Exponentialfunktionen Übung (Gruppe 2)

Ben Siebert Tanel Malak Moritz Junkermann

6. Februar 2024

Inhaltsverzeichnis

1. S. 140 Nr. 10

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x \times e^{x^2-2}$

1.1 Teilaufgabe a)

Zu überprüfende Stammfunktion: $F(x) = e^{x^2-2}$

Gegebene Stammfunktion ableiten:

$u = e^x;\ v = x^2 - 2;\ u' = e^x;\ v' = 2x$

$f(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$

$f(x) = e^{x^2-2} \times 2x$

Die Stammfunktion $F(x) = e^{x^2-2}$ ist die korrekte Stammfunktion der Funktion $f(x) = 2x \times e^{x^2-2}$

1.2 Teilaufgabe b)

Nullstellen hinzufügen

Intervall $I\left[0;2\right]$

$\int_0^2 f(x)dx\left[F(x) = e^{x^2-2}\right]$

$\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0)$

$\Leftrightarrow e^{2^2-2} - e^{0^2-2}$

$\Leftrightarrow e^2 - e^{-2}$

$\xrightarrow{CAS} \approx 7.25372$

Die Fläche, die von dem Graphen der Funktion f, der x-Achse und der Geraden $x = 2$ eingeschlossen wird, beträgt in etwa $e^2 - e^{-2}$.

1.3 Teilaufgabe c)

Durch die Punktsymmetrie der Funktion $f(x)$ gleicht sich der Anteil der Integrale unterhalb und oberhalb der x-Achse aus, sodass das Intervall von $-a$ bis a immer Null ist.

2. S. 142 Nr. 24

2.1 Teilaufgabe a)

Ansatz:

$\int_1^e (\frac{3}{x} + x)dx = F(e) - F(1)$

Stammfunktion bilden:

$\int_1^e (\frac{3}{x} + x)dx \left[F(x) = 3 \times ln(|x|) + \frac{x^2}{2}\right]$

Integral bestimmen (und vereinfachen):

$\int_1^e (\frac{3}{x} + x)dx = F(e) - F(1)$

$\Leftrightarrow (3 \times ln(|e|) + \frac{e^2}{2}) - (3 \times ln(|1|) + \frac{1^2}{2})$

$\Leftrightarrow (3 \times ln(|e|) + \frac{e^2}{2}) - (3 \times 0 + \frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow (3 \times ln(|e|) + \frac{e^2}{2}) - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (3 \times 1 + \frac{e^2}{2}) - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (3 + \frac{e^2}{2}) - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{6}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{6+e^2-1}{2}$

$\xrightarrow{CAS} \approx 6.19$

2.2 Teilaufgabe b)

Ansatz:

$\int_1^e (\frac{2+4x}{x})dx = F(e) - F(1)$

Stammfunktion bilden:

$\int_1^e (\frac{2+4x}{x})dx \ \Rightarrow f(x) = 2 + 4x \times \frac{1}{x} \left[F(x) = 2x + 2x^2 \times ln(|x|)\right]$

Integral berechnen (und vereinfachen):

$\int_1^e (\frac{2+4x}{x})dx = F(e) - F(1)$

$\Leftrightarrow (2e + 2e^2 \times ln(|e|)) - 2 + 2 \times ln(|1|)$

$\Leftrightarrow (2e + 2e^2 \times 1) - 2 + 2 \times 0$

$\Leftrightarrow (2e + 2e^2) - 2$

$\Leftrightarrow 2e^2 + 2e - 2$

$\xrightarrow{CAS} \approx 18.21$

2.3 Teilaufgabe c)

Ansatz:
$\int_e^{e^2} (\frac{2x-5}{x^2})dx \ = F(e^2) - F(e)$
Stammfunktion bilden:
$\int_e^{e^2} (\frac{2x-5}{x^2})dx \Rightarrow f(x) = 2x - 5 \times \frac{1}{x^2} = 2x - \frac{5}{x^2} \left[F(x) = x^2 + \frac{5}{x}\right]$
Integral berechnen (und vereinfachen):

$F(e^2) - F(e)$

$\Leftrightarrow e^4 + \frac{5}{e^2} - e^2 + \frac{5}{e}$
$\xrightarrow{CAS} \approx 49.72$

3. S. 145 Nr. 5g

Funktion: $f(x) = 2x \times e^{2x-7}$

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$2x \times e^{2x-7} = 0$

$\rightarrow x_0 = 0$, da $2x$ nur 0, wenn $x = 0$ ist und e^x niemals gleich 0 sein kann.

Symmetrie:

$f(-x) = 2 \times (-x) \times e^{2\times(-x)-7}$

Es ist zu sehen, dass $f(-x) \neq f(x)$ bzw. $-f(x)$ ist, sodass der Graph der Funktion $f(x)$ keine Symmetrie besitzt.

Ableitungen:

$u = 2x;\ v = e^{2x-7};\ u' = 2;$

$s = e^x;\ t = 2x - 7;\ s' = e^x;\ t' = 2;$

$v' = e^{2x-7} \times 2$

$f'(x) = u' \times v + v' \times u$

$f'(x) = 2 \times e^{2x-7} + e^{2x-7} \times 2 \times 2x$

$f'(x) = e^{2x-7} \times (2 + 2 \times 2x)$

$f'(x) = e^{2x-7} \times (2 + 4x)$

$f''(x) = u_2' \times v_2 + u_2 \times v_2'$

$u_2 = 2 + 4x;\ u_2' = 4;\ v_2 = e^{2x-7};$

$s = e^x;\ t = 2x - 7;\ s' = e^x;\ t' = 2;$

$v' = e^{2x-7} \times 2$

$f''(x) = 4 \times e^{2x-7} + (2 + 4x) \times e^{2x-7} \times 2$

$f''(x) = e^{2x-7} \times (4 + (2 + 4x) \times 2)$

$f''(x) = e^{2x-7} \times (4 + 4 + 8x)$

$f''(x) = e^{2x-7} \times (8 + 8x)$

$f'''(x) = u_3' \times v_3 + u_3 \times v_3'$

$u_3 = 8 + 8x;\ u_3' = 8;\ v_3 = e^{2x-7};$

$s_3 = e^x;\ s_3' = e^x;\ t_3 = 2x - 7;\ t_3' = 2;$

$v_3' = e^{2x-7} \times 2$

$f'''(x) = 7 \times e^{2x-7} + (8 + 8x) \times e^{2x-7} \times 2$

$f'''(x) = e^{2x-7} \times (7 + (8 + 8x) \times 2)$

$f'''(x) = e^{2x-7} \times (7 + 16 + 16x)$

$f'''(x) = e^{2x-7} \times (23 + 16x)$

Verhalten nahe Null:

Die Funktion f verhält sich nahe 0 wie die Funktion g mit $g(x) = e^x$.

Extremstellen:

notwendige Bedingung für EST: $f'(x) = 0$

$e^{2x-7} \times (2 + 4x) = 0$

$\Leftrightarrow 2 + 4x = 0 \; \Big| \div 4$

$\Leftrightarrow 0.5 + x = 0 \; \Big| -0.5$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$

hinreichende Bedingung für EST: $f'(x) = 0 \; \wedge \; f''(x) \neq 0$

$f''(-\frac{1}{2}) = e^{2x-7} \times (12 + 4x)$

$\Leftrightarrow f''(-\frac{1}{2}) > 0$

$\Rightarrow Tiefpunkt$

Y-Wert bestimmen:

$f(\frac{1}{2}) = 2x \times e^{2x-7}$

$\Leftrightarrow 2 \times (-\frac{1}{2}) \times e^{2\times(-\frac{1}{2})-7}$

$\Leftrightarrow -1 \times e^{-8}$

Die Funktion $f(x)$ besitzt einen Tiefpunkt $TP(\frac{1}{2}\Big|-e^{-8})$

Randverhalten:

Für $x \to \infty$ verhält sich die Funktion f wie die Funktion h mit $h(x) = e^x$. Für $x \to -\infty$ verhält sich die Funktion f wie die Funktion h mit $h(x) = e^x$.

Wendestellen:

notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x) = 0$

Monotinie: