

Exponentialfunktionen Übung (Gruppe 2)

Ben Siebert

Tanel Malak

Moritz Junkermann

16. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

1	S. 140 Nr. 10	2
1.1	Teilaufgabe a)	2
1.2	Teilaufgabe b)	2
1.3	Teilaufgabe c)	2
2	S. 142 Nr. 24	3
2.1	Teilaufgabe a)	3
2.2	Teilaufgabe b)	3
2.3	Teilaufgabe c)	4
3	S. 145 Nr. 5g	5

1. S. 140 Nr. 10

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x \times e^{x^2-2}$

1.1 Teilaufgabe a)

Zu überprüfende Stammfunktion: $F(x) = e^{x^2-2}$

Gegebene Stammfunktion ableiten:

$$u = e^x; v = x^2 - 2; u' = e^x; v' = 2x$$

$$f(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$$

$$f(x) = e^{x^2-2} \times 2x$$

Die Stammfunktion $F(x) = e^{x^2-2}$ ist die korrekte Stammfunktion der Funktion $f(x) = 2x \times e^{x^2-2}$

1.2 Teilaufgabe b)

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$0 = 2x \times e^{x^2-2} \quad e^{x^2-2} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0 = 2x \quad | :2$$

$$0 = x$$

Intervall $I[0; 2]$

$$\int_0^2 f(x) dx \quad [F(x) = e^{x^2-2}]$$

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0)$$

$$\Leftrightarrow e^{2^2-2} - e^{0^2-2}$$

$$\Leftrightarrow e^2 - e^{-2}$$

$$\xrightarrow{CAS} \approx 7.25372$$

Die Fläche, die von dem Graphen der Funktion f , der x-Achse und der Geraden $x = 2$ eingeschlossen wird, beträgt in etwa $e^2 - e^{-2}$.

1.3 Teilaufgabe c)

Durch die Punktsymmetrie der Funktion $f(x)$ gleicht sich der Anteil der Integrale unterhalb und oberhalb der x-Achse aus, sodass das Intervall von $-a$ bis a immer Null ist.

2. S. 142 Nr. 24

2.1 Teilaufgabe a)

Ansatz:

$$\int_1^e \left(\frac{3}{x} + x\right) dx = F(e) - F(1)$$

Stammfunktion bilden:

$$\int_1^e \left(\frac{3}{x} + x\right) dx \left[F(x) = 3 \times \ln(|x|) + \frac{x^2}{2} \right]$$

Integral bestimmen (und vereinfachen):

$$\int_1^e \left(\frac{3}{x} + x\right) dx = F(e) - F(1)$$

$$\Leftrightarrow \left(3 \times \ln(|e|) + \frac{e^2}{2}\right) - \left(3 \times \ln(|1|) + \frac{1^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(3 \times \ln(|e|) + \frac{e^2}{2}\right) - \left(3 \times 0 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(3 \times \ln(|e|) + \frac{e^2}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(3 \times 1 + \frac{e^2}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(3 + \frac{e^2}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{6+e^2-1}{2}$$

$$\xrightarrow{CAS} \approx 6.19$$

2.2 Teilaufgabe b)

Ansatz:

$$\int_1^e \left(\frac{2+4x}{x}\right) dx = F(e) - F(1)$$

Stammfunktion bilden:

$$\int_1^e \left(\frac{2+4x}{x}\right) dx \Rightarrow f(x) = 2 + 4x \times \frac{1}{x} \left[F(x) = 2x + 2x^2 \times \ln(|x|) \right]$$

Integral berechnen (und vereinfachen):

$$\int_1^e \left(\frac{2+4x}{x}\right) dx = F(e) - F(1)$$

$$\Leftrightarrow (2e + 2e^2 \times \ln(|e|)) - 2 + 2 \times \ln(|1|)$$

$$\Leftrightarrow (2e + 2e^2 \times 1) - 2 + 2 \times 0$$

$$\Leftrightarrow (2e + 2e^2) - 2$$

$$\Leftrightarrow 2e^2 + 2e - 2$$

$$\xrightarrow{CAS} \approx 18.21$$

2.3 Teilaufgabe c)

Ansatz:

$$\int_e^{e^2} \left(\frac{2x-5}{x^2} \right) dx = F(e^2) - F(e)$$

Stammfunktion bilden:

$$\int_e^{e^2} \left(\frac{2x-5}{x^2} \right) dx \Rightarrow f(x) = 2x \times \frac{1}{x^2} - 5 \times \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} = -2 + \frac{5}{x} \quad \left[F(x) = -2 + \frac{5}{x} \right]$$

Integral berechnen (und vereinfachen):

$$F(e^2) - F(e)$$

$$\Leftrightarrow \left(-2 + \frac{5}{e^2} \right) - \left(-2 + \frac{5}{e} \right)$$

$$\Leftrightarrow -2 + \frac{5}{e^2} + 2 - \frac{5}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{e^2} - \frac{5}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{e^2} - \frac{5e}{e^2}$$

$$\xrightarrow{CAS} \approx$$

3. S. 145 Nr. 5g

Funktion: $f(x) = 2x \times e^{2x-7}$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$2x \times e^{2x-7} = 0$$

$\rightarrow x_0 = 0$, da $2x$ nur 0, wenn $x = 0$ ist und e^x niemals gleich 0 sein kann.

Symmetrie:

$$f(-x) = 2 \times (-x) \times e^{2 \times (-x) - 7}$$

Es ist zu sehen, dass $f(-x) \neq f(x)$ bzw. $-f(x)$ ist, sodass der Graph der Funktion $f(x)$ keine Symmetrie besitzt.

Ableitungen:

$$u = 2x; v = e^{2x-7}; u' = 2;$$

$$s = e^x; t = 2x - 7; s' = e^x; t' = 2;$$

$$v' = e^{2x-7} \times 2$$

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u$$

$$f'(x) = 2 \times e^{2x-7} + e^{2x-7} \times 2 \times 2x$$

$$f'(x) = e^{2x-7} \times (2 + 2 \times 2x)$$

$$f'(x) = e^{2x-7} \times (2 + 4x)$$

$$f''(x) = u'_2 \times v_2 + u_2 \times v'_2$$

$$u_2 = 2 + 4x; u'_2 = 4; v_2 = e^{2x-7};$$

$$s = e^x; t = 2x - 7; s' = e^x; t' = 2;$$

$$v' = e^{2x-7} \times 2$$

$$f''(x) = 4 \times e^{2x-7} + (2 + 4x) \times e^{2x-7} \times 2$$

$$f''(x) = e^{2x-7} \times (4 + (2 + 4x) \times 2)$$

$$f''(x) = e^{2x-7} \times (4 + 4 + 8x)$$

$$f''(x) = e^{2x-7} \times (8 + 8x)$$

$$f'''(x) = u'_3 \times v_3 + u_3 \times v'_3$$

$$u_3 = 8 + 8x; u'_3 = 8; v_3 = e^{2x-7};$$

$$s_3 = e^x; s'_3 = e^x; t_3 = 2x - 7; t'_3 = 2;$$

$$v'_3 = e^{2x-7} \times 2$$

$$f'''(x) = 8 \times e^{2x-7} + (8 + 8x) \times e^{2x-7} \times 2$$

$$f'''(x) = e^{2x-7} \times (8 + (8 + 8x) \times 2)$$

$$f'''(x) = e^{2x-7} \times (7 + 16 + 16x)$$

$$f'''(x) = e^{2x-7} \times (23 + 16x)$$

Verhalten nahe Null:

Die Funktion f verhält sich nahe 0 wie die Funktion g mit $g(x) = e^x$.

Extremstellen:

notwendige Bedingung für EST: $f'(x) = 0$

$$e^{2x-7} \times (2 + 4x) = 0 \quad e^{2x-7} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4x = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \div 4 \\ -0.5 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

hinreichende Bedingung für EST: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(-\frac{1}{2}) = e^{2x-7} \times (8 + 8x)$$

$$\Leftrightarrow f''(-\frac{1}{2}) > 0$$

\Rightarrow Tiefpunkt

Y-Wert bestimmen:

$$f(\frac{1}{2}) = 2x \times e^{2x-7}$$

$$\Leftrightarrow 2 \times (-\frac{1}{2}) \times e^{2 \times (-\frac{1}{2}) - 7}$$

$$\Leftrightarrow -1 \times e^{-8}$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt einen Tiefpunkt $TP(\frac{1}{2} | -e^{-8})$

Randverhalten:

Für $x \rightarrow \infty$ verhält sich die Funktion f wie die Funktion h mit $h(x) = e^x$. Für $x \rightarrow -\infty$ verhält sich die Funktion f wie die Funktion h mit $h(x) = e^x$.

Wendestellen:

notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x) = 0$

$$e^{2x-7} \times (8 + 8x) = 0 \quad e^{2x-7} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$8 + 8x = 0 \quad | -8$$

$$8x = -8 \quad | \div 8$$

$$x = -1$$

hinreichende Bedingung für WST: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f'''(-1) = e^{2 \times (-1) - 7} \times (23 + 16 \times (-1))$$

$$= e^{-9} \times 7 > 0 \rightarrow \text{links} - \text{rechts Kurve}$$

Monotonie:

Monoton fallend bis $x = -\frac{1}{2}$; danach monoton steigend, weil $TP(\frac{1}{2} | -e^{-8})$