БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Лекции по курсу "Математический анализ – 2"

для студентов специальностей

"Компьютерная безопасность"

"Информатика"

"Прикладная информатика"

"Прикладная математика"

Лектор
доктор физико-математических наук,
профессор
Васьковский М.М.

Минск, 2024

Содержание

1 Топология евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$

Обозначим через $\mathbb{R}^2$ множество точек $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ евклидовой плоскости Oxy. Далее под точками понимаем точки плоскости $\mathbb{R}^2$, а под множествами – некоторые подмножества $\mathbb{R}^2$.

Расстояние между точками $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ определяется по формуле

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Определение 1.1. *Замкнутой δ-окрестностью точки $A_0 \in \mathbb{R}^2$ называется круг с границей с центром в точке A_0 радиуса δ, т.е.*

$$B[A_0, \delta] = \{A \in \mathbb{R}^2 : \rho(A, A_0) \leqslant \delta\}.$$

Открытой δ-окрестностью точки $A_0 \in \mathbb{R}^2$ называется круг без границы с центром в точке A_0 радиуса δ, т.е.

$$B(A_0, \delta) = \{A \in \mathbb{R}^2 : \rho(A, A_0) < \delta\}.$$

Под *окрестностью* точки обычно понимают открытую окрестность (если не оговорено иное). Удаляя центр A_0 окрестности, получаем *проколотую окрестность*.

Определение 1.2. *Пусть D – непустое множество в $\mathbb{R}^2$. Точка $A \in D$ называется внутренней для множества D, если существует δ-окрестность точки A, содержащаяся в D.*

Определение 1.3. *Множество D называется открытым, если любая точка множества D является внутренней.*

Определение 1.4. *Дополнением множества $D \subset \mathbb{R}^2$ называется множество $D^C = \mathbb{R}^2 \setminus D$.*

Определение 1.5. *Множество $D \subset \mathbb{R}^2$ называется замкнутым, если его дополнение D^C открыто.*

Пример 1.1. *Замкнутая окрестность $B[A_0, \delta]$ является примером замкнутого множества, а открытая окрестность $B(A_0, \delta)$ – примером открытого множества.*

Замечание 1.1. *Пустое множество $\varnothing$ по определению считают открытым. Отсюда следует, что вся плоскость $\mathbb{R}^2$ является замкнутым множеством. С другой стороны, плоскость $\mathbb{R}^2$ по определению является открытым множеством. Следовательно, ее дополнение – пустое множество – является замкнутым. Таким образом, существуют множества, которые одновременно являются открытыми и замкнутыми: таким свойством обладают лишь пустое множество и вся плоскость.*

Определение 1.6. *Точка A называется граничной для множества D, если любая окрестность точки A содержит как точки из D, так и точки из дополнения D^c. Совокупность всех граничных точек множества D называют границей множества D и обозначают ∂D.*

Определение 1.7. *Замыканием множества D называется множество $D \cup \partial D$. Замыкание множества D обозначают через $\overline{D}$.*

Пример 1.2. *Границей круга $B(A_0, \delta)$ является окружность $C(A_0, \delta) = \{A \in \mathbb{R}^2 : \rho(A, A_0) = \delta\}$. Замыканием открытого круга $B(A_0, \delta)$ является замкнутый круг $B[A_0, \delta]$.*

Пример 1.3. *Множества граничных точек плоскости $\mathbb{R}^2$ и пустого множества являются пустыми.*

Предложение 1.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$, тогда замыкание $\overline{D}$ является замкнутым множеством.*

$\diamondsuit$

Рассмотрим произвольную точку A из дополнения $\overline{D}^c$ множества $\overline{D}$, т.е. $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, и докажем, что точка A является внутренней для $\overline{D}^c$. Предположим, что это не так. Т.е. для любого $\delta > 0$ окрестность $B(A, \delta)$ не содержится в $\overline{D}^c$. Тогда окрестность $B(A, \delta)$ имеет непустое пересечение с $\overline{D}$. Докажем, что окрестность $B(A, \delta)$ также имеет непустое пересечение и с множеством D. Рассмотрим некоторую точку $A_1 \in B(A, \delta) \cap \overline{D}$. Предположим, что $A_1 \notin D$, тогда $A_1 \in \partial D$. Поэтому для любого $\delta_1 > 0$ окрестность $B(A_1, \delta_1)$ имеет непустое пересечение с множеством D. Т.к. A_1 – внутренняя точка множества $B(A, \delta)$, то найдется такое $\delta_0 > 0$, что $B(A_1, \delta_0) \subset B(A, \delta)$. Таким образом, $B(A, \delta)$ имеет непустое пересечение с множеством D. Мы получили, что любая окрестность $B(A, \delta)$ точки A содержит как точки из множества D, так и точки из D^c (например, $A \in \overline{D}^c \subset D^c$). Следовательно, $A \in \partial D$, что невозможно, т.к. $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$. Полученное противоречие доказывает тот факт, что точка A внутренняя для $\overline{D}^c$. Т.к. точка A выбрана произвольно, то множество $\overline{D}^c$ открытое и, следовательно, множество $\overline{D}$ замкнутое.

$\blacksquare$

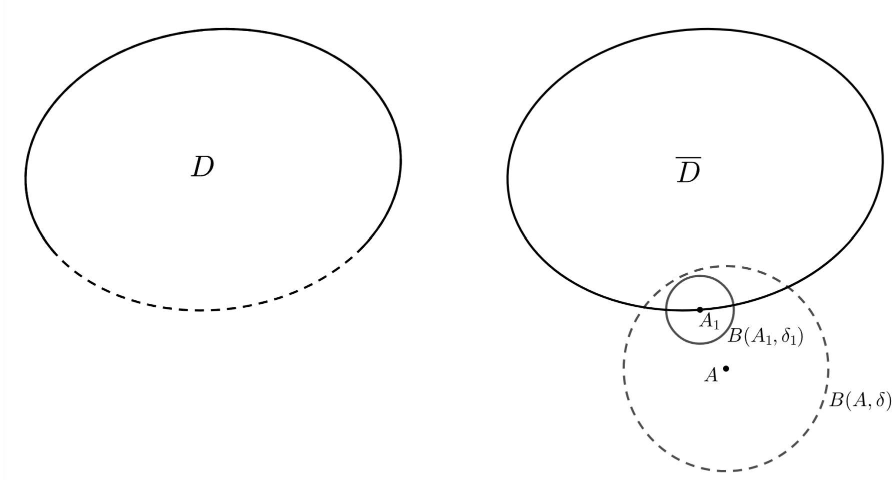


Рис. 1: К доказательству предложения 1.1

Определение 1.8. *Точка A называется предельной для множества $D \subset \mathbb{R}^2$, если в любой окрестности точки A имеются точки множества D, отличные от A.*

Замечание 1.2. *Предельная точка множества не обязана принадлежать самому множеству. Например, центр проколотой окрестности является предельной точкой этой проколотой окрестности.*

Определение 1.9. *Точка A множества D называется изолированной точкой для множества D, если существует δ-окрестность точки A, которая не содержит точек множества D, отличных от A.*

Определение 1.10. *Множество D называется связным, если любые две точки A_1, $A_2 \in D$ можно соединить непрерывной кривой, лежащей в D, т.е. существуют непрерывные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, такие, что $A_1 = (x(a), y(a))$, $A_2 = (x(b), y(b))$ и $(x(t), y(t)) \in D$ для любых $t \in [a, b]$.*

Определение 1.11. *Множество D называется областью, если оно открыто и связно.*

Множество D называется ограниченным, если оно содержится в некотором круге конечного радиуса, т.е. $\exists\ r > 0$, $\forall\ A \in D \Rightarrow \rho(A, O) \leqslant r$, где $O = (0, 0)$.

Предложение 1.2. *Пусть D – ограниченное множество. Тогда его замыкание $\overline{D}$ также ограничено.*

$\diamondsuit$

Предположим противное: т.е. замыкание $\overline{D}$ не ограничено. Пусть множество D содержится к круге радиуса r с центром в начале координат. Тогда существует $A \in \partial D$, такое что $\rho(A, O) > r+1$. Но в таком случае окрестность $B(A, \dfrac{1}{2})$ не содержит точек множества D, что противоречит определению граничной точки. Следовательно, множество $\overline{D}$ ограничено.

$\blacksquare$

Пусть D – ограниченная область. Замыкание $\overline{D}$ области D часто называют *ограниченной замкнутой областью*, несмотря на то, что определение области предполагает открытость.

Определение 1.12. *Множество D называется компактом, если оно является ограниченным и замкнутым. В частности, в силу предложений* 1.1 *и* 1.2 *ограниченные замкнутые области являются компактами.*

Пример 1.4. *Открытая окрестность является областью, но не компактом. Замкнутая окрестность является ограниченной замкнутой областью и, как следствие, компактом. Плоскость $\mathbb{R}^2$ замкнута, но неограничена, следовательно, она не является компактом. Однако, $\mathbb{R}^2$ является областью. Пустое множество является и компактом, и областью.*

Рассмотрим последовательность точек в $\mathbb{R}^2$:

$$A_n = (x_n, y_n), n \geqslant 1.$$

Определение 1.13. *Последовательность (A_n) называется сходящейся, если существует точка $A_0 = (x_0, y_0)$ такая, что*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow \rho(A_n, A_0) \leqslant \varepsilon.$$

В таком случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0$ или $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A_0$.

Предложение 1.3. *Множество D является замкнутым тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности $(A_n) \subset D$ ее предел A_0 принадлежит D.*

$\diamondsuit$

Необходимость. Пусть множество D замкнуто. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $(A_n) \subset D$, $A_0 = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Предположим, что $A_0 \notin D$. Тогда $A_0 \in D^c$. Так как множество D^c открытое, то существует окрестность $B(A_0, \delta)$, принадлежащая D^c. Но тогда в окрестности $B(A_0, \delta)$ не содержится ни одного члена последовательности (A_n), что противоречит определению предела. Следовательно, $A_0 \in D$.

Достаточность. Пусть для любой сходящейся последовательности $(A_n) \subset D$ ее предел A_0 принадлежит D. Предположим, что множество D не является замкнутым, тогда D^c не является открытым, т.е. существует точка $L \in D^c$ такая, что в любой окрестности $B(L, \delta)$ содержатся точки из D. Для каждого $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ выберем точку $A_n \in D \cap B(L, \delta_n)$. Очевидно, что $A_n \underset{n\to\infty}{\to} L \notin D$. Противоречие. Следовательно, множество D замкнуто.

$\blacksquare$

Теорема 1.1 (теорема о компакте)**.** *Множество D является компактом тогда и только тогда, когда из любой последовательности $(A_n) \subset D$ можно выбрать подпоследовательность (A_{n_k}), сходящуюся к точке множества D.*

$\diamondsuit$

Необходимость. Пусть D – компакт, и $(A_n) \subset D$, $A_n = (x_n, y_n)$. Т.к. D ограничено, то последовательности (x_n), (y_n) ограничены. На основании принципа выбора существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$. Аналогично из последовательности (y_{n_k}) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $y_{n_{k_m}} \underset{m\to\infty}{\to} y_0$. Таким образом, $A_{n_{k_m}} \underset{m\to\infty}{\to} A_0 = (x_0, y_0)$. Т.к. D замкнуто, то согласно предложению 1.3 $A_0 \in D$.

Достаточность. Предположим, что из любой последовательности $(A_n) \subset D$ можно выбрать подпоследовательность (A_{n_k}), сходящуюся к точке множества D. Предположим, что множество D не является ограниченным. Можно построить последовательность точек $A_n \in D$ такую, что $A_n \in B(O, \delta_n)$, $A_n \notin B(O, \delta_{n-1})$, где δ_n – некоторая возрастающая последовательность положительных чисел, $\delta_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Никакая подпоследовательность последовательности (A_n) не может лежать в круге конечного радиуса. Следовательно, не существует сходящихся подпоследовательностей последовательности (A_n). Противоречие. Следовательно, D ограничено. Если предположить, что D не является замкнутым, то из доказательства достаточности предложения (1.3) вытекает существование последовательности $(A_n) \subset D$ такой, что ее предел L не принадлежит D. Но тогда все подпоследовательности последовательности (A_n) также будут сходиться к $L \notin D$. Противоречие. Следовательно, D замкнуто.

$\blacksquare$

2 Предел и непрерывность функции от двух переменных

Определение 2.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}$ называется функцией двух переменных. Пишут $z = f(x, y)$ или $z = f(X)$, где $X = (x, y) \in D$.*

Определение 2.2. *Пусть функция $z = f(X)$ определена в некоторой проколотой окрестности E точки X_0. Число $A \in \mathbb{R}$ называется двойным пределом f при $X \to X_0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in E : 0 < \rho(X, X_0) \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X) - A| \leqslant \varepsilon.$$

В случае существования такого A пишут $A = \lim\limits_{X \to X_0} f(X)$.

Теорема 2.1 (критерий Гейне)**.** *Предел $A = \lim\limits_{X \to X_0} f(X)$ существует тогда и только тогда, когда $\forall (X_n) \subset E$, $X_n \neq X_0$, $X_n \underset{n\to\infty}{\to} X_0 \Rightarrow f(X_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$.*

Доказательство аналогично доказательству критерия Гейне для функции одной переменной.

Замечание 2.1. *Критерий Гейне позволяет перенести все основные свойства пределов скалярных функций на пределы функций двух переменных.*

Определение 2.3. *Пусть X_0 – предельная, но не внутренняя точка множества D. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом f при $X \to X_0$ вдоль множества D, если*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in D : 0 < \rho(X, X_0) \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X) - A| \leqslant \varepsilon$$

Записывают $A = \lim\limits_{X \to X_0, X \in D} f(X)$.

В частности, пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0), \ \lim_{y \to y_0} f(x_0, y)$$

называются пределами вдоль прямых $y = y_0$, $x = x_0$ соответственно.

Определение 2.4 (Двойной предел в терминах окрестностей)**.** *Пусть X_0 – точка из $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, Говорят, что $A = \lim\limits_{X \to X_0} f(X)$, если*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall X \in B_2(X_0, \delta(\varepsilon)) \Rightarrow f(X) \in B_1(A, \varepsilon),$$

где $B_2(X_0, \delta(\varepsilon))$ – проколотая $\delta(\varepsilon)$-окрестность точки X_0, $B_1(A, \varepsilon)$ – ε-окрестность точки A.

Замечание 2.2. *Под δ-окрестностью бесконечности в $\mathbb{R}^2$ понимаем множество*

$$\{X \in \mathbb{R}^2 : \rho(X, O) \geqslant \delta\}.$$

Пример 2.1. *Доказать, что*

$$\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{x + y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда

$$\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|\cos\varphi+\sin\varphi|}{r} \leqslant \frac{2}{r} \underset{r\to\infty}{\to} 0.$$

Здесь мы использовали тот факт, что условие $(x,y)\to\infty$ эквивалентно условию $r\to\infty$.

Определение 2.5. *Говорят, что* $A = \lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} f(x,y)$, *если*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0, \forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\geqslant\delta(\varepsilon), |y|\geqslant\delta(\varepsilon) \Rightarrow f(X)\in B_1(A,\varepsilon).$$

Отметим, что из существования предела $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} f(x,y)$ не вытекает существование двойного предела $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$. Например, для функции

$$f(x,y) = \sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{y}$$

существует $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} f(x,y) = 0$, однако из критерия Гейне вытекает, что двойной предел $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$ не существует.

Рассмотрим функцию $z = f(X)$, определенную в некоторой δ-окрестности E точки $X_0 = (x_0, y_0)$. Говорят, что функция f непрерывна в точке X_0 (по совокупности переменных), если $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0, \forall X\in E, \rho(X,X_0)\leqslant\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X)-f(X_0)|\leqslant\varepsilon.$$

Функция f непрерывна в точке X_0 тогда и только тогда, когда приращение $\Delta z = f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)$ стремится к нулю при ΔX, стремящемся к нулю.

Определение 2.6. *Пусть X_0 – предельная, но не обязательно внутренняя точка множества D. Говорят, что функция f непрерывна в точке X_0 вдоль множества D, если*

$$\lim_{X\to X_0, X\in D} f(X) = f(X_0).$$

Определение 2.7. *Функция f называется равномерно непрерывной на множестве D, если*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0, \forall X_1, X_2\in D, \rho(X_1,X_2)\leqslant\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(X_1)-f(X_2)|\leqslant\varepsilon.$$

Говорят, что функция $z = f(x,y)$ непрерывна по x, если при каждом фиксированном y_0 функция одной переменной $f(x,y_0)$ непрерывна. Аналогично вводится понятие непрерывности функции f по y.

Очевидно, что из непрерывности по совокупности переменных (x,y) вытекает непрерывность по x и по y. Следующий пример показывает, что обратное неверно.

Пример 2.2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$$

В каждой точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus O$ функция f непрерывна по совокупности переменных как элементарная функция. Из критерия Гейне следует, что f не является непрерывной в точке $O = (0,0)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть две последовательности $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$. Тем не менее, функция f непрерывна по x и по y, т.к. $f(x,0) = f(0,y) \equiv 0$.

Наряду с функцией $z = f(x,y)$, определенной на множестве D, рассмотрим функции $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, определенные на множестве E. Определим сложную функцию

$$g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v)),\ (u,v) \in E.$$

Теорема 2.2 (теорема о непрерывности сложной функции)**.** *Пусть функции φ, ψ непрерывны в точке (u_0, v_0) вдоль множества E, функция f непрерывна в точке $(x_0, y_0) = (\varphi(u_0,v_0), \psi(u_0,v_0))$ вдоль множества D. Тогда сложная функция $g(u,v)$, определенная выше, непрерывна в точке (u_0, v_0) вдоль множества E.*

$\diamondsuit$ Имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall (x,y) \in D, \rho((x,y),(x_0,y_0)) \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant \varepsilon;$$

$$\exists \nu(\delta(\varepsilon)) > 0, \forall (u,v) \in E, \rho((u,v),(u_0,v_0)) \leqslant \nu(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow$$
$$|x(u,v) - x(u_0,v_0)| \leqslant \frac{\delta(\varepsilon)}{2}, |y(u,v) - y(u_0,v_0)| \leqslant \frac{\delta(\varepsilon)}{2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\delta(\varepsilon)) > 0, \forall (u,v) \in E, \rho((u,v),(u_0,v_0)) \leqslant \nu(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x(u,v),y(u,v)) - f(x_0,y_0)| \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

$\blacksquare$

Свойства непрерывных функций

Следующие свойства непрерывной функций доказываются по той же схеме, что и аналогичные утверждения для непрерывных функций одной переменной.

Свойство 2.1 (о стаблизации знака)**.**

Если функция f непрерывна в точке X_0 и $f(X_0) \neq 0$, то существует окрестность точки X_0, в которой $f(X)$ сохраняет тот же знак, что и $f(X_0)$.

Свойство 2.2 (о локальной ограниченности)**.**

Если функция f непрерывна в точке X_0, то существует окрестность точки X_0, в которой функция f ограничена.

Свойство 2.3 (теорема Вейерштрасса)**.**

Если функция f непрерывна на компакте D, то f достигает минимальное и максимальное значения на D. В частности, функция, непрерывная на компакте, ограничена на этом компакте.

Свойство 2.4 (теорема Кантора)**.**

Если функция f непрерывна на компакте D, то f равномерно непрерывна на этом компакте.

Свойство 2.5.

Если функции f, g непрерывны в точке X_0, то линейная комбинация $\alpha f + \beta g$, произведение $f \cdot g$ и частное $\dfrac{f}{g}$ (при условии $g(X_0) \neq 0$) непрерывны в точке X_0.

Теорема 2.3 (теорема о промежуточных значениях)**.** *Если непрерывная на связном множестве D функция $f(X)$ принимает значения A и B, то она принимает любое промежуточное значение C.*

$\diamondsuit$ Пусть $A < B$, $f(X_1) = A$, $f(X_2) = B$. Возьмем непрерывную кривую $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, с концами в точках X_1, X_2 и целиком лежащую в D. Рассмотрим сложную функцию $g(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Функция $g(t)$ непрерывна, $g(a) = A$, $g(b) = B$. По теореме о промежуточных значениях функции одной переменной существует $t_0 \in [a, b]$ такое, что $g(t_0) = C$. Таким образом, $f(X_0) = C$, где $X_0 = (x(t_0), y(t_0))$.

$\blacksquare$

3 Дифференцируемость функции от двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную в некоторой окрестности точки $X_0 = (x_0, y_0)$.

Определение 3.1. *Функцию f называют дифференцируемой в точке X_0, если ее приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ можно представить в виде*

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),\ (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0),$$

где A, B – некоторые числа. При этом выражение $df = Adx + Bdy$ называют дифференциалом f в точке X_0, где $dx = \Delta x$, а $dy = \Delta y$.

Если функция f дифференцируема в точке X_0, то $\Delta f \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, т.е. f непрерывна в точке X_0.

Определим частные приращения

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),\ \Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение 3.2. *Пределы (если они существуют)*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x},\ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

называются частными производными от функции f в точке X_0 и обозначаются f'_x, f'_y или $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Если функция f дифференцируема в точке X_0, то $df = f'_x dx + f'_y dy$.

В отличие от функций одной переменной существование конечных частных производных от функции $f(X)$ в точке X_0 не обеспечивает дифференцируемости и даже непрерывности в этой точке. Действительно, рассмотрим функцию из примера 2.2. Имеем

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично $f'_y(0, 0) = 0$. Как показано в примере 2.2, функция f не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то касательная плоскость к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) задается уравнением

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Теорема 3.1 (теорема о частных производных сложной функции)**.** *Пусть функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0), функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$, тогда сложная функция $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ имеет конечные частные производные в точке (u_0, v_0), которые вычисляются по формулам*

$$g'_u(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0)x'_u(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_u(u_0, v_0),$$

$$g'_v(u_0, v_0) = f'_x(x_0, y_0)x'_v(u_0, v_0) + f'_y(x_0, y_0)y'_v(u_0, v_0).$$

$\diamondsuit$

Имеем

$$\Delta_u g = f(x(u_0+\Delta u, v_0), y(u_0+\Delta u, v_0)) - f(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0)) =$$

$$= f'_x(x_0,y_0)\Delta_u x + f'_y(x_0,y_0)\Delta_u y + o(\sqrt{(\Delta_u x)^2 + (\Delta_u y)^2}) =$$

$$= f'_x(x'_u\Delta u + o(\Delta u)) + f'_y(y'_u\Delta u + o(\Delta u)) + o(\sqrt{(\Delta_u x)^2 + (\Delta_u y)^2}) =$$

$$= (f'_x x'_u + f'_y y'_u)\Delta u + o(\Delta u) + o(\Delta u\sqrt{(x'_u + o(1))^2 + (y'_u + o(1))^2}) =$$

$$= (f'_x x'_u + f'_y y'_u)\Delta u + o(\Delta u).$$

Отсюда получаем, что $g'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u$. Аналогично доказывается, что $g'_v = f'_x x'_v + f'_y y'_v$.

$\blacksquare$

Теорема 3.2 (формула конечных приращений)**.** *Пусть функция $f(x,y)$ имеет конечные частные производные f'_x, f'_y в каждой точке прямоугольника $\Pi = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [c,d]\}$. Пусть точки (x_0,y_0), $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ принадлежат прямоугольнику Π. Тогда справедлива формула конечных приращений*

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x + f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

где θ_1, $\theta_2 \in (0,1)$.

$\diamondsuit$

Имеем

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) =$$

$$= [\text{из аналогичной теоремы для Ф1П}] = f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y + f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x.$$

$\blacksquare$

Теорема 3.3 (достаточное условие дифференцируемости)**.** *Если частные производные f'_x, f'_y непрерывны на открытом множестве D, то функция f дифференцируема в каждой точке множества D.*

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную точку $X_0 = (x_0,y_0) \in D$. Т.к. множество D открытое, то точка X_0 содержится в D вместе с некоторой окрестностью. Впишем в эту окрестность прямоугольник Π и применим для него формулу конечных приращений 3.2:

$$\Delta f = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x + f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y =$$

$$= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(1)\Delta x + o(1)\Delta y =$$

$$= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}), (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

$\blacksquare$

Инвариантность формы первого дифференциала

Определение 3.3. *Функция f называется непрерывно дифференцируемой на множестве D, если существует открытое множество D_1, содержащее D, такое, что частные производные f'_x, f'_y непрерывны на D_1.*

Из достаточного условия дифференцируемости 3.3 вытекает, что непрерывно дифференцируемая на множестве D функция f является дифференцируемой на этом множестве.

Пусть $z = f(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Если x, y – независимые переменные, то

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

Если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = f(x(u, v), y(u, v))$, то

$$dz = (f'_x x'_u + f'_y y'_u)du + (f'_x x'_v + f'_y y'_v)dv = f'_x(x'_u du + x'_v dv) + f'_y(y'_u du + y'_v dv) =$$

$$= f'_x dx + f'_y dy,$$

таким образом, имеет место инвариантность формы первого дифференциала.

Если функции f, g – непрерывно дифференцируемы на множестве D, то функции $f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ также непрерывно дифференцируемы на D и

$$d(f+g) = df + dg,\ d(fg) = gdf + fdg,\ d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Справедливость этих соотношений вытекает из теоремы о частных производных сложной функции 3.1.

Производная по направлению и градиент

Рассмотрим функцию f, определенную в некоторой окрестности точки $X_0 = (x_0, y_0)$, а также рассмотрим луч $l : x = t\cos\alpha,\ y = t\sin\alpha,\ t \in [0, +\infty)$.

Производной по направлению l от функции f называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta t\cos\alpha, y_0 + \Delta t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{\Delta t}.$$

Пишут $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{X_0}$. Очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{X_0} = (f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha))'_t\Big|_{t=0} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha.$$

Вектор $f'_x\vec{i} + f'_y\vec{j}$ называется градиентом функции f и обозначается $\mathrm{grad} f$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные орты.

Т.к. $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{X_0}$ есть скалярное произведение градиента и единичного вектора луча l, то $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{X_0}$ принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда луч l сонаправлен с градиентом $\mathrm{grad} f$ в точке X_0. Аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{X_0}$ принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда луч l противоположно направлен с градиентом $\mathrm{grad} f$ в точке X_0.

4 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на открытом множестве D и имеет на этом множестве частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$. Эти частные производные являются функциями двух переменных.

Определение 4.1. *Если они в свою очередь имеют частные производные, то их называют частными производными второго порядка функции* f :

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x,\ f''_{xy} = (f'_x)'_y,\ f''_{yx} = (f'_y)'_x,\ f''_{y^2} = (f'_y)'_y.$$

При этом частные производные f''_{xy}, f''_{yx}, *называются смешанными. Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков.*

Теорема 4.1 (теорема о смешанных производных)**.** *Если смешанные производные* f''_{xy}, f''_{yx} *непрерывны в точке* (x_0, y_0), *то они совпадают в этой точке.*

$\diamondsuit$

Т.к. определены f''_{xy}, f''_{yx} в точке (x_0, y_0), то частные производные определены в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Определим функции

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0), \Delta y \neq 0,$$

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y), \Delta x \neq 0.$$

Обозначим

$$\omega = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

Очевидно, что

$$\omega = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0).$$

Применим формулу конечных приращений 3.2:

$$\omega = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x = (f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0))\Delta x,$$

$$\omega = \psi'(y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y = (f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y))\Delta y.$$

Применим еще раз формулу конечных приращений 3.2:

$$\omega = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

$$\omega = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y \Delta x.$$

Отсюда получаем $f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, используя при этом непрерывность частных производных f''_{xy}, f''_{yx} в точке (x_0, y_0), получаем требуемое $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

$\blacksquare$

Функция $z = f(x, y)$ называется m раз непрерывно дифференцируемой на открытом множестве D, если все частные производные порядка m непрерывны на D.

Из теоремы о смешанных производных вытекает, что для m раз непрерывно дифференцируемой функции все смешанные производные одного порядка $k \leqslant m$ совпадают. Частные производные порядка k от m раз непрерывно дифференцируемой функции, содеражащие l дифференцирований по x и $k-l$ дифференцирований по y обозначают $\frac{\partial^k f}{\partial x^l \partial y^{k-l}}$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ является m раз непрерывно дифференцируемой на открытом множестве D. Дифференциал порядка $k \leqslant m$ от функции f определяется рекуррентно:

$$d^k f := d(d^{k-1} f).$$

Аналогично доказательству правила Лейбница доказывается следующая формула для дифференциала порядка k :

$$d^k f = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \frac{\partial^k f}{\partial x^l \partial y^{k-l}} dx^l dy^{k-l}.$$

Эту же формулу можно переписать в терминах оператора дифференцирования

$$d := \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$$

следующим образом:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f.$$

Замечание 4.1. *Как и в случае функций одной переменной, дифференциалы высших порядков от функций двух переменных не обладают инвариантностью формы в общем случае. Однако, если $x = a_1 u + b_1 v + c_1$, $y = a_2 u + b_2 v + c_2$ – линейные функции от u, v, дифференциалы высших порядков от сложной функции $z = f(x(u,v), y(u,v))$ вычисляются по тем же формулам, как и в случае независимых аргументов, т.е. $d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^k f$.*

Формула Тейлора для функции двух переменных

Пусть функция $f(x, y)$ является $m+1$ раз непрерывно дифференцируемой на открытом множестве E, содержащем точку $X_0 = (x_0, y_0)$. Возьмем приращение $\Delta X = (\Delta x, \Delta y)$ такое, что отрезок с концами в точках X_0, $X_0 + \Delta X$ принадлежит множеству E.

Определим функцию

$$g(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),\ t \in (-\alpha, 1+\alpha),\ \alpha > 0.$$

Запишем формулу Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа

$$g(\Delta t) - g(0) = \frac{dg(0)}{1!} + \ldots + \frac{d^m g(0)}{m!} + \frac{d^{m+1} g(\theta \Delta t)}{(m+1)!},$$

где $\Delta t \in (-\alpha, 1+\alpha)$, $\theta \in (0,1)$.

Т.к. функции $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$ – линейные по t, то согласно замечанию 4.1 получаем

$$d^k g = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f = (\Delta t)^k \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f.$$

Полагая $\Delta t = 1$, получаем формулу Тейлора для функции двух переменных с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) = \frac{df(X_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^m f(X_0)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(X_0 + \theta \Delta X)}{(m+1)!}.$$

Запишем формулу Тейлора через частные производные, полагая при этом $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}(f''_{x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{l=0}^{m} C_m^l f^{(m)}_{x^l y^{m-l}}(x_0,y_0)(x-x_0)^l (y-y_0)^{m-l} + R_m(x,y),$$

где

$$R_m(x,y) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{l=0}^{m+1} C_{m+1}^l f^{(m+1)}_{x^l y^{m+1-l}}(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0))(x-x_0)^l (y-y_0)^{m+1-l} =$$

$$= o((x-x_0)^m + (y-y_0)^m),\ (x,y) \to (x_0,y_0).$$

Пример 4.1. *Разложить функцию $f(x,y) = e^x \sin y$ по формуле Тейлора в точке $(0,0)$ до членов второго порядка включительно.*

Имеем

$$f'_x = e^x \sin y \Rightarrow f'_x(0,0) = 0,$$

$$f'_y = e^x \cos y \Rightarrow f'_y(0,0) = 1,$$

$$f''_{x^2} = e^x \sin y \Rightarrow f''_{x^2}(0,0) = 0,$$

$$f''_{xy} = e^x \cos y \Rightarrow f''_{xy}(0,0) = 1,$$

$$f''_{y^2} = -e^x \sin y \Rightarrow f''_{y^2}(0,0) = 0.$$

Таким образом,

$$f(x,y) = y + xy + o(x^2 + y^2),\ (x,y) \to (0,0).$$

5 Теорема о неявной функции

Пусть $z = F(x, y)$ – функция двух переменных. Рассмотрим функциональное уравнение

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Пусть $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$. Обозначим через Γ_x проекцию множества Γ на ось Ox. Возьмем некоторый прямоугольник $\Pi = [a, b] \times [c, d]$.

Определение 5.1. *Будем говорить, что соотношение (1) задает неявную функцию* $y = \varphi(x)$ *в прямоугольнике* Π, *если:* $[a, b] \subset \Gamma_x$ *и для любых* (x, y_1), $(x, y_2) \in \Gamma \cap \Pi$ *следует, что* $y_1 = y_2$. *Очевидно, что* $F(x, \varphi(x)) = 0\ \forall x\ \in [a, b]$.

Теорема 5.1 (теорема о неявной функции)**.** *Пусть функция* $F(x, y)$ *удовлетворяет условиям:*

1. $F(x_0, y_0) = 0$;
2. F *непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0);
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существует прямоугольник $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$, $a > 0$, $b > 0$, *в котором соотношение (1) задает непрерывно дифференцируемую неявную функцию* $y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, *производная которой равна*

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))},\ x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

$\diamondsuit$

Доказательство существования неявной функции.

Приведем доказательство для случая $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

Пусть $B(X_0, \delta)$ – окрестность точки $X_0 = (x_0, y_0)$, в которой функция F непрерывно дифференцируемая. По теореме о стабилизации знака существует окрестность $B(X_0, \delta_1) \subset B(X_0, \delta)$, такая, что $F'_y(x, y) > 0$ для любого $X = (x, y) \in B(X_0, \delta_1)$. Выберем некоторый прямоугольник $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$, содержащийся в окрестности $B(X_0, \delta_1)$.

По критерию строгой монотонности функция $y \to F(x_0, y)$ строго возрастает на отрезке $[y_0 - b, y_0 + b]$. Следовательно, $F(x_0, y_0 - b) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + b)$.

Т.к. функции $x \to F(x, y_0 - b)$, $x \to F(x, y_0 + b)$ непрерывны, то по теореме о стабилизации знака существует $\alpha > 0$ такое, что

$$F(x, y_0 - b) < 0,\ F(x, y_0 + b) > 0\ \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$

Не нарушая общности можем считать, что отрезок $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ совпадает с отрезком $[x_0 - a, x_0 + a]$.

По теореме о промежуточных значениях для каждого $\bar{x} \in [x_0 - a, x_0 + a]$ существует $\bar{y} \in [y_0 - b, y_0 + b]$ такое, что $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. В силу критерия строгой монотонности $F(\bar{x}, y) < 0$ $\forall y \in [y_0 - b, \bar{y})$ и $F(\bar{x}, y) > 0$ $\forall y \in (\bar{y}, y_0 + b]$. Следовательно, определена функция $\varphi : \bar{x} \in [x_0 - a, x_0 + a] \mapsto \bar{y}$ такая, что $F(x, \varphi(x)) = 0$ $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

Доказательство непрерывной дифференцируемости неявной функции.

Прямоугольник П является компактом. По теореме Вейерштрасса 2.3 существует точка $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Pi$ такая, что

$$\min_{(x,y)\in\Pi} F'_y(x,y) = F'_y(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0.$$

По следствию из теоремы Вейерштрасса существует постоянная M такая, что

$$|F'_x(x,y)| \leqslant M \ \forall (x,y) \in \Pi.$$

Возьмем произвольную точку $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, а также произвольное $\Delta x \neq 0$, такое, что $x + \Delta x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Пусть $y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, – неявная функция в прямоугольнике П, определяемая соотношением (1), тогда

$$F(x, \varphi(x)) = F(x + \Delta x, \varphi(x + \Delta x)) = 0.$$

Применяя формулу конечных приращений 3.2, получаем

$$0 = F(x + \Delta x, \varphi(x + \Delta x)) - F(x, \varphi(x)) =$$

$$= F'_x(x + \theta_1 \Delta x, \varphi(x))\Delta x + F'_y(x + \Delta x, \varphi(x) + \theta_2 \Delta\varphi(x))\Delta\varphi,$$

где $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, $\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$. Отсюда получаем

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \theta_1 \Delta x, \varphi(x))}{F'_y(x + \Delta x, \varphi(x) + \theta_2 \Delta\varphi(x))} \Rightarrow |\Delta\varphi| \leqslant \frac{M}{F'_y(\tilde{x}, \tilde{y})}|\Delta x|.$$

Отсюда вытекает непрерывность функции φ в точке $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, и используя непрерывность частных производных F'_x, F'_y, получаем

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}.$$

Непрерывность функции $\varphi'(x)$ вытекает из теоремы о непрерывности арифметических комбинаций непрерывных функций.

■

Производные высших порядков неявной функции

Пусть $y = \varphi(x)$ – неявная функция, определяемая функциональным уравнением (1). По теореме о неявной функции имеем

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}.$$

Предположим, что функция F является дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Тогда получаем

$$\varphi'' = \left(-\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}\right)'_x = -\frac{(F''_{x^2} + F''_{xy}\varphi')F'_y - (F''_{yx} + F''_{y^2}\varphi')F'_x}{(F'_y)^2}.$$

Аналогично вычисляются производные более высоких порядков от функции φ.

6 Определение и свойства двойного интеграла

Рассмотрим на плоскости фигуру $D \subset R^2$, $D \neq \varnothing$.

Определение 6.1. *Диаметром фигуры D называют величину*

$$diam(D) = \sup_{X,Y \in D} \rho(X, Y)$$

Фигура D ограничена тогда и только тогда, когда $diam(D) < \infty$.

В дальнейшем будем рассматривать только ограниченные и измеримые (здесь и далее – по Жордану) фигуры D.

Упражнение. Доказать, что если фигура ограничена и измерима, то ее граница будет иметь нулевую площадь.

Пусть D – ограниченная и измеримая фигура.

Определение 6.2. *Разбиением фигуры D называется совокупность множеств $\{D_k\}_{k=1}^n$ тогда, когда выполняются следующие три условия:*

1) $\cup_{k=1}^n D_k = D$

2) $\forall k$ D_k измеримо

3) $\forall i \neq j$ D_i, D_j не имеют общих внутренних точек.

Для любого разбиения пл.$D = \sum\limits_{k=1}^{n}$ пл.D_k.

Величину $\delta(\{D_k\}) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} diam D_k$ называют диаметром разбиения.

Возьмем какое-нибудь $\{D_k\}$ и выберем по точке X_k в каждой части D_k. Построим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(X_k)\text{пл.}D_k$$

Определение 6.3. *Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой по Риману на D, если*

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall \{D_k\}_{k=1}^n \subset D \Rightarrow \delta(\{D_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon) \ \forall X_k \in D_k \ |\sigma - I| \leqslant \varepsilon$$

Величина I называется двойным интегралом от f по D и обозначается

$$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

Теорема 6.1 (необходимое условие интегрируемости). *Пусть f интегрируема на измеримом ограниченном D. Тогда для любой последовательности разбиений*

$$\forall \{D_k^m\}_{k=1}^{n_m} \subset D, \ \delta\{D_k^m\} \underset{m\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n_m} f(x_k^m)\text{пл.}D_k^m \underset{m\to\infty}{\to} \iint\limits_D f(x, y)dxdy \leqslant \varepsilon$$

$\diamondsuit$ Доказательство аналогично одномерному случаю. ■

Замечание 6.1. *В отличие от одномерного случая, из интегрируемости не следует ограниченность: функция может быть неограниченна на некоторой области с нулевой мерой (например, отрезок).*

Теорема 6.2 (критерий Коши интегрируемости). *Пусть функция f ограничена на измеримом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}$. Тогда f интегрируема на D тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \{D'_k\}_{k=1}^{n} \subset D\ \forall \{D''_r\}_{r=1}^{m} \subset D$$

$$\delta(\{D'_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon),\ \delta(\{D''_r\}) \leqslant \delta(\varepsilon),\ \forall X'_k \in D_k,\ \forall X''_r \in D_r \Rightarrow$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(X_k) пл.D_k - \sum_{r=1}^{m} f(Y_r) пл.D_r \right| \leqslant \varepsilon$$

или же $|\sigma - \tau| \leqslant \varepsilon$*, где* $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(X_k) пл.D_k$, $\tau = \sum\limits_{r=1}^{m} f(Y_r) пл.D_r$.

♢ Доказательство аналогично одномерному случаю. ■

Упражнение. Необходима ли здесь ограниченность функции?

Теорема 6.3 (об интегрируемости непрерывной на компакте функции). *Пусть $z = f(x, y)$ непрерывна на компакте D. Тогда f интегрируема на этом компакте.*

♢ Доказательство аналогично одномерному случаю. ■

Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть $T \subseteq \mathbb{R}^3$ – тело, $T \neq \varnothing$

Простое тело в $\mathbb{R}^3$ – тело, которое можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся прямоугольных параллелепипедов. Объем простого тела – сумма объемов прямоугольных параллелепипедов, из которых оно составлено.

$$S^* = \inf об.\Pi^*,\ T \subset \Pi^*, \quad \Pi\text{– простое тело}$$

$$S_* = \sup об._*,\ T \supset \Pi_*, \quad \Pi\text{– простое тело}$$

Если $S^* = S_*$, то тело T – измеримо, об.$T = S^* = S_*$.

Теорема 6.4 (критерий измеримости в $\mathbb{R}^3$). *Тело $T \subseteq \mathbb{R}^3$ измеримо $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ измеримые T^*, $T_* \subset \mathbb{R}$: $T_* \subset T \subset T^*$, об.$T^*$ – об.$T^* \leqslant \varepsilon$*

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – компакт

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна на компакте D.

Цилиндроидом будем называть тело, ограниченное сверху графиком функции $z = f(x, y)$, снизу – координатной плоскостью xy, сбоку – цилиндрической поверхностью по форме основания. Иными словами,

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}$$

Рассмотрим последовательность разбиений D на измеримые компакты $\{D_k^m\}_{k=1}^{n_m}$ с диаметрами $\delta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Поскольку D_k – компакт, $\exists \underline{X_k}$: $f(\underline{X_k}) = \min\limits_{X \in D_k} f(X), \exists \overline{X_k}$: $f(\overline{X_k}) = \min\limits_{X \in D_k} f(X)$

Построим нижнюю и верхнюю интегральные суммы:

$$\underline{\sigma_m} = \sum_{k=1}^{n} f\left(\underline{X_k}\right) \text{пл.} D_k$$

$$\overline{\sigma_m} = \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{X_k}\right) \text{пл.} D_k$$

При этом, $\underline{\sigma_m} = \text{об.}T_* \subset T$, а $\overline{\sigma_m} = \text{об.}T^* \supset T$.

Из теоремы об интегрируемости непрерывной на компакте функции 6.3 и необходимого условия интерируемости 6.1 получаем, что $\underline{\sigma_m}, \overline{\sigma_m}$ сходятся к $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

По критерию измеримости, об.$T = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Свойства двойного интеграла

Свойство 6.1 (линейность)**.**

Пусть функции f и g интегрируемы на ограниченном и измеримом D, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

Свойство 6.2 (монотонность)**.**

Пусть функции f и gинтегрируемы на ограниченном и измеримом D, причём $\forall (x,y) \in D\ f(x,y) \leqslant g(x,y)$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

Свойство 6.3 (теорема о среднем)**.**

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на связном компакте D. Тогда $\exists (\xi, \eta) \in D:$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi, \eta)\text{пл.}D$$

$\diamondsuit$ Пусть $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M$$

$$\iint\limits_D mdxdy \leqslant \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant \iint\limits_D Mdxdy$$

$$m \cdot \text{пл.}D \leqslant \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant M \cdot \text{пл.}D$$

Рассмотрим два случая.

1) пл.$D = 0$.

Тогда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$, следовательно подходит любая $(\xi, \eta) \in D$
2) пл.$D > 0$.

$$m \leqslant \frac{1}{\text{пл.}D} \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant M$$

По теореме о промежуточном значении 2.3, $\exists (\xi, \eta) \in D$, такая что

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\text{пл.}D} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

■

7 Критерий Дарбу и аддитивность 2И

Теорема 7.1 (необходимое условие Дарбу интегрируемости)**.** *Пусть функция $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ интегрируема на измеримом ограниченном множестве $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \forall \{D_k\}_{k=1}^n \subset D : diam(\{D_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon$$

, где $\Omega(f, \{D_k\}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k пл. D_k, \quad \omega_k = \sup\limits_{X,Y \in D_k} |f(X) - f(Y)|$

Теорема 7.2 (достаточное условие Дарбу интегрируемости)**.** *Если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{D_k\}_{k=1}^n \subset D : \Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon$, то f интегрируема на D.*

Доказательства указанных условий будут приведены далее в общем случае, для функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в параграфе 10.

Теорема 7.3 (об аддитивности 2И)**.** *Пусть функция $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ограничена на ограниченном измеримом множестве D. Пусть $D = D' \cup D''$ – разбиение D. Функция f интегрируема на D тогда и только тогда, когда она интегрируема на D' и D''. При этом выполняется следующее равенство:*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D''} f(x,y)dxdy$$

$\diamondsuit$

Пусть f интегрируема на D. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \{D_k\}_{k=1}^n \subset D \ \delta(\{D_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon$$

$$D' = \bigcup_{i=1}^{k} D'_i \quad \delta(D'_i) \leqslant \delta(\varepsilon); \quad D'' = \bigcup_{j=1}^{l} D''_i \quad \delta(D''_i) \leqslant \delta(\varepsilon)$$

Тогда $\{D_k\} = \{D'_i\} \cup \{D''_j\}$ – разбиение D, причём $\delta(\{D_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon)$. Тогда

$$\Omega(f, \{D'_i\}) \leqslant \Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon$$

$$\Omega(f, \{D''_j\}) \leqslant \Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon$$

По достаточному условию Дарбу 7.2, f интегрируема на D_1 и D_2.

Пусть f интегрируема на D_1 и D_2. Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмём разбиения

$$D' = \bigcup_{i=1}^{k} D'_i \quad \delta(D'_i) \leqslant \delta(\varepsilon); \quad D'' = \bigcup_{j=1}^{l} D''_i \quad \delta(D''_i) \leqslant \delta(\varepsilon)$$

Тогда $\{D_k\} = \{D'_i\} \cup \{D''_j\}$ – разбиение D, причём $\delta(\{D_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon)$. Тогда

$$\Omega(f, \{D_k\}) = \Omega(f, \{D'_i\}) + \Omega(f, \{D''_j\}) \leqslant 2\varepsilon$$

По достаточному условию Дарбу 7.2, f интегрируема на D.

Докажем теперь равенство $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D''} f(x,y)dxdy$. Возьмём последовательность разбиений $\{D_k\}^m$, $\{D'_i\}^m$ и $\{D''_j\}^m$ с диаметрами стремящимися к нулю и запишем для них интегральные суммы:

$$\sigma_m = \sum_k f(X_k^m)\text{пл.}D_k^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$\sigma'_m = \sum_i f(X_k^m)\text{пл.}(D')_k^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy$$

$$\sigma''_m = \sum_k f(X_k^m)\text{пл.}(D'')_k^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \iint\limits_{D''} f(x,y)dxdy$$

Поскольку $\{D_k\}^m = \{D'_i\}^m \cup \{D''_j\}^m$, $\sigma_m = \sigma'_m + \sigma''_m$, а следовательно, при $m \to \infty$,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D''} f(x,y)dxdy$$

■

Теорема 7.4 (о интегрируемости функций с нулевым по площади множеством точек разрыва). *Пусть функция $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ограничена на компакте D, $\forall X \in D \; |f(X)| \leqslant M$. Пусть $\exists \mathfrak{I} \subseteq D$, т.ч. пл.$\mathfrak{I} = 0$ и f непрерывна на $D \setminus \mathfrak{I}$ Тогда f интегрируема на D.*

♢ Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. пл.$\mathfrak{I} = 0$, значит $\exists \Pi \supset \mathfrak{I}$, пл.$\Pi \leqslant \varepsilon$, где Π – открытая простая фигура. Тогда $D \setminus \Pi$ – компакт.

Функция f непрерывна на $D \setminus \Pi \Rightarrow$ [по достаточному условию 6.3] $\Rightarrow f$ интегрируема на $D \setminus \Pi$.

По необходимому условию Дарбу 7.1,

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall \{\tilde{D}_k\} \subset D \setminus \Pi : \delta(\{\tilde{D}_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Omega(f, \{\tilde{D}_k\}) \leqslant \varepsilon$$

Поскольку функция f ограничена, $\forall X \in D \; |f(X)| \leqslant M$, следовательно $\Omega(f, \{\Pi_k\}) \leqslant 2M \cdot \text{пл.}\Pi \leqslant 2M\varepsilon$.

Поскольку $D = \Pi \cup (D \setminus \Pi)$, и $\{D_k\} = \{\tilde{D}_k\} \cup \{\Pi_k\}$, верно:

$$\Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon + 2M\varepsilon = (2M+1)\varepsilon$$

Следовательно, f интегрируема на D. ■

8 Сведение двойного интеграла к повторному

Лемма 8.1 (о сведении двойного интеграла к повторному по прямоугольнику).

Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на прямоугольнике $P = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ и при каждом фиксированном $x \in [a,b]$ отображение $y \to f(x,y)$ интегрируемо по Риману на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b F(x)dx = \iint\limits_P f(x,y)dxdy$$

$\diamondsuit$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем. Из определения двойного интеграла следует существование такого $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения прямоугольника P с диаметром меньшим $\delta(\varepsilon)$ любая интегральная сумма σ для $f(x,y)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\sigma - \iint\limits_P f(x,y)dxdy\right| \leqslant \varepsilon$$

Возьмем разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a,b]$ на n частей точками x_k с диаметром разбиения $\delta\left(\{x_k\}\right) \leqslant \dfrac{\delta(\varepsilon)}{2}$ и построим интегральную сумму s для функции $F(x)$ на $[a,b]$.

$$s = \sum_{k=1}^{n} F\left(\xi_k\right)\Delta x_k$$

Из того, что для любого k функция $f\left(\xi_k, y\right)$ интегрируема на отрезке $[c,d]$ вытекает, что для любого k существует разбиение отрезка $[c,d]$ точками y_{ki}, на m_k частей так, чтобы диаметр разбиения был бы меньше, чем $\dfrac{\delta(\varepsilon)}{2}$, и выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{m_k} f\left(\xi_k, \eta_{ki}\right)\Delta y_{ki} - \varepsilon \leqslant F\left(\xi_k\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m_k} f\left(\xi_k, \eta_{ki}\right)\Delta y_{ki} + \varepsilon$$

где $y_{ki-1} \leqslant \eta_{ki} \leqslant y_{ki}$ (рис. 1.1).

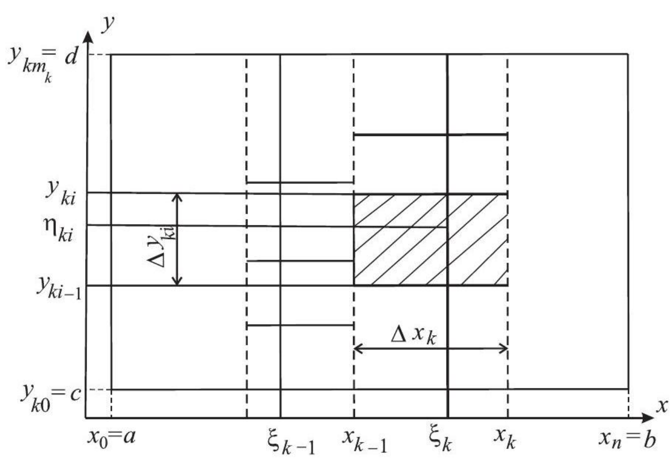


Рис. 1.1

Умножая неравенства на Δx_k и суммируя по k, получаем

$$\tau - \varepsilon(b-a) \leqslant s \leqslant \tau + \varepsilon(b-a),$$

где

$$\tau=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_k} f\left(\xi_k,\eta_{ki}\right)\Delta y_{ki}\Delta x_k$$

Сумма τ является интегральной суммой для $f(x,y)$ по P, соответствующей разбиению прямоугольника P на части с диаметром разбиения $\leqslant \delta(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\left|s-\iint\limits_P f(x,y)dxdy\right| \leqslant |s-\tau| + \left|\tau-\iint\limits_P f(x,y)dxdy\right| \leqslant (b-a)\varepsilon+\varepsilon.$$

Следовательно, функция $F(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b F(x)dx=\iint\limits_P f(x,y)dxdy$$

■

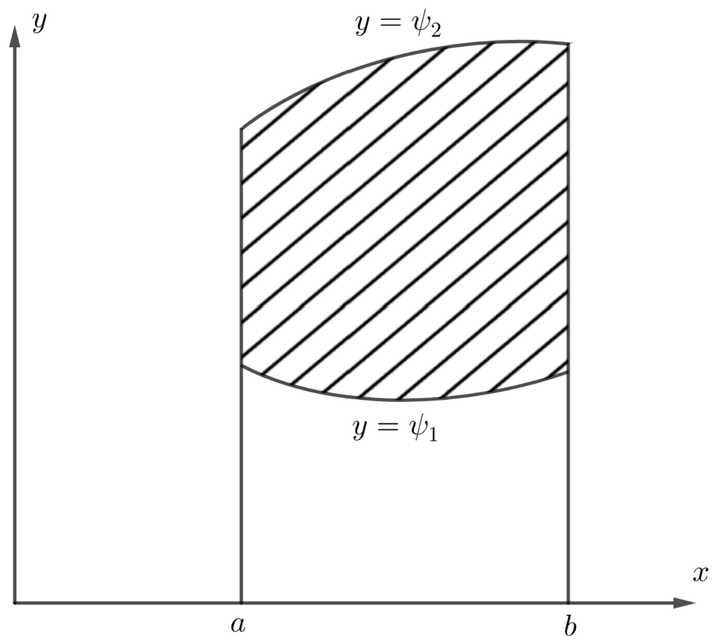


Рис. 2.1 Криволинейная трапеция, элементарная относительно оси Oy

Теорема 8.1 (о сведении двойного интеграла к повторному). *Пусть D – криволинейная трапеция и $f(x,y)$ – функция, интегрируемая по Риману на D, причем при каждом фиксированном x функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[\psi_1(x),\psi_2(x)]$. Тогда*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy$$

$\diamondsuit$ Множество D содержится в прямоугольнике $P = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, где $c = \min\limits_{x\in[a,b]} \psi_1(x), d = \max\limits_{x\in[a,b]} \psi_2(x)$. Определим функцию

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in P \backslash D \end{cases}$$

Функция g интегрируема на P, так как она интегрируема на D и на $P\backslash D$, причем в силу аддитивности двойного интеграла

$$\iint\limits_P g(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_{P\backslash D} 0dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

На основании леммы о сведении двойного интеграла к повторному по прямоугольнику 8.1

$$\iint\limits_P g(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d g(x,y)dy =$$
$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^{\psi_1(x)} g(x,y)dy + \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(x,y)dy + \int\limits_{\psi_2(x)}^{d} g(x,y)dy \right) dx =$$
$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(x,y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy.$$

$\blacksquare$

9 Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим фигуры D и E: первая расположена в плоскости Oxy, вторая – в плоскости Ouv. Пусть функции $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ осуществляют взаимно однозначное отображение фигуры E в фигуру D. Тогда $\begin{cases} u = \xi(x,y) \\ v = \eta(x,y) \end{cases}$ есть обратное преобразование фигуры D в фигуру E.

Определение 9.1. *Отображение фигуры E в фигуру D $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ называется диффеоморфным, если оно взаимно однозначно, функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ непрерывно дифференцируемы на E, а функции $u = \xi(x,y)$, $v = \eta(x,y)$ непрерывно дифференцируемы на D.*
В таком случае говорят, что фигуры E и D диффеоморфны.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ – отображение фигуры E в фигуру D.

Определение 9.2. *Матрица $\begin{bmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{bmatrix}$ называется матрицей Якоби отображения $\binom{\varphi}{\psi}$.*

Определитель $I(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$ *называется якобианом отображения* $\binom{\varphi}{\psi}$, *а определитель* $J(x,y) = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix}$ – *якобианом обратного преобразования.*

Покажем, что якобианы для диффеоморфного отображения не обращаются в ноль.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ – диффеоморфное отображение фигуры E в фигуру D, а $\begin{cases} u = \xi(x,y) \\ v = \eta(x,y) \end{cases}$ – обратное преобразование. Тогда верны тождества:

$$x \equiv \varphi(\xi(x,y),\eta(x,y)), \quad y \equiv \psi(\xi(x,y),\eta(x,y)).$$

Вычислим частные производные:

$$1 = \varphi'_u \cdot \xi'_x + \varphi'_v \cdot \eta'_x, \quad 0 = \varphi'_u \cdot \xi'_y + \varphi'_v \cdot \eta'_y,$$

$$0 = \psi'_u \cdot \xi'_x + \psi'_v \cdot \eta'_x, \quad 1 = \psi'_u \cdot \xi'_y + \psi'_v \cdot \eta'_y$$

Действительно, $I(u,v) \cdot J(x,y) = E$. Следовательно, якобиан диффеоморфного отображения не равен 0.

Лемма 9.1. *Пусть* $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ – *диффеоморфное отображение замкнутого прямоугольника P в фигуру D. Тогда существует точка $(\overline{u},\overline{v}) \in P$ такая, что*

$$\textit{пл.}D = |I(\overline{u},\overline{v})| \cdot \textit{пл.}P$$

Доказательство этой леммы будет приведено позднее, в параграфе 13, а конкретно в лемме 13.3.

Лемма 9.2 (о замене переменных в 2И на простом компакте)**.** *Пусть* $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ – *диффеоморфное отображение простой компактной фигуры E в фигуру D и пусть функции $f(x,y)$ и $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I(u,v)|$ интегрируемы соответственно на D и E, тогда*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I(u,v)|\,du\,dv$$

$\diamondsuit$ Возьмём последовательность разбиений $\{E_k^m\}_{k=1}^{n_m}$ простой компактной фигуры E на замкнутые прямоугольники с диаметрами $\delta_m = \delta\{E_k^m\} \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Отображение $\binom{\varphi}{\psi}$ переводит последовательность разбиений $\{E_k^m\}$ в последовательность разбиений $\{D_k^m\}$ фигуры D.

Докажем, что $\delta\{D_k^m\} \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Отобразим произвольные точки $M_1(u_1,v_1), M_2(u_2,v_2) \in E$ в соответствующие точки $M_1'(\varphi(u_1,v_1),\psi(u_1,v_1)), M_2'(\varphi(u_2,v_2),\psi(u_2,v_2)) \in D$. Применяя формулу конечных приращений 3.2, вычислим расстояние между M_1' и M_2':

$$\rho(M_1',M_2') = \sqrt{(\varphi(u_2,v_2)-\varphi(u_1,v_1))^2 + (\psi(u_2,v_2)-\psi(u_1,v_1))^2} =$$
$$= ((\varphi'_u(u_1+\theta_1(u_2-u_1),v_1)\cdot(u_2-u_1) + \varphi'_v(u_2,v_1+\theta_2(v_2-v_1))\cdot(v_2-v_1))^2 +$$
$$+ (\psi'_u(u_1+\theta_3(u_2-u_1),v_1)\cdot(u_2-u_1) + \psi'_v(u_2,v_1+\theta_4(v_2-v_1))\cdot(v_2-v_1))^2)^{\frac{1}{2}}$$

Согласно определению диффеоморфизма производные φ'_u, φ'_v, ψ'_u, ψ'_v непрерывны на компакте E. Тогда по теореме Вейерштрасса 2.3 $\exists M$ такое, что $max\{|\varphi'_u|, |\varphi'_v|, |\psi'_u|, |\psi'_v|\} \leqslant M$. Используя $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{|u_2 - u_1|^2 + |v_2 - v_1|^2}$ и неравенство Коши, имеем:

$$\rho(M'_1, M'_2) \leqslant M\sqrt{2(|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|)^2} \leqslant M\sqrt{2 \cdot 2((u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2)} = M \cdot 2\rho(M_1, M_2)$$

Из последнего неравенства вытекает, что $\delta\{D_k^m\} \underset{m\to\infty}{\to} 0$.

Возьмём теперь точку $(\xi_k^m, \eta_k^m) \in D_k^m$. Построим интегральную сумму

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m, \eta_k^m) \cdot \text{пл.}D_k^m, \quad \sigma_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Поскольку отображение $\binom{\varphi}{\psi}$ сюръективно, найдётся соответствующая точка $(u_k^m, v_k^m) \in E_k^m$ такая, что $(\xi_k^m, \eta_k^m) = (\varphi(u_k^m, v_k^m), \psi(u_k^m, v_k^m))$ Из леммы 9.1 имеем $\text{пл.}D_k^m = |I(\overline{u_k^m}, \overline{v_k^m})| \cdot \text{пл.}E_k^m$. Тогда σ_m можно записать в виде:

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\varphi(u_k^m, v_k^m), \psi(u_k^m, v_k^m)) \cdot |I(\overline{u_k^m}, \overline{v_k^m})| \cdot \text{пл.}E_k^m$$

Без ограничения общности положим $\overline{u_k^m} = u_k^m$, $\overline{v_k^m} = v_k^m$, имеем:

$$\sigma_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \iint\limits_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I(u, v)|\, du\, dv$$

Таким образом, интегралы равны. ■

Пример 9.1. *Рассмотрим на плоскости Oxy фигуру D, которая задаётся уравнением $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Отображение криволинейного сектора на плоскости Oxy в криволинейную трапецию такую, что $0 \leqslant r \leqslant 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, на плоскость $Or\varphi$ с помощью полярного преобразования $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ обладает якобианом*

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Это отображение не является диффеоморфным, так как якобиан может обращаться в 0. Можно заменить, что точке $(0, 0)$ плоскости Oxy соответствует прямая $r = 0$ плоскости $Or\varphi$, откуда такое отображение не является биективным.

Определение 9.3. *Отображение $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ называется ε-диффеоморфизмом фигуры E в фигуру D, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists E_\varepsilon \subset E$, $D_\varepsilon \subset D$: пл. $E_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, пл. $D_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, $E \setminus E_\varepsilon$ есть простая компактная фигура и отображение $\binom{\varphi}{\psi}$ является диффеоморфизмом между $E \setminus E_\varepsilon$ и $D \setminus D_\varepsilon$.*

Теорема 9.1 (о замене переменных в 2И). *Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ — ε-диффеоморфизм фигуры E в фигуру D и пусть функции $f(x, y)$ и $f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I(u, v)|$ ограничены и интегрируемы соответственно на D и E. Тогда*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_E f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|I(u, v)|\, du\, dv.$$

$\diamondsuit$ Возьмём $\varepsilon > 0$ и множества E_ε, D_ε из определения ε-диффеоморфизма.
По свойству аддитивности 2И имеем:

$$G_1 = \iint\limits_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I(u,v)|\,du\,dv \ = \iint\limits_{E_\varepsilon} \cdots \ + \iint\limits_{E\setminus E_\varepsilon} \cdots = I_1 + I_2,$$

$$G_2 = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \ = \iint\limits_{D_\varepsilon} \cdots \ + \iint\limits_{D\setminus D_\varepsilon} \cdots = I_3 + I_4.$$

Заметим, что $I_2 = I_4$ согласно лемме 9.2.
Рассмотрим теперь I_1 и I_3. По условию теоремы функции $f(x,y)$ и $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I(u,v)|$ ограничены, а следовательно, $|I_1| \leqslant M \cdot \text{пл.} D_\varepsilon \leqslant M\varepsilon$ и $|I_3| \leqslant M \cdot \text{пл.} D_\varepsilon \leqslant M\varepsilon$. Таким образом, имеем:

$$|G_1 - G_2| = |I_1 + I_2 - I_3 - I_4| = |I_1 - I_3| \leqslant |I_1| + |I_3| \leqslant 2M\varepsilon.$$

Поскольку неравенство выполняется для любого ε, получаем $G_1 = G_2$. $\blacksquare$

10 Кратные интегралы. Тройной интеграл

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Всякую совокупность точек T в $\mathbb{R}^n$ будем называть телом.

Определение 10.1. *Тело* $\Pi = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ $\forall\, i = \overline{1,n}$ *называется замкнутым параллелепипедом в* $\mathbb{R}^n$.

За объем такого параллелепипеда принимают число $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$.

Определение 10.2. *Тело называют простым, если его можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся (либо пересекающихся по границе) замкнутых параллелепипедов.*

Объем простого тела равен сумме объемов параллелепипедов, из которых оно составлено.
Пусть $T \in \mathbb{R}^n$ — ограниченное тело.

Определение 10.3. *Простые тела* Π_* *и* Π^* *такие, что* $\Pi_* \subset T \subset \Pi^*$ *называют соответственно вписанным и описанным для тела* T.

Определение 10.4. *Тело* $T \in \mathbb{R}^n$ *называется измеримым (кубируемым), если*

$$V_* = \sup_{\Pi_* \subset T} \{\textit{об.}\Pi_*\} = \inf_{\Pi^* \supset T} \{\textit{об.}\Pi^*\} = V^*.$$

Объем тела T *в таком случае равен величине* $V = V_* = V^*$

Пусть $T \in \mathbb{R}^n$ – ограниченное измеримое тело, $\{T_k\}_{k=1}^n \subset T$ – разбиение тела T (объединение всех T_k составляет T и никакие две части разбиения не имеют общих внутренних точек), об.$T = \sum\limits_{k=1}^n$ об.T_k.

Определение 10.5. *Величину* $\delta(\{T_k\}) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\textit{diam}\ T_k\}$, *где* $\textit{diam}\ T_k = \sup\limits_{x_1, x_2 \in T_k} \rho(x_1, x_2)$ *называют диаметром разбиения.*

Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — ограниченная на T функция от n переменных. Построим интегральную сумму, соответствующую разбиению $\{T_k\}_{k=1}^n$:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \text{об.} T_k$$

Определение 10.6. *Функция f назвается интегрируемой на T, если существует число I такое, что*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{T_k\}_{k=1}^n : \delta(\{T_k\}) \leqslant \delta(\varepsilon), \forall x_k \in T_k \Rightarrow |\sigma - I| \leqslant \varepsilon$$

Число I называют n-кратным интегралом от f по T и обозначают

$$\int\limits_T f(X) dX \;\; \textit{или} \;\; \int \cdots \int\limits_T f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Критерий Дарбу интегрируемости функций от нескольких переменных

Определение 10.7. *Множество $\{X : \rho(X, \Pi) \leqslant q\} = \{X : \exists Y \in \Pi, \rho(X, Y) \leqslant q\}$ называют q-окрестностью тела Π. Далее q-окрестностью тела Π будем обозначать как $B(\Pi, q)$.*

Лемма 10.1. *Пусть объём простого тела Π равен $p \neq 0$. Тогда $\exists q > 0$ такое, что объём q-окрестности тела Π не превосходит $2p$.*

$\diamondsuit$

По определению простое тело – объединение некоторого числа параллелепипедов,

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^{m} \Pi_i$$

с объёмами

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = p, \quad p_i := \text{об.} \Pi_i$$

Точка X принадлежит q-окрестности Π тогда и только тогда, когда она принадлежит q-окрестности какого-то из Π_i. Действительно,

$$X \in B(\Pi, q) \Leftrightarrow \exists Y \in \Pi,\ \rho(X, Y) \leqslant q \Leftrightarrow \exists i : \exists Y \in \Pi_i,\ \rho(X, Y) \leqslant q \Leftrightarrow \exists i : X \in B(\Pi_i, q)$$

Тогда, по определению равенства множеств,

$$B(\Pi, q) = \bigcup_{i=1}^{m} B(\Pi_i, q)$$

Следовательно,

$$\text{об.} B(\Pi, q) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \text{об.} B(\Pi_i, q)$$

Пусть параллелепипед Π_i задан как $[l_{i,1}, r_{i,1}] \times \dots \times [l_{i,n}, r_{i,n}]$. Обозначим $d_{i,j} := r_{i,j} - l_{i,j}$. Тогда

$$p_i = \prod_{j=1}^{n} d_{i,j}$$

Покажем, что $B(\Pi_i, q) \subset [l_{i,1} - q, r_{i,1} + q] \times \dots \times [l_{i,n} - q, r_{i,n} + q]$:

$$X \in B(\Pi_i, q) \Rightarrow \exists Y \in \Pi, (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_1 - y_1)^2 \leqslant q^2 \ \Rightarrow \forall i |x_i - y_i| \leqslant q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \in [l_{i,1} - q, r_{i,1} + q] \times \dots \times [l_{i,n} - q, r_{i,n} + q]$$

Тогда

$$\text{об.}B(\Pi_i, q) \leqslant \prod_{j=1}^{n} (d_{i,j} + 2q) = p_i + qP_i(q),$$

где $P_i(q)$ - некий ненулевой многочлен от q. Таким образом,

$$\text{об.}B(\Pi, q) \leqslant \sum_{i=1}^{m} (p_i + qP_i(q)) = p + qP(q) \underset{q \to 0}{\longrightarrow} p$$

■

Рассмотрим $D \subseteq \mathbb{R}^n$, функцию $f : D \to \mathbb{R}$, и разбиение $\{D_k\}_{k=0}^m$ множества D. Определим интегральное колебание функции f по разбиению $\{D_k\}$:

$$\Omega(f, \{D_k\}) := \sum_{k=1}^{m} \omega_k \text{об.} D_k,$$

где

$$\omega_k = \sup_{X_1, X_2 \in D_k} |f(X_1) - f(X_2)|.$$

Теорема 10.1 (необходимое условие Дарбу интегрируемости векторной функции)**.** *Пусть f интегрируема на измеримом ограниченном D. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon), \forall \{D_k\}_{k=0}^m : \delta\{D_k\} \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon.$$

♢ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Используя критерий Коши интегрируемости векторной функции 6.2, получаем

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \{D_k\}_{k=0}^m : \delta\{D_k\} \leqslant \delta(\varepsilon), \forall X_k, Y_k \in D_k \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{m} f(X_k) \text{об.} D_k - \sum_{k=1}^{m} f(Y_k) \text{об.} D_k \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Возьмем произвольное разбиение $\{D_k\}_{k=0}^m$ с диаметром разбиения $\delta\{D_k\} \leqslant \delta(\varepsilon)$. По определению точной верхней грани на каждом компакте D_k можно найти точки X_k, Y_k такие, что

$$\sup_{X,Y \in D_k} |f(X) - f(Y)| \leqslant f(X_k) - f(Y_k) + \frac{\varepsilon}{2\text{об.} D}. \tag{3}$$

Из соотношений (2), (3) получаем

$$\Omega(f, \{D_k\}) = \sum_{k=1}^{m} \sup_{X,Y \in D_k} |f(X) - f(Y)| \text{об.} D_k \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(f(X_k) - f(Y_k) + \frac{\varepsilon}{2\text{об.} D} \right) \text{об.} D_k \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{m} f(X_k)\text{об}.D_k - \sum_{k=1}^{m} f(Y_k)\text{об}.D_k \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

■

Теорема 10.2 (достаточное условие Дарбу интегрируемости векторной функции)**.** *Пусть f ограничена на измеримом ограниченном D. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{D_k\}_{k=0}^m$ множества D такое, что*

$$\Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon,$$

то функция f интегрируема на D.

♢

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем разбиение $\{D_k\}$ такое, что

$$\Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon$$

Границы всех частей разбиения D_k погрузим в простое тело Π с объёмом

$$p = \text{об}.\Pi \leqslant \varepsilon$$

Найдём в соответствии с леммой 10.1 число q такое, что объём q-окрестности тела Π не превосходит $2p$.

Возьмем произвольные разбиения $\{D'_r\}_{r=0}^s$, $\{D''_l\}_{l=0}^t$ множества D с диаметрами $\delta\{D'_r\} \leqslant \frac{q}{2}$, $\delta\{D''_l\} \leqslant \frac{q}{2}$ и рассмотрим произвольные интегральные суммы по этим разбиениям:

$$\sigma' = \sum_{r=1}^{s} f(X_r)\text{об}.D'_r,\ \sigma'' = \sum_{l=1}^{t} f(Y_l)\text{об}.D''_l.$$

Обозначим через Δ_{rl} объём пересечения D'_r и D''_l. Имеем

$$\sigma' - \sigma'' = \sum_{r=1}^{s} f(X_r)\text{об}.D'_r - \sum_{l=1}^{t} f(Y_l)\text{об}.D''_l = \sum_{r,l} (f(X_r) - f(Y_l))\Delta_{rl}$$

Представим последнюю сумму в виде $\Sigma_1 + \Sigma_2$, где в Σ_1 входят слагаемые с такими r и l, что $\exists k:\ D'_r \cup D''_l \subset D_k$, а в Σ_2 – все остальные слагаемые.

Оценим Σ_1. Для каждого k рассмотрим все r и l, для которых $D'_r \cup D''_l \subset D_k$. $\forall X, Y \in D_k$ верно $|f(X) - f(Y)| \leqslant \omega_k$, в том числе и $|f(X_r) - f(Y_l)| \leqslant \omega_k$. Поскольку объединение $D'_r \cup D''_l \subset D_k$, верно и $D'_r \cap D''_l \subset D_k$, причём $D'_r \cap D''_l$ между собой не пересекаются. Тогда верно

$$|\Sigma_1| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \omega_k \text{об}.D_k = \Omega(f, \{D_k\}) \leqslant \varepsilon$$

Оценим Σ_2. Если слагаемое не вошло в Σ_1, то одно из множеств D'_r или D''_l имеет общие точки с разными частями разбиения $\{D_k\}$. Пусть, не нарушая общности, это D'_r. Поскольку $\delta(\{D'_r\}) \leqslant \frac{q}{2}$, множество D'_r принадлежит q-окрестности Π. Следовательно, пересечение $D'_r \cup D''_l$ также лежит в q-окрестности Π. Поскольку $D'_r \cup D''_l$ не пересекаются между собой, а колебание функции на любом подмножестве D не превосходит $2A$, где A такое, что $|f(x)| \leqslant A$, верно

$$|\Sigma_1| \leqslant 4Ap \leqslant 4A\varepsilon$$

Отсюда получаем

$$|\sigma' - \sigma''| \leqslant \varepsilon + 4A\varepsilon$$

Согласно критерию Коши интегрируемости 6.2 функция f интегрируема на множестве D. ■

Если $n = 3$, то соответствующий кратный интеграл называют тройным.

Определение 10.8. *Тело*

$$T = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in D,\ \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\}$$

, где D – замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$,
а функции $\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $\psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ непрерывны на D, называют циллиндроидом, элементарным относительно оси Ox_n.

Сведение кратного интеграла к повторному

Определение 10.9. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, а X и Y – два набора переменных с суммарной мощностью n. Проекцией множества D по набору переменных X будем называть множество $D_X = \{X : (X, Y) \in D\}$.*

Обозначим за D_k проекцию D по переменным $(x_1, \ldots, x_k)$.

Лемма 10.2 (о частичном сведении кратного интеграла к повторному по параллелепипеду)**.** *Пусть $f : \Pi \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема на $\Pi = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Пусть $\forall (x_1^0, \ldots x_{n-1}^0) \in \Pi_{n-1}$ функция $f(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n)$ интегрируема на $x_n \in [a_n, b_n]$. Тогда $F(x_1, \ldots x_{n-1}) = \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема по Π_{n-1} и*

$$\underset{\Pi_{n-1}}{\int \cdots \int} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \ldots, x_n) = \underset{\Pi}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

$\diamondsuit$

f интегрируема на $\Pi \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \{D_k\} \in \Pi\ :\ \delta(D_k) \leqslant \delta(\varepsilon)\ \forall$ интегральной суммы σ

$$\left| \sigma - \iint\limits_{\Pi} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant \varepsilon$$

Рассмотрим произвольное разбиение Π_{n-1} (далее – Π') с диаметром разбиения $\delta(\{\Pi'_k\}_{k=1}^m) \leqslant \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$, а также произвольные точки $\xi_k \in \Pi'_k$. Пусть

$$S = \sum_{k=1}^{m} F(\xi_k) \text{об.} \Pi'_k$$

$\forall k$ $f(\xi_k, y)$ интегрируема по $y \in [a_n, b_n]$. Для любого фиксированного k рассмотрим разбиение $\{y_{ki}\}_i^{r_i} \subset [a_n, b_n]$ с диаметром $\delta(\{y_{ki}\}) \leqslant \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$. Тогда

$$F(\xi_k) = \int\limits_{a_n}^{b_n} f(\xi_k, y) dx_n$$

$$\sum_{i=1}^{r_i} f(\xi_k, y_{ki}) \Delta y_{ki} - \varepsilon \leqslant F(\xi_k) \leqslant \sum_{i=1}^{r_i} f(\xi_k, y_{ki}) \Delta y_{ki} + \varepsilon$$

(Утверждение выше следует из определения интеграла. Если диаметр недостаточно маленький, возьмём его таким, чтобы он удовлетворял $\delta(\varepsilon)$ из определения интеграла). Просуммируем по k домножая на об. Π'_k:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_i} f(\xi_k, y_{ki}) \Delta y_{ki} \ \textit{об.}\Pi'_k - \varepsilon(b_n - a_n) \leqslant \sum_{k=1}^{m} F(\xi_k) \ \textit{об.}\Pi'_k \leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_i} f(\xi_k, y_{ki}) \Delta y_{ki} \ \textit{об.}\Pi'_k + \varepsilon(b_n - a_n)$$

Тогда, если τ – интегральная сумма кратного интеграла по Π, то

$$\tau - \varepsilon(b_n - a_n) \leqslant S \leqslant \tau + \varepsilon(b_n - a_n)$$

$$\left| S - \int\limits_{\Pi} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant |S - \tau| + \left| \tau - \int\limits_{\Pi} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(b_n - a_n) + \varepsilon = \varepsilon(b_n - a_n + 1)$$

Следовательно, $F(x_1, \ldots, x_{n-1})$ интегрируема на Π' и

$$\int\limits_{\Pi'} \cdots \int dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\Pi} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

■

Теорема 10.3 (о сведении кратного интеграла к повторному)**.** *Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функция от $(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $D_1 = [a, b]$, а для любого $2 \leqslant k \leqslant n$, D_k представимо как*

$$\{(x_1, \ldots, x_k) : (x_1, \ldots, x_{k-1}) \in D_{k-1}, \ \varphi_k(x_1, \ldots x_{k-1}) \leqslant x_k \leqslant \psi_k(x_1, \ldots x_{k-1})\}$$

, где ϕ_k и ψ_k – непрерывны на D_{k-1}. Тогда выполняется формула перехода от кратного интеграла к повторному:

$$\int\limits_{D} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{a}^{b} dx_1 \int\limits_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2 \cdots \int\limits_{\varphi_n(x_1, \ldots x_{n-1})}^{\psi_n(x_1, \ldots, x_{n-1})} dx_n f(x_1, \ldots, x_n)$$

$\diamondsuit$

Докажем утверждение с помощью индукции по n. При $n = 2$ утверждение было доказано ранее (теорема 8.1). Пусть утверждение выполняется для всех $n \leqslant N - 1$. Докажем для $n = N$.

поскольку функции φ_k и ψ_k непрерывны на компактах, на них достигается минимум и максимум:

$$a_k = \min_{\xi_0 \in D_k} \varphi_i(\xi_0)$$

$$b_k = \min_{\xi_0 \in D_k} \varphi_i(\xi_0)$$

Тогда $D \subset \Pi$, $\Pi = [a, b] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Введём новую функцию $g : \Pi \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & (x_1, \dots, x_n) \in D \\ 0 & (x_1, \dots, x_n) \in \Pi \setminus D \end{cases}$$

По свойству аддитивности 7.3, g интегрируема на Π, а $g(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n)$ интегрируема на $[a_n, b_n]$. Тогда, по лемме 10.2,

$$\int\limits_{\Pi} \cdots \int g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{\Pi_{n-1}} \cdots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n g(x_1, \dots, x_n)$$

Левая часть выражения:

$$\int\limits_{\Pi} \cdots \int g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{D} \cdots \int g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n + \int\limits_{\Pi \setminus D} \cdots \int g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{D} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n + \int\limits_{\Pi \setminus D} \cdots \int 0 dx_1 \dots dx_n = \int\limits_{D} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Правая часть выражения:

$$\int\limits_{\Pi_{n-1}} \cdots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n g(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_{\Pi_{n-1}} \cdots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{\varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1})} dx_n g(x_1, \dots, x_n) +$$

$$+ \int\limits_{\Pi_{n-1}} \cdots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \int\limits_{\varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\psi_n(x_1, \dots, x_{n-1})} dx_n g(x_1, \dots, x_n) +$$

$$+ \int\limits_{\Pi_{n-1}} \cdots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \int\limits_{\psi_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n} dx_n g(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \int\limits_{\Pi_{n-1}} \cdots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{\varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1})} dx_n 0 +$$

$$+\int\limits_{\Pi_{n-1}}\cdots\int dx_1\dots dx_{n-1}\int\limits_{\varphi_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,\dots,x_{n-1})} dx_n f(x_1,\dots,x_n)+$$

$$+\int\limits_{\Pi_{n-1}}\cdots\int dx_1\dots dx_{n-1}\int\limits_{\psi_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n} dx_n 0=\int\limits_{\Pi_{n-1}}\cdots\int dx_1\dots dx_{n-1}\int\limits_{\varphi_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,\dots,x_{n-1})} dx_n f(x_1,\dots,x_n)$$

Таким образом,

$$\int\limits_{D}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n=\int\limits_{\Pi_{n-1}}\cdots\int dx_1\dots dx_{n-1}\int\limits_{\varphi_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,\dots,x_{n-1})} dx_n f(x_1,\dots,x_n)$$

Обозначим $F(x_1,\dots,x_{n-1})=\int\limits_{\varphi_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,\dots,x_{n-1})} dx_n f(x_1,\dots,x_n)$. Тогда

$$\int\limits_{D}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n=\int\limits_{\Pi_{n-1}}\cdots\int dx_1\dots dx_{n-1}F(x_1,\dots,x_{n-1})$$

По предположению индукции,

$$\int\limits_{\Pi_{n-1}}\cdots\int dx_1\dots dx_{n-1}F(x_1,\dots,x_{n-1})=\int\limits_a^b dx_1\int\limits_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2\cdots\int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1,\dots x_{n-2})}^{\psi_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2})} dx_{n-1}F(x_1,\dots,x_{n-1})=$$

$$=\int\limits_a^b dx_1\int\limits_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2\cdots\int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1,\dots x_{n-2})}^{\psi_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2})} dx_{n-1}\int\limits_{\varphi_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,\dots,x_{n-1})} dx_n f(x_1,\dots,x_n)$$

Таким образом,

$$\int\limits_{D}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n=\int\limits_a^b dx_1\int\limits_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2\cdots\int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1,\dots x_{n-2})}^{\psi_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-2})} dx_{n-1}\int\limits_{\varphi_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,\dots,x_{n-1})} dx_n f(x_1,\dots,x_n)$$

■

Пусть T,E – ограниченные измеримые тела в $\mathbb{R}^n$, $G:E\to T$ – отображение тела E в тело T, $Y=G(X)$, $Y\in T$, $X\in E$.

$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix}$, $G_i = G_i(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда

$$\frac{dG}{dX} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{— Матрица Якоби отображения } G$$

, а $\det \frac{dG}{dX}$ — якобиан отображения G.

Теорема 10.4 (О замене переменных в кратном интеграле)**.** *Пусть T, $E \in \mathbb{R}^n$ — ограниченные измеримые тела, $G : E \to T$ — ε-диффеоморфизм из E в T. Пусть также функции $f(X)$ и $f(G(X))\left|\det \frac{dG}{dX}\right|$ интегрируемы соответственно на T и на E. Тогда имеет место формула замены переменных в кратном интеграле:*

$$\int\limits_T f(X)dX = \int\limits_E f(G(X))\left|\det \frac{dG}{dX}\right| dY$$

Рассмотрим несколько ε-диффеоморфных преобразований в пространстве $\mathbb{R}^3$:

1. Переход к сферическим координатам

   Преобразование вида $\begin{cases} x = r\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ y = r\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ z = r\sin(\psi) \end{cases}$. Его якобиан:

$$I = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) & -r\sin(\varphi)cos(\psi) & -r\cos(\varphi)\sin(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) & r\cos(\varphi)\cos(\psi) & -r\sin(\varphi)\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & 0 & r\cos(\psi) \end{pmatrix} = r^2\cos(\psi),$$

2. Переход к циллиндрическим координатам

   Преобразование вида $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = h \end{cases}$. Его якобиан:

$$I = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

11 Криволинейный интеграл первого типа (КРИ-1)

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две непрерывно диффиренцируемые функции $x(t), y(t)$. Эти функции задают кривую с параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Запись $\dot{x}(t)$ равносильна записи $x'(t)$. Длина кривой дл.$l = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$

Будем рассматривать кусочно-гладкие кривые, т.е. такие, что отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число отрезков так, что на каждом из них кривая будет гладкой.

Замечание 11.1 (отличие кривой от пути)**.**

$$\begin{cases} x = cos\varphi, \\ y = sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

$$\begin{cases} x = cos\varphi, \\ y = sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 4\pi],$$

В обоих случаях кривая одна и та же, окружность, но пути разные. Во втором случае мы проходим по окружности два раза.

В дальнейшем речь будет идти о пути.

Пусть на l определена непрерывная функция $z = f(x, y)$.

Рассмотрим разбиение $\{t_k\}_{k=1}^n \subset [a, b]$. Пусть M_k – точка кривой, соответствующая t_k, то есть $M_k(x(t_k), y(t_k))$. Тогда получаем соответствующее разбиение кривой.

Рассмотрим фрагмент кривой $M_{k-1}M_k$:

$$\text{дл.}M_{k-1}M_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = [\text{по теореме о среднем}] = \sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\xi_k)}\Delta t_k$$

, $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Рассмотрим на фрагменте $M_{k-1}M_k$ интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x(\xi_k), y(\xi_k))\text{дл.}M_{k-1}M_k$$

Тогда

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x(\xi_k), y(\xi_k))\sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\xi_k)}\Delta t_k$$

$f(x(t), y(t))$ непрерывна, $\sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\xi_k)}$ непрерывна, следовательно σ сходится к A. Предел этой интегральной суммы называют криволинейным интегралом первого типа и обозначают $\int\limits_{AB} f(x, y)ds$.

$$\int\limits_{AB} f(x, y)ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$$

Свойства КРИ-1

Свойство 11.1 (Аддитивность)**.**

$$\int\limits_{AC} f(x,y)ds = \int\limits_{AB} f(x,y)ds + \int\limits_{BC} f(x,y)ds$$

$\diamondsuit$

$$\int\limits_{AC} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{c} f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt = \int\limits_{a}^{b} f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt +$$

$$+\int\limits_{b}^{c} f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt = \int\limits_{AB} f(x,y)ds + \int\limits_{BC} f(x,y)ds$$

$\blacksquare$

Свойство 11.2 (Замена переменных)**.** *Рассмотрим путь AB, который задаётся системой*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b],$$

Рассмотрим отображение $t = \varphi(\tau)$, $\tau \in [\alpha,\beta]$, функция $\varphi(\tau)$ непрерывно-дифференцируемая и биективная, $\varphi'(\tau) \geqslant 0$ $\forall \tau \in [\alpha,\beta]$. Путь CD задаётся системой

$$\begin{cases} x = \xi(\tau) = x(\varphi(\tau)), \\ y = \eta(\tau) = y(\varphi(\tau)). \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{CD} f(x,y)ds$$

$\diamondsuit$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(\varphi(\tau)),y(\varphi(\tau)))\sqrt{(x'_t(\varphi(\tau)))^2+y'_t(\varphi(\tau)))^2}\varphi'(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\xi(\tau),\eta(\tau))\sqrt{(x'_t(\varphi(\tau))\varphi'(\tau))^2+(y'_t(\varphi(\tau))\varphi'(\tau))^2}d\tau =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\xi(\tau),\eta(\tau))\sqrt{(\xi'_\tau)^2+(\eta'_\tau)^2)}d\tau = \int\limits_{CD} f(x,y)ds$$

$\blacksquare$

Свойство 11.3 (Независимость от направления пути). *КРИ-1 не зависит от того направления, в котором мы двигаемся*

Рассмотрим путь

$$AB^+ : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

И рассмотрим на ряду с ним путь противоположной ориентации

$$AB^- : \begin{cases} x = x(a+b-t), \\ y = y(a+b-t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

Тогда

$$\int\limits_{AB^+} f(x,y)ds = \int\limits_{AB^-} f(x,y)ds$$

$\diamondsuit$

$t = a + b - \tau$.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt = -\int\limits_b^a f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt =$$

$$= \begin{bmatrix} t'_\tau = -1 & x'_\tau = x'_t \\ t'_\tau = -x'_t & y'_\tau = -y'_t \end{bmatrix} =$$

$$= -\int\limits_b^a f(x(a+b-\tau), y(a+b-\tau))\sqrt{(-\dot{x})^2(\tau)+(-\dot{y})^2(\tau)}(-1)d\tau =$$

$$= \int\limits_b^a f(x(a+b-\tau), y(a+b-\tau))\sqrt{\dot{x}^2(\tau)+\dot{y}^2(\tau)}d\tau = \int\limits_{AB^-} f(x,y)ds$$

$\blacksquare$

Свойство 11.4 (Физический смысл КРИ-1). *Если $f(x,y)$ – линейная плотность кривой, то $\int\limits_{AB} f(x,y)ds$ – масса кривой.*

Такой смысл согласуется с предыдущим свойством, ведь масса кривой не зависит от направления, в котором мы двигаемся.

Свойство 11.5 (Экономический смысл КРИ-1). *Если $f(x,y)$ – удельная стоимость провоза груза в точке (x,y), то $\int\limits_{AB^+} f(x,y)ds$ – цена провоза груза по всему пути AB^+.*

12 Криволинейный интеграл второго типа (КРИ-2)

Рассмотрим кусочно-гладкий путь AB:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Пусть на AB задана векторная функция $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ с непрерывными компонентами P и Q.

Рассмотрим разбиение $\{t_k\}_{k=0}^n \subset [a,b]$ и соответствующее ему разбиение кривой на дуги $M_{k-1}M_k$, где $M_k(x(t_k), y(t_k))$. На каждом интервале (t_{k-1}, t_k) выберем точку $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$.

Уравнение касательной в точке ξ_k:

$$\begin{cases} x = x(\xi_k) + x'(\xi_k)\tau \\ y = y(\xi_k) + y'(\xi_k)\tau \end{cases} \quad t_{k-1} - \xi_k \leqslant \tau \leqslant t_k - \xi_k$$

$(x'(\xi_k), y'(\xi_k))$ – направляющий вектор касательной.

Пусть N_{k-1} и N_k – точки из уравнения касательной при τ равном $t_{k-1} - \xi_k$ и $t_k - \xi_k$ соответственно. Рассмотрим отрезок $[N_{k-1}, N_k]$ и скалярное произведение $\vec{F}$ на направляющий вектор касательной:

$$\sigma_k = P(x(\xi_k), y(\xi_k))\dot{x}(\xi_k)\Delta t_k + Q(x(\xi_k), y(\xi_k))\dot{y}(\xi_k)\Delta t_k$$

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} P(x(\xi_k), y(\xi_k))\dot{x}(\xi_k)\Delta t_k + Q(x(\xi_k), y(\xi_k))\dot{y}(\xi_k)\Delta t_k$$

Поскольку P и Q непрерывны, а также $\dot{x}$ и $\dot{y}$ непрерывны, следовательно у интегральной суммы σ существует предел. Предел этой интегральной суммы называется называется криволинейным интегралом второго типа по пути AB.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)dt$$

Свойства КРИ-2

Свойство 12.1 (Аддитивность). *Пусть AC – составной кусочно-гладкий путь. Тогда*

$$\int\limits_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{BC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$\diamondsuit$

$$\int\limits_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^c P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^b P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)dt + \int\limits_b^c P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)dt =$$

$$= \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{BC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$\blacksquare$

Свойство 12.2 (Инверсия при смене направления пути)**.**

$$\int\limits_{AB^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{AB^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

,где AB^+ – путь от A к B, а AB^- – тот же путь в направлении от B к A.

$\diamondsuit$

$$\int\limits_{AB^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_b^a \left(P(x(a+b-t), y(a+b-t))\dot{x}(a+b-t)(-1) + Q(x(a+b-t), y(a+b-t))\dot{y}(a+b-t)(-1)\right) dt =$$

$$= [\tau = a+b-t] = -\int\limits_b^a P(x(\tau), y(\tau))\dot{x}(\tau) + Q(x(\tau), y(\tau))\dot{y}(\tau)d\tau(-1) =$$

$$= -\int\limits_a^b P(x(\tau), y(\tau))\dot{x}(\tau) + Q(x(\tau), y(\tau))\dot{y}(\tau)d\tau = -\int\limits_{AB^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$\blacksquare$

Свойство 12.3 (Замена пути)**.**

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

Рассмотрим отображение $t = \varphi(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, функция $\varphi(\tau)$ непрерывно-дифференцируемая и биективная. Путь CD задаётся системой

$$\begin{cases} x = x(\varphi(t)) = \xi(\tau), \\ y = y(\varphi(t)) = \eta(\tau) \end{cases} \quad \tau \in [\alpha, \beta]$$

Тогда

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{CD} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$\diamondsuit$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)\right) dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left(P(\xi(\tau), \eta(\tau))x'_t(\varphi(\tau)) + Q(\xi(\tau), \eta(\tau))y'_t(\varphi(\tau))\right) \varphi'(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P(\xi(\tau), \eta(\tau)) \xi'_(\tau) + Q(\xi(\tau), \eta(\tau)) \eta'(\tau) \Big) d\tau = \int\limits_{CD} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$\blacksquare$

Свойство 12.4 (Вычисление КРИ-2 кривых, заданных явно)**.** $y = f(x),\ x \in [a,b]$. *Запишем уравнение в параметрическом виде:*

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

Тогда криволинейный интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left(P(t, f(t))1 + Q(t, f(t)) \right. f'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \big(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x) \big)\, dx$$

Свойство 12.5 (Параллельность оси Oy)**.** *Если путь* AB *параллен оси* Oy*, то* $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$

$\diamondsuit$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{a}^{b} P(x(t), y(t))\dot{x}(t)dt = [\dot{x}(t) = 0] = 0$$

$\blacksquare$

Свойство 12.6. *Физический смысл КРИ-2 – работа силового поля проделанная по контуру* AB*.*

Пример 12.1. *(№4255 из учебника Демидовича) Вычислить криволинейный интеграл, взятый вдоль указанной кривой в направлении возрастания параметра:*

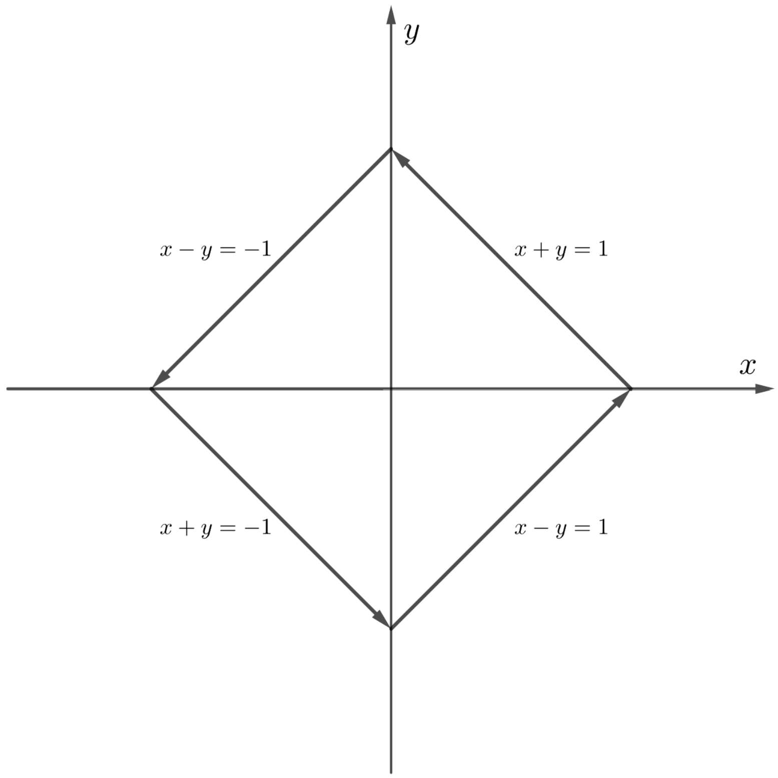
$$\int\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|},$$

где $ABCDA$ *– контур квадрата с вершинами* $A(1,0)$*,* $B(0,1)$*,* $C(-1,0)$*,* $D(0,-1)$*.*

Решение.

Воспользуемся свойством аддитивности:

$$\int\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int\limits_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int\limits_{BC} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int\limits_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int\limits_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$$



1. $$\int\limits_{AB}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\begin{bmatrix}x=1-t,\\ y=t,\\ t\in[0,1]\end{bmatrix}=\int\limits_0^1\frac{-dt+dt}{(1-t)+t}=0$$

2. $$\int\limits_{BC}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\begin{bmatrix}x=t,\\ y=1+t,\\ t \text{ от 0 до -1}\end{bmatrix}=\int\limits_0^{-1}\frac{dt+dt}{-t+(1+t)}=\int\limits_0^{-1}2dt=2t\Big|_0^{-1}=-2$$

3. $$\int\limits_{CD}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\begin{bmatrix}x=t,\\ y=-1-t,\\ t\in[-1,0]\end{bmatrix}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dt-dt}{-t-(-1+t)}=0$$

4. $$\int\limits_{DA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\begin{bmatrix}x=t,\\ y=t-1,\\ t\in[0,1]\end{bmatrix}=\int\limits_0^1\frac{dt+dt}{t-(t-1)}=\int\limits_0^1 2dt=2t\Big|_0^1=2$$

Ответ: $\displaystyle\int\limits_{ABCDA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}=0.$

13 Формула Грина

Лемма 13.1. *Пусть G – криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = \psi_1(x)$, $y = \psi_2(x)$, $\psi_1(x) \leqslant \psi_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial G^+} P\,dx = -\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

♢

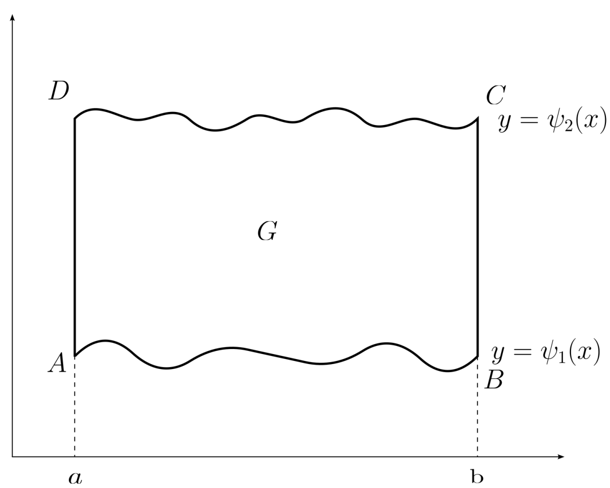


Рис. 2: криволинейная трапеция G

∂G^+ – замкнутый кусочно-гладкий путь. Разобьём его на 4 части и воспользуемся свойством 12.5.

$$\partial G^+ = AB \cup BC \cup CD \cup DA$$
$$\int\limits_{\partial G^+} P\,dx = \int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{BC} P\,dx + \int\limits_{CD} P\,dx + \int\limits_{DA} P\,dx = \int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{CD} P\,dx$$

Кривая $AB : y = \psi_1(x)$, $x \in [a, b]$, тогда $\int\limits_{AB} P\,dx = \int\limits_a^b P(x, \psi_1(x))\,dx$.

Кривая $DC : y = \psi_2(x)$, $x \in [a, b]$, тогда $\int\limits_{CD} P\,dx = -\int\limits_{DC} P\,dx = -\int\limits_a^b P(x, \psi_2(x))\,dx$

Тогда,

$$\int\limits_{\partial G^+} P\,dx = \int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{CD} P\,dx = \int\limits_a^b \left(P(x, \psi_1(x)) - P(x, \psi_2(x))\right)dx$$

С другой стороны,

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy\,\frac{\partial P}{\partial y} = \int\limits_a^b \left(P(x, \psi_2(x)) - P(x, \psi_1(x))\right)dx$$

Следовательно,
$$\int\limits_{\partial G^+} P\,dx = -\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

■

Лемма 13.2. *Пусть G – криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = a$, $y = b$, $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$, $\forall y \in [a, b]$. Тогда*
$$\int\limits_{\partial G^+} Q\,dy = \iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

♢

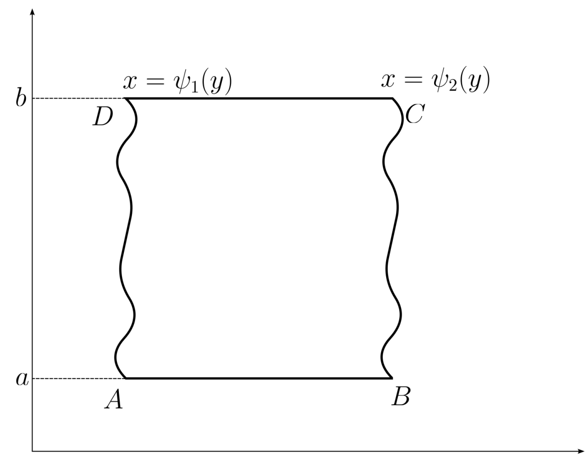


Рис. 3: криволинейная трапеция D

Аналогично предыдущей лемме, разобьём ∂G на 4 части:
$$\int\limits_{\partial G^+} Q\,dy = \int\limits_{AB} Q\,dy + \int\limits_{BC} Q\,dy + \int\limits_{CD} Q\,dy + \int\limits_{DA} Q\,dy = \int\limits_{BC} Q\,dy + \int\limits_{DA} Q\,dy$$
$$\int\limits_{BC} Q\,dy = \int\limits_a^b Q(\psi_2(y), y)\,dy$$
$$\int\limits_{DA} Q\,dy = -\int\limits_a^b Q(\psi_1(y), y)\,dy$$
Тогда $\int\limits_{\partial G^+} Q\,dy = \int\limits_{BC} Q\,dy + \int\limits_{DA} Q\,dy = \int\limits_a^b (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y))\,dy$. В свою очередь,
$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int\limits_a^b dy\,(Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y))$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\partial G^+} Q\,dy = \iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

■

Определение 13.1. *Область D называется составной, если её можно разбить на конечное число элементарных криволинейных трапеция относительно Ox, а также можно разбить на конечное число элементарных криволинейных трапеций относительно Oy*

Теорема 13.1 (формула Грина для составных областей)**.** *Пусть D – составная область, а её граница ∂D – простая кусочно-гладкая кривая.*

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ определены и непрерывно-дифференцируемы на $\overline{D}$. Тогда

$$\int\limits_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

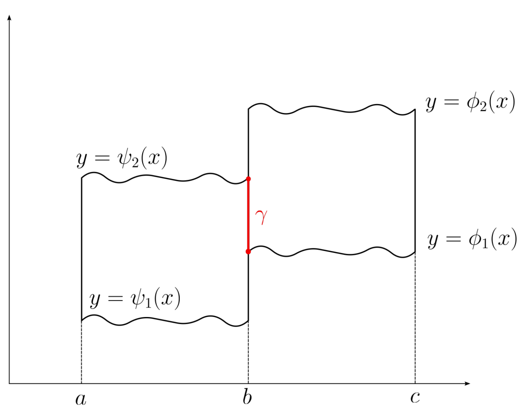
♢

Пусть $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ и $D = \bigcup\limits_{j=1}^{m} Y_j$, где X_i и Y_j – криволинейные трапеции, элементарные относительно Ox и Oy.

По лемме 13.1, $\forall i$:

$$\int\limits_{\partial X_i^+} P\,dx = -\iint\limits_{X_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Рассмотрим две касающиеся X_i и X_j:



Участок γ, на котором они касаются, считается в X_i в положительном направлении, а в X_j – в отрицательном (или наоборот). Таким образом,

$$\int\limits_{\partial (X_i \cup X_j)^+} P\,dx = \int\limits_{\partial X_i^+} P\,dx + \int\limits_{\partial X_j^+} P\,dx - \int\limits_{\gamma^+} P\,dx - \int\limits_{\gamma^-} P\,dx =$$

$$= \left[\int\limits_{\gamma^+} P\,dx = -\int\limits_{\gamma^-} P\,dx\right] = \int\limits_{\partial X_i^+} P\,dx + \int\limits_{\partial X_j^+} P\,dx$$

В свою очередь двойной интеграл

$$\iint\limits_{X_i \cup X_j} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \iint\limits_{X_i} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy + \iint\limits_{X_j} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\partial D^+} P\, dx = \int\limits_{\partial\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^+} P\, dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{\partial X_i} P\, dx \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\iint\limits_{X_i} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \right) = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

Аналогичным образом, рассматривая разбиение $\bigcup\limits_{j=1}^{m} Y_j$, и используя лемму 13.2, доказывается, что

$$\int\limits_{\partial D^+} Q\, dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$$

Объединив полученные результаты, получаем

$$\int\limits_{\partial D^+} P\, dx + Q\, dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$\blacksquare$

Определение 13.2. *$q-$окрестностью кривой l по оси Ox будем называть множество точек $\{X(x, y) : \exists Y(x_0, y_0) \in l,\ |x - x_0| \leqslant q\}$. Обозначать будем $B_x(l, q)$. Аналогичным образом введём и $B_y(l, q)$.*

Определение 13.3. *$q-$окрестностью кривой l по обеим осям будем называть $B_{xy}(l, q) = B_x(l, q) \cap B_y(l, q)$*

Теорема 13.2 (формула Грина для произвольных областей)**.** *. Пусть D – ограниченная замкнутая область, $C = \partial D$ – простая кусочно-гладкая кривая, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – функции, непрерывно дифференцируемые на $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint\limits_{C} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$\diamondsuit$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку P, Q – непрерывные функции на $\overline{D}$,

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall X \in C\ \forall Y \in \mathbb{R}^2\ \rho(X, Y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |P(X) - P(Y)| \leqslant \varepsilon \wedge |Q(X) - Q(Y)| < \varepsilon$$

Если вдруг $\delta(\varepsilon)$ окажется больше чем ε, то возьмём $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Если $\delta(\varepsilon)$ окажется больше чем 1, то возьмём $\delta(\varepsilon) = 1$.

Рассмотрим $B_{xy}(C, \delta(\varepsilon))$. Впишем в D простую фигуру Π так, чтобы $\partial\Pi \subset B_{xy}(l, \delta(\varepsilon))$.

Обозначим C' границу $\partial\Pi$. Поскольку Π – простая фигура, C' можно представить как объединение горизонтальных и вертикальных отрезков,

$$C' = C'_x \cup C'_y,\ C'_x = C'_{x1} \cup \dots \cup C'_{xn},\ C'_y = C'_{y1} \cup \dots \cup C'_{yn}$$

При этом любому участку C'_{xi} можно сопоставить участок контура C, C_{xi}, такой что C'_{xi} – проекция C_{xi} на ось Ox (таких участков будет как минимум 2, один рядом с C'_{xi}, а другой – на противоположной стороне контура. Выбираем тот, что ближе). Аналогично и для C'_{yi}.

Мы хотим, чтобы $C = C_{x1} \cup \dots \cup C_{xn} = C_{y1} \cup \dots \cup C_{ym}$. Пусть D вписана в прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$. Если контур C' ограничен этим же прямоугольником, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда это неверно. Пусть, например, $a' = \inf\limits_{X(x,y) \in C'} x > a$. Поскольку $D \cup C$ замкнуто, существует $X_0(a, y_0) \in C$. Тогда рассмотрим точку $Y_0(x_0, y_0)$ на C'. Дополним C' добавив два горизонтальных отрезка X_0Y_0 и Y_0X_0. Проделав так для всех четырёх направлений получим, что утверждение выполняется.

Теперь рассмотрим некоторый отрезок C'_{xi} и $\int\limits_{C'_{xi}} Pdx + Qdy$. Поскольку отрезок горизонтальный, $dy = 0$ и $\int\limits_{C'_{xi}} Pdx + Qdy = \int\limits_{C'_{xi}} Pdx$. Рассмотрим разность интегральных сумм для криволинейных интегралов $\int\limits_{C'_{xi}} Pdx$ и $\int\limits_{C_{xi}} Pdx$ с разбиением C'_{xi}, соответствующим разбиению C_{xi}, перенесённому параллельно Oy. Исходя из выбора C'_{xi}, этот отрезок принадлежит $B_y(C_{xi}, \delta(\varepsilon))$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{s} P(X'_k)\Delta_k - \sum_{k=1}^{s} P(X_k)\Delta_k = \sum_{k=1}^{s}(P(X'_k) - P(X_k))\Delta_k < \varepsilon \cdot \text{дл.}C'_{xi}$$

Устремив диаметр разбиений к 0, получаем,

$$\int\limits_{C'_{xi}} Pdx - \int\limits_{C_{xi}} Pdx < \varepsilon \cdot \text{дл.}C'_{xi}$$

Просуммировав эти разности для всех i от 1 до n получаем

$$\int\limits_{C'_x} Pdx - \int\limits_{C} Pdx < \varepsilon 2(b - a)$$

Аналогичным образом рассмотрев C'_y получаем

$$\int\limits_{C'_y} Qdy - \int\limits_{C} Qdy < \varepsilon 2(d - c)$$

Поскольку $\int\limits_{C'_y} Pdx = \int\limits_{C'_x} Qdy = 0$, получаем

$$\oint\limits_{C'} Pdx + Qdy - \oint\limits_{C} Pdx + Qdy < \varepsilon 2((b - a) + (d - c))$$

Поскольку пл.$B_{xy}(C, \delta(\varepsilon)) \leqslant (2\delta(\varepsilon))^2$дл.$C$, разность площадей D и D' не превосходит $4\delta(\varepsilon)^2$дл.C. Поскольку функции P'_y и Q'_x непрерывны на D, они ограничены по модулю каким-то значением A, следовательно

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - \iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \leqslant 2A\text{пл.}(D \setminus D') \leqslant 8A\delta(\varepsilon)^2\text{дл.}C$$

Поскольку D' - составная область, для неё и C' выполняется формула Грина (теорема 13.1). Соберём все полученные неравенства вместе

$$\left|\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\right| = \left[\oint\limits_{C'} \ldots = \iint\limits_{D'} \ldots\right] =$$

$$= \left|\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \oint\limits_{C'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \oint\limits_{C'} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right| +$$

$$+ \left|\iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon 2((b-a) + (d-c)) + 8A\delta(\varepsilon)^2\text{дл.}C \leqslant \left[\delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon \text{ и } \delta(\varepsilon)^2 \leqslant \delta(\varepsilon)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(2(b-a) + 2(d-c) + 8A\text{дл.}C)$$

Поскольку $(2(b-a) + 2(d-c) + 8A\text{дл.}C)$ не зависит от ε, при $\varepsilon \to 0$, $rhs \to 0$. Так как неравенство верно для любого ε, получаем

$$\left|\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\right| = 0$$

$$\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

■

Выражение площадей через КРИ-2

Пусть D – область, ограниченная кусочно-гладкой кривой ∂D. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ таковы, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \forall (x, y) \in D$. Тогда,

$$\text{пл.}D = \iint\limits_D 1\, dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

В частности, если положить P и Q равными $P(x, y) = x,\ Q(x, y) = 0$, получаем:

$$\text{пл.}D = \int\limits_{\partial D^+} xdy$$

Теперь вспомним про лемму из параграфа 9, доказательство которой мы отложили до этого момента.

Лемма 13.3. *Пусть E – ограниченная замкнутая область с простой кусочно-гладкой границей ∂E, а*

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad \text{– диффеоморфизм из } E \text{ в } D.$$

Тогда $\exists (\overline{u}, \overline{v}) \in E$ такая, что

$$\text{пл.}D = |I(\overline{u}, \overline{v})| \text{пл.}E$$

, где $I(u, v)$ – Якобиан диффеоморфизма $\binom{\varphi}{\psi}$.

$\diamondsuit$

Проведём доказательство для частного случая $\psi''_{uv} = \psi''_{vu}$.

Пусть

$$\partial E^+ : \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Тогда

$$\partial D = L : \begin{cases} x = \varphi(u(t), v(t)) \\ y = \psi(u(t), v(t)) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Пусть L^+ – путь на кривой L. Если при движении по данной кривой при возрастании t фигура D остается слева, то $\partial D^+ = L^+$, иначе $\partial D^+ = L^-$. Посчитаем площадь D:

$$\text{пл.}D = \iint\limits_D 1\, dxdy = \int\limits_{\partial D^+} xdy = \left|\int\limits_{L^+} xdy\right| = \left|\int\limits_a^b \varphi(u(t), v(t))(\psi'_u(u(t), v(t))u'(t) + \psi'_v(u(t), v(t))v'(t))\, dt\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\partial E^+} \varphi(u, v)\psi'_u(u, v)du + \varphi(u, v)\psi'_v(u, v)dv\right|$$

По формуле Грина 13.2, приняв $P(u, v) = \varphi(u, v)\psi'_u(u, v)$, а $Q(u, v) = \varphi(u, v)\psi'_v(u, v)$,

$$\text{пл.}D = \left|\iint\limits_E \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) dudv\right| =$$

$$= \left[\frac{\partial Q}{\partial u} = \varphi'_u\psi'_v + \varphi\psi''_{vu};\ \frac{\partial P}{\partial v} = \varphi'_v\psi'_u + \varphi\psi''_{uv};\ \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \varphi'_u\psi'_v - \varphi'_v\psi'_u = I(u,v)\right] =$$

$$= \left|\iint\limits_E I(u,v)\,dudv\right| = \iint\limits_E |I(u,v)|\,dudv$$

По теореме о среднем 6.3 $\exists(\overline{u},\overline{v}) \in E$:

$$\iint\limits_E |I(u,v)|\,dudv = |I(\overline{u},\overline{v})|\,\text{пл.}E$$

Таким образом,

$$\text{пл.}D = |I(\overline{u},\overline{v})|\text{пл.}E$$

$\blacksquare$

14 Условия независимости КРИ-2 от пути интегрирования. Вычисление площадей через КРИ-2

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$, $A(x_0,y_0) \in D$, $B(x,y) \in D$. $\int\limits_{AB^+} Pdx+Qdy$ в общем случае зависит не только от (x,y), поскольку также имеет значение путь AB. Покажем, когда интеграл будет функцией от (x,y), то есть, когда КРИ-2 не зависит от пути интегрирования.

Лемма 14.1 (о ломаной)**.** *Любые две точки A и B в области $D \subset \mathbb{R}^2$ можно соединить ломаной, содержащейся в D.*

$\diamondsuit$

Рассмотрим произвольные $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2) \in D$. D – область, то есть связное множество. Следовательно, существует кривая l, целиком содержащаяся в D.

Поскольку кривая l – компакт, её можно покрыть кругами, целиком содержащимися в D. Выберем конечное покрытие и проведём ломаную по точкам пересечения.

$\blacksquare$

Определение 14.1. *Область D называют односвязной, если для любой простой замкнутой кривой γ, содержащейся в D, область E, которую ограничивает кривая γ, целиком лежит в D.*

Теорема 14.1 (о независимости КРИ-2 от пути интегрирования)**.** *Пусть область D односвязна, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы на D. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Для любого замкнутого ломаного пути $L^+ \subset D$ интеграл $\oint\limits_{L^+} P\,dx + Q\,dy$ равен нулю;*
2. *Для $\forall A, B \in D$ интеграл $\int\limits_{AB^+} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от лежащего в D ломаного пути AB.*

3. Существует непрерывно дифференцируемая функция $u(x,y)$ такая, что

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \forall (x,y) \in D;$$

4. Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют условию Эйлера:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in D$$

$\diamondsuit$

Доказательство проведём, доказав цепочку следствий: 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 1.

(1) $\Rightarrow$ (2):

Рассмотрим два произвольных ломаных пути l_1 и l_2. Тогда

$$\int\limits_{l_1^+} Pdx + Qdy - \int\limits_{l_2^+} Pdx + Qdy = \int\limits_{l_1^+} Pdx + Qdy + \int\limits_{l_2^-} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{l_1^+ \cup\, l_2^-} Pdx + Qdy = [\text{поскольку } l_1^+ \cup l_2^- - \text{замкнутый путь}] = 0$$

$$\int\limits_{l_1^+} Pdx + Qdy = \int\limits_{l_2^+} Pdx + Qdy$$

(2) $\Rightarrow$ (3):

Пусть $A = (x_0, y_0)$ – произвольная фиксированная точка, а $B = (x, y)$ – точка из D. Тогда интеграл $\int\limits_{AB^+} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования, следовательно определена функция:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy, \quad AB^+ \in D$$

Пусть $B(x + \Delta x, y)$. Тогда частичное приращение $\Delta_x u$ функции $u(x,y)$:

$$\Delta_x u = u(x + \Delta x, y) - u(x,y) = \int\limits_{AB_1^+} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{AB^+} P\,dx + Q\,dy$$

Соединим точки $(x_0, y_0), (x, y)$ некоторым ломаным путём l, а $(x_0, y_0), (x + \Delta x, y)$ так, чтобы $AB_1 = l \cup BB_1$, где BB_1 – путь, параллельный O_x и соединяющий B и B_1. Тогда, по свойству аддитивности КРИ-2 12.1,

$$\Delta_x u = \int\limits_{BB_1^+} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{BB_1^+} P\,dx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(\tau, y)\,d\tau$$

По теореме о среднем:

$$\Delta_x u = \Delta x P(x + \theta \Delta x, y) \quad 0 < \theta < 1$$

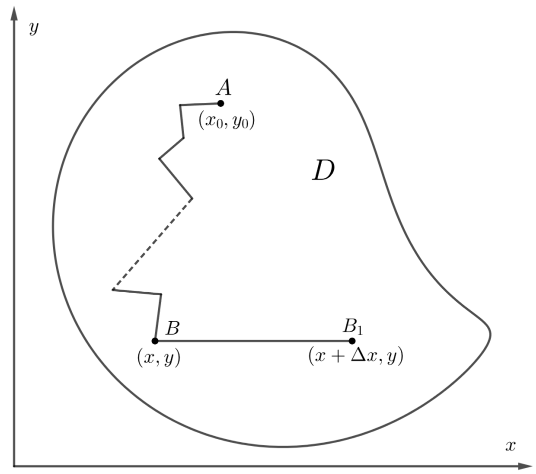


Рис. 4: Путь AB_1^+

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y) \quad 0 < \theta < 1$$

Переходя к пределу $\Delta x \to 0$ в последнем равенстве,

$$u'_x(x, y) = P(x, y), \quad u'_y(x, y) = Q(x, y)$$

Следовательно,

$$du = u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

(3) $\Rightarrow$ (4):

По теореме о смешанных производных 4.1 :

$$P'_y = u''_{xy} = u''_{yx} = Q'_x \quad \forall (x, y) \in D$$

(4) $\Rightarrow$ (1):

Пусть L^+ – простой ломаный замкнутый путь. Множество, которое описывает ломаная L^+ есть некая составная фигура E. По формуле Грина 13.2, так как $E \subset D$ и D - односвязанная, имеем

$$\int\limits_{L^+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_E 0\,dxdy$$

$$\int\limits_{L^+} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

■

Следствие 14.1. *Пусть область D односвязна, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы на D. Если выполняется хотя бы одно из условий (1) – (4), то* $\int\limits_{AB^+} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ *не зависит от кусочно-гладкого пути AB.*

$\diamondsuit$
Пусть L^+ – кусочно-гладкий путь, который соединяет точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$

$$L^+ : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Тогда,

$$\int\limits_{L^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left(P(x(t),y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t))\dot{y}(t)\right)\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left(u'_x(x(t),y(t))x'(t) + u'_y(x(t),y(t))y'(t)\right)\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b u(x(t),y(t))'_t\,dt = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0)$$

$\blacksquare$

Замечание 14.1. *Если D не является односвязной, то теорема о независимости КРИ-2 от пути интегрирования в общем случае не верна.*

Замечание 14.2. *Функцию $u(x,y)$, где $du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \quad \forall (x,y) \in D$, называют первообразной для выражения $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, следовательно, из теоремы:*

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(\xi,\eta)\,d\xi + Q(\xi,\eta)\,d\eta, \quad \forall (x_0,y_0) \in D$$

Замечание 14.3. *Если для $\forall (x,y) \in D$, существует ломаная, принадлежащая D, соединяющая $(x_0,y_0) \in D$ и (x,y), и состоящая из двух отрезков, один из которых параллелен O_x, а второй – O_y, то*

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\tau,y_0)\,d\tau + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\psi)\,d\psi,$$

Связь между КРИ-1 и КРИ-2

Теорема 14.2 (о связи КРИ-1 и КРИ-2)**.** *Пусть $l = AB$ – простая и гладкая кривая, $\vec{F}(x,y)$ – функция, непрерывная во всех точках l, представимая как $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Пусть $\alpha(x,y)$ – угол между осью Ox и касательной к l в точке (x,y). Тогда*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} (P(x,y)cos\alpha(x,y) + Q(x,y)sin\alpha(x,y))ds$$

$\diamondsuit$

По определению ds,

$$ds := \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\ dt \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \Leftrightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Таким образом, $ds = |\vec{d}|$, где $\vec{d}$ – вектор (dx, dy). Рассмотрим вектор $\vec{i} = (1, 0)$ и скалярное произведение $(\vec{d}, \vec{i})$:

$$1dx + 0dy = (\vec{d}, \vec{i}) = |\vec{d}||\vec{i}|cos\alpha(x, y)$$

$$dx = cos\alpha(x, y)ds$$

Аналогичным образом рассмотрев вектор $\vec{j} = (0, 1)$ получаем

$$dy = sin\alpha(x, y)ds$$

Подставив получившиеся выражения в формулу КРИ-2 получим:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} P(x, y)cos(\alpha(x, y))ds + Q(x, y)sin(\alpha(x, y))ds =$$

$$= \int\limits_{AB} \left(P(x, y)cos\alpha(x, y) + Q(x, y)sin\alpha(x, y)\right) ds$$

Тем не менее, данное доказательство идейное и не очень строгое. Не ясно, на каких основаниях можно просто подставить дифференциал в интеграл и получить уже другой интеграл. Лигетимизируем данное действие с помощью приведения к определённому интегралу.

Как было показано ранее, $dx = cos\alpha(x(t), y(t))ds,\ dy = sin\alpha(x(t), y(t))ds$. Тогда поделив на dt

$$\dot{x}(t) = cos\alpha(t)\frac{ds}{dt} = cos\alpha(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \quad \dot{y}(t) = sin\alpha(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Рассмотрим КРИ-2 и распишем его через определённый интеграл:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_a^b (P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t))dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t))cos\alpha(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} + Q(x(t), y(t))sin\alpha(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\right) dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left(P(x(t), y(t))cos\alpha(t) + Q(x(t), y(t))sin\alpha(t)\right) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int\limits_{AB} (P(x, y)cos\alpha(x, y) + Q(x, y)sin\alpha(x, y))ds$$

$\blacksquare$

Следствие 14.2. *Пусть* $M = \max\limits_C \sqrt{P^2+Q^2}$. *Тогда верна следующая оценка:*

$$\left|\int\limits_C Pdx + Qdy\right| \leqslant M\,\text{дл.}C$$

$\diamondsuit$ Воспользуемся заменой и перейдем от КРИ-2 к КРИ-1:

$$\left|\int\limits_C Pdx + Qdy\right| = \left|\int\limits_C (P\sin\alpha + Q\cos\alpha)ds\right| \leqslant \int\limits_C |P\sin\alpha + Q\cos\alpha|\,ds$$

Из неравенства Коши-Буняковского:

$$(P\sin\alpha + Q\cos\alpha)^2 \leqslant P^2 + Q^2$$

$$|P\sin\alpha + Q\cos\alpha| \leqslant \sqrt{P^2+Q^2}$$

поскольку $M = \max\limits_C \sqrt{P^2+Q^2}$, получаем, что $|P\sin\alpha + Q\cos\alpha| \leqslant M$.

$$\int\limits_C |P\sin\alpha + Q\cos\alpha| ds \leqslant \int\limits_C M ds = M\text{дл.}C$$

$\blacksquare$

Пример 14.1. *Оценить*

$$I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

$\diamondsuit$

Исходя из следствия:

$$\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2} \leqslant LM$$

где $M = max\sqrt{P^2+Q^2}$ и L – длина окружности $x^2+y^2=R^2$.

$$P = \frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2},\; Q = \frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$$

Найдём сумму P^2+Q^2:

$$P^2+Q^2 = \frac{y^2+x^2}{(x^2+xy+y^2)^4} = \frac{R^2}{(x^2+xy+y^2)^4}$$

Покажем, что $x^2+xy+y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Действительно,

$$(x+y)^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2+2xy > 0 \Rightarrow 2x^2+2xy+2y^2 > x^2+y^2 \Rightarrow x^2+xy+y^2 > \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Тогда

$$\frac{R^2}{(x^2+xy+y^2)^4} \leqslant \frac{R^2}{\frac{1}{16}(x^2+y^2)^4} = \frac{R^2}{\frac{1}{16}R^8} = \frac{16}{R^6}$$

Получаем, что

$$M = \sqrt{\frac{16}{R^6}} = \frac{4}{R^3}$$

Тогда, исходя из следствия выше,

$$I_R \leqslant LM = 2\pi R\frac{4}{R^3} = \frac{8\pi}{R^2}$$

Поскольку $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{8\pi}{R^2} = 0$, $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$

■

15 Непрерывные и дифференцируемые векторные функции

Определим векторные функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ – пространство столбцов.

$$f(x) = f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

Задание векторной функции f равносильно заданию m скалярных функций от n переменных $y_i = f_i(x_1,\dots,x_n), i = \overline{1,m}$.

Определение 15.1. *Вектор $A \in R^m$ называется пределом векторной функции $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке $x_0 \in D$, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in D:\ 0 < \rho(x,x_0) \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho(f(x),A) \leqslant \varepsilon$$

Определение 15.2. *Функция $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D$, если*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Теорема 15.1 (о непрерывности векторной функции)**.** *Векторная функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда все её компоненты $f_i(x), i = \overline{1,m}$ непрерывны в точке x_0.*

♢

Достаточность. Если все компоненты $f_i(x), i = \overline{1,m}$ векторной функции непрерывны в точке x_0, то

$$\forall i = \overline{1,m}\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_i(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in D\ 0 < \rho(x,x_0) \leqslant \delta_i(\varepsilon) \Rightarrow \rho(f_i(x), f_i(x_0)) \leqslant \varepsilon$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon),\dots,\delta_m(\varepsilon)\}$. Тогда

$$\rho(x,x_0) \leqslant \delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x_0)) = \sqrt{(f_1(x)-f_1(x_0))^2 + \dots + (f_m(x)-f_m(x_0))^2} \leqslant \sqrt{m}\varepsilon$$

Следовательно,
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
Обратное утверждение очевидно следует из определения предела и того факта, что $\forall i = \overline{1, n}\ \rho(x_i, x_{0i}) \leqslant \rho(x, x_0)$.

$\blacksquare$

Определение 15.3. *Функция $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемой в точке $x_0 \in D$, если существует матрица $A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такая, что*
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta\|x\| \to 0$$

Тогда, дифференциал функции f
$$df = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n \end{pmatrix} = \frac{df}{dx} dx$$

Определение 15.4. *Матрица $\frac{df}{dx}$ называется матрицей Якоби.*

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна $\Leftrightarrow \forall f_i$ непрерывна
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема $\Leftrightarrow \forall f_i$ дифференцируема

16 Матрица Якоби сложной векторной функции

Пусть заданы функции $y = F(x) : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $F(D) = E$; $z = G(y) : E \to \mathbb{R}^k$. Можно построить сложную векторную функцию $H(x) = G(F(x)),\ H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Теорема 16.1 (о матрице Якоби сложной векторной функции)**.** *Пусть функция $F(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $G(x)$ дифференцируема в точке $y_0 = F(x_0)$. Тогда $H(x) = G(F(x))$ дифференцируема в точке x_0, а матрица Якоби*
$$\left.\frac{dH}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \cdot \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0}$$

$\diamondsuit$

$$\Delta y = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(\|\Delta x\|)$$
$$\Delta z = G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \Delta y + o(\|\Delta y\|)$$

Если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.
$$\Delta H = H(x_0 + \Delta x) - H(x_0) = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \left(\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(\|\Delta x\|) \right) + o(\|\Delta y\|) =$$
$$= \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(\|\Delta x\|) + o\left(\left\| \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(\|\Delta x\|) \right\| \right)$$

Так как $||a+b|| \leqslant ||a|| + ||b||$,

$$\Delta H = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(\|\Delta x\|) + o\left(\left\| \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x \right\|\right) + o(\|\Delta x\|) = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} \Delta x + o(\|\Delta x\|)$$

Таким образом,

$$\left.\frac{dH}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dG}{dy}\right|_{y_0} \cdot \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0}$$

■

Инвариантность формы первого дифференциала

Найдем dz в двух случаях:

- $y = F(x),\ x$ – независимый аргумент. Тогда

$$dy = \frac{dF}{dx} dx$$

- $y = F(x),\ x = x(t)$. Тогда

$$dy = \left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt}\right) dt = \frac{dF}{dx}\left(\frac{dx}{dt}dt\right) = \left[\frac{dx}{dt}dt = dx\right] = \frac{dF}{dx}dx$$

Пример 16.1.

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix},\ G(y) = \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \\ g_3(y_1, y_2) \end{pmatrix},\ g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$H(x) = G(F(x))$. $\dfrac{dH}{dx}$ – *?*

♢
$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Размерность сходится, $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dF}{dx}$$

$$\frac{dF}{dx} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x1 \end{pmatrix}, \quad \frac{dG}{dy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial y_1} & \frac{\partial g_3}{\partial y_2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dH}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}2x_1 + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}x_2 & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}2x_2 + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}x_1 \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}2x_1 + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}x_2 & \frac{\partial g_2}{\partial y_1}2x_2 + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}x_1 \\ \frac{\partial g_3}{\partial y_1}2x_1 + \frac{\partial g_3}{\partial y_2}x_2 & \frac{\partial g_3}{\partial y_1}2x_2 + \frac{\partial g_3}{\partial y_2}x_1 \end{pmatrix}$$

■

17 Дифференциалы высших порядков векторной функции

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$df = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n \end{pmatrix} = \frac{df}{dx} dx$$

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f$$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \right) f$$

Определим матрицу Гессе – $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$d^2 f = dx^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx$$

Пусть теперь $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Для скалярной функции дифференциалы высших порядков – числа. Для векторной – вектора.

$$d^2 f = \begin{pmatrix} d^2 f_1 \\ \vdots \\ d^2 f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx^T \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} dx \\ \vdots \\ dx^T \dfrac{\partial^2 f_m}{\partial x^2} dx \end{pmatrix}$$

Дифференциалы высших порядков определяются реккурентно, $d^n f = d(d^{n-1} f)$. Введённые соотношения позволяют определить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \left. \frac{df}{1!} \right|_{x_0} + \dots + \left. \frac{d^k f}{k!} \right|_{x_0} + \left. \frac{d^{k+1} f}{(k+1)!} \right|_{x_0 + \theta \Delta x}$$

18 Теорема о неявной векторной функции

Пусть задано уравнение $F(x,y)=0,\ F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$.

$$\begin{cases} f_1(x_1\dots x_n, y_1\dots y_m)=0\\ f_2(x_1\dots x_n, y_1\dots y_m)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_m(x_1\dots x_n, y_1\dots y_m)=0\end{cases}$$

В этой системе $m+n$ аргументов и m уравнений. Матрица Якоби уравнения F представима в виде блочной матрицы:

$$\frac{dF}{d(x,y)}=\left[\frac{\partial F}{\partial x}\middle|\frac{\partial F}{\partial y}\right],\quad \frac{\partial F}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}\end{bmatrix}$$

Что значит, что F задаёт неявную функцию? Выделим параллелепипеды

$$\Pi_x=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$$

$$\Pi_y=[c_1,d_1]\times\dots\times[c_m,d_m]$$

Пусть $\Pi=\Pi_x\times\Pi_y\subset\mathbb{R}^{n+m}$.

Определение 18.1. *Уравнение $F(x,y)=0$ задаёт неявную функцию $y=\varphi(x)$ в параллелепипеде Π, если $\forall x\in\Pi_x\ \exists! y\in\Pi_y : F(x,y)=0$.*

Теорема 18.1 (о неявной векторной функции)**.** *Пусть задано уравнение $F(x,y)=0$, $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ и для точек $x_0\in\mathbb{R}^n,\ y_0\in\mathbb{R}^m$ выполняются следующие условия:*

1. $F(x_0,y_0)=0$.
2. *F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0,y_0)*
3. $\det\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0$

Тогда существует параллелепипед $\Pi\subset\mathbb{R}^{n+m}$, $(x_0,y_0)\in\Pi$, в котором уравенение F задает неявную непрерывно дифференцируемую функцию $y=\varphi(x)$, матрица Якоби которой

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

$\diamondsuit$

Доказательство проведем методом математической индукции по m:

База индукции: $m=1$ и $F(x_1\dots x_n,y_1)=0$. При $n=1$ верно по теореме о неявной скалярной функции 5.1. При $n>1$ теорема о неявной скалярной функции доказывается аналогичным образом. Таким образом база индукции верна.

Предположим, утверждение теоремы выполняется для $m = \overline{1, m-1}$. Докажем его для m.

Рассмотрим

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}, \quad \det \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} \neq 0$$

Поскольку $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} \neq 0$, $\exists$ ненулевой минор порядка $m-1$ не равный нулю. Не нарушая общности, пусть он расположен в правом нижнем углу, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_2(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) = 0 \end{cases}$$

Так как $\Delta \neq 0$ и функции $f_2, \dots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m)$, то выполняется предположение индукции для $(m-1)$, то есть система однозначно разрешима относительно $y_2 \dots y_m$:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x_1 \dots x_n, y_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = \varphi_m(x_1 \dots x_n, y_1) \end{cases}$$

Найденное решение подставим в исходное уравнение $F(x_0, y_0) = 0$:

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n, y_1, \varphi_2(x_1 \dots x_n, y_1) \dots \varphi_m(x_1 \dots x_n, y_1)) \equiv g(x_1 \dots x_n, y_1) \\ f_2(x_1 \dots x_n, y_1, \varphi_2(x_1 \dots x_n, y_1) \dots \varphi_m(x_1 \dots x_n, y_1)) \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1 \dots x_n, y_1, \varphi_2(x_1 \dots x_n, y_1) \dots \varphi_m(x_1 \dots x_n, y_1)) \equiv 0 \end{cases}$$

Продифференцируем каждое соотношение по y_1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f_1}{y_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \dots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} = \dfrac{\partial g}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f_2}{y_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \dots + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f_m}{y_2} \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \dots + \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} = 0 \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричном виде:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

По условию теоремы $\det \frac{\partial F}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} \neq 0$, то есть система уравнений невырожденная. Если $\frac{\partial g}{\partial y_1}|_{(x_0,y_0)} = 0$, то система однородная и имеет единственное решение (нулевое). Тем не менее, $1 \neq 0$ – противоречие. Следовательно, $\frac{\partial g}{\partial y_1}|_{(x_0,y_0)} \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$g(x_1 \dots x_n, y_1) = 0$$

Поскольку $\frac{\partial g}{\partial y_1}|_{(x_0,y_0)} \neq 0$, оно однозначно разрешимо относительно y_1 (см. случай $m = 1$ этой теоремы), то есть $\exists! \varphi_1(x_1 \dots x_n)$. Тогда получаем, что $(y_1 \dots y_m)$ можно выразить следующим образом:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1 \dots x_n) \\ y_2 = \varphi_2(x_1 \dots x_n, \varphi_1(x_1 \dots x_n)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = \varphi_m(x_1 \dots x_n, \varphi_1(x_1 \dots x_n)) \end{cases}$$

Иными словами, получаем, что $y = \varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix}$ – решение исходного уравнения, то есть $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$.

При этом все φ_i – непрерывно-дифференцируемы. Продифференцируем это тождество по x. Получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

А поскольку $\det \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, и существует обратная ей матрица, получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$$

■

19 Матрица Якоби обратной векторной функции

Рассмотрим функцию $x = g(y)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Теорема 19.1. *Пусть* $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $x_0 = g(y_0)$, *а функция* $g(y)$ *непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* y_0 *и при этом* $\det \left.\frac{dg}{dy}\right|_{y_0} \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки x_0 $\exists!$ *обратная к* g *непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки* x_0 *функция* $y = f(x)$, *причём*

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \left.\frac{dg}{dy}\right|_{y_0} = E$$

$\diamondsuit$

Рассмотрим функцию $F(x, y) = g(y) - x$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Тогда $F(x_0, y_0) = g(y_0) - x_0 = 0$. Функция F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

$$\det \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = \det \left.\frac{dg}{dy}\right|_{y_0} \neq 0$$

Тогда по теореме о неявной векторной функции 18.1, существует функция $y = f(x)$ такая, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки x_0.

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

$$g(f(x)) \equiv x$$

Следовательно, функция f является обратной к g. При этом, как было показано в предыдущем параграфе,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{df}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{df}{dx} = -(-E) = E$$

А поскольку $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dg}{dy}$,

$$\frac{dg}{dy} \cdot \frac{df}{dx} = E$$

$$\frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dy} = E$$

$\blacksquare$

20 Признаки зависимости и независимости системы функций

Рассмотрим систему функций $\{f_i(x)\}$, $i = \overline{1, m}$, где $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, m}$.

Определение 20.1. *Система функций* $\{f_i(x)\},\ i=\overline{1,m}$ *называется зависимой на множестве* D*, если среди них найдётся такая функция* f_m*, и существует непрерывно дифференцируемая функция* $\Phi : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, такая что*

$$f_m(x) = \Phi\left(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)\right)\ \forall x \in D$$

В противном случае систему $\{f_i(x)\}, i=\overline{1,m}$*, называют независимой на* D.

Далее будем считать, что f_i – непрерывно дифференцируемые функции.
Построим векторную функцию $y\ =\ F(x):\ G \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

$$F(x)\ =\ \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим систему, состоящую из m линейных функций $y_i = f_i(x),\ i=\overline{1,m}$.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Построим матрицу Якоби для функции $F(x)$.

$$\frac{dF}{dx}\ =\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\ =\ A$$

Теорема 20.1 (Критерий зависимости системы линейных функций)**.**
Система линейных функций $\{f_i(x)\},\ i=\overline{1,m}$ *зависима тогда и только тогда, когда* $rank\ A < m$

$\diamondsuit$
Пусть $rank\ A < m$. Тогда, не теряя общности, m-ю строку можно выразить через остальные, то есть

$$y_m = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{m-1} y_{m-1}$$

Теперь пусть система $\{f_i(x)\},\ i=\overline{1,m}$ зависима, тогда $f_m(x) = \Phi\left(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)\right)\ \forall x \in D$. Предположим, что $rank\ A = m$. Тогда рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} f_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{m-1}(x) = a_{m-11}x_1 + a_{m-12}x_2 + \ldots + a_{m-1n}x_n = 0 \\ f_m(x) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a \end{cases}$$

Она разрешима, поскольку определитель матрицы не равен нулю. Следовательно,
$a = f_m(x) = \Phi\left(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)\right) = \Phi(0, 0, \ldots, 0),\ \forall a \in \mathbb{R}$. Что, конечно, является противоречием.

$\blacksquare$

Теорема 20.2 (Признак независимости функций)**.** *Если*

$$rank\left(\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0}\right) = m$$

в некоторой точке $x_0 \in D$*, то совокупность функций* $f_i(x),\ i = \overline{1, m}$*, независима на* D*.*

$\diamondsuit$

Поскольку ранг матрицы равен m, существует минор I порядка m (не нарушая общности, пускай это левый верхний угловой минор), не равный нулю:

$$I \ = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \neq 0$$

Предположим, что система зависима, то есть существует непрерывно дифференцируемая функция Φ такая, что

$$\Phi(f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)) - f_m(x) = 0 \, \forall x \in D$$

Продифференцировав последнее тождество по $x_1,\ \dots,\ x_m$ и положив $x = x_0$, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}}\dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} + \dots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}}\dfrac{\partial f_{m-1}}{\partial x_m} - \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} = 0. \end{cases}$$

Это равенство можно записать как систему линейных уравнений:

$$I \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку $\det I \neq 0$, то существует единственное решение – нулевое:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0,\ \dots,\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}} = 0,\ -1 = 0$$

Тем не менее, $-1 \neq 0$. Получаем противоречие с предположением о зависмости системы $f_i(x)$. Следовательно, $f_i(x)$ независима на D.

$\blacksquare$

Признак зависимости

Рассмотрим систему функций $\{f_i(x)\},\ i = \overline{1,m}$, где $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \forall i = \overline{1,m}$. Построим векторную функцию $y = F(x) :\ G \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и её матрицу Якоби.

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \qquad \frac{dF}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Определение 20.2. *Пусть* $\operatorname{rank}\left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{x_0} = r < m$ *для некоторой точки* x_0. *Точку* x_0 *называют точкой стабильного ранга для матрицы* $\dfrac{dF}{dx}$, *если* $\operatorname{rank}\dfrac{dF}{dx} = r$ *в некоторой окрестности точки* x_0.

Теорема 20.3 (Признак зависимости функций)**.**
Пусть ранг $\left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{x_0} = r < m$ *и* x_0 *является точкой стабильного ранга для матрицы* $\dfrac{dF}{dx}$. *то система функций* $f_i(x)$ *зависима в некоторой окрестности точки* x_0.

$\diamondsuit$

Существует минор порядка r матрицы $\left.\dfrac{dF}{dx}\right|_{x_0}$, не равный нулю. Не ограничивая общности, пусть $\det J(x_0) \neq 0$, где

$$J(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{pmatrix}$$

На основании теоремы о неявной векторной функции 18.1, система соотношений

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ \dots,\ x_r,\ x_{r+1},\ \dots,\ x_n) - y_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_r(x_1,\ \dots,\ x_r,\ x_{r+1},\ \dots,\ x_n) - y_r = 0 \end{cases} \tag{4}$$

в некоторой окрестности точки x_0 неявно задаёт единсвенную непрерывно дифференцируемую функцию.

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{r+1},\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = \varphi_r(x_{r+1},\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_r), \end{cases}$$

Для удобства, обозначим $\widetilde{x} = (x_{r+1},\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_r)$. Возьмём произвольное $k \in \{r+1, \dots,\ n\}$ и построим функцию (здесь и далее все равенства функций описываются в окрестности точки x_0):

$$g(\widetilde{x}) \equiv f_k(\varphi_1(\widetilde{x}),\ \dots, \varphi_r(\widetilde{x}),\ x_{r+1},\ \dots,\ x_n) \tag{5}$$

Подставив (5) в (4) получаем систему тождеств.

$$\begin{cases} f_1(\varphi_1(\widetilde{x}),\ \ldots,\ \varphi_r(\widetilde{x}),\ x_{r+1},\ \ldots,\ x_n) \equiv y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_r(\varphi_1(\widetilde{x}),\ \ldots,\ \varphi_r(\widetilde{x}),\ x_{r+1},\ \ldots,\ x_n) \equiv y_r \\ f_k(\varphi_1(\widetilde{x}),\ \ldots,\ \varphi_r(\widetilde{x}),\ x_{r+1},\ \ldots,\ x_n) \equiv g(\widetilde{x}) \end{cases} \tag{6}$$

Докажем, что функция g не зависит от переменных $x_{r+1},\ \ldots,\ x_n$. Для этого достаточно будет доказать, что $\dfrac{\partial g}{\partial x_j} = 0,\ \forall j = \overline{r+1, n}$. Возьмём произвольное $j \in \{r+1,\ \ldots,\ n\}$, и продифференцируем тождества (6) по x_j. Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r}\dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r}\dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_j} \equiv 0 \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \dfrac{\partial f_k}{\partial x_r}\dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} \equiv \dfrac{\partial g}{\partial x_j}, \end{cases} \tag{7}$$

При любых фиксированных значениях $(x_{r+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r)$ рассмотрим следующую систему линейных функций относительно переменных $t_1, \ldots, t_r, t_j$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} t_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} t_r + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} t_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_r = \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} t_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} t_r + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_j} t_j, \\ u_k = \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} t_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_k}{\partial x_r} t_r + \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} t_j. \end{cases}$$

Функции $u_1, \ldots, u_r$ независимы по признаку независимости системы функций 20.3, поскольку $\det J(x) \neq 0$. Добавив в систему ещё одну функцию u_k её Якобиан занулится, а значит система станет зависимой. То есть u_k – линейная комбинация функций $u_1, \ldots, u_r$ по критерию зависимости линейных функций 20.1.

Тогда, возвращаясь к (7)

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = u_k = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_r u_r = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \ldots + \alpha_r \cdot 0 = 0$$

То есть $\dfrac{\partial g}{\partial x_j} = 0\ \forall j = \overline{r+1, n}$. Значит g не зависит от переменных $x_j\ \forall j = \overline{r+1, n}$.

$$g(\widetilde{x}) = f_k(\varphi_1(\widetilde{x}),\ \ldots, \varphi_r(\widetilde{x}),\ x_{r+1},\ \ldots,\ x_n)$$

$$f_k(x_1,\ \ldots\ x_r,\ x_{r+1},\ \ldots,\ x_n) = g(y_1,\ \ldots,\ y_r) = g(f_1(x_1,\ \ldots,\ x_r),\ \ldots,\ f_r(x_1,\ \ldots,\ x_r))$$

Мы выразили f_k через $f_1, \ldots, f_r$. Следовательно, система зависима.

■

21 Условия локального экстремума функции векторного аргумента

Рассмотрим функцию $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Определение 21.1. *Внутренняя точка $x_0 \in D$ называется точкой локального максимума функции f, если существует δ-окрестность $B(x_0, \delta)$ такая, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ $\forall x \in B(x_0, \delta)$.*

Аналогично определяются точки локального минимума, строгого локального минимума и строгого локального максимума.

Определение 21.2. *Внутренняя точка $x_0 \in D$ называется стационарной точкой, если все её частные производные равны нулю: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_0} = \ldots = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{x_0} = 0$.*

Теорема 21.1 (необходимое условие локального экстремума)**.** *Пусть функция f дифференцируема в точке локального экстремума x_0. Тогда x_0 – стационарная точка функции f.*

$\diamondsuit$

Пусть $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Возьмём произвольное $i = \overline{1, n}$. Тогда x_i^0 – точка локального экстремума для скалярной функции $g(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0)$. Из необходимого условия локального экстремума скалярной функции следует, что $g'(x_i) = 0$, то есть $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_0} = 0$.

$\blacksquare$

Таким образом, подозрительными на локальный экстремум точками для дифференцируемой функции являются точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

или в векторной форме

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

Если функция не дифференцируема в некоторых внутренних точках множества D, то такие точки, как и при анализе скалярных функций, также являются подозрительными на точки локального экстремума.

В функциях от одной переменной мы также вводили достаточные условия локальных экстремумов, зависящие от второй производной:

$$f : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 - \text{лок. мин.},\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 - \text{лок. макс.},$$

Аналогом второй производной для функций от нескольких переменных является матрица Гессе.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Определение 21.3. *Выражение вида* $h(t_1, \dots, t_n) = a_{11}t_1^2 + 2a_{12}t_1t_2 + \dots + 2a_{1n}t_1t_n + a_{22}t_2^2 + \dots + 2a_{2n}t_2t_n + \dots + a_{nn}t_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}t_it_j$ *называют квадратичной формой.*

В соответствие квадратичной форме можно поставить матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма может быть записана в матричном виде:

$$h(t) = t^T At, t \in \mathbb{R}^n$$

Определение 21.4. *Квадратичная форма* $h(t) = t^T At$ *называется положительно определённой, если* $\forall t \neq 0_n : h(t) > 0$.

Определение 21.5. *Квадратичная форма* $h(t) = t^T At$ *называется отрицательно определённой, если* $\forall t \neq 0_n : h(t) < 0$.

Определение 21.6. *Квадратичная форма* $h(t) = t^T At$ *называется знакопеременной, если* $\exists t_1, t_2 \in \mathbf{R}^n : h(t_1) > 0,\ h(t_2) < 0$.

Все остальные квадратичные формы называют *полуопределёнными.*

Теорема 21.2 (критерий Сильвестра)**.** *Квадратичная форма* $h(t)$ *является положительно определённой тогда и только тогда, когда все главные угловые миноры матрицы* A *больше нуля.*

Квадратичная форма $h(t)$ *является отрицательно определённой тогда и только тогда, когда все главные угловые миноры матрицы* A *чётного порядка больше нуля, а все нечётного порядка – меньше нуля.*

Рассмотрим $f : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Пусть x_0 – стационарная точка f. Второй дифференциал можно записать в виде:

$$d^2f(x_0) = dx^T \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} dx$$

Рассмотрим соответствующую ему квадратичную форму:

$$h(t) = t^T \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} t$$

Теорема 21.3 (достаточное условие локального экстремума)**.** *Пусть функция* f *дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки* $x_0 \in D$.

1. *Если* $h(t)$ *– положительно определённая квадратичная форма, то* x_0 *– точка локального минимума.*

2. *Если* $h(t)$ *– отрицательно определённая квадратичная форма, то* x_0 *– точка локального максимума.*

3. *Если $h(t)$ – знакопеременная квадратичная форма, то x_0 не является точкой локального экстремума.*

$\diamondsuit$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0 + \theta\Delta x)}{2!}$$

Поскольку x_0 – стационарная точка, $df(x_0) = 0$.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{d^2 f(x_0 + \theta\Delta x)}{2}$$

$$d^2 f(x_0 + \theta\Delta x) = \Delta x^T \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta\Delta x)}{\partial x^2} \Delta x,\ 0 < \theta < 1$$

1. По критерию Сильвестра 21.2 все главные угловые миноры матрицы $\dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2}$ положительны. Миноры матрицы $\dfrac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2}$ являются непрерывными в точке x_0 функциями. По теореме о стабилизации знака существует $\delta > 0$ такое, что для любого вектора $\Delta x, \|\Delta x\| \leqslant \delta$, все угловые миноры матрицы $\dfrac{\partial^2 f(x_0 + \Delta x)}{\partial x^2}$ положительны.

   Тогда, по критерию Сильвестра 21.2 , форма

   $$h(\Delta x) = \Delta x^T \frac{\partial^2 f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x^2} \Delta x > 0$$

   Тогда
   $$f(x_0 + \theta\Delta x) - f(x_0) > 0 \quad \forall \Delta x,\ \|\Delta x\| \leqslant \delta$$

   Следовательно, x_0 – точка локального минимума.

2. Аналогично пункту (1.)

3. Пусть теперь существуют векторы t_1, t_2 такие, что

   $$t_1^T \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} t_1 = a > 0, \quad t_2^T \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} t_2 = b < 0$$

   Рассмотрим вспомогательные функции

   $$g_1(\omega) = t_1^T \frac{\partial^2 f(x_0 + \omega)}{\partial x^2} t_1, \quad g_2(\omega) = t_2^T \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} t_2$$

   Причём $g_1(0) = a > 0,\ g_2(0) = b < 0$. Исходя из непрерывности g_1 и g_2 в точке $\omega = 0$,

   $$\exists \delta > 0\ \forall \omega : \|\omega\| < \delta \Rightarrow g_1(\omega) \geqslant \frac{a}{2},\ g_2(\omega) \leqslant \frac{b}{2}$$

   Выберем такое α, что $\Delta x = \alpha t_1$, $\|\Delta x\| < \delta$. Тогда

   $$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{d^2 f(x_0 + \theta\Delta x)}{2} = \alpha^2 t_1^T \frac{d^2 f(x_0 + \theta\alpha t_1)}{2\partial x^2} t_1 = \frac{1}{2}\alpha^2 g_1(\theta\alpha t_1) > 0$$

Аналогично выберем такое β, что $\Delta x = \beta t_1$, $\|\Delta x\| < \delta$. Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{d^2 f(x_0 + \theta \Delta x)}{2} = \beta^2 t_2^T \frac{d^2 f(x_0 + \theta \beta t_2)}{2 \partial x^2} t_2 = \frac{1}{2} \beta^2 g_2(\theta \beta t_1) < 0$$

Из данных соотношений следует, что в любой окрестности точки x_0 всегда найдутся две точки, значение в одной из которых больше, чем $f(x_0)$, а в другой – меньше. Следовательно, точка x_0 не является экстремумом.

■

22 Условный локальный экстремум

Рассмотрим функцию $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Пусть $M \subseteq E,\ M \neq \emptyset$.

Определение 22.1. *Точка $x_0 \in M$ называется точкой локального условного минимума, если существует окрестность $B(x_0, \delta)$ такая, что $f(x) \geqslant f(x_0)\ \forall x \in M \cap B(x_0, \delta)$.*

Определение 22.2. *Точка $x_0 \in M$ называется точкой условного минимума функции f относительно M, если $f(x) \geqslant f(x_0)\ \forall x \in M$.*

Аналогичным образом задаются точки локального условного максимума и условного максимума.

Зачастую, M задаётся с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Определение 22.3. *Систему уравнений $F_i(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = 0,\ i = \overline{1, m}$ называют уравнениями связей.*

Разобьём вектор $x = (x_1, \dots, x_m, \dots, x_n)$ на $z = (x_1, \dots, x_m)$ и $t = (x_{m+1}, \dots, x_n)$.

Введём соответствующую уравнению связей векторную функцию

$$F(x) = F(z, t) = \begin{pmatrix} F_1(z, t) \\ \vdots \\ F_m(z, t) \end{pmatrix}$$

Введённые определения позволяют записать функцию $y = f(x)$ в виде $y = f(z, t)$, а систему (8) в виде $F(z, t) = 0, F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$.

В дальнейшем будем считать, что f а также $\forall i\ F_i$ непрерывно дифференцируемы на E. Также, в дальнейшем будем считать, что $\operatorname{rank} \dfrac{\partial F(z, t)}{\partial z} = m$.

Тогда, согласно признаку независимости системы функций 20.3, система функций $F_i(z, t), i = \overline{1, m}$ независима на E.

Исходя из теоремы о неявной функции 18.1 соотношение $F(z, t) = 0$ в некоторой окрестности точки $x_0 = (z_0, t_0)$ задаёт непрерывно дифференцируемую функцию $z = \Phi(t)$ в некоторой окрестности T точки t_0.

Тогда можно ввести новую функцию:

$$g(t) = f(\Phi(t), t),\ t \in T$$

Точка x_0 является точкой условного локального экстремума относительно множества M тогда и только тогда, когда точка t_0 является точкой локального экстремума для функции $g(t)$, что позволяет найти такие точки, используя достаточное условие локального экстремума.

Таким образом, введённый метод нахождения условного локального экстремума сводится к нахождению локального экстремума. Но на практике, нахождение неявной функции $z = \Phi(t)$ является достаточно трудным шагом.

Пример 22.1. *Найти точки условного локального экстремума.*

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 + z^2 - yz = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

$\diamondsuit$

Из второго уравнения выразим $x = 1 - y$ и подставим его в функцию u, получим $g(y, z) = 2y^2 - 2y + 1 + z^2 - yz$.

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial y} = 4y - 2 - z = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} = 2z - y = 0. \end{cases}$$

Получим $z = \dfrac{2}{7}$, $y = \dfrac{4}{7}$.

Проверим точки на наличие экстремума:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4,\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = -1,\ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 2$$

Из этого следует, что $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, Главные миноры $\Delta_1 = 4 > 0,\ \Delta_2 = 7 > 0$. Исходя из достаточного условия локального экстремума, $\left(\dfrac{4}{7}, \dfrac{2}{7}\right)$ – точка локального минимума для функции g, следовательно, $\left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{2}{7}\right)$ – точка условного локального минимума.

$\blacksquare$

23 Метод Лагранжа

Пусть требуется исследовать на условные экстремумы функцию $f(z, t) : D \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Пусть множество M задано соотношением $F(z, t) = 0$, где $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{pmatrix}$.

Пусть f а также $\forall i\ F_i$ непрерывно дифференцируемы на области определения и выполняется условие $\det \dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Определение 23.1. *Функцией Лагранжа для функций f и F называется функция*

$$L(z,t,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(z,t) + \lambda_1 F_1(z,t) + \ldots + \lambda_m F_m(z,t) = f(z,t) + \lambda^T F(z,t), \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Теорема 23.1 (необходимое условие локального условного экстремума)**.** *Пусть $x_0 = (z_0, t_0)$ – точка локального условного экстремума функции $f(z,t)$ на множестве M, заданном соотношениями $F(z,t) = 0$. Тогда существует λ_0 такое, что (z_0, t_0, λ_0) – стационарная точка функции Лагранжа L.*

$\diamondsuit$

$$L(z,t,\lambda) = f(z,t) + \lambda^T F(z,t)$$

В точке $(z_0, t_0) \in M$ частная производная $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = F(z,t) = 0$.

Возьмём частную производную по z:

$$\frac{\partial L(z_0,t_0,\lambda)}{\partial z} = \frac{\partial f(z_0,t_0)}{\partial z} + \lambda^T \frac{\partial F(z_0,t_0)}{\partial z}$$

Нужно найти решение уравнения относительно λ

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda^T \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Поскольку $\det \dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ на множестве M,

$$\lambda^T = -\frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^{-1}$$

Покажем, что в λ_0 частная производная $\left.\dfrac{\partial F}{\partial t}\right|_{\lambda_0} = 0$.

Поскольку $\det \dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, можно воспользоваться теоремой о неявной функции 18.1. Существует непрерывно дифференцируемая функция $z = \Phi(t)$ в окрестности точки t_0. Тогда $F(\Phi(t), t) = 0$ в окрестности точки t_0.

Введём вспомогательные функции

$$g(t) = f(\Phi(t), t) \quad p(t) = f(\Phi(t), t) + \lambda_0^T F(\Phi(t), t)$$

Тогда t_0 – локальный экстремум $g(t)$ и $p(t)$. Поскольку t_0 – локальный экстремум $p(t)$, t_0 – стационарная точка этой функции.

$$\frac{dp(t_0)}{dt} = 0$$

С другой стороны,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_0^T \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_0^T \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{d\Phi}{dt} = \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_0^T \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \right] = \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_0^T \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

Таким образом, $\dfrac{\partial L(t_0)}{\partial t} = 0$.

Следовательно, (z_0, t_0, λ_0) – стационарная точка $L(z_0, t_0, \lambda_0)$.

■

Достаточные условия локального условного экстремума:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ F(x) = 0 \end{cases}$$

Пусть f и $\forall i$ F_i дважды непрерывно дифференцируемы. Введём функцию Лагранжа $L(z, t, \lambda) = f(z, t) + \lambda^T F(z, t)$.

Пусть $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ – подозрительная на экстремум точка. Тогда $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ – стационарная точка функции Лагранжа.

Введём $\widetilde{L}(x_1, \ldots, x_n) = L(x_1, \ldots, x_n, \overline{\lambda})$.

$$f(x_1, \ldots, x_m) - f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m) = L(x_1, \ldots, x_n, \overline{\lambda}) - L(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda})$$

$$\Delta f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = \Delta \widetilde{L}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$$

Рассмотрим систему уравнений связи. Продифференцируем её:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_m$ – функции от $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Их дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_m$ принадлежат линейной оболочке $L(dx_{m+1}, \ldots, dx_n)$. Поскольку зависимость линейная, сохраняется инвариантность формы второго дифференциала:

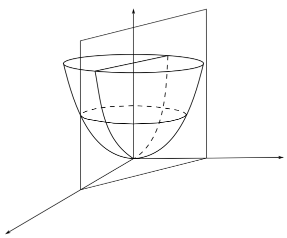
$$d^2 \widetilde{L} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 \widetilde{L}$$

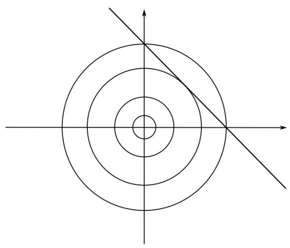
$d^2 \widetilde{L}$ – квадратичная форма от $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Если она положительно определена, то $\overline{x}$ – точка локального минимума. Если она отрицательно определена, то $\overline{x}$ – точка локального максимума.

Геометрическая интерпретация метода Лагранжа

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода Лагранжа. Для это рассмотрим случай, когда у нас задана функция от двух переменных, которую мы исследуем на эстремум, и уравнение связи:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + y^2 \to extr \\ x + y = 1 \end{cases}$$





Построим график в осях $Oxyz$:

Перейдем к проекциям на Oxy:

Рассмотрим точку касания окружности прямой $x + y = 1$. Для того, чтобы две прямые касались, должно выполняться условие:

$$gradf \parallel gradF \Leftrightarrow gradf = \lambda gradF$$

Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = f(x, y) - \lambda F(x, y)$$

Если $gradL = 0$, то

$$\begin{cases} gradf = \lambda gradF \\ -F(x, y) = 0 \end{cases}$$

24 Глобальный экстремум векторной функции

Определение 24.1. *Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называют выпуклым, если*

$$\forall x_0, x_1 \in D,\ x_\tau = x_0 + \tau\,(x_1 - x_0) \in D \quad \forall \tau \in [0, 1]$$

Рассмотрим функцию $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, где D – выпуклое множество

Определение 24.2. *Функцию $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называют выпуклой на D, если D – выпукло и*

$$\forall x_0, x_1 \in D,\ f(x_\tau) \leqslant f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)) \quad \forall \tau \in [0, 1]$$

Теорема 24.1 (достаточное условие выпуклости функции)**.** *Пусть функция $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема на выпуклом множестве D. Если для любого* x $\in D$ *все главные угловые миноры матрицы Гессе $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$ положительны, то f выпуклая на D.*

$\diamondsuit$

Из критерия Сильвестра 21.2 следует, что $\forall x \in D$ квадратичная форма $h(u) = u^T \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} u$ является положительно определенной.

Рассмотрим произвольные $x_0, x_1 \in D$, $x_0 \neq x_1$. Введём вспомогательную функцию $\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0)),\ t \in [0, 1]$. Посчитаем её производную. По теореме о матрице Якоби сложной векторной функции 16.1,

$$\varphi'(t) = \frac{df(x_0 + t(x_1 - x_0))}{dx}(x_1 - x_0) = (x_1 - x_0)^T \left(\frac{df\left(x_0 + t\left(x_1 - x_0\right)\right)}{dx}\right)^T$$

$$\varphi''(t) = (x_1 - x_0)^T \frac{\partial^2 f(x_0 + t(x_1 - x_0))}{\partial x^2}(x_1 - x_0) > [u = (x_1 - x_0),\ x = x_0 + t(x_1 - x_0)] > 0$$

Следовательно, функция $\varphi(t)$ выпукла на $[0, 1]$, то есть

$$\varphi(\tau) \leqslant \varphi(0) + \tau(\varphi(1) - \varphi(0)) \quad \forall \tau \in [0, 1]$$

$$f(x_\tau) \leqslant f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)) \quad \forall \tau \in [0, 1]$$

$\blacksquare$

Теорема 24.2 (о глобальном минимуме выпуклой функции)**.** *Пусть функция* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируемая и выпуклая на* D*,* x_0 *– внутренняя стационарная точка. Тогда* x_0 *– точка глобального минимума* f *на* D*.*

$\diamondsuit$

Предположим, что x_0 – не точка глобального минимума. Тогда $\exists x_1 \in D : f(x_1) < f(x_0)$.

Поскольку x_0 – внутренняя точка, функция определена в некоторой её окрестности, то $\exists \delta > 0$ такое, что можно ввести вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0)) \quad t \in [-\delta, 1]$$

Посчитаем производную φ:

$$\varphi'(t) = \frac{df(x_0 + t(x_1 - x_0))}{dx}(x_1 - x_0)$$

Её значение в точке $t_0 = 0:$

$$\varphi'(t) = \frac{df(x_0)}{dx}(x_1 - x_0) = \left[\frac{df(x_0)}{dx} = 0\right] = 0$$

Следовательно, $t_0 = 0$ – стационарная точка φ. При этом, поскольку f выпуклая, φ также выпуклая. По теореме о глобальном минимуме скалярной выпуклой функции, $t = 0$ – точка глобального минимума функции $\varphi(t), t \in [-\delta, 1]$. Следовательно,

$$\varphi(1) \geqslant \varphi(0)$$

$$f(x_1) \geqslant f(x_0)$$

Противоречие.

$\blacksquare$

25 Поверхности

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – ограниченная область на плоскости Ouv, $\overline{D} = D \cup \partial D$, а $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ – три непрерывные функции, определенные на $\overline{D}$:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in \overline{D} \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

Данную систему называют *параметрическим уравнением поверхности.*

Определение 25.1. *Поверхность называется простой, если у нее нет точек самопересечения. Т.е не существует пар точек, в которых функция принимает одинаковое значение.*

Определение 25.2. *Поверхность называется гладкой, если функции $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ являются непрерывно-дифференцируемыми.*

Определение 25.3. *Поверхность называется кусочно-гладкой, если D можно разбить на фрагменты, на которых функции $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ являются непрерывно -дифференцируемыми.*

Определим кривые в трехмерном пространстве. Пусть

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in [a,b] \text{ – кривая в пространстве } \mathbb{R}^3. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Тогда, если данная кривая является гладкой, то ее длину можно посчитать по формуле:

$$\int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt$$

Аналогично вводятся криволинейные интергалы 1-го и 2-го типа.

КРИ-1 в пространстве:

$$\int\limits_l f(x,y,z)\, ds := \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt$$

Замечание 25.1. *КРИ-1 сохраняет все свойства, которыми он обладает и на поверхности*

КРИ-2 в пространстве:

$$\int\limits_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \overset{def}{=}$$

$$\int\limits_a^b \left(P(x(t),y(t),z(t)) \cdot \dot{x}(t) + Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot \dot{y}(t) + R(x(t),y(t),z(t)) \cdot \dot{z}(t)\right) dt$$

Замечание 25.2. *КРИ-2 сохраняет все свойства, которыми он обладает и на поверхности*

Замечание 25.3. *Формула Грина (и все вытекающие из нее) для КРИ-2 не работает в трехмерном просранстве*

Рассмотрим поверхность:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D} \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

Зафиксируем точку $(u_0, v_0) \in D$ (точка (u_0, v_0) – внутренняя точка D). Построим в D прямоугольную систему координат с центром в (u_0,v_0). Рассмотрим две кривые в пространстве, построенные на точках, лежащих на координатных осях в области D:

$$l_1 : \begin{cases} x = x(u_0,t), \\ y = y(u_0,t), \quad t \in [v_0-\delta, v_0+\delta], \\ z = z(u_0,t), \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = x(t,v_0), \\ y = y(t,v_0), \quad t \in [u_0-\delta, u_0+\delta] \\ z = z(t,v_0), \end{cases}$$

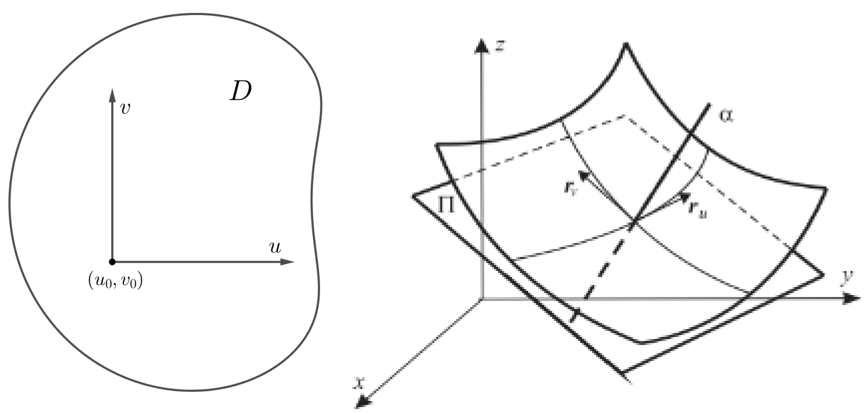


Рис.25.1. Область D с прямоугольной системой координат и касательная плоскость (П) и нормальная прямая (α)

Рассмотрим касательные к прямым l_1, l_2 в точке $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ и векторы r_v, r_u, задающие касательную поверхность:

$$r_v = x'_v(u_0,v_0)\cdot\vec{i} + y'_v(u_0,v_0)\cdot\vec{j} + z'_v(u_0,v_0)\cdot\vec{k}$$

$$r_u = x'_u(u_0,v_0)\cdot\vec{i} + y'_u(u_0,v_0)\cdot\vec{j} + z'_u(u_0,v_0)\cdot\vec{k}$$

Тогда уравнение касательной плоскости к исходной поверхности S, составленное по двум векторам r_v, r_u и по точке $M(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ имеет вид:

$$\Pi : \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$$

Из векторного произведения векторов r_v, r_u получим направление вектора нормали :

$$[r_v, r_u] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x'_v & z'_v \\ x'_u & z'_u \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},\text{ где}$$

$A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ (транспонирование не меняет определитель)

Тогда можно записать уравнение нормали:

$$\alpha : \begin{cases} x = At + x_0, \\ y = Bt + y_0, \\ z = Ct + z_0, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{matrix} x_0 = x(u_0, v_0) \\ y_0 = y(u_0, v_0) \\ z_0 = z(u_0, v_0) \end{matrix}$$

Поверхность, задающаяся явно

Рассмотрим частный случай, когда исходная поверхность задается явно:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in \overline{D}$$

Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f'_u \\ 0 & 1 & f'_v \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) \cdot (-f'_u) - (y - y_0) \cdot f'_v + (z - z_0) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} f'_u = f'_x \\ f'_v = f'_y \end{bmatrix} \Leftrightarrow f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z_0 = z$$

Уравнение нормали имеет вид: $[r_v, r_u] = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f'_u & f'_v \end{vmatrix} = -f'_u, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f'_v, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Получаем $\alpha : \begin{cases} x = -f'_x(x_0, y_0) + x_0, \\ y = -f'_y(x_0, y_0) + y_0, \\ z = t + z_0, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$

Замечание 25.4. *Соответствующий вектор нормали можно записать как* $(-f'_x, -f'_y, 1)$. *На практике часто берут направляющий вектор нормали* $(f'_x, f'_y, -1)$

Площадь поверхности

Пусть простая гладкая поверхность S задается следующим образом:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \qquad (u, v) \in \overline{D}, \quad D - \text{ограниченная область} \tag{9}$$

Разобъем область D на $n \in \mathbb{N}$ компактных частей прямыми, параллельными осям Ov, Ou. Если какие-то части разбиения не являются прямоугольниками, то мы дополним все такие части до прямоугольников. Рассмотрим произвольный прямоугольник D_k из разбиения. Пусть точка M_k имеет координаты (u_k, v_k), точка $M_k' = (u_k + \Delta u_k, v_k)$, точка $M_k'' = (u_k, v_k + \Delta v_k)$ (рис. 25.2).

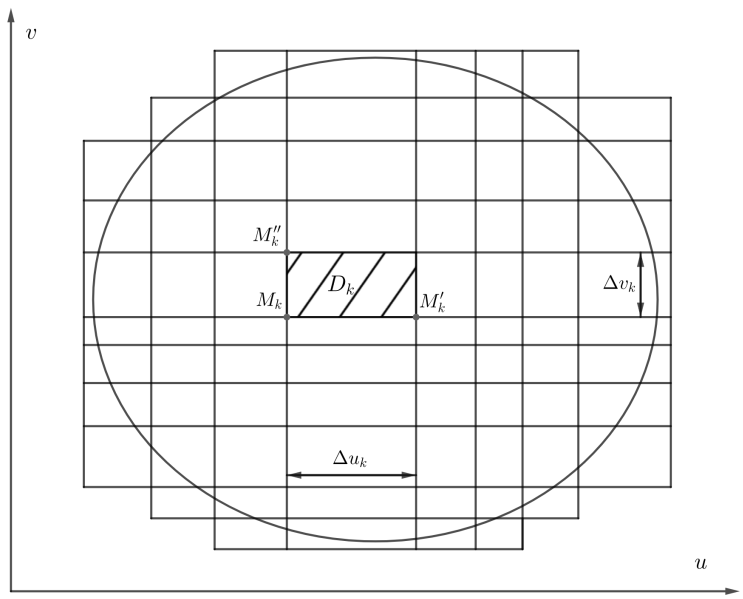


Рис.25.2.

Теперь рассмотрим нашу поверхность. Ясно, что каждому прямоугольнику D_k соответствует область S_k на поверхности S. Заменим S_k на параллелограмм Q_k, который строится слудующим образом: в точке $P_k = (x_k, y_k, z_k), x_k = x(u_k, v_k), y_k = y(u_k, v_k), z_k = z(u_k, v_k)$ построим две касательные к кривым, построенным по точкам прямых $M_k M_k'$ и $M_k M_k''$, и на их направляющих векторах r_u, r_v построим параллелограмм. На касательных выберем точки $L_k = (x_k + x_u' \cdot \Delta u_k,\ y_k + y_u' \cdot \Delta u_k,\ z_k + z_u' \cdot \Delta u_k)$, $\quad N_k = (x_k + x_v' \cdot \Delta v_k,\ y_k + y_v' \cdot \Delta v_k,\ z_k + z_v' \cdot \Delta v_k)$ (рис. 25.3).

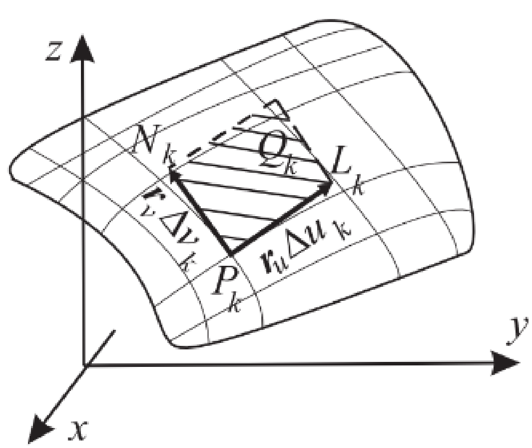


Рис.25.3. (на рисунке точка N_k соответствует точке P_k'', а точка L_k – точке P_k')

Тогда

$$\text{пл.}Q_k = \big|[r_u, r_v]\big|_{(u_k,v_k)} \cdot \big|\Delta u_k \cdot \Delta v_k\big| \tag{10}$$

Найдем сумму σ площадей всех параллелограммов Q_k

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \big|[r_u, r_v]\big|_{(u_k,v_k)} \cdot \big|\Delta u_k \cdot \Delta v_k\big|$$

Площадь поверхности определим как:

$$\text{пл.}S := \iint\limits_D |\,[r_u, r_v]\,|\, du\, dv \tag{11}$$

Заметим, что $|\,[r_u, r_v]\,|^2 = |r_u|^2 \cdot |r_v|^2 \cdot \sin^2\varphi = |r_u|^2 \cdot |r_v|^2 \cdot (1 - \cos^2\varphi) = |r_u|^2 \cdot |r_v|^2 - (r_u, r_v)^2$. Пусть $|r_u|^2 = E, \quad |r_v|^2 = G, \quad \big(r_u, r_v\big) = F$. Тогда

$$\text{пл.}S := \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \tag{12}$$

Если же поверхность задается явно, т.е. $z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$, то

$$\text{пл.}S := \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy \tag{13}$$

Пример 25.1. *Пусть в пространстве заданы два цилиндра:* $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2$. *Требуется найти площадь фигуры* S*, по которой пересекаются данные цилиндры.*

Изучим поверхность в пересечении цилиндров. Для этого зафиксируем $z = z_0$. В этом сечении уравнения цилиндров будут иметь вид $x^2 + z_0^2 = a^2, \quad y^2 + z_0^2 = a^2$. Эти уравнения задают в координатной плоскости Oxy квадрат с центром в начале координат и длиной стороны, равной $2\sqrt{a^2 - z_0^2}$. Искомая фигура — объединение таких квадратов при $z \in [-a, a]$ (рис. 25.4):

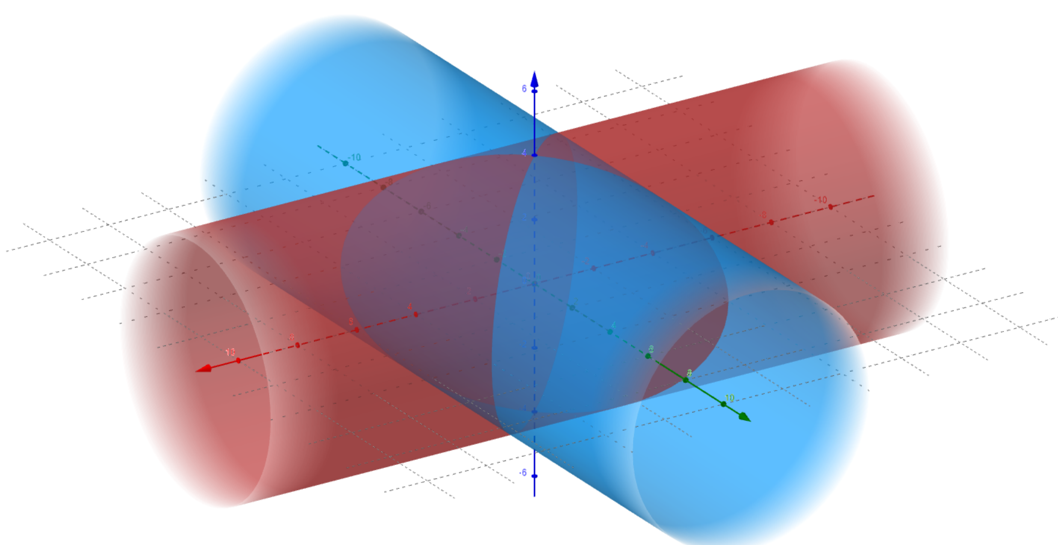


Рис.25.4. Графики функций $x^2 + z^2 = a^2$ (синий), $y^2 + z^2 = a^2$ (красный) , $a = 4$

В силу симметрии фигуры можно рассмотреть только $x > 0,\ y \in [0, x], z > 0$. Эта часть составляет $\dfrac{1}{16}$ общей площади фигуры. В этой части исследуемая поверхность будет задаваться уравнением $x^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z = \sqrt{a^2 - x^2}$. Вычислим площадь при помощи двойного интеграла:

$$\text{пл.}S = 16 \iint\limits_{D} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy = 16 \iint\limits_{D^+} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} + 0}\, dx\, dy =$$

$$= 16 \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} = 16a \int\limits_0^a dx \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 16a \cdot (-\sqrt{a^2 - x^2})\Big|_0^a = 16a^2$$

26 Поверхностный интеграл 1 рода

Пусть

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in \overline{D} \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

– кусочно-гладкая поверхность, а $f(x, y, z)$ – функция, определенная и непрерывная во всех точках S. Предположим, что функция $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ интегрируема на $\overline{D}$. Отображение $\sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)},\ u, v \in \overline{D}$ ограничено и имеет множество точек разрыва нулевой площади, то есть оно тоже интегрируемо на $\overline{D}$. Тогда функция

$$f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}$$

интегрируема по Риману на $\overline{D}$ как произведение интегрируемых функций.

Определение 26.1. *Двойной интеграл вида*

$$\iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2} du dv$$

принимают за поверхностный интеграл 1 рода функции f по поверхности S и обозначают

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z) dS := \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2} du dv$$

Свойства ПОВИ-1:

Свойство 26.1 (аддитивность).

$\diamondsuit$

Рассмотрим поверхность $S : r = r(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}$ Пусть $\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_k$ – некоторое разбиение замкнутой области $\overline{D}$ кусочно-гладкими кривыми на замкнутые области, не имеющие общих внутренних точек. Пусть поверхность S составлена из поверхностей $S_i,\ i = \overline{1,n}$ с векторными уравнениями $S_i : r_i = r_i(u,v), (u,v) \in \overline{D}_i$.

Если кусочно-гладкая поверхность S составлена из поверхностей S_i и определен интеграл $\iint\limits_S S(x,y,z)dS$, то из определения ПОВИ-1 и из аддитивности двойного интеграла вытекает аддитивность ПОВИ-1, то есть

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i} f(x,y,z)dS$$

$\blacksquare$

Свойство 26.2 (физический смысл)**.**

Пусть $f(x,y,z)$ – плотность простой кусочно-гладной поверхности S в точке (x,y,z), тогда ПОВИ-1 $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$ равен массе поверхности S.

Свойство 26.3 (замена переменных)**.** *Пусть*

$$S : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D} \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

– кусочно гладкая поверхность, $f(x,y,z)$ – функция, определенная и непрерывная во всех точках S. Возьмем диффеоморфизм $\begin{cases} u = \varphi(t,\tau) \\ v = \psi(t,\tau) \end{cases}$, действующий из $\overline{E}$ в $\overline{D}$, причем $J = \begin{vmatrix} \varphi'_t & \varphi'_\tau \\ \psi'_t & \psi'_\tau \end{vmatrix} > 0\ \ \forall (t,\tau) \in \overline{E}$

Пусть L – поверхность, заданная системой

$$L : \begin{cases} x = x(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)) = \xi(t,\tau) \\ y = y(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)) = \zeta(t,\tau) \\ z = z(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)) = \chi(t,\tau) \end{cases}, (t,\tau) \in \overline{E}$$

Тогда

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_L f(x,y,z)dS$$

$\diamondsuit$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\ dS = \iint\limits_{\overline{D}} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ dudv =$$

$$\iint\limits_{\overline{E}} f(\xi(t,\tau),\zeta(t,\tau),\chi(t,\tau))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot J\ dtd\tau =$$

$$\iint\limits_{\overline{E}} f(\xi(t,\tau),\zeta(t,\tau),\chi(t,\tau))\sqrt{(AJ)^2+(BJ)^2+(CJ)^2}\ dtd\tau =$$

$$\left[A\cdot J = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \varphi'_t & \varphi'_\tau \\ \psi'_t & \psi'_\tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \zeta'_t & \zeta'_\tau \\ \chi'_t & \chi'_\tau \end{vmatrix}. \text{ Аналогично выразив } B\cdot J \text{ и } C\cdot J \text{ получим}\right] =$$

$$\iint\limits_{L} f(x,y,z)dS$$

■

Свойство 26.4 (независимость от пути)**.** *Пусть S – некоторая кусочно гладкая поверхность, $S^+ : (S,\vec{n})$ и $S^- : (S,-\vec{n})$ – два различных направления обхода поверхности. Тогда*

$$\iint\limits_{S^+} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S^-} f(x,y,z)dS$$

$\diamondsuit$ Следует из сведения ПОВИ-1 к двойному интегралу. ■

27 Поверхностный интергал 2 типа

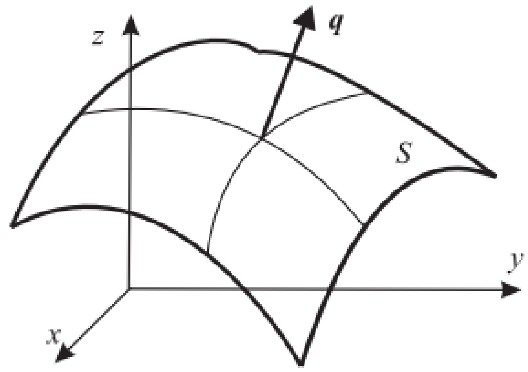
Рассмотрим простую гладкую поверхность

$$S : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in\overline{D} \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Пусть (u_0,v_0) – граничная точка множества $\overline{D}$. Точку $L = (x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$ называют краевой для поверхности S. Множество краевых точек называют *краем поверхности.* Точки $\mathrm{M}(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\ (u,v)\in D$, называют внутренними точками поверхности. В каждой точке $\mathrm{M}(u,v)$ поверхности S определены два противоположно направленных единичных нормальных вектора

$$\vec{n}(u,v) = \frac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|}$$

и $-\vec{n}(u,v)$. Поскольку поверхность S гладкая, функция $\vec{n}=\vec{n}(u,v)$ непрерывна на $\overline{D}$. Фиксируем один из единичных нормальных векторов, т. е. $\vec{n}(u,v)$ или $-\vec{n}(u,v)$, и обозначаем его через $\vec{q}(u,v)$. Пару $(S,\vec{q})$ называют положительной стороной поверхности и обозначают S^+.



Пара $(S, -\vec{q})$ – противоположная сторона поверхности, которую обозначают S^- и называют отрицательной. При выборе стороны поверхности достаточно указать нормаль в одной точке этой поверхности.

Пусть S-простая гладкая поверхность с краем ∂S. И пусть край - простая кусочно-гладкая замкнутая кривая. Определим положительное направление движения по краю ∂S как направление, двигаясь по которому наблюдатель, находящийся на положительной стороне поверхности, видит внутреннюю часть поверхности S слева от себя. И обратно: по положительному направлению движения по краю однозначно востанавливается положительная сторона поверхности. Направление движения по ∂s, противоположное положительному называется отрицательным.

Зафиксируем нормаль $\vec{n}$ и непрерывную замкнутую кривую $l \subset S$. Поверхность S называется двухсторонней, если для любой такой кривой l после непрерывного движения нормали вдоль этой кривой до возврата в исходную позицию нормаль не поменяла свое напрвaление. Далее будем рассматривать только кусочно-гладкие двухсторонние поверхности.

Пусть на множестве $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^3$ заданы три скалярные функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ и пусть $S^+ = (S, \vec{q})$ – положительная сторона простой гладкой поверхности, $S \subset E$. Поверхностные интегралы первого рода

$$\iint\limits_S P(x,y,z)cos(\vec{q},\vec{i})dS, \iint\limits_S P(x,y,z)cos(-\vec{q},\vec{i})dS$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)cos(\vec{q},\vec{j})dS, \iint\limits_S Q(x,y,z)cos(-\vec{q},\vec{j})dS$$

$$\iint\limits_S R(x,y,z)cos(\vec{q},\vec{k})dS, \iint\limits_S R(x,y,z)cos(-\vec{q},\vec{k})dS$$

относятся к **поверхностным интеграла второго типа** и обозначаются соответственно

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz, \iint\limits_{S^-} P(x,y,z)dydz$$

$$\iint\limits_{S^+} Q(x,y,z)dxdz, \iint\limits_{S^-} Q(x,y,z)dxdz$$

$$\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy, \iint\limits_{S^-} R(x,y,z)dxdy$$

Чаще всего рассматривают сумму интегралов $\iint\limits_{S^+} Pdydz + \iint\limits_{S^+} Qdxdz + \iint\limits_{S^+} Rdxdy$ и обозначают её как:

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Свойства ПОВИ-2:

Свойство 27.1.

ПОВИ-2 меняет знак при замене стороны поверхности на противоположную.

$\diamondsuit$ Докажем для интеграла $\iint\limits_{S^+} Rdxdy$

Обозначим за $(\vec{a}, \vec{b})$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Поскольку $(\vec{q}, \vec{k}) + (-\vec{q}, \vec{k}) = \pi$, то

$$cos(\vec{q}, \vec{k}) = -cos(-\vec{q}, \vec{k}), \iint\limits_{S^+} Rdxdy = -\iint\limits_{S^-} Rdxdy$$

$\blacksquare$

Свойство 27.2 (формулы сведения ПОВИ-2 к двойному интегралу).

Если функции $P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ интегрируемы по Риману на $\overline{D}$ и нормаль $\vec{q}$, которая соответствует положительной стороне $S^+ = (S, \vec{q})$ простой гладкой поверхности S, совпадает с вектором

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{A}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\vec{i} + \frac{B}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\vec{j} + \frac{C}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\vec{k},$$

то

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{\overline{D}} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))Adudv$$

$$\iint\limits_{S^+} Q(x,y,z)dxdz = \iint\limits_{\overline{D}} Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))Bdudv$$

$$\iint\limits_{S^+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))Cdudv$$

Если же $\vec{q} = -\vec{n}$, то в правых частях формул выше знак меняется на противоположный.

$\diamondsuit$ Докажем для интеграла $\iint\limits_{S^+} Rdxdy$

Поскольку

$$cos(\vec{n}, \vec{k}) = \frac{([\vec{r}_u, \vec{r}_v], \vec{k})}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{C}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\iint\limits_{S+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} R(x,y,z)cos(\vec{n},\vec{k}ds =$$

$$\iint\limits_{\overline{D}} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}\sqrt{EG-F^2}dudv =$$

$$\iint\limits_{\overline{D}} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))Cdudv.$$

■

Свойство 27.3 (явное задание поверхности).

Пусть поверхность S является графиком непрерывно дифференцируемой функции z = f(x,y), $(x,y) \in \overline{D}$, и пусть $(S,\vec{n}) = S+$ – сторона поверхности, соответствующая

$$\vec{n} = \frac{-f'_x}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}\vec{i} + \frac{-f'_y}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}\vec{k}.$$

Формулы сведения ПОВИ-2 к 2И в этом случае имеют вид

$$\iint\limits_{S+} P(x,y,z)dydz = -\iint\limits_{\overline{D}} P(x,y,f(x,y))f'_x(x,y)dydz,$$

$$\iint\limits_{S+} Q(x,y,z)dxdz = -\iint\limits_{\overline{D}} Q(x,y,f(x,y))f'_y(x,y)dxdz,$$

$$\iint\limits_{S+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} R(x,y,f(x,y))dxdy,$$

Свойство 27.4 (замена параметрического уравнения).

Рассмотрим гладкую поверхность $S : x = x(u,v), y = (u,v), z = (u,v) \in \overline{D}$, и диффеоморфное преобразование

$$\begin{cases} u = \varphi(t,\tau) \\ v = \psi(t,\tau) \end{cases}$$

ограниченной замкнутой области $\overline{E} = E \cup \partial E$ в $\overline{D}$. Якобиан этого преобразования $I(t,\tau)$ непрерывен и не равен нулю. Такое диффеоморфное преобразование называют допустимой заменой параметров, если для любых $(t,\tau) \in \overline{E}$ его якобиан положителен. Пусть $u = \varphi(t,\tau), v = \psi(t,\tau), (t,\tau) \in \overline{E}$, - допустимая замена параметров. Рассмотрим гладкую поверхность

$$L : \begin{cases} x = \xi(t,\tau) = x(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)) \\ y = \eta(t,\tau) = y(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)) \\ z = \chi(t,\tau) = z(\varphi(t,\tau),\psi(t,\tau)) \end{cases} \quad (t,\tau) \in \overline{E}$$

Говорят, что поверхность L получена из поверхности S с помощью допустимой замены параметров $u = \varphi(t,\tau), v = \psi(t,\tau), (t,\tau) \in \overline{E}$, и определён интеграл

$$\iint\limits_{S+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{L+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy,$$

где $L+ = (L, \vec{q}(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)))$.

$\diamondsuit$ Докажем для интеграла $\iint\limits_{S+} Rdxdy$ в случае $\vec{q} = \vec{n} = \dfrac{A}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\vec{i} + \dfrac{B}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\vec{j} + \dfrac{C}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\vec{k}$

$$\iint\limits_{S+} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))C(u,v)dudv.$$

Используем замену переменных

$$\begin{cases} u = \varphi(t,\tau) \\ v = \psi(t,\tau) \end{cases} \quad (t,\tau) \in \overline{E}$$

в двойном интеграле последней формулы:

$$\iint\limits_{S+} Rdxdy = \iint\limits_{\overline{E}} R(x(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)), y(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)), z(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau)e3)C(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau))I(t,\tau)dtd\tau$$

Так как $C(\varphi(t,\tau), \psi(t,\tau))I(t,\tau) = \xi'_t\eta'_\tau - \eta'_t\xi\tau' = C_1(t,\tau)$, то

$$\iint\limits_{S+} Rdxdy = \iint\limits_{\overline{E}} R(\xi(t,\tau), \eta(t,\tau), \chi(t,\tau))C_1(t,\tau)dtd\tau = \iint\limits_{L+} R(x,y,z)dxdy$$

$\blacksquare$

Замечание 27.1. *Согласно четвертому свойству поверхностных интегралов второго типа, значения интеграла для всех поверхностей, параметрические уравнения которых связаны допустимыми заменами параметров, совпадают. Поэтому часто при задании поверхностного интеграла задают лишь множество точек в пространстве, соответствующее поверхности, не указывая параметрические уравнение поверхности. В этом случае предполагается, что существует такое параметрическое уравнение, соответствующее указанному множеству, что поверхность с этим уравнением является простой гладкой. В этом случае интеграл вычисляется по этой поверхности или по любой другой, полученной из нее допустимой заменой параметров.*

Свойство 27.5.

Если S – цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна оси Oz, то $cos(\vec{n}, \vec{k}) = 0$, откуда $\iint\limits_{S+} R(x,y,z)dxdy = 0$.

Свойство 27.6.

Пусть $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ – разбиение кусочно-гладкой поверхности S. Тогда из аддитивности двойного интеграла

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz := \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i^+} Pdydz,$$

$$\iint\limits_{S^+} Qdxdz := \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i^+} Qdxdz,$$

$$\iint\limits_{S^+} Rdxdy := \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{S_i^+} Rdxdy,$$

Пример 27.1. *Вычислить ПОВИ-2*

$$I = \iint\limits_{S^+} xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

где S^+ *- внутренняя сторона цилиндра:*

$$x^2 + y^2 = a^2, -h \leqslant z \leqslant h$$

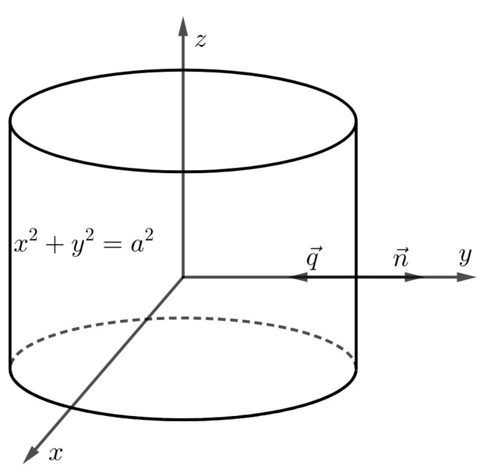
Запишем параметрическое уравнение поверхности S:

$$\begin{cases} x = acos(u), \\ y = asin(u), \\ z = v, \end{cases} \quad D: \begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \\ -h \leqslant v \leqslant h \end{cases}$$

Найдём коэфициенты A, B, C для S:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} = acos(u), B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} = asin(u), C = 0.$$

Вектор $\vec{n} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\vec{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\vec{j} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\vec{k} \right) \Big|_{(\frac{\pi}{2},0)} = \vec{j}$ сонаправлен с осью Oy, а вектор $\vec{q}$, соответствующий внутренней стороне цилиндра в той же точке поверхности, противонаправлен этой оси.



Отсюда $\vec{q} = -\vec{n}$. Используя формулы сведения ПОВИ-2 к двойному интегралу, получим
$I = -\iint\limits_D acos(u) \cdot acos(u) + asin(u) \cdot asin(u) = -\iint\limits_D a^2 dudv = -a^2$ пл.$D = -4\pi a^2 h$

28 Формула Остроградского

Пусть есть $T \in \mathbb{R}^3$ - ограниченное замкнутое тело, граница которого ∂T является простой кусочно-гладкой поверхностью. За положительную сторону ∂T^+границы тела T принимаем внешнюю сторону $(\partial T, \vec{n})$.

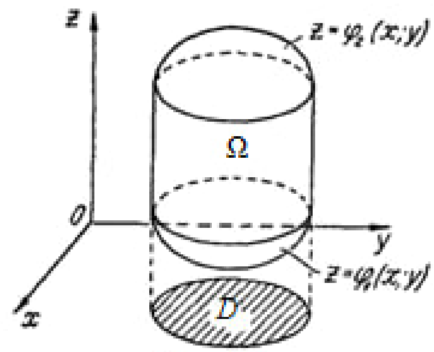


Рис. 1

Лемма 28.1. *Пусть T – цилиндроид, элементарный относительно оси Oz, а S - поверхность этого цилиндроида, $S = \partial T$. Пусть $R(x, y, z)$ - непрерывно дифференцируемая на T функция, а φ_1 и φ_2 – функции, ограничивающие цилиндроид. Тогда*

$$\iint\limits_{S^+} Rdxdy = \iiint\limits_{T} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$$

$\diamondsuit$

$$\iiint\limits_{T} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{D} dxdy(R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))) =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_2(x, y))dxdy - \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_1(x, y))dxdy =$$

$$= \left[\iint\limits_{S_1^+} Rdxdy = \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_2(x, y))Cdxdy, C = 1 \text{ в силу явного задания поверхности } S_1 \right] =$$

$$= \iint\limits_{S_1^+} Rdxdy - \iint\limits_{S_2^+} Rdxdy = \iint\limits_{S_1^+} Rdxdy + \iint\limits_{S_2^-} Rdxdy$$

$\iint\limits_{S_3} Rdxdy = 0$ из свойства 27.5 ПОВИ-2. Тогда $S^+ = S_1^+ \cup S_2^- \cup S_3 = S_1^+ \cup S_2^-$ и

$$\iint\limits_{S_1^+} Rdxdy + \iint\limits_{S_2^-} Rdxdy = \iint\limits_{S^+} Rdxdy$$

■

Теорема 28.1 (формула Остроградского)**.** *Пусть тело $T \in \mathbb{R}^3$ - ограниченное замкнутое тело, граница которого ∂T является простой кусочно-гладкой поверхностью, а $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемые на T функции. Тогда верна следующая формула:*

$$\int\limits_{\partial T^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iiint\limits_{T} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$$

♢ Назовем тело T составным, если его можно разбить на конечное число цилиндроидов, элементарных относительно каждой из осей. Доказательство приведем для случая, когда T - составное. Разобьем T на конечное объединение цилиндроидов T_i, элементарных относительно оси Oz. К каждой части применим лемму:

$$\iint\limits_{\partial T_i^+} Rdxdy = \iiint\limits_{T_i} \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz$$

Используя свойство аддитивности 27.6 получаем:

$$\iint\limits_{\partial T^+} Rdxdy = \iiint\limits_{T} \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz$$

По аналогии для осей Ox и Oy получим

$$\iint\limits_{\partial T^+} Qdxdz = \iiint\limits_{T} \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz$$

$$\iint\limits_{\partial T^+} Pdydz = \iiint\limits_{T} \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz$$

■

Формула Стокса

Пусть S – простая кусочно-гладкая поверхность

$$S : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D}, \quad D - \text{ограниченная область} \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

$l = \partial D,\ l : \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} t \in [a,b]$. Пусть l – простая кусочно-гладкая кривая. Край поверхности S – кривая

$$L : \begin{cases} x = x(u(t), v(t)), \\ y = y(u(t), v(t)), \quad t \in [a,b], \\ z = z(u(t), v(t)), \end{cases}$$

Теорема 28.2 (формула Стокса)**.** *Пусть S - кусочно-гладкая поверхность. ∂S - простая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$. И пусть $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемые на S функции. Тогда верна формула:*

$$\int\limits_{\partial S^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S^+} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz$$

$\diamondsuit$ Доказательство проведем для случая, когда S - дважды непрерывно дифференцируемая поверхность. Рассмотрим первое слагаемое из левой части формулы:

$$\int\limits_{\partial S^+} Pdx = \int\limits_{L^+} Pdx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t)))(x'_u(u(t),v(t))u'(t) + x'_v(u(t),v(t))v'(t))dt =$$

$$= [\text{сводим КРИ-2 в пространстве к КРИ-2 на плоскости}] =$$

$$= \int\limits_{l^+} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left(x'_u(u,v)du + x'_v(u,v)dv\right) =$$

$$= [\text{применим формулу Грина13.2}] =$$

$$= \iint\limits_D (\frac{\partial}{\partial u}(Px'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Px'_u)dudv =$$

$$= \iint\limits_D ((\frac{\partial P}{\partial x}x'_u + \frac{\partial P}{\partial y}y'_u + \frac{\partial P}{\partial z}z'_u)x'_v + Px''_{vu} - ((\frac{\partial P}{\partial x}x'_v + \frac{\partial P}{\partial y}y'_v + \frac{\partial P}{\partial z}z'_v)x'_u + Px''_{uv}))dudv =$$

$$= [\text{поскольку } S \text{ - дважды непрерывно дифференцируема, то } Px''_{vu} = Px''_{uv}, \text{ сокращаем}] =$$

$$= \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}y'_u x'_v + \frac{\partial P}{\partial z}z'_u x'_v - \frac{\partial P}{\partial y}y'_v x'_u - \frac{\partial P}{\partial z}z'_v x'_u =$$

$$= [C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}] =$$

$$= \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}(-C) + \frac{\partial P}{\partial z}B = -\iint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy + \iint\limits_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z}dxdz$$

После аналогичного преобразования Q и R получим требуемое равенство. ■

29 Элементы теории поля

Рассмотрим Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Пусть $T \in \mathbb{R}^3$ – ограниченное замкнутое тело, граница которого ∂T является простой кусочно-гладкой поверхностью. Некоторые непрерывно дифференцируемые функции f, F в зависимости от их множетва значений называют скалярным или векторным полем:

$$f : T \to \mathbb{R} \qquad \text{Скалярное поле}$$

$$F : T \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{Векторное поле}$$

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

1. Градиент скалярного поля

$$\operatorname{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\operatorname{grad}(f) : T \to \mathbb{R}$$

Градиент указывает направление масимального роста функции f

2. Дивергенция векторного поля

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\operatorname{div}(F) : T \to \mathbb{R}$$

Дивергенция – мера того, насколько выходящий поток отличается от входящего в окрестности некоторой точки.

$\operatorname{div}(F) = \lim\limits_{|V| \to 0} \dfrac{\varphi_F}{|V|}, \quad \varphi_F = \iint\limits_{\partial V} (F, \vec{n}) ds$ – поток векторного поля F через границу объёма V в направлении внешней нормали.

Если $\operatorname{div}(F) = 0$, значит входящий и выходящий потоки одинаковы.

3. Ротор векторного поля

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$\operatorname{rot}(F)$ – угловая скорость, $\operatorname{rot}(F) = 2\omega$

4. Циркуляция векторного поля

   Пусть есть $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ и l^+ - замкнутый кусочно-гладкй путь в $\mathbb{R}^3$. Тогда циркуляция – $\oint\limits_{l^+}(F, dr)$, где $dr = (dx \quad dy \quad dz)$, т.е КРИ-2 $\oint\limits_{l^+} Pdx + Qdy + Rdz$ Т.е циркуляция - это работа, которую совершает векторное поле F при перемещении точки вдоль пути l^+

Некоторые именные формулы можно запистьс использованием введенных обозначений.
Формула Остроградского:

$$\int\limits_{\partial V^+} (F, \vec{n})ds = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}(F)dxdydz$$

Формула Стокса:

$$\oint\limits_{l^+}(F, dr) = \iint\limits_{S^+}(\operatorname{rot} F, \vec{n})ds$$

Определение 29.1. *Векторное поле $F : T \to \mathbb{R}^3$ называется потенциальным, если для любого простого замкнутого кусочно-гладкого пути $l^+ : \oint\limits_{l^+}(F, dr) = 0$.*

Определение 29.2. *Векторное поле $F : T \to \mathbb{R}^3$ называется соленоидальным, если для любого ограниченного замкнутого тела $V \in T : \iint\limits_{\partial V^+}(F, \vec{n})ds = 0$.*

Теорема 29.1 (о независимости КРИ-2 от пути интегрирования)**.** *Пусть $F : T \to \mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемая в односвязной области $T \in \mathbb{R}^3$. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *Векторное поле F потенциально в T;*
2. *$\int\limits_{AB^+} (F, dr)$ не зависит от кусочно-гладкого пути, соединяющего точки $A, B \in T$;*
3. *Существует потенциал $u : T \to \mathbb{R}$, т.е функция, такая, что* $\operatorname{grad}(u) = F$ $\forall (x, y, z) \in T$
4. *F - безвихревое, т.е* $\operatorname{rot}(F) = 0$

$\diamondsuit$ Упражнение $\blacksquare$

Теорема 29.2 (критерий соленоидальности)**.** *Пусть $F : T \to \mathbb{R}$ непрерывное дифференцируемое в односвязной области T. F соленоидальное в T тогда и только тогда, когда* $\operatorname{div}(F) = 0$ $\forall (x, y, z) \in T$

$\diamondsuit$ *Необходимость.*
Пусть векторное поле соленоидальное ($\forall V \subseteq T \iint\limits_{\partial V^+}(F, \vec{n})ds = 0$)

Пусть $\exists (x_0, y_0, z_0) : \operatorname{div}(F) \neq 0$. Пусть для определенности $\operatorname{div}(F)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} > 0$. По теореме о стабилизации знака 2.1 существует шар $B(x_0, y_0, z_0) \subset T$, на котором $\operatorname{div}(F) > 0$

$0 = \iint\limits_{\partial B^+} (F, \vec{n}) ds = \iiint\limits_{B} \operatorname{div}(F) dxdydz > 0$. Противоречие.
Достаточность
Предположим, что $\operatorname{div}(F) = 0$, применим формулу Остроградского 28.1. $\forall V \subseteq T$, $\iint\limits_{\partial V^+} (F, \vec{n}) ds = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}(F) dxdydz = 0$ ■

Пример 29.1.

$$\iint\limits_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Где S^+ *- внутренняя сторона цилиндра* $x^2 + y^2 = a^2, -h \leqslant z \leqslant h$

$$S: \begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi, \quad (\varphi, v) \in \overline{D} = [0, 2\pi] * [-h, h] \\ z = v \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} y'_\varphi & y'_v \\ z'_\varphi & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a\cos\varphi, B = \begin{vmatrix} z'_\varphi & z'_v \\ x'_\varphi & x'_v \end{vmatrix} = a\sin\varphi, C = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_v \\ y'_\varphi & y'_v \end{vmatrix} = 0.$$

$$\vec{n} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$I = -\iint\limits_{D} (a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi + v * 0) d\varphi dv = -4\pi a^2 h$$

Пример 29.2. *Вычислить интеграл:*

$$I = \iint\limits_{S} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

S *- внешняя сторона куба:* $0 \leqslant x, y, z \leqslant a$

$$I = [\text{по формуле Остроградского}]\ 28.1 = 2 \iiint\limits_{0 \leqslant x,y,z \leqslant a} (x + y + z) dxdydz = 3a^4$$

Пример 29.3.

$$I = \oint\limits_{C} ydx + zdy + xdz, \quad C - \textit{окружность} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$

пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Используем формулу Стокса 28.2:

$$\oint\limits_{l^+} (F, dr) = \iint\limits_{S^+} (\operatorname{rot} F, \vec{n}) ds$$

Найдем ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(-1) + \vec{j}\cdot(-1) + \vec{k}\cdot(-1)$$

Вектор нормали – $\vec{n} = (1,1,1)$, а единичный вектор нормали – $\vec{q} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Получаем:

$$I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz = \iint\limits_S -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} ds = -\sqrt{3}\iint\limits_S ds = -\pi\sqrt{3}$$

30 Числовые ряды

Пусть задана последовательность чисел $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_n,\ \dots$; где $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}$

Определение 30.1. *Формальное выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots$ будем называть рядом и записывать кратко $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а a_n будем называть общим членом ряда. Если $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$, то ряд называется числовым. Сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ будем называть частной (частичной) суммой ряда.*

Определение 30.2. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если последовательность частных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к конечному числу, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Иначе говорят, что ряд рассходится, то есть последовательность $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ не является сходящейся. S называется суммой ряда*

Пример 30.1.
Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ *– расходящийся;*
Ряд $(1-1) + (1-1) + \dots$ *– сходящийся;*

Теорема 30.1 (необходимое условие сходимости)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\diamondsuit$
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ сходится $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,\ \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} S - S = 0.$

$\blacksquare$

Однако, это условие не является достаточным, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ рассходится (этот ряд называют гармоническим).

Определение 30.3. *Положительный числовой ряд - числовой ряд, где $a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Если $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, то говорят, что ряд строго положительный.*

Теорема 30.2 (критерий сходимости положительного ряда). *Пусть задан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность (S_n) ограниченна.*

$\diamondsuit$

Если ряд положительный, то (S_n) является монотонно возрастающей. Тогда ряд сходится $\Leftrightarrow$ (S_n) сходится $\Leftrightarrow$ (S_n) является ограниченной.

$\blacksquare$

Теорема 30.3 (признак сравнения). *Пусть заданы два положительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.*

$\diamondsuit$

Пусть A_n - частные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а B_n - частные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow$ последовательность (B_n) ограниченна по критерию сходимости положительного ряда. $0 \leqslant A_n \leqslant B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ последовательность (A_n) ограниченна $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по критерию сходимости ряда.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

$\blacksquare$

Определение 30.4. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - числовой ряд, тогда $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ - остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*

Очевидно, что сходимость ряда равносильна сходимости его остатка.
Если $\exists m : a_n \geqslant 0$ $\forall n \geqslant m$, то такой ряд тоже будем называть положительным.

Теорема 30.4 (предельный признак сравнения). *Пусть заданы строго положительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, тогда если:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l, \;\; 0 < l < \infty$

   то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся либо расходятся одновременно.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

   то если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится, а если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$

то если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, а если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *также расходится.*

$\diamondsuit$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$, $0 < l < \infty$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| \leqslant \varepsilon$$

$$l - \varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant l + \varepsilon,\ (l-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (l+\varepsilon)b_n$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}:\ \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{l}{2}b_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3l}{2}b_n$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда сходится и остаток ряда $\sum\limits_{n=n_0(\varepsilon)}^{\infty} b_n$. А поскольку $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{3l}{2}b_n\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$, то по признаку сравнения 30.3 ряд $\sum\limits_{n=n_0(\varepsilon)}^{\infty} a_n$ сходится, а значит сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Аналогично для других случаев.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \varepsilon$$

$$0 \leqslant a_n \leqslant \varepsilon b_n$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда сходится и остаток ряда $\sum\limits_{n=n_0(\varepsilon)}^{\infty} b_n$. А поскольку $0 \leqslant a_n \leqslant \varepsilon b_n\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$, то по признаку сравнения 30.3 ряд $\sum\limits_{n=n_0(\varepsilon)}^{\infty} a_n$ сходится, а значит сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Второй случай рассматривается аналогично.

3. Аналогично пункту 2

$\blacksquare$

Пример 30.2. *Геометрический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ *имеет частные суммы*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q}$$

При $|q| < 1$ $S_n \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{1}{1-q}$ *и в этом случае геометрический ряд сходится, а при* $|q| \geqslant 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} \neq 0$ *и геометрический ряд расходится.*

Покажем, что если ряд обладает схожими с геометрическим рядом свойствами, то он также будет сходится.

Теорема 30.5 (признак Коши)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *- положительный ряд. Пусть* $\sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\to} q$, *тогда при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $q > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

$\diamondsuit$

1. $q < 1 \Rightarrow \exists r : q < r < 1$

   $\exists m :\ \sqrt[n]{a_n} \leqslant r \quad \forall n \geqslant m \Rightarrow a_n \leqslant r^n$

   Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ сходится, так как $|r| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку сравнения.

2. $q > 1 \Rightarrow \exists m :\ \sqrt[n]{a_n} \geqslant 1\ \forall n \geqslant m \Rightarrow a_n \geqslant 1\ \forall n \geqslant m$

   $a_n \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$ - нарушается необходимое условие сходимости 30.1 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

$\blacksquare$

Лемма 30.1. *Если* $a_n > 0$ *,* $b_n > 0$ *и*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

$\diamondsuit$

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножив эти неравенства, получаем

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_1},\ a_{n+1} \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_{n+1} \quad \forall n.$$

Далее применим признак сравнения 30.3 и получим требуемое.

$\blacksquare$

Теорема 30.6 (признак Даламбера). *Пусть задан строго положительный числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\to} q$, *тогда при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $q > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

$\diamondsuit$

1. $\exists r : q < r < 1$

   $\exists m : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r \ \forall n \geqslant m$, тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{r^{n+1}}{r^n}$

   Рассмотрим ряд $b_n = r^n$, в примере 30.2 было доказано, что он сходится, тогда по Лемме 30.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2. $q > 1 \Rightarrow \exists m : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \ \forall n \geqslant m$. Тогда $a_{n+1} \geqslant a_n$.

   $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

$\blacksquare$

31 Интегральный и степенной признаки. Признаки повышенной точности

Определение 31.1. *Функцию* $f(x)$ *называют производящей функцией ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *если* $f(n) = a_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Теорема 31.1 (интегральный критерий). *Пусть задан положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *а* $f(x)$ *его производящая функция. Если функция* $f(x)$ *убывает, то для сходимости ряда необходимо и достаточно существование конечного предела* $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_1^A f(x)dx$ *(для удобства его обозначают как* $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$*).*

$\diamondsuit$

Поскольку функция $f(x)$ убывает, то

$$a_k \geqslant f(x) \geqslant a_{k+1} \quad \forall x \in [k, k+1] \Rightarrow a_k \geqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \geqslant a_{k+1}.$$

Используя аддитивность интеграла:

$$s_n \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \geqslant s_{n+1} - a_1 \tag{14}$$

Последовательность s_n и функция $F(A) = \int\limits_1^A f(x)dx$ являются возрастающими. Из двойного неравенства (14) вытекает, что последовательность s_n и функция $F(A)$ одновременно ограничены (неограничены), то есть ряд и интеграл сходятся (расходятся).

$\blacksquare$

Пример 31.1. *Гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *расходится, хотя его члены стремятся к нулю. Действительно,*

$$\int\limits_1^A \frac{dx}{x} = \ln A \underset{A\to\infty}{\to} +\infty.$$

Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \neq 1$, *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha < 1$, *так как*

$$\int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{A^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \underset{A\to\infty}{\to} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если} \quad \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{если} \quad \alpha < 1 \end{cases}$$

Теорема 31.2 (степенной признак)**.** *Пусть задан положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Если член ряда* $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{M}{n^\alpha}$, $M = const$, $0 < M < +\infty$, *то при* $\alpha > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $\alpha \leqslant 1$ *расходится.*

$\diamondsuit$

Вынесем константу и проверим на сходимость гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. В примере 31.1 получено, что при $\alpha > 1$ ряд сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ рассходится. Теперь, применив предельный признак сравнения 30.4, теорема доказана.

$\blacksquare$

Теорема 31.3 (признак Раабе)**.** *Если*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q,$$

то при $q > 1$ *положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $q < 1$ *расходится.*

$\diamondsuit$

Пусть $q > 1$. Возьмем числа p и s такие, что $1 < s < p < q$. Существует номер n_0 такой, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant p \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \frac{p}{n} + 1 \quad \forall\ n \geqslant n_0 \tag{15}$$

Из степенного замечательного предела имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^s-1}{\dfrac{1}{n}}=s$$

Значит существует номер $n_1 \geqslant n_0$ такой, что

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^s-1}{\dfrac{1}{n}}\leqslant p \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^s\leqslant\frac{p}{n}+1\ \forall n\geqslant n_1 \tag{16}$$

Из неравенств (15) и (16) следует, что

$$(1+\frac{1}{n})^s\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}\ \Rightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{1}{(1+\dfrac{1}{n})^s}=\frac{\dfrac{1}{(n+1)^s}}{\dfrac{1}{n^s}}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ сходится. По лемме 30.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ также сходящийся.
Пусть теперь $q<1$. Существует номер n_0 такой, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1\ \forall n\geqslant n_0\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant\frac{1}{n}+1\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=\frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}$$

Гармонический ряд расходится. По лемме 30.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ также расходящийся.

■

Пусть задан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и известно что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+o(\dfrac{1}{n})$. Признак Даламбера 30.6 помогает определить сходимость при $\lambda\neq 1$, при $\lambda=1$ и $\mu\neq 1$ помогает признак Раабе 31.3. Но что делать, когда $\lambda=1$, $\mu=1$?

Теорема 31.4 (признак Куммера)**.** *Пусть задан положительный расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ и положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Определим последовательность $k_n=c_n\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}$.*

1. *Если $\exists n_0\in\mathbb{N}:\exists\delta>0\ \forall n\geqslant n_0\Rightarrow k_n\geqslant\delta$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.*

2. *Если же $\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geqslant n_0\ \Rightarrow k_n\leqslant 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.*

♢

1. $k_n\geqslant\delta>0$

$$c_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\geqslant\delta\ \Rightarrow\ c_na_n-c_{n+1}a_{n+1}\geqslant\delta a_{n+1}\geqslant 0$$

Последовательность $\beta_n = c_n a_n$ монотонно убывает и ограничена снизу, Значит (β_n) сходится. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1})$, он сходится, так как частные суммы $S_n = \beta_1 - \beta_{n+1}$ сходятся. Теперь по признаку сравнения 30.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta a_n$ тоже сходится.

Замечание 31.1. *В первой части доказательства не было использовано, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ *является расходящимся.*

2. $k_n \leqslant 0$

$$c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0 \ \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{\frac{1}{c_n}}{\frac{1}{c_{n+1}}}$$

По признаку сравнения 30.3, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ также расходится.

■

Пример 31.2.
Если $c_n = 1$, *то* $k_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1$ *– признак Даламбера* 30.6.
Если $c_n = n$, *то* $k_n = n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1$ *– признак Раабе* 31.3

Следствие 31.1 (предельный признак Куммера)**.** *Если* $k = \lim\limits_{n\to\infty} k_n$, *то при* $k > 0$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $k < 0$ *расходится.*

♢
В признаке Куммера устремим n к бесконечности, тогда получим требуемое.

■

Пример 31.3. *Если* $c_n = n\ln n$, *то* $\int\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln x} = \int\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{d\ln x}{\ln x} = \ln\ln x\Big|_2^{\infty} = \infty$. *То есть по интегральному признаку* 31.1 *последовательность* $c_n = n\ln n$ *подходит под условия признака Куммера* 31.4.

$$k_n = n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) = \ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Пусть $B_n = \ln n\left(n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)$.

Следствие 31.2 (признак Бертрана)**.** *Если* $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, *то при* $B > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $B < 1$ *расходится.*

$\diamondsuit$

В примере 31.3 достаточно заметить, что $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1$ и применить предельный признак Куммера 31.1.

$\blacksquare$

Теорема 31.5 (признак Гаусса). *Пусть задан строго положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},\ |\theta_n| \leqslant M$$

Если $M > 0$ *и* $\varepsilon > 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

$\diamondsuit$

Применим признак Бертрана 31.2:

$$B_n = \ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \leqslant \ln n\left(n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{M}{n^{1+\varepsilon}} - 1\right) - 1\right) = M\cdot\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Так же $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} - \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, поэтому повторив преобразования строчкой выше получаем:

$$B_n \geqslant -M\cdot\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Тогда воспользовавшись леммой о двух полицейских получаем $B_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а значит, по признаку Бертрана 31.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является расходящимся.

$\blacksquare$

Замечание 31.2. *Если* $a_n \leqslant 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называют отрицательным. Из соотношения* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = -\sum\limits_{k=1}^{n}(-a_k)$ *следует, что сходимость отрицательного ряда равносильна сходимости положительного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-a_n)$.

32 Признаки Лейбница, Дирихле и Абеля

Определение 32.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, a_n \geqslant 0$ *называется знакочередующимся.*

Теорема 32.1 (признак Лейбница).

Если последовательность a_n *монотонно убывает и стремится к* 0, *то знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится.*

$\diamondsuit$

Четные частные суммы ряда можно записать следующими двумя образами:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

Из первого равенства следует, что последовательность (S_{2m}) – монотонно возрастающая: $0 \leqslant S_{2m} \leqslant S_{2m+2}$, а из второго – её ограниченность сверху: $S_{2m} \leqslant a_1\ \forall m \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = \overline{S}, \overline{S} \in \mathbb{R}$. Проделаем тоже самое с нечётными суммами:

$$S_{2m+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2m} - a_{2m+1}) = (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}) + a_{2m+1}$$

Из первого равенства следует, что последовательность (S_{2m+1}) – положительна и убывает: $S_{2m-1} \geqslant S_{2m+1}$, а из второго – её ограниченность снизу: $S_{2m+1} \geqslant 0,\ \forall m \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \underline{S},\ \underline{S} \in \mathbb{R}$. Поскольку $S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1} \underset{m\to\infty}{\to} 0$, то пределы $\overline{S}$ и $\underline{S}$ совпадают, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = S = \overline{S} = \underline{S}$, откуда и вытекает сходимость ряда.

■

Лемма 32.1.
Пусть $a_1, \ldots, a_p$ – монотонно возрастающая последовательность, а $b_1, \ldots, b_p$ – произвольная последовательность чисел. Пусть $B_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i,\ |B_k| \leqslant M,\ \forall k = \overline{1,p}$, тогда

$$\left| \sum_{i=1}^{p} a_i b_i \right| \leqslant M \cdot (|a_1| + 2|a_p|)$$

♢
Для возрастающей последовательности чисел a_i:

$$S_p = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_p b_p = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \ldots + a_p (B_p - B_{p-1}) =$$
$$= (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \ldots + (a_{p-1} - a_p) B_{p-1} + a_p B_p$$

$$|S_p| \leqslant |a_1 - a_2||B_1| + |a_2 - a_3||B_3| + \ldots + |a_{p-1} - a_p||B_{p-1}| + |a_p||B_p| \leqslant$$
$$\leqslant M(a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \ldots a_p - a_{p-1} + |a_p|) \leqslant M(|a_1| + 2|a_p|)$$

■

Теорема 32.2 (признак Дирихле)**.**
Если последовательность (a_n) монотонно убывает и стремится к нулю, а частные суммы $B_k = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены ($|B_k| \leqslant M,\ \forall k \in \mathbb{N}$), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

♢
Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu(\varepsilon) > 0, \forall n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| \leqslant \varepsilon$
Из второго условия признака Дирихле имеем $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} b_i \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n+p} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \right| \leqslant 2M$$

Используя лемму 32.1 и неравенства, полученные выше, получаем

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leqslant 6M\varepsilon,\ \forall n \geqslant \nu(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N}$$

Полученное выше равенство является критерием Коши сходимости последовательности частичных сумм, а значит ряд $\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i$ сходится по определению 30.2.

■

Пример 32.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},\ x \in (0, \pi)$$

$a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$, *значит* $B_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$

$$|B_n| = \left|B_n \cdot \frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}}{2\sin\frac{x}{2} + \ldots + \cos\frac{(2n-3)}{2} - \cos\frac{(2n-1)x}{2}}\right| = \frac{|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n-1)x}{2}|}{|2\sin\frac{x}{2}|} \leqslant \frac{2}{|2\sin\frac{x}{2}|} = M$$

Тогда по признаку Дирихле 32.2 *ряд сходится.*

Теорема 32.3 (признак Абеля)**.** *Если последовательность a_n является монотонной и ограниченной и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ также является сходящимся.*

♢

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то согласно критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon),\ \forall n \geqslant n_0(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i\right| \leqslant \varepsilon$$

Пусть $|a_n| \leqslant M,\ \forall n \in \mathbb{N}$, тогда используем лемму 32.1 имеем

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i| \leqslant 2\varepsilon(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leqslant 6M\varepsilon,\ \forall n \geqslant \delta(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N}$$

На основании критерия Коши ряд $\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i$ сходится.

■

Пример 32.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{n}$$

Теорема 32.4. *Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

♢

Доказательство слежует из критерия Коши сходимости ряда и определения.

■

33 Действия над числовыми рядами

Линейная комбинация рядов

Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Действительно, $\sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем требуемое.

Группировка членов ряда

В ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сгруппируем слагаемые, объединив без изменения порядка следования по несколько(конечное число) слагаемых.

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1})}_{a'_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + a_{n_2+2} + \ldots + a_{n_2})}_{a'_2} + \underbrace{(a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \ldots + a_{n_3})}_{a'_3} + \ldots$$

Получим новый ряд, последовательность частных сумм которого является подпоследовательностью частных сумм исходного ряда. Поэтому, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$, так как все частные суммы этого ряда содержатся среди сумм исходного ряда.

Раскрытие скобок в общем случае недопустимо, как в примере 30.1. Однако в двух частных случаях раскрытие скобок возможно:

1. После раскрытия скобок получается сходящийся ряд
2. В каждой скобке все слагаемые имеют один и тот же знак

Перестановка членов ряда

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть

$$b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2},\ c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

Тогда $|a_n| = b_n + c_n,\ a_n = b_n - c_n,\ b_n \geqslant 0, c_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Лемма 33.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$

$\Diamond$

Докажем необходимость. $|a_n| \geqslant b_n \geqslant 0,\ |a_n| \geqslant c_n \geqslant 0$. По признаку сравнения 30.3 ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходятся.

Докажем достаточность. Если сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ как сумма этих рядов. $\blacksquare$

Следствие 33.1. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ являются расходящимися.*

$\Diamond$

Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходятся, то согласно лемме 33.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Если один из рядов сходится, а второй расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет бесконечную сумму и, следовательно, рассходится. Таким образом, условная сходимость возможна лишь при одновременной расходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

$\blacksquare$

Определение 33.1. *Пусть задано биективное отображение $\pi:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ называют перестановкой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Теорема 33.1 (о перестановке членов ряда)**.** *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то любая его перестановка является сходящимся рядом с той же суммой.*

$\Diamond$

Пусть $a_n \geqslant 0$. Тогда $\forall \pi:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\widetilde{S_n} = \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)} = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \ldots + a_{\pi(n)} \leqslant \sum_{n=1}^{Q} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Где $Q = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\pi(i)\}$. $\forall n \in \mathbb{N}\ \widetilde{S_n} \leqslant S$, а значит $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ сходится по признаку сравнения 30.3. А так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является перестановкой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$, то также верно $\widetilde{S} \geqslant S$, а значит $S = \widetilde{S}$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ знакопеременный, то представив его в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ и воспользовавшись первой частью доказательства, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{\pi(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

$\blacksquare$

Произведение рядов

Определение 33.2. *Пусть заданы два ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*. Построим последовательность*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *называется произведением рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Замечание 33.1. *Произведение рядов схоже с произведением многочленов.*

Теорема 33.2 (о произведении рядов)**.** *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся абсолютно, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *также сходится абсолютно и верно равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$\diamondsuit$

Пусть $T_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $T_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| = \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k} |a_i||b_{k-i}| \leqslant (\sum_{k=1}^{n} |a_k|)(\sum_{k=1}^{n} |b_k|) \leqslant T_1 T_2$$

Частные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|$ ограничены, следовательно по критерию сходимости положительных рядов этот ряд сходится. Из неравенства

$$(\sum_{k=1}^{n} |a_k|)(\sum_{k=1}^{n} |b_k|) \leqslant T_1 \cdot T_2$$

вытекает, что ряд

$$\begin{aligned}
&a_0 b_0 + \\
&a_0 b_1 + a_1 b_0 + \\
&a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \\
&a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 + \ldots
\end{aligned} \tag{17}$$

является абсолютно сходящимся. Воспользовавшись теоремой о перестановке членов ряда 33.1, представим этот ряд в виде

$$\begin{aligned}
&a_0 b_0 + \\
&a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1 + \\
&a_0 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_0 + \\
&a_0 b_3 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_1 + a_3 b_0 + \ldots
\end{aligned} \tag{18}$$

Этот ряд является сходящимся по теореме о перестановке ряда. Если обозначить через L_k частные суммы ряда (18), то

$$L_1 = a_0b_0$$

$$L_4 = a_0b_0 + a_1b_0 + a_0b_1 + a_1b_1 = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$$

$$L_9 = a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_2b_0 = (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2)$$

$$\dots$$

$$L_{n^2} = (\sum_{k=0}^{n-1} a_k)(\sum_{k=0}^{n-1} b_k)$$

$$\lim_{n\to\infty} L_{n^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$$

Значит сумма ряда (18) равна $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$. Так как ряд (18) является перестановкой ряда (17), то по теореме о перестановке ряда 33.1 их суммы равны. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ получается из ряда (17) группировкой членов, значит по теореме о перестановке ряда 33.1 его сумма равна сумме ряда (17). То есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

■

34 Теорема Римана

Рассмотрим знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \neq 0$.

Обозначим положительные члены ряда как $a_1^+,\ a_2^+,\ \dots,\ a_n^+,\ \dots$

Отрицательные члены ряда обозначим как $-a_1^-,\ -a_2^-,\ \dots,\ -a_n^-,\ \dots$

Лемма 34.1.
Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.

$\diamondsuit$

Пусть $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда последовательность частных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\to} S$.

Пусть $S_m^+ = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i^+$ и $S_k^- = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^-$. Тогда

$$\forall n\ \exists m = m(n),\ k = k(n) :\ S_n = S_m^+ - S_k^-,\ n = m + k$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то

$$\widetilde{S} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S_m^+ + S_k^- \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$$

Значит, что хотя бы одна из последовательностей бесконечно большая. Не теряя общности, предположим, что $S_n^+ \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Тогда $S_n^- \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, поскольку иначе бы последовательность S_n не могла бы сходится. Значит ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.

■

Теорема 34.1 (Римана)**.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно, то для любого действительного* A *существует перестановка ряда, сходящаяся к* A*:*

♢

Пусть $A \geqslant 0$. Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Они расходятся по лемме 34.1.

Возьмём наименьшее n_1 такое, что

$$a_1^+ + \ldots + a_{n_1}^+ \geqslant A$$

Возьмём наименьшее n_2 такое, что

$$a_1^+ + \ldots + a_{n_1}^+ - a_1^- \ldots - a_{n_2}^- \leqslant A$$

Возьмём наименьшее n_3 такое, что

$$a_1^+ + \ldots + a_{n_1}^+ - a_1^- \ldots - a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \ldots + a_{n_3}^+ \geqslant A$$

Возьмём наименьшее n_4 такое, что

$$a_1^+ + \ldots + a_{n_1}^+ - a_1^- \ldots - a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \ldots + a_{n_3}^+ - a_{n_2+1}^- - \ldots - a_{n_4}^- \leqslant A$$

И так далее. Полученный ряд будет являться перестановкой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Докажем, что он сходится к A. Для этого рассмотрим частные суммы этого ряда $S_{n_1}, S_{n_1+n_2}, S_{n_2+n_3} \ldots S_{n_k+n_{k+1}} \ldots$

Видно, что $S_{n_1} > A,\ S_{n_1+n_2} < A,\ S_{n_2+n_3} > A,\ \ldots$

Так как на каждом шаге построения ряда мы брали наименьшее возможное число, то

$$|A - S_{n_k+n_{k+1}}| \leqslant a_{n_{k+1}}^{\pm}$$

Так как $a_{n_{k+1}}^{\pm} \underset{k\to\infty}{\to} 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k+n_{k+1}} = A$$

Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k :$

$$n_k + n_{k+1} \leqslant n \leqslant n_{k+1} + n_{k+2}$$

Тогда выполняется одно из двух неравентсв:

$$S_{n_k+n_{k+1}} \leqslant S_n \leqslant S_{n_{k+1}+n_{k+2}}$$

$$S_{n_k+n_{k+1}} \geqslant S_n \geqslant S_{n_{k+1}+n_{k+2}}$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k+n_{k+1}} = A$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A$$

■

35 Двойные ряды и бесконечные произведения

Определение 35.1. *Если каждой паре натуральных чисел n, m поставлено в соответствие вещественное число a_{mn}, то говорят, что задана двойная последовательность $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$.*

Определение 35.2. *Число A называют пределом двойной последовательности, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall n, m \geqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |a_{nm} - A| \leqslant \varepsilon$$

Пишут $A = \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}$

Определение 35.3. *Двойную последовательность, имеющую предел $A \in \mathbb{R}$, называют сходящейся.*

Определение 35.4. *Наряду с последовательностью (a_{nm}) рассмотрим последовательности (b_m), (c_n), где*

$$b_m = \lim_{n\to\infty} a_{nm}$$

$$c_n = \lim_{m\to\infty} a_{nm}$$

Пределы $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = \lim\limits_{m\to\infty} (\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})$ называют повторными пределами двойной последовательности.

Теорема 35.1 (о двойной последовательности)**.** *Если двойная последовательность a_{nm} сходится и при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует предел $b_m = \lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}$, то*

$$\lim_{n,m\to\infty} a_{nm} = \lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} a_{nm})$$

♢

Пусть $A = \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall n, m \geqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |a_{nm} - A| \leqslant \varepsilon$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем, что $|b_m - A| \leqslant \varepsilon$. Значит $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = A$.

■

Определение 35.5. *Двойную последовательность a_{mn} называют монотонно возрастающей, если*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\ \forall i \geqslant n,\ \forall j \geqslant m \Rightarrow a_{nm} \leqslant a_{ij}$$

Теорема 35.2 (о сходимости монотонно ограниченной двойной последовательности)**.** *Если двойная последовательность (a_{nm}) является монотонной и ограниченой, то она сходится.*

$\diamondsuit$

Пусть $A = \sup\limits_{m,n\in\mathbb{N}} \{a_{nm}\}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon), m(\varepsilon):\ a_{n(\varepsilon)m(\varepsilon)} > A - \varepsilon$$

Поскольку последовательность (a_{nm}) монотонно возрастает, то

$$\forall i, j \geqslant \max\left(n(\varepsilon), m(\varepsilon)\right) \Rightarrow A - \varepsilon < a_{ij} \leqslant A \Rightarrow |a_{ij} - A| \leqslant \varepsilon$$

Значит последовательность (a_{nm}) сходится к A.

$\blacksquare$

Определение 35.6. *Выражение вида $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ называют двойным рядом.*

Частные суммы этого ряда $S_{nm} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{nm}$ образуют двойную последовательность.

Определение 35.7. *Если существует предел частных сумм $\lim\limits_{n,m\to\infty} S_{nm} = A$, то двойной ряд называется сходящимся, а число A его суммой.*

Поскольку последовательность частных сумм положительного двойного ряда ($a_{nm} \geqslant 0$) монотонно возрастает, то двойной ряд, для которого последовательность частных сумм ограничена, является сходящимся.

Определение 35.8. *Ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|$.*

Абсолютно сходящийся двойной ряд является сходящимся (очевидно следует из неравенства треугольника). Из теоремы о двойной последовательности 35.1 сразу вытекает следующая теорема:

Теорема 35.3 (о двойном ряде)**.** *Если двойной ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ сходится и при каждом m сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{nm}$, то*

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}\right)$$

Определение 35.9. *Будем называть бесконечным произведением формальное выражение вида $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots$ и обозначать его как $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$*

Определение 35.10. *Последовательность $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$ называют последовательностью частных произведений бесконечного произведения.*

Определение 35.11. *Будем говорить, что бесконечное произведение* ***сходится****, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, отличный от нуля и бесконечности. В противном случае бесконечное произведение расходится.*

Свойства бесконечных произведений:

Свойство 35.1 (необходимое условие сходимости)**.** *Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.*

$\diamondsuit$ Произведение сходится, значит $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = A$, $A \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{A}{A} = 1$$

$\blacksquare$

Свойство 35.2.

Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, $(p_n > 0)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$

$\diamondsuit$ Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ сходится к S, а $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(p_k) = S_n$ Тогда $P_n = e^{S_n}$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} e^{S_n} = e^S \neq 0$$

Значит произведение сходится.
И наоборот, если произведение сходится к P, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln P_n = \ln P$$

$\blacksquare$

Свойство 35.3. *Пусть $p_n = 1 + \alpha_n$. Если $\alpha_n > 0$ или $-1 < \alpha_n < 0$, то для сходимость бесконечного произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.*

$\diamondsuit$

Поскольку $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(1 + \alpha_n)$, то по предельному признаку сравнения 30.4 ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ сходятся или расходятся одновременно. Теперь утверждение теоремы вытекает из второго свойства.

$\blacksquare$

Определение 35.12. *Говорят, что бесконечное произведение* ***сходится абсолютно****, если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\ln p_n|$ *сходится.*

Для абсолютной сходимости бесконечного произведения необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходился абсолютно.

Теорема 35.4 (о перестановке членов бесконечного произведения)**.** *Если произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ *сходится абсолютно, то для любой его перестановки заданной биекцией* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *верно, что* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_{\pi(n)}$ *сходится и* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_{\pi(n)} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$.

♢

По свойству 35.2 перейдём к сумме ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$. Тогда, воспользовавшись теоремой о перестановке членов ряда 33.1, утверждение становится очевидным.

■

36 Примеры решения задач

Дифференцирование

Пример 36.1. *Исследовать на дифференцируемость в точке* $(0,0)$ *функцию*

$$f(x,y) : \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Для начала найдем в этой точке частные производные.

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Аналогично получаем, что и $f'_y(0,0) = 0$.

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Так как обе частные производные равны нулю, остается проверить, является ли это выражение $o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$. Проверим:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = [\Delta x = \Delta y] = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x^2}{2\Delta x^2\sqrt{2\Delta x^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}|\Delta x|} = \infty$$

Таким образом, функция не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Пример 36.2. *Требуется найти* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *в точке* $u=1, v=1$*, если* $\begin{cases} x = u + \ln v, \\ y = v - \ln u, \\ z = 2u + v. \end{cases}$

Имеем три уравнения и пять переменных — следовательно, заданы три функции, зависящие от других двух переменных. Из условия нетрудно видеть, что z, u, v – функции, зависящие от x, y. Введём обозначения $\tilde{x} = (x, y), \tilde{y} = (z, u, v)$. Рассмотрим два способа решения задачи.

Способ I. Введём векторную функцию $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = (f_1, f_2, f_3)^T$, имеем систему соотношений:

$$\begin{cases} f_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \\ f_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \\ f_3(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} u + \ln v - x = 0, \\ v - \ln u - y = 0, \\ 2u + v - z = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу Якоби функции $F(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$\frac{dF}{d(\tilde{x}, \tilde{y})} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{v} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{u} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}}\right|_{(1,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\right|_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

По теореме о неявной векторной функции 18.1 система соотношений задаёт неявную непрерывно дифференцируемую функцию $\tilde{y} = \varphi(\tilde{x})$, матрицу Якоби которой найдём по формуле:

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{x}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\right)^{-1} \frac{\partial F}{d\tilde{x}} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Итак, искомые производные есть соответственно элементы первой строки матрицы $\dfrac{d\varphi}{d\tilde{x}}$.

Способ II. Продифференцируем данную в условии систему по переменным x и y:

$$\begin{cases} 1 = u'_x + \dfrac{v'_x}{v}, \\ 0 = v'_x - \dfrac{u'_x}{u}, \\ z'_x = 2u'_x + v'_x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = u'_y + \dfrac{v'_y}{v}, \\ 1 = v'_y - \dfrac{u'_y}{u}, \\ z'_y = 2u'_y + v'_y. \end{cases}$$

Подставляя $u = 1, v = 1$ и решая системы, имеем $z'_x = \dfrac{3}{2}$ и $z'_y = -\dfrac{1}{2}$.

Пример 36.3. *Демидович 3407.2*

Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ *в точке* $u = 2, v = 1$*, если* $\begin{cases} x = u + v^2 \\ y = u^2 - v^3 \\ z = 2uv \end{cases}$.

u, v, z - функции от x, y. Продифференцируем u и v по переменным x и y:

$$\begin{cases} 1 = u'_x + 2vv'_x \\ 0 = 2uu'_x - 3v^2 v'_x \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = u'_y + 2vv'_y \\ 1 = 2uu'_y - 3v^2 v'_y \end{cases}$$

Подставим в равенства известные значения $u = 2$ и $v = 1$.

$$\begin{cases} 1 = u'_x + 2v'_x \\ 0 = 4u'_x - 3v'_x \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = u'_y + 2v'_y \\ 1 = 4u'_y - 3v'_y \end{cases}$$

Откуда $v'_x = \dfrac{4}{11}, u'_x = \dfrac{3}{11}, u'_y = \dfrac{2}{11}, v'_y = -\dfrac{1}{11}$ в точке $(2, 1)$.

Продифференцируем систему производных по y до подстановки второй раз – по переменной x:

$$\begin{cases} 0 = u''_{yx} + 2v'_y v'_x + 2vv''_{yx} \\ 0 = 2u'_y u'_x + 2uu''_{yx} - 6vv'_y v'_x - 3v^2 v''_{yx} \end{cases}$$

Подставим $u = 2$, $v = 1$ и полученные ранее значения производных:

$$\begin{cases} 0 = u'_{xy} - \dfrac{8}{121} + 2v''_{xy} \\ 0 = 4u''_{xy} - 3v''_{xy} + \dfrac{36}{121} \end{cases}$$

Отсюда $u''_{xy} = -\dfrac{48}{1331}, v''_{yx} = \dfrac{68}{1331}$. Из последнего равенства исходной системы можно обозначить $z(x, y) = t(u, v) = 2uv$. Тогда

$$z''_{yx} = t''_{yx} = 2u''_{yx}v + 2u'_x v'_y + 2u'_y v'_x + 2uv''_{yx}$$

Подставляем все известные значения и получаем $z''_{yx} = \dfrac{26}{121}$.

Кратные и криволинейные интегралы

Пример 36.4. *Вычислить тройной интеграл*

$$J = \iiint\limits_T z dx dy dz$$

Где T - тело, ограниченное плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Тело T - цилиндроид, элементарный относительно оси Oz:

$$0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y, (x, y) \in D,$$

где D – фигура, получаемая проецированием области интегрирования на плоскость Oxy. Эта фигура ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 1$. Используя теорему о сведении тройного интеграла к повторному 10.3, имеем:

$$J = \iint\limits_D dx dy \int\limits_0^{1-x-y} z dz = \frac{1}{2} \iint\limits_D (1 - x - y)^2 dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy = [d(1 - x - y) = -dy] = \frac{1}{6} \int\limits_0^1 dx \, (x + y - 1)^3 \Big|_0^{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 (x+1)^3 dx = -\frac{1}{24}(x-1)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

Пример 36.5. *Найти объем тела T, ограниченного поверхностями*

$$S_1 : z = x^2 + y^2, S_2 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

S_1 – эллиптический параболоид, S_2 – конус. Найдем уравнение кривой, по которой пересекаются наши поверхности:

$$x^2 + y^2 = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Проекция тела T на плоскость Oxy – круг $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$. Введём параметризацию цилиндрическими координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \quad |I| = r. \\ z = h, \end{cases}$$

Поверхности S_1 и S_2 перейдут соответственно в поверхности $S_1' : h = r^2$ и $S_2' : h = 2 - r$, а фигура D перейдёт в фигуру $D' : r^2 \leqslant 1$ Тогда объём:

$$\text{об.}T = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_{T'} drd\varphi dh|I| = \iint\limits_D drd\varphi \int\limits_{r^2}^{2-r} dh|I| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_{r^2}^{2-r} dh = 2\pi \int\limits_0^1 (2r - r^2 - r^3)dr = \frac{5\pi}{6}$$

Пример 36.6. *Найти объем тела T, ограниченного конусами второго порядка $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостями $z = 1, z = \frac{1}{2}$*

Введём параметризацию цилиндрическими координатами. Тогда поверхности превратятся в:

$$\begin{cases} h = r\sqrt{3}, \\ h = r, \\ h = 1, \\ h = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad |I| = r.$$

Имеем:

$$\text{об.}T = \iiint\limits_T dxdydz = \iiint\limits_E rdrd\varphi dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 dh \int\limits_{\frac{h}{\sqrt{3}}}^{h} rdr = 2\pi \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right) dh = 2\pi \left(\frac{h^3}{9}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{7\pi}{36}$$

Пример 36.7. *Вычислить криволинейный интеграл 1-ого рода*

$$\int\limits_C x^2 ds$$

Где C – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$

В силу симметрии уравнения окружности относительно всех трёх переменных,

$$C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

, верны равенства:

$$\int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds$$

Тогда

$$\int_C x^2 ds = \frac{1}{3}\int_C \left(x^2+y^2+z^2\right) ds = \frac{1}{3}\int_C a^2 ds = \frac{1}{3}a^2 \text{дл.} C = \frac{1}{3}a^2 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3$$

Ответ: $\dfrac{2}{3}\pi a^3$

Пример 36.8. *В пространстве заданы два цилиндра:* $x^2+z^2=a^2, \quad y^2+z^2=a^2$*. Требуется найти площадь поверхности тела* S*, по которой пересекаются данные цилиндры.*

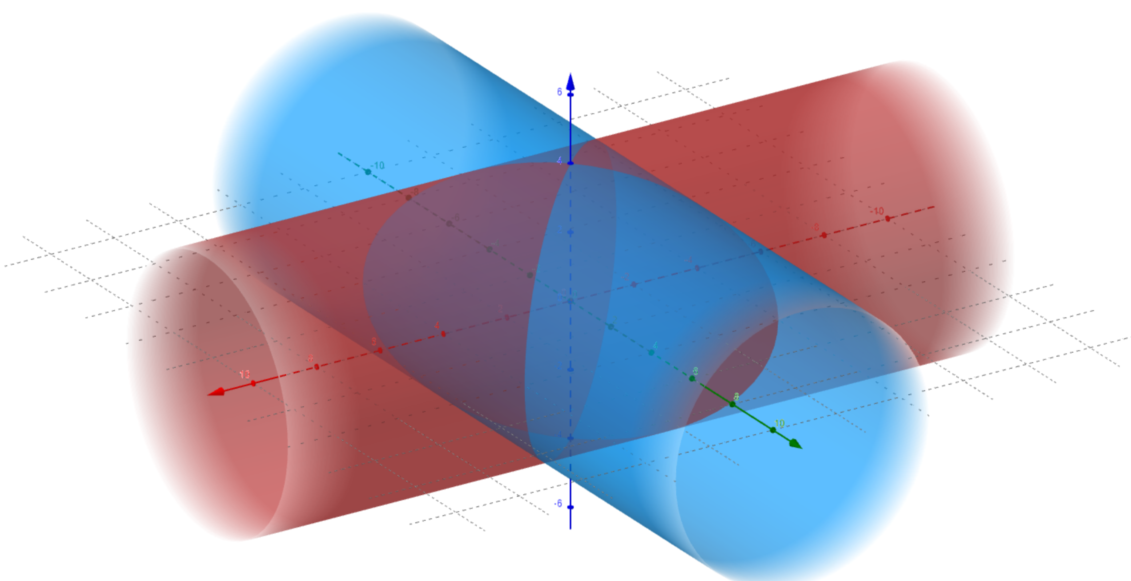


Рис.25.3. Графики функций $\quad x^2+z^2=a^2$ (синий), $\quad y^2+z^2=a^2$ (красный)

Зафиксируем z. Получим две функции $x^2+z^2=a^2, \quad y^2+z^2=a^2$, которые задают в координатной плоскости Oxy квадрат с центром в начале координат и длиной стороны, равной $2\sqrt{a^2-z^2}$. Меняя значение z от $-a$ до a, мы получим искомую фигуру.

Рассмотрим часть фигуры $x>0, \ x \geqslant y > 0, \ z > 0$. Проекция D' этой части на плоскость Oxy будет ограничена прямыми $x=0, \ y=0, \ x=a, \ y=x$. В силу симметрии, эта поверхность составляет $\dfrac{1}{16}$ часть всей искомой фигуры.

Поскольку на границе $z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2}$,

$$\text{пл.}S = 16 \iint\limits_{D'} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy = 16 \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} + 0}\, dx\, dy =$$

$$= 16 \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 16a \int\limits_0^a dx \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 16a \left(-\sqrt{a^2 - x^2} \right) \Big|_0^a = 16a^2$$

Экстремумы

Пример 36.9 (3626). *Исследовать на экстремум функцию* $z = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

Решения этой системы это точки $(0,0)$ и $(1,1)$.

$$z''_{x^2} = 6x,\ z''_{y^2} = 6x,\ z''_{xy} = z''_{yx} = -3$$

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \quad (0,0) : \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (1,1) : \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Итого $(0,0)$ не является точкой локального экстремума, а точка $(1,1)$ является точкой локального минимума

Пример 36.10 (3659). *Найти точки условного экстремума функции*

$$\begin{cases} u = x - 2y + 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$L = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -2 + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2 + 2\lambda z = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$d^2L = \lambda(2dx^2 + 2dy^+ 2dz^2) = \lambda$$

Итого точка $M_1\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ – точка локалькального условного минимума, а $M_1\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ – точка локалькального условного максимума.

Пример 36.11 (3684). *Найти точки условного экстремума функции*

$$\begin{cases} u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ x_1 + x_2 + \cdots x_n = a \end{cases}$$

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - \lambda(x_1 + x_2 + \dots x_n - a)$$

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_\lambda = 1 + x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{\lambda} \\ \lambda = \pm\frac{3}{2} \end{cases}$$

Пример 36.12 (3663.6)**.** *Найти точки условного экстремума функци* $u = xy + yz$*, если* $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2$
$(x > 0, y > 0, z > 0)$.

Составим функцию Лагранжа. Количество фиктивных переменных равно количеству уравнений связи.

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz + \lambda_1(x^2 - y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2)$$

Дифференцируем:

$$\begin{cases} L'_x = y + 2x\lambda_1 = 0 \\ L'_y = x + z + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ L'_z = y + \lambda_2 = 0 \\ L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ L'_{\lambda_2} = y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получили $M(1, 1, 1, -\dfrac{1}{2}, -1)$.

$$L''_{x^2} = 2\lambda_1 = -1$$
$$L''_{y^2} = 2\lambda_1 = -1$$
$$L''_{z^2} = 0$$
$$L''_{xy} = 1$$
$$L''_{xz} = 0$$
$$L''_{yz} = 1$$

$$d^2L = 2dxdy + 2dydz + \lambda_1(2dx^2 + 2dy^2)$$

Продифференцируем уравнения связи для того, чтобы выразить dy и dz через dx.

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2dx + 2dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$$

Получаем $\begin{cases} dy = -dx \\ dz = dx \end{cases}$

Теперь подставим во второй дифференциал:

$$d^2L\Big|_M = -2(dx)^2 - 2(dx)^2 - \frac{1}{2}(2dx^2 + 2dx^2) = -6(dx)^2 < 0$$

Таким образом, M - точка локального максимума.

Ряды

Пример 36.13. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx), x \in \mathbb{R}$$

Докажем, что при $x \neq \pi k$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$a_{n+1} = \sin(n+1)x = \sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x \to 0$$

Понятно, что $\sin(nx)\cos x \to 0$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Покажем, что $\cos(nx)\sin x \to 0$. Тогда если $\sin x \geqslant 0$, то $\lim\limits_{n\to 0} |\cos(nx)| = 0$. Для этого должно выполняться условие $\sin x = 0$, следовательно, $x = \pi k$, значит, ряд сходится, так как состоит из нулей.

Пример 36.14. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{ln(n)}}$$

Как известно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{ln(n)}}$ с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$ расходится по степенному признаку 31.2. Так как $lnn < n$, то

$$\frac{1}{\sqrt[n]{ln(n)}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

Следовательно, ряд расходится.

Пример 36.15. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{p+q}}, p \in \mathbb{R}$$

Покажем, что $a_n \sim \dfrac{M}{n^{\alpha}}$. Для этого преобразуем n-ый член при помощи формулы Стирлинга

$$a_n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^n}{n^{p+q}} = \sqrt{2\pi}\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$$

Ряд сходится при $p > \dfrac{3}{2}$, иначе расходится

Пример 36.16. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}}$$

Сравним n-ый член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}}$ с n-ым членом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$

$$\frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}} \vee \frac{1}{n}$$

$$(ln(ln(n)))^{ln(n)} \vee n$$

$$e^{ln(n)ln(ln(ln(n)))} \vee e^{ln(n)}$$

Получаем, что с какого-то момента

$$e^{ln(n)ln(ln(ln(n)))} > e^{ln(n)}$$

$$(ln(ln(n)))^{ln(n)} > n$$

$$\frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}} < \frac{1}{n}$$

Сравним с n-ым членом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}} \vee \frac{1}{n^2}$$

$$(ln(ln(n)))^{ln(n)} \vee n^2$$

$$e^{ln(n)ln(ln(ln(n)))} \vee e^{2ln(n)}$$

Получаем, что с какого-то момента

$$e^{ln(n)ln(ln(ln(n)))} > e^{2ln(n)}$$

$$(ln(ln(n)))^{ln(n)} > n^2$$

$$\frac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}} < \frac{1}{n^2}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(ln(ln(n)))^{ln(n)}}$ сходится по признаку сравнения 30.3.

Пример 36.17. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(ln(n))^p(ln(ln(n)))^q}, p, q \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x(ln(x))^p(ln(ln(x)))^q}$$

Воспользуемся интегральным признаком сходимости 31.1

$$\int\limits_{A}^{\infty} \frac{dx}{x(ln(x))^p(ln(ln(x)))^q} = \int\limits_{A}^{\infty} \frac{dln(x)}{(ln(x))^p(ln(ln(x)))^q} = \int\limits_{lnA}^{\infty} \frac{dt}{t^p(ln(t)))^q}$$

Следовательно, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(ln(n))^p(ln(ln(n)))^q}$ равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p(ln(n))^q}$

Рассмотрим 3 случая:

1. $p > 1$

$$\frac{1}{n^p(ln(n))^q} \leqslant \frac{1}{n^{p-\varepsilon}}$$

$$p - \varepsilon > 1$$

Если $p > 1$, то $\forall q$ ряд сходится.

2. $p < 1$

$$\frac{1}{n^p(ln(n))^q} \geqslant \frac{1}{n^{p-\varepsilon}}$$

Если $p > 1$, то $\forall q$ ряд расходится.

2. $p = 1$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(ln(n))^q}$ и функцию

$$f(x) = \frac{1}{x(ln(x))^q}$$

По интегральному признаку 31.1

$$\int\limits_{A}^{\infty} \frac{dx}{x(ln(x))^q} = \int\limits_{A}^{\infty} \frac{dln(x)}{(ln(x))^q} = \int\limits_{lnA}^{\infty} \frac{dt}{t^q}$$

Это равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^q}$

Ряд сходится при $p = 1, q > 1$ и расходится при $p = 1, q \leqslant 1$

Пример 36.18. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln(n!)}$$

Из того, что $f(x) \sim g(x)$, следует, что $ln(f(n)) \sim ln(g(n))$

$$a_n \sim \frac{1}{ln(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)} = \frac{1}{ln(\sqrt{2\pi n} + n(ln(n) - 1)} \sim \frac{1}{nln(n)}$$

Ряд расходится по интегральному признаку 31.1.

Пример 36.19. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$$

Главный член ряда – $e^{-\sqrt{n}}$. Докажем, что $a_n \leqslant \frac{1}{n^2}$

$$a_n \leqslant \frac{1}{n^2}$$
$$e^{\sqrt{n}} \geqslant n^4$$
$$\sqrt{n} = t$$
$$e^t \geqslant t^8$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^8}{e^t} = 0$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$ сходится.

Пример 36.20. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{n^\alpha} - 1$$

Найдем α, при котором общий член не стремится к 0.
При $\alpha \geqslant 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} a_n \neq 0$, следовательно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{n^\alpha} - 1$ расходится.
Рассмотрим $\alpha < 0$

$$a_n = e^{n^\alpha ln(n)} - 1 \sim n^\alpha ln(n) = \frac{ln(n)}{n^{-\alpha}}$$

Если $-\alpha > 1$, то ряд сходится.
Если $-\alpha \leqslant 1$, то $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, и ряд расходится.

Пример 36.21. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}), k \in \mathbb{R}$$

Проверим, выполняется ли необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = 0$$

Необходимое условие выполняется.

$$a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n + \pi n) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n) =$$
$$= (-1)^n \sin(\frac{\pi^2 k^2}{\pi\sqrt{n^2+k^2}+n})$$

$\frac{\pi^2 k^2}{\pi\sqrt{n^2+k^2}+n}$ – бесконечно малая последовательность, следовательно, она монотонно стремится к нулю, значит, $\sin(\frac{\pi^2 k^2}{\pi\sqrt{n^2+k^2}+n})$ монотонно стремится к нулю. Из этого следует, что ряд сходится по признаку Лейбница 32.1.

Пример 36.22. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

Проверим выполнение необходимого условия сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \neq 0$$

Ряд расходится.

Пример 36.23. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{ln(ln(n))}$$

Для начала рассмотрим ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}$, $0 < x < \pi$, $\alpha > 0$
Применим признак Дирихле 32.2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$$

Рассмотрим частные суммы синусов:

$$\sum_{n=1}^{k} |\sin(nx)| = |\sin(x) + \ldots + \sin(kx)| = |\frac{2sin(\frac{x}{2})(\sin(x) + \ldots + \sin(kx))}{2sin(\frac{x}{2})}| =$$

$$= |\frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{3x}{2}) + \cos(\frac{3x}{2}) - \cos(\frac{5x}{2}) + \ldots + \cos(nx - \frac{x}{2}) - \cos(nx - \frac{x}{2})}{2sin(\frac{x}{2})}| =$$

$$= |\frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos(nx - \frac{x}{2})}{2sin(\frac{x}{2})}| \leqslant \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} = M$$

Следовательно, ряд Фурье сходится.
Вернемся к исходному ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{ln(ln(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \cos(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{ln(ln(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{ln(ln(n))} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{ln(ln(n))}$$

Рассмотрим первый ряд. По признаку Дирихле 32.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n)}{ln(ln(n))}$ сходится. Применим признак Абеля 32.3: $a_n = \dfrac{\sin(n)}{ln(ln(n))}$, $b_n = \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$. $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ монотонно стремится к 1, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ограничена. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n)\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{ln(ln(n))}$ сходится по признаку Абеля 32.3.

Аналогично $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{ln(ln(n))}$ сходится по признаку Дирихле 32.2, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{ln(ln(n))}$ сходится по признаку Абеля 32.3.

Исходный ряд сходится.

Пример 36.24. *Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^p})$$

При $p \leqslant 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

Начинаем с абсолютной сходимости. Рассмотрим случай, когда $p > 0$:

$$|a_n| = |ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^p})| \sim |\frac{(-1)^n}{n^p})| = \frac{1}{n^p})$$

Ряд сходится абсолютно при $p > 1$.

Рассмотрим случай $0 < p \leqslant 1$:

$$a_n = ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o(\frac{1}{n^{2p}})$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^{2p}}$ сходится $\forall p > 0$ по признаку Лейбница 32.1.

$$-\frac{1}{2n^{2p}} + o(\frac{1}{n^{2p}}) \sim -\frac{1}{2n^{2p}}$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} -\frac{1}{2n^{2p}}$ сходится $\forall p > \frac{1}{2}$.

Получается, что ряд расходится при $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ и сходится условно при $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 1$.

Пример 36.25. *Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p + \sin(\frac{n\pi}{4})}$$

При $p \leqslant 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

Начинаем с абсолютной сходимости. Рассмотрим случай, когда $p > 0$:

$$|a_n| \sim \frac{|\sin(\frac{n\pi}{4})|}{n^p} = b_n$$

Если $p > 1$, то ряд сходится абсолютно.

Рассмотрим случай $0 < p \leqslant 1$:

$$b_n \geqslant \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^p} = \frac{1 - \cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^p}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^p}$ расходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^p}$ сходится по признаку Дирихле 32.2. Из этого следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Значит, при $0 < p \leqslant 1$ абсолютной сходимости нет.

Исследуем ряд на условную сходимости при $0 < p \leqslant 1$:

$$a_n = \frac{\sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p + \sin(\frac{n\pi}{4})} - \frac{\sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p} + \frac{\sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p} = -\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^p(n^p + \sin(\frac{n\pi}{4})} + \frac{\sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(\frac{n\pi}{4})}{n^p}$ сходится по признаку Дирихле 32.2.

$$\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^{2p}} = \frac{1-\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^{2p}} = \frac{1}{2n^{2p}} - \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^{2p}}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n^{2p}}$ сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{2p}}$ сходится при $p > \dfrac{1}{2}$.

Получается, что при $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ расходится, при $\dfrac{1}{2} < p \leqslant 1$ сходится условно и при $p > 1$ сходится условно.

Пример 36.26 (2586). *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Воспользуемся признаком Коши 30.5:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 36.27 (2551(a)). *Исследовать на сходимость и найти сумму ряда при* $|q| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n}(q(\cos\alpha + i\sin\alpha))^k = qe^{i\alpha} + q^2e^{2i\alpha} + \dots + q^ne^{ni\alpha} = \frac{qe^{i\alpha}(1-q^ne^{ni\alpha})}{1-qe^{i\alpha}} =$$

$$= \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(q - q^{n+1}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha))(1 - q\cos\alpha + iq\sin n\alpha)}{(1-q\cos\alpha)^2 + (q\sin\alpha)^2}$$

Рассмотрим мнимую часть этой суммы и устремим n к бесконечности, получаем:

$$\frac{q(q\sin\alpha + \sin\alpha - q\cos\alpha\sin\alpha)}{2-2q\cos\alpha} = \frac{qcos\alpha}{2-2q\cos\alpha}$$

Пример 36.28 (2575.1)**.** *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$$

$$\left|\frac{\cos x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Тогда, по признаку сравнения 30.3 ряд сходится абсолютно, а следовательно ряд сходится.