Задачи к экзамену по Алгебре

Задача 1

Пусть $p_1, p_2...p_n-$ простые идеалы над A.
$I \subset A$ - идеал. Пусть $I \subset \cup p_i$
Доказать, что:
$\exists i : I \subset p_i$

Задача 2

Доказать, что I - максимальный, значит A/I- поле

Задача 3

Доказать, что если A - евклидово кольцо, с нормой $||||_1$, то на A существует норма:
1) A - евклидово относительно $||||_2$
2)$||ab||_2 \geq ||b||_2; \forall a, b \neq 0$

Задача 4

Кольцо $\mathbb{Z}$ - евклидово, при этом $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ -нет.
Доказать, что:
1)$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ - евклидово
2)$A = \{\frac{a+b\sqrt{3}}{2}\}, a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b(mod 2)$ - евклидово