

Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by SongHao

Note by THF

2024 年 9 月 19 日

目录

1 条件概率	1
1.1 计算	2
1.2 性质	3

1 条件概率

Example. 有男女生各 50 人，有 30 个男生和 10 个女生抢到了宋浩老师的月饼，求在吃到月饼的学生中男生占比

分析：总人数 100 人为总样本空间 Ω ，吃到月饼的学生 40 人，为第二个样本空间 Ω_1

其中男生有 30 人，即概率为：

$$P(A) = \frac{30}{40}.$$

Definition. 条件概率： Ω 是样本空间， A, B 是两个事件，假设 $P(B) > 0$ ，求在 B 发生的条件下 A 发生的概率，称为 A 对 B 的条件概率，记作：

$$P(A|B).$$

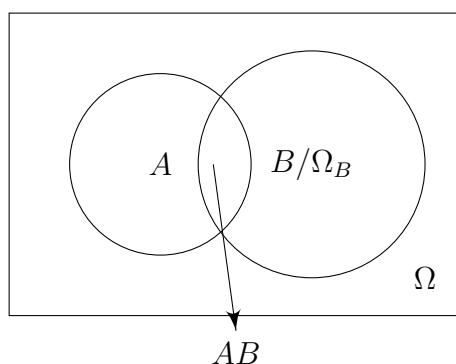
前面提及的概率 $P(A)$ 称作无条件概率，样本空间为 Ω

条件概率的样本空间发生了变化， $P(A|B)$ 的样本空间变为了 $B = \Omega_B$

1.1 计算

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

图示如下：



Example. 有编号 1 – 6 的六个球，随机取一个，观察号码， B 代表号码为偶数， A_1, A_2 代表取到 1, 2 号， A_3 代表取到大于 4，求：

1.

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

2.

$$P(A_1|B) = \frac{0}{3} = 0$$

3.

$$P(A_2) = \frac{1}{6}$$

4.

$$P(A_2|B) = \frac{1}{3}$$

5.

$$P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6.

$$P(A_3|B) = \frac{1}{3}$$

Notation. 条件概率和无条件概率一般不相等

1.2 性质

Rule.

$$P(A|B) \geq 0.$$

Rule.

$$P(\Omega|B) = 1.$$

Rule. 可列可加性：对 $A_1, A_2 \dots A_n, \dots$ 不相容，则：

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

Rule. 乘法公式：

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

证明.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

移项即得上式。

□

画图解释如下：

