Задачи к экзамену по Алгебре

Задача 1

Пусть $p_1, p_2 ... p_n -$ простые идеалы над А.
$I \subset A$ - идеал. Пусть $I \subset \cup p_i$
Доказать, что:
$\exists i : I \subset p_i$

Задача 2

Доказать, что I - максимальный, значит A/I- поле

Задача 3

Доказать, что если А - евклидово кольцо, с нормой $||||_1$, то на А существует норма:
1) А - евклидово относительно $||||_2$
2)$||ab||_2 \geq ||b||_2; \forall a, b \neq 0$

Задача 4

Кольцо $\mathbb{Z}$ - евклидово, при этом $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ -нет.
Доказать, что:
1)$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ - евклидово
2)$A = \{\frac{a+b\sqrt{3}}{2}\}, a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b(mod 2)$ - евклидово

Задача 5

Доказать теорему Дирихле в случае:
1)$a = 3; d = 4$
2)$a = 1; d = 4$

Задача 6

1)Доказать, что (3) не простой в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
2)Доказать, что (3) раскалывается в виде произведения двух простых идеалов. Найти эти идеалы.

Задача 7

Док-ать, что $\frac{2+i}{2-i}$ не является степенью единицы

Задача 8

Доказать, что $(x-1)^m - x^m + 1 \vdots (x^2 - x + 1)^2$