Теория с лекций. Алгебра

Содержание

1 Алгебра

Рекомендуемая литература

1. Кострикин "Основа алгебры"(1том)
2. Винберг "Курс алгебры"
3. Лэнг "Алгебра"
4. Сборник задач по алгебре под редакцией Кострикина
5. Сборник задач Фадеева и Соминского

1.1 Кольцо

Пусть A - некоторое непустое множество. Пусть на нем даны операции: $(a, b) \to (a + b); (a, b) \to (ab); a, b \in A$
Дадим определение операциям сложения и умножения:

1. $\forall a, b, c \in A : a + (b + c) = (a + b) + c$ - ассоциативность по сложению
2. $\exists 0 \in A, \forall a \in A : a + 0 = 0 + a = a$
3. $\forall a \in A, \exists b \in A : a + b = b + a = 0$ b - противополжный a элемент
   Удостоверимся в том, что 0 - единственный:
   $$\begin{cases} a + 0 = o + a = a \\ a + 0` = 0` + a = a \\ \forall a \in A \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0` + 0 = o + 0` = 0` \\ 0 + 0` = 0` + 0 = 0 \\ \forall a \in A \end{cases} \leftrightarrow 0 = 0`$$
4. $\forall a, b \in A : a + b = b + a$ - коммутативность по сложению
5. $\forall a, b, c \in A : (a + b)c = ac + bc = bc + ac$

Множество, которое удовлетворяет этим аксиомам - кольцо в широком смысле. В нашел курсе мы будем рассматривать более частный вариант кольца, добавив еще несколько определений:

1. $\forall a, b \in A : ab = bc$ - коммутативность по умножению
2. $\forall a, b, c \in A : a(bc) = (ab)c$ - ассоциативность по умножению
3. $\forall a \in A : a * 1 = 1 * a = a$

Есть кольцо где выполняется еще одна аксиома:
$\forall a \in A, a \neq 0, \exists b \in A : ab = ba = 1$
Если выполнены все эти аксиомы, то такое множество называется полем.
Примеры колец:

1. $\mathbb{Z}$
2. A $= 0$
3. $d \in \mathbb{N}, \sqrt{d} \neq \mathbb{Z}$, образующие множества $[\sqrt{b}]\mathbb{Z}$

Примеры полей:

1. $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{C}$

Если есть 2 кольца A,B, то мы можем образовать их произведение и сложение следующим образом:

1. $(a_1; b_1) + (a_2; b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$
2. $(a_1; b_1) * (a_2; b_2) = (a_1 * a_2; b_1 * b_2)$

Мы можем аналогично задать произведение $A_1 * A_2 .... * A_n$:
Доказательство этого утверждения проведем по индукции (в данном случае свойства ассоциативности):
База: при n =3 - доказано по аксиоме.
Переход: Есть произведение $(x_1 ... x_k)(x_{k-1} ... x_n)$.
Введем понятие левонормированного произведения: $(...(x_1 x_2) x_3) ..... x_n)$ - левонормированное произведение. Такое произведение можно раскрыть с помощью ассоциативности умножения (и привести любое произведение к такому виду).
Тогда если в левой скобки будет 1 элемент, то мы получили еще одно левонормированное проивзведение и победили.
Если же нет, то тогда рассмотрим две скобки. К правой применим свойство ассоциативности. Тогда вновь получим случай для n-1, т.е мы победили.
Аналогично для сложения.
Докажем еще одно свойство: $(-a)b = -ab$
Прибавим к обеим частям ab:
$ab + (-a)b = ab + (-ab) \leftrightarrow b(a + (-a)) =$

1.2 Понятние идеала для кольца.

Пусть I - непустое множество A, при этом $x, y \in I \to x + y \in I; x \in I, a \in A :$ $ax \in I$
Если $1 \in I \Rightarrow \forall a \in A : a \in I$
Такой идеал называется единичным.
0 - всегда принадлежит иделу, докажем это.
$x \in I \Rightarrow x * (-1) = -x \in I; x + (-x) = 0 \in I$
0 - нулевой идеал
Найдем все иделы целых чисел. Возьмем $k \in \mathbb{Z}, k\mathbb{Z}$ - это идеал. Причем

других идеалов нет.
Теорема.
Для любого идела кольца $\mathbb{Z}$ имеет вид $k\mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$. Если идеал нулевой, то теорема доказана. Теперь предположим, что идеал не нулевой. Тогда в нем точно будут положительные числа. Пусть k - наименьшее положительное число в I. Тогда $k\mathbb{Z} \in I$.

Возьмем $x \in \mathbb{Z}$. Докажем, что $x \vdots k$.
Поделим x на k с остатком. $x = kq + r \Rightarrow r = x - kq; r \in I$. Но r меньше k, противоречие! Так что r $= 0$.
Теорема доказана
Ненулевое кольцо - область целостности/область/целостное кольцо, если $\forall a, b \neq 0 : ab \neq 0$
Если $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
Приме. $\mathbb{Z}$, любое поле.
Область целостности, в котором $\forall$ идеал главный называется кольцом главных идеалов. Идеал главный, если он имеет вид $(a), a \in A$. Поля можно охарактеризовать как кольца имеющие 2 главных идела (0) и (1). Фактор кольцо по классу.
A - кольцо, I - идел в A.
A/I - фактор кольцо по иделу I.
$x \in A, x + I = \{x + i, i \in I\}$ - класс эл-та x относ I
$\{x + I, x \in A\}$ - мн-во всех классовю.
Пример. Любые два класса либо не пересекаются, либо совпадают.
$c \in (x + I) \cup (y + I); c = x + i_1 = y + i_2, i_3 = x - y = i_1 - i_2 \in I$ Пусть C_1, C_2 - два класса. Докажем, что:
$C_1 + C_2 = (x_1 + x_2) + I = (y_1 + y_2) + I;$
$C_1 = x_1 + I = y_1 + I; C_2 = x_2 + I = y_2 + I$
$(y_1 + y_2) - (x_1 + x_2) = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) \in I$
$C_1C_2 = x_1x_2 + I = y_1y_2 + I;$
$y_1y_2 - x_1x_2 \in I; y_1y_2 - x_1x_2 = y_1(y_2 - x_2) - y_2(y_1 - x_2) \in I$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0 + n\mathbb{Z}, ...(n-1) + n\mathbb{Z}\}, n$ классов,$n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, n > 0$
Изоморфизм колец.
Гомоморфизм колец - пусть A и B - 2 кольца, f:$A \to B$
f - гомоморфизм колец, если выполнены следующие равенства:

1. $\forall a_1, a_2 : f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$
2. $\forall a_1, a_2 : f(a_1a_2) = f(a_1)f(a_2)$
3. $f(1_a) = 1_b$

$f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$
$f(1) = f(1 * 1) = f(1) * f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = 1$
Пример когда это свойство не выполнено: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
Мономорфизм, это гомоморфизм: $\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$
Элиморфизм: $\forall b \in B; \exists a \in A : f(a) = b$
Изоморфизм - аналог биекции.

Операции над множествами.
1) Пересечение: I_i - идеал в A, $\cap I_i$ - идеал в A.
2) Произведение конечного числа идеалов - есть идеал.
3) Сумма конечного числа идеалов - есть идеал.
$\Sigma I_i = \{\Sigma(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\}$, где $\forall \alpha_i \in I_j$
Сумма идеалов - это наименьший по включению идеал, содержащий все идеалы I_i.
Произведение:$\sqcap I_i = \{\Sigma x_1 x_2 ... x_k ; x_i \in I_i\}$
Идеалы I и J - взаимнопросты, если: I+J =(1)
Пример: A - целые числа, и $(9), (8) : 1 = (-1) * 8 + 9 * 1$

1.3 Китайская теорема об остатках (КТО)

A - кольцо, $n > 2, I_1, I_2, ... I_n$ - идеалы кольца, такие что:
$\forall i, ji \neq j : I_i + I_j = (1)$
Тогда существует изоморфизм колец $a/\cap I_i = (A/I_1) \times (A/I_2) \times ...$
Устроенный следующим образом:
Класс элемента $a`(mod \cup I_i) = a`(mod I_1) a`(mod I_2)...$
Проверим, что такое отображение взаимнооднозначно:
1) Корректность: если классы одинаковы $a + \cap I = a` + \cap I \Leftrightarrow a - a` = \cap I \in I$, откуда класс по модулю I_i совпадает с классом по модулю $\cap I_i$.
Проверим на гомоморфизм:
f - гомоморфизм. $a`(mod \cap I_i), b`(mod \cap I_i) : f(a` + b`) = f(a`) + f(b`)$.
По определению отношения: $f(a` + b`) = f(a` + b`(mod I_1), ... a` + b`(mod I_n))$
$f(a`) + f(b`) = (a`(mod I_1), a`(mod I_2), ... + b`(mod I_1), b`(mod I_2) ....)$ - что то же самое.
Аналогично для проивзведения и единичного элемента.
Проверим, что если $a \to a`, b \to b`, a` = b` \Rightarrow a = b$
Откуда наш гомоморфизм - мономорфизм.
$(a`(mod I_1), a`(mod I_2) ....) = (b`(mod I_1), b`(mod I_2), ...)$
$A \to A/I, a \to a`(mod I)$
Равенство покомпонентно, откуда получим:
$a - b \in I_1, I_2, ... \Leftrightarrow a - b \in \cap I_i \Rightarrow a`(mod \cap I_i) = b`(mod \cap I_i)$
Теперь начнем доказательство КТО по индукции:
n=2: $I_1 + I_2 = (1), A/I_1 \cap I_2 \simeq A/I_1 \times A/I_2$ Берём любую пару из п.ч.: $b`(mod I_1); c`(mod I_2)$
$a \in A : a - b \in I_1, a - c \in I_2$
$a = b + i_1 = c + i_2 \Leftrightarrow b - c = i_2 - i_1 ; i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$
$I_1 + I_2 = (1); x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow (b - c)(x_1 + x_2) = (b - c); x_1 \in I_1; x_2 \in I_2$
$x_1(b - c) + x_2(b - c) = (b - c)$
Тогда выберем $i_1 = x_1(b - c); i_2 = x_2(b - c)$
Лемма.
Пусть $I_1, I_2 ... I_n$ - идеалы, такие что $I_1 + I_i = (1), \forall i \geq 2$ Тогда $I_1 + \cap I_i = (1)$
Доказательство:
$x_2, x_3 .... x_n \in I_1, y_i \in I_i : x_i + y_i = 1$
$\sqcap (x_i + y_i) = y_2 y_3 ... y_n \in \cap I_i + (x_2 * y_1 ... + ... x_n y_2 ...) \in I_1 = 1$

Откуда по лемме: $A/\cap I_i \simeq A/I_i \times A/\cap I_i$ Идуктивный переход очевиден.

1.4 Понятие простого и максимального идеала

Простой идеал - это такой идеал, что: $I \neq (1); \forall x, y : xy \in I \Rightarrow x \in I \vee y \in I$
Максимальный идеал - это такой идеал, что: $I \neq (1); I \in J; I \neq J \Rightarrow J = (1)$
Опишем их в конце целых чисел.
Теорема.