Mathematik Leistungskurs

Ben Siebert

2023-2025

Gymnasium Holthausen, Hattingen

Inhaltsverzeichnis

Analysis

1. Funktionsuntersuchung

1.1 Wiederholung

Aufgabe: Erstellt in Gruppenarbeit eine Zusammenfassung der Punkte einer Funktionsuntersuchung und der entsprechenden Vorgensweise. Achtet auf die effektive Nutzung der CAS-App. Nutze mindestens folgende Begriffe:

- Symmetrie
- Randverhalten
- Verhalten nahe Null,
- notwendige Bedingung für Extrema
- hinreichende Bedingung für Extrema
- Hochpunkt
- Tiefpunkt
- Nullstelle
- Monotonie

Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 2$

Nullstellen

$$\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x_1 \approx -0.79$$

$$x_2 \approx 0.79$$

Symmetrie

Achsensymmetrisch: $f(x) = f(-x)$

Randverhalten

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \to +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \to -\infty$$

Verhalten nahe Null

Nahe Null verhält sich der Graph der Funktion $f(x)$ wie der Graph der Funktion $g(x) = 3x^2$, da dies der Summand mit dem kleinsten Exponenten von x ist.

Monotonie

Von $-\infty$ bis 0 stark monoton fallend, von 0 bis ∞ stark monoton steigend.

Notwendige Bedingung für EST: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$
$$\xrightarrow{CAS} x_1 = 0$$

Hinreichende Bedingung für EST: $f''(x) \ \wedge \ VZW$

$$f'(-1) = -7$$
$$f'(1) = 7$$

$+/-$ Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $x_1 = 0$

Tiefpunkt

$T(0|f(0)) = T(0|-2)$

Hochpunkt

Es gibt keinen Hochpunkt, da der Graph der Funktion $f(x)$ nach $+\infty$ strebt.

1.2 Bedeutung der zweiten Ableitung

hinreichende Bedingung für Extrema mit 2. Ableitung

Die Funktion f ist auf einem Intervall I definiert und sowohl die Funktion als auch ihre erste Ableitung f' sind differenzierbar.

Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ gilt, so liegt ein Maximum vor.

Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ gilt, so liegt ein Minimum vor.

1.2.1 S. 21 Nr. 9

Aufgabe

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = 0,25x^4 - x^3$ und g mit $g(x) = 0,2x^5 - 0,75x^4$.

b) Untersuchen Sie mithilfe der 2. Ableitung und mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums, ob die Graphen Hoch- und Tiefpunkte besitzen und skizzieren Sie den Verlauf der Graphen.

$$f(x) = 0.25x^4 - x^3$$
$$f'(x) = x^3 - 3x^2$$
$$f''(x) = 3x^2 - 6x$$

notwendige Bedingung für EST: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 \times (x-3) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 0 \\ \Rightarrow x_2 &= 3 \end{aligned}$$

hinreichende Bedingung für EST: $f'(x) = 0 \ \land \ f''(x) \neq 0$

$$x_1: \left.\begin{aligned} &f''(0) = 3 \times 0^2 - 6 \times 0 \\ &f''(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow \text{Keine Extremstelle}$$

$$x_2: \left.\begin{aligned} &f''(3) = 3 \times 3^2 - 6 \times 3 \\ &f''(3) = 27 - 18 \\ &f''(0) = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

hinreichende Bedingung für EST: $f'(x) = 0 \ \land VZW$

$$x_1: \left.\begin{aligned} &f'(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 \\ &\Leftrightarrow f'(-1) = -1 - 3 \\ &\Leftrightarrow f'(-1) = -4 \\ \\ &f'(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 \\ &\Leftrightarrow f'(1) = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Kein Vorzeichenwechsel} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$x_2: \left.\begin{aligned} &f'(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 \\ &\Leftrightarrow f'(2) = 8 - 12 \\ &\Leftrightarrow f'(2) = -4 \\ \\ &f'(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 \\ &\Leftrightarrow f'(4) = 64 - 3 \times 16 \\ &\Leftrightarrow f'(4) = 64 - 48 \\ &\Leftrightarrow f'(4) = 16 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel von - zu +} \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$g(x) = 0.2x^5 - 0.75x^4$$
$$g'(x) = x^4 - 3x^3$$
$$g''(x) = 4x^3 - 9x^2$$

notwendige Bedingung für EST: $g'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
x^4 - 3x^3 &= 0 \\
\Leftrightarrow x^3 \times (x-3) &= 0 \\
\Rightarrow x_1 &= 0 \\
\Rightarrow x_2 &= 3
\end{aligned}
$$

hinreichende Bedingung für EST: $g'(x) = 0 \;\wedge\; g''(x) \neq 0$

$$
x_1 : \left.\begin{aligned} g''(0) &= 4 \times 0^3 - 9 \times 0^2 \\ g''(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g''(x) = 0 \Rightarrow \text{Keine Extremstelle}
$$

$$
x_2 : \left.\begin{aligned} g''(3) &= 4 \times 3^3 - 9 \times 3^2 \\ g''(3) &= 108 - 81 \\ g''(3) &= 27 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g''(x) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}
$$

hinreichende Bedingung für EST: $g'(x) = 0 \;\wedge VZW$

$$
x_1 : \left.\begin{aligned} & g'(-1) = (-1)^4 - 3 \times (-1)^3 \\ & \Leftrightarrow g'(-1) = 1 + 3 \\ & \Leftrightarrow g'(-1) = 4 \\ \\ & g'(1) = 1^4 - 3 \times 1^3 \\ & \Leftrightarrow g'(1) = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel von + zu - } \Rightarrow \text{Hochpunkt}
$$

$$
x_2 : \left.\begin{aligned} & g'(2) = 2^4 - 3 \times 2^3 \\ & \Leftrightarrow g'(2) = 16 - 24 \\ & \Leftrightarrow g'(2) = -8 \\ \\ & g'(4) = 4^4 - 3 \times 4^3 \\ & \Leftrightarrow g'(4) = 256 - 3 \times 64 \\ & \Leftrightarrow g'(4) = 256 - 192 \\ & \Leftrightarrow g'(4) = 64 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel von - zu + } \Rightarrow \text{Tiefpunkt}
$$

1.2.2 S. 20 Nr. 4

Aufgabe

Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion f'. Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Begründen Sie.

a) f hat im abgebildeten Bereich zwei Extremstellen.

b) Die zweite Ableitung von f hat zwei Nullstellen.

c) Es gilt $f''(0) > 0$.

d) Der Graph von f hat an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt.

a) Ja, einen Tiefpunkt und einen Hochpunkt.

b) Ja, da es zwei Extremstellen und einen Sattelpunkt gibt.

c) Ja, da der Graph an einer Stelle immer langsamer steigt.

d) Nein, da der Graph an dieser Stelle einen Tiefpunkt hat. Im Intervall: Ränder sind globale Hoch- und Tiefpunkte.

1.2.3 S. 15 Nr. 15

Aufgabe

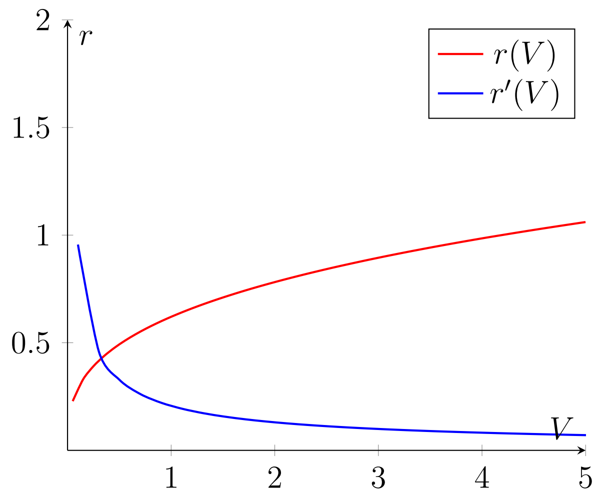
Bläst man einen kugelförmigen Luftballon mit konstantem Luftstrom auf, so wächst der Radius des Ballons zu Beginn schneller als am Ende. Die Funktion $r(V)$ gibt ungefähr die Abhängigkeit des Radius r vom Volumen V an: $r(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

a) Zeichnen Sie den Graphen von r und r' mithilfe des GTR.

b) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate für r im Intervall $[0.5; 1]$ und $[1; 1.5]$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Skizzieren Sie mithilfe des GTR die Tangente an der Stelle $V_0 = 1$ und lesen Sie daraus die momentane Änderungsrate an dieser Stelle ab.

a)



b)

$$[0.5; 1] \quad \left.\begin{matrix} \frac{r(1)-r(0.5)}{1-0.5} \\ \xrightarrow{CAS} 0.18 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Mittlere Änderungsrate} = 0.18$$

Im Verlauf des Graphens wird die Steigung immer kleiner.

c)

Die momentane Änderungsrate an der Stelle $V_0 = 1$ beträgt ≈ 0.21

1.3 Transferaufgabe

Einleitung

Der Graph der Funktion f mit $f(t) = -\frac{1}{3000}t^3 + \frac{3}{20}t^2$ soll für $0 \leq t \leq 300$ verwendet werden, um näherungsweise die zurückgelegte Strecke in Metern einer S-Bahn zwischen zwei Haltestellen zu beschreiben (t beschreibt die Zeit in Sekunden).

Aufgabe

Bestimme die maximale Geschwindigkeit der S-Bahn und beschreibe dein Vorgehen.

$f'(t) = \frac{3t}{10} - \frac{t^2}{1000}$

$f''(t) = \frac{3}{10} - \frac{t}{500}$

$f'''(t) = -\frac{1}{500}$

notwendige Bedingung für EST: $f''(t) = 0$

$f''(t) = 0$

$\frac{3}{10} - \frac{t}{500} = 0$

$\xrightarrow{CAS} t_1 = 150$

hinreichende Bedingung für EST: $f''(t) = 0 \ \wedge VZW$

$$\left.\begin{aligned} f''(149) &= \frac{1}{500} \\ f''(151) &= -\frac{1}{500} \end{aligned}\right\} + / \text{ - VZW} \Rightarrow \text{Maximum}$$

$f'(150) = \frac{45}{2} \approx 22.5\frac{m}{s}$

$\frac{km}{h} \rightarrow 22.5\frac{m}{s} \times 3.6 = 81\frac{km}{h}$

Die Höchstgeschwindigkeit der S-Bahn beträgt $81\frac{km}{h}$. Diese erreicht sie nach 150 Sekunden bzw. nach 2.5 Minuten.

1.4 Wendepunkte

Wendepunkte

Der Punkt einer Funktion mit der größten Steigung wird **Wendepunkt** genannt.

Vorgehen zur Bestimmung von Wendepunkten

1. Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(t) = 0$
2. Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(t) = 0 \ \wedge \ f'''(t) \neq 0$

1.4.1 S. 25 Nr. 2

Aufgabe

Bestimmen Sie den Wendepunkt des Graphen von f sowie die Gleichung der Wendetangente.

a) $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 5x$

e) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

a) $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 5x$

$f'(x) = 1.5x^2 - 6x + 5$

$f''(x) = 3x - 6$

notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 2$

hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0 \ \wedge \ VZW$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = -3 \\ f''(3) = 3 \end{array}\right\} + \text{ / - VZW} \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

Wendetangente: $x = 2$

$t(x) = m \times x + b$

$m = f'(x) = f'(2)$

$f'(2) = 1.5 \times 2^2 - 6 \times 2 + 5 = -1$

$t(x) = -x + b$

$\Leftrightarrow 2 = -1 \times 2 + b$

$\Leftrightarrow -b = -2 - 2$

$\Leftrightarrow b = 4$

$\Rightarrow t(x) = -x + 4$

e) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

$f'(x) = -3x^2 - 6x + 4$

$f''(x) = -6x - 6$

notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow -6x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -1$

hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0 \ \wedge \ VZW$

$$\left.\begin{array}{l} f''(-2) = 6 \\ f''(0) = -6 \end{array}\right\} + / - \text{ VZW} \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

Wendetangente: $x = -1$

$t(x) = m \times x + b$

$m = f'(x) = f'(-1)$

$f'(-1) = -3 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 4 = 7$

$t(x) = 7x + b$

$\Leftrightarrow -2 = 7 \times (-1) + b$

$\Leftrightarrow 0 = -7 + b + 2$

$\Leftrightarrow b = 5$

$\Rightarrow t(x) = 7x + 5$

1.4.2 S. 25 Nr. 3

Aufgabe

Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen der Funktion f. Geben Sie anschließend die Intervalle an, in denen der Graph links- bzw. rechtsgekrümmt ist.

a) $f(x) = x^4 + x^2$

g) $f(x) = \frac{1}{60}x^6 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{6}x^4$

a) $f(x) = x^4 + x^2$

$f'(x) = 4x^3 + 2x$

$f''(x) = 12x^2 + 2$

notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 0$

$\xrightarrow{CAS}$ keine reellen Lösungen

Krümmungsverhalten:

$I[-\infty; +\infty] \rightarrow$ linksgekrümmt

g) $f(x) = \frac{1}{60}x^6 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{6}x^4$

$f'(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{2}$

$f''(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 2x^2$

notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 0$

$\xrightarrow{CAS} x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = 2$

hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0 \ \wedge \ VZW$

$$x_1 : \left.\begin{array}{l} f''(-1) = \frac{9}{2} \\ f''(2) = 0 \end{array}\right\} \text{kein VZW}$$

$$x_2 : \left.\begin{array}{l} f''(1) = \frac{1}{2} \\ f''(3) = \frac{9}{2} \end{array}\right\} \text{kein VZW}$$

Krümmungsverhalten:

$I[-\infty; +\infty] \rightarrow$ linksgekrümmt

1.4.3 S. 25 Nr. 5

Aufgabe

Forscher haben das Wachstum einer bestimmten Bakterienkultur in einer Petrischale beobachtet. Die von Bakterien bedeckte Fläche (in cm^2) in Abhängigkeit der vergangenen Zeit (in h) seit dem Beobachtungsbeginn um 8 Uhr morgens kann im Zeitraum von 8 Uhr morgens bis 12 Uhr mittags des darauf folgenden Tages nährungesweise durch die Funktion A mit $A(t) = -0.005t^3 + 0.2t^2 + 0.9t + 1$ beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie die von Bakterien bedeckte Fläche um 2 Uhr morgens.

b) Bestimmen Sie die maximale Zunahme der von Bakterien bedeckten Fläche.

a) $t = 19$

$A(19) \xrightarrow{CAS} 56.005$

Um 3 Uhr morgens bedecken die Bakterien eine Fläche von etwa $56.005\ cm^2$.

b) $A'(t) = -0.015t^2 + 0.4t + 0.9$

$A''(t) = 0.4 - 0.03t$

notwendige Bedingung für Wendepunkte: $A''(t) = 0$

$0.4 - 0.03t = 0$

$\xrightarrow{CAS} t_1 = 13.333$

hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $A''(t) = 0\ \wedge\ VZW$

$$t_1 : \left.\begin{array}{l} A''(13) = 0.4 - 0.03 \times 13 = 0.01 \\ A''(14) = 0.4 - 0.03 \times 14 = -0.02 \end{array}\right\} + / \text{- VZW} \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

maximale Zunahme der Fläche:

$a'(t) = a'(13.333) \approx 3.56cm^2$

Randverhalten:

$A'(0) = 0.9$

$A'(28) = 0.34$

Die maximale Zunahme ist nach 13,33 Stunden mit $3.56\frac{cm^2}{h}$ erreicht.