

FGI2 Übungen Blatt 1

Oliver Sengpiel, 6322763
Daniel Speck, 6321317
Daniel Krempels, 6YYYYYY

18. Oktober 2014

1.3

1.3.1

$L(A_n)$ als regulärer Ausdruck:

$$\begin{aligned} L(A_n) &= (a^{2i} \cdot d \cdot b^{2i}) + (a^{2i-1} \cdot c \cdot b^{2i-1}) + (a^n \cdot d) + (d) \text{ mit } i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} \\ &= (a^{2i} \cdot d \cdot b^{2i}) + (a^{2i-1} \cdot c \cdot b^{2i-1}) + (a^n \cdot d) \text{ mit } i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} \end{aligned}$$

1.3.2

$L(A_n)$ als Menge:

$i \in \mathbb{N}$

$$L(A_n) = \{a^{2i} \cdot d \cdot b^{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{a^{2i-1} \cdot c \cdot b^{2i-1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{a^n \cdot d\}$$

1.3.3

Sei $M(A_n)$ genau die vom Automaten akzeptierte Sprache.

$L(A_n) \subseteq M(A_n)$:

$L(A_n)$ wird vom Automaten akzeptiert. Wird vom Startzustand aus ein einziges 'd' gelesen, so geht der Automat direkt in den Endzustand p_1 über und akzeptiert. Wird eine gerade Anzahl an 'a's gelesen, so erreicht man einen Zustand p_i mit $i \bmod 4 = 0$. Von hier aus kann das folgende 'd' gelesen werden, sowie dieselbe Anzahl an 'b's wie 'a's, hiermit wird auch der Endzustand p_1 erreicht. Wird eine ungerade Anzahl an 'a's gelesen, so wird ein Zustand p_i mit $i \bmod 4 = 2$ erreicht. Von diesen aus kann das darauf folgende 'c' gelesen werden und wiederum die selbe Anzahl an 'b's wie 'a's, und derselbe Endzustand p_1 wird erreicht. Somit werden alle Eingaben von $L(A_n)$ akzeptiert.

$M(A_n) \subseteq L(A_n)$:

Alle vom Automaten akzeptierten Wörter sind in $L(A_n)$ enthalten. Sei $w \in M(A_n)$. w kann vier verschiedene Formen haben: 1. w kann aus einem einzelnen 'd' bestehen, dies ist in $L(A_n)$ enthalten. 2. w kann auch aus einer beliebigen,

geraden Anzahl an 'a's, darauf folgend ein 'd' und darauf folgend genau so viele 'b's wie 'a's bestehen. Auch in diesem Fall gilt $w \in L(A_n)$. 3. Oder w ist aus einer ungeraden Anzahl an 'a's und der gleichen Anzahl an 'b's aufgebaut, genau zwischen 'a's und b's ein 'c'. Auch dieses w ist in $L(A_n)$ enthalten. Somit sind alle Wörter, die vom Automaten gelesen werden können, auch in $L(A_n)$, also gilt: $M(A_n) \subset L(A_n)$.

1.3.4

$L(A_n)$ ist regulär. Denn in der akzeptierten Sprache ist festgelegt, dass kein Wort länger als $n + 1$, n Anzahl der Zustände sein kann. Damit kann es keine Schleifen in dem Wort geben und das Pumping Lemma nicht widerlegt werden.

Außerdem ist $L(A_n)$ ferner natürlich regulär, da diese Sprache von einem endlichen Automaten akzeptiert wird und (wie in Teilaufgabe 1.3.1 geschehen) durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden kann.

1.3.5

$A = \bigcup_{n \geq 0} L(A_n)$. Nun ist gegeben, dass n beliebig ist. Damit A regulär ist, und also von einem endlichen Automaten akzeptiert wird, muss es eine Schleife in einem Wort $w \in (a^{2i} \cdot c \cdot b^{2i})$ geben, bei dem $i > n$, n Anzahl der Zustände des Automaten. Doch sobald eine Schleife in dem Wort auftritt, wird das Wort nicht mehr akzeptiert, da zum Beispiel nicht mehr garantiert werden kann, dass genau so viele 'a's wie 'b's gelesen werden, oder dass nur ein 'c' oder ein 'd' gelesen wird. Damit ist die Vereinigung aller $L(A_n)$ für $n \geq 0$ nicht regulär.

$A = \bigcup_{n \geq 0} L(A_n)$ ist aber kontextfrei, denn es lässt sich eine Grammatik dazu aufstellen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|B \\ A &\rightarrow aaAbb|acb|d \\ B &\rightarrow aaB|d \end{aligned}$$

1.4

1.4.1

Sei $A := (Q, \Sigma, \delta, \{q^0\}, F)$. Dann ist

$$A' = (Q', \Sigma', \delta', \{q^{0'}\}, F')$$

mit

$$\begin{aligned} Q' &= 2^Q, \\ \Sigma' &= \Sigma, \\ q^{0'} &= F, \end{aligned}$$

$$F' = \{M \in 2^Q \mid M \cap q^0 \neq \emptyset\}$$

und wir bilden erst

$$K_\delta := \{(p, x, \delta(p, x)) \mid p \in Q, x \in \Sigma, \delta(p, x) \text{ definiert}\},$$

bilden

$$K' = \{(p', x, p) \mid (p, x, p') \in K_\delta\}$$

und dann

$$\delta(M, x) = \cup_{z \in M} \{z' \in Q' \mid (z, x, z') \in K'\}$$

Alle Zustände, die vorher Endzustände waren, werden nun zu Startzuständen, alle vorherigen Startzustände werden zu Endzuständen. Alle Kanten werden umgedreht und anschließend wird der Potenzautomat gebildet, da es bei der Umkehr der Kanten dazu kommen kann, dass der Automat nicht-deterministisch ist.

1.4.2

$L(A) = \{e, f\}^* \{eef\} \{e, f\}^*$. Sei $M(A)$ genau die Menge der vom Automaten akzeptierten Wörter.

$L(A) \subseteq M(A)$: $L(A)$ wird von A akzeptiert. Von p_0 aus können sowohl beliebig viele 'f's als auch beliebig viele 'e's akzeptiert werden. Werden nur 'f's gelesen, bleibt der Automat in p_0 , werden nur 'e's gelesen, geht der Automat erst in den Zustand p_1 und dann in den Zustand p_2 und liest dort alle weiteren 'e's. Da der Automat vollständig ist, können von jedem Zustand aus 'e's und 'f's gelesen werden. Laut $L(A)$ muss danach die Kombination eef gelesen werden können. Unabhängig vom Zustand des Automaten vorher geht der Automat nun nach p_3 , den Endzustand. Hier können nun wieder beliebig viele 'e's und 'f's gelesen werden, also wird $L(A)$ von A akzeptiert, und $L(A) \subseteq M(A)$.

$M(A) \subseteq L(A)$: Alle vom Automaten akzeptierten Wörter liegen in $L(A)$. Sei $w \in M(A)$. w kann aus beliebig vielen 'e's oder 'f's bestehen, mit der Bedingung, dass irgendwo in dem Wort die Abfolge 'eef' vorkommt. Dies ist in $L(A)$ gegeben, damit gilt $L(A) = M(A)$ und $L(A)$ beschreibt genau die Menge der akzeptierten Wörter von A .

1.4.3

Sei $M(B)$ genau die Menge der vom Automaten B akzeptierten Wörter. Annahme: $L(B) := \{e, f\}^* \{fee\} \{e, f\}^* = M(B)$.

$L(B) \subseteq M(B)$: $L(B)$ wird von B akzeptiert. Von p_3 aus können sowohl 'e's als auch 'f's gelesen werden. Generell kann von jedem Zustand aus ein 'e' oder ein 'f' gelesen werden, da der Automat vollständig ist. Laut $L(B)$ muss B die Kombination 'fee' an einer Stelle des Worts lesen können. Unabhängig vom Zustand des Automaten wechselt dieser nach Lesen von 'fee' in den Endzustand $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$. Hier können beliebig viele weitere 'e's und 'f's von $L(B)$ gelesen werden, damit akzeptiert der Automat $L(B)$.

$M(B) \subseteq L(B)$: Jedes Wort $w \in M(B)$ ist auch in $L(B)$. w kann in p_3 sowohl mit einem 'e' als auch mit einem 'f' beginnen. Bei fortlaufenden 'e's bleibt der Automat im Startzustand p_3 , bei fortlaufenden 'f's wechselt DFA B nach $\{p_2, p_3\}$ und verbleibt dort. Wird von dort aus ein 'e' gelesen, wechselt der Automat zu $\{p_1, p_2, p_3\}$. Folgt in w nun ein 'f', springt der Automat zurück nach $\{p_2, p_3\}$. Um zu einem Endzustand zu gelangen, muss w irgendwo im Wort die Folge 'fee' beinhalten, damit der Automat in einen Endzustand wechselt. Da der Automat nur in den Zuständen 'voranschreitet', wenn ein solches Teilwort gelesen wird. w kann also mit beliebig vielen 'e' und 'f's beginnen, muss die Abfolge fee beinhalten und kann mit beliebig kombinierten 'e's und 'f's enden. Dies entspricht auch $L(B)$, somit wird w von $L(B)$ akzeptiert.