Slovenská Technická Univerzita v Bratislave

Fakulta informatiky a informačných technológií

Vyhľadávanie v dynamických množinách

Zadanie 2

Predmet: Dátové štruktúry a algoritmy

Obdobie: Letný semester 2019/2020

Cvičiaci: Ing. Dominik Macko , PhD.

Študent: Bc. František Gič

Obsah

Binárne vyhľadávacie stromy

V prípade binárnych vyhľadávacích stromov som si pre vlastnú implementáciu vybral algoritmus AVL na vyvažovanie binárneho vyhľadávacieho stromu a prevzatou implementáciou bola implementácia Červeno-čierneho stromu.

AVL strom

AVL strom je algoritmus samo vyvažovania na princípe kontroly koeficientu vyváženia (balance) pod stromu. V prípade vyvažovania stromu sa po každom vložení prvku do stromu kontroluje každý prejdený uzol stromu a vypočítava sa neho koeficient vyváženia. Pokiaľ je absolútna hodnota koeficientu väčšia ako 1 (v správnej implementácií rovná 2 - nikdy nebude väčšia), tak nad tým daným uzlom musia prebehnúť rotácie.

Typy rotácie poznáme štyri, a aj keď sú pomenované rôznymi spôsobmi zakaždým ide o tie isté rotácie. V niektorých daných zdrojoch pomenúvajú autori rotácie podľa smeru hodinových ručičiek, niekde podľa strán (vľavo, vpravo), a v zdrojoch z ktorých som čerpal (Bari, 2020) boli uvedené podľa zdroja nevyváženia. Konkrétne sa jedná o LL, RR, LR a RL Rotácie. Daná rotácia sa teda nazýva podľa pôvodu nevyváženosti. V prípade LL rotácie ide teda o zdroj nevyváženosti v ľavom potomkovi ľavého podstromu, a preto nad aktuálnym uzlom vykonáme LL rotáciu (v mojej implementácií ide o funkciu `rot_ll`).

Implementácia

Dátová štruktúra

V mojej implementácií som použil dátovú štruktúru uzlu s názvom `Node`, ktorá obsahuje dátovú časť - `int data`, výšku podstromu `int height`, ktorá sa počíta ako maximum z výšok pravého a ľavého podstromu, a smerníky na pravý a ľavý podstrom - `struct Node* left`, `struct Node* right`.

Vloženie prvku

Samotné vloženie prvku do binárneho prvku by sme mohli opísať nasledovným psuedokódom:

```
insert(node,data)
  if node is null
    create_node()
    return

  if data < node.data
    insert(node.left,data)
  else
    insert(node.right,data)


  perform_rotations(balance(node),balance(node.left),balance(n
  ode.right))

  return node
```

Vloženie prvku do AVL stromu je podobné ako pri klasickom, neváženom strome, obohatené je však o dané rotácie, ktoré sa odohrávajú nad daným podstromom a modifikujú ho. Vloženie prvku je rekurzívna funkcia vracajúca vždy daný podstrom do ktorého sa vnárame.

Hľadanie prvku

Vyhľadávanie prvku je jednoduchá rekurzívna funkcia v časovej zložitosti `O(log n)`. Vyhľadáva vo vetvách stromu podľa daného dáta, ktoré je hľadané a traverzuje stromom, pokiaľ ho nenájde alebo nenarazí na list stromu.

```
search(subtree, data)
  if subtree == NULL return NULL
  if subtree.data == data return subtree

  if data > subtree.data
    return search(subtree.right)
  else
    return search(subtree.left)
```

Testovanie

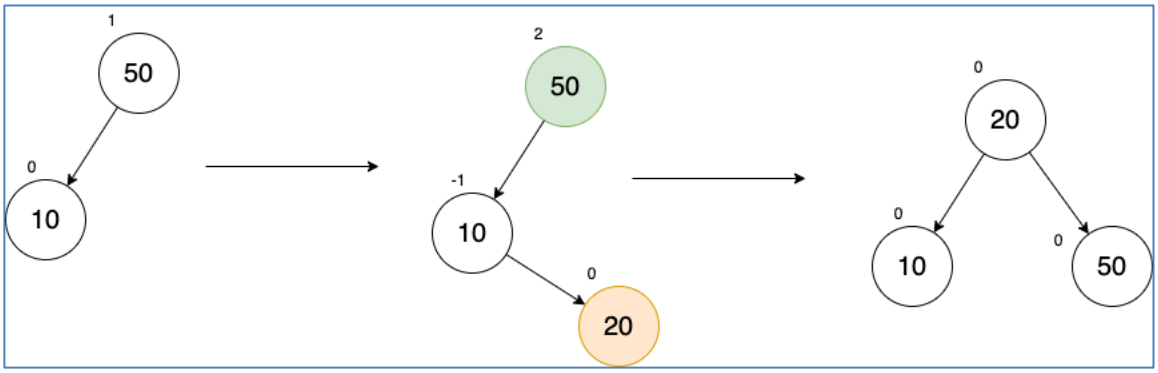
Pre testovanie správnosti mojej implementácie AVL stromu som pripravil päť rozličných testov.

Test 1

Všeobecný test, ktorý testuje vkladanie, hľadanie, existenciu prvkov, duplikáciu prvkov a ich správnu výšku.
V tomto teste ukážeme aj testovací kód, pri zvyšných testoch budú len výsledky z konzole.
Takisto meriame aj čas v sekundách na konci programu.
V prípade neúspechu niektorej z overovacích funkcií `should` by program skončil s exit kódom 1.

```
void test () {
    Node *tree = NULL;

    tree = insert(tree, data: 50);
    tree = insert(tree, data: 10);
    tree = insert(tree, data: 20);
    tree = insert(tree, data: 20);

    should(tree, operation: "not.exist", value: 80);
    should(tree, operation: "exist", value: 50);
    should(tree, operation: "have.value", value: 10);

    should( node: search(tree, data: 20), operation: "have.height", value: 2);
    should( node: search(tree, data: 10), operation: "have.height", value: 1);
    should( node: search(tree, data: 50), operation: "have.height", value: 1);

    print(tree);
    free_node(tree);
}
```

Obrázok 1: Ukážka testovacej sady



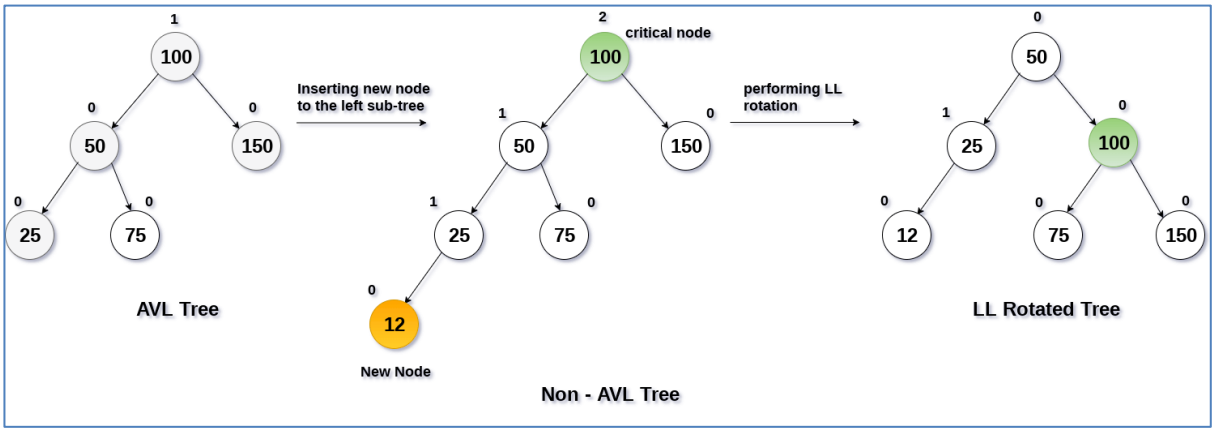
Obrázok 2: Ukážka diagramu stromu a rotácie pri vložení a vytvorení nevyváženia (Použije sa rotácia LR - nevyváženosť je v pravom potomkovi (20) ľavého podstromu (10)

```
should(not.exist): OK. 80 does not exist in tree.
should(exist): OK. 50 exists in tree.
should(have.value): OK. Node with data 10 has value 10.
should(have.height): OK. Node height 2.
should(have.height): OK. Node height 1.
should(have.height): OK. Node height 1.
10 (height: 1, balance: 0)
20 (height: 2, balance: 0)
50 (height: 1, balance: 0)
Height: 2
Nodes: 3
Success. (0.000047s)
```

Obrázok 3: Výsledok testu, In order traverzovanie stromom, výpis jednotlivých uzlov a listov, hĺbky, koeficientu vyváženosti a počet uzlov.
Poznámka: Výšku stromu číslujeme od 1 (root == 1)

Test 2: Pravá rotácia (nevyváženosť LL)

Test zameraný konkrétne na správne riešenie rotácie LL.



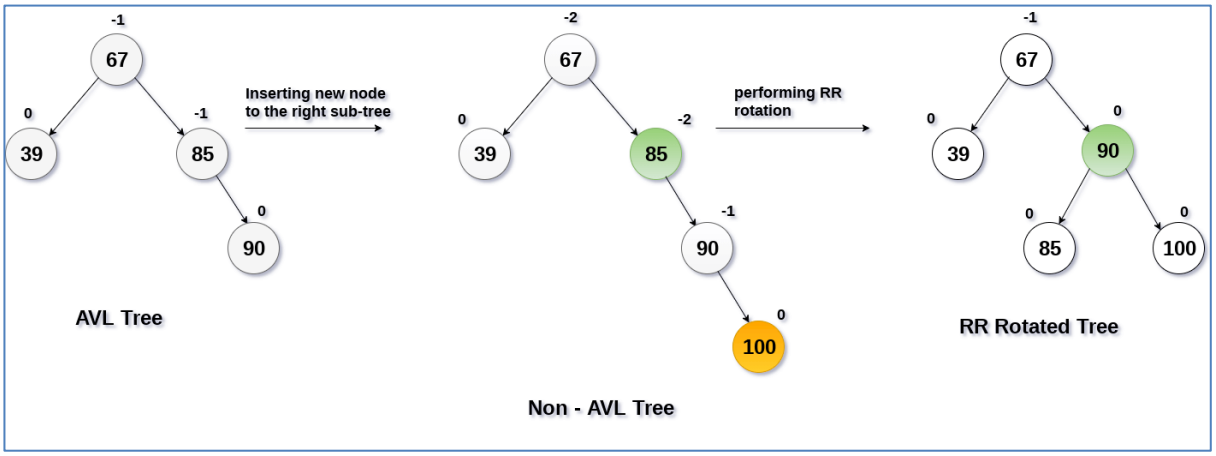
Obrázok 4: Diagram vloženia a simulácia LL rotácie
(Zdroj: https://static.javatpoint.com/ds/images/ll-rotation-in-avl-tree-solution.png)

```
should(exist): OK. 75 exists in tree.
should(exist): OK. 12 exists in tree.
should(not.exist): OK. 15 does not exist in tree.
should(have.height): OK. Node 50 height 3.
should(have.height): OK. Node 25 height 2.
should(have.height): OK. Node 100 height 2.
should(have.height): OK. Node 12 height 1.
should(have.height): OK. Node 75 height 1.
should(have.height): OK. Node 150 height 1.
12 (height: 1, balance: 0)
25 (height: 2, balance: 1)
50 (height: 3, balance: 0)
75 (height: 1, balance: 0)
100 (height: 2, balance: 0)
150 (height: 1, balance: 0)
Height: 3
Nodes: 6
Success. (0.000055s)
```

Obrázok 5: LL rotácia

Test 3: Ľavá rotácia (nevyváženosť RR)

Test zameraný konkrétne na správne riešenie rotácie RR.



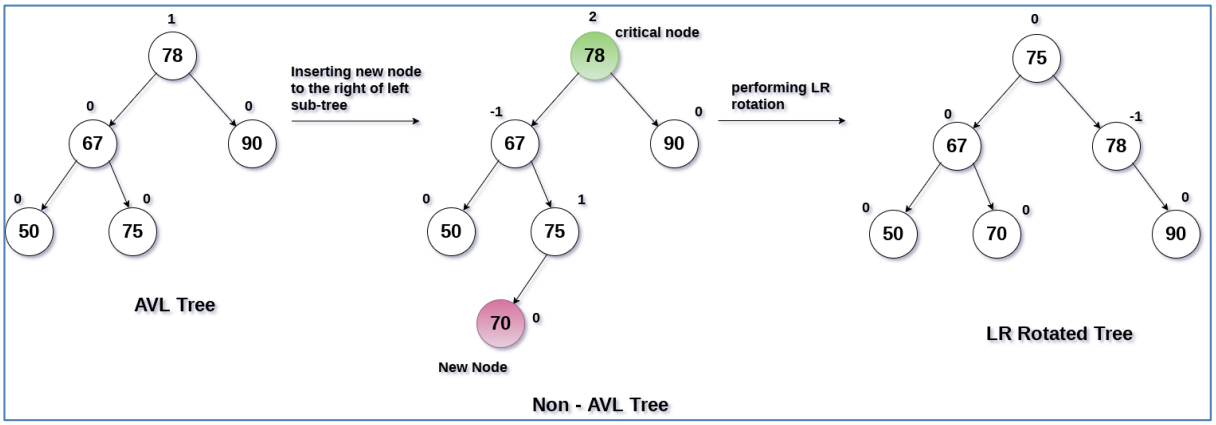
Obrázok 6: Diagram vloženia a simulácia RR rotácie
(Zdroj: https://static.javatpoint.com/ds/images/rr-rotation-in-avl-tree-solution.png)

```
"/Users/feri/Library/Mobile Documents/com~apple~Cl
should(exist): OK. 39 exists in tree.
should(exist): OK. 100 exists in tree.
should(not.exist): OK. 150 does not exist in tree.
should(have.height): OK. Node 67 height 3.
should(have.height): OK. Node 39 height 1.
should(have.height): OK. Node 90 height 2.
should(have.height): OK. Node 85 height 1.
should(have.height): OK. Node 100 height 1.
39 (height: 1, balance: 0)
67 (height: 3, balance: -1)
85 (height: 1, balance: 0)
90 (height: 2, balance: 0)
100 (height: 1, balance: 0)
Height: 3
Nodes: 5
Success. (0.000084s)
```

Obrázok 7: RR rotácia

Test 4: Rotácia LR

Test zameraný konkrétne na správne riešenie rotácie LR.



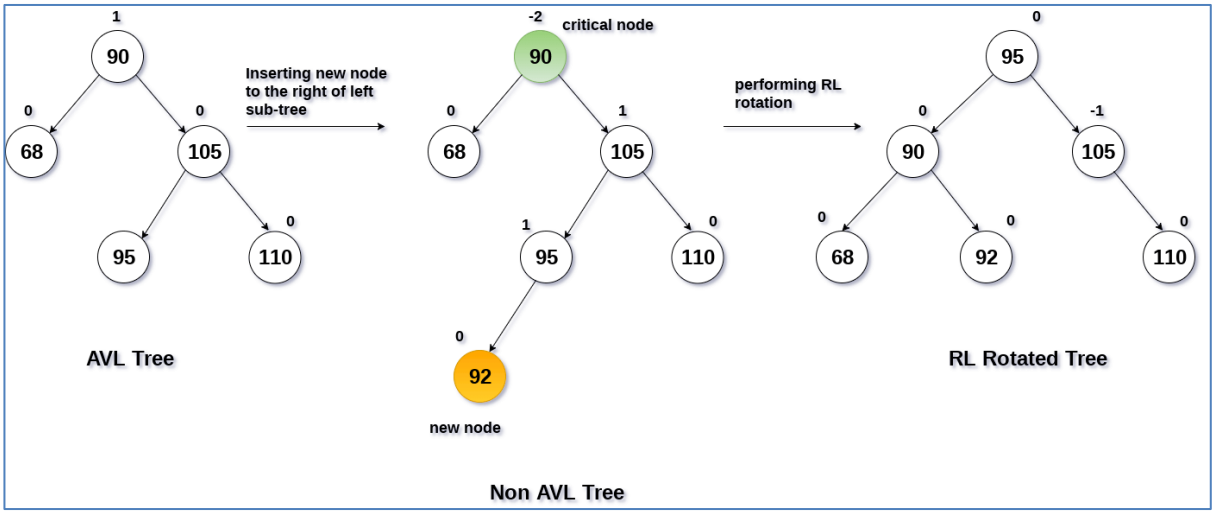
Obrázok 8: Diagram vloženia a simulácia LR rotácie
(Zdroj: https://static.javatpoint.com/ds/images/lr-rotation-in-avl-tree-solution.png)

```
should(exist): OK. 75 exists in tree.
should(exist): OK. 67 exists in tree.
should(not.exist): OK. 150 does not exist in tree.
should(have.height): OK. Node 75 height 3.
should(have.height): OK. Node 67 height 2.
should(have.height): OK. Node 78 height 2.
should(have.height): OK. Node 50 height 1.
should(have.height): OK. Node 70 height 1.
should(have.height): OK. Node 90 height 1.
50 (height: 1, balance: 0)
67 (height: 2, balance: 0)
70 (height: 1, balance: 0)
75 (height: 3, balance: 0)
78 (height: 2, balance: -1)
90 (height: 1, balance: 0)
Height: 3
Nodes: 6
Success. (0.000072s)
```

Obrázok 9: LR rotácia

Test 5: Rotácia RL

Test zameraný konkrétne na správne riešenie rotácie RL.



Obrázok 10: Diagram vloženia simulácia RL rotácie
(Zdroj: https://static.javatpoint.com/ds/images/rl-rotation-in-avl-tree-solution.png)

```
should(exist): OK. 110 exists in tree.
should(exist): OK. 92 exists in tree.
should(not.exist): OK. 150 does not exist in tree.
should(have.height): OK. Node 95 height 3.
should(have.height): OK. Node 90 height 2.
should(have.height): OK. Node 105 height 2.
should(have.height): OK. Node 68 height 1.
should(have.height): OK. Node 92 height 1.
should(have.height): OK. Node 110 height 1.
68 (height: 1, balance: 0)
90 (height: 2, balance: 0)
92 (height: 1, balance: 0)
95 (height: 3, balance: 0)
105 (height: 2, balance: -1)
110 (height: 1, balance: 0)
Height: 3
Nodes: 6
Success. (0.000089s)
```

Obrázok 11: RL rotácia

Červeno-čierny strom

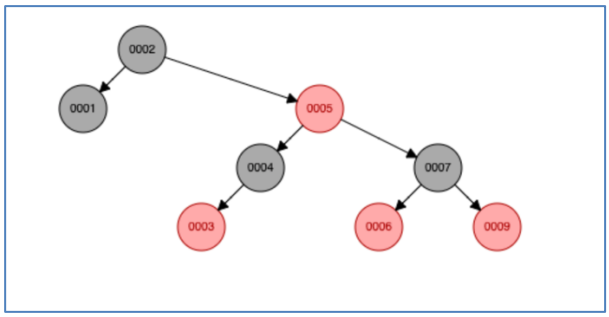
Implementácia

Implementácia červeno-čierneho stromu v tomto zadaní je prevzatá z portálu Programiz.com: https://www.programiz.com/dsa/insertion-in-a-red-black-tree.

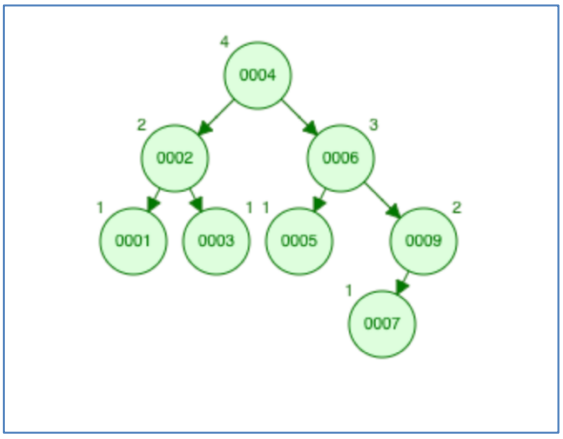
Porovnanie

Oba algoritmy sú z rovnakého druhu – sú to algoritmy na vyvažovanie binárneho stromu. Ich teoretická časová zložitosť je rovnaká – vkladanie aj vyhľadávanie je `O(log n)`. Pamäťová zložitosť oboch algoritmov je `O(n)`.
Medzi rozdiely algoritmov patrí však časová zložitosť z praktického hľadiska. AVL stromy sú viac vyváženejšie a pre to vyhľadávanie v reálnom čase je rýchlejšie ako pri červeno-čiernom strome. Tieto stromy bývajú teda viac využívané v štruktúrach ako sú databázy, kde je potrebné rýchle získanie dát. Naopak, vkladanie dát je v reálnom čase pomalšie, pretože AVL strom rebalancuje strom pri každom vložení.
Z pamäťového hľadiska je červeno čierny strom jednoduchšie ukladať, pretože na uloženie informácie nám stačí pri najmenšom `bit` alebo `char`, kým na výšku stromu v každom uzle pri AVL strome potrebujeme minimálne `integer`.

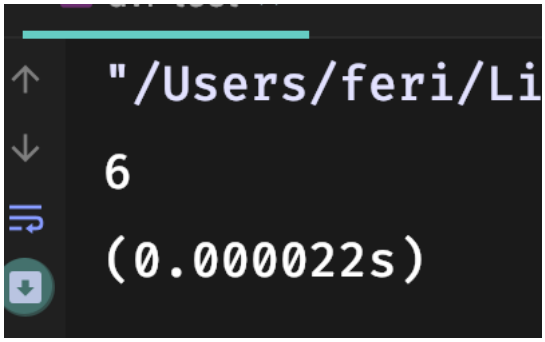
Pre porovnanie, že červeno-čierny strom nemusí byť vždy vyvážený demonštrujme v oboch algoritmoch nasledujúci vstup: 2,1,4,5,9,6,7. (University of Maryland, Baltimore County)



Obrázok 12: Demonštrácia nevyváženosti stromu pri červeno-čiernom strome (Zdroj: https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/RedBlack.html)



Obrázok 13: Rovnaký vstup, AVL strom
(Zdroj: https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html)



Obrázok 14: Čas funkcie získania čísla 6 AVL stromu pri danej konfigurácií

Obrázok 15: : Čas funkcie získania čísla 6 červeno-čierneho stromu pri danej konfigurácií

Pre reálneho porovnanie času potrebné na vloženie prvku a demonštráciu nášho tvrdenia sme vytvorili nasledovný test, kde vkladáme 10000 prvkov.

```
void insert_time_test () {
    Node *tree = NULL;

    float startTime = (float) clock() / CLOCKS_PER_SEC;
    for (int i = 0; i < 10000; i++) {
        tree = insert(tree, i);
    }
    float endTime = (float) clock() / CLOCKS_PER_SEC;

    float timeElapsed = endTime - startTime;
    printf("Insertion time: (%fs)\n", timeElapsed);
    free_node(tree);
}
```

```
avl-test ×
"/Users/feri/Library/Mobile Documents/com~apple~CloudDocs/
Insertion time: (0.004108s)
```

Obrázok 16: Čas potrebný na vloženie 10 tisíc prvkov do AVL stromu

```
127 void insert_time_test () {
128     root = NULL;
129
130     float startTime = (float) clock() / CLOCKS_PER_SEC;
131     for (int i = 0; i < 10000; i++) {
132         insertion(i);
133     }
134     float endTime = (float) clock() / CLOCKS_PER_SEC;
135
136     float timeElapsed = endTime - startTime;
137     printf("Insertion time: (%fs)\n", timeElapsed);
138     free_node(root);
139 }
140
141
```

```
Run: red-black-test ×
"/Users/feri/Library/Mobile Documents/com~apple~CloudDocs/S
Insertion time: (0.002376s)
```

Obrázok 17: Čas potrebný na vloženie 10 tisíc prvkov do červeno-čierneho stromu

Hashovacie tabuľky

V prípade hashovacích tabuliek som si pre vlastnú implementáciu vybral algoritmus riešenia kolízií otvoreného adresovania, konkrétne kvadratické skúšanie (quadratic probing) a prevzatou implementáciou algoritmu reťazenia.

Otvorené adresovanie - Kvadratické skúšanie

Kvadratické skúšanie je jednou z metód riešenia kolízií v hashovaní. Je to nadstavba lineárneho skúšania so snahou zamedziť primárnemu clustrovaniu hodnôt v hashovacej tabuľke.

Implementácia

Dátová štruktúra

Hashovaciu tabuľku sme uložili do štruktúry obsahujúcej celkovú veľkosť a počet kľúčov – `int size`, `int keys`. Táto štruktúra taktiež obsahuje samotnú tabuľku `table`, reprezentovanú dynamickým poľom typu `int`.
Dôvodom prečo je nutné si uchovávať aktuálny počet a veľkosť tabuľky je výpočet faktoru naplnenia.

Vloženie prvku

Samotné vloženie prvku je pomerne jednoduché a skúsime ho vysvetliť na nasledovnom pseudokóde.

```
Insert(table,key)

  If (load_factor(keys+1) > 0.5)
     Rehash(table)

  index = hash_fn(key);
  if (table[index] != FREE)
    index = quadratic_probe(key)

  table[index] = key;
```

Vkladanie prvku sa uskutoční získaním indexu z hashovacej funkcie. Vo vlastnej implementácií používame jednoduchú hashovaciu funkciu `fn(k) = k mod SIZE`, kde `SIZE` je veľkosť hashovacej tabuľky.

Samotné riešenie kolízií tkvie v tom, že pokiaľ nie je daný index voľný, vyskúša sa iné miesto v tabuľke. Rozdiel medzi lineárnym a kvadratickým skúšaním je vo výbere miesta. Kým lineárne skúšanie skúša voľnosť prvkov hashovacej tabuľky za daným prvotným indexom, kvadratické skúšanie pripočítava ku kľúču druhú mocninu iterátoru skúšania, čo celé predelí so zvyškom veľkosťou tabuľky. Takto zamedzuje už vyššie spomenutému primárnemu clustrovaniu – to je prípad, keď sa v tabuľke zhromažďujú hodnoty v okolí nejakého kľúča.

Zámerne sme vynechali vysvetlenie prvého kroku pseudokódu. V prípade hashovacích tabuliek s otvoreným adresovaním je práve faktor naplnenia veľkou premennou v prípade časovej zložitosti algoritmu. Faktor naplnenia λ = počet prvkov / veľkosť tabuľky. Faktor naplnenia udržovaný pod hodnotou 0.5 nám zabezpečuje, aby bola časová zložitosť hľadania prvku v tabuľke konštantná.
V prípade teda, že by faktor naplnenia bol vyšší po najbližšom vkladaní, musíme zväčšiť zdvojnásobiť veľkosť tabuľky a znova zahashovať prvky. Dôvodom prečo sa musia znova zahashovať prvky je, že hashovacia funkcia je závislá na veľkosti tabuľky, a pri zmenení veľkosti tabuľky by dané prvky už neboli získateľne novou hashovaciou funkciou.

Hľadanie prvku

Samotné hľadanie prvku je v kvadratickom skúšaní skoro totožné s vkladaním prvku. Vynecháva sa iba prípad zväčšovania a rehashovania tabuľky.
Hľadá sa hashovaciou funkciou kľúč a ak sa daná hodnota nenachádza na danom indexe, tak sa skúšajú všetky lokácie pripočítania druhej mocniny iterátoru vydelené veľkosťou tabuľky.
V prípade, ak však algoritmus narazí na index tabuľky ktorý je prázdny, môžeme s určitosťou povedať že daný kľúč sa v tabuľke nenachádza.

Zväčšenie tabuľky

Zväčšenie tabuľky je operáciou vytvorenia novej tabuľky s dvojnásobnou veľkosťou predchádzajúcej a znova zahashovanie jednotlivých prvkov starej tabuľky s hashovaciou funkciou novej.

Test

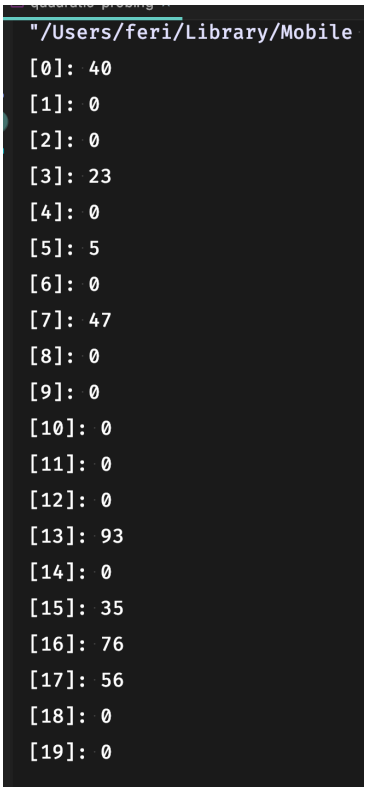
Pre demonštráciu správnosti riešenia sme vytvorili jednoduchý test pre vkladanie a hľadanie prvkov v hashovacej tabuľke a správnosť jej zväčšovania.

```
void test () {
    HashTable *hashTable = new( size: 10);

    insert(&hashTable,  key: 76);
    insert(&hashTable,  key: 56);
    insert(&hashTable,  key: 93);
    insert(&hashTable,  key: 40);
    insert(&hashTable,  key: 35);

    print(hashTable);
    should(hashTable,  operation: "exist",  key: 35);

    insert(&hashTable,  key: 47);
    insert(&hashTable,  key: 23);
    insert(&hashTable,  key: 5);

    print(hashTable);
    should(hashTable,  operation: "exist",  key: 35);
    should(hashTable,  operation: "exist",  key: 23);
    should(hashTable,  operation: "not.exist",  key: 50);
    should(hashTable,  operation: "have.value",  key: 23);

    free_hashtable(hashTable);
}
```

Obrázok 18: Kód testu vkladania prvkov do hashovacej tabuľky s kvadratickým skúšaním

```
should(exist): OK. 35 exists in table on position 5
should(exist): OK. Hashtable with key 35 has value 35.
should(exist): OK. 35 exists in table on position 15
should(exist): OK. Hashtable with key 35 has value 35.
should(exist): OK. 23 exists in table on position 3
should(exist): OK. Hashtable with key 23 has value 23.
should(not.exist): OK. 50 does not exist in table.
```

Obrázok 19: Test vkladania prvkov do hashovacej tabuľky s kvadratickým skúšaním



Obrázok 20: Zväčšená tabuľka

Obrázok 20 demonštruje zdvojnásobenie veľkosti tabuľky po vložení 6teho kľúču do tabuľky s inicializovanou veľkosťou 10 po prekročení limitu faktoru naplnenia.

Reťazenie

Implementácia

Implementácia hashovacej tabuľky s algoritmom riešenia kolízií pomocou separátneho reťazenia v tomto zadaní je prevzatá z portálu Log2Base2.com: https://www.log2base2.com/algorithms/searching/open-hashing.html

Porovnanie

Oba algoritmy riešenia kolízií majú rovnakú teoretickú časovú i pamäťovú zložitosť.
Ohľadom pamäťovej zložitosti, je to $O(n)$. V praxi pri ukladaní numerických dát ako bolo v tomto cvičení demonštrované je však lepšie z pamäťového hľadiska použiť pole typu `int` miest lineárneho zoznamu.

Časová zložitosť oboch algoritmov je veľmi závislá na faktore naplnenia λ. Priemerná časová zložitosť prehľadávania s úspešným koncom je $O(1 + \lambda/2)$. V najlepšom prípade (hodnota existuje priamo na kľúči) je $O(1)$, v najhoršom prípade (traverzovanie zoznamom až na koniec alebo nenájdenie prvku) je to $O(1+\lambda)$.

V porovnaní samotných algoritmov, sú to rozdielne algoritmy – tzv. Closed hashingu a open hashingu a rozdielne aj pracujú.
Algoritmy open hashingu, ako je aj separate chaining ukladajú kľúče aj v tabuľke, aj mimo tabuľky (zoznam), čo zabraňuje napríklad možnosti cachovania, ktorú closed hashing (probing, double hashing) umožňuje.

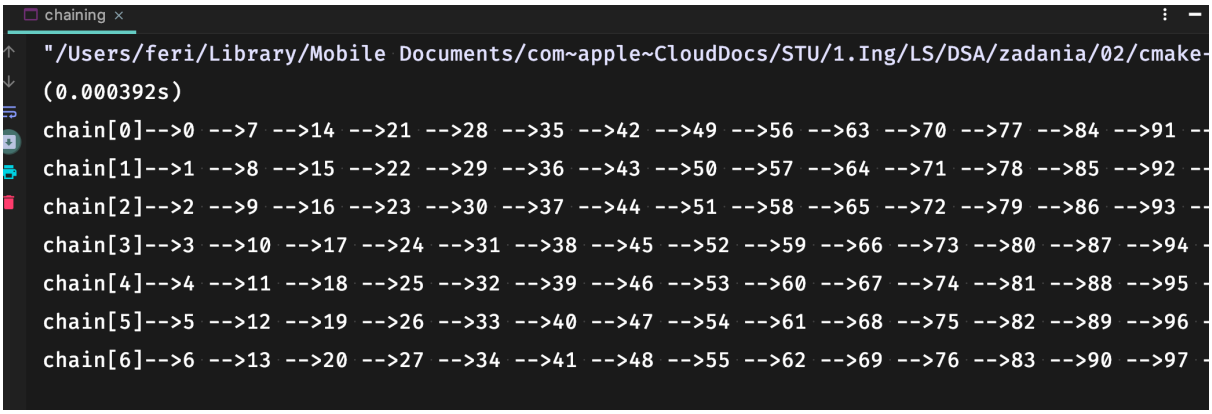
Nevýhodou v reťazeniu je, že obsahuje prázdne „vedierka“, ktoré nikdy využité nebudú, ak na ne neukazujú žiadne kľúče. V prípade closed hashingu to tak nie je, prvky hashovacej tabuľky sú využívané, aj keď na ne žiadny kľúč neukazuje (priamo).

Problémom skúšania – hlavne lineárneho je nemožnosť reálneho vymazania prvku z tabuľky – Vytvorila by sa tak medzera medzi jednotlivými prvkami. Dalo by sa to riešiť buď časovo náročným presúvaním zvyšku clustra, alebo označením daného „vedierka“ ako vymazané, čo by neprerušilo cyklus vyhľadávania.

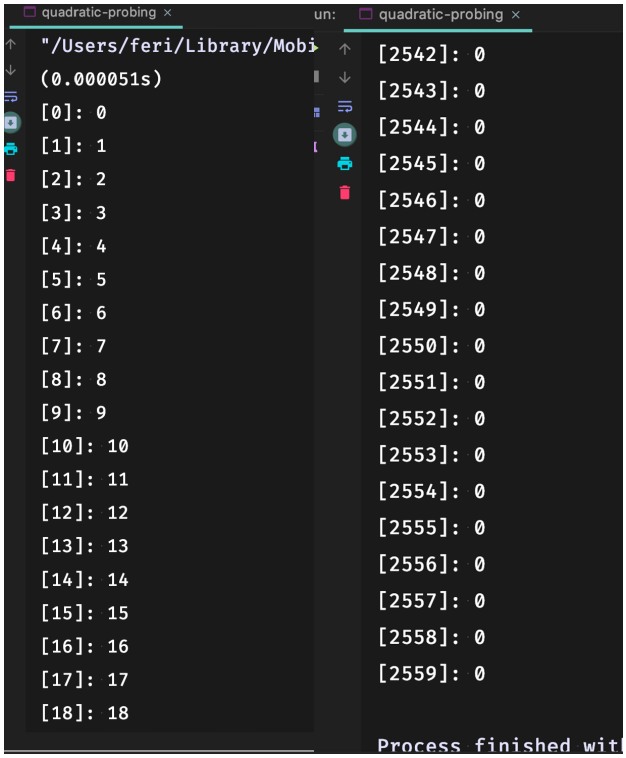
Posledný z testov na porovnanie tvrdenia týchto dvoch rozličných algoritmov sme spravili test vkladania prvku do hashovacej tabuľky, konkrétne tisíc prvkov a odmerali čas.

Tento test nám však príde trošku nešťastný a to z dôvodu, že hashovacia tabuľka získaná z internetu s algoritmom reťazenia mala fixnú veľkosť a nemala implementované zväčšovanie. A takú so zväčšovaním sa nám nepodarilo nájsť.

Pravdepodobne z toho dôvodu nebude tento test objektívny, i keď na ňom vidíme že vkladanie tisícky prvkov do tabuľky s reťazením trvalo niekoľkonásobok viac času ako samotnému kvadratickému skúšaniu. Problémom však je že v prípade kvadratického skúšania zväčšovanie tabuľky dosiahlo až veľkosť 2559 prázdnych, nevyužitých „vedierok“.



Obrázok 21: Test vkladania tisíc prvkov do tabuľky s reťazením



Obrázok 22: Test vkladania tisíc prvkov do tabuľky s kvadratickým skúšaním

Zhodnotenie

Toto cvičenie ma naučilo veľa hlavne o hashovacích tabuľkách, ich typy implementácií, ktoré som bol nútený si viac naštudovať na internete, aby som neskôr mohol implementovať, čo ma veľmi bavilo v následnej implementácií - či už binárnych vyhľadávacích stromoch alebo už spomínaných hashovacích tabuľkách.
Nakoľko prevažne pracujem vo vyšších programovacích jazykoch v ktorých sú tieto štruktúry naimplementované, je veľmi dobré vedieť základy, ako tieto štruktúry fungujú a nemusím sa na ne teda už pozerať ako na "black-box".

Referencie

BARI, A. *AVL Tree - Insertion and Rotations.* [cit. 12.04.2020]. Dostupné na internete: https://www.youtube.com/watch?v=jDM6_TnYIqE

BARI, A. *Hashing Technique – Simplified*. [cit. 12.04.2020]. Dostupné na internete: https://www.youtube.com/watch?v=mFY0J5W8Udk

GATEVIDYALAY.COM. *Separate chaining vs. Open Addressing.* [cit. 12.04.2020]. Dostupné na internete: https://www.gatevidyalay.com/tag/difference-between-linear-probing-and-quadratic-probing/

LOG2BASE2.COM. *Open Hashing.* [cit. 12.04.2020]. Dostupné na internete: https://www.log2base2.com/algorithms/searching/open-hashing.html

STEPIK.ORG. *Hash Table and Hash Map.* [cit. 12.04.2020]. Dostupné na internete: https://stepik.org/lesson/31445/step/7

UNIVERSITY OF MARYLAND, BALTIMORE COUNTY. *Red Black Tree Practice Problems.* [cit. 12.04.2020]. Dostupné na internete: https://www.csee.umbc.edu/courses/undergraduate/341/spring04/hood/notes/red_black/

UNIVERSITY OF SAN FRANCISCO. *Visualization of Red/Black Tree.* [cit. 12.04.2020]. Dostupné na internete: https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/RedBlack.html

UNIVERSITY OF SAN FRANCISCO. *Visualization of AVL Tree.* [cit. 12.04.2020]. Dostupné na internete: https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html