Функциональные последовательности и ряды, несобственный интеграл

Методичка по 3 семестру специальности «Информатика»

лектор Кастрица О.А.

Оглавление

Лекция 1

1.1 Функциональные последовательности и ряды

Будем рассматривать последовательность функций $f_1, f_2, \dots f_n$, где функция $f_k : x \in X \longmapsto f_k(x)$ определена на некотором множестве X.

При фиксированном $x = x_0 \in X$ мы получим числовую последовательность $(f_k(x_0)) : x_0 \in X$.

Определение 1. *Если числовая последовательность $f_k(x_0)$ сходится, то говорят, что функциональная последовательность* ***сходится в точке*** *x_0. Это означает, что:*

$$\exists y_0 \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \nu = \nu(\epsilon, y_0) :\ \forall n \geq \nu \ \Rightarrow\ |f_n(x_0) - y_0| \leq \epsilon \quad (\leq M\epsilon)$$

В точке $x_0 \in X$ последовательность может быть **сходящейся** либо **расходящейся**.

Определение 2. *Множество всех точек $x \in X$, в которых последовательность сходится, называется* ***множеством сходимости****.*

Пусть X_1 – множество сходимости последовательности f_n. Тогда $X_1 \subset X$.

На множестве X_1 определена функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in X_1$

Записывается следующим образом: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X_1}{\to}} f(x), \quad \forall x \in X_1$. Это означает, что

$$\exists y, \forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu(\epsilon, y) : \forall n \geq \nu \Rightarrow |f(x) - y| \leq \epsilon, \forall x \in X_1 \quad (\leq M\epsilon)$$

Пример.

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1; \end{cases} \qquad \text{Множество сходимости: } X_1 = (-1, 1]$$

1.1.1 Функциональный ряд

Пусть задана функциональная последовательность $u_k(x),\ k = 1, 2, \dots$

Построим следующую последовательность:

$$\begin{cases} S_1(x) = u_1(x) \\ S_2(x) = u_1(x) + u_2(x) \\ S_3(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \end{cases}$$

последовательность сумм.

Её удобно изучать в виде $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. (1)

Определение 3. *(1) называется* ***функциональным рядом****.*

Определение 4. *Суммы $S_n(x)$ называют* ***частными суммами ряда****.*

Если последовательность $S_n(x)$ сходится на некотором множестве X, то есть имеет конечный предел $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\to}} S(x) \in \mathbb{R}$, то говорят, что ряд **сходится в точке** x.

Таким образом сходимость ряда — это сходимость последовательности его частных сумм.

Определение 5. *$S(x)$ — сумма ряда* $(S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x))$

Если ряд сходится в каждой точке множества X, то можно задать функцию

$$S : x \longmapsto S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

Сходимость ряда в точке x означает, что

$$\forall\epsilon > 0, \exists\nu = \nu(\epsilon, x) : \forall n \geq \nu \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \epsilon \quad (\leq M\epsilon)$$

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$. Он сходится при $|x| < 1$, множество сходимости: $(-1; 1)$

Таким образом, ряд — это последовательность частных сумм $S_n(x)$.

С другой стороны, если задана последовательность $f_1(x), f_2(x), \dots$, то можно построить ряд

$$f_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(x) - f_k(x)) = f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x)) + (f_3(x) - f_2(x)) + \dots$$

$$\begin{cases} S_1(x) = f_1(x) \\ S_2(x) = f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ S_n(x) = f_n(x)\ \forall n \end{cases}$$

То есть последовательность можно рассматривать как ряд и наоборот.

Тогда всякий результат, сформулированный и доказанный для рядов, может быть сформулирован и доказан для последовательности и наоборот. Это называется **принцип переноса результатов**.

1.1.2 Критерий Коши сходимости в точке

Теорема 1. *Последовательность $f_n(x)$ сходится в точке x $\Leftrightarrow$*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\nu = \nu(\epsilon, x) : \forall n, m \geq \nu \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \quad (\leq M\epsilon)$$

Теорема 2. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в точке x $\Leftrightarrow$*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\nu = \nu\,(\epsilon, x) : \forall n, m \geq \nu\ (n > m) \Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| \leq \epsilon \quad (\leq M\epsilon)$$

$\diamondsuit$ Доказательство следует из теорем для числовых рядов, так как при фиксированном x мы имеем дело с числовым рядом(последовательностью). $\blacksquare$

Свойства слагаемых(элементов ряда) **не переносятся** на свойства суммы ряда.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x^k - x^{k+1}) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \dots$

Посчитаем, чему равняются его частные суммы: $S_n(x) = x - x^{n+1}$

Найдем сумму ряда: $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

Ряд сходится на интервале $(-1; 1]$ к $S(x)$. При других x предел не существует или бесконечен.

1.2 Равномерная сходимость

Пусть последовательность $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x)$, то есть сходится в любой точке $x \in X$.

Определение 6. *Говорят, что $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на X **равномерно**, если*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu(\epsilon) : \forall n \geq \nu, \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad (\leq M\epsilon)$$

Обозначается $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$.

Определение 7. *Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на X **равномерно**, если*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu = \nu(\epsilon) : \forall n \geq \nu, \forall x \in X \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \epsilon \quad (\leq M\epsilon)$$

Обозначается $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Если ряд сходится равномерно на X, то он сходится в каждой его точке, обратное в общем случае неверно(то же самое и для последовательностей).

Пример. Рассмотрим последовательность $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$, $x \in [0, 1]$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Последовательность сходится в каждой точке из $[0, 1]$, но если взять $\epsilon = \frac{1}{3}$, то

$$\exists n_0, \exists x_0 = \frac{1}{2n_0} : f_n(x_0) = 1 - n_0\frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}$$

Тогда $|f_n(x_0) - f(x_0)| = \frac{1}{2} > \epsilon = \frac{1}{3} \Rightarrow$ последовательность не сходится равномерно на $[0, 1]$.

1.2.1 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 3. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \nu = \nu(\epsilon) : \forall n, m \geq \nu,\ \forall x \in X \Rightarrow$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \quad (\leq M\epsilon)$$

Теорема 4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists\nu = \nu(\epsilon) : \forall n, m \geq \nu, (n > m), \forall x \in X \Rightarrow$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| \leq \epsilon \quad (\leq M\epsilon)$$

$\diamondsuit$ Доказательство проводится для последовательности.

$\Rightarrow$ Возьмём $\forall\epsilon > 0$, тогда из определения равномерной сходимости следует, что

$$\exists\nu : \begin{cases} n \geq \nu, \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \\ m \geq \nu, \forall x \in X \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon \end{cases}$$

Но тогда $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$

$\Leftarrow$ Для $\forall x \in X$ выполняется критерий Коши сходимости числовой последовательности, то есть $\exists f(x)$, следовательно последовательность сходится.

В неравенстве $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ возьмём $n \geq \nu$, а $m \to \infty$.

Получим $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,\ \forall x \in X$, то есть выполняется определение равномерной сходимости.

Теорема 4 также доказана на основании принципа переноса результатов. $\blacksquare$

Лекция 2

2.1 Изучение равномерной сходимости

Пусть функция $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$, $x \in X$.

Тогда говорят, что функция $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ **равномерно** ($f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$), если

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall n \geq \delta, \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится **равномерно** на множестве X ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$), если

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall n \geq \delta, \forall x \in X \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \epsilon$$

2.1.1 Признак Вейерштрасса

.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $x \in X$. (1)

Определение 8. *Числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ *называют* ***мажорантой*** *на множестве* X, *если* $|u_k(x)| \leq C_k$, $\forall x \in X$.

Теорема 5. *Если для ряда (1) на* X *существует сходящаяся мажоранта, то ряд (1) сходится равномерно на* X.

$\Diamond$ Для доказательства используем критерий Коши.

Возьмем любое $\epsilon > 0$. Тогда, так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k$ сходится, то

$$\exists \nu = \nu(\epsilon), \forall n, m \geq \nu \, (n > m) \Rightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{n} C_k \right| = \sum_{k=m+1}^{n} C_k \leq \epsilon$$

.

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |u_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} C_k \leq \epsilon$$

На основании критерия Коши ряд сходится равномерно. $\blacksquare$

Пример. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k\sqrt{k+2}}$. Тогда для него выполняется следующее:

$$\left|\frac{\sin kx}{k\sqrt{k+2}}\right| \leq \frac{1}{k\sqrt{(k+2)}} \sim \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+2}}$ — сходящаяся мажоранта для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k\sqrt{k+2}} \Rightarrow$ исходный функциональный ряд равномерно сходится на множестве $\mathbb{R}$.

Пусть функция $f_n(x) \overset{X}{\to} f(x)$. Это означает, что $|f_n(x) - f(x)| \overset{X}{\to} 0$.

Теорема 6. *Если существует числовая последовательность d_n, такая что $|f_n(x) - f(x)| \leq d_n$, $\forall x \in X$ и $d_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.*

$\diamondsuit$ Возьмем любое $\epsilon > 0$. Тогда

$$\exists \nu = \nu(\epsilon) : \forall n \geq \nu,\ d_n \leq \epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq d_n \leq \epsilon, \quad \forall x \in X$$

.

Отсюда получаем, что $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. ■

2.1.2 Супремальный критерий

Теорема 7. *Пусть $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\to}} f(x)$ и $\phi_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$, а $\sigma_n = \sup\limits_X \phi_n(x)$.*

Тогда $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty \Leftrightarrow \sigma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

$\diamondsuit$ $\Leftarrow$ Пусть $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Тогда по теореме 6 следует, что $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Достаточно взять $d_n = \sigma_n$.

$\Rightarrow$ Пусть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Допустим, что $\sigma_n \nrightarrow 0$, то есть $\exists \epsilon$, такое что $\forall \nu$, $\exists m : |\sigma_m| > \epsilon$. Но σ_m — это супремум, тогда по свойству супремума $\exists x_m$, т.ч. $\phi_m(x_m)$ отличается от σ_m не больше, чем на $\frac{\epsilon}{2}$. Тогда

$$|\phi_m(x_m)| > \frac{\epsilon}{2}$$

Это означает, что неравенство $|\phi_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ не выполняется для любого $x \in X$. То есть, равномерной сходимости нет. Получили противоречие. ■

Пример. Рассмотрим последовательность $f_n(x) = x^n - x^{2n},\ x \in [0, 1]$.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ \forall x \in [0, 1]$$

Поэтому $\phi_n(x) = |x^n - x^{2n} - 0| = x^n - x^{2n}$.

Найдем супремум функции $\phi_n(x)$. В данном случае, это будет максимум функции $\phi_n(x)$, т.к. она непрерывна (смотрите теорему Вейерштраса).

$$\phi'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = (1 - 2x^n)nx^{n-1} = 0$$

При этом $\sigma_n = \sup\limits_{[0,1]} \phi_n(x) = \phi_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \nrightarrow 0$.

Вывод: последовательность сходится на $[0, 1]$, но не сходится равномерно.

Пример. Рассмотрим функциональную последовательность $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, x \in [0,1]$.

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$$

Тогда $\phi_n(x) = x^n - x^{n+1}$ и $\phi_n(0) = 0, \phi_n(1) = 0$.

$$\phi_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{n}{n+1} - \text{корень}$$

$$\phi_n(x_0) = x^n(1-x)|_{x=x_0} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{1+n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e}\cdot 0 = 0$$

Имеем $\sigma_n \to 0$, последовательность сходится по супремальному критерию.

2.2 Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости

2.2.1 Признак Дирихле

Теорема 8. *Будем рассматривать ряд вида:* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x),\ x \in X. \quad (2)$

1. *Пусть существует* $M : |\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)| \le M,\ \forall n, \forall x \in X$.
2. *Последовательность* $v_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$ *и монотонна при каждом фиксированном* x.

Тогда ряд (2) сходится равномерно на множестве X.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k},\ x \in [a,b] \subset (0,\pi)$.

Возьмем $u_k(x) = \sin kx$, $|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx| \le |\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}| \le M - \min\{\sin a, \sin b\},\ \forall x \in [a,b]$.

Возьмем $v_k(x) = \frac{1}{k}$. Последовательность $v_k(x)$ не зависит от x и стремится к 0 монотонно, а следовательно оно стремится к 0 равномерно.

Значит по признаку Дирихле $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$.

2.2.2 Признак Абеля

Теорема 9. *Будем рассматривать ряд (2).*

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на множестве* X.
2. *Последовательность* $v_k(x)$ *монотонна при каждом фиксированном* x *и равномерно ограничена. Т.е.* $\exists M : |v_k(x)| \le M,\ \forall k, \forall x \in X$.

Тогда ряд (2) сходится равномерно на X.

Пример. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx \cdot \arctan kx^2}{\ln k}$, $x \in [a,b] \subset (0,\pi)$.

Пусть $v_k(x) = \arctan kx^2$. Тогда последовательность стремится к $\frac{\pi}{2}$ $\forall x \in [a,b]$. Отсюда следует, что последовательность $v_k(x)$ равномерно ограничена и монотонна при любом фиксированном x.

Пусть $\sum\limits_{k=2}^{\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$. Этот ряд сходится равномерно по признаку Дирихле на промежутке $[a,b]$. Следовательно получаем, что $\sum\limits_{k=2}^{\infty} u_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$.

На основании признака Абеля исходный ряд сходится равномерно на $[a,b]$.

Лекция 3

3.1 Предельный переход в рядах и последовательностях

Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}$ и пусть x_0 предельная точка множества X.

Теорема 10. *1. Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x),\ x \in X$ *сходится.*

2. Существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} u_k(x) = b_k \in \mathbb{R},\ \forall k.$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}.$

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to x_0} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *(1).*

Теорема 11. *1. Пусть последовательность* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x),\ x \in X.$

2. Существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = b_n,\ n = 1, 2, \ldots.$

3. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x).$

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *(2).*

Формулы (1) и (2) говорят о том, что допускается почленный предельный переход.

$\diamondsuit$ Доказательство проведем для теоремы 10. Докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Возьмем любое $\epsilon > 0$. Учитывая условие 3, по критерию Коши равномерной сходимости рядов $\exists \nu = \nu(\epsilon) :\ \forall n, m \geq \nu\ (n > m),\ \forall x \in X \Rightarrow |\sum\limits_{k=m+1}^{n} u_k(x)| \leq \epsilon.$

В последнем неравенстве конечное число слагаемых и поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \left| \sum_{k=m+1}^{n} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \lim_{x\to x_0} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} b_k \right| \leq \epsilon$$

Работает критерий Коши для сходимости числового ряда, а следовательно $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Рассмотрим $\left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \right|.$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k(x) - b_k| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| \leq *$$

.

Следуя из пункта 3 и того, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то

$$\exists \nu_\epsilon, \forall n_0 \geq \nu_\epsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \epsilon, \forall x \in X \text{ и } \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} b_k\right| \leq \epsilon$$

Зафиксируем это $n_0 \geq \nu_\epsilon$ и так как выполняется пункт 2 из теоремы, то :

$$\exists \delta_\epsilon, \forall x \in X, 0 < |x - x_0| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow |u_k(x) - b_k| \leq \frac{\epsilon}{n_0}$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n_0} |u_k(x) - b_k| \leq \epsilon$, а значит $* \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$. Отсюда следует, что (1) верно. ■

Теорема 11 доказывается на основании принципа переноса результатов.

Пример. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ сходится равномерно при $x \in (1, +\infty)$.

В качестве точки x_0 возьмем точку 1.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{k} = b_k$$

По теореме 10 получаем, что равномерной сходимости на этом промежутке нет.

3.1.1 Теорема Стокса-Зейделя

Теорема 12. *1. Пусть $u_k(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$.*

2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Тогда сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 13. *1. Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$.*

2. Последовательность $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Тогда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

♢ Доказательство проведем для теоремы 12.

Так как $u_k(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\exists b_k = \lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = u_k(x_0)$.

Тогда по теореме 10 $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = S(x_0)$.

Следовательно $S(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Пример. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k+1})$.

В качестве $u_k(x)$ возьмем $u_k(x) = x^k - x^{k+1}$.

Рассмотрим частную сумму $S_n(x) = (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots + (x^n - x^{n+1}) = x - x^{n+1}$.

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 1]$$

Если бы ряд сходился равномерно на $[0, 1]$, то сумма ряда была бы непрерывна на этом отрезке. Сумма в данном случае не является непрерывной функцией, тогда равномерной сходимости нет.

3.1.2 Теорема Дини

Теорема 14. *1. Пусть члены ряда $u_k(x)$ и его сумма $S(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.*

2. $u_k(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b], \forall k$.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$

3.2 Почленное интегрирование

Теорема 15. *1. $u_k(x)$ непрерывны на $[a, b]$.*

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$.

Тогда $\int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_k(x)dx$ (3).

Теорема 16. *1. Пусть $f_n(x)$ непрерывна на $[a, b]$.*

2. $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$ (4).

$\diamondsuit$ Докажем теорему 16.

Возьмем любое $\epsilon > 0$.

Функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, так как она непрерывна на основании теоремы 13. При этом $\left|\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b (f(x) - f_n(x))dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq *$

Учитывая условие 2, то $\exists \nu_\epsilon, \forall n \geq \nu_\epsilon, \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

$$* \leq \int_a^b \epsilon dx = \epsilon(b - a)$$

Значит выполняется соотношение (4). $\blacksquare$

3.3 Почленное дифференцирование

Теорема 17. *1. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится и имеет сумму $S(x), x \in [a, b]$.*

2. Члены ряда, т.е. функции $u_k(x)$, имеют непрерывные производные.

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$

Тогда функция $S(x)$ имеет непрерывную производную:

$$S'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \quad (5)$$

Теорема 18. *1. Пусть последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на $[a,b]$, при $n \to \infty$.*

2. Элементы $f_n(x)$ имеют непрерывные производные $f'_n(x), n = 1, 2, \ldots$

3. Последовательность из производных $f'_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$ к своему пределу.

Тогда $f'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

$\diamondsuit$ Доказательство проведем для теоремы 17.

Обозначим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x) = S^*(x)$.

Заметим, что функция $S^*(x)$ непрерывна (Т. Стокса-Зейделя). Из условия 3 следует, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \overset{[a,x]}{\rightrightarrows}$, $\forall x \in [a,b]$.

На основании теоремы 15 можем записать:

$$\int\limits_a^x S^*(x)dx = \int\limits_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^x u'_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k(x) - u_k(a)) = S(x) - S(a)$$

То есть $\int\limits_a^x S^*(x)dx = S(x) - S(a)$ (6).

Продифференцируем (6) по x. Тогда по теореме Барроу получаем: $S^*(x) = S'(x)$.

Таким образом $S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$. Теорема доказана. $\blacksquare$

Пример. Рассмотрим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$.

Так как функция $\left(\frac{\sin kx}{k^3}\right)' = \frac{\cos kx}{k^2}$ непрерывна на любом отрезке $[a,b]$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$, поскольку имеет сходящуюся мажоранту $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, то этот ряд можно дифференцировать почленно при любом x.

Определение 9. *Говорят, что ряд(последовательность) сходится* ***локально равномерно на множестве*** *X, если он сходится равномерно $\forall [a,b] \in X$.*

В теореме Стокса-Зейделя и в теореме о почленном дифференцировании можно требовать вместо равномерной сходимости локально равномерную сходимость.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, x \in (1, +\infty)$

Возьмем любой отрезок $[a,b] \subset (1, +\infty)$. Тогда

$$\frac{1}{k^x} \le \frac{1}{k^a}, \forall x \in [a,b]$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ сходится и является сходящейся мажорантой для исходного ряда. Тогда по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$, т.е. на промежутке $(1, +\infty)$ этот ряд сходится локально равномерно.

Покажем, что сумма ряда дифференцируема в любой точке $(1, +\infty)$.

Возьмем $\forall x \in [a,b] \subset (1,+\infty)$ и применим теорему о почленном дифференцировании.

$$\left(\frac{1}{k^x}\right)' = (k^{-x})' = -k^{-x}\ln k = -\frac{\ln k}{k^x}$$

Теперь докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} -\frac{\ln k}{k^x}$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$.

$$\left|-\frac{\ln k}{k^x}\right| \leq \frac{\ln k}{k^a},\ \forall x \in [a,b]$$

Положим $a = 1+\epsilon$, где $\epsilon > 0$. Тогда

$$\frac{\ln k}{k^a} = \frac{\ln k}{k^{1+\epsilon}} = \frac{\ln k}{k^{\frac{\epsilon}{2}} k^{1+\frac{\epsilon}{2}}} \leq \frac{1}{k^{1+\frac{\epsilon}{2}}}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{\epsilon}{2}}}$ сходится и является сходящейся мажорантой для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} -\frac{\ln k}{k^x}$, а значит по признаку Вейерштрасса это ряд сходится равномерно на отрезке $[a,b]$.

Лекция 4

4.1 Степенные ряды

Определение 10. ***Степенными рядами*** *называем ряды следующих видов:*
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (1) • $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ (2) *($x, a_k, x_0 \in \mathbb{R}$)*

Замена $x - x_0 = X$ приводит ряд (2) к виду (1): $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Поэтому если ряд (2) сходится в $\bar{X}$, то (1) сходится в точке $\bar{X} = \bar{x} - x_0$.

4.1.1 Теорема Абеля

Теорема 19. *Если ряд* (1) *сходится при* $x = u$*, то он сходится абсолютно при любом* $|x| < |u|$*. Ряд* (1) *будет сходиться на промежутке* $(-R; R)$*, где* $R = |u|$*.*

Теорему Абеля можно применить и к рядам (2). Пусть в $x = u$ ряд (1) сходится. Тогда для любого $x : |x - x_0| < |u|$ сходится ряд (2). Тогда ряд (2) будет сходиться на промежутке $(x_0 - R; x_0 + R)$, где $R = |u|$.

4.1.2 Радиус сходимости, множество сходимости ряда

Определение 11.

- *Для ряда* (1) *положим* $R = \sup\{x \mid (1) \text{ сходится в } x\}$.
- *Для ряда* (2) *положим* $R = sup\{x - x_0 \mid (2) \text{ сходится в } x\}$.

*R называют **радиусом сходимости** степенного ряда.*

Теорема 20. *Для радиуса сходимости степенного ряда верны следующие формулы :*

- $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ *(формула Д'Аламбера)* • $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ *(формула Коши)*

Примечание : *Эти формулы, понятное дело, работают только если описанные пределы существуют.*

$\diamondsuit$ Положим $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Применяя критерий Д'Аламбера для числовых рядов к ряду (2) получаем следующий предел :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n(x - x_0)^n|}{|a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}|} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right) \cdot \frac{1}{|x - x_0|} = \frac{D}{|x - x_0|}$$

При $\frac{D}{|x-x_0|} < 1 \Leftrightarrow |x-x_0| > D$ ряд будет расходиться, значит $R \leq D$. С другой стороны при $\frac{D}{|x-x_0|} > 1 \Leftrightarrow |x-x_0| < D$ ряд сходится и $R \geq D$. Значит $R = D$.

Положим $K = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Применяя признак Коши для числовых рядов к ряду (2) получаем :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right) \cdot |x-x_0| = \frac{|x-x_0|}{K}$$

Если $\frac{|x-x_0|}{K} > 1$ то (2) расходится $\Rightarrow R \leq K$. С другой стороны (2) сходится при $\frac{|x-x_0|}{K} < 1$ и тогда $R \geq K$, а значит $R = K$. ■

Примечание : В некоторых случаях формула Коши не работает, но работает ее обобщение : $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$(формула Коши-Адамара).

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

Воспользуемся формулой Д'Аламбера получаем, что $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Значит ряд точно сходится на $(-1;1)$.

При $x = 1$ мы знаем что этот ряд расходится.

При $x = -1$ можно легко убедиться что этот ряд сойдется.

В итоге ряд сходится на $[-1;1)$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2}$

Пользуемся формулой Коши получаем, что $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\left(-\frac{2}{n}\right)} = 1$. Тогда ряд точно сходится на $(1;3)$.

При $x = 3$ получаем ряд обратных квадратов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, который как мы знаем сходится.

При $x = 1$ также получаем сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

В итоге ряд сходится на $[1;3]$.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k! \cdot x^k$

Пользуясь формулой Д'Аламбера получаем, что $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0$. То есть ряд сходится только на $\{0\}$.

Пример. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 3^{(-1)^k \cdot k} \cdot x^k = 1 + \frac{1}{3} \cdot x + 3^2 \cdot x^2 + \frac{1}{3^3} \cdot x^3 + \ldots$

Формула Коши здесь уже не даст никаких результатов. Поэтому воспользуемся формулой Коши-Адамара :

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{3^{(-1)^n \cdot n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} 3^{(-1)^n} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$$

4.2 Равномерная сходимость степенного ряда

Теорема 21. *Пусть* R *- радиус сходимости ряда* (2). *Тогда для любого* $I = [x_0 - r; x_0 + r] \subseteq (x_0 - R; x_0 + R)$ *ряд* (2) *сходится равномерно на* I.

$\diamondsuit$ Ряд (2) имеет в качестве числовой мажоранты ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|\mu^k$, где $\mu = \max(|x_0 - r|, |x_0 + r|)$ (из теоремы Абеля следует абсолютная сходимость, а значит она позволяет гарантировать сходимость мажоранты).

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (2) сходится равномерно. $\blacksquare$

Можно показать, что ряд (2) задает непрерывную функцию на $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Для доказательства непрерывности в точке $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ достаточно просто выбрать такое $I \subseteq (x_0 - R; x_0 + R)$, что $x \in I$ и воспользоваться теоремой Стокса-Зейделя.

Теорема 22. *Пусть R - радиус сходимости ряда* (2) *и пусть* (2) *сходится в $x = x_0 + R$ (или в $x = x_0 - R$).*

Тогда для любого $a \in (x_0 - R; x_0 + R)$ ряд (2) *сходится равномерно на $[a; x_0 + R]$ (или $[x_0 - R; a]$) и задает непрерывную функцию на $(x_0 - R; x_0 + R]$ (или $[x_0 - R; x_0 + R)$).*

$\diamondsuit$ Доказательство строится по аналогии с предыдущими рассуждениями.

В качестве числовой мажоранты для ряда (2) на $[a; x_0 + R]$ берем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|\mu^k$, где $\mu = \max(|a|, |x_0 + R|)$, а затем пользуемся теоремой Вейерштрасса.

Для доказательства непрерывности снова используем теорему Стокса-Зейделя. $\blacksquare$

4.3 Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Лемма 1. *Пусть R - радиус сходимости ряда* (2)*. Тогда такой же радиус сходимости имеют и ряды :*

(D) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x - x_0)^{k-1}$ $\qquad$ (I) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$

$\diamondsuit$ Воспользуемся формулой Коши-Адамара:

$$(D)\ \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|na_n|}} = \left(\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n|}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}\right) = 1 \cdot R = R$$

$$(I)\ \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\frac{a_n}{n+1}|}} = \left(\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}\right) = 1 \cdot R = R$$

$\blacksquare$

В качестве вывода из этой теоремы получается несколько пунктов:

- Рассмотренные в теореме ряды как и исходный ряд сходятся на $(x_0 - R; x_0 + R)$
- Исходя из теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда : $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k\right)' = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(a_k(x - x_0)^k\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x - x_0)^{k-1}$
- Пусть $w \in (x_0 - R; x_0 + R)$. Тогда исходя из теоремы о почленном интегрировании функционального ряда : $\int\limits_{x_0}^{w} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k\right) dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{x_0}^{w} a_k(x - x_0)^k dx\right) =$
$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(w - x_0)^{k+1}$

- Ясно, что функция заданная рядом (2) бесконечно интегрируема и дифференцируема на $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Пример. Пусть дан ряд $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

Как мы видели ранее $R = 1$ и ряд сходится лишь на $[-1; 1)$. Отметим следующее:

- $S'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. И этот ряд сходится как и исходная функция на $[-1; 1)$

- $\int\limits_0^w S'(x)dx = \int\limits_0^w \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-w) = S(w)$. Только что мы получили разложение для функции $-\ln(1-x)$.

Пример. Пусть дан ряд $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$

Легко видеть, что $R = 1$ и ряд сходится лишь на $(-1; 1)$.

Попробуем взять интеграл от $S(x)$:

$$\int\limits_0^w S(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^w \left(kx^{k-1}\right) dx \right) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

Лекция 5

5.1 Разложение функций в степенные ряды

Задача: $f(x)$ представимо в виде степенного ряда на $[a, b]$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,\ x \in (a, b)\ (1)$$

а) Какие условия у функции для того, чтобы она была разложима в виде (1)?

б) Если можно, то как найти коэффициенты?

в) Единственным ли образом ищутся коэффициенты?

5.1.1 Необходимое условие разложимости функции в степенной ряд

Теорема 23. *Если (1) возможно, то $f(x)$ должна иметь производные любого порядка: $\exists f^{(k)}(x),\ x \in (a, b),\ \forall k$.*

$\diamondsuit$ $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, а этот ряд бесконечно-дифференцируем. Теорема доказана. $\blacksquare$

Пусть $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$ — бесконечно-дифференцируема и можно дифференцировать функцию почленно. Тогда:

$$a_0 = f(x_0), \quad f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} = [\text{при } x = x_0] = a_1$$

Получаем, что при $x = x_0 : f'(x_0) = a_1$.

$$a_1 = f'(x_0), \quad f''(x) = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x - x_0) + \ldots + n \cdot (n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = [\text{при } x = x_0] = 2! a_2$$

При $x = x_0 : \frac{f''(x_0)}{2!} = a_2$ и т.д.

Получаем, что $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ — коэффициент Тейлора $\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Так как a_k определяется единственным образом, то и (1) определяется единственным образом.

Пример. Рассмотрим функциональную последовательность

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad x \in (-1, 1)$$

Легко увидеть, что $a_0 = f(0) = 0$. Найдем остальные коэффициенты.

$$a_1 = f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} =$$
$$= \left[\frac{1}{\Delta x} = y, y \to \infty\right] = \lim_{y \to \infty} y e^{-y^2} = 0$$

$$a_2 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = [f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} \cdot \frac{2}{\Delta x^3} - 0}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} \cdot \frac{2}{\Delta x^4} = \left[\frac{1}{\Delta x} = y, y \to \infty\right] = \lim_{y \to \infty} 2y^4 e^{-y^2} = 0$$

Получаем, что $a_k = 0, \forall k \Rightarrow$ ряд этой функции — это ряд, в котором все коэффициенты равняются 0. Значит $S(x) = 0$.

5.1.2 Критерий разложимости функции в степенной ряд

Теорема 24. *Для того, чтобы $f(x)$ могло быть представимо в виде ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора для $f(x)$ в точке x_0 стремился к 0 для любого x, т.е. $R_n(x_0) \underset{n \to \infty}{\to} 0, \forall x \in (a, b)$.*

◊ Формула Тейлора: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$.

Пусть $n \to \infty \Rightarrow$ (1) возможно $\Leftrightarrow R_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} 0$ ■

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$ — остаточный член в форме Лагранжа.

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{(n+1)}$ — остаточный член в форме Коши.

5.1.3 Основные разложения

Используя разложение по формуле Тейлора и отмеченные ранее соответствующие оценки остаточных членов, можно получить разложение в ряд(ряд Тейлора) для следующих функций:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$

4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \forall x \in (-1, 1]$

5. $(1 + x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!} x^3 + \ldots,\ \mu \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1)$

   При некотором μ x будет принадлежать большему интервалу.

Используя 1 - 5 можно строить разложение для других элементарных функций.

Пример.

1) $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = [\text{используем 4}] = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

2) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$

Проинтегрируем на отрезке $[0, x)$

$\arctan x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left.\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|_0^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

3) $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt = [\text{Не берущийся интеграл}] = \int\limits_0^x(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t^{2k})dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left.\frac{t^{2k+1}}{k!(2k+1)}\right|_0^x = = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}$

Использование степенных рядов может быть полезным при решении функциональных уравнений.

Пример. $\begin{cases}(1-x^2)y'' - xy' - y = 0\\ y(0) = 1\\ y'(0) = 0\end{cases}$

Будем решать уравнение при $x_0 = 0$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$$y(0) = 1 = a_0$$

$$y'(0) = a_1 + 2a_2 x + \ldots = [\text{при } x = 0] = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Подставим a_0 и a_1 в уравнение y. Получаем:

$$y = 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

Посчитаем производные y' и y'' и подставим их в исходное уравнение.

$$y' = \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$$

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - x\sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^{k-1} - 1 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^k - 1 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k(k(k-1)x^{k-2} - k(k-1)x^k - kx^k - x^k) = 1$$

$$x^n(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n - a_n = 0 \Rightarrow$$

$$a_{n+2} = \frac{n^2+1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

Так как $a_1 = 0$, то $a_3 = a_5 = \ldots = 0$, а

$$a_2 = \frac{5}{12},\ a_4 = \frac{5}{12} \cdot \frac{17}{30} = \frac{17}{72} \text{ и т.д.}$$

Лекция 6

6.1 Несобственный интеграл 1-го рода(НИ-1)

При изучении интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, предполагалось, что $[a,b]$ — конечный промежуток и $f(x)$ ограничена на этом промежутке.

Рассмотрение интеграла проводят следующим образом: рассмотрим интеграл

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx, [\alpha,\beta] \subset |a,b|$$

Расширим отрезок $[\alpha,\beta]$ приближая его к $|a,b|$.

Рассмотрим предел от α до β — НИ-1

Рассмотрим функцию $f(x)$ на $[a,+\infty)$ и интеграл на любом промежутке $\forall[a,A] \subset [a,+\infty)$, то есть $\exists\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$, и

$$\lim_{A\to+\infty} \Phi(A) = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx - \textbf{НИ-1}$$

Определение 12. *Если этот предел существует и конечный* $\left(\exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx\right)$, *то говорят, что НИ-1* ***сходящийся****, в противном случае интеграл называется* ***расходящимся****.*

Пример. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \cos x dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \sin A$ — не существует, следовательно несобственный интеграл расходится.

Пример. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$ — интеграл сходится

Удобно использовать несобственную двойную подстановку

$$F(x)|_a^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty} F(x)|_a^A = \lim_{A\to+\infty} (F(A) - F(a))$$

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

Исходя из этого, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \sin x|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \sin x - \text{не существует}$$

Пример.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^{+\infty} = \begin{cases} \text{расходится}, & p < 1 \\ \text{сходится}, & p > 1 \end{cases}$$

$$p = 1 : \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{+\infty} \text{ — расходится}$$

Следовательно

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{расходится}, & p \leq 1 \\ \text{сходится}, & p > 1 \end{cases}$$

Сходимость интеграла означает существование предела, т.е.

$$\exists I : \forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon : \forall A \geq A_\epsilon \Rightarrow |\Phi(A) - I| = \left| \int\limits_A^{+\infty} f(x)dx \right| \leq \epsilon$$

Исходя из критерия Коши существования предела $I = \lim\limits_{A \to +\infty} \Phi(A)$, можно создать критерий Коши для НИ-1:

Теорема 25. ***Критерий Коши***

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon : \forall A_1, A_2 \geq A_\epsilon (A_2 \geq A_1) \Rightarrow |\varPhi(A_1) - \varPhi(A_2)| \leq \epsilon, \left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \leq \epsilon$$

6.1.1 Сравнение с рядами

И для рядов, и для НИ-1 главную роль играет конечный предел:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx, \quad f(x), \quad \int\limits_a^{A} f(x)dx, \qquad \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^{A} f(x)dx$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k, \qquad a_k, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Выполняются обычные свойства интеграла:

1) аддитивность

2) монотонность

3) линейность

Теорема 26. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *сходится* $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$, $\forall b \geq a$

$\diamondsuit$ Возьмем $\forall A \geq b$: $\int\limits_a^A f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^A f(x)dx$.

При $A \to +\infty$, слева и справа конечные пределы либо оба существуют, либо оба не существуют. $\blacksquare$

6.2 НИ-1 от положительной функции

Пусть $f(x) \geq 0$, $x \in [a, +\infty)$, тогда $\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$ возрастает.

Если $A_1 > A_2$, то

$$\Phi(A_1) = \int\limits_a^{A_1} f(x)dx = \int\limits_a^{A_2} f(x)dx + \int\limits_{A_2}^{A_1} f(x)dx \; (\int\limits_{A_2}^{A_1} f(x)dx \;\; \geq 0) = \Phi(A_2) + C \; (C \geq 0)$$

6.2.1 Критерий сходимости НИ-1 от положительной функции

Теорема 27. *Интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится* $\Leftrightarrow \exists M : \int\limits_a^A f(x)dx \leq M, \forall A \geq a.$

Если интеграл от положительной функции расходится(то есть такого M не существует), то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$

Установить поведение интеграла, то есть выяснить, является ли он сходящимся или расходящимся, можно сравнив его с другими интегралами (эталонными), поведение которых известно.

6.2.2 Признаки сравнения НИ-1

Возьмём две функции $f(x)$, $g(x)$ и два интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \; (2) \qquad\qquad \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \; (1)$$

1. Пусть $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, +\infty)$
   Если (1) сходится, то и (2) сходится;
   Если (2) расходится, то и (1) расходится.

   $\diamondsuit$ Пусть (1) сходится, тогда по критерию сходимости $\exists M$: $\int\limits_a^A g(x)dx \leq M$, но тогда $\int\limits_a^A f(x)dx \leq \int\limits_a^A g(x)dx \leq M$, $\forall A \geq a$, по критерию сходимости (достаточность) интеграл (2) сходится.

   Пусть (2) расходится, если (1) сходится, то тогда сходится и (2) — Противоречие, следовательно (1) расходится. $\blacksquare$

   Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+e^x}$.

$f(x) = \frac{1}{x^2+e^x} \leq \frac{1}{x^2},\ x \in [1, +\infty)$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, тогда сходится и исходный интеграл.

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x-\sin^2 x}$

$f(x) = \frac{1}{x-\sin^2 x} \geq \frac{1}{x}, x \in [1, +\infty)$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, тогда расходится и исходный интеграл.

2. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$(конечный или бесконечный)

   а) $l < +\infty$ (сходится (1) следовательно сходится (2))

   б) $l > 0$ (расходится (1) следовательно расходится (2))

$\diamondsuit$

а) $l < +\infty$
$\exists A,\ \frac{f(x)}{g(x)} \leq l+1,\ x > A\ :\ f(x) \leq (l+1)g(x),\ x > A$

Если интеграл (1) сходится, то из того, что сходится $\int\limits_A^{+\infty} g(x)dx \quad \Rightarrow$ сходится $\int\limits_A^{+\infty} (l+1)g(x)dx$, следовательно, по 1-му признаку, сходится интеграл (2).

б) Пусть $l > 0$, тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{l} < +\infty$

Если бы (2) сходился, то, по доказанному в а), должен сходиться и (1) — противоречие.

$\blacksquare$

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+7} dx$

$f(x) = \frac{\arctan x}{x^2+7}, g(x) = \frac{1}{x^2}$ — эталонный интеграл.

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \arctan x}{x^2+7} \to \frac{\pi}{2} < +\infty \Rightarrow$ исходный интеграл сходится.

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})dx$

$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \to \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ исходный интеграл расходится.

6.2.3 Степенной признак для НИ-1

Теорема 28. *Пусть* $f(x) \sim \frac{C}{x^p},\ x \to +\infty,\ C \neq 0$, *тогда если* $\begin{cases} p > 1,\ \text{то} \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится} \\ p \leq 1,\ \text{то} \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ расходится} \end{cases}$

$\diamondsuit$ Пусть $g(x) = \frac{1}{x^p},\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C,\ 0 < C < +\infty.$

По 2-му признаку, интеграл (2) ведёт себя также, как (1). $\blacksquare$

Пример.

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x^2+10} dx$

$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2+10} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$ интеграл сходится.

2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$

$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ интеграл сходится.

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$

$\tan(\arctan x) = \frac{1}{\cot(\arctan x)} = \frac{1}{x}$

$\tan \alpha(x) \sim \alpha(x)$, тогда $\arctan x \sim \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{\arctan x}{x} \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ интеграл сходится.

Лекция 7

7.1 НИ-1 от знакопеременной функции

Рассмотрим $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (1) и пусть $f(x)$ принимает значения произвольных знаков. На ряду с (1) рассмотрим $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ (2).

Определение 13. *Если (2) сходится, то говорят, что (1)* ***абсолютно сходится****.*

Теорема 29. *Если интеграл (1) абсолютно сходится, то он сходится.*

$\diamondsuit$ Если (1) абсолютно сходится, то

$$\forall\epsilon > 0, \exists A_\epsilon : \forall A_1, A_2 \geq A_\epsilon \Rightarrow \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx \leq \epsilon$$

Но тогда для (1) имеем:

$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx \leq \epsilon$, по критерию Коши для (1), интеграл (1) сходится.

$\blacksquare$

Пример. Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$.

По признаку 1 (его возможно применить, так как интеграл от положительной функции) имеем:

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$. Следовательно исходный интеграл сходится абсолютно, а значит он сходится.

Лемма 2. *Пусть функции $f(x), g(x)$, определены на $[A, B]$.*

1. *$f(x)$ непрерывная функция и $\exists M : \left|\int\limits_A^x f(t)dt\right| \leq M, \forall x \in [A, B]$.*
2. *Функция $g(x)$ имеет непрерывную производную $g'(x)$, которая сохраняет знак и $\exists m : |g(x)| \leq m, \forall x \in [A, B]$.*

Тогда $\left|\int\limits_A^B f(x)g(x)dx\right| \le 3mM.$

$\diamondsuit$ Рассмотрим $\int\limits_A^B f(x)g(x)dx$ и проинтегрируем по частям.

$\left|\int\limits_A^B f(x)g(x)dx\right| = \left[u = g(x), du = g'(x)dx;\ dv = f(x)dx,\ v = \int\limits_A^x f(t)dt\right] =$

$= \left| g(x)\int\limits_A^x f(t)dt\Big|_A^B - \left(\int\limits_A^B (g'(x)\int\limits_A^x f(t)dt)dx\right)\right| \le \left| g(x)\int\limits_A^x f(t)dt\Big|_A^B\right| + \left|\int\limits_A^B \left(g'(x)\int\limits_A^x f(t)dt\right)dx\right| =$

$= \left| g(B)\int\limits_A^x f(t)dt - 0\right| + \left|\int\limits_A^B \left(g'(x)\int\limits_A^x f(t)dt\right)dx\right| \le Mm + \int\limits_A^B |g'(x)|\left|\int\limits_A^x f(t)dt\right|dx \le$

$\le mM + M\int\limits_A^B |g'(x)|dx = mM + M\left|\int\limits_A^B g'(x)dx\right| = mM + M\left| g(x)|_A^B\right| \le mM + M2m = 3mM$

■

7.2 Признаки Дирихле и Абеля сходимости НИ-1

7.2.1 Признак Дирихле сходимости НИ-1

Теорема 30. *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a, +\infty)$, $g(x)$ *имеет непрерывную производную* $g'(x)$ *на* $[a, +\infty)$ *и*

1. $\exists M, \left|\int\limits_a^x f(t)dt\right| \le M, \forall x \in [a, +\infty)$.

2. *g(x) монотонно стремится к 0, при* $x \to +\infty$.

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

$\diamondsuit$ Воспользуемся критерием Коши и возьмем любое $\epsilon > 0$.
Учитывая пункт 2, получаем что $\exists A_\epsilon : g(x) \le \epsilon, \forall x \ge A_\epsilon$.
Возьмем $\forall A_1, x \ge A_\epsilon$, тогда

$$\left|\int\limits_{A_1}^x f(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^x f(x)dx - \int\limits_a^{A_1} f(x)dx\right| \le \left|\int\limits_a^x f(x)dx\right| + \left|\int\limits_a^{A_1} f(x)dx\right| \le 2M$$

На основании леммы имеем:

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| \le 3\epsilon \cdot 2M = 6M\epsilon$$

Следовательно по критерию Коши $\forall A_1, A_2 \ge A_\epsilon$ интеграл сходится. ■

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$

Положим $f(x) = \sin x,\ g(x) = \frac{1}{x}$
$\left|\int\limits_1^x \sin t dt\right| \le 2,\ g(x)$ монотонно убывает к 0.
По признаку Дирихле, исходный интеграл сходится.

Исследуем теперь на равномерную сходимость:
$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$, при этом $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$
Первый интеграл расходится, а второй сходится по признаку Дирихле.

7.2.2 Признак Абеля сходимости НИ-1

Теорема 31. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$, $g(x)$ имеет непрерывную производную $g'(x)$ на $[a, +\infty)$ и:*

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*
2. $g(x)$ *монотонна и ограничена.*

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

♢ По критерию Коши, возьмем $\forall \epsilon > 0$.

Так как выполняется пункт 1, то существует $\exists A_\epsilon, \forall A_1, A_2 \geq A_\epsilon : \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \leq \epsilon$.

Тогда

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| \leq \left|g(x) \int\limits_{A_1}^{x} f(t)dt \Bigg|_{A_1}^{A_2}\right| + \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} g'(x) \int\limits_{A_1}^{x} f(t)dt\right| \leq$$

$$\leq m\epsilon + \epsilon \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} g'(x)dx\right| \leq m\epsilon + 2m\epsilon = 3m\epsilon$$

■

Пример. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$

Положим $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ — сходится (доказано ранее).
$g(x) \leq 1$ и монотонна.
По признаку Абеля, исходный интеграл сходится.

7.3 Несобственный интеграл второго рода НИ-2

Определение 14. *Пусть $f(x)$ определена на $[a, b)$ и не ограничена в окрестности точки b. Тогда b —* ***особая точка*** *функции $f(x)$.*

Пусть $f(x)$ интегрируема по Риману на $\forall [a, c] \subset [a, b)$, т.е. $\exists \int\limits_a^c f(x)dx = \Phi(c)$.

Определение 15. *Рассматривают предел $\lim\limits_{c \to b-0} \Phi(c) = \lim\limits_{c \to b-0} \int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$ и называют* ***несобственный интеграл второго рода****. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что НИ-2 сходится, иначе расходится.*

Пример.

$$\int\limits_0^1 = \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = [x = 1\text{—особая точка}] = \lim_{c\to 1-0}\int\limits_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= \lim_{c\to 1-0}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^c = \lim_{c\to 1-0}(-2\sqrt{1-c}+2) = 2 \Rightarrow \text{интеграл сходится}$$

7.3.1 Несобственная двойная подстановка

Если b — ОТ, то $F(x)|_a^b = \lim\limits_{c\to b-0} F(x)|_a^c$.

$F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, принимая $F(b) = \lim\limits_{x\to b-0} F(x)$

Пример.

1.

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{b-x} = -\ln(b-x)|_a^b = -\ln 0 + \ln(b-a) \Rightarrow \text{интеграл расходится}$$

2.

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = -\frac{(b-x)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_a^b = \begin{cases}\frac{1}{1-p}, p<1 \Rightarrow \text{интеграл сходится}\\ \infty, p>1 \Rightarrow \text{интеграл расходится}\end{cases}$$

3.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = [x = 0 \text{ особая точка}] \Rightarrow \begin{cases}\text{сходится при } p<1\\ \text{расходится при } p\geq 1\end{cases}$$

Сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е. существование конечного предела $\lim\limits_{c\to b-0}\Phi(c)$ означает:

$$\forall\epsilon>0, \exists c_\epsilon\in[a,b), \forall c\in[c_\epsilon,b) \Rightarrow \left|\int\limits_c^b f(x)dx\right| \leq \epsilon$$

7.3.2 Критерий Коши

Теорема 32. *$\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\epsilon>0, \exists c_\epsilon\in[a,b)$ такие, что $\forall c_1, c_2\in[c_\epsilon,b): \left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| \leq \epsilon$*

Отметим также, что $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow$ $\int\limits_\alpha^b f(x)dx, \forall\alpha\in[a,b)$ сходится, поскольку $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\alpha f(x)dx + \int\limits_\alpha^b f(x)dx$

Для НИ-2 выполняются свойства аддитивности, монотонности и линейности.

Лекция 8

8.1 НИ-2

$\int\limits_a^b f(x)dx$, где b — особая точка.

Для НИ-2 выполняются свойства:

1. аддитивность
2. монотонность
3. линейность

Линейность для НИ-2 (как и для НИ-1)

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$$

Может быть такое, что интеграл слева сходится, а один из интегралов справа расходится.

Аналогично и для НИ-1, то есть для $b = +\infty$.

8.2 НИ-2 от положительной функции

Рассмотрим НИ-2 для положительных функций, $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b)$

$$\Phi(c) = \int_a^c f(x)dx \text{ монотонно возрастает}, c \to b - 0$$

Тогда работает критерий сходимости монотонной функции:

8.2.1 Критерий сходимости НИ-2 от положительной функции

Теорема 33.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \textit{ сходится} \Leftrightarrow \exists M : \int\limits_a^c f(x)dx \leq M, \forall c \in [a, b)$$

8.2.2 Признаки сравнения НИ-2

Пусть $0 \le f(x) \le \alpha g(x),\ \alpha = const\ (*)$

1. Если сходится $\int\limits_a^b g(x)dx$ (2) $\Rightarrow$ сходится $\int\limits_a^b f(x)dx$ (1)

   (1) расходится $\Rightarrow$ (2) расходится

   $\diamondsuit$

   I: Доказательство аналогично доказательству 1-го признака для НИ-1:
   $\int\limits_a^c f(x)dx \le \alpha \int\limits_a^c g(x)dx \le \alpha M\ \forall c$, поскольку (2) сходится.
   Тогда по критерию (1) тоже сходится.

   II: Если (2) сходится, то сходится и (1), **ПРОТИВОРЕЧИЕ**. Следовательно (2) расходится.

   $\blacksquare$

   Замечание: (*) может выполняться, но не для всех $[a, b)$, а для $[a_1, b), a_1 \ge a$:

$$\int\limits_a^b \dots = \int\limits_a^{a_1} \dots + \int\limits_{a_1}^b \dots$$

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{e^x+2}{\sqrt{1-x}}dx,\ 0 \le \frac{e^x+2}{\sqrt{1-x}} \le \frac{e+2}{\sqrt{1-x}},\ \int\limits_0^1 \frac{e+2}{\sqrt{1-x}}dx$ — сходится, следовательно исходный интеграл сходится.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sin x+1},\ \frac{1}{x\sin x+1} \ge \frac{1}{x},\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ — расходится, следовательно исходный интеграл расходится.

2. Если $\exists l = \lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)}$ то: $\begin{cases} l < +\infty, & \text{сходится (2)} \Rightarrow \text{сходится (1)} \\ l > 0, & \text{расходится (2)} \Rightarrow \text{расходится(1)} \end{cases}$

   $\diamondsuit$ Пусть $l < +\infty$, тогда для x близких к b, то есть

$$\exists c, \forall x \in [c, b)\ :\ \frac{f(x)}{g(x)} < l + 1,\ \text{то есть } f(x) \le g(x)(l+1)$$

   По первому признаку, из сходимости (2) следует сходимость (1);

   Теперь пусть $l > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{l} < +\infty$

   Пусть (2) расходится.

   Но если (1) сходится, то (2) тоже сходится. **ПРОТИВОРЕЧИЕ**. $\blacksquare$

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{1-x}}dx = \left[g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, \frac{f(x)}{g(x)} = \arctan\frac{1}{x} \underset{x\to 1}{\to} \frac{\pi}{4}\right]$

$\int\limits_0^1 g(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ — сходится, следовательно и исходный интеграл сходится в особой точке 1.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x} = \left[g(x) = \frac{1}{x}, \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 1}{\to} 1 \right]$

$\int\limits_0^1 g(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ — расходится, следовательно и исходный интеграл расходится.

Замечание: если предел $l \in \mathbb{R}, l \neq 0$, то оба интеграла (1) и (2) либо сходятся, либо расходятся одновременно. Если взять в качестве $g(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$, то получим степенной признак сходимости.

8.2.3 Степенной признак для НИ-2

Теорема 34. *Если* $f(x) \sim \frac{\alpha}{(b-x)^p}, x \to b - 0$ *то:* $\begin{cases} p < 1, & \textit{сходится} \\ p \geq 1, & \textit{расходится} \end{cases}$

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{\sin^2 x}dx,\ f(x) = \frac{e^x-1}{\sin^2 x} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ — исходный интеграл расходится.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1-x)(1+x)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ — исходный интеграл сходится.

Пример. $\int\limits_1^3 \frac{e^x dx}{\arctan\sqrt{3-x}},\ f(x) = \frac{e^x}{\arctan\sqrt{3-x}} \sim \frac{e^3}{\sqrt{3-x}}$ — исходный интеграл сходится.

8.3 Преобразование НИ-2

С НИ-2 можно выполнять операции интегрирования по частям и замену переменных.

В результате таких действий исходный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ с ОТ $= b$(возможно, $b = \pm\infty$) приводится к интегралу $\int\limits_\alpha^\beta g(x)dx$.

Возможно, что $[\alpha, \beta) = [a, b)$, как в случае интегрирования по частям, а возможно это другой промежуток и $\int\limits_\alpha^\beta g(x)dx$ может оказаться обычным интегралом Римана.

8.3.1 Интегрирование НИ-2 по частям

$$\int\limits_a^b udv = uv|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

Пример. $\int\limits_0^1 \ln x dx = [\text{ОТ} : x = 0] = \begin{bmatrix} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx, & v = x \end{bmatrix} = \ln x \cdot x|_0^1 - \int\limits_0^1 dx = \ln 1 - 1$

8.3.2 Теорема о замене переменных

Теорема 35. *Пусть* $f(x)$ *определена на промежутке* $[a, b)$ *(возможно,* $b = \pm\infty$*), интегрируема на* $\forall [a, c] \subset [a, b)$ *и пусть* $\phi(t)$ *определена на промежутке* $t \in [\alpha, \beta)$ *(возможно,* $\beta = \pm\infty$*), имеет непрерывную производную* $\phi'(t)$ *и монотонна; пусть также* $\phi(\alpha) = a, \lim\limits_{t\to\beta-0} \phi(t) = b,$ *тогда* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ (3) *, при этом из сходимости интеграла справа следует сходимость интеграла слева и наоборот.*

$\diamondsuit$ Возьмём $c \in [a, b)$, тогда $\exists \sigma \in [\alpha, \beta) : c = \phi(\sigma)$, так как ϕ — непрерывна и монотонна, тогда $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_\alpha^\sigma f(\phi(t))\phi'(t)dt$.

Но $\sigma \to \beta - 0 \Leftrightarrow c \to b - 0$ (4).

При переходе к пределу из (4) получаем (3). $\blacksquare$

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \left[t = x^2,\ x = \sqrt{t},\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}\right] = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt - \text{интеграл сходится по признаку Дирихле}$$

Пример.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array}\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin t}}{\cos t} \cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin t} dt \Rightarrow \text{исходный интеграл сходится}$$

Пусть функция $f(x)$ имеет ОТ $\beta \in (a, b)$ и других ОТ нет, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\beta f(x)dx + \int\limits_\beta^b f(x)dx$$

1) Если оба интеграла справа сходятся, то интеграл слева сходится;

2) Если один из интегралов справа расходится, то интеграл слева расходится.

Пример. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & 0 \le x < 1 \\ \tan{(x-1)}^{-1}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

$$\int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \int\limits_1^2 \tan{(x-1)}^{-1} dx$$

Из того, что первый интеграл справа сходится, а второй не имеет предела(тангенс не имеет предела), следует, что исходный интеграл расходится.

8.4 НИ смешанного типа

Определение 16. ***НИ смешанного типа*** *называются интегралы вида*

$$\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_b^a f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

где первый интеграл это НИ-2, второй — НИ-1, а b — ОТ.

Может оказаться, что интеграл имеет несколько ОТ.

Пример. $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, ОТ: $x = 0, x = 1$

$x = 0\ :\ x^{a-1}(1-x)^{b-1} \underset{x\to 0}{\sim} x^{a-1} = \frac{1}{x^{1-a}}$ Сходится тогда, когда $1 - a < 1, a > 0$

$x = 1\ :\ x^{a-1}(1-x)^{b-1} \underset{x\to 1}{\sim} (1-x)^{b-1} = \frac{1}{(1-x)^{1-b}}$ Сходится тогда, когда $1 - b < 1, b > 0$

Тогда исходный интеграл сходится, когда $a > 0, b > 0$.

Пример. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^p dx$ Особые точки: $x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$

$x = 0\ :\ (\tan x)^p \sim x^p = \frac{1}{x^{-p}}$, сходится при $-p < 1 \Rightarrow p > -1$

$x = \frac{\pi}{2}\ :\ (\tan x)^p = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^p \sim \frac{1}{(\cos x)^p} = \frac{1}{(\sin \frac{\pi}{2} - x)^p} \sim \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - x)^p}$, сходится при $p < 1$

Исходный интеграл сходится при $-1 < p < 1$.

ОТ может быть $-\infty$:

$$\int\limits_a^{-\infty} f(x)dx = [x = -t] = -\int\limits_{-a}^{+\infty} f(-t)dt$$

Лекция 9

9.1 Главное значение несобственного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном промежутке. В этом случае у нее 2 особые точки и надо рассмотреть каждую из них отдельно: $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, т.е.

$$\lim_{B_1\to+\infty}\int\limits_{-B_1}^{a} f(x)dx + \lim_{B_2\to+\infty}\int\limits_{a}^{B_2} f(x)dx \text{ или } \lim_{\substack{B_1\to+\infty\\ B_2\to+\infty}}\int\limits_{-B_1}^{B_2} f(x)dx$$

Если такой предел не существует или бесконечен, то можно рассматривать случай когда B_1 и B_2 связаны каким-то образом.

Чаще всего рассматривают $B_1 = B_2$ и рассматривают $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{-B}^{B} f(x)dx$.

Определение 17. *Предел* $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{-B}^{B} f(x)dx$ *называют* ***главным значение НИ*** *и обозначают* $v.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то его значение совпадает с его главным значением.

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}dx$.

Интеграл расходится по степенному признаку в точках $-\infty$ и $+\infty$, но его главное значение $v.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{-B}^{+B} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{-B}^{+B} \frac{x}{x^2+a^2}dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \frac{1}{2}\ln{(x^2+a^2)}\Big|_{-B}^{B} = 0$

Можно заметить, что если подынтегральная сумма нечетная, то главное значение НИ всегда будет равняться нулю.

Пример. Вычислим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx$.

Так как интеграл расходится по степенному признаку, то рассмотрим его главное значение и интеграл:

$$\int\limits_{-B}^{B} \frac{x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \int\limits_{-B}^{B} \frac{(x-\alpha)+\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \int\limits_{-B}^{B} \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}d(x-\alpha) + \int\limits_{-B}^{B} \frac{\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = I_1 + I_2$$

Каждый из полученных интегралов рассмотрим по отдельности.

$$I_1=\int\limits_{-B}^{B}\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}d(x-\alpha)=\frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)\Big|_{-B}^{B}=\frac{1}{2}\ln\frac{(B-\alpha)^2+\beta^2}{(-B-\alpha)^2+\beta^2}\underset{B\to+\infty}{\to}0$$

$$I_2=\int\limits_{-B}^{B}\frac{\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\frac{\alpha}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}\Big|_{-B}^{B}=\frac{\alpha}{\beta}\left(\arctan\frac{B-\alpha}{\beta}+\arctan\frac{B+\alpha}{\beta}\right)\underset{B\to+\infty}{\to}$$

$$\underset{B\to+\infty}{\to}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\pi}{2}sgn\beta+\frac{\pi}{2}sgn\beta\right)=\frac{\alpha}{\beta}\pi sgn\beta$$

Пример. Рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-\alpha-i\beta}dx$. Интеграл расходится по степенному признаку, но рассмотрим его главное значение.

$$\int\limits_{-B}^{B}\frac{1}{x-\alpha-i\beta}dx=\int\limits_{-B}^{B}\frac{x-\alpha+i\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=\int\limits_{-B}^{B}\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx+i\beta\int\limits_{-B}^{B}\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=I_1+I_2$$

Интеграл $I_1\underset{B\to+\infty}{\to}0$, поэтому разберем интеграл I_2.

$I_2=i\beta\int\limits_{-B}^{B}\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx=i\beta\cdot\frac{1}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}\Big|_{-B}^{B}=i\pi\cdot sgn\beta$

Таким образом получаем, что главное значение исходного интеграла равняется:

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-\alpha-i\beta}dx=i\pi\cdot sgn\beta$$

9.2 Вычисление $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx, m,n\in\mathbb{N}$

Определение 18. *Интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx, m,n\in\mathbb{N}$ называют* ***интегралом Эйлера****.*

Если $m<n$, то интеграл сходится по степенному признаку, следовательно его значение совпадает с его главным значением.

Подынтегральная функция рациональная, поэтому разложим её на простейшие множители:

$$1+x^{2n}=0\Rightarrow x^{2n}=-1=e^{i(\pi+2\pi k)}\Rightarrow x_k=e^{i\pi\left(\frac{1}{2n}+\frac{k}{n}\right)}, k=0,1,\ldots,2n-1$$

Заметим, что $x_{k+n}=e^{i\pi\left(\frac{1}{2n}+\frac{k}{n}+1\right)}=e^{i\pi\left(\frac{1}{2n}+\frac{k}{n}\right)}\cdot e^{i\pi}=-x_k$ (2). Тогда

$$\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{A_k}{x-x_k}\ (3)$$

Чтобы найти неопределенный коэффициент A_k, домножим (3) на $(x-x_k)$ и затем положим $x\to x_k$.

$$A_k = \lim_{x\to x_k} \frac{x^{2m}(x-x_k)}{1+x^{2n}} = x_k^{2m} \cdot \lim_{x\to x_k} \frac{x-x_k}{1+x^{2n}} = [\text{по Лопиталю}] = x_k^{2m} \frac{1}{2nx_k^{2n-1}} =$$

$$= [\text{умножим числитель и знаменатель на } x_k] = -\frac{1}{2n} x_k^{2m+1}$$

Подынтегральная функция из себя представляет: $\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{2n-1} \frac{x_k^{2m+1}}{x-x_k}$.

$$I = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x_k^{2m+1}}{x-x_k} \right) dx = -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_k^{2m+1}}{x-x_k} dx = -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} x_k^{2m+1} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-x_k} \quad (4)$$

Обозначим $x_k = \alpha_k + i\beta_k = \cos\pi\left(\frac{1}{2n}+\frac{k}{n}\right) + i\sin\pi\left(\frac{1}{2n}+\frac{k}{n}\right)$, $\begin{cases} sgn\beta_k = 1,\ k=0,\dots,n-1 \\ sgn\beta_k = -1,\ k=n,\dots,2n-1 \end{cases}$

Из (4) получаем

$$I = -\frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-\alpha_k - i\beta_k} \cdot x_k^{2m+1} + \sum_{k=n}^{2n-1} v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-\alpha_k - i\beta_k} \cdot x_k^{2m+1} \right) =$$

$$= [\text{используя (1) и (2), из которых следует, что } x_{k+n}^{2m+1} = -x_k^{2m+1}, \text{ так как } 2m+1 \text{ нечетное}] =$$

$$= -\frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \pi i x_k^{2m+1} + \sum_{k=n}^{2n-1} -\pi i x_k^{2m+1} \right) = -\frac{1}{2n}\cdot 2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \pi i x_k^{2m+1} \right) = -\frac{\pi i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{2m+1} =$$

$$= -\frac{\pi i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\pi i \left(\frac{1}{2n}+\frac{k}{n}\right)(2m+1)} = -\frac{\pi i}{n} e^{\pi i \left(\frac{2m+1}{2n}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\pi i \frac{k(2m+1)}{n}} = -\frac{\pi i}{n} e^{\pi i \left(\frac{2m+1}{2n}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\pi i \frac{(2m+1)}{n}} \right)^k =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \right] = -\frac{\pi i}{n} e^{\pi i \left(\frac{2m+1}{2n}\right)} \frac{1-e^{\pi i (2m+1)}}{1-e^{\pi i \left(\frac{2m+1}{n}\right)}} = -\frac{\pi i}{n} e^{\pi i \left(\frac{2m+1}{2n}\right)} \frac{2}{1-e^{\pi i \left(\frac{2m+1}{n}\right)}} =$$

$$= [\text{умножим числитель и знаменатель на } e^{-\pi i \left(\frac{2m+1}{2n}\right)}] = -\frac{\pi}{n} \frac{2i}{e^{-\pi i \left(\frac{2m+1}{2n}\right)} - e^{\pi i \left(\frac{2m+1}{2n}\right)}} = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$$

Таким образом получаем, что $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке (a,b) и имеет единственную особую точку $\beta \in (a,b)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c_1\to\beta-0} \int\limits_a^{c_1} f(x)dx + \lim\limits_{c_2\to\beta+0} \int\limits_{c_2}^b f(x)dx$.

Для сходимости левой части необходима сходимость 2-х правых частей.

Если конечный предел не существует, то рассматриваем предел предполагая, что $c_2 = g(c_1)$. Обычно функцию берут так, что $\beta - c_1 = c_2 - \beta$.

Тогда интеграл называется **главным значением** и обозначается $v.p. \int\limits_a^b f(x)dx$. Если интеграл сходится, то его значение равняется главному значению.

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$, где 0 является особой точкой и интеграл расходящийся.

$$v.p. \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0} \int\limits_{-1}^{c} \frac{dx}{x} + \lim_{c\to 0} \int\limits_{c}^{2} \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0} (\ln x|_{-1}^{c} + \ln x|_{c}^{2}) = \lim_{c\to 0} (\ln c - \ln 1 + \ln 2 - \ln c) = \ln 2$$

Лекция 10

10.1 Частные и равномерные частные пределы

Рассмотрим функцию $f(x, y)$ определенную на множестве $X \times Y = \{(x, y)|x \in X, y \in Y\}$. Например, множество точек (x, y), где $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, которое образует прямоугольник, либо $X = [a, b]$, $Y = [c, \infty]$.

Пусть y_0 — предельная точка множества Y. Тогда для фиксированной точки $x_0 \in X$ получим функцию $f(x_0, y)$ и можно рассматривать её предел: $\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y)$.

Обозначим $\phi(x_0) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y)$. Предполагаем, что предел существует и конечен, т.е. $\phi(x_0)$ - число. Данное равенство обозначает, что для

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) : \forall y \in Y,\ 0 < |y - y_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0, y) - \phi(x_0)| \leq \epsilon$$

.

Обозначается следующим образом: $f(x_0, y) \underset{y \to y_0}{\to} \phi(x_0)$.

Предположим, что $\exists \delta$, который годится для $\forall x \in X$ при заданном ϵ. Тогда говорят, что $f(x, y)$ **сходится** к $\phi(x)$ **равномерно** на множестве X.

Определение 19. *Равномерная сходимость на множестве X означает, что для*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall y \in Y,\ 0 < |y - y_0| \leq \delta, \forall x \in X \Rightarrow |f(x, y) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

Обозначение равномерной сходимости: $f(x, y) \overset{X}{\underset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} \phi(x)$

10.2 Критерии равномерной сходимости(критерий Коши и супремальный)

Теорема 36 (Критерий Коши)**.** $f(x, y) \overset{X}{\underset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} \phi(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall y_1, y_2 \in Y : \begin{array}{l} 0 < |y_0 - y_1| \leq \delta, \\ 0 < |y_0 - y_2| \leq \delta, \end{array} \forall x \in X \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \epsilon$$

.

Пусть $f(x, y) \overset{X}{\underset{y \to y_0}{\to}} \phi(x), \forall x \in X$ и $\rho(x, y) = |f(x, y) - \phi(x)|$.

Теорема 37 (Супремальный критерий)**.** $f(x, y) \overset{X}{\underset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} \phi(x) \Leftrightarrow \sigma(y) = \sup\limits_{X} \rho(x, y) \underset{y \to y_0}{\to} 0.$

$\diamondsuit \Leftarrow$ Возьмем $\forall \epsilon > 0$. Если $\sigma(y) \underset{y \to y_0}{\to} 0$, то

$$\exists \delta = \delta(\epsilon) : \sigma(y) \leq \epsilon, \forall y \in Y : 0 < |y - y_0| \leq \delta$$

.

Но $\sigma(y) = \sup\limits_X \rho(x, y)$. Тогда $\rho(x, y) = |f(x, y) - \phi(x)| \leq \epsilon$ для $\forall x \in X$.

Таким образом, $f(x, y)$ сходится равномерно согласно определению.

$\Rightarrow$ Дана равномерная сходимость $f(x, y)$. Покажем, что $\sigma(y) \underset{y \to y_0}{\to} 0$.

От противного. Предположим, что $\sigma(y) \not\to 0$ при $y \to y_0$.

Значит $\exists \epsilon > 0$: $\forall \delta = \delta(\epsilon), \exists \tilde{y} \in Y : \sigma(\tilde{y}) > \epsilon$. По свойству супремума $\exists \tilde{x} \in X$, такой что $\rho(\tilde{x}, \tilde{y})$ отличается от $\sigma(\tilde{y})$ сколь угодно мало, к примеру на $\frac{\epsilon}{2}$.

Тогда $|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - \phi(\tilde{x})| > \frac{\epsilon}{2}$. Но в этом случае неравенство из определения выполняется не для всех x из X. Т.е. равномерной сходимости нет, противоречие. $\blacksquare$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^y - x^{2y}$, $(x, y) \in [0, 1] \times (0, 1]$.

Точка $y_0 = 0$ — предельная точка множества Y.

$$\phi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y) = 0, \forall x \in [0, 1]$$

Тогда $\rho(x, y) = x^y - x^{2y}$

Найдем $\sup \rho(x, y)$ для $x \in [0, 1]$. Функция непрерывная, поэтому супремум — максимум этой функции. Максимальное значение достигается либо на концах, либо в стационарных точках.

$$\rho'(x, y) = yx^{y-1} - 2yx^{2y-1} = yx^{y-1}(1 - 2x^y) = 0$$

$$x_0 = \sqrt[y]{\frac{1}{2}} - \text{корень}$$

Теперь найдем значение $\rho(x, y)$ в точке $x_0 : \rho(x_0, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Тогда $\sigma(y) > \frac{1}{4} \not\to 0$.

Функция сходится к своему пределу, но равномерной сходимости нет.

Пример.

Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^{\frac{1}{y}} - x^{\frac{1}{y}+1}$ на таком же множестве, как и в предыдущем примере.

$y_0 = 0$ — предельная точка множества Y.

$$\phi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y) = 0, \forall x \in [0, 1]$$

Посчитаем $\rho(x, y) = x^{\frac{1}{y}} - x^{\frac{1}{y}+1}$.

Функция непрерывная, поэтому супремум — максимум этой функции. Максимальное значение либо на концах, либо в стационарных точках.

$$\rho'(x, y) = \frac{1}{y} x^{\frac{1}{y}-1} - \left(\frac{1}{y} + 1\right) x^{\frac{1}{y}} = x^{\frac{1}{y}-1} \left(\frac{1}{y} - \left(\frac{1}{y} + 1\right) x\right) = 0$$

$$x_0 = \frac{1}{y+1} - \text{корень}$$

Тогда $\rho(x_0, y) = x_0^{\frac{1}{y}} - x_0^{\frac{1}{y}+1} = \left(\frac{1}{1+y}\right)^{\frac{1}{y}} - \left(\frac{1}{1+y}\right)^{\frac{1}{y}+1} = \frac{1}{y+1}^{\frac{1}{y}} \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) = \frac{1}{y+1}^{\frac{1}{y}+1} \cdot y$

$$\lim_{y \to y_0} \rho(x_0, y) = e \cdot 0 = 0$$

Супремум достигается в точке x_0, т.к на концах отрезка $[0,1]$ $\rho(x,y)$ обращается в 0. Поэтому $\sup\rho(x,y)=\rho(x_0,y)\underset{y\to y_0}{\to}0$

Функция сходится к своему пределу равномерно на $[0,1]$.

Теорема 38. *Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$ как Ф2П, то при $\forall y_0\in[c,d]$, $f(x,y)\overset{X}{\underset{y\to y_0}{\rightrightarrows}}f(x,y_0)$, где $X=[a,b]$*

$\diamondsuit$ Во-первых $\phi(x)=\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=f(x,y_0)$ в силу непрерывности функции.

Функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, а значит равномерно непрерывна на этом промежутке (теорема Кантора). Т.е

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta=\delta(\epsilon):\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[a,b]\times[c,d]:\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))\le\delta\Rightarrow$$

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le\epsilon$$

где $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

В частности, это будет выполняться если $(x_1,y_1)=(x,y)$, а $(x_2,y_2)=(x,y_0)$, если $|y-y_0|\le\delta$. В этом случае $\rho=\delta$ и $|f(x,y)-f(x,y_0)|\le\epsilon$ для $\forall x\in X$.

Значит $f(x,y)$ сходится равномерно к $f(x,y_0)$ на $[a,b]$ при $y\to y_0$. $\blacksquare$

10.3 Интеграл, зависящий от параметра

Будем рассматривать функцию $f(x,y)$, определенную на множестве $X\times Y$ и интегрируемую на X по переменной x при каждом фиксированном $y\in Y$.

Пусть $X=[a,b]$, т.е. рассматривается интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx=F(y)$ — **интеграл, зависящий от параметра y**.

Когда y пробегает Y, то получаем функцию $F(y)$. Мы имеем дело с новым способом задания функции через интеграл.

Пример. $F(y)=\int\limits_1^2 cos(xy)dx=\frac{sin(xy)}{y}\Big|_1^2=\frac{sin(2y)-sin(y)}{y}$ при $y\neq0$.

Если $y=0$, то $\int\limits_1^2 dx=1$.

Пример. $F(y)=\int\limits_0^1 sgn(x-y)dx$

Если $y<0$, то x всегда больше $y\Rightarrow sgn(x-y)=1$.

Если $y>1$, то x всегда меньше $y\Rightarrow sgn(x-y)=-1$

$$y<0:F(y)=\int\limits_0^1 dx=1$$

$$y>1:F(y)=\int\limits_0^1(-1)dx=-1$$

Если $y\in(0,1)$, то $\int\limits_0^1 sgn(x-y)dx=\int\limits_0^y(-1)dx+\int\limits_y^1 1dx=-x|_0^y+x|_y^1=-y+1-y=1-2y$.

Таким образом $F(y) = \begin{cases} 1, & y \leq 0 \\ 1-2y, & y \in (0,1) \\ -1, & y \geq 1 \end{cases}$

Пример. $\int\limits_1^2 e^{yx^2}dx = F(y)$ - неберущийся в элементарных функциях интеграл. Поэтому вычислить $F(y)$ не можем, но $\forall y$ интеграл сходится.

10.4 Предельный переход ИЗОП

Пусть y_0 — предельная точка множества Y.

Теорема 39. *Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x на $X=[a,b], \forall y \in Y$ и $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$.*

Тогда $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^b \phi(x)dx \quad (1).$

Говорят, что допускается предельный переход под знаком интеграла.

◊ Возьмем $\forall \epsilon > 0$ и рассмотрим

$$\left|\int\limits_a^b f(x,y)dx - \int\limits_a^b \phi(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b (f(x,y)-\phi(x))dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x,y)-\phi(x)dx| \leq (*)$$

.

Т.к сходимость $f(x,y)$ к $\phi(x)$ равномерная, то для y достаточно близких к y_0 модуль разности $f(x,y)$ и $\phi(x)$ не превосходит ϵ, т.е $|f(x,y)-\phi(x)| \leq \epsilon$.

Значит $(*) \leq \int\limits_a^b \epsilon dx = \epsilon(b-a)$ и по М-лемме равенство (1) выполнено. ■

Лекция 11

11.1 Теорема Стокса-Зейделя

Теорема 40. *1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x на промежутке $[a, b]$, $\forall y \in Y$.*

2. $f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, где $X = [a, b]$.
Тогда функция $\phi(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

$\diamondsuit$ Возьмем любое $x_0 \in X$ и рассмотрим $|\phi(x) - \phi(x_0)| \leq |\phi(x) - f(x, y)| + |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - \phi(x_0)| \leq *$.
Теперь возьмем любое $\epsilon > 0$. Так как выполняется пункт 2, то

$$\exists \delta = \delta(\epsilon), \forall y \in Y : 0 < |y - y_0| \leq \delta, \forall x \in X \Rightarrow |\phi(x) - f(x, y)| \leq \epsilon \text{ и } |f(x_0, y) - \phi(x_0)| \leq \epsilon$$

Зафиксируем такое y, что $0 < |y - y_0| \leq \delta$. Учитывая пункт 1, имеем:

$$\bar{\delta}, 0 < |x - x_0| \leq \bar{\delta} \Rightarrow \ |f(x, y) - f(x_0, y)| \leq \epsilon$$

Следуя из этого и доказанного выше, получаем $* \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon$. Таким образом имеем:

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ \bar{\delta}\colon 0 < |x - x_0| \leq \bar{\delta}\colon |\phi(x) - \phi(x_0)| \leq 3\epsilon$$

Следовательно $\phi(x)$ непрерывна в точке x_0. $\blacksquare$

Следствие. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$ как Ф2П, то $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ непрерывна на $[c, d]$.

$\diamondsuit$ Возьмем любое $y_0 \in [c, d]$ и рассмотрим $\lim\limits_{y \to y_0} F(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)dx = *$.

Так как $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$, то $f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x, y_0)$ (лекция 10). Значит допускается предельный переход:

$$* = \int\limits_a^b (\lim_{y \to y_0} f(x, y))dx = \int\limits_a^b f(x, y_0)dx = F(y_0)$$

Следовательно $F(y)$ непрерывна в точке y_0. Поскольку y_0 любая точка из $[c, d]$, то $F(y)$ непрерывна на всем $[c, d]$. $\blacksquare$

11.2 Дифференцирование ИЗОП

Теорема 41. *1. Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x на $[a,b]$ при любом $y \in [c,d]$.*

2. $\exists f'_y(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$ как Ф2П.

Тогда $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ дифференцируема на $[c,d]$ и $F'(y) = \left(\int\limits_a^b f(x,y)\right)'_y = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

То есть допускается дифференцирование под знаком интеграла.

$\diamondsuit$ Рассмотрим отношение $F(y+\Delta y) - F(y)$.

$$F(y+\Delta y) - F(y) = \int\limits_a^b f(x, y+\Delta y)dx - \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b (f(x,y+\Delta y) - f(x,y))dx =$$

$$= [\text{Теорема Лагранжа}] = \int\limits_a^b (f'_y(x, y+\theta\Delta y)\Delta y)dx = \Delta y \int\limits_a^b f'_y(x, y+\theta\Delta y)dx$$

Тогда

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\int\limits_a^b f'_y(x,y+\theta\Delta y)dx =$$

$$= [\text{Так как } f'_y \text{ непрерывная функция от двух переменных, то можно перейти}$$

$$\text{к пределу под знаком интеграла}] = \int\limits_a^b (\lim_{\Delta y\to 0} f'_y(x,y+\theta\Delta y))dx = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$$

Что и требовалось доказать. $\blacksquare$

11.3 Интегрирование ИЗОП

Теорема 42. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$, то $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ интегрируема на $[c,d]$ и интеграл $\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx \quad (*)$*

Формула (*) говорит о том, что допускается интегрирование под знаком интеграла.

$\diamondsuit$ Формула (*) это ни что иное как расстановка пределов по прямоугольнику $[a,b]\times[c,d]$ в интеграле $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$. $\blacksquare$

Рассмотренная теорема позволяет получить информацию о функции $F(y)$ и в случае, когда $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ не берущийся.

Пример. $F(y) = \int\limits_0^1 e^{yx^2}dx$. Не берущийся интеграл.

$F(0) = \int\limits_0^1 1dx = 1$

Так как функция $f'_y(x,y) = (e^{yx^2})'_y = x^2 e^{yx^2}$ непрерывна на промежутке $[0,1]\times[-1,1]$, то по теореме 41 $\Rightarrow F(y)$ дифференцируема на отрезке $[-1,1]$ и $F'(y) = \int\limits_0^1 f'_y(x,y) = \int\limits_0^1 x^2 e^{yx^2}dx$ и в частности $F'(0) = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Теперь рассмотрим $F''(y) = (F'(y))'_y = \int\limits_0^1 x^4 e^{yx^2}dx$ и $F''(0) = \frac{1}{5}$.

По формуле Тейлора получаем, что

$$F(y) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}y + \frac{F''(0)}{2!}y^2 + R_2(y)$$

Отсюда следует, что $F(y) = 1 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{10}y^2 + o(y^2)$

11.4 Несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра

Будем рассматривать функцию $f(x,y)$ определенную на множестве $(x,y) \in [a,+\infty)\times Y$, где $Y \in \mathbb{R}$ и интегрируемую, в несобственном смысле на промежутке $[a,+\infty)$.

Пусть функция $f(x,y)$ не имеет конечных особых точек и $\forall y \in Y\ \exists F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \in \mathbb{R}$, т.е. несобственный интеграл сходится $\forall y \in Y$.

Определение 20. $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *называется* ***несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра*** *(НИЗОП-1).*

Определение 21. ***Сходимость*** *НИЗОП-1 в точке y означает:*

$$\forall\epsilon > 0, \exists A_\epsilon = A(\epsilon, y) : \forall A \geq A_\epsilon \Rightarrow \left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leq \epsilon$$

Определение 22. *Если число A_ϵ может быть одним и тем же $\forall y \in Y$, то говорят, что НИЗОП-1* ***сходится равномерно*** *на Y. Точнее если:*

$$\forall\epsilon > 0, \exists A_\epsilon = A(\epsilon) : \forall A \geq A_\epsilon, \forall y \in Y \Rightarrow \left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leq \epsilon$$

Если НИЗОП-1 сходится равномерно на Y, то используют обозначения $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$.

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^y}$. Этот интеграл сходится по степенному признаку для $Y = (1,+\infty)$.

Возьмем подмножество $[a,+\infty) \subset (1,+\infty)$, откуда понятно, что $a > 1$.

Теперь возьмем любое $\epsilon > 0$ и рассмотрим интеграл

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^y}\right| = [\text{модуль можно снести, так как подынтегральная сумма положительная}] =$$

$$= \left.\frac{x^{-y+1}}{1-y}\right|_A^{+\infty} = 0 + \frac{A^{-y+1}}{y-1}$$

Так как $1 - y < 0$, то при достаточно больших A величина $A^{1-y} \le \epsilon$, а знаменатель $y - 1 \ge a - 1 > 0$. Значит

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^y}\right| \le \frac{\epsilon}{a-1} \text{ для достаточно больших } A$$

Т.е. интеграл сходится равномерно на промежутке $y \in [a, +\infty)$.

Докажем, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^y}$ не сходится равномерно на промежутке $(1, +\infty)$.

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^y} = \left.\frac{x^{1-y}}{1-y}\right|_A^{+\infty} = \frac{A^{1-y}}{y-1} \ge \frac{1}{y-1}$$

За счет выбора y получаем, что полученное выражение будет больше 2, т.е.

$$\exists \epsilon = 2, \forall A, \exists y_0 \in Y : \left|\int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^{y_0}}\right| > \epsilon$$

Получили отрицание определения равномерной сходимости.

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}dx,\ y \in (0, +\infty)$.

$$\int\limits_A^{+\infty} ye^{-xy}dx = -e^{-xy}\Big|_A^{+\infty} = e^{-Ay}$$

При любом A сколь угодно большом, т.е. $\forall A \ge A_\epsilon$ имеем $y = y_0 = \frac{1}{A} \in (0, +\infty) :$

$$e^{-Ay_0} = e^{-1} > \frac{1}{2e} = \epsilon$$

Т.е. $\exists \epsilon = \frac{1}{2e} : \forall A$ сколь угодно большом $\exists y_0 \in Y : \left|\int\limits_A^{+\infty} y_0 e^{-xy_0}dx\right| > \epsilon$. Следовательно равномерной сходимости нет.

11.4.1 Критерий Коши

Теорема 43. *Интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon : \forall A_1, A_2 \ge A_\epsilon (A_2 > A_1), \forall y \in Y \Rightarrow \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx\right| \le \epsilon$$

Лекция 12

12.1 Признаки, позволяющие установить равномерную сходимость НИЗОП

12.1.1 Признак Вейерштрасса

Теорема 44. *Пусть* $\exists \phi(x)$ *определенная на* $[a, +\infty)$*:* $\mid f(x, y) \mid \leq \phi(x)$ *для* $\forall x \in [a, +\infty)$ *и* $\forall y \in Y$*. Если* $\int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx$ *сходится* $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$ *(сходится равномерно).*

$\int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx$ - **мажоранта** для $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx$.

$\diamondsuit$ Возьмем $\forall \epsilon > 0$. Т.к мажоранта сходится, то по критерию Коши:

$$\exists A_\epsilon : \forall A_1, A_2 \geq A_\epsilon \Rightarrow \left| \int\limits_{A_1}^{A_2} \phi(x)dx \right| \leq \epsilon$$

.

Тогда $\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x, y)dx \right| \leq \int\limits_{A_1}^{A_2} \mid f(x, y) \mid dx \leq \int\limits_{A_1}^{A_2} \phi(x)dx = \left| \int\limits_{A_1}^{A_2} \phi(x)dx \right| \leq \epsilon$.

Получаем $\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x, y)dx \right| \leq \left| \int\limits_{A_1}^{A_2} \phi(x)dx \right| \leq \epsilon$, т.е сходимость интеграла равномерная на основании Критерия Коши.

$\blacksquare$

Пример. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{sin(x^2y)+y^2}{x\ln^2 x + e^{xy}}dx$, $y \in [0, 5]$.

$\mid \frac{sin(x^2y)+y^2}{x\ln^2 x + e^{xy}} \mid \leq \frac{1+25}{x \ln^2 x} = \frac{26}{x\ln^2 x}$

$\int\limits_2^{+\infty} \frac{26}{x\ln^2 x}dx$ сходится по интегральному признаку, значит исходный интеграл сходится равномерно на Y.

Будем рассматривать $\int\limits_a^{+\infty} h(x,y)g(x)dx$, где $h(x,y)$ — непрерывная функция при $\forall x$ по переменной y и $g(x)$ имеет непрерывную производную $g'(x)$, причем $g(x)$ монотонно стремится к 0.

12.1.2 Признак Дирихле

Теорема 45. *Пусть выполняется следующее*

1. $\left|\int\limits_a^A h(x,y)dx\right| \le M, \forall A \ge a, \forall y \in Y$.

2. *$g(x)$ монотонно стремится к 0.*

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$, *где* $f(x,y) = h(x,y)\cdot g(x)$

$\Diamond$ Т.к $g(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$, то для $\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon : \forall x \ge A_\epsilon \Rightarrow |g(x)| \le \epsilon$. Рассмотрим $\forall A_1, A_2 \ge A_\epsilon$.

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} h(x,y)\cdot g(x)dx\right| = \left[\begin{array}{l} g(x) = u,\ du = g'(x)dx \\ dv = h(x,y)dx,\ v = \int\limits_a^x h(x,y)dx \end{array}\right] =$$

$$= \left| g(x)\cdot \int\limits_a^x h(x,y)dx \right|_{A_1}^{A_2} - \int\limits_{A_1}^{A_2}\left(\int\limits_a^x h(x,y)dx\cdot g'(x)\right)dx\Bigg| \le (*)$$

.

$\left|\int\limits_a^x h(x,y)dx\right| \le M$ (дано из условия). Предполагаем, что $A_1 \le A_2$.

$$(*) \le \left|g(A_2)\int\limits_a^{A_2} h(x,y)dx\right| + \left|g(A_1)\int\limits_a^{A_1} h(x,y)dx\right| + \left|\int\limits_{A_1}^{A_2}\left(\int\limits_a^x h(x,y)dx\cdot g'(x)\right)dx\right| \le$$

$$\le 2\epsilon M + \int\limits_{A_1}^{A_2}\left|\int\limits_a^x h(x,y)dx\right|\cdot|g'(x)|dx \ \le 2\epsilon M + \int\limits_{A_1}^{A_2} M\cdot|g'(x)|dx \le$$

$$\le [\ g'(x) \text{ не меняет знак}] \le 2\epsilon M + M\cdot\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} g'(x)dx\right| \le 2\epsilon M + M2\epsilon = 4M\epsilon$$

На основании критерия Коши, интеграл сходится равномерно. ■

12.1.3 Признак Абеля

Теорема 46. *Пусть $h(x,y)$ непрерывна по x при каждом фиксированном $y \in Y$, $g(x)$ имеет непрерывную производную и:*

1. $\int\limits_a^{+\infty} h(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$

2. *$g(x)$ монотонна и ограничена.*

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$, *где* $f(x,y) = h(x,y)\cdot g(x)$

$\diamondsuit$ Доказательство аналогично, как и для признака Дирихле. $\blacksquare$

Пример. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cdot cos(xy)}{1+x^2}dx, y \in [a,+\infty), a > 0.$

Мажоранта $\frac{x}{x^2}$ - не является сходяшейся, значит пользуемся другим признаком.

$$\left|\int\limits_0^A cos(xy)dx\right| = \left|\frac{sin(xy)}{y}\Big|_0^A\right| \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{a},\ \forall y \in Y$$

$\frac{x}{1+x^2}$ монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$.

Тогда по признаку Дирихле интеграл сходится равномерно на $[a,+\infty)$.

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\cdot arctg(x)\cdot cos(xy)}{1+x^2}dx, y \in [a,+\infty), a > 0$

$$h(x,y) = \frac{x\cdot cos(xy)}{1+x^2},\ \int\limits_1^{+\infty} h(x,y)dx \overset{[a,+\infty)}{\rightrightarrows} \text{ по признаку Дирихле}$$

$g(x) = arctg(x)$ — монотонно возрастает и ограничена $\frac{\pi}{2}$.

Исходный интеграл сходится равномерно на $[a,+\infty)$ по признаку Абеля.

12.2 Свойства НИЗОП - 1

Будем рассматривать $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$, где $f(x,y)$ определена на $[a,+\infty)\times Y$, непрерывна по x на $[a,+\infty)$, $y \in Y$ и интегрируема при каждом $y \in Y$.

Пусть y_0 - предельная точка Y.

12.2.1 Предельный переход в НИЗОП-1

Лемма 3. *Пусть выполняется следующее*

1. $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,A]}{\rightrightarrows}} \phi(x), \forall A \geq a$. *(сходится равномерно на* $\forall[a,A]$*).*

2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx$ *сходится.*

$\diamondsuit$ Возьмем $\forall\epsilon > 0$, т.к по второму условию интеграл сходится равномерно, то по критерию Коши равномерной сходимости $\exists A_\epsilon, \forall A_1, A_2 \geq A_\epsilon, \forall y \in Y \Rightarrow \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx\right| \leq \epsilon$

Пусть $y \to y_0$. Из первого пункта следует, что допустим предельный переход ИЗОП. Получим $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} \phi(x)dx\right| \leq \epsilon$

По критерию Коши для НИ-1 следует, что $\int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx$ сходится. $\blacksquare$

Теорема 47 (Предельный переход в НИЗОП-1)**.** *Пусть выполняется следующее*

1. $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,A]}{\rightrightarrows}} \phi(x), \forall A \geq a.$

2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$

Тогда $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx.\quad (1)$

$\diamondsuit$ Докажем, что $\lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx.$

Возьмем $\forall\epsilon \geq 0$ и рассмотрим разность $\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx\right|$.

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} \phi(x)dx\right| = \left|\int_a^{A} f(x,y)dx + \int_A^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{A} \phi(x)dx - \int_A^{+\infty} \phi(x)dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_a^{A} f(x,y) - \phi(x)dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} \phi(x)dx\right| \leq (*)$$

.

Из 2-го условия (интеграл сходится равномерно) получаем, что $\forall\epsilon > 0, \left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leq \epsilon$ (для достаточно больших $A \geq A_\epsilon$ - из определения равномерной сходимости).

$\int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx$ сходится по Лемме 3. Тогда $\left|\int\limits_A^{+\infty} \phi(x)dx\right| \leq \epsilon.$

Т.к $f(x,y)$ стремится равномерно к $\phi(x)$, то для y достаточно близких к y_0 $\left|\int\limits_a^{A}(f(x,y) - \phi(x))dx\right| \leq \int\limits_a^{A} \mid f(x,y) - \phi(x) \mid dx \leq \int\limits_a^{A} \frac{\epsilon}{A-a}dx = \epsilon$

Тогда $(*) \leq 3\epsilon$. Таким образом $\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx\right| \leq 3\epsilon.$ ■

12.2.2 Непрерывность НИЗОП-1

Теорема 48. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,+\infty) \times [c,d]$ *как Ф2П;*

2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$

Тогда $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *непрерывна на* $[c,d]$.

$\diamondsuit$ Возьмем $\forall y_0 \in [c,d]$.

Функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,A] \times [c,d]$ как Ф2П для $\forall A > a \Rightarrow$

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} f(x,y_0) = \phi(x)$$

.

Значит допускается предельный переход НИЗОП-1.

$$\lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = F(y_0)$$

■

12.2.3 Интегрирование НИЗОП-1

Теорема 49. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,+\infty)\times[c,d]$ *как Ф2П;*
2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$.

Тогда $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx. \quad (2)$
То есть допускается интегрирование по параметру под знаком НИ.

$\diamondsuit$ Возьмем $\forall A > a,$ тогда

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^A f(x,y)dx\right)dy = [\text{Теорема об интегрировании ИЗОП}] = \int\limits_a^A \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

Пусть $A\to+\infty$. Тогда получим (2), если докажем что можно перейти к пределу под знаком интеграла слева.

$F(A,y) = \int\limits_a^A f(x,y)dx$ - непрерывная как Ф2П и $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$ (из 2-го условия).

Следовательно, предельный переход под знаком интеграла допустим и мы получаем формулу (2). ■

Лекция 13

13.1 НИ от НИЗОП

Теорема 50. *Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ как Ф2П и :*

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c,+\infty)}{\rightrightarrows}$, $\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy \overset{[a,+\infty)}{\rightrightarrows}$

2) *Сходится хотя бы один из интегралов:*
$\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} |f(x,y)|dx$, $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x,y)|dy$

Тогда $\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$, *то есть допускается интегрирование по параметру* y *под знаком НИЗОП.*

$\diamondsuit$Без доказательства$\blacksquare$

Пример. $F(y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}dx, \qquad \int\limits_0^{+\infty} F(y)dy = I - ?$

Функция $f(x,y) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}$ непрерывна как Ф2П на $[1,+\infty)\times[0,+\infty)$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}dx \overset{y\in[0,+\infty)}{\rightrightarrows}$ по признаку Вейерштрасса, ибо у него есть сходящаяся мажоранта $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}dy \overset{x\in[1,+\infty)}{\rightrightarrows}$ по признаку Вейерштрасса, ибо у него есть сходящаяся мажоранта $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{2}dy$.

Покажем, что сходится $\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}dy$

$\int\limits_1^{+\infty} dx \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}dy\right) = \int\limits_1^{+\infty} dx \left(-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}e^{-x^2y}\right)\Big|_0^{+\infty} = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$
$= \left(-\frac{1}{x} - \arctan x\right)\Big|_1^{+\infty} = -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

Выполнены все условия теоремы и по (3) : $\int\limits_0^{+\infty} F(y)dy = \int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2y}}{1+x^2}dy = 1 - \frac{\pi}{4}$

13.2 Дифференцирование НИЗОП-1

Теорема 51. *Пусть*

1. $f(x,y)$ *непрерывна по* x *на* $[a,+\infty)$ $\forall y \in [c,d]$
2. $\exists f'_y(x,y)$, *которая непрерывна на* $[a,+\infty)\times[c,d]$ *как Ф2П*
3. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = F(y)$ $\forall y \in [c,d]$, *т.е. интеграл сходится*
4. $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$

Тогда $F(y)$ *дифференцируема и* $F'(y) = \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)'_y = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ *(4), то есть допускается дифференцирование по параметру* y *под знаком НИЗОП.*

$\diamondsuit$ Пусть $\Phi(y) = \int\limits_c^y dt \int\limits_a^{+\infty} f'_t(x,t)dx$. Для $f'_t(x,t)$ выполняется условие теоремы об интегрируемости НИЗОП, поэтому

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^y f'_t(x,t)dt = \int\limits_a^{+\infty} dx\,(f(x,t)|_c^y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,c)dx = F(y) - F(c)$$

Далее продифференцируем по y это равенство.

Слева: $\int\limits_a^{+\infty} f'_t(x,t)dx$ непрерывно по t по теореме о непрерывности НИЗОП-1.

По теореме Барроу, это равно подынтегральной функции от верхнего предела, то есть $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx = F'(y)$. Получили (4). ■

13.3 Локальная равномерная сходимость

Определение 23. *Говорят, что интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ ***сходится*** *на множестве* Y ***локально равномерно****, если он сходится равномерно на любом* $[c,d] \subset Y$, *т.е.* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c.d]}{\rightrightarrows}$.

Из равномерной сходимости вытекает локальная равномерная сходимость, но обратное неверно.

Пример. Рассмотрим интеграл $I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^2}$. Он сходится для любого $a > 0$ по степенному признаку.

Если $a > 0$, то особые точки: $x = +\infty : \frac{1}{(x^2+a)^2} \sim \frac{1}{x^4}$.

Но равномерной сходимости на $(0,+\infty)$ нет, т.к. $\frac{1}{(x^2+a)^2} \underset{a\to+0}{\rightarrow} \frac{1}{x^4}$ и $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ расходится в точке 0.

По лемме перед предельным переходом в НИЗОП, равномерной сходимости нет.

Вместе с тем можно заметить, что $I(a) = -\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+a}\right)'_a$ — этот интеграл тоже сходится при $a > 0$, но равномерной сходимости нет.

Возьмем $\forall a > 0$, тогда $\exists[\alpha, \beta]$, такой что $0 < \alpha \le a \le \beta$. Тогда:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a}, \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} \text{ т.к. есть сходящаяся мажоранта } \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha}$$

Тогда функция $f(x, \alpha) = \frac{1}{x^2+\alpha}$ непрерывна на $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ и имеет непрерывную производную по α $-\frac{1}{(x^2+\alpha)^2}$, непрерывную как Ф2П.

$\int\limits_0^{+\infty} f'_a(x, a)dx = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a}$ сходится по степенному признаку $\forall a \in [\alpha, \beta]$.

$\int\limits_0^{+\infty} f(x, a)dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^2} \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} \ \forall[\alpha, \beta]$ по признаку Вейерштрасса, ибо имеет сходящуюся мажоранту $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2}$.

Используя локальную равномерную сходимость, имеем: $I(a) = -\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+a}\right)'_a dx =$
$= -\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a}dx\right)'_a = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\Big|_0^{+\infty}\right)'_a = \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{2}\right)'_a = \frac{\pi}{4\sqrt{a^3}}$

Таким образом, $I(a) = \frac{\pi}{4\sqrt{a^3}}$, $\forall a \in [\alpha, \beta]$, и в частности в выбранной ранее точке а из этого отрезка, то есть $\forall a > 0$, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{a^3}}$

Замечание: В сформулированных ранее теоремах о непрерывности и дифференцируемости НИЗОП-1 требование равномерной сходимости конкретного интеграла можно заменить требованием локальной равномерной сходимости.

13.4 НИЗОП-2

Пусть $f(x, y)$ определена на $[a, b) \times Y$, где b — ОТ функции $f(x, y)$, то есть $f(x, y)$ неограничена в окрестности точки $x = b$.

И пусть функция $f(x, y)$ интегрируема, то есть $\exists \int\limits_a^c f(x, y)dx \ \forall c \in [a, b)$.

Положим, что других особых точек нет.

$$\lim_{c \to b-0} \int\limits_a^c f(x, y)dx = F(y)$$

Определение 24. *Если этот предел существует и конечный, то говорят, что* $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ ***сходится*** *при данном значении* y*, в противном случае интеграл* ***расходится***.

Определение 25. *Пусть интеграл сходится для* $\forall y \in Y$*, тогда на* Y *определена функция* $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$*, которую называют* ***НИЗОП-2***.

Все теоремы, сформулированные для НИЗОП-1, можно сформулировать и для НИЗОП-2.

Но можно свести НИЗОП-2 к НИЗОП-1 при помощи замены переменных:

$$\left[\frac{1}{b-x} = t \mid \frac{1}{b-a} = \alpha\right] = \int\limits_\alpha^{+\infty} g(t, y)dt$$

13.4.1 Теорема о непрерывности НИЗОП-2

Теорема 52. *Пусть*

1. *$f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$ как Ф2П.*

2. $\int\limits_a^b f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$

*Тогда функция $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ **непрерывна на** $[c,d]$.*

При этих же условиях можно интегрировать НИЗОП-2 под знаком интеграла, то есть

$$\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

Аналогично формулируется и **теорема о дифференцировании**.

Определение 26. ***Определение равномерной сходимости:***

$$\int\limits_a^b f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow\ \forall\epsilon>0\ \exists c_\epsilon=c(\epsilon)\ :\ \forall c\in[c_\epsilon,b),\ \forall y\in Y\Rightarrow\left|\int\limits_c^b f(x,y)dx\right|\le\epsilon$$

13.4.2 Критерий Коши

Теорема 53.

$$\int\limits_a^b f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow\ \forall\epsilon>0\ \exists c\ :\ \forall c_1,c_2\in[c,b),\ \forall y\in Y\Rightarrow\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x,y)dx\right|\le\epsilon$$

13.4.3 Признак Вейерштрасса

Теорема 54. *Если существует $g(x)$, определённая на $[a,b)$ и $|f(x,y)|\le g(x)$, $\forall x\in[a,b)$, $\forall y\in Y$: $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится $\Rightarrow\int\limits_a^b f(x,y)dx\overset{Y}{\rightrightarrows}$*

13.4.4 Локальная равномерная сходимость НИЗОП-2

Определение 27. ***Локальная равномерная сходимость** означает, что интеграл равномерно сходится на $\forall[c,d]\subset Y$.*

Как и для НИЗОП-1, равномерную сходимость можно заменить на локальную равномерную сходимость в теоремах о непрерывности и дифференцируемости.

Лекция 14

14.1 Эйлеров интеграл 1-ого рода

Определение 28. *Интеграл* $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ *называется* ***Эйлеровым интегралом 1-ого рода***.

14.1.1 Сходимость Эйлеровго интеграл 1-ого рода

Изучим сходимость этого интеграла.

ОТ: $x = 0$, тогда $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \sim x^{a-1} = \frac{1}{x^{1-a}}$ сходится при $1 - a < 1 \Rightarrow a > 0$.

ОТ: $x = 1$, тогда $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \sim (1-x)^{b-1} = \frac{1}{(1-x)^{1-b}}$ сходится при $1 - b < 1 \Rightarrow b > 0$.

Следовательно получили, что Эйлеров интеграл 1-ого рода сходится при $a > 0$ и $b > 0$, в других случаях расходится.

Определение 29. *При $a > 0$ и $b > 0$ интеграл определяет:*

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx - \textbf{\textit{бетта-функция Эйлера}}.$$

Будем изучать ее. Положим $1 - x = t \Rightarrow x = 1 - t \Rightarrow dx = -dt$. Тогда:

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = -\int\limits_1^0 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt = \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt = B(b,a)$$

Получили, что $B(a,b) = B(b,a)$.

Теперь рассмотрим $B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \left[\begin{array}{l} u = (1-x)^{b-1},\ du = -(b-1)(1-x)^{b-2}dx \\ dv = x^{a-1}dx, \quad v = \frac{x^a}{a} \end{array}\right] =$

$$= [\text{Пусть } b > 1] = \frac{1}{a}x^a(1-x)^{b-1}\Big|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx = *$$

.

Используя тот факт, что $x^a = x^{a-1} \cdot x = x^{a-1}(1-(1-x))$ получаем:

$$* = \frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-(1-x))(1-x)^{b-2}dx = \frac{b-1}{a}\left(\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\right) =$$

$$= \frac{b-1}{a}(B(a,b-1) - B(a,b))$$

Отсюда несложно получить, что $B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1), b > 1$ — это называется **формула понижения**. Аналогично можно получить формулу $B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b), a > 1$.

При больших значениях b можно использовать формулу понижения несколько раз.

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1) = \frac{(b-1)(b-2)}{(a+b-1)(a+b-2)}B(a,b-2) = \dots$$

Пусть $n = b \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$B(a,n) = \frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(a+n-1)(a+n-2)\cdot\ldots\cdot(a+1)}B(a,1)$$

Т.к. $B(a,1) = \int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \frac{x^a}{a}\Big|_0^1 = \frac{1}{a}$, получаем

$$B(a,n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)} \quad (1)$$

$$B(m,b) = \frac{(m-1)!}{b(b+1)(b+2)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)} \quad (2)$$

Если в формулах оба аргумента функции являются натуральными числами, то

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n-1)} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!} \quad (3)$$

Определение 30. *Формулы (1), (2), (3) называются **формулами понижения**.*

Пример. $\int\limits_0^1 x^3(1-x)^4dx = B(4,5) = \frac{3!4!}{8!}$

14.1.2 Второе представление бетта функции

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \left[t = \frac{x}{1-x}, x = \frac{t}{1+t}, dx = \frac{1}{(1+t)^2}dt\right] =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1} \frac{1}{(1+t)^{b-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^2}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt$$

Таким образом получаем, что

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx$$

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^\beta)^\gamma}dx, \quad \beta, \gamma \geq 0.$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^\beta)^\gamma}dx = \left[t = x^\beta, x = t^{\frac{1}{\beta}}, dx = \frac{1}{\beta}\,t^{\frac{1}{\beta}-1}dt\right] = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{\beta}-1}\frac{1}{(1+t)^\gamma}dt = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}}{(1+t)^\gamma}dt =$$

$= [\text{Воспользуемся 2-ым представлением В функции}] = \left[a = \dfrac{\alpha+1}{\beta}, \gamma = a + b \Rightarrow b = \gamma - \dfrac{\alpha+1}{\beta}\right] =$

$$= \frac{1}{\beta}\, B\left(\frac{\alpha+1}{\beta}, \gamma - \frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

14.2 Интеграл Эйлера $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$

Исследуем интеграл Эйлера на сходимость.

$x = 0$ — особая точка. Тогда $\frac{x^{p-1}}{1+x} \sim \frac{1}{x^{1-p}}$ сходится при $1 - p < 1 \Rightarrow p > 0$.

$x = +\infty$ — особая точка. Тогда $\frac{x^{p-1}}{1+x} \sim \frac{x^{p-1}}{x} = \frac{1}{x^{2-p}}$ сходится при $2 - p > 1 \Rightarrow p < 1$.

Следовательно, интеграл Эйлера сходится при $0 < p < 1$ и определяет функцию:

Определение 31.

$$E(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx \; (4) \text{ — } \textit{\textbf{функция Эйлера}}$$

Как ранее было доказано $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$. Т.к. подынтегральная функция четная, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{1}{2n}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2n}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \left[t = x^{2n}, x = t^{\frac{1}{2n}}, dx = \frac{1}{2n}\, t^{\frac{1}{2n}-1}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2m}{2n}+\frac{1}{2n}-1}}{1+t}dt = \frac{1}{2n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t}dt = [\text{Учитывая (4)}] = \frac{1}{2n}\, E\left(\frac{2m+1}{2n}\right)$$

$$E\left(\frac{2m+1}{2n}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)} \quad (5)$$

Функция Эйлера является непрерывной функцией от p, так как подынтегральная сумма непрерывна на $\in (0, 1)$.

Возьмем $\forall[p_1, p_2] \subset (0, 1)$ и покажем, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx \overset{[p_1,p_2]}{\rightrightarrows}$.

$x = 0$ — особая точка. Тогда $\frac{x^{p-1}}{1+x} \leq \frac{x^{p_1-1}}{1+x}$, а $\int\limits_0^2 \frac{x^{p_1-1}}{1+x}dx$ сходится, так как $p_1 - 1 < 0$. Значит в точке 0 есть равномерная сходимость.

$x = +\infty$ — особая точка. Тогда $\frac{x^{p-1}}{1+x} \leq \frac{x^{p_2-1}}{1+x}, \forall x \in [2, +\infty)$, а $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x^{p_2-1}}{1+x}dx$ сходится, так как $p_2 - 1 < 0$ и $\frac{x^{p_2-1}}{1+x} \sim \frac{1}{x^{2-p_2}}$ - сходится.

Тогда по признаку Вейерштрасса интеграл сходится локально-равномерно $\forall[p_1, p_2] \subset (0, 1) \Rightarrow$ функция непрерывна на $[p_1, p_2] \Rightarrow$ функция непрерывна на $(0, 1)$.

Получили, что $E(p)$ непрерывна на $(0, 1)$.

Возьмем теперь $\forall p \in (0,1)$ и разобьем (0, 1) на $2n$ полуинтервалов и точка p окажется либо в $\left(\frac{2m}{2n}, \frac{2m+1}{2n}\right]$, либо в $\left(\frac{2m+1}{2n}, \frac{2m+2}{2n}\right]$. Для какого-то m числа $\frac{2m}{2n}, \frac{2m+1}{2n}, \frac{2m+2}{2n} \underset{n\to\infty}{\to} p$, тогда в (5), при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{2m+1}{2n}\right) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

Поскольку функция $E(p)$ непрерывна на $(0,1)$, то $E(p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$. Итог

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

14.2.1 Формула дополнения

Рассмотрим $B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx$

Если $a+b=1$, то $B(a, 1-a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = E(a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

$$B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} - \textbf{формула дополнения для } \mathbf{0 < a < 1}$$

Пример. $\int\limits_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{4}} dx = B(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$

Лекция 15

15.1 Эйлеров интеграл 2-ого рода

Определение 32. *Интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ *называется* ***Эйлеровым интегралом 2-ого рода***.

15.1.1 Изучение сходимости интеграла

$x = 0$ — особая точка, тогда $x^{a-1}e^{-x} \sim x^{a-1} = \frac{1}{x^{1-a}}$ сходится при $1 - a < 1 \Rightarrow a > 0$.

$x = +\infty$ — особая точка. Так как неравенство $\frac{x^{a-1}}{e^x} \leq \frac{1}{x^2}$ выполняется для достаточно больших x и интеграл сходится $\forall a$.

Следовательно, интеграл сходится при $a > 0$ и определяет функцию $\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$, которая называется **гамма-функция Эйлера**.

Равномерной сходимости на $a \in (0, +\infty)$ нет по лемме перед предельным переходом НИЗОП.

Возьмем $\forall a \in (0, +\infty)$, тогда $\exists[\alpha, A], 0 < \alpha \leq a \leq A$. При этом

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \int\limits_0^{1} x^{a-1}e^{-x}dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = I_1 + I_2$$

$I_1 : \int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$. Интеграл сходится равномерно на $[\alpha, A]$, т.к. у него есть сходящаяся мажоранта $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Подынтегральная функция непрерывна на $(a, +\infty) \times [\alpha, A]$, тогда $I_1 = I_1(a)$ непрерывна на $[\alpha, A]$, и в частности в точке $a \Rightarrow$ непрерывна везде на $(0, +\infty)$.

$I_2 : \int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно на $[\alpha, A]$, т. к. $\int\limits_1^{+\infty} x^{A-1}e^{-x}dx$ сходится. Подынтегральная функция непрерывна на $(a, +\infty) \times [\alpha, A]$, тогда $I_2 = I_2(a)$ непрерывна на $[\alpha, A]$ и в частности в точке $a \Rightarrow \Gamma(a)$ непрерывна при $\forall a \in (0, +\infty)$.

15.1.2 Изучение дифференцирования интеграла

Рассмотрим интеграл от производной.

$$(x^{a-1}e^{-x})'_a = x^{a-1}e^{-x}\ln x$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x dx$ не сходится равномерно, но сходится локально равномерно.

Аналогично проделанному выше:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x dx = \int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}\ln x dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x dx = I_1 + I_2$$

$I_1 : \int\limits_0^1 x^{a-1}e^{-x}\ln x dx$. Возьмем любой промежуток $[\alpha, A] \subset (0, +\infty)$. Интеграл I_1 сходится равномерно на $[\alpha, A]$, т.к. имеет сходящуюся мажоранту $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x$ по Вейерштрассу. Также выполняется теорема о дифференцировании НИЗОП и $I_1 = I_1(a)$ дифференцируема на $(0, +\infty)$.

$I_2 : \int\limits_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x dx$ равномерно сходится, поскольку $x^{a-1}e^{-x}\ln x \leq \frac{x^{A-1}}{e^x}\ln x < \frac{1}{x^2}$ по Вейерштрассу, $I_2 = I_2(a)$ дифференцируема на $[\alpha, A] \Rightarrow$ дифференцируема на $(0, +\infty)$.

Производную можно вычислить, дифференцируя под знаком интегралов $I_1(a), I_2(a)$. Получаем:

$$\Gamma'(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x dx$$

Аналогично $\Gamma''(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln^2 x\, dx,\ \dots,\ \Gamma^{(n)}(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln^{(n)} x\, dx, \forall n \in \mathbb{N}$.

Таким образом получаем, что $\Gamma(a)$ бесконечно дифференцируемая функция.

15.2 Формула понижения

Рассмотрим $\Gamma(a+1)$:

$$\Gamma(a+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^a, & du = ax^{a-1}dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = -e^{-x} \end{array}\right] =$$

$$= -x^a e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + a\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = a\Gamma(a)$$

Отсюда получаем, что

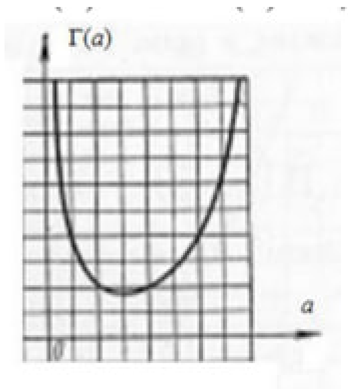
$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

Если при этом $a > 0$, то мы имеем $\Gamma(a+n) = (a+n-1)\Gamma(a+n-1) = (a+n-1)(a+n-2)\cdot\ldots\cdot a\cdot\Gamma(a)$.

Если $a = 1$, то $\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)$, где $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$. Отсюда получается, что $\Gamma(n+1) = n!$

Таким образом $\Gamma(a)$ — это производящая функция для последовательность $x_n = n!$.

15.3 График гамма-функции



По теореме Ролля на [1,2] найдется стационарная точка и значение в этой точке есть локальный экстремум.

Так как $\Gamma''(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln^2 x dx > 0$, то эта стационарная точка — точка локального минимума: $a_0 \approx 1.462, \Gamma(a_0) = 0.886$.

Поскольку $\Gamma''(a) > 0$, то функция выпукла вниз на всей области определения.

Т.к. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, то $\Gamma(a) = \frac{1}{a}\Gamma(a+1)$ и при $a \to +0$, $\lim\limits_{a\to+0}\Gamma(a) = +\infty$.

15.4 Связь между Г и В функциями

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (1)$$

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x dx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\cos^q x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x\cos^{q-1} x\cdot 2\sin x\cos x\, dx = \left[\begin{array}{l}\sin^2 x = t\\ 2\cos x\sin x\, dx = dt\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{p-1}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2}+1)}$$

Из формулы (1) имеем

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} \Leftrightarrow$$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin\pi a} - \textbf{формула дополнения для } \Gamma(a)$$

15.5 Формула Лежандра

Рассмотрим $B(a,a)$.

$$B(a,a) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx = \int\limits_0^1 (x-x^2)^{a-1}dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)^{a-1} dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)^{a-1} dx = \left[\begin{array}{c} z = \frac{1}{2} - x \\ dx = -dz \end{array}\right] = 2\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - z^2\right)^{a-1} dz =$$

$$= \left[z^2 = \frac{1}{4}u^2, z = \frac{1}{2}u, dz = \frac{1}{2}du\right] = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}u^2\right)^{a-1} du = \int\limits_0^1 \frac{1}{4^{a-1}}(1-u^2)^{a-1}du =$$

$$= \left[u^2 = v, u = v^{\frac{1}{2}}, du = \frac{1}{2\sqrt{v}}dv\right] = \frac{1}{4^{a-1}}\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-v)^{a-1}\frac{1}{\sqrt{v}}dv =$$

$$= \frac{B(\frac{1}{2}, a)}{2^{2a-1}}$$

Переходя к гамма-функции, имеем:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} \Leftrightarrow$$

$$\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2a)}{\Gamma(a)}$$

Посчитаем, чему будет равняться $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ с помощью формулы дополнения.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\pi}$$

Подставляя $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ в ранее найденное нами выражение, имеем:

$$\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2a)}{\Gamma(a)} \text{ – формула Лежандра}$$

Лекция 16

16.1 Интеграл Пуассона

Определение 33. $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ — ***интеграл Пуассона***

$$I = \left[x^2 = t,\ x = \sqrt{t},\ dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt\right] = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Данный интеграл часто используется в теории вероятностей (смотри плотность нормального распределения).

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma x^2}dx = \left[\sigma x^2 = t,\ x = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sigma}},\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{\sigma}\sqrt{t}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}$$

Пример. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx,\ a > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(\left(x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}\right)}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2}\cdot e^{-c+\frac{b^2}{a}}dx =$$

$$= e^{-c+\frac{b^2}{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2}dx = \left[x + \frac{b}{a} = t,\ dx = dt\right] = e^{-c+\frac{b^2}{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt =$$

$$= e^{-c+\frac{b^2}{a}}\cdot 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-at^2}dt = e^{-c+\frac{b^2}{a}}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = e^{-c+\frac{b^2}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

16.2 Интеграл Дирихле

Определение 34. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ — ***интеграл Дирихле***

16.2.1 Сходимость интеграла Дирихле

$x = +\infty$ — особая точка, интеграл сходится по признаку Дирихле.

$x = 0$ — не особая точка, т.к. подынтегральная функция стремится к 1.

Будем рассматривать $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$. Нетрудно видеть, что $I = F(0)$.
Изучим $F(a)$.

- Интеграл сходится при $a \geq 0$ по признаку Абеля, ибо $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится равномерно, а e^{-ax} монотонна и ограничена для $\forall a \geq 0$.
- $F(a) \overset{[0,+\infty)}{\rightrightarrows}$ по признаку Дирихле.
- $F(a)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, т.к. она непрерывна как Ф2П на $[0, +\infty) \times [0, A], \forall A \geq 0$.
- Если формально продифференцировать по a функцию под интегралом получим:

$$-\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\, dx = -\frac{-a\sin x - \cos x}{1+a^2} \cdot e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{1+a^2}$$

  Т.е. интеграл от производной сходится равномерно, значит дифференцирование под знаком интеграла возможно.

$$F'(a) = -\frac{1}{1+a^2} \Rightarrow F(a) = -\arctan a + c$$

- Заметим, что $F(a) \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \frac{-e^{-ax}}{a}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$ и поэтому $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = 0 = \lim\limits_{a\to+\infty}(-\arctan a + c) = -\frac{\pi}{2} + c \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$F(a) = -\arctan a + \frac{\pi}{2}$$

  При $a \to 0$ получаем $F(0) = \frac{\pi}{2}$, но $F(0) = I$, т.е.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Рассмотрим обобщение.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{kx}d(kx) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}, \quad k > 0$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(-kx)}{x}dx = -\frac{\pi}{2}, \quad k < 0$$

При $k = 0$ интеграл очевидно равен 0.
Таким образом получаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x}dx = \frac{\pi}{2}sgn(k),\ \forall k \in \mathbb{R}$$

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}dx$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x^2}-\cos x, & du = (-2xe^{-x^2}+\sin x)dx \\ dv = \frac{1}{x^2}dx, & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-x^2}-\cos x}{x}\Bigg|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{-2xe^{-x^2}+\sin x}{x}dx = 0 - \sqrt{\pi} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\pi}$$

16.3 Интеграл Лапласа

Будем рассматривать два интеграла, которые называются **интегралами Лапласа**.

$A = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx, \quad a \geq 0, k > 0$

При $k = 0$ интеграл расходится в точке $x = 0$. При остальных k сходится.

$A(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx$ сходится для $\forall a \geq 0$, причем сходится равномерно $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx \overset{[a,+\infty)}{\rightrightarrows}$

$B = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx, \quad a \geq 0, k > 0$

$B(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx \overset{[\epsilon,+\infty)}{\rightrightarrows}, \forall \epsilon > 0$, так как $\int\limits_0^{A} \sin ax\, dx = \frac{\cos ax}{a}\Big|_0^A \leq \frac{2}{a}$ и $\frac{x}{k^2+x^2}$ стремится равномерно, т.к. не зависит от a и монотонно стремится к 0.

По признаку Дирихле интеграл сходится равномерно на $[\epsilon, +\infty)$, а значит он сходится локально равномерно на $(0, +\infty)$.

Формально продифференцируем $A(a)$ под знаком интеграла:

$$-\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx = -B(a)$$

Отсюда получаем, что дифференцирование законно, так как мы получили локально равномерно сходящийся интеграл на $(0, +\infty)$.

Таким образом $A'(a) = -B(a) \Leftrightarrow$

$$A'(a) + \frac{\pi}{2} = -B(a) + \frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{-x\sin ax}{k^2+x^2}dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{k^2\sin ax}{x(k^2+x^2)}dx \Rightarrow$$

$$A''(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{k^2\cos ax}{k^2+x^2}dx = k^2A(a)$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, так как A сходится равномерно.

Решим дифференциальное уравнение $A''(a) - k^2A = 0$.

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm k \Rightarrow A(a) = c_1e^{ka} + c_2e^{-ka}$$

Заметим, что $|A(a)| \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2} dx = \frac{1}{k} \arctan \frac{x}{k}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2k}$ — ограниченная функция. Значит $c_1 = 0$, т.е. $A(a) = c_2 e^{-ka}$.

$A(a)$ сходится равномерно на промежутке $[0, +\infty)$, а следовательно она непрерывна на нем. Тогда

$$A(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{k^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2k}$$

С другой стороны $A(0) = c_2 e^{-k\cdot 0} = c_2$, т.е. $c_2 = \frac{\pi}{2k}$. Таким образом получаем, что

$$A(a) = \frac{\pi}{2k} e^{-ak}, \quad a \ge 0$$

$$B(a) = -A'(a) = \frac{\pi}{2} e^{-ak}, \quad a > 0$$

Если $a < 0$, то $A(a) = A(-a) = \frac{\pi}{2k} e^{-k|a|}$, а $B(a) = -B(-a) = \frac{\pi}{2} e^{-k|a|}$.

Если $a = 0$, то $A(a) = \frac{\pi}{2k} e^{-k|a|}$, а $B(a) = 0$.

Причем, оба интеграла не зависят от знака k. Тогда

$$A(a) = \frac{\pi}{2|k|} e^{-|k||a|}, \quad a \in \mathbb{R}, k \ne 0$$

$$B(a) = \frac{\pi}{2} e^{-|k||a|} \cdot sign(a), \quad a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$$

Пример.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-2} = \frac{\pi}{4}(1 - \frac{1}{e^2}) = \frac{1}{2} A(1,2)$$

Пример. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx, \; a > 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos ax}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos ax}{(1+x^2)^2} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x \cos ax & du = \cos ax - ax \sin ax \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^2} dx & v = \frac{-1}{2(1+x^2)} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cos ax}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx + \frac{a}{2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-a} + \frac{a}{2} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-a} = (1+a) \frac{\pi}{4} e^{-a}$$

Лекция 17

17.1 Интегралы Фруллани

Будем рассматривать интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$.

17.1.1 Обобщенная теорема о среднем

Теорема 55. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а $g(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и сохраняет знак. Тогда*

$$\exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx \quad (1)$$

$\diamondsuit$ Поскольку $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она ограничена на $[a,b]$ и $\exists m = \min\limits_{[a,b]} f(x), M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$.

Будем считать, что $g(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$. Тогда умножим неравенство на $g(x)$.

$$mg(x) \le f(x)\cdot g(x) \le Mg(x)$$

Интегрируя полученное неравенство по отрезку $[a,b]$ будем иметь:

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le M\int\limits_a^b g(x)dx \quad (2)$$

Т.к. $g(x) \ge 0$, то $\int\limits_a^b g(x)dx \ge 0$. Если же $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, тогда из неравенства (2) следует, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Значит соотношение (1) выполняется $\forall \xi \in [a,b]$.

Теперь пусть $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$. Тогда из (2) получаем

$$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \le M$$

Обозначим $\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} = \mu$.

Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и достигает своих экстренных значений m и M(теорема Вейерштрасса), но тогда по теореме о промежуточном значении она принимает и значение μ, т.е. $\exists \xi \in [a.b] : f(\xi) = \mu \Rightarrow \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} = f(\xi) \Rightarrow$ выполняется (1).

Если $g(x) \le 0$, доказательство проводится аналогично. ■

17.1.2 Первая теорема Фруллани

Теорема 56. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0,+\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$.*

Тогда $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a} \quad (3).$

◊

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} \left(\int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}dx - \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}dx \right) = \begin{bmatrix} ax = t \\ bx = t \end{bmatrix} =$$

$$\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} \left(\int\limits_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(t)}{t}dt - \int\limits_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t}dt \right) = *$$

Функция $\frac{f(t)}{t}$ непрерывна на промежутках интегрирования, а значит она интегрируема $\Rightarrow$ существует первообразная. Пусть $F(t)$ — это первообразная.

$$* = \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} \left(F(t)|_{a\delta}^{a\Delta} - F(t)|_{b\delta}^{b\Delta} \right) = \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} (F(a\Delta) - F(a\delta) - F(b\Delta) + F(b\delta)) =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} ((F(b\delta) - F(a\delta)) - (F(b\Delta) - F(a\Delta))) = \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} \left(\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}dt - \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t}dt \right) =$$

$$= [\text{Применим формулу (1)}] = \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} \left(f(\xi) \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{dt}{t} - f(\tau) \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{dt}{t} \right) =$$

$$= [\xi \in [a\delta, b\delta], a\ \tau \in [a\Delta, b\Delta]] = \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \Delta\to+\infty}} \left(f(\xi) \ln \frac{b}{a} - f(\tau) \ln \frac{b}{a} \right) =$$

$$= [\text{Так как } f(x) \text{ непрерывна и } \delta \to +0, \Delta \to +\infty, \text{ то будем иметь}] =$$

$$= f(0) \ln \frac{b}{a} - f(+\infty) \ln \frac{b}{a} = (1)$$

■

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx$.

Функция $\arctan x$ непрерывная и имеет конечный предел $\frac{\pi}{2}$. Использовав теорему Фруллани имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx = \left(\arctan 0 - \frac{\pi}{2}\right) \ln \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$$

Пример. Теперь рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(5\ln(1+3x) - 3\ln(1+5x))dx}{x^2}$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(5\ln(1+3x) - 3\ln(1+5x))dx}{x^2} = \left[\begin{array}{l} u = 5\ln(1+3x) - 3\ln(1+5x) \\ dv = \frac{1}{x^2}dx, \ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right] =$$

$$- \left. \frac{5\ln(1+3x) - 3\ln(1+5x)}{x} \right|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{15}{1+3x} - \frac{15}{1+5x} \right) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(t) = \frac{1}{1+t} \\ f(+\infty) = 0 \end{array} \right] = 15(1-0) \ln \frac{5}{3} = 15 \cdot \ln \frac{5}{3}$$

17.1.3 Вторая теорема Фруллани

Теорема 57. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и $\int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится при $\delta > 0$.*

Тогда $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$.

$\diamondsuit$ Рассмотрим $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = \lim\limits_{\delta \to +0} \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$.

$$\lim_{\delta \to +0} \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\delta \to +0} \left(\int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx \right) = \left[\begin{array}{l} ax = t \\ bx = t \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\delta \to +0} \left(\int\limits_{a\delta}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{b\delta}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \right) = [\text{Свойство аддитивность интегралов}] =$$

$$= \lim_{\delta \to +0} \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt = \lim_{\delta \to +0} f(\xi) \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{dt}{t} = \lim_{\delta \to +0} f(\xi) \ln \frac{b}{a} = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

$\blacksquare$

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{a\sin x - \sin(ax)}{x^2} dx$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{a\sin x - \sin(ax)}{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = a\sin x - \sin(ax) \\ dv = \frac{1}{x^2}dx, \ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right] =$$

$$= - \left. \frac{a\sin x - \sin(ax)}{x} \right|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{a\cos x - a\cos(ax)}{x} dx =$$

$$= [\text{к интегралу применим 2-ую теорему Фруллани}] =$$

$$= \left[f(t) = \cos t,\ \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \text{ сходится для } \forall \delta \geq 0\right] = a \cdot \cos 0 \cdot \ln \frac{a}{1} = a \ln a$$

Пример. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \cos 0 \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a}$.