

# Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by 李漫漫

Note by THF

2024 年 10 月 9 日

## 目录

<b>1 第一章</b>	<b>3</b>
1.1 随机事件 . . . . .	3
1.1.1 现象 . . . . .	3
1.1.2 随机试验 . . . . .	4
1.1.3 样本 . . . . .	4
1.1.4 随机事件 . . . . .	5
1.2 事件关系与运算 . . . . .	5
1.3 事件的概率 . . . . .	6
1.3.1 古典概型 . . . . .	7
1.3.2 几何概型 . . . . .	8
1.4 公理化 . . . . .	10
1.5 条件概率与乘法公式 . . . . .	12
1.6 全概率公式 . . . . .	13
1.7 贝叶斯公式 . . . . .	13
1.8 独立性 . . . . .	15

<b>2</b>	<b>一维随机变量及其分布</b>	<b>17</b>
2.1	随机变量及其分布函数 . . . . .	17
2.2	常见分布律 . . . . .	20
2.3	连续型随机变量 . . . . .	22
2.4	标准化 . . . . .	24
2.5	随机变量函数的分布 . . . . .	25
<b>3</b>	<b>多维随机变量函数及其分布</b>	<b>27</b>
3.1	二维随机变量及其分布 . . . . .	27
3.2	二维随机变量的边缘分布函数 . . . . .	28
3.3	联合分布律 . . . . .	29
3.4	二维连续性随机变量及其概率特性 . . . . .	30

## 概述

### 资源

公众号: 狗熊会、大数据文摘, 好玩的数学

MOOC: 爱课程, Coursera, Edx, 网易公开课等

### 教师要求

教材: 概率论与数理统计第二版

参考: The Lady Tasting Tea, 程序员数学之概率统计, ...

学习目的: 自问自答, 自言自语

考核及成绩组成:

期中 (10)

作业与考勤 (10)

期末 (70)

MOOC (10)

## 课程简介

概率: Probability

统计: Statistics

概率论与数理统计: Probability theory and Mathematical statistics

**Notation.** 第一章重要但不突出

从概率到概率论: 新增时间 (随机事件、样本空间变化)

从统计到数理统计: 统计最开始为记录性质, 后来衍生出预测, 通过数学模型引入数理统计

类似的还有政府统计、经济统计等

2000-2015 年间, IT 时代逐渐转换为 DT(Data Technology) 时代, 大数据逐渐占时代主体

## 1 第一章

### 1.1 随机事件

#### 1.1.1 现象

确定性现象: 一定条件下必然发生

随机现象强调统计规律性

**Notation.** 统计规律性:

1. 每次试验前不能预测结果
2. 结果不止一个
3. 大量试验下有一定规律

**Example.** 星际旅行时宇航员看到的现象不是随机现象:

对星际旅行的人而言, 无法完成大量试验

宇航员观测到的结果无规律, 只能称为不确定现象 (Uncertain)

**Example.** 扔一个骰子不能预测结果, 但可以知道结果是 1, 2, 3, 4, 5, 6 的一个, 因此观察扔骰子是随机现象 (Random)

### 1.1.2 随机试验

随机试验 (E): 研究随机现象时进行的实验或观察等

**Notation.** 随机试验的特性:

1. 可以在完全相同的条件下重复进行
2. 试验的可能结果在试验前已知
3. 试验的结果不可预测

### 1.1.3 样本

在随机试验中, 不可再分的最简单结果成为样本点  $\omega$ , 全体样本点组成样本空间  $\Omega$

**Notation.** 随机事件是基本事件的集合

**Example.** 扔骰子存在 6 个基本事件, 可以产生  $2^6$  个随机事件, 其中样本空间  $\Omega = \{x | x \in [1, 6], x \in \mathbb{R}\}$

**Example.** 1. 射击时用  $\omega_i$  表示击中  $i$  环, 样本空间为:

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}\}.$$

2. 微信用户每天收到信息条数的取值范围是  $[0, +\infty)$ , 样本空间为无限集:

$$\Omega = \{N | N \geq 0, N \in \mathbb{R}\}.$$

3. 电视机的寿命样本空间为  $\Omega = \{t | t > 0\}$ , 为连续的非负实数集

4. 投掷两枚硬币, 样本空间为  $\Omega = \{(x, y) | x, y = 0, 1\}$ , 其中 0, 1 分别代表正面和背面

**Notation.** 1. 样本点可以不是数

2. 样本空间可以是无限集

### 1.1.4 随机事件

## 1.2 事件关系与运算

1.1.  $A \subset B$ :  $A$  发生必然  $B$  发生

1.2.  $A = B$ :  $A \subset B, B \subset A$

2.  $A \cup B$ :  $A$  和  $B$  至少有一个发生

2.1  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$

3.  $A \cap B$ :  $A$  和  $B$  只发生一个

4.1.  $A, B$  互斥: 不能同时发生:  $AB = \emptyset$

4.2.  $A, B$  对立: 非此即彼:  $A \cup B = \Omega$

5.  $A - B$ :  $A\bar{B}$  或  $A(\Omega - B)$ , 或  $A$  发生但  $B$  不发生

**Notation.**  $A - B = A\bar{B} \subset A$ ,  $B - A = B\bar{A} \subset B$

当  $AB = \emptyset$  时,  $A - B = A, B - A = B$

**Notation.**  $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$ , 且  $P(\Omega) + P(\emptyset) = 1$ , 即  $\Omega$  与  $\emptyset$  互斥

6. 结合律:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

7. 分配律:  $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$ ,  $(A \cup B)C = AC \cup BC$

8. 交换律:  $A \cup B = B \cup A, AB = BA$

**Notation.** 德摩根律:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

**Example.**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}.$$

$$\overline{(A \cup B) \cup C} = \overline{A \cup B} \bar{C} = \dots$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

### 1.3 事件的概率

概率分类:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{主观概率} \\ \text{统计概率} \\ \text{古典概型} \\ \text{几何概型} \end{array} \right.$$

**Notation.** 德摩根、蒲丰、皮尔逊、维纳均进行过投掷硬币的试验, 随着试验次数的增加, 出现正面的频率逐渐接近 0.5

大数定律说明, 该事件的概率为 0.5

**Definition.** 统计概率:  $A$  为试验  $E$  的一个事件, 随着重复次数  $n$  的增加,  $A$  的频率接近于某个常数  $p$ , 定义事件  $A$  的概率为  $p$ , 记为  $P(A) = p$

频率的特性:

1. 非负性:  $f_n(A) \in [0, 1]$
2. 规范性:  $f_n(\Omega) = 1$
3. 有限可加性:  $A_i$  两两互斥, 则  $f_n(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n f_n(A_i)$

**Definition.** 主观概率: 人对某个事件发生与否的可能性的估计

**Definition.** 完备事件组:  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互斥, 且

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = 1.$$

或

$$\sum_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

则称  $A_1 \rightarrow A_n$  为完备事件组 (不重不漏)

**Example.**  $A, \bar{A}$  是完备事件组

### 1.3.1 古典概型

古典概型特点: 有限等可能性 (基本事件数有限, 基本事件发生的可能性相等)

**Notation.** 概率计算:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

**Example.** 某年级有 6 人在 9 月份出生, 求 6 个人中没有人同一天过生日的概率

基本事件总数:  $30^6$

目标事件:  $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = P_{30}^6$

概率:

$$P(A) = \frac{P_{30}^6}{30^6}.$$

**Example.** 有  $N$  个乒乓球中有  $M$  个白球、 $N - M$  个白球, 任取  $n(n < N)$  个球, 分有放回和不放回, 求取到  $m$  个黄球的概率

1. 不放回:

基本事件总数:  $C_N^n$

目标事件:  $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$

概率:

$$P = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, n = \max\{0, n - (N - M)\}, \dots, \min\{n, M\}.$$

2. 有放回:

$$P = \frac{C_n^m M^m (N - M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}, m \in [0, n].$$

注意到该概率为伯努利分布  $C_n^m B(n, \frac{M}{N})$

匹配问题:

**Example.** 麦克斯韦-玻尔兹曼统计问题:

$n$  个质点随机落入  $N(N > n)$  个盒子, 盒子容量不限, 设  $A$  表示指定的  $n$  个盒子各有一个质点,  $B$  表示恰好有  $n$  个盒子装一个质点

基本事件总数:  $N^n$

$A$  考虑顺序, 即:

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}.$$

同理:

$$P(B) = \frac{C_N^n}{N^n}.$$

### 1.3.2 几何概型

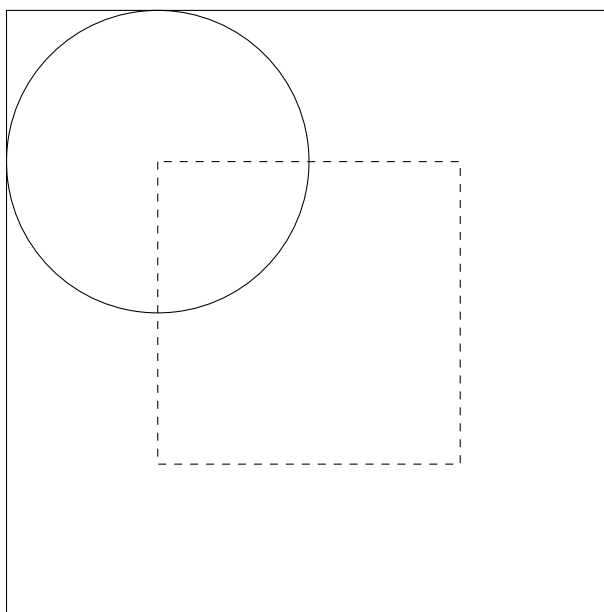
几何概型特点: 使用事件所对应的**几何度量**计算

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

**Notation.** 度量: 面积、体积、长度等描述几何量大小的测度方式

**Example.** 地面铺满 2 dm 的地砖, 向地面投掷一个  $r = 0.5$  dm 的光盘, 求光盘不与边线相交的概率

如图:



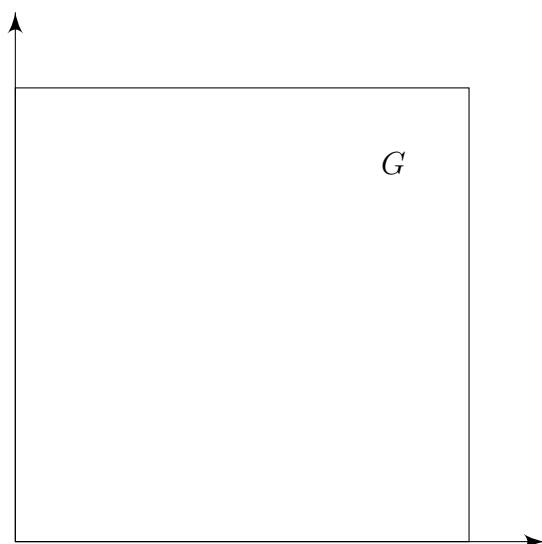
课后习题: A 组 8 题, B 组 3 题



**Example.** 两人相约 8-9 点间在某地相见，先到的人等待 20 分钟后离去，求二人会面的概率

设  $(x, y)$  分别表示两人到达的时刻

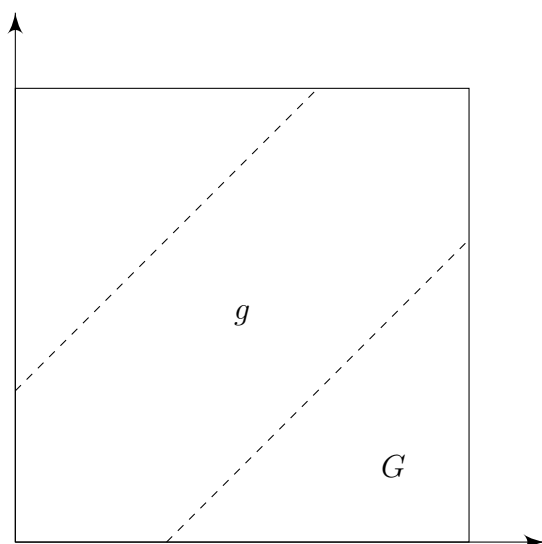
设  $G$  为样本空间，绘制样本空间：



由题：两人到达的时间之差的绝对值小于 20 分钟 ( $\frac{1}{3}$  小时)，即：

$$|x - y| \leq \frac{1}{3}.$$

将事件绘制：



$$P(g) = \frac{m(g)}{m(G)} = \frac{S(g)}{S(G)} = \frac{1 - (\frac{2}{3})^2}{1} = \frac{4}{9}.$$

**Notation.** 几何概型的特点:

1. 非负性:

$$P(A) \in [0, 1].$$

2. 规范性:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. 可列可加性:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

## 1.4 公理化

$$(\Omega, \mathcal{F}, p).$$

**Definition.**  $\Omega$ : 随机试验所产生的所有样本点的集合

$\mathcal{F}$ : 集合内所有子集为元素的集合

$P(X)$ : 概率函数

**Axiom.** 非负性:

$$P(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}.$$

**Axiom.** 规范性:

$$P(\Omega) = 1.$$

**Axiom.** 可列可加性: 对两两互斥的事件  $A_1, A_2, \dots$ ,

$$P\left(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

从三条公理得出的性质:

**Notation.** 1.  $P(\emptyset) = 0$

2. 有限可加性:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right).$$

3.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4.  $A \subset B \implies P(B - A) = P(B) - P(A)$

5.  $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

6.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

**Notation.** 6.1.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

6.2.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n P(A_i A_j A_k) \\ \dots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right).$$

**Example.** 从有号码  $1, 2, \dots, n$  的  $n$  个球中有放回地取  $m$  个球, 求取出的  $m$  个球中最大号码为  $k$  的概率

$$P\{k = 1\} = \left(\frac{1}{n}\right)^m.$$

逐个列举计算较复杂, 记事件  $B_k$  为取出的  $m$  个球最大号码不超过  $k$ , 只需保证每次摸出的球都不超过  $k$  即可:

$$P(B_k) = \frac{k^m}{n^m}.$$

又有  $P(A_k) = P(B_k) - P(B_{k-1})$ , 且  $B_{k-1} \subset B_k$

所以:

$$P(A_k) = \frac{k^m}{n^m} - \frac{(k-1)^m}{n^m}.$$

**Example.** 匹配问题:  $n$  个学生各带有一个礼品, 随机分配礼品, 设第  $i$  个人抽到自己的礼品称为一个配对, 求至少有一个配对的概率

设  $A_i$  是第  $i$  个人抽到自己的礼品,  $A$  为目标事件, 则:

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

$$P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{P_n^2}.$$

$$P(A_i A_j A_k) = \frac{1}{P_n^3}.$$

.....

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{n!}.$$

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P(A_i A_j) + \dots$$

## 1.5 条件概率与乘法公式

**Definition.**

$$P(A) > 0, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

即: 在  $A$  发生的条件下,  $B$  发生的概率

**Definition.** 乘法公式:

$$P(AB) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B).$$

**Notation.**  $A, B$  独立:  $P(AB) = P(A) P(B)$

结合乘法公式:

$$P(B) = P(B|A).$$

$$P(A) = P(A|B).$$

## 1.6 全概率公式

**Corollary.** 事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为完备事件组, 事件  $B \subset \Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , 则:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i).$$

**Notation.** 此时完备事件组的情况应该已知, 通过完备事件组  $A$  的辅助可以求得较复杂事件  $B$  的概率

## 1.7 贝叶斯公式

**Corollary.**

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)}.$$

贝叶斯公式被称为“逆概率公式/后验公式”, 其中事件  $B$  更可能是事件的结果, 将事件组  $A$  看作结果出现的原因, 则贝叶斯公式是一个从“结果”推“原因”的可能性的公式

**Notation.** 对比一般公式: 事件  $A$  导致  $B$ , 求  $B$  发生的概率

贝叶斯公式: 事件  $A$  导致  $B$ ,  $A$  中的一个事件  $A_i$  导致  $B$  发生的概率

**Axiom.** 条件概率的公理:

1. 非负性:  $P(A) \in [0, 1]$
2. 规范性:  $P(\Omega|A) = 1$
3. 可列可加性:

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i|A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

**Corollary.**

$$P(\bar{B}|A) = P(\Omega - B|A) = P(\Omega|A) - P(B|A).$$

**Corollary.**

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2) &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2). \\ \implies P(B_1 \cup B_2|A) &= P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 B_2|A). \end{aligned}$$

**Corollary.** 乘法公式:

$$P(ABC) = P(A(BC)) = P(A)P(BC|A) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

**Example.** 8 个红球 2 个白球, 求前三次结果是“红红白”的概率:

1. 不放回取 3 个 (和一次取三个球相同)

所有可能性:  $10 \times 9 \times 8$

目标事件:  $8 \times 7 \times 2$

或使用乘法公式: 设  $A_i$  为第  $i$  次取到红球, 目标事件可表示为  $A_1 A_2 \bar{A}_3$   
概率:

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1 A_2) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{7}{45}.$$

2. 每次取后放回, 并加入两个同色的球, 取 3 次 (不能使用古典概型)  
概率:

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = \frac{8}{10} \times \frac{8}{12} \times \frac{2}{14} = \frac{8}{105}.$$

**Example.** 某疾病的发病率为 0.0004, 患病检测呈阳性的概率为 0.99, 误诊为阴性的概率为 0.01, 误诊为阳性的概率为 0.05, 不患病检测呈阴性概率为 0.95, 一个人检测呈阳性, 求其患病的概率

设阳性为  $A$ , 患病为  $B$

则:

$$P(A|B) = 0.99, P(A|\bar{B}) = 0.05, P(B) = 0.0004.$$

要求:  $P(B|A)$

使用贝叶斯公式:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(AB) + P(A\bar{B})}. \\ &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = 0.0079. \end{aligned}$$

## 1.8 独立性

**Definition.**  $A, B$  独立, 则:  $P(A|B) = P(A)$

**Notation.** 证明独立性:

1.  $P(A)P(B) = P(AB)$

**Notation.** 独立事件的特点:

1.  $A, B$  独立有:  $A, B$  所有的组合 (包含补集) 均独立
2.  $A, B$  独立的充要条件:  $P(A|B) = P(A)$  or  $P(B|A) = P(B)$
3.  $\emptyset$  与任何随机事件独立,  $\Omega$  与任何随机事件独立

对于三个事件相互独立:

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(C)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}.$$

对比乘法公式:  $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$

**Definition.** 相互独立:

有  $A_1, A_2, \dots, A_n$  事件组, 对  $\forall s \in [2, n]$  个事件  $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_s}$  均有:

$$P\left(\prod_{n=1}^s A_{k_n}\right) = \prod_{n=1}^s P(A_{k_n}).$$

称事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立

**Definition.** 两两独立: 对事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 若任意两个事件独立, 则称为两两独立

**Notation.** 相互独立一定两两独立, 反之不一定

**Notation.** 相互独立事件组的性质:

1. 事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立, 将其中任意部分改为对立事件, 事件组仍为相互独立
2. 事件相互独立, 将事件组任意分为两组 (或多组), 对组内事件进行“并、交、差、补”操作后, 事件间依然相互独立

## 独立重复实验

**Definition.**  $E_1, E_2$  中一个试验的任何结果和另一个试验的任何结果相互独立, 则试验相互独立; 若  $n$  个独立试验相互独立且试验相同, 称  $E_1, E_2, \dots, E_n$  为  $n$  次独立重复实验, 或  $n$  重独立试验

**Example.** 扔硬币和掷骰子为独立试验, 其中扔硬币为伯努利试验 (只有两个结果)

**Definition.**  $n$  重独立试验  $E$  中, 每次试验都是伯努利试验 (可能结果只有两个), 称  $E$  为  $n$  重伯努利试验

1. 二项概率公式: 成功  $k$  次的概率记为  $P_n(k)$ , 假定前  $k$  次成功, 后  $n-k$  次失败, 则

$$P_i = p^k (1-p)^{n-k}.$$

指定事件  $A$  发生的位置有  $C_n^k$  种, 则:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

称为二项概率公式

2. 几何概率公式: 首次成功恰好发生在第  $k$  次的概率记为  $G(k)$ , 设前  $k-1$  次失败, 则:

$$G(k) = q^{k-1}p.$$

可以验证:  $\sum G(k) = 1$

3. 负二项概率: 需要成功  $r$  次, 第  $r$  次成功恰好发生在第  $k$  次的概率记为  $G_r(k)$ , 设前  $k-1$  次试验有  $r-1$  次成功, 则:

$$G_r(k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}.$$

同样有:  $\sum G_r(k) = 1$



## 2 一维随机变量及其分布

### 2.1 随机变量及其分布函数

随机变量

$$\text{随机变量} \begin{cases} \text{函数} \\ \text{连续} \end{cases}.$$

**Example.** 下一个进入教室的同学可能是男是女，分别记为 1,2，则有映射：

$$\{\text{男}, \text{女}\} \rightarrow \{1, 2\}.$$

将离散的结果映射为坐标轴上离散的数值，所有的数值性的观测结果无需改变，如：下一个进入教室的同学身高为  $\omega$ ，则有映射：

$$X(\omega) = \omega.$$

**Definition.** 实值变量（无分布函数）使用小写字母，随机变量（有分布函数）使用大写字母

对  $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $\{X \leq x\} = \{\omega | X(\omega) \leq x, \omega \leq \Omega\} \in \mathcal{F}$ ，则  $X$  称为**概率空间的随机变量**

**Example.** 对于  $\{M, F\} \rightarrow \{1, 2\}$ ，取  $x = 1$ ，写出定义式：

$$\{X \leq 1\} = \{M\}.$$

同时由于  $x \in \mathbb{R}$ ，取  $x = 1.5$  时， $\{X \leq 1.5\} = \{M\}$  取  $x = 4$  时， $\{X \leq 4\} = \{M, F\}$

由于  $x \in \mathbb{R}$ ，则可以引入其他分布函数辅助，继而引用微积分理论对于  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ：

$$P : \Omega \rightarrow [0, 1].$$

**Notation.**  $X$  具有随机性（样本点具有随机性），是定义在  $\Omega$  上的函数

$X$  是随机变量时  $\{a \leq X \leq b\}, a < b, a, b \in \mathbb{R}$  均为随机事件

$X$  是随机变量， $g(x)$  是非单点的实值函数，则  $Y = g(X)$  也是随机变量：

$$Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

**Example.** 对灯泡做寿命试验, 用  $X$  表示测得灯泡的寿命, 样本空间  $\Omega = [0, +\infty)$ , 则:

$$A = \text{“测得灯泡寿命大于 500 h”} = \{X > 500\}$$

$$B = \text{“测得灯泡寿命小于 5000 h”} = \{X \leq 5000\}$$

## 分布函数

**Definition.** 分布函数: 记

$$F(x) = P\{X \leq x\}, x \in \mathbb{R}.$$

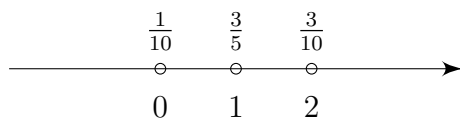
为  $X$  的分布函数

**Example.** 3 白 2 黑, 不放回取三次球, 求取到的黑球个数  $X$  的分布函数

$X$  可以取到: 0, 1, 2

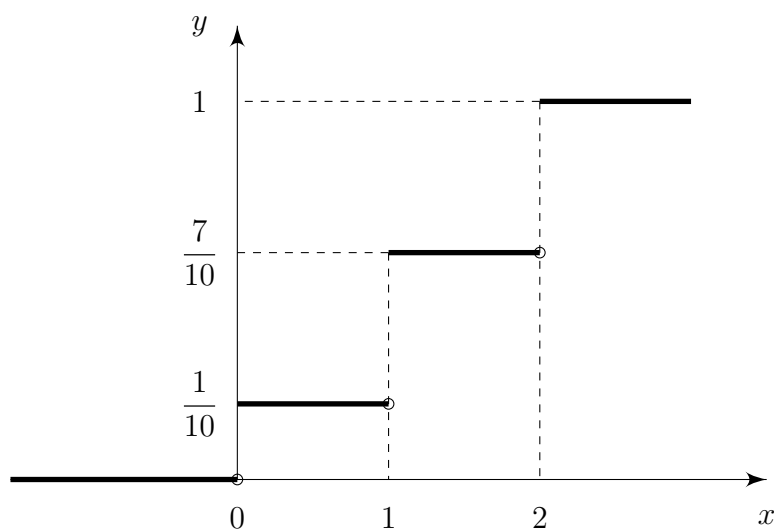
$$P\{X = 0\} = \frac{C_3^3}{C_5^3}, P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3}, P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3}.$$

概率在坐标轴上体现:



$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{10}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}, & x \in [1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

图像:



**Notation.** 分布函数的特性:

1. 非负性:  $P \in [0, 1]$
2. 单调不减性
3. 右连续性:

$$F(x) = \lim_{t \rightarrow x+0^+} F(t).$$

3.1 不满足左连续, 例:  $P(0) - P(0^-) \neq 0$

4. 规范性:

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

关于  $X$  的事件都可以使用分布函数表示:

$$\begin{cases} P\{X = a\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P\{a - \varepsilon < X \leq a\} = F(a) - F(a - 0^+) \\ P\{a \leq X < b\} = F(b - 0^+) - F(a - 0^+) \\ \dots\dots \end{cases}.$$

**Example.** 在  $[a, b]$  内随机取一个数  $X$ , 求  $X$  的分布函数

关键区域:  $x \in [a, b)$ ,

$$\{X \leq x\} = \{a \leq X \leq x\}.$$

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \frac{x - a}{b - a}.$$

作业: 预习第 2,3 节

$$\text{随机变量} \begin{cases} \text{离散型} \begin{cases} \text{有限型} \\ \text{无限型} \end{cases} \\ \text{连续型} \end{cases} .$$

**Notation.** 回忆: 分布函数有以下特征:

1. 非负性
2. 规范性
3. 右连续性
4.  $\forall x < y \in \mathbb{R}, F(x) \leq F(y)$

计算随机变量的概率可以用分布函数表达:

$$P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a).$$

## 2.2 常见分布律

1. 退化分布
2. 两点分布

2.1.  $0 \sim 1$  分布 ( $X \sim B(1, p)$ ):

$$P\{X = k\} = p^k (1 - p)^{1-k}, k = 0, 1.$$

3. 二项分布 ( $X \sim B(n, p)$ ):

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n, p \in (0, 1).$$

4. 几何分布 ( $X \sim G(p)$ ):

$$P\{X = k\} = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, 3, \dots, p \in (0, 1).$$

5. 泊松分布 ( $X \sim P(\lambda)$ ): 用于描述稀有事件的发生

$$P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0.$$

**Notation.** 由

$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

可得:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\{X = k\} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

**Notation.** 分布律的基本性质:

1. 非负性:  $p_i \geq 0$
2. 正则性:  $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$ , 即每一个点的概率都应该知道

**Example.** 保险问题

若一年中某类保险投保人死亡的概率为 0.005, 现有 10000 人参加保险, 求未来一年中:

1. 40 人死亡的概率

设  $X$  为未来一年中死亡的人数, 有  $X \sim B(10000, 0.005)$ , 计算:

$$P\{X = 40\} = C_{10000}^{40} 0.005^{40} \cdot 0.995^{9960} \approx 2.143 \times 10^{-2}.$$

直接计算较为复杂, 可以使用近似计算

有两种近似计算方法: 泊松定理、中心极限定理

**Notation.** 泊松定理: 二项分布有时可以转化为泊松分布:

如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$  (极小但不为 0), 则:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

前提:  $n$  大  $p$  小

将保险问题转换为泊松分布:

$$\lambda = np = 50.$$

$$P\{X = 40\} = \frac{50^{40}}{40!} e^{-50} \approx 0.02.$$

2. 死亡人数不超过 70 的概率

$$\begin{aligned}
 P\{X \leq 70\} &= \sum_{k=0}^{70} C_{10000}^k 0.005^k \cdot 0.995^{(10000-k)}. \\
 &= \sum_{k=0}^{70} \frac{50^k}{k!} e^{-50} (\lambda = np = 50).
 \end{aligned}$$

**Notation.** 几何分布具有无记忆性: 当前试验对过去的试验无任何影响, 即:

$$P\{X = k + 1 | X > k\} = P\{X = 1\}.$$

可以使用条件概率证明:

$$P\{X = k + 1 | X > k\} = \frac{P\{X = k + 1, X > k\}}{P\{X > k\}}.$$

由于:

$$P\{X > k\} = \sum_{j=k}^{+\infty} p(1-p)^j = p \sum_{j=k}^{+\infty} (1-p)^j = p(1-p)^k \cdot \frac{1}{1 - (1-p)} = (1-p)^k.$$

## 2.3 连续型随机变量

**Definition.**

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, x \in \mathbb{R}.$$

则  $X$  为连续型随机变量,  $f(x)$  称为  $X$  的密度函数

连续型随机变量的性质:

1. 非负性:  $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$

2. 规范性:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

3.

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx, a < b.$$

4.  $F$  连续

5.  $F'(x) = f(x)$

**Notation.** 由于连续性随机变量的分布函数  $F$  处处连续, 所以  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0) = 0$ , 即: 概率为 0 的事件不一定是不可能事件

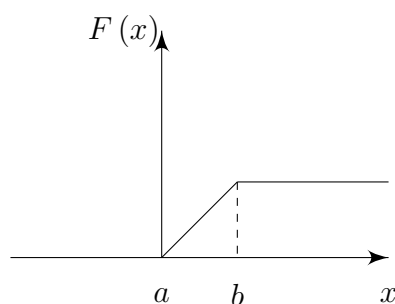
**Example.**

常见的连续型密度函数:

1. 均匀分布 ( $X \sim U[a, b]$ ):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}.$$

对应的分布函数图像:



2. 指数分布 ( $X \sim \Gamma(1, \lambda)$ ):

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

**Notation.** 指数分布大多数与等待时间有关

指数分布的充分必要条件为

$$\forall s, t \geq 0, P\{X > s+t | X > s\} = P\{X > t\}.$$

即指数分布有无记忆性/无后效型 (指数分布的特点)

3. 正态分布 ( $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

**Notation.**  $\sigma^2$  : 方差,  $\mu$  : 数学期待

3.1. 标准正态分布 ( $X \sim N(0, 1)$ ):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

**Notation.** 马尔可夫分布也具有无记忆性

回忆: 正态分布 (高斯分布)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

标准正态分布

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

## 2.4 标准化

**Definition.** 标准化将随机变量转化为另一组随机变量

对于  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 移除前者的中心 (将中心变为 0), 除以标准差, 即得到符合标准正态分布的  $Y \sim N(0, 1)$

1. 去中心化
2. 除以标准差

即:

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}.$$

标准化后的随机变量期望为 0, 方差为 1

$$P\{|X - \mu| < k\sigma\} = P\left\{\left|\frac{x - \mu}{\sigma}\right| < k\right\} = P\{Y < k\}.$$

此时  $Y \sim N(0, 1)$ , 即符合标准正态分布

对于原来的  $3\sigma$  原则, 转化为  $P\{-3 < Y < 3\}$

$$\begin{aligned} P\{-3 < Y < 3\} &= F_Y(3) - F_Y(-3). \\ &= \phi(3) - \phi(-3). \end{aligned}$$



**Notation.**

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

$$= 2\phi(3) - 1.$$

**Example.** 设人的高度符合正态分布  $X \sim N(170, 49)$ , 问在公共设施处的门需要设计多高才能使至少 90% 的人通过

求门高  $H$  使得  $P\{X \leq H\} \geq 0.9$

$$P\{X \leq H\} \implies P\left\{\frac{X - 170}{49} \leq \frac{H - 170}{49}\right\}.$$

即:

$$\phi\left(\frac{H - 170}{49}\right) \geq 0.9.$$

$$\frac{H - 170}{49} \geq 1.28 \implies H \geq 1.80.$$

## 2.5 随机变量函数的分布

**Example.**

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}.$$

$$Y = g(X) \sim F_Y(Y).$$

求解  $F_Y(Y)$

**Example.**  $D \sim U[a, b]$  且

$$S = \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi \rho^2}{4}.$$

1.  $X$  离散:  $Y$  一般是离散的
2.  $X$  连续:  $Y$  可能连续, 可能分段连续 (离散)

**Example.**  $X$  的分布律:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.15 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

表 1: Y Func

0.15	0.1	0.1	0.2	0.3	0.15
4	1	0	1	4	9

求  $Y = X^2$  的分布律

列举  $Y$  的分布律: 合并后:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.45 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

**Example.** 分析法:  $X \sim G(0.5)$  (几何分布), 求  $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$  的分布律  
易得:  $Y$  可以取得: 0,1,-1

$$Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right) = \begin{cases} -1, X = 4n - 1 \\ 0, X = 4n \text{ 且 } X = 4n - 2 \\ 1, X = 4n - 3 \end{cases}.$$

$$P\{Y = -1\} = \sum_{n=1}^{+\infty} P\{X = 4n - 1\} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0.5 \times 0.5^{4n-1-1}.$$

同理:

$$P\{Y = 0\} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0.5 \times 0.5^{2n-1}.$$

$$P\{Y = 1\} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0.5 \times 0.5^{4n-4}.$$

求得  $Y$  的分布律:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}.$$

**Corollary.**  $X$  是连续性随机变量, 密度函数为  $f_X(x)$ , 随机变量  $Y = g(X)$ , 且  $\exists D, P\{Y \in D\} = 1$ ,  $g(x)$  存在反函数  $h(y)$  且严格单调可导, 则:

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| f_X(h(y)), y \in D \\ 0, \text{Others} \end{cases}.$$

**Notation.** 指数分布  $X \sim \Gamma(1, \lambda)$  的数学期望  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

### 3 多维随机变量函数及其分布

在实际问题中, 试验结果有时需要使用两个或两个以上的随机变量 (random value, r.v.) 来描述

**Example.** 天气预报: 温度、湿度、风力、降水等

#### 3.1 二维随机变量及其分布

**Definition.** 设  $\Omega$  为随机试验的样本空间, 则

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{某种变化}} \exists (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2.$$

或:

$$\{X \leq x, Y \leq y\} = \{\omega | X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y, \omega \in \Omega\} \in \mathcal{F}.$$

称  $(X, Y)$  为概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的二维随机变量

**Notation.**  $\{X \leq x, Y \leq y\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}$

性质:

1.  $F(x, y) \in [0, 1]$
2. 关于每个变量单调不减, 即固定  $x$ , 对  $\forall y_1 < y_2$ ,

$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2).$$

3. 对每个变量右连续, 即:

$$F(x_0, y_0) = F(x_0 + 0^+, y_0) = F(x_0, y_0 + 0^+).$$

4. 对  $\forall a < b, c < d$ , 有:

$$F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geq 0.$$

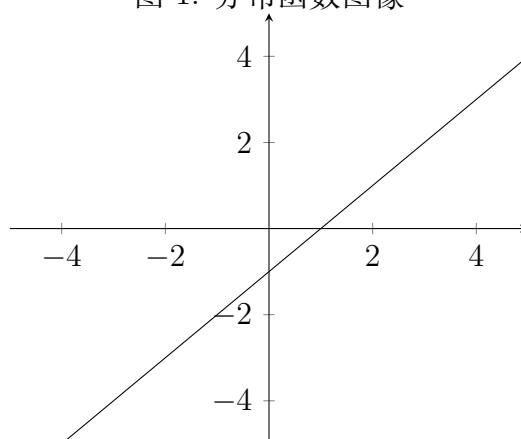
即: 在任意地方框一个矩形, 内部区域的概率必须大于等于 0

**Example.** 性质 4 例题: 设

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y < 1 \\ 1, & x + y \geq 1 \end{cases}.$$

讨论  $F(x, y)$  能否成为二维随机变量的分布函数

图 1: 分布函数图像



**Notation.**

$$P\{X > a, Y > c\} \neq 1 - F(a, c).$$

### 3.2 二维随机变量的边缘分布函数

边缘分布: 降一维

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} \\ &= P\{X \leq x, Y < +\infty\} \\ &= F(x, +\infty) \end{aligned}$$

**Example.** 设随机变量  $(X, Y)$  的联合分布函数为

$$F(x, y) = A \left( B + \arctan \frac{x}{2} \right) \left( C + \arctan \frac{y}{2} \right), x, y \in (-\infty, +\infty).$$

求  $A, B, C$

解:  $\arctan x$  的性质:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

则

$$F(+\infty, +\infty) = A \left( B + \frac{\pi}{2} \right) \left( C + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

$$F(-\infty, +\infty) = A \left( B - \frac{\pi}{2} \right) \left( C + \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

$$F(-\infty, -\infty) = A \left( B - \frac{\pi}{2} \right) \left( C - \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

联立解出  $A, B, C$

### 3.3 联合分布律

表 2: 联合分布律

$X$	$Y$				$p_{a_i}$
	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_j$	
$a_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1j}$	$\sum_{n=1}^j p_{nj}$
$a_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2j}$	$\sum_{n=2}^j p_{nj}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_i$	$p_{i1}$	$p_{i2}$	$\dots$	$p_{ij}$	$\sum_{n=i}^j p_{nj}$
$p_{b_j}$	$\sum_{m=1}^i p_{im}$	$\sum_{m=2}^i p_{im}$	$\dots$	$\sum_{m=1}^i p_{im}$	1

### 二维离散随机变量的联合分布函数

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}.$$

如何求  $p_{ij}$  :

1. 古典概型
2. 乘法公式:

$$p_{ij} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_i | X = x_i\} = P\{X = x_i, Y = y_i\}.$$

### 3.4 二维连续性随机变量及其概率特性

**Definition.** 若

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, dv \, du.$$

则称  $f(x, y)$  为二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度函数, 称  $(X, Y)$  为二维连续型随机变量

**Notation.** 联合密度与联合分布函数的性质:

1.  $f(x, y) \geq 0$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dy \, dx = 1 = F(-\infty, +\infty).$$

3. 对每个边缘连续, 在  $f(x, y)$  的连续点处:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

从而有:  $P(x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y) \approx f(x, y) \Delta x \Delta y$