Histoire du transport optimal

Maël COLIN

2025

Intro :

Ce document a pour but de raconter l'évolution de la théorie du transport, de sa naissance, aux recherches encore en cours. Ce document ne possède donc pas de contenue mathématiques au sens théorique, cependant, il nécessite tout de même certaines connaissances en mathématiques (Bac +2). Pour ceux intéressé, j'ai également réalisé un document théorique portant sur le transport optimal dans le cas discret.

Sommaire :

1 - Problème de Monge

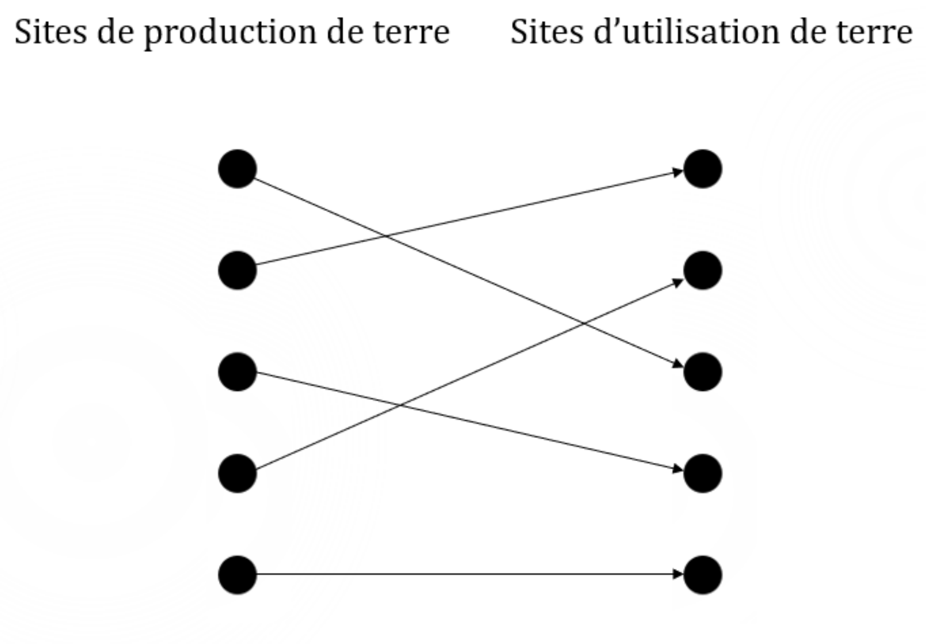
2 - Formulation de Kantorovitch et théorèmes de Birkhoff/Von Neumann

3 – Théorème de Brenier-McCann

4 – Aujourd'hui

1 - Problème de Monge

Historiquement, la théorie du transport nait en 1781 suite à la publication de *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais par G. Monge* pour les conquêtes Napoléoniennes. Dans le mémoire, le mathématicien associe, 1 à 1, des lieux de production de terre, à des lieux d'utilisations de terre. Soit pour exemple :

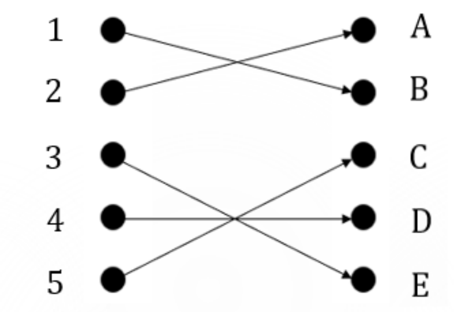


Le mathématicien cherche alors à minimiser le coût total des déplacements des tas de terre entre les sites. Ce problème d’optimisation est alors appelé « Problème de Monge ». Rapidement, Monge fait face à un problème majeur, une grande difficulté à trouver une solution. Le problème tombe alors plus ou moins dans l’oubli durant 150 ans.

2 – Formulation de Kantorovitch et théorèmes de Birkhoff/Von Neumann

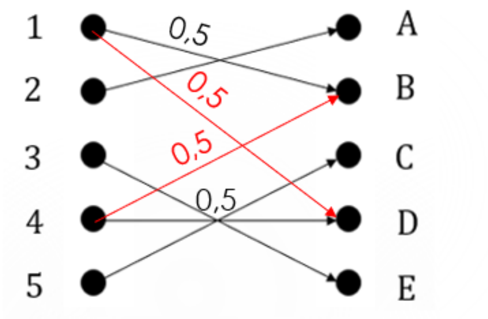
Depuis l’opération Barbarossa lancé le 22 juin 1941, l’URSS est en guerre contre l’Allemagne. C’est dans ce contexte que l’économiste Kantorovitch reçoit la tache de trouver une méthode efficace pour optimiser le ravitaillement des troupes. Kantorovitch a alors l’idée, d’au lieu d’envoyer chaque tas de terre à un unique site d’utilisation, de diviser le tas de terre en parties pour pouvoir l’envoyer chaque partie à un site d’utilisation. Ainsi, la nouvelle formulation du problème, dite de Kantorovitch, est modélisable par des matrices bistochastiques qui sont des matrices de coefficients positifs et dont la somme des coefficients de chacune de leurs lignes/colonnes vaut 1, alors que le problème de Monge est modélisable par des matrices de permutation qui sont des matrices possédant uniquement comme coefficients 1 et 0 et possédant un unique 1 sur chacune de leurs lignes/colonnes. Soit pour illustrer :

Formulation de Monge



$$\begin{array}{c|ccccc|} & A & B & C & D & E \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Formulation de Kantorovitch



$$\begin{array}{c|ccccc|} & A & B & C & D & E \\ 1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Ainsi avec le problème de Monge, le site de production 1 envoie entièrement le tas de terre sur le site d'utilisation B tandis qu'avec la formulation de Kantorovitch, le site de production 1 envoie la moitié du tas de terre sur le site d'utilisation B et l'autre moitié sur le site d'utilisation D

Ainsi, la formulation de Kantorovitch et le problème de Monge sont similaire, seul leurs ensembles de solutions changent, un sous-ensemble de l'ensemble des matrices de permutations pour le problème de Monge, un sous-ensemble de l'ensemble des matrices bistochastiques pour la formulation de Kantorovitch :

Formulation de Monge $\qquad$ Formulation de Kantorovitch

$$\min_{P \in P_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} c_{i,j} \longrightarrow \min_{P \in B_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} c_{i,j}$$

Avec :
n : Le nombre de sites de production de terre
P_n : L'ensemble des matrices de permutation
B_n: L'ensemble des matrices bistochastiques
$c_{i,j}$: Le coût de transport du lieu de production i au lieu d'utilisation j
$p_{i,j}$: La quantité de terre déplacée du lieu de production i au lieu d'utilisation j

L'ensemble des matrices de permutations étant inclue dans l'ensemble des matrices bistochastiques, l'ensemble de solution de la formulation de Kantorovitch est plus grand que l'ensemble de solution du problème de Monge, cependant, il est également plus simple. En effet, contrairement à l'ensemble des matrices de permutations, l'ensemble des matrices bistochastiques est un compact convexe. En utilisant cette propriété, Kantorovitch arrive à prouver l'existence d'une solution à sa formulation.

Pour la petite anecdote, vous avez sans doute appris en cours d'Histoire au collège que si l'URSS a gagné la bataille de Stalingrad (juillet 1942 – février 1943) c'est, en partie , grâce aux méthodes de ravitaillement très développé des soviétiques. Ces méthodes se basaient grandement sur les travaux de transport optimal de Kantorovitch.

A ce moment rien ne prouve qu'une solution de la formulation de Monge est solution du problème de Monge, ni même qu'il existe bien une solution au problème de Monge. Cependant , en 1946 , Birkhoff, prouve à l'aide du théorème souvent appelé théorème de Birkhoff/Von Neumann (à ne pas confondre avec les théorèmes ergodiques de Birkhoff et Von Neumann qui n'ont rien à voir avec le transport optimal) qu'une solution de la formulation de Kantorovitch est également solution du problème de Monge.

3- Théorème de Brenier-McCann

Dans les années 1990, le mathématicien Brenier prouve que dans certains cas et sous certaines hypothèses faibles, le problème de transport optimal possède une unique solution. De plus, l'application optimal correspond au gradient d'une fonction convexe. Ce nouveau théorème permet alors de faire un lien entre la théorie du transport et le calcul différentiel entrainant de nombreuses découvertes.

4 – Aujourd'hui

Depuis le théorème de Brenier-McCann, la recherche à propos du transport optimal n'a jamais cessé. Le transport optimal sert même dans différent domaines. En imagerie numérique, il est possible de réaliser simplement un transfert de couleur entre deux images à l'aide du transport optimal. Pour cela, on considère les pixels de la $1^{ère}$ image comme des site de production de matière et les pixels de la seconde images comme des sites d'utilisation de matière. La matière transportée de la $1^{ère}$ image sur la seconde est alors les couleurs de la $1^{ère}$ image.

Le transport optimal est également très utilisé comme moyen de comparaison. En effet, calculer la distance entre deux sites permet de déterminer s'ils sont plus ou moins proche l'un de l'autre. Pour la distance euclidienne cette proximité est géographique mais pour d'autres distances, cette proximité peut être de genre différent. Il est alors nécessaire pour chacun des cas suivant de définir une distance adéquate (la distance euclidienne est tout de même souvent utilisée car assez simple) . Ainsi il est possible de de comparer 2 cellules en calculant à l'aide du transport optimal la différence entre les caractéristiques qu'elles possèdent. Le transport optimal permet également de comparer les mots entre deux phrases. Le transport optimal est aussi utile pour la création de modèles en trading. Enfin, le transport optimal est très utilisé pour l'étude d'histogramme.

Si vous voyez une coquille, merci de me prévenir au mail : mcolin.maths@gmail.com