Теория с лекций. МатАн

Содержание

1 Мат. Анализ

1.1 Описание $\mathbb{R}$ чисел

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $a + 0 = 0 + a = a$
3. $a + (-a) = 0$
4. $a + b = b + a$
5. $\mathbb{R}$ 0 - абелева группа
6. $(ab)c = a(bc)$
7. $aa^{-1} = 1$
8. $a * 1 = 1 * a = a$
9. $ab = ba$
   Теоремка. Докажем, что $0 > 1$
   Предположим, что $0 \geq 1 \Leftrightarrow -1 \geq 0 \Leftrightarrow (-1)(-1) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 0$
   Акиома Архимеда.
   $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$
   Следствие: $x \geq 0 \wedge x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x = 0$

Аксиома полноты (Кантора-Дедекинда)
$X, Y-$ непустые, $\in \mathbb{R}$:
$\forall x \in X, y \in Y, x \leq y \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y.$
Это порождает, например, $\sqrt{2}$
X - ограничено сверху, если $\exists x_o, \forall x \in X : x \leq x_0$. Аналогично определяется ограничение снизу. x_0 - верхняя грань.
Наименьшая верхняя грань - супремум. Наибольшая меньшая грань - инфинум.

1.2 Теорема о вложенных промежутках

$(a; b)$ - интервал или промежуток. По определению:
$\forall c \in (a, b) : a < c < b$ - для строго так же (лень вводить)
Лемма о вложенных промежутках.
Пусть $I_1, I_2, ...; I_i = [a_i; b_i]$
$I_{i+1} \in I_i$
Тогда существует такое с, что $c \in \cap I$

1.3 Функция и последовательность

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

$\forall x \in X : f(x) \in Y$
$x, y-$числа в $\mathbb{R}$
$f-$функция
Если Y - числа,то f - функционал
$\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$ - числовая последовательность.
Будем говорить, что послед имеет предел в точке а:
$\forall \epsilon > 0; \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon$
Обозначаем как: $\lim\limits_{x \to x_0} x_n = a$
Определени предпоследовательности и предела на бесконечность - очевидна.
Теорема.
Если x_n - ограничена сверху и снизу, то она сходится.
Теорема Веерштрасса о монотонной последовательности.
$x_n \uparrow, \forall n, \exists c; x \leq c; \forall n \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to \infty} x_n$

1.4 Пределы послеодовательности, разные определения

$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in X; x \neq x_0 : 0 < |x - x_0| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta = \delta(\varepsilon) : 0 < |x - x_0| < \delta; |f(x) - a| < \varepsilon$
Предел по Коши (первое определение непонятно к чему тут, просто лектор его дал, смирись)
Теперь предел по Гейне:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \stackrel{\text{def}}{=} \forall x_n \in X; \lim\limits_{x \to \infty} x_n = x_0 : f(x_n) = a$
Доказательство равносильности определений: