Теория с лекций. МатАн

Содержание

1 Мат. Анализ

1.1 Описание $\mathbb{R}$ чисел

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $a + 0 = 0 + a = a$
3. $a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$
5. $\mathbb{R}$ 0 - абелева группа
6. $(ab)c = a(bc)$
7. $aa^{-1} = 1$
8. $a * 1 = 1 * a = a$
9. $ab = ba$
   Теоремка. Докажем, что $0 > 1$
   Предположим, что $0 \geq 1 \Leftrightarrow -1 \geq 0 \Leftrightarrow (-1)(-1) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 0$
   Акиома Архимеда.
   $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$
   Следствие: $x \geq 0 \wedge x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x = 0$

Аксиома полноты (Кантора-Дедекинда)
$X, Y -$ непустые, $\in \mathbb{R}$:
$\forall x \in X, y \in Y, x \leq y \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$.
Это порождает, например, $\sqrt{2}$
X - ограничено сверху, если $\exists x_o, \forall x \in X : x \leq x_0$. Аналогично определяется ограничение снизу. x_0 - верхняя грань.
Наименьшая верхняя грань - супремум. Наибольшая меньшая грань - инфинум.

1.2 Теорема о вложенных промежутках

$(a; b)$ - интервал или промежуток. По определению:
$\forall c \in (a, b) : a < c < b$ - для строго так же (лень вводить)
Лемма о вложенных промежутках.
Пусть $I_1, I_2, ...; I_i = [a_i; b_i]$
$I_{i+1} \in I_i$
Тогда существует такое c, что $c \in \cap I$

1.3 Функция и последовательность

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

$\forall x \in X : f(x) \in Y$
$x, y-$числа в $\mathbb{R}$
$f-$функция
Если Y - числа,то f - функционал
$\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$ - числовая последовательность.
Будем говорить, что послед имеет предел в точке a:
$\forall \epsilon > 0; \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$
Обозначаем как: $\lim\limits_{x \to x_0} x_n = a$
Определени предпоследовательности и предела на бесконечность - очевидна.
Теорема.
Если x_n - ограничена сверху и снизу, то она сходится.
Теорема Веерштрасса о монотонной последовательности.
$x_n \uparrow, \forall n, \exists c; x \leq c; \forall n \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to \infty} x_n$

1.4 Пределы послеодовательности, разные определения

$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in X; x \neq x_0 : 0 < |x - x_0| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : 0 < |x - x_0| < \delta; |f(x) - a| < \varepsilon$
Предел по Коши (первое определение непонятно к чему тут, просто лектор его дал, смирись)
Теперь предел по Гейне:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \stackrel{\text{def}}{=} \forall x_n \in X; \lim\limits_{x \to \infty} x_n = x_0 : f(x_n) = a$
Доказательство равносильности определений:
(to be continued...)

1.5 Свойства пределов и непрерывность.

Опр непрерывности в точке x_0 :
$x, x_0 \in X : \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Арифметические действия с пределами:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) * \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) * g(x)$
3. $\frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}; g(x_0) \neq 0$

Доказательство первого:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0; \exists\delta_f>0: 0<|x-x_0|<\delta: |f(x)-a|<\varepsilon$
Аналогично для $g(x)$. Выберем $\delta=min(\delta_f(\frac{\varepsilon}{2}); \delta_g(\frac{\varepsilon}{2}))$.
Тогда будет справедливо следующее соотношение:
$|f(x)+g(x)-a-b|\leq|f(x)-a|+|g(x)-b|<2*\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
Аналогично с двумя другими свойствами.
Односторонний предел в точке x_0 определяется как:
$\exists \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0: \exists\delta>0: x_0\delta<x<x_0: |f(x)-a|<\varepsilon$
Пределлльный переход в неравенствах:
$g(x)\leq f(x) \Leftrightarrow b\leq a$
Доказательство:
Пусть $b>a: min(\delta_f(\frac{b-a}{2}); \delta_g(\frac{b-a}{2})=\delta: 0<|x-x_0|<\delta:$
$|f(x)-a|<\frac{b-a}{2}; |f(x)-b|<\frac{b-a}{2}$ Получили противоречие.
Теорема о двух копах:
$h,g,f\in D_f: f(x)\leq g(x)\leq h(x)$
Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a \Leftarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$
Доказательство:
$\delta=min(\delta_1(\varepsilon);\delta_2(\varepsilon)): |x-x_0|<\delta: f(x),g(x)\in(a-\varepsilon;a+\varepsilon)\Rightarrow g(x)\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$
Аналогично теорема о копах для последовательностей.

1.6 Сходимость в себе

Опр. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \forall\varepsilon>0; \exists N: \forall n,m>N: |x-x_m|<\varepsilon$
Теорема.
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - сходится$\Leftrightarrow$ $\{x`_n\}_{n=1}^{\infty}$ Доказательство: Прямое утверждение очевидно.
Докажем обратное: $\varepsilon=\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}: |x_n-x_m|<\frac{1}{2^n}$.
Зафиксируем n. Тогда любые точки лежат $(x_n-\frac{1}{2^n}; x_n+\frac{1}{2^n})-I_n$
$|I_n|\to 0, n\to\infty$
Добъемся вложения интервалов $J_k=\cap I_i; J_k\neq\oslash\Rightarrow J_k$ - интервал. По построению $J_k+1\in J_k.\exists a\in J_i\forall i: a$-кандидат на предел. (воспользовавшись аксиомой полноты)
$\forall\varepsilon>0; \exists N\forall n>N: |x_n-a|<\varepsilon$
Аналогично можно определить сходимость функций в себе.
Теорема
f(x) - сходится в себе $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
Далее рассмотрим гармонический ряд.
Доказательство его расходимости очевидное.
Аналогично рассмотрим $\xi(n)$ и получим, что при n>1 она сходится. Доказательство тривиально.

1.7 Непрерывность функций

Непрерывность функции мы уже определяли, определим теперь разрыв I и II рода.
Разрыв I рода:
$\exists \lim\limits_{x \to -x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a$
Опр. x_0 - устранимая особенность $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Разрыв II рода. $\lim\limits_{x \to -x_0} f(x) \neq f(x_0); \lim\limits_{x \to -x_0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x); a \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$
Свойство непрерывности:
f, g - непрерывны на $E_{f,g}$

1. $\alpha f + g\beta$ - непрерывны там же
2. fg - непрерывны там же
3. $g(x) \neq 0 \forall x \in D_f : \frac{f}{g}$- непрерывны
4. $f \o g(x)$ -непрерывны

Док-во ласт утверждения:
x_0 - предельная точка $g(x); f$ - непрерывна в $g(x_0) \Rightarrow f(g(x))$- непрерывна
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : 0 < |x - x_0| < \delta : |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_1 : 0 < |g(x) - g(x_0)| < \delta_1 : |f(y) - f(g(x_0))| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 : |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$
Мини-следствия:
1) $P(x) = \Sigma a_i x^i$ - непрерывна
2) $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; Q(x) \neq 0$ - непрерывна
Свойства:
Теорема Веерштрасса (I)
f(x) - непрерывна на [a,b], значит f - ограничена.
Доказательство.
Пусть f(x) - неограничена на промежутке. Тогда:
$\forall n \exists x_n : f(x_n) > n$
$x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = \infty$
Теорема Веерштрасса (II)
Пусть B непрерывна на [a,b], тогда она достигает своего максимума и минимума, т.е.: $\exists x_0 : f(x_0) \geq f(x), \forall x \in [a, b]$
$\exists y_0 : f(y_0) \leq f(x), \forall y \in [a, b]$
Посмотри на образ x=[a,b]- оно ограничено.
Если X - ограничена сверху $\Rightarrow \exists x_0 : Sup(X) = x_0$
Если $x_0 \in X \Rightarrow \exists y_0 : y_0 = f(x_0)$
Если нет, то $\exists y_n \to y_0, y_n \in Y; y_n = f(x_n) : \exists x_n : \{x_n\}^\infty, x_{n_k} \to x_0$
По непрерывности: $f(x_{n_k}) \to f(x_0) = y_0| \Rightarrow y_0 \in Y$
Теорема
f(x) непрерывна на [a,b] если $\forall c \in [f(a), f(b)]; \exists x_0 : f(x_0) = c; f(a) \leq f(b)$
Осуществляем бин поиск точки с. Откуда и получаем непрерывность.

Теорема.
f - непрерывна на [a,b] и f - инъективна, значит либо f(x)возрастает, либо убывает.
Посмотрим на f(a) и f(b), $a \neq b \Rightarrow a > b \wedge a < b$.

$$\begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ x_1 < x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Значит, если она вначале убывает, потом возрастает, то будет два значения, чуть больших минимального, что противоречит инъективности.
Лемма
Построим Канторову лестницу. Зададим функции следующим образом. f(0) = 0; f(1) = 1. Будем делить отрезок на 3 равные части, на средней из них, она равна среднему арифметическому от значений на концах отрезка. Таким образом получим непрерывную возрастающую функциию.
Можем задать ее так же следующим образом. В средний промежуток попадают числа, которые в троичной системе имееют единицу в разряде.

1.8 Производная

Введем понятие o и O
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
$f(x) = O(g(x)); x \to x_0 : \exists c : |f(x)| \leq c|g(x)| x \in \delta$ окрестности.
$f(x) = f(x_0) + o(1)$ - непрерывна.
$f(x) = A + Bx + o(x - x_0) x \to x_0;$
$A + Bx = f(x_0) + D(x - x_0); f(x) = f(x_0) + D(x - x_0) + o(x - x_0)$
Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = D; D = f`;$ $f(x) = f(x_0) + f`(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$
Св-ва производной:

1. $(\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f`(x) + \beta g`(x)$
2. $(f(x) * g(x))` = f`(x) * g(x) + g`(x) * f(x)$
3. $(\frac{f(x)}{g(x)})` = \frac{f`(x) * g(x) - g`(x) * f(x)}{g^2(x)}$
4. $f(g(x))` = f`(g(x)) * g`(x)$