# Теория с лекций. Алгебра

# Содержание

# 1 Дискретная математика

***Преподаватель: Пузырина Светлана Александровна***
***s.puzynina@gmail.com***

## 1.1 Булевые функции

**Булевая функция** - это функция вида:
f: $(0;1)^n \to (0,1)$ Иными словами сопоставляет кажой n-элементной последовательности значение 1 или 0.
Всего для n переменных существует $2^{2^n}$ булевых функций.
Булевую функцию можно задавать таблицей истинности или же вектором истинности.
**Базис** - некоторое подмножество булевых функций.
***Определение.***
Формула над базисом F определяется по индукции.
База: всякая функция $f \in F$ является формулой над F.
Индуктивный переход: если $f(x_1, x_2 ... x_n)$ - формула над базисом F, а $\phi_1, \phi_2 ... \phi_n$ - либо формулы над F, либо переменные, но тогда $f(\phi_1, \phi_2 ... \phi_n)$ формула над базисом F.
Пример: $(x \bigvee y) \bigwedge (x \bigvee z)$ - формула над базисом $(\bigvee, \bigwedge)$
*Введем удобное обозначение:*

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \sigma = 1 \\ \ulcorner x, \sigma = 0 \end{cases}$$

**Простой конъюнкцией** называется конъюнкция одной или нескольких переменных (их отрицаний), где при этом каждая переменная встречается лишь один раз.
**Дезъюнктивно нормальная форма (ДНФ)** - представление БФ в виде дизъюнкции простых конъюнкций.
Если в каждой конъюнкции учавсвуют все переменные, то это **С(оверщенная)ДНФ**.
*Как построить СДНФ?*
В таблице истинности отмечаем все наборы переменных, для которых БФ дает значение 1. Для каждого такого набора $(\sigma_1, ... \sigma_n)$ берем конъюнкцию $(x_1^{\sigma_1}, ... x_n^{\sigma_n})$. Включаем в СДНФ все полученные конъюнкции:
$f(x_1 ... x_n) = \bigwedge (x_1^{\sigma_1}, ... x_n^{\sigma_n})$
*Теорема.*
Для любой БФ (не тождественной 0) существует СДНФ.
**Аналогично определим СКНФ:**
Простой дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных (их отриц), причем каждая переменная встречается не более одного раза.
КНФ - представление БФ в виде конъюнкции простых дизъюнкции.
Если в каждой дизъюнкции все переменные - то это СКНФ.
Строится аналогично.

Причем вопрос о разлодении всех функций в виде СКНФ до сих пор открыт.
**Многочлен жегалкина.**
Сумма по мудулю 2 конъюнкций переменных (допускается слагаемое 1) без повторения слагаемых, а так же константа 0.
Общий вид:
$f(x_1, x_2 ..., x_n) = a \bigoplus a_{i_1 i_2 ... . i_k} * x_{i1} * ... * x_{ik2}$
Зачастую константу 0 не считают полиномом Жегалкина, т.е. в полиноме допускаются лишь константа 1 и сложение с дизъюнкцией.
*Теорема.*
Для каждой функцией существует единственное представление многочленом Жегалкина.
Док-во.
*Существование.* Преобразуем ДНФ:
Замена дизъюнкции: $x \wedge y = x \oplus y \oplus x \wedge y$
Замена отрицаний: $!x = x \oplus 1$
Раскрываем скобки: $(x \oplus y) \vee z = (x \vee z) \oplus (x \vee z)$
Сокращаем: $x \oplus x = 0$
*Единственнность:* всего многочленов $2^{2^n}$, столько же сколько и БФ, а значит такое представление единственное
**Замкнутые классы.** F - множество БФ замыкание $\llcorner F \lrcorner$ (относительно суперпозиции) - это множество всех булевых функций, представимых формулой над F.
**Замкнутый класс** - это класс равный своему замыканию.
**Некоторые замкнутые классы:**

1. $T_0$ - класс функций сохраняющих 0. $f(0...0) = 0$
2. $T_1$ - класс функций сохраняющих 1. $f(1...1) = 1$
3. Двойственные функции к f: $f * (x_1.....x_n) =!f(!x_1.....!x_n)$
4. Частичный порядок на множестве двоичных наборов: $(b_1, ....b_n) \leq (c_1, .....c_n)$, если $b_i \leq c_i$.
   f - монотонная функция, если $f(\alpha) \leq f(\beta)$, если $\alpha \leq \beta$
5. Линейные функции - такие, что их многочлен Жегалкина не использует конъюнкций, а так же константа 0.

## 1.2 Теорема Пост.

**Критерий полноты сисемы функций.**
Множество БФ F называется полной системой, если все булевые функции выразимы формулами над этим базисом.
**Теорема.** Множество булевых функций F является полным т и т.т, когда F не содержится ни в одном из пяти классов $T_0, T_1, S, M, L$. 1) Если содержится, то его замыкание также содержится в этом классе. 2) Если не

содержится, то есть функции не из данных классов (аналогично).
Пусть $f_0$