ЛИСТОЧЕК ПО АЛГЕБРЕ-1

МКН СПбГУ, 1 курс, 2024–2025

Сдавать можно до 25.10.2024

Каждая задача (или пункт) имеет указанный в скобках вес от 1 до 3, соответствующий ее сложности.

Задача 1. (1) Докажите, что любое подкольцо с единицей в поле рациональных чисел является евклидовым.

Задача 2. (2) Для коммутативного кольца R рассмотрим его «удвоение» $R^{(2)}$: множество $R \times R$ с покомпонентным сложением, где умножение задано по формуле $(a,b)\cdot(c,d) = (ac+bd, ad+bc)$. Выясните, какие из следующих колец изоморфны:

$$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \text{ и } \mathbb{Q}^{(2)}; \quad \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \text{ и } \mathbb{Z}^{(2)}.$$

Задача 3. (3) Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ — область главных идеалов.

Задача 4. Пусть R — область целостности, а $f : R\setminus\{0\} \to \mathbb{Z}$ — не (тождественно) нулевая функция, такая, что для любых $x, y \in R \setminus \{0\}$ выполнено $f(xy) = f(x) + f(y)$ и $f(x+y) \geq \min(f(x), f(y))$ (если $x + y \neq 0$).

(a) (2) Докажите, что f однозначно продолжается до функции $f_Q \setminus \{0\} : Q \to \mathbb{Z}$, для которой выполнены аналогичные свойства; здесь Q — поле частных R.

(b) (2) Докажите, что $Q_f = \{x \in Q,\ f_Q \geq 0\}$ — *локальная* область главных идеалов (максимальный идеал единственен), и все его ненулевые идеалы имеют вид $\{x \in Q,\ f_Q \geq i\}$, где $i \geq 0$.
Q_f называется *кольцом дискретного нормирования.*

Задача 5. Для $p \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\mathbb{Z}_p$ множество всех целочисленных последовательностей $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots)$ таких, что $0 \leqslant a^{(n)} \leqslant p^n - 1$ и $a^{(m)} \equiv a^{(n)} \pmod{p^n}$ для любых натуральных $m > n$. Докажите, что:

(a) (1) это множество замкнуто относительно операций почленного сложения и умножения последовательностей, где n-е компоненты складываются и умножаются по модулю p^n и, будучи наделенным этими операциями, оказывается коммутативным кольцом с единицей, содержащим кольцо целых чисел;

(b) (2) если p — простое целое число, кольцо $\mathbb{Z}_p$ является областью целостности с единственным (с точностью до ассоциированности) простым элементом $p \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$.

(c) (2) Определим p-адическую запись числа $a \in \mathbb{Z}_p$ как последовательность чисел $b_i = (a^{(i)} - a^{(i-1)})/p^{i-1}$; здесь мы берем $i \in \mathbb{N}$ и полагаем $a^{(0)} = 0$.
Докажите, что все b_i — целые неотрицательные числа от 0 до $p-1$, и p-адическая запись $a \in \mathbb{Z}_p$ периодична (возможно, с предпериодом — то есть, начиная с некоторого места) тогда и только тогда, когда найдутся целые $m, n \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ такие, что $na = m$.

(d) (1) Докажите, что $\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_{25} \cong \mathbb{Z}_5$.

(e) (3) Пусть $p > 2$. Докажите, что гомоморфизм факторизации $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ существует и индуцирует изоморфизм *подгруппы кручения* $\operatorname{Tor}\mathbb{Z}_p^* \subset \mathbb{Z}_p^*$ (берем все $z \in \mathbb{Z}_p^*$ *конечного порядка*, т.е., существует $k > 0$ т.ч. $z^k = 1$) с группой $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

(f) (2) Пусть μ_{p^∞} — абелева группа по умножению, состоящая из всех комплексных чисел z (на единичной окружности), таких, что $z^{p^k} = 1$ при некотором натуральном k. Докажите, что кольцо эндоморфизмов абелевой группы μ_{p^∞} изоморфно $\mathbb{Z}_p$.

Задача 6. (1) Опишите все $a, b \in \mathbb{Z}$ такие, что $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + ax + b\rangle \cong \mathbb{C}$.

Задача 7. (2) Для ассоциативного с единицей кольца R и $a, b \in R$ известно, что $1 - ab$ обратим. Докажите, что $1 - ba$ обратим.

Задача 8. (2) Пусть R — область главных идеалов и $K \supset R$ — поле. Докажите, что если элемент $k \in K$ является корнем унитарного многочлена с коэффициентами из R (т.е. $\sum_{i=0}^n a_i k^i = 0$, $a_n = 1$, а $a_i \in R$) и $kr \in R$ для некоторого $r \in R \setminus \{0\}$, то $k \in R$.

Задача 9. (3) Доказать, что для любого идеала I в квадратичном кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ существуют a, k, n такие, что $a^2 - d$ делится на n и верно равенство

$$I = \mathbb{Z}kn + \mathbb{Z}k(a + \sqrt{d}).$$