Exponentialfunktionen Übung

Ben Siebert Tanel Malak Julina Elfert Moritz Junkermann

30. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1. S. 136 Nr. 3

Produktregel: $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

1.1 Teilaufgabe a)

$f(x) = x \times e^x$
$u_1 = x;\ v_1 = e^x \Rightarrow u_1' = 1;\ v_1' = e^x$

$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x$
$\Leftrightarrow f'(x) = e^x \times (1 + x)$
$u_2 = e^x;\ v_2 = 1 + x;\ u_2' = e^x;\ v_2' = 1$

$f''(x) = u_2' \times v_2 + u_2 \times v_2'$
$\Leftrightarrow f''(x) = e^x \times (1 + x) + e^x \times 1$
$\Leftrightarrow f''(x) = e^x \times (2 + x)$

Extremstellen
notwendige Bedingung für EST: $f'(x) = 0$
$f'(x) = 0$
$e^x \times (1 + x) = 0 \ \Big|{\div e^x}$
$1 + x = 0 \ \Big|{-1}$
$x_1 = -1$
hinreichende Bedingung für EST: $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x) \neq 0$
$f''(-1) = e^{-1} \times (2 - 1)$
$f''(-1) = e^{-1} \times 1$
$f''(-1) = e^{-1}$
Y-Koordinate: $f(-1) = -1e^{-1}$
Tiefpunkt bei P(-1|$-e^{-1}$)

1.2 Teilaufgabe c)

$f(x) = (4x - 1) \times e^x$
$u_1 = 4x - 1;\ v_1 = e^x;\ u_1' = 4;\ v_1' = e^x$

$f'(x) = 4 \times e^x + (4x - 1) \times e^x$
$\Leftrightarrow f'(x) = e^x \times (4x + 3)$
$u_2 = e^x;\ v_2 = 4x + 3;\ u_2' = e^x;\ v_2' = 4$

$f''(x) = e^x \times (4x + 3) + e^x \times 4$
$\Leftrightarrow f''(x) = e^x \times (4x + 7)$

Extremstellen
notwendige Bedingung für EST: $f'(x) = 0$
$f'(x) = 0$
$e^x \times (4x + 7) = 0 \ \Big|{\div e^x}$
$4x + 7 = 0 \ \Big|{-7}$

$4x = -7 \;\Big|\; \div 4$
$x = -\frac{7}{4}$
hinreichende Bedingung für EST: $f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$
$f''(-\frac{7}{4}) = e^{-\frac{7}{4}} \times (4 \times -\frac{7}{4} + 7)$
$f''(-\frac{7}{4}) = 0$
Vorzeichenwechselkriterium (VZW):
$f'(-2) = -5e^{-2} \Rightarrow negativ$
$f'(2) = 11e^{2} \Rightarrow positiv$

Y-Koordinate: $f(-\frac{7}{4}) = -8 \times e^{-\frac{7}{4}}$
Tiefpunkt bei T($-\frac{7}{4}$|$-8 \times e^{-\frac{7}{4}}$)

1.3 Teilaufgabe f)

$f(x) = x^2 \times e^x$
$u_1 = x^2;\; v_1 = e^x;\; u_1' = 2x;\; v_1' = e^x$

$f'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x$
$\Leftrightarrow e^x \times (2x + x^2)$
$u_2 = e^x;\; v_2 = 2x + x^2;\; u_2' = e^x;\; v_2' = 2 + 2x$

$f''(x) = e^x \times (2x + x^2) + e^x \times (2 + 2x)$
$\Leftrightarrow f''(x) = e^x \times (x^2 + 2 + 4x)$

2. S. 137 Nr. 5

2.1 Teilaufgabe a)

$f(x) = (3 - x) \times e^{-x}$
Nullstellen:
$f(x) = 0$
$(3 - x) \times e^{-x} = 0$
Satz vom Nullprodukt: $x_1 = 3$

$u_1 = 3 - x;\ v_1 = e^{-x};\ u_1' = -1;\ v_1' = -e^{-x}$

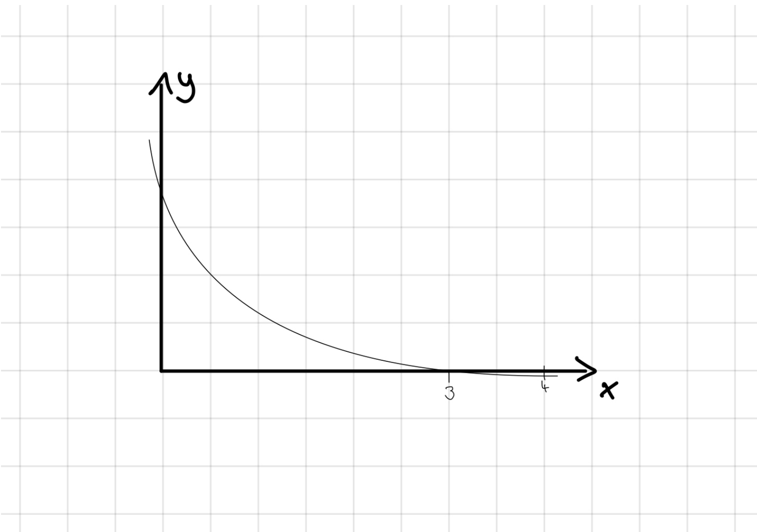
$f'(x) = -1 \times e^{-x} + (3 - x) \times (-e^{-x})$
$\Leftrightarrow f'(x) = e^{-x} \times (x - 4)$
$u_2 = e^{-x};\ v_2 = x - 4;\ u_2' = -e^{-x};\ v_2' = 1$

$f''(x) = -e^{-x} \times (x - 4) + e^{-x} \times 1$
$\Leftrightarrow f''(x) = e^{-x} \times (5 - x)$

2.2 Teilaufgabe b)

notwendige Bedingung für EST: $f'(x) = 0$
$f'(x) = 0$
$e^{-x} \times (x - 4) = 0$
Satz des Nullprodukts: $x_1 = 4$
hinreichende Bedingung für EST: $f'(x) = 0\ \wedge\ f''(x) \neq 0$
$f''(4) = e^{-4} \Rightarrow positiv \rightarrow TP$
Y-Wert: $f(4) = -e^{-4}$
Der Graph der Funktion f hat einen Tiefpunkt $T(4 \big| -e^{-4})$

2.3 Teilaufgabe c)



2.4 Teilaufgabe d)

$t(x) = mx + b$
$m = f'(0) = -4$
$t(0) = -4 \times 0 + b = 3$
$\Leftrightarrow b = 3$
$t(x) = -4x + 3$

3. S. 139 Nr. 1

3.1 Teilaufgabe a)

$f(x) = (x+2)^4$
$u^\circ v$
$u = x^4;\ v = x+2;\ u' = 4x^3;\ v' = 1$
$f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$
$\Leftrightarrow f'(x) = 4 \times (x+2)^3 \times 1$
$\Leftrightarrow f'(x) = 4 \times (x+2)^3$

3.2 Teilaufgabe e)

$f(x) = e^{2x}$
$u^\circ v$
$u = e^x;\ v = 2x;\ u' = e^x;\ v' = 2$
$f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$
$\Leftrightarrow f'(x) = e^{2x} \times 2$
$\Leftrightarrow f'(x) = 2e^{2x}$

4. S. 139 Nr. 2

4.1 Teilaufgabe a)

$f(x) = 2e^{x^3-x^2}$
$u^\circ v$
$u = 2e^x;\ v = x^3 - x^2;\ u' = 2e^x;\ v' = 3x^2 - 2x$
$f'(x) = 2e^{x^3-x^2} \times (3x^2 - 2x)$
$f'(x) = (6x^2 - 4x) \times e^{x^3-x^2}$

4.2 Teilaufgabe b)

$f(x) = e^{\sqrt{x}}$
$u = e^x;\ v = \sqrt{x};\ u' = e^x;\ v' = \frac{1}{2\times\sqrt{x}}$
$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\times\sqrt{x}}$
$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\times\sqrt{x}}$

4.3 Teilaufgabe g)

$f(x) = 3x \times ln(2x)$
$u = 3x;\ v = ln(2x) = ln(2) + ln(x);\ u' = 3;\ v' = \frac{1}{x}$
$f'(x) = 3 \times ln(2x) + 3x \times \frac{1}{x}$
$f'(x) = 3 \times (ln(2x) + 1)$

4.4 Teilaufgabe h)

$f(x) = ln(\sqrt{x})$
$u^\circ v$
$u = ln(x);\ u' = \frac{1}{x};\ v = \sqrt{x};\ v' = \frac{1}{2\times\sqrt{x}}$
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\times\sqrt{x}}$
$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2x}$

5. S. 139 Nr. 5

$f(x) = (2x-1)^2 \times e^x$

5.1 Teilaufgabe a)

$u = e^x;\ u' = e^x;\ v = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1;\ v' = 8x - 4$
$f'(x) = e^x \times (8x-4) + e^x \times (4x^2 - 4x + 1)$
$f'(x) = e^x \times (8x - 4 + 4x^2 - 4x + 1)$
$f'(x) = e^x \times (4x - 3 + 4x^2)$

Steigung im Punkt $P\Big(2\Big|f(2)\Big)$
$f'(2) = e^2 \times (4 \times 2 - 3 + 4 \times 2^2)$
$\Leftrightarrow e^2 \times 21$

Die Steigung im Punkt $P\Big(2\Big|f(2)\Big)$ liegt bei $21 \times e^2$

5.2 Teilaufgabe b)

$t(x) = mx + b \ \Big|\ m = 0 \to waagerecht$
$\Rightarrow t(x) = b$
notwendige Bedingung für EST: $f'(x) = 0$
$f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow e^x \times (4x - 3 + 4x^2) = 0$
$\Rightarrow 4x - 3 + 4x^2 = 0 \ \Big|\div 4$
$\Rightarrow x - \frac{3}{4} + x^2 = 0$
$p.q. \Rightarrow x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$
$\Leftrightarrow x_1, x_2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4}}$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \pm 1$
$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{3}{2}$

hinreichende Bedingung für EST: $f'(x) = 0 \wedge VZW$

$$x_1 : \left.\begin{aligned} & f'(\tfrac{1}{4}) = e^{\frac{1}{4}} \times (4 \times \tfrac{1}{4} - 3 + 4 \times \tfrac{1}{4}^2) \\ & = e^{\frac{1}{4}} \times (1 - 3 + \tfrac{1}{4}) \\ & = e^{\frac{1}{4}} \times (-\tfrac{7}{4}) \\ \\ & f'(\tfrac{3}{4}) = e^{\frac{3}{4}} \times (4 \times \tfrac{3}{4} - 3 + 4 \times \tfrac{3}{4}^2) \\ & = e^{\frac{3}{4}} \times (3 - 3 + 4 \times \tfrac{9}{16}) \\ & = e^{\frac{3}{4}} \times (\tfrac{9}{4}) \end{aligned}\right\} negativ/positiv\ VZW\ \to TP \tag{5.1}$$

$$x_2 : \left.\begin{array}{l} f'(-2) = e^{-2} \times (4 \times (-2) - 3 + 4 \times (-2)^2) \\ = e^{-2} \times (-8 - 3 + 16) \\ = e^{-2} \times 5 \\ \\ f'(0) = e^0 \times (4 \times 0 - 3 + 4 \times 0^2) \\ = -3 \end{array}\right\} positiv/negativ\ VZW \ \rightarrow HP \tag{5.2}$$

Y-Koordinaten bestimmen:

$x_1 : f(x_1) = f(0.5) = (2 \times 0.5 - 1)^2 \times e^{0.5} = 0$
$x_2 : f(x_1) = f(-1.5) = (2 \times (-1.5) - 1)^2 \times e^{-1.5} = (-4)^2 \times e^{-1.5} = 16 \times e^{-1.5}$

Die Funktion $f(x)$ hat einen Tiefpunkt $TP\Big(0.5\Big|0\Big)$ und eine Hochpunkt $HP\Big(-1.5\Big|16 \times e^{-1.5}\Big)$
Die Tangenten der Extremstellen verlaufen waagerecht, also parallel zur X-Achse:
$t_1(x) = 0$
$t_2(x) = 16 \times e^{-1.5}$

6. S. 140 Nr. 9

$f(x) = \frac{2}{(1+2x)^2}$
$f'(x) = \frac{-8}{(2x+1)^3}$

6.1 Teilaufgabe a)

$(1+2x)^2 = 0$
$(1+2x) \times (1+2x) = 0$
$1+2x = 0$
$2x = -1$
$x = -0.5$
Die Funktion ist für $x = -0.5$ nicht definiert.
$x \in \mathbb{R} \setminus \{-0.5\}$

6.2 Teilaufgabe b)

streng monoton abnehmend: $f'(x) < 0$:
$f'(x)$ ist kleiner als null, solange $2x+1$ positiv ist.
$2x+1$ ist positiv, wenn $x > -0.5$

$x \in \mathbb{R} \; > -0.5$

6.3 Teilaufgabe c)

$f(x)$ kann keine Extremstellen haben, da die Ableitung $f'(x)$ niemals gleich null ist. Da es ein Bruch ist, ist die Stelle, bei der der Nenner gleich null ist, nicht definiert.

6.4 Teilaufgabe d)

$t(x) = mx + b$
$f(0) = \frac{2}{(1+2\times 0)^2} = \frac{2}{1} = 2$
$\Rightarrow P(0|2)$
$f'(0) = -8$
$t(x) = -8x + 2$