Abituraufgaben 2023 Vektoren

Moritz Julina Ben Tanel

21. Januar 2025

1. Aufgabe a) (1)

$$B_1(10/-5/30)$$

2. Aufgabe a) (2)

Die von den zwei Punkten eingegrenzte Fläche hat vier Ecken, und vier Seiten, von denen nur zwei parallel sind:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B_2B_3} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} - 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{A_2A_3} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} - 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(\frac{\sqrt{75}}{3} - 10) \cdot x &= \frac{\sqrt{75}}{3} - 50 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{8 \cdot \sqrt{3} + 59}{11}
\end{aligned}$$

Durch diese Rechnung ergibt sich, dass die zwei Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, also parallel liegen.

Volumen des Körpers K :

$$\begin{aligned}
A_G &= \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \\
&= \frac{1}{2} \cdot (|\overrightarrow{A_2A_3}| + |\overrightarrow{B_2B_3}|) \cdot |\overrightarrow{A_3B_3}| \\
&\approx \frac{1}{2} \cdot (47.11 + 7.11) \cdot 30 \\
&\approx 813.3 \\
V_K &= A_G \cdot |\overrightarrow{A_3A_4}| \\
&= A_G \cdot 10 \\
&= 8133 VE
\end{aligned}$$

3. Aufgabe b) (1)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_2B_2} &= \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{A_2B_2} &= \begin{pmatrix} 50 - a \\ 5 \\ 0.75 \cdot a \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow r \leq 1
\end{aligned}$$

4. Aufgabe b) (2)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \\
g : \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 41 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \\
g &= \overrightarrow{A_2B_2}
\end{aligned}$$

Laut dem CAS gibt es keine Lösung.

5. Aufgabe c) (1)

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{A_4A_3}| &= \sqrt{0^2 + 10^2 + 0^2} \\
&= 10LE \\
|M_{A_3A_4}| &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
|\overrightarrow{M_{A_3A_4}A_3}| &= 5LE \\
|A_3P| &= 10LE \\
10^2 &= x^2 + 5^2 \\
x &= 5 \cdot \sqrt{3} \\
P &\begin{pmatrix} M_{A_3A_41} - x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
P &\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} - 5 \cdot \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
P &\begin{pmatrix} \frac{-10\cdot\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

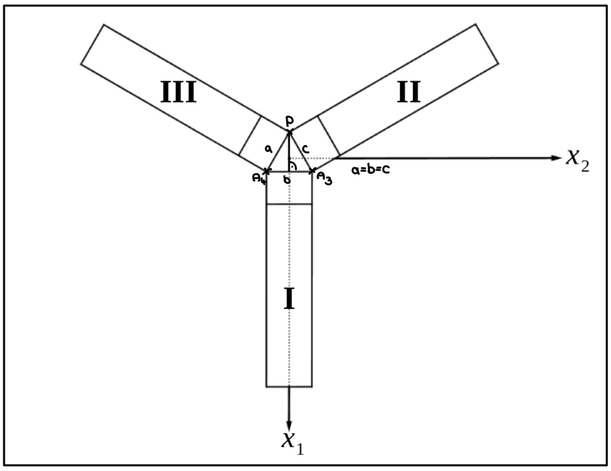

Abbildung 5

6. Aufgabe c) (2)

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{A_4O}| &= \sqrt{(\frac{\sqrt{75}}{3})^2 + (-5)^2 + 0^2} \\
&= \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

7. Aufgabe d) (1)

$$
\begin{aligned}
SV = \overrightarrow{A_1} &= \begin{pmatrix} 50 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
RV_1 = \overrightarrow{A_1A_2} &= \begin{pmatrix} 50-50 \\ 5+5 \\ 0-0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \\
RV_2 = \overrightarrow{A_1B_1} &= \begin{pmatrix} 10-50 \\ -5-(-5) \\ 30-0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F : \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 50 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{n} &= \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
300 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 400 \cdot x_3 &= d \\
300 \cdot 50 + 400 \cdot 0 &= d \\
15.000 &= d \\
F : 3x_1 + 4x_3 &= 150
\end{aligned}
$$

8. Aufgabe d) (2)

$$
\begin{aligned}
g : \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
g &= F \\
3 \cdot (0 + 6z) + 4 \cdot 35 - 2z &= 150 \\
\Rightarrow z &= 1 \\
&S(6/0/33)
\end{aligned}
$$

Der Schatten der Spitze liegt nicht innerhalb der Fläche, da $_3 = 33 > 30$(Ebene)