Integral und Volumen

Ben Siebert Moritz Junkermann Tanel Malak

27. November 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Rotationskörper

2 Berechnung des Volumens

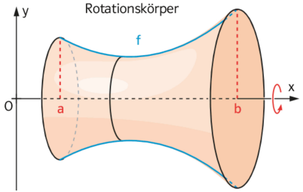
3 Übungsaufgabe

4 Lösungen

5 Ende

Rotationskörper

- Ein Rotationskörper entsteht, wenn die in einem Intervall eingeschlossene Fläche um die X-Achse rotiert.
- Die Bestimmung des Volumes orientiert sich am Verfahren zur Bestimmung von Flächeninhalten.



Berechnung des Volumens

1. Schritt

- Der Körper wird mit gleichbleibend Zylindern angenähert. Jeder Zylinder hat die Höhe Δx: $V_n = \pi \times (f(x_1))^2 \times \Delta x + \pi \times (f(x_2))^2 \times \Delta x + \ldots + \pi \times (f(x_n))^2 \times \Delta x$
- Diese Formel entspricht einer Summe wie A_n beim Flächeninhalt, wenn man $g(x) = \pi \times (f(x))^2$ setzt.

2. Schritt

Grenzwert ($\lim_{n\to\infty} V_n$) entspricht dem Integral $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\pi \times (f(x))^2)dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Übungsaufgabe

Aufgaben

1 Die gefärbte Fläche rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des durch die Rotation erzeugten Drehkörpers.

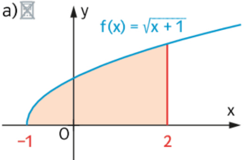
a)


Fig. 2

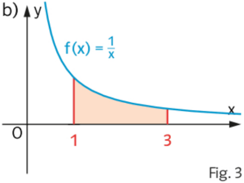
b)


Fig. 3

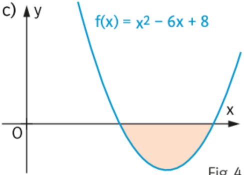
c)


Fig. 4

Lösung a)

Rechnung

$$V_n = \pi \times \int_{-1}^{2} (f(x))^2 dx$$
$$= \pi \times \int_{-1}^{2} (\sqrt{x+1})^2 dx = \left[\left(\frac{2 \times (x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right)^2 \right]_{-1}^{2}$$
$$= \pi \times \left(\left(\frac{2 \times (2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right)^2 - \left(\frac{2 \times (-1+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right)^2 \right)$$
$$= \pi \times \left(\frac{2 \times (3 \times \sqrt{3})}{3} \right)^2$$
$$= \pi \times \left(\frac{6}{3} \right)^2 \times \left(\frac{2 \times \sqrt{3}}{3} \right)^2$$
$$= \pi \times 4 \times \frac{4}{3}$$
$$= \pi \times \frac{16}{3}$$

Lösung b)

Rechnung

$$V_n = \pi \times \int_1^3 (f(x))^2 dx = \Big[F(3) - F(1)\Big]_1^3$$
$$= \pi \times \int_1^3 (\tfrac{1}{x})^2 dx = \Big[F(3) - F(1)\Big]_1^3$$
$$= \pi \times \int_1^3 (\tfrac{1}{x^2}) dx = \Big[F(3) - F(1)\Big]_1^3$$
$$= \pi \times (\tfrac{-1}{3} - (-1))$$
$$= \tfrac{2 \times \pi}{3} \approx 2.0944$$

Lösung c)

Rechnung

$f(x) = x^2 - 6x + 8$
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$
Nullstellen: $f(x) = 0 \rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = 4$
$\pi \times \int_2^4 (F(x))dx$
$= 37,6991$

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!