S. 146 Nr. 11

a)
Der Y-Achsenabschnitt ist immer der Gleiche.
Nullstellen:
Der Graph hat für $t \leq 0$ eine Nullstelle. Für $t > 0$ hat er entweder keine oder zwei Nullstellen. Für $t = e$ besitzt der Graph eine Nullstelle.

$$\begin{aligned} f_t(x) &= 0 \\ e^x - tx &= 0 \end{aligned}$$

Extremstellen:
Der Graph hat für $t > 0$ immer einen Tiefpunkt. Für $t \leq 0$ besitzt der Graph keine Extremstellen.

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= e^x - t \\ f_t'(x) &= 0 \\ e^x - t &= 0 \\ x &= ln(t) \ \wedge \ t > 0 \end{aligned}$$

Es gibt Extremstellen, wenn $t > 0$ ist.

b)
notwendige Bedingung für EST: $f_t'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= e^x - t \\ f_t'(x) &= 0 \\ e^x - t &= 0 \\ x &= ln(t) \ \wedge \ t > 0 \end{aligned}$$

hinreichende Bedingung für EST: $f_t'(x) = 0 \ \wedge \ f_t''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f_t''(x) &= e^x \\ f_t''(ln(t)) &= e^{ln(t)} \\ f_t''(ln(t)) &> 0 \Rightarrow TP \end{aligned}$$

Koordinaten:

$$f_t(ln(t)) = t - t \cdot ln(t)$$

$TP\Big(ln(t)\Big|t - t \cdot ln(t)\Big)$

Ortskurve:

$$x = ln(t)$$
$$t = e^x$$

t in Y-Koordinate einsetzen.

$$y = e^x - e^x \cdot ln(e^x)$$
$$y = (1 - x) \cdot e^x$$
$$\Rightarrow g(x) = (1 - x) \cdot e^x$$

S. 146 Nr. 12

a)

$$f_k(x) = (2x + 3k) \cdot e^{(x+1)}$$
$$f_k'(x) = 5.4365 \cdot (x + 8.5) \cdot e^x$$
$$f_k''(x) = 5.4365 \cdot (x + 9.5) \cdot e^x$$

Extremstellen:
notwendige Bedingung für EST: $f_k'(x) = 0$

$$f_k'(x) = 0$$
$$x = \frac{-(3 \cdot k + 2)}{2}$$

hinreichende Bedingung für EST: $f_k'(x) = 0 \; \wedge f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(\frac{-(3 \cdot k + 2)}{2}) = 0.001106 \; > 0$$
$$\Rightarrow TP$$

Y-Koordinate bestimmen: $f_k(\frac{-(3 \cdot k+2)}{2})$

$$f_k(\frac{-(3 \cdot k + 2)}{2}) = -2 \cdot e^{\frac{-3 \cdot k}{2}}$$

Tiefpunkt: $TP\left(\frac{-(3 \cdot k+2)}{2} \middle| -2 \cdot e^{\frac{-3 \cdot k}{2}}\right)$

Wendestellen:
notwendige Bedingung für WST: $f_k''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f_k''(x) &= 0 \\ x &= \frac{-(3 \cdot k + 4)}{2} \end{aligned}$$

hinreichende Bedingung für WST: $f_k''(x) = 0 \ \wedge \ f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(\frac{-(3 \cdot k + 4)}{2}) = 2 \cdot e^{\frac{-3 \cdot k}{2} - 1}$$

b)

$$\begin{aligned} 4 &= f_k(-1) \\ \Leftrightarrow 4 &= (2 \cdot (-1) + 3k) \cdot e^{(-1+1)} \\ \Leftrightarrow 4 &= (-2 + 3k) \cdot e^0 \\ \Leftrightarrow 4 &= -2 + 3k \ \Big| +2 \\ \Leftrightarrow 6 &= 3k \ \Big| \div 3 \\ \Leftrightarrow k &= 2 \end{aligned}$$

c)
Bei einer Erhöhung von k, wird die Extremstelle nach links verschoben und nähert sich der x-Achse an.

d)

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(3 \cdot k + 2)}{2} \\ k &= \frac{-2 \cdot (x + 1)}{3} \\ y &= -2 \cdot e^{\frac{-3 \cdot \frac{-2 \cdot (x+1)}{3}}{2}} \\ y &= -2 \cdot e^{x+1} \\ g(x) &= -2 \cdot e^{x+1} \end{aligned}$$

S. 154 Nr. 9

$$f_k(x) = x - k \cdot e^x$$
$$f'_k(x) = 1 - k \cdot e^x$$
$$f''_k(x) = -k \cdot e^x$$

a)
Für $k \leq 0$ und $x \to \infty$ strebt $f(x)$ ebenfalls ∞ an.
Für $k \leq 0$ und $x \to -\infty$ strebt $f(x)$ ebenfalls $-\infty$ an.
Für $k > 0$ und $x \to \infty$ strebt $f(x)$ ebenfalls $-\infty$ an.
Für $k > 0$ und $x \to -\infty$ strebt $f(x)$ ebenfalls $-\infty$ an.
(Asymptote)

b)

$$f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x)$$
$$x - k_1 \cdot e^x = x - k_2 \cdot e^x$$

Hierdurch würde $k_1 = k_2$ gelten, was durch die Aufgabenstellung revidiert wird, da $k_1 \neq k_2$ gilt.

c)
notwendige Bedingung für EST: $f'_k(x) = 0$

$$f'_k(x) = 0$$
$$\xrightarrow{CAS} x = ln(\frac{1}{k}) \ \wedge \ k > 0$$

hinreichende Bedingung für EST: $f'_k(x) = 0 \ \wedge f''_k(x) \neq 0$

$$f''_k(ln(\frac{1}{k})) = -1$$
$$-1 < 0 \rightarrow \text{Hochpunkt}$$

Y-Wert: $f(ln(\frac{1}{k})) = ln(\frac{1}{k}) - 1$

Hochpunkt: HP$(ln(\frac{1}{k})|ln(\frac{1}{k}) - 1)$
Der Graph besitzt für $k > 0$ immer einen Hochpunkt. Für $k < 0$ existieren keine Extremstellen.

d)

$$\begin{aligned} x &= ln(\frac{1}{k}) \\ k &= e^{-x} \end{aligned}$$

In Y-Koordinate einsetzen:

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ g(x) &= x - 1 \end{aligned}$$

e)

$$\xrightarrow{CAS} F_k(x) = \frac{x^2}{2} - k \cdot e^x$$

f)

$$\int_a^0 (f_k(x) - g(x))dx = [F(x) =]$$