rotate(ax_,1,0,0); // pitch : autour de x
  p3d::modelview.rotate(az_,0,0,1); // roll : autour de z
  ...
```

- Représentation peut sembler simple : 3 angles, et l'orientation totale est alors donnée par $M = R_{Y_0} R_{X_1} R_{Z_2}$, mais la composition pose un véritable problème de conception :
  - Comment composer par rapport à l'orientation actuelle ? (exemple de l'interaction à la souris : comment faire un yaw **après** un pitch ? ?).
  - Gimbal lock : possible de perdre un degré de liberté.

Gimbal Lock





rouge = 90 degrés

```
rotation(bleu);   // yaw
rotation(rouge);  // pitch
rotation(vert);   // roll
```

Représentation d'une orientation par quaternion (1)

- Définition : $q = (a, u)$ avec a un scalaire de $\boldsymbol{R}$, et u un vecteur de $\boldsymbol{R}^3$ (donc 4 composantes en tout).
- Un vecteur u peut s'écrire avec le quaternion $q = (0, u)$.
- Somme : $q_1 + q_2 = (a, u) + (b, v) = (a + b, u + v)$.
- Multiplication : $q_1 q_2 = (a, u)(b, v) = (ab - u \cdot v, u \times v + av + bu)$
- Conjugué : $(a, u)^* = (a, -u)$
- Multiplication par un scalaire : $kq = k(a, u) = (ka, ku)$
- Norme : $\|q\| = \sqrt{a^2 + u \cdot u}$

Représentation par quaternion (2)

- Calcul à partir de 2 vecteurs : u et v **unitaires**, et formant un angle θ alors le quaternion $q = (u \cdot v, u \times v)$ est une représentation d'une rotation de vecteur $u \times v$ et d'angle 2θ.
- Tout quaternion **normé** s'écrit $q = (cos\alpha, sin\alpha u)$ avec u **normé** : représente une rotation d'angle 2α et de vecteur u (axe passant par l'origine).
- Soit q un quaternion représentant une rotation, alors l'image w' du vecteur w s'obtient par $w' = qwq^*$
- Soient $q1$ et $q2$ deux rotations, alors la rotation composée est $q1q2$.

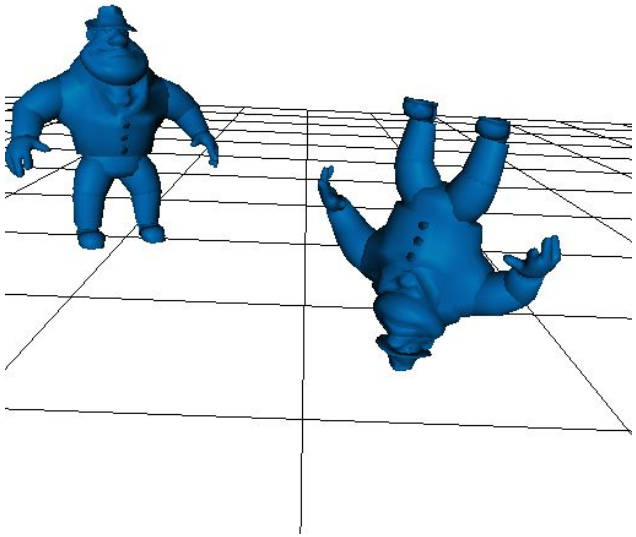
Conversion quaternion en matrice

- Soit $q = (a, u) = (a, (x, y, z))$ une rotation, alors la matrice homogène de rotation est :

$$\begin{pmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2za & 2xz+2ya & 0 \\ 2xy+2za & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2xa & 0 \\ 2xz-2ya & 2yz+2xa & 1-2x^2-2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intérêt des quaternions

- représentation de la composition moins gourmande en temps de calcul (comparer à la multiplication entre matrice).
- composition des rotations plus robuste : il suffit de normaliser le quaternion pour s'assurer que nous avons toujours une rotation.
- interpolation : l'interpolation linéaire de deux quaternions donne un résultat plus naturel qu'avec les matrices (i.e. $q3 = (1 - \lambda)q1 + \lambda q2$, mais il faut toutefois normaliser $q3$).



Remarque : l'attribut `position_` est également interpolé linéairement.

Classe Quaternion

- La classe `Quaternion` est disponible pour les tps.
- Les méthodes utiles sont :
  - Initialisation à la rotation identité : `q.setIdentity()`
  - Conversion d'une représentation (angle,axe) à un quaternion : `q.setFromAngleAxis(angle,axe)` (axe de type `Vector3`)
  - Conversion d'un quaternion à une représentation (angle,axe) : `q.copyToAngleAxis(&angle,&axe)`
  - Composition de 2 rotations : `q3=q1*q2`
  - Composition avec une rotation représentée par (angle,axe) : `q.rotate(angle,axe)` (`q` est modifié)
  - Rotation d'un vecteur : `v=q*u` (avec `u` et `v` de type `Vector3`)

Transformation position ou direction

- Il faut différencier les points $P(x, y, z)$ et les directions $u(x, y, z)$ lors des transformations. Une direction **ne doit pas subir la translation** :
  - Avec les matrices homogènes : appliquer une coordonnée homogène 0 pour les vecteurs suffit.
  - Avec une représentation translation/rotation (quaternion par exemple) : la direction subit uniquement la rotation (il faut donc explicitement ignorer la translation).