Part III-B: Statistic

Lecture by SongHao
Note by THF

2024 年 11 月 26 日

目录

Learn 1

1 引言

1.1 确定事件

一定发生的事件

1.2 随机事件

可能发生的事件

1.3 统计规律

大量试验得出的宏观规律

2 事件

2.1 试验

对对象观察、测量、实验

2.2 随机试验

随机试验的条件:
1. 在相同条件下可重复
2. 结果不止一个
3. 试验前无法预测出现的实验结果
使用 E 代表随机试验。

2.3 事件

随机试验的每种结果。

2.4 随机事件

可能出现的事件，用 A,B,$C\ldots$ 表示

2.5 基本事件

不能或不必再分的事件（基于试验的事件）

Example. 扔一次骰子，实验目的为：骰子朝上的点数
基本事件为：出现 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 点。

Example. 扔一次骰子，实验目的为：骰子的位置
此时出现的点数不是基本事件。

Example. 扔一次硬币，实验目的为：硬币朝上的面
基本事件为：出现正面或反面。

Example. 扔一次硬币，实验目的为：硬币某根已知的轴线与已知直线的夹角
基本事件为：夹角 $\theta \in [0, 2\pi]$
此时正面朝上与反面朝上不是基本事件。

2.6 复合事件

由基本事件复合而成的事件

Example. 扔一次骰子，点数小于 7 点表示为：

$$\Omega = \{x|x < 7\}$$

点数大于 7 点表示为：

$$\varnothing = \{x|x > 7\}$$

2.7 必然事件

一定发生的结果，用 Ω 表示

2.8 不可能事件

不可能发生的结果，用 $\varnothing$ 表示

Example. 扔一次骰子，点数大于 7 点为不可能事件

2.9 样本空间

所有基本事件的集合（实验目的确定），与必然事件相似，用 Ω 表示。

2.10 样本点

样本空间中的元素，即基本事件，用 ω 表示。

Example. 扔硬币研究某面朝上的样本空间：$\Omega = \{$正，反$\}$

样本点：$\omega_1 =$ 正面朝上，$\omega_2 =$ 反面朝上

Example. 扔一个骰子研究某点朝上的样本空间：

$$\Omega = \{x|x \in [1,6], x \in \mathbb{R}\}$$

样本点：

$$(\omega_1, \omega_2, \dots \omega_6) = (1,2,3,4,5,6)$$

Example. 扔两个硬币，研究朝上的面，样本空间为：

$$\Omega = \{(x,y)|(0,0),(1,1),(0,1),(1,0))\}$$

或：

$$\Omega = \{(x,y)|x,y \in \{0,1\}\}$$

Notation. 样本空间可以是无限集。

Example. 在 $[0,1]$ 内扔一个质子，求其坐标。

其样本空间为：

$$\Omega = \{x|x \in [0,1]\}$$

Notation. 质子/点：无大小

Example. 向平面扔一个点：

$$\Omega = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$$

3 事件的集合表示

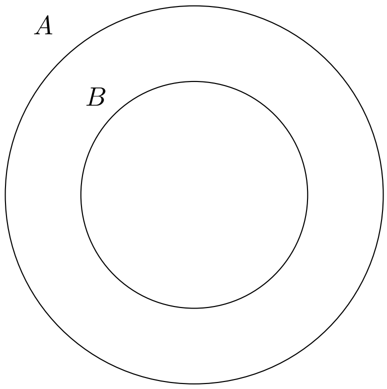
集合（set）：$A = \{2,4,6\}$ 等。

Notation. Ω 与必然事件、样本空间等同，$\varnothing$ 与不可能事件、空集等同。

任何事件都是 Ω 的子集，$\varnothing$ 是所有事件的子集。

4 事件间的关系

4.1 包含

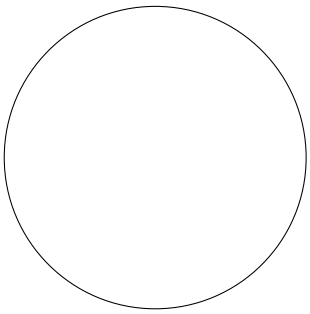


$B \subset A$ or $A \supset B$

A 发生必然有 B 发生，且有：

$$\forall A, \varnothing \subset A \subset \Omega.$$

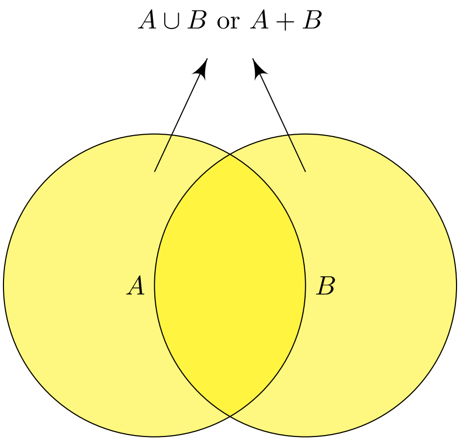
4.2 相等



$B \subset A$ and $A \subset B$

称 A 与 B 相等。

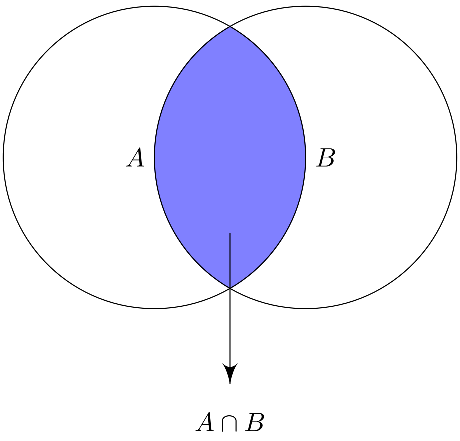
4.3 并与和



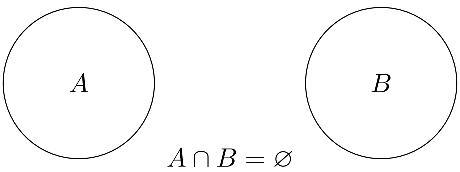
$A \cup B$:（并/和）A 与 B 至少有一个发生

$$\begin{cases} A + B \subset A, \\ A + A = A, \\ A + \varnothing = A, \\ A + \Omega = \Omega. \end{cases}$$

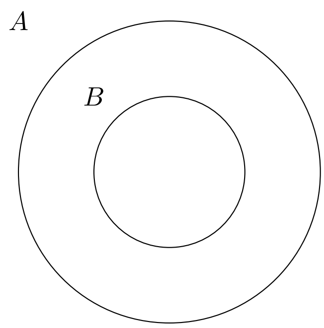
4.4 交与积



$A \cap B$:（交/积）A 与 B 同时发生



Learn 1



$A \cap B = B$

$$\begin{cases} AB \subset A \\ AA = A \\ A\varnothing = \varnothing \\ A\Omega = A \end{cases}.$$

Definition. 无限可列个：能按某种规律排成一个序列

Example. 自然数无限可列：$0, 1, 2, \ldots$

Example. 整数无限可列：$0, 1, -1, 2, -2, \ldots$

Example. 有理数：能写成 $\frac{p}{q}$ 的数

$0.\dot{5}\dot{6}$ 可以写为：$\frac{56}{99}$

$0.1\dot{2}$ 可以写为：$\frac{11}{90}$

有理数无限可列：$0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \ldots$

Example. 实数集、平面点集非无限可列。

以下定义：

Definition. n 个事件互斥时：

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

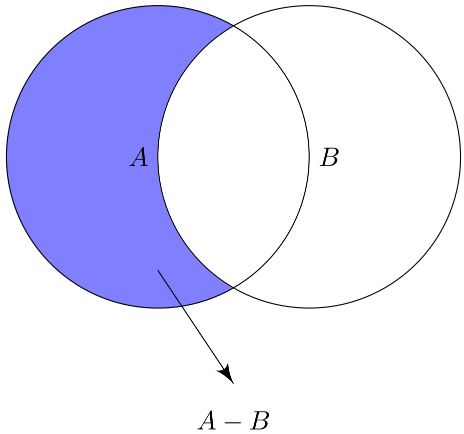
n 个事件同时发生：

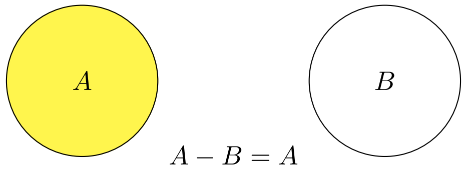
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

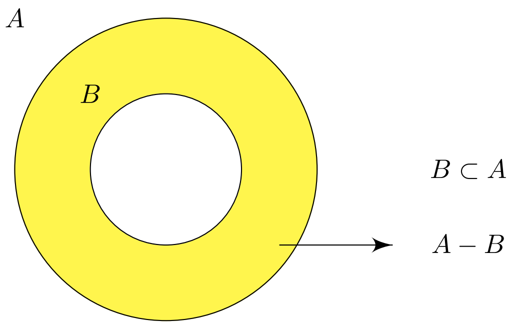
该定义支持无限可列个。

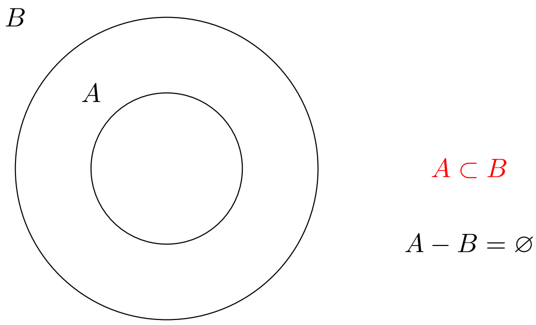
4.5 差

$A - B$: A 发生而 B 不发生。



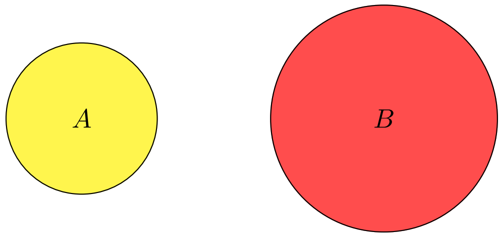






4.6 互不相容

A 与 B 不同时发生，即：$AB = \varnothing$



$$A \cap B = \varnothing$$

n 个事件：

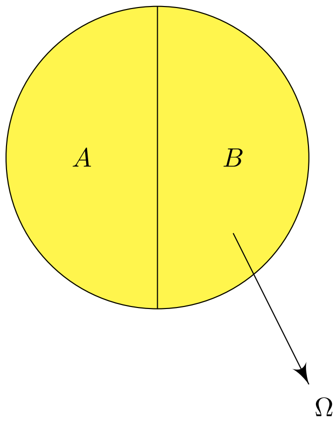
$$A_1, A_2, \ldots A_n.$$

互不相容，则：

$$\forall i, j : A_i A_j = \varnothing.$$

4.7 对立

$AB = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$



记作：

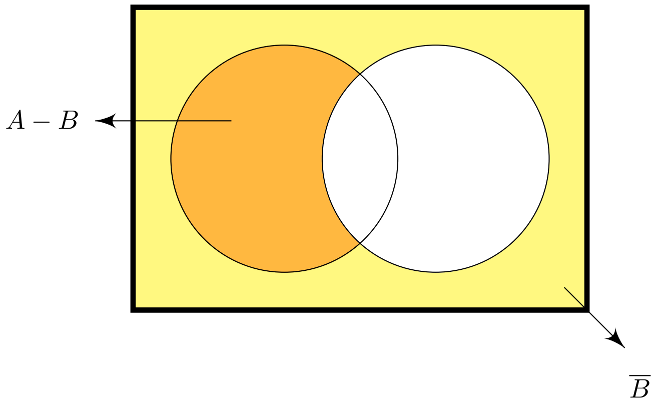
$$A = \overline{B}.$$

或：

$$B = \overline{A}.$$

由此可得：

$$\begin{cases} \overline{\overline{A}} = A \\ A - B = A - AB = A\overline{B} \end{cases}.$$

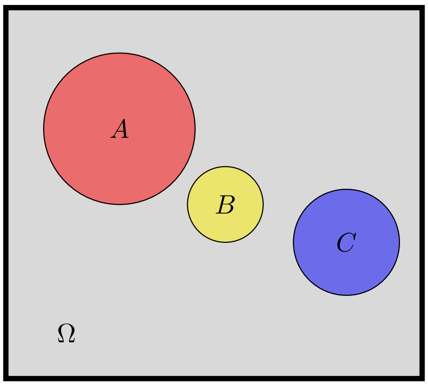


Notation. 若两事件对立，则一定互不相容.

互不相容的事件不一定对立.

Notation. 互不相容适用于多个事件.

对立只适用于两个事件.



Notation. 互不相容：不能同时发生，但可以都不发生

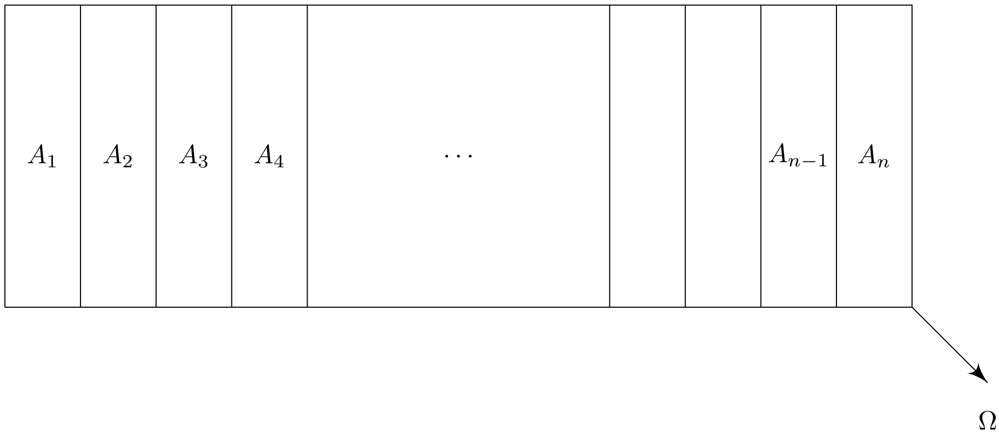
对立：必须有一个发生

4.8 完备事件组

$A_1, A_2, \ldots A_n$ 两两互不相容，且

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

则为完备事件组。



5 事件间的运算律

5.1 交换律

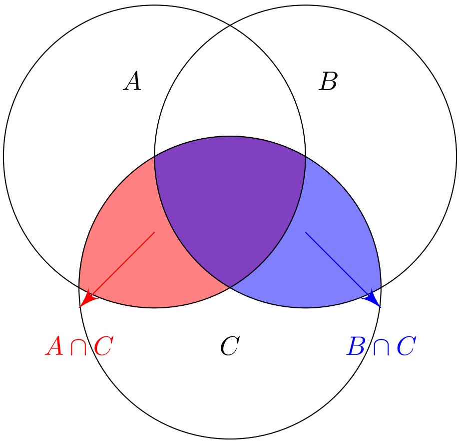
$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}.$$

5.2 结合律

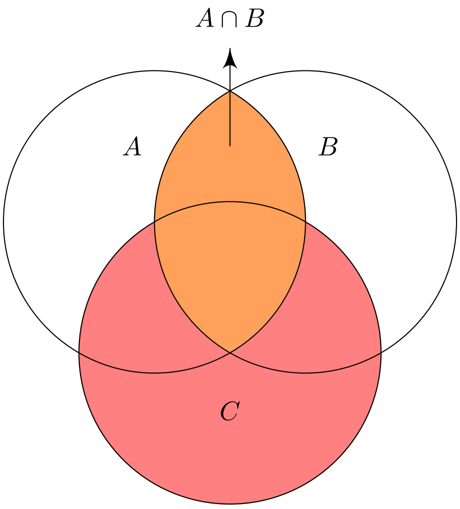
$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}.$$

5.3 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

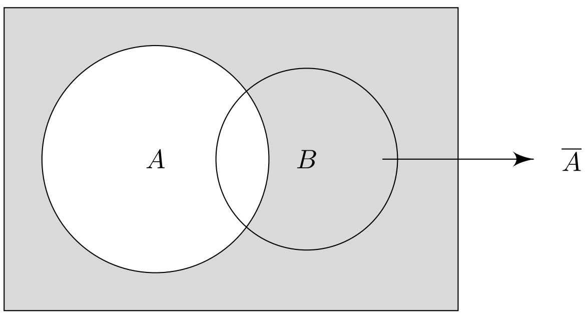


$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

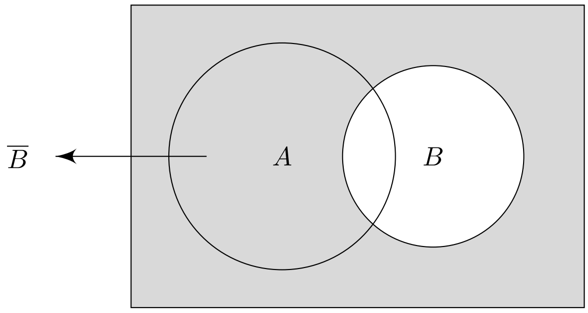


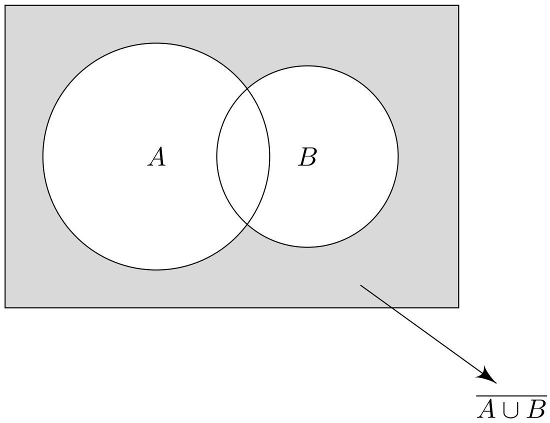
5.4 对偶律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$



Learn 1





$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

记法：

1. 画图
2. 长线变短线，开口换方向
3. 事件定义

Notation. 多个事件的对偶律：

$$\begin{cases} \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \end{cases}.$$

Example. A, B, C 是试验 E 的随机事件，用符号表示以下事件：

1. 只有 A 发生：$A\bar{B}\bar{C}$
2. A 发生：A
3. A, B, C 只有一个发生：$A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
4. A, B, C 同时发生：ABC
5. A, B, C 至少一个发生：$A + B + C$
6. A, B, C 至多一个发生：$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
7. A, B, C 恰有两个发生：$AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$
8. A, B, C 至少两个发生：$AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$ 或 $AB + BC + AC$

Example. 从产品中抽查，不放回，一共取了三次：A_1, A_2, A_3 代表三次取得合格品：

1. 三次都合格：$A_1A_2A_3$
2. 至少一次合格：$A_1 + A_2 + A_3$
3. 恰有两次合格：$A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$
4. 最多一次合格：$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

Example. 射击三枪,$A_i, i = 1, 2, 3$ 表示第 i 次击中目标，解释以下事件：

1. $A_1 + A_2$ ： 前两次至少击中一次
2. $\overline{A_2}$ ： 第二次不击中
3. $A_1 + A_2 + A_3$ ： 至少击中一次
4. $A_1A_2A_3$ ： 全部击中
5. $A_2 - A_3$ ： 第二次击中而第三次不击中
6. $\overline{A_1 + A_3} = \overline{A_1} \cap \overline{A_3}$（使用对偶律）：第一次和第三次不击中
7. $\overline{A_1} + \overline{A_3}$ ： 第一次和第三次至少一次未能击中

Learn 2

6 排列组合

1. 加法原理：完成事件有多类方案
2. 乘法原理：完成事件分多步

Example. 有三种馒头，四种米饭

加法原理：只吃一种，共 7 种

乘法原理：先吃馒头，后吃米饭，共 12 种

6.1 排列

1. 不重复排列

从 n 个不同元素中取出 m 个排列，不放回

$$\mathrm{P}_n^m = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Example. $P_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$

2. 全排列

$$\mathrm{P}_n^n = n!.$$

Example. $\mathrm{P}_0^0 = 0! = 1$

3. 重复排列

从 n 个不同元素中取出 m 个排列，可放回

$$(\mathrm{P}_n^m) = n^m.$$

6.2 组合

从 n 个不同元素中取出 m 个，不排列

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

$$\begin{cases} \mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m} \\ \mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 = 1 \end{cases}.$$

Example. 在书架上有序放置五本书，求其顺序为 $1, 2, 3, 4, 5$ 的概率：

总样本点个数：P_5^5

目标事件样本点个数：2（顺序、逆序）

概率：

$$P = \frac{2}{\mathrm{P}_5^5} = \frac{1}{60}.$$

Example. 有四个邮箱，两封信，求：

1. 前两个邮箱各有一封的概率

总样本点个数：$4 \times 4 = 16$

第一个邮箱有一封信且第二个邮箱有一封信的样本点个数：$\mathrm{P}_2^2 = 2$（第一封信前往 $1, 2$ ，第二封信前往 $2, 1$）

概率：

$$P = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

2. 第二个邮箱恰有一封信的概率

事件：从两封信中抽一封放到邮箱 2 中，剩余的 1 封信在除 2 以外的三个邮箱中选一个放入

即：

$$\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1 = 6.$$

概率：

$$P = \frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1}{4 \times 4} = \frac{3}{8}.$$

3. 两封信不在一个邮箱内的概率

事件：一封信随机投入一个邮箱，另一封信投入剩余的三个邮箱

概率：

$$P = \frac{4 \times 3}{4 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

或：$1-$ 信在同一个邮箱的概率
$= 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$

Example. 有 5 白 4 黑共 9 个球，任取 3 个球，求：

1. 取出 2 白 1 黑的概率：
$$P = \frac{\mathrm{C}_5^2 \mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_9^3}.$$
2. 全是白球的概率：
$$P = \frac{\mathrm{C}_5^3}{\mathrm{C}_9^3}.$$
3. 颜色相同的概率：
$$P = \frac{\mathrm{C}_5^3 + \mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_9^3}.$$
4. 颜色不同的概率：
$$P = \frac{\mathrm{C}_5^1 \mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_9^3} + \frac{\mathrm{C}_5^2 \mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_9^3}.$$

Example. 有 a 个白球，b 个黑球

1. 任取一个是白球的概率：
$$P = \frac{a}{a+b}.$$
2. 接连取出 m 个球 $(m \in [1, a+b])$，第 m 个是白球的概率：

法 1：将所有球排为一排，为全排列：$(a+b)!$

要使第 m 个球是白球:

先任从白球中拿一个放入该位置，其他的球全排列
$$P = \frac{a\,(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}.$$

法 2：只取 m 个球

从 $a+b$ 个中取出 m 个并排好：P_{a+b}^m

要使第 m 个是白球，单独挑一个白球放在第 m 个上

然后在剩余的球中取出 $m-1$ 个并排好：P_{a+b-1}^{m-1}

概率：
$$P = \frac{\mathrm{P}_{a+b-1}^{m-1} \times a}{\mathrm{P}_{a+b}^m} = \frac{a \times \frac{(a+b-1)!}{(a+b-1-(m-1))!}}{\frac{(a+b)!}{(a+b-m)!}} = \frac{a}{a+b}.$$

法 3. 先取第 m 个位置的球

一共有 $a+b$ 个球，选 a 个白球中的一个放入即可：
$$P = \frac{a}{a+b}.$$

7 事件的概率

7.1 概率的基本描述

发生 A 事件的可能性大小称作概率，记作 $P(A)$.

Example. 抛一枚硬币，正面朝上的概率为：$P(A)=P\left(\bar{A}\right)=0.5$

性质：

1. $P(\Omega)=1$
2. $P(\varnothing)=0$
3. $P(A)\in[0,1]$

7.2 古典概率模型

古典概率模型应满足两个条件：

1. 样本空间中存在有限个样本
2. 所有样本点出现的可能性相同（等可能性）

Example. 扔硬币，观察朝上的面

该事件对应的样本空间只有两个样本：正面朝上与反面朝上

正面朝上与反面朝上的可能性相同：$P(A)=P(B)=0.5$

因此为古典概率模型。

古典概率模型的概率计算：

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\omega(A)}{\omega(\Omega)}.$$

Notation. $N(A)$ ： A 事件所包含的基本事件个数

$\omega(A)$：A 事件所包含的样本点个数

Notation. 古典概率模型的特性：

1. 非负性：$P(A)\in[0,1]$
2. 规范性：$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$
3. 有限可加性：$A_1, A_2\ldots A_n$ 互不相容，则：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

缺点：

1. 有限个结果
2. 等可能性

7.3 几何概率模型

Example. 有一长方形，右边部分的阴影占面积的 $\frac{1}{2}$，扔一个质子，落在阴影的概率为 $\frac{1}{2}$.

Example. 一条线段长 3 ，阴影部分占 $[1,2]$ ，扔一个质子，落在阴影的概率为 $\frac{1}{3}$.

与几何概率模型有关的元素：

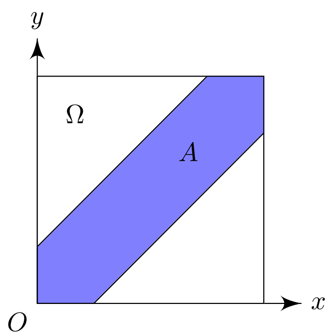
1. 线段
2. 平面
3. 立体

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}.$$

$\mu(G)$ ： 度量

Example. 会面问题：

甲乙两人约定从六点到七点见面，先到的人等 15 分钟，且这一小时内甲乙可在任意时刻到达，求甲乙见面的概率。



令 A 为事件两人见面，x 为甲到达的时间，y 为乙到达的时间，A 发生的情况如下：

1. 甲先到，乙后到，即：

$$y > x, y - x \leq 15.$$

2. 乙先到，甲后到，即：

$$y < x, x - y \leq 15.$$

即：

$$|y-x| \leq 15.$$

如图：

$$S_A = 60 \times 60 - 45 \times 45 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1575.$$

$$S_\Omega = 60 \times 60 = 3600.$$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}.$$

Example. 蒲丰投针问题：
有两条平行线，距离为 d ，朝平面内投掷长度为 $l\,(l<d)$ 的针，求针与任意一个平行线相交的概率

假设 x 表示针的中点离最近的一根线的距离，有：

$$x \in \left[0, \frac{d}{2}\right].$$

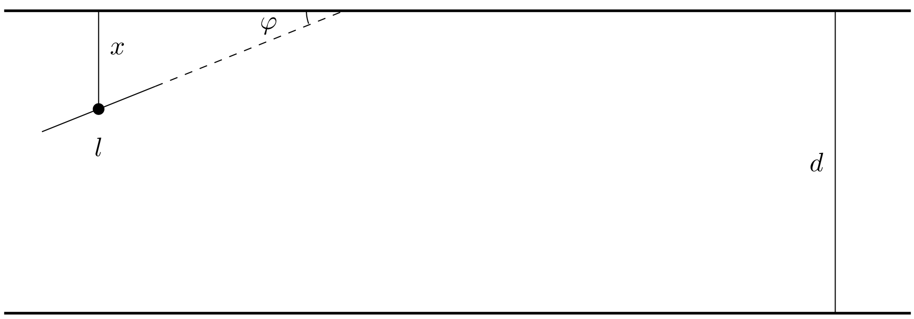
即针的一部分可以出来，但针的中点不能出来。

假设 φ 是针与线的夹角，有：

$$\varphi \in [0, \pi].$$

因此该事件全集写为：

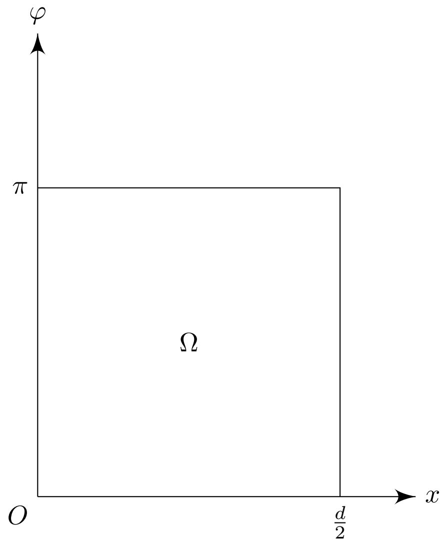
$$\Omega = \left\{ (\varphi, x) \,|\, \varphi \in [0, \pi], x \in \left[0, \frac{d}{2}\right] \right\}.$$

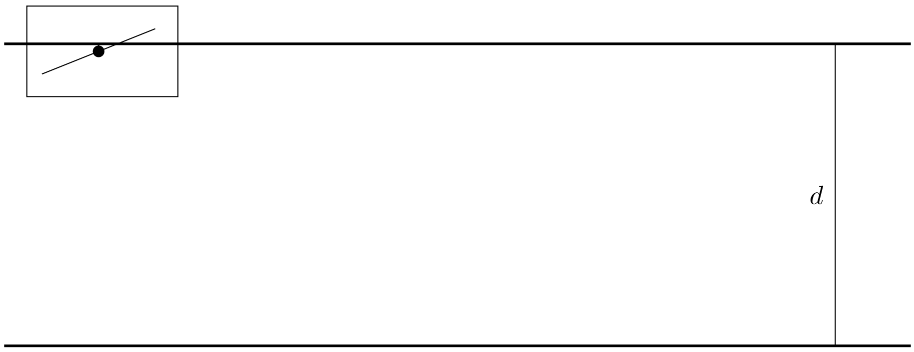


Notation. 针的左右位置并不体现，但上下位置用 x 体现出来。

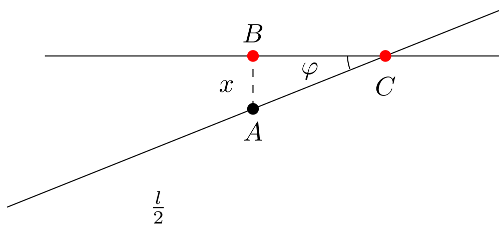
在坐标轴中绘制出全集图像：

判断相交条件：





放大观察:



可得相交的条件:

$$AC \leq \frac{l}{2}.$$

即:

$$\frac{x}{\sin\left(\varphi\right)} \leq \frac{l}{2}.$$

即:

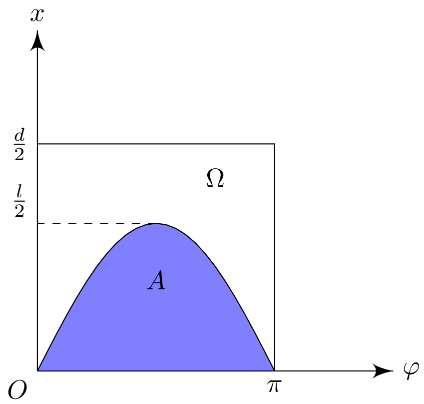
$$x \leq \frac{l}{2} \cdot \sin\left(\varphi\right).$$

Learn 2

即事件发生可写做：

$$A = \left\{ (\varphi, x) \left| \varphi \in [0, \pi], x \in \left[0, \frac{l}{2} \cdot \sin(\varphi)\right] \right. \right\}.$$

在坐标轴上绘制该区域：



即有：

$$P = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$

使用定积分求 S_A：

$$S_A = \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = l.$$

$$S_\Omega = \frac{d}{2} \cdot \pi.$$

$$P = \frac{l}{\frac{d}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Remark. 蒙特卡洛方法：

实际实验时，使用了 N 根针，有 n 根落在线上，频率为

$$P_0 = \frac{n}{N}.$$

由蒙特卡洛方法有 $P_0 \approx P$，即：

$$\frac{2l}{\pi d} \approx \frac{n}{N}.$$

$$\pi \approx \frac{2lN}{nd}.$$

即：通过蒙特卡洛方法，设定一个未知数，通过计算得知包含该未知数的概率，实验得到频率，可以计算出该未知数的近似值。

Notation. 几何概率模型特性：

完全可加性（A_i 彼此互不相容）：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

8 频率与概率

频率：看一个事件是否发生，做 n 次实验，发生了 m 次，记为：

$$\omega_n(A) = \frac{m}{n}.$$

Example. 扔硬币 100 次，正面朝上 54 次

频率：

$$\omega_{100} = \frac{54}{100} = 0.54.$$

概率：

$$P = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Notation. 频率特性：

1. 非负性：

$$\omega_n(A) \in [0,1].$$

2. 规范性：必然事件的频率等于 1 ，不可能事件频率等于 0 ，即：

$$\omega_n(\Omega) = 1, \omega_n(\varnothing) = 0.$$

3. 可加性：若 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 互不相容，则：

$$\omega_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \omega_n(A_i).$$

Notation. 随着实验次数增多，频率会逐渐接近于一个值

这个值称作统计概率

如扔硬币正面朝上的频率会接近于 0.5

9 公理化

提到了四种定义：

1. 描述
2. 古典
3. 几何
4. 统计

这些定义均含有三个性质：

1. 非负性
2. 规范性
3. 可加性

公理化尝试提出公理，找到其中相同的部分并将其统一

9.1 公理

Axiom. 非负性:

$$P\left(A\right) \in \left[0,1\right].$$

Axiom. 规范性:

$$P\left(\Omega\right) = 1.$$

Axiom. 可加性:

$A_1, A_2, \ldots$ 互不相容，则:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

9.2 性质

Rule. $P\left(\varnothing\right) = 0$

证明.

$$\Omega = \Omega + \varnothing + \varnothing + \ldots.$$

$$P\left(\Omega\right) = P\left(\Omega + \varnothing + \varnothing + \ldots\right).$$

由于 Ω 与 $\varnothing$ 互不相容，所以由无穷可加性:

$$P\left(\Omega\right) = P\left(\Omega\right) + P\left(\varnothing\right) + P\left(\varnothing\right) + \ldots.$$

$$P\left(\varnothing\right) + P\left(\varnothing\right) + \ldots = 0.$$

由非负性：$P\left(\varnothing\right) \in \left[0,1\right]$ ，即：$P\left(\varnothing\right) = 0$ □

Rule. 有限可加性：$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 互不相容，则:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right).$$

证明. 有 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 互不相容，再接上无穷多个 $\varnothing$ 也互不相容

由完全可加性可得:

$$\begin{aligned}
&P\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \varnothing + \varnothing + \ldots\right) \\
&= P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \ldots + P\left(A_n\right) + P\left(\varnothing\right) + P\left(\varnothing\right) + \ldots \\
&= P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \ldots + P\left(A_n\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

即：$P\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \ldots + P\left(A_n\right)$ □

Rule. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(A\right)$

证明. A 和 $\overline{A}$ 不相容，且 $A+\overline{A}=\Omega$ ，则:

$$P(\Omega)=P\left(A+\overline{A}\right)=P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1.$$

即: $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$ □

Corollary. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为完备事件组，利用有限可加性:

$$P(\Omega)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Rule. $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

证明. 令 $A=(A-B)\cup AB$

由于 $A-B$ 和 AB 互不相容，由有限可加性:

$$P(A)=P((A-B)\cup AB)=P(A-B)+P(AB).$$

即 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ □

Rule.

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

and

$$P(A)\geq P(B)$$

if

$$B\subset A.$$

证明. 由 $B\subset A$ 可得:

$$P(AB)=P(B).$$

即 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

由非负性:

$$P(A-B)=P(A)-P(B)\geq 0.$$

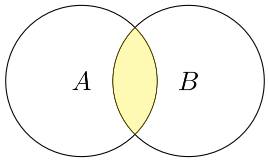
即: $P(A)\geq P(B)$ □

Rule. 加法公式 (very important)

对 $\forall A, B$ 有:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明. 画图如下：



$P(A) + P(B)$ 会多加一次 $P(AB)$ （图中黄色部分），因此减去即可。 □

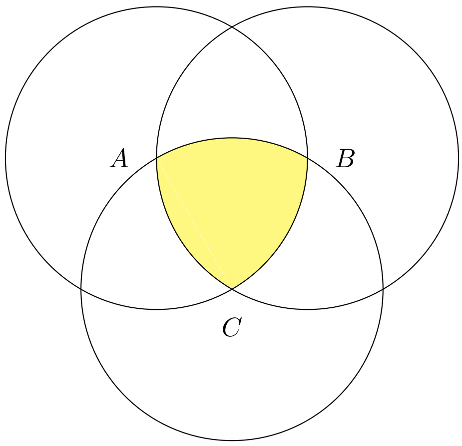
Notation. A, B 不相容时该公式也成立：$P(AB) = P(\varnothing) = 0$

即有限可加性：$P(A+B) = P(A) + P(B)$

Example. 三个事件相加：

$$
\begin{aligned}
& P(A+B+C) \\
= & P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).
\end{aligned}
$$

证明. 画图如下，图示部分为 $P(ABC)$ ：

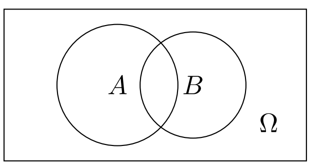


当 $P(A) + P(B) + P(C)$ 时，图示部分被重复累加了 3 次，减去 $P(AB) + P(BC) + P(AC)$ 后图示部分被减去了 3 次，因此加上 $P(ABC)$ 即可。 □

9.3 例题

Example. $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3, P(A+B) = 0.6$，求 $P\left(A\bar{B}\right)$

画图如下：



即 $P(AB)=0.1$，$P\left(A\bar{B}\right)=P(A)-P(AB)=0.3$

或：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

即：$P(AB)=P(A+B)-P(A)-P(B)=0.1$

后续同上。

Example.

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}.$$

且

$$P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}.$$

求 A,B,C 至少一个发生的概率和 A,B,C 都不发生的概率

$P(A+B+C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=\frac{3}{4}-0-\frac{1}{16}*2+P(ABC)$

由于 $P(ABC)\in P(AB)$

所以：$P(ABC)\leq P(AB)=0$，即：$P(ABC)=0$

即：

$$P(A+B+C)=\frac{5}{8}.$$

求 $P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)$ ：正难则反原则，可先求出 A,B,C 至少发生一个的概率，由于两个事件互斥，即有：$P(A+B+C)+P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)=1$

即：

$$P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)=\frac{3}{8}.$$

Notation. 不可能事件的概率为 0 ，但反之，概率为 0 的事件不一定是不可能事件

即：概率为 0 的事件可能会发生

Example. 朝一条长为 1 ，头尾分别是 $0,1$ 的线上扔一个质子，扔到一个点 A 的概率为 0 ，但该事件可能发生

Example. 有四个白球，三个黑球，任取三个球，求这三个球至少有两个白球的概率

所有的情况：从七个中取三个

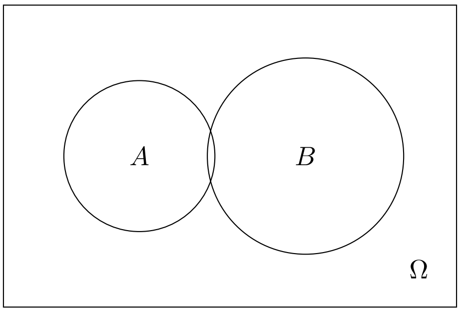
目标：从四个白球中取两个/三个，从三个黑球中取一个/不取

即：

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_7^3}.$$

Example. 一个人看管两台机床，第一台机床无需看管的概率为 0.9 ，第二台为 0.8 ，两台都需要看管的概率为 0.02 ，求一小时内至少一台需要看管的概率

画图即可：



$$P\left(A\right)=0.1,P\left(B\right)=0.2,P\left(AB\right)=0.02.$$

易得要求的是 $P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)=0.28$

Example. 一共有 20 个产品，一等、二等、三等个数分别为：$6,10,4$ ，从中取出 3 个，求至少两件等级相同的概率

正难则反原则：求所有等级都不相同的概率

所有情况：$20\to 3$

目标：$6\to 1,10\to 1,4\to 1$

概率：

$$P\left(\bar{A}\right)=\frac{\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_{20}^3}.$$

$$P\left(A\right)=1-P\left(\bar{A}\right)=\frac{15}{19}.$$

Example. 生日问题：一个班上有 n 个学生，求至少两个人生日相同的概率

正难则反：求所有人生日不同的概率

所有情况：365^n

目标：$365\cdot 364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(365-(n-1))$

概率：

$$P\left(A\right)=1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-(n-1))}{365^n}.$$

当 $n=55$ 时，$P\left(A\right)\approx 0.99$

即这个班上几乎必然有生日在同一天的人

Learn 3

10 条件概率

Example. 有男女生各 50 人，有 30 个男生和 10 个女生抢到了宋浩老师的月饼，求在吃到月饼的学生中男生占比

分析：总人数 100 人为总样本空间 Ω，吃到月饼的学生 40 人，为第二个样本空间 Ω_1

其中男生有 30 人，即概率为：

$$P\left(A\right)=\frac{30}{40}.$$

Definition. 条件概率：Ω 是样本空间，A, B 是两个事件，假设 $P(B) > 0$ ，求在 B 发生的条件下 A 发生的概率，称为 A 对 B 的条件概率，记作：

$$P(A|B).$$

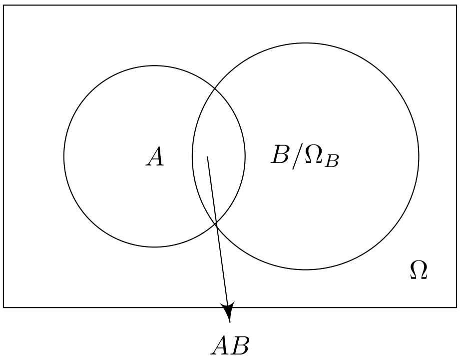
前面提及的概率 $P(A)$ 称作无条件概率，样本空间为 Ω

条件概率的样本空间发生了变化，$P(A|B)$ 的样本空间变为了 $B = \Omega_B$

10.1 计算

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

图示如下：



Example. 有编号 $1-6$ 的六个球，随机取一个，观察号码，B 代表号码为偶数，A_1, A_2 代表取到 $1, 2$ 号，A_3 代表取到大于 4 ，求：

1. $$P(A_1) = \frac{1}{6}$$
2. $$P(A_1|B) = \frac{0}{3} = 0$$
3. $$P(A_2) = \frac{1}{6}$$
4. $$P(A_2|B) = \frac{1}{3}$$
5. $$P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
6. $$P(A_3|B) = \frac{1}{3}$$

Notation. 条件概率和无条件概率一般不相等

10.2 性质

Rule.

$$P\left(A|B\right) \geq 0.$$

Rule.

$$P\left(\Omega|B\right) = 1.$$

Rule. 可列可加性：对 $A_1, A_2 \ldots A_n, \ldots$ 不相容，则：

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i|B\right).$$

Rule. 乘法公式：

$$P\left(AB\right) = P\left(B\right) P\left(A|B\right) = P\left(A\right) P\left(B|A\right).$$

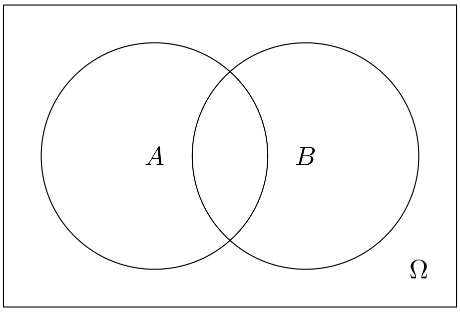
证明.

$$P\left(A|B\right) = \frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}.$$

$$P\left(B|A\right) = \frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}.$$

移项即得上式。 □

画图解释如下：



Learn 4 10.20

10.3 伯努利模型

Notation. 独立试验序列：$E_1, E_2, \ldots, E_n$ 彼此相互独立

n 重独立试验：$E_1, E_1, \ldots, E_1$ 做 n 遍，且相互独立，记作 E_1^n

伯努利试验：结果只有两种：$\Omega = \left\{A, \bar{A}\right\}$

Example. 抛硬币是伯努利试验

Notation. n 重伯努利试验：做 n 次结果只有两种的独立试验

Corollary. A 发生的概率为 p，$p \in (0,1)$ ，则 $\bar{A}$ 的概率为 $1-p$ ，在 n 重伯努利试验中，A 发生 k 次的概率为：

$$P_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{1-k}.$$

或：

$$P_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{1-k} \qquad q = 1-p.$$

该公式称为二项概率公式

Notation. 为何称为二项概率公式：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_n(k) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{1-k} \\ &= (p+q)^n \\ &= (p+1-p)^n \\ &= 1.\end{aligned}$$

本质为二项式展开

Example. 一批产品的废品率为 0.1 ，良品率为 0.9，每次取一个产品又放回，共取三次，求：

1. 恰有一次取到废品的概率
2. 恰有两次取到废品的概率
3. 三次都取到废品的概率
4. 三次都取到良品的概率

1. $\mathrm{C}_3^1 0.1^1 \cdot 0.9^2$
2. $\mathrm{C}_3^2 0.1^2 \cdot 0.9^1$
3. $\mathrm{C}_3^3 0.1^3$
4. $\mathrm{C}_3^0 0.9^3$

Example. 彩票每周开奖一次，中奖率十万分之一，十年一共买了 520 次彩票，求十年从未中奖的概率

解：$p = 0.99999$，$P_{520}(520) = \mathrm{C}_{520}^{520} 0.99999^{520} \approx 0.9948$

Notation. 为了更快计算二项公式的结果可以使用两种估算方法

11 随机变量及分布

Definition. 随机变量：把试验的结果转化为符号语言

即：用一个映射函数将试验的所有结果映射为数 $X = X(\omega)$

Example. $\{\omega | X(\omega) = a\}$ 表示一个事件，也可以写成：$\{X = a\}$

事件的概率：$P\{X = a\}$ 或 $P(X = a)$

Learn 5

11.15

11.1 总体与样本

Definition. 总体：全体，分作有限总体和无限总体

令总体为 X，总体的分布记为 X 的分布

在总体中抽样：样本

Definition. 抽样：在总体中抽一部分样本

假设抽了 n 次：得到样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ，如果测出了这些样本的值，记为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ，即**观测值**

Notation. 抽样的方法：简单随机抽样，满足以下条件：

1. 同分布
2. 相互独立

Learn 6

11.16

12 大数定律

Corollary. 切比雪夫不等式：随机变量中任意 X 离期望的距离比 ϵ 大的概率比 $\frac{DX}{\epsilon^2}$ 小

证明. 假设 X 为连续型，由概率定义：

$$P\left(|X-EX| \geq \epsilon\right) = \int_{|x-EX|\geq\epsilon} f\left(x\right) \mathrm{d}x.$$

这里因为 $|X-EX| \geq \epsilon$ ，同时平方：$\left(X-EX\right)^2/\epsilon^2 \geq 1$ ，即原式可以转为：

$$P\left(|X-EX| \geq \epsilon\right) = \int_{|x-EX|\geq\epsilon} 1 \cdot f\left(x\right) \mathrm{d}x \leq \int_{|x-EX|\geq\epsilon} \frac{\left(x-EX\right)^2}{\epsilon^2} f\left(x\right) \mathrm{d}x.$$

这个积分有积分域，大小必然比从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 更小（或等于）：因为密度函数 $f\left(x\right) \geq 0$，因此不需要考虑被积函数正负问题，即：

$$P\left(|X-EX| \geq \epsilon\right) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x-EX\right)^2}{\epsilon^2} f\left(x\right) \mathrm{d}x = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-EX\right)^2 f\left(x\right) \mathrm{d}x}{\epsilon^2} = \frac{DX}{\epsilon^2}.$$

□

该结论等价于：

1. $P\left(|X-EX| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$

2. $P(|X - EX| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$

当 DX 越小时 P 越大，即方差越小，X 落在外面的概率越小

Example. 一个电网有 10000 盏灯，每一盏灯打开的概率为 0.7，求一个晚上开着的灯数量在 6800 到 7200 盏中的概率

解：期望为 7000：$EX = 7000$ ，即 $X \sim B(10000, 0.7)$ ，由于二项分布 $EX = 7000, DX = np(1-p) = 10000 \times 0.7 \times (1-0.7) = 2100$

要求：$P\{X \in [6800, 7200]\}$ ：转换后可得：$P\{X \in [6800, 7200]\} = P\{|X - 7000| \leq 200\}$

由切比雪夫不等式：

$$P(|X - 7000| \leq 200) \geq 1 - \frac{2100}{200^2} \approx 0.9475.$$

Example. 白细胞平均数为 7300，标准差为 700，求白细胞数在 5200 到 9400 的概率

解：$EX = 7300, DX = 700^2 = 490000$ ，由切比雪夫不等式：

$$P(5200 \leq X \leq 9400) = P(|X - 7300| < 2100) \geq 1 - \frac{DX}{2100^2}.$$

Notation. 用切比雪夫不等式做题：两边取到的距离应该相等

Example. 3σ 原则：求 $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$

解：由切比雪夫不等式：

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} \quad P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}.$$

Notation. 当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时，这个概率约等于 0.0027

12.1 切比雪夫大数定律

Definition. 依概率收敛：有一个随机变量序列，越到 n 大时 X_n 能取得某数 a 的概率越来越接近 1，即 X_n 的取值密集在 a 的附近，记为：

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} a.$$

Learn 7

11.23

13 抽样分布

Definition. 卡方分布 $\chi^2(n)$ ： 标准正态分布平方后的和是卡方分布

即：$X_1, X_2, \dots X_i$ 相互独立且都是标准正态分布，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n) = \chi^2.$$

Example. $X_1, X_2, \dots, X_8$ 独立同分布于 $N(0,1)$ ， 则 $\sum_{i=1}^{8} X_i \sim \chi^2(8)$

Corollary. 卡方分布的期望 $EX = n$ ， 方差 $DX = 2n$

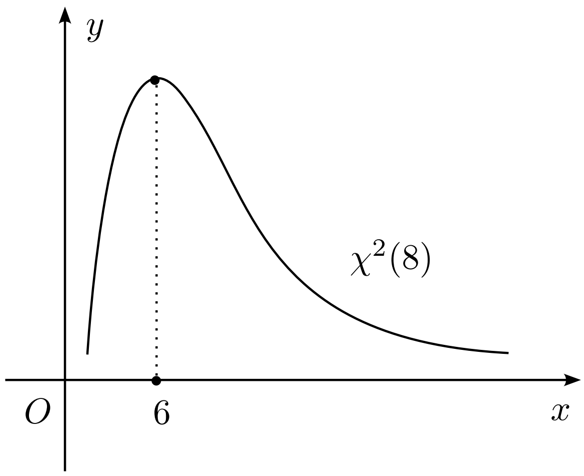


图 1: 卡方分布图像

Corollary. 中心极限定理可得：如果 $X \sim \chi^2(n)$ 且 n 充分大的时候：$\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$ 近似符合标准正态分布 $N(0,1)$

Notation. 独立同分布的中心极限定理不管分布种类

Corollary. $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ ， 且 X, Y 独立，则 $X + Y \sim \chi^2(m+n)$

Notation. 推论：$X_i \sim \chi^2(m_i)$ ， 则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right).$$

即卡方分布符合可加性

Definition. 上 α 分位数：$P\left(\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\right) = \alpha$ ：在分布图某点右边的概率为 α ，这个点的值

Example. $\chi^2_{0.05}(10) = 18.3, \chi^2_{0.1}(25) = 34.4$

上 α 分位数查表可得：n 已知，确定所需的概率 α

Example. 已知 $X \sim \chi^2(10)$ 求：当 $P(X > a) = 0.025, P(X < b) = 0.05$ 时的 a, b

解：由题：$n = 10, \alpha_1 = 0.025$ ，查表可得：$\chi^2_{0.025}(10) = 20.5 = a$
易得 $P(X < b) = 0.05 = 1 - P(X \geq b)$ 即 $P(X \geq b) = 0.95 = \alpha_2$,查表:$\chi^2_{\alpha_2}(10) = 3.94 = b$

Notation. 卡方分布为单峰曲线，$n-2$ 时取最大值

13.1 t 分布

Definition. t 分布由标准正态分布和卡方分布组成：$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且 X, Y 相互独立，则 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

Notation. 上 α 分位数：$P(T > t_\alpha(n)) = \alpha$ ：α 为一个数，由于 t 分布的对称性可得：$t_\alpha(n) = 1 - t_{1-\alpha}(n)$

Example. $X \sim N(2,1), (Y_1, Y_2, \ldots, Y_4) \sim N(0,4)$ ，且相互独立，令 $T = \frac{4(X-2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 Y_i^2}}$ ，求 T 的分布并求 $P(|T| > t_0) = 0.01$ 时的 t_0

Learn 8

11.24

解：对 Y_i：$\mu = 0, \sigma = 2$ ，先将 Y_i 改为标准正态分布：$\frac{Y_i - 0}{2} \sim N(0,1)$，写出一个关于 $\frac{Y_i - 0}{2}$ 的卡方分布：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{Y_i - 0}{2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 Y_i^2}{4} \sim \chi^2(4).$$

对 X 标准化：$\frac{X-2}{1} \sim N(0,1)$ ，由于 t 分布“上正态下卡方”，所以：

$$\frac{(X-2)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 Y_i^2}{4}/4}} = \frac{4(X-2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 Y_i^2}} = T \sim t(4).$$

要求 $P(|T| > t_0) = 0.01$:由 t 分布的对称性:$P(|T| > t_0) = 2P(T > t_0) = 0.01$,即 $P(T > t_0) = 0.005$ ；令 $\alpha = 0.005$ ，查表 $t_{0.005}(4)$ 即可

查表得：$t_{0.005}(4) = 4.604$

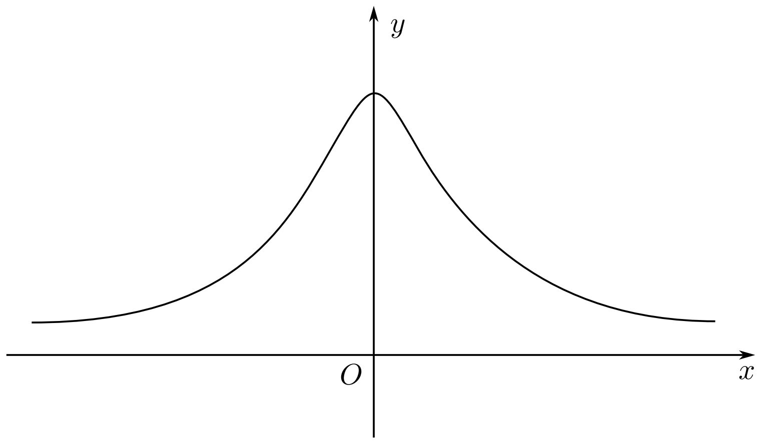


图 2: t 分布图像

13.2 F 分布

形式：$F(n_1, n_2)$（共 2 个参数）

Corollary. $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$，且相互独立，则：

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2).$$

同理：

$$\frac{Y/n_2}{X/n_1} \sim F(n_2, n_1).$$

记 $F \sim F(n_1, n_2)$，则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

Example. $X_1, X_2, \ldots, X_6 \sim N(0, \sigma^2)$，求 $\frac{2\left(X_1^2+X_2^2\right)}{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2}$ 的分布

解：$\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$，则 $\frac{X_1^2}{\sigma^2} + \frac{X_2^2}{\sigma} \sim \chi^2(2)$，同理：$\sum_{i=3}^{6} \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4)$

$$\frac{\frac{X_1^2+X_2^2}{\sigma^2}/2}{\frac{\sum_{i=3}^{6} X_i^2}{\sigma^2}/4} = \frac{2\left(X_1^2+X_2^2\right)}{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2} \sim F(2,4).$$

Notation. F 分布的上 α 分位数：$P(F > F_\alpha(n_1, n_2) = \alpha)$

Corollary.

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}.$$

Learn 8

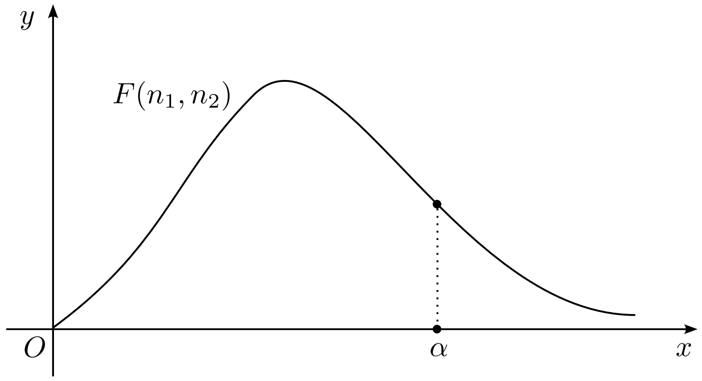


图 3: F 分布图像

证明. 假设 $F \sim F(n_1, n_2)$，则 $\frac{1}{F} \sim (n_2, n_1)$，求 $P(F > F_{1-\alpha}(n_1, n_2)) = 1 - \alpha$

将两边同时取倒数，符号反向：

.

$$
\begin{aligned}
1 - \alpha = P(F > F_{1-\alpha}(n_1, n_2)) &= P\left(\frac{1}{F} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right) \\
\alpha &= P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right) \\
\Rightarrow \frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1), \alpha &= P\left(\frac{1}{F} > F_\alpha(n_2, n_1)\right) \\
\Rightarrow F_\alpha(n_2, n_1) &= \frac{1}{F_{1-\alpha(n_1, n_2)}}.
\end{aligned}
$$

□

Example. $F \sim F(10, 15)$ ，求 λ_1, λ_2 是 $P(F > \lambda_1) = 0.01, P(F \leq \lambda_2) = 0.01$

解：查表可得：$F_{0.01}(10, 15) = \lambda_1 = 3.8$ ，由题：$P(F \leq \lambda_2) = P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{\lambda_2}\right) = 0.01$ ，由于 $\frac{1}{F} \sim F(15, 10)$ ，则可通过查表得 $F_{0.01}(15, 10)$ 求得 $\frac{1}{\lambda_2}$ ：

得：$\begin{cases} \lambda_1 = 3.8 \\ \lambda_2 = 0.293 \end{cases}$

Learn 9

11.25

14 正态总体下的抽样分布

Corollary. $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 且 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为样本，定义：

1. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
2. $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)$

结论：

1. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ，标准化后 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$
2. $E\overline{X} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$
3. $D\overline{X} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma}{n}$
4. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$
5. $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立

Notation. 均值的方差比原来的分布的方差小：少量样本的平均数波动会较大（取到两个很大的 + 取到两个很小的），大量样本的平均数波动不大

Corollary. 1. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2 \sim \chi^2(n)$

2. $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

证明. 把 X_i 标准化后求和：$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$ ，提取后即得 $\frac{1}{\sigma^2}\left(X_i - \mu\right)^2 \sim \chi^2(n)$ □

Notation. 区分：$\overline{X}$ 为样本均值，自由度为 $n-1$ ，μ 为总体期望，自由度为 n ；样本均值为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ，相当于多了一个约束（多了一个方程），使得自由未知量少一个

Example.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

自由未知量为 x_3, x_4

证明. $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$ ：

需要用到：

1. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ ：S 和 σ 的关系
2. $\frac{X}{\sqrt{Y/(n-1)}} \sim t(n-1)$，其中 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n-1)$

由于 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N\left(0,1\right),\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n-1\right)$，构造 t 分布：

$$\frac{\frac{X-\mu}{\sigma}\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/\left(n-1\right)}}=\frac{\frac{X-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\cdot\sigma}{\sqrt{\left(n-1\right)S^2/\left(n-1\right)}}=\frac{X-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t\left(n-1\right).$$

即结论得证。 □

以上为一个正态分布总体；以下为两个正态分布总体：

Corollary. $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_1,\sigma_2^2\right)$

有两个正态分布总体样本：$\{X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}\},\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}\}$ ，有以下结论：

1. $\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
2. $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$
3. 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时：$T\left(\overline{X},\overline{Y},\mu_1,\mu_2,S_1,S_2\right)$ 的某个形式为 t 分布，形式见证明（太复杂了）

证明. 第一个结论：$\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

由一个总体的正态分布结论有：$\overline{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n}\right),\overline{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n}\right)$，则由线性可加性：

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

接着将这个分布标准化即可：

$$\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N\left(0,1\right).$$

□

证明. 第二个结论：$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$ ：

需要用到结论：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n-1\right)$

两个卡方分布的比值即为 F 分布：

$$\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/\left(n_1-1\right)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/\left(n_2-1\right)}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right).$$

□

Notation. t 分布注意：开根号、除自由度：

$$\frac{X}{\sqrt{Y/\boldsymbol{n}}}\sim t\left(\boldsymbol{n}\right).$$

F 分布注意：除参数：

$$\frac{X/\boldsymbol{n}_1}{Y/\boldsymbol{n}_2}\sim F\left(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right).$$

Notation. 某个复杂形式符合 t 分布的证明：

$$T=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right).$$

或者更直白的形式：

$$T=\frac{\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\right)}{n_1-1+n_2-1}}}\sim t\left(n_1-1+n_2-1\right).$$

不难发现：上半部分为结论展示的正态分布，下半部分中，卡方分布部分利用卡方分布可加性：$\chi^2\left(n_1\right)+\chi^2\left(n_2\right)=\chi^2\left(n_1+n_2\right)$，用 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 组合：

$$\begin{cases}\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n_1-1\right)\\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2\left(n_2-1\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{\left(n_1-1\right)S_1^2}{\sigma_2^2}+\frac{\left(n_2-1\right)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2\left(n_1+n_2-2\right).$$

最后通过构造 t 分布将两部分组合即可。

Example. $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, $\overline{X}$ 和 S^2 为样本均值和方差, 当 $n=16$ 时, 求 k 使 $P\left(\overline{X}>\mu+kS\right)=0.95$

解：把原式转换：

$$P\left(\overline{X}>\mu+kS\right)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{16}>k\cdot\sqrt{16}\right).$$

由结论可得 $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\cdot\sqrt{16}\sim t\left(15\right)$ ，由 t 分布的对称性：$P\left(T>4k\right)=1-P\left(T>-4k\right)$ 即 $P\left(T>-4k\right)=0.05$ ，因此查表 $t_{0.05}\left(15\right)$ 即可

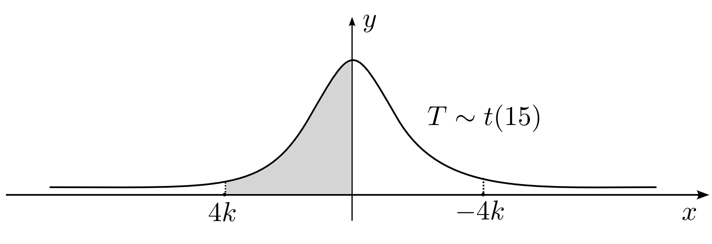


图 4: t 分布对称性

15 参数估计

Definition. 参数：对于分布的参数举例如下：

通过抽样 $X_1, X_2, \ldots X_n$ 构造函数

表 1: 参数-分布关系

总体分布	总体参数
$N\left(\mu, \sigma^2\right)$	μ, σ^2
$P\left(\lambda\right)$	λ
$U[a, b]$	a, b

Example. 抽取 50 个同学量身高，构造身高函数，通过观测值得到的估计参数来接近理论上的参数

Definition. 参数空间：参数的取值范围

15.1 点估计

Definition. 点估计：估计值为一个数

对比区间估计：估计值是一个区间

点估计构造的函数记为 $\hat{\theta} = \hat{\theta}\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$

15.2 矩估计

Definition. 使用随机变量的矩估计参数

使用样本矩代替总体的矩，一般使用一阶矩样本矩代替一阶总体矩，二阶样本矩代替二阶总体矩

对于总体：

一阶（中心/原点）矩 $EX \leftarrow$ 一阶样本矩 $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

二阶矩 $EX^2 \leftarrow$ 二阶样本矩 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Example. $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ，取样 $X_1, X_2, \ldots X_n$ ，使用矩估计估计参数 μ, σ

解：$EX = \mu, \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ （一阶样本 $\rightarrow$ 一阶总体）

即：$\hat{\mu} = \overline{X}$（估计值）

同理：$DX = E\left(X - EX\right) = EX^2 - \left(EX\right)^2$，转换后：$EX^2 = DX + \left(EX\right)^2 = \sigma^2 + \mu^2$，而 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

即：$\hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = A_2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = A_2 - \hat{\mu}^2$ （估计值）

算出 $\hat{\sigma}$ 即得：

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \end{cases} .$$