

# Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by SongHao

Note by THF

2024 年 9 月 13 日

## 目录

1	条件概率	1
1.1	计算	2
1.2	性质	3

## 1 条件概率

**Example.** 有男女生各 50 人，有 30 个男生和 10 个女生抢到了宋浩老师的月饼，求在吃到月饼的学生中男生占比

分析：总人数 100 人为总样本空间  $\Omega$ ，吃到月饼的学生 40 人，为第二个样本空间  $\Omega_1$

其中男生有 30 人，即概率为：

$$P(A) = \frac{30}{40}.$$

**Definition.** 条件概率： $\Omega$  是样本空间， $A, B$  是两个事件，假设  $P(B) > 0$ ，求在  $B$  发生的条件下  $A$  发生的概率，称为  $A$  对  $B$  的条件概率，记作：

$$P(A|B).$$

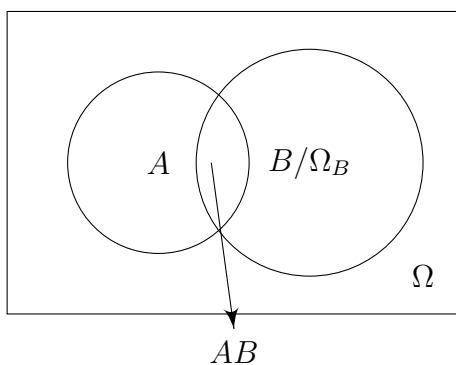
前面提及的概率  $P(A)$  称作无条件概率，样本空间为  $\Omega$

条件概率的样本空间发生了变化， $P(A|B)$  的样本空间变为了  $B = \Omega_B$

## 1.1 计算

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

图示如下：



**Example.** 有编号 1 – 6 的六个球，随机取一个，观察号码， $B$  代表号码为偶数， $A_1, A_2$  代表取到 1, 2 号， $A_3$  代表取到大于 4，求：

1.

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

2.

$$P(A_1|B) = \frac{0}{3} = 0$$

3.

$$P(A_2) = \frac{1}{6}$$

4.

$$P(A_2|B) = \frac{1}{3}$$

5.

$$P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6.

$$P(A_3|B) = \frac{1}{3}$$

**Notation.** 条件概率和无条件概率一般不相等

## 1.2 性质

**Rule.**

$$P(A|B) \geq 0.$$

**Rule.**

$$P(\Omega|B) = 1.$$

**Rule.** 可列可加性：对  $A_1, A_2 \dots A_n, \dots$  不相容，则：

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

**Rule.** 乘法公式：

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

证明.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

移项即得上式。

□

画图解释如下：

