Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by 李漫漫

Note by THF

2024 年 10 月 22 日

目录

Lecture 6

Corollary. X 是连续性随机变量，密度函数为 $f_X(x)$ ，随机变量 $Y=g(X)$，且 $\exists D, P\{Y\in D\}=1$，$g(x)$ 存在反函数 $h(y)$ 且严格单调可导，则：

$$f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|\, f_X(h(y)), y\in D\\ 0, \text{Others}\end{cases}.$$

Notation. 指数分布 $X\sim\Gamma(1,\lambda)$ 的数学期望 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

1 多维随机变量函数及其分布

在实际问题中，试验结果有时需要使用两个或两个以上的随机变量 (random value, r.v.) 来描述

Example. 天气预报：温度、湿度、风力、降水等

1.1 二维随机变量及其分布

Definition. 设 Ω 为随机试验的样本空间，则

$$\forall\omega\in\Omega \xrightarrow{\text{某种变化}} \exists(X(\omega), Y(\omega))\in\mathbb{R}^2.$$

或：

$$\{X\le x, Y\le y\}=\{\omega|X(\omega)\le x, Y(\omega)\le y, \omega\in\Omega\}\in\mathscr{F}.$$

称 (X,Y) 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的二维随机变量

Notation. $\{X\le x, Y\le y\}=\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}$

性质：

1. $F(x,y)\in[0,1]$
2. 关于每个变量单调不减，即固定 x ，对 $\forall y_1<y_2$，

$$F(x,y_1)\le F(x,y_2).$$

3. 对每个变量右连续，即：

$$F(x_0, y_0) = F\left(x_0 + 0^+, y_0\right) = F\left(x_0, y_0 + 0^+\right).$$

4. 对 $\forall a < b, c < d$ ，有：

$$F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geq 0.$$

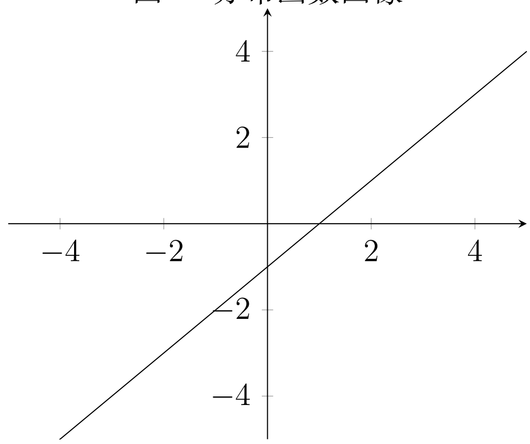
即：在任意地方框一个矩形，内部区域的概率必须大于等于 0

Example. 性质 4 例题：设

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, x + y < 1 \\ 1, x + y \geq 1 \end{cases}.$$

讨论 $F(x, y)$ 能否成为二维随机变量的分布函数

图 1: 分布函数图像



Notation.

$$P\{X > a, Y > c\} \neq 1 - F(a, c).$$

1.2 二维随机变量的边缘分布函数

边缘分布：降一维

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \le x\} \\ &= P\{X \le x, Y < +\infty\} \\ &= F(x, +\infty) \end{aligned}$$

.

Example. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{2}\right), x, y \in (-\infty, +\infty).$$

求 A, B, C

解：$\arctan x$ 的性质：

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

则

$$\begin{aligned} F(+\infty,+\infty) &= A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right) = 1. \\ F(-\infty,+\infty) &= A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right) = 0. \\ F(-\infty,-\infty) &= A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

联立解出 A, B, C

1.3 联合分布律

二维离散随机变量的联合分布函数

$$F(x,y) = \sum_{x_i \le x}\sum_{y_j \le y} p_{ij}.$$

如何求 p_{ij} ：

1. 古典概型
2. 乘法公式：

$$p_{ij} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_i | X = x_i\} = P\{X = x_i, Y = y_i\}.$$

表 1: 联合分布律

X \ Y	b_1	b_2	$\ldots$	b_j	$p_{a\cdot}$
a_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1j}	$\sum_{n=1}^{j} p_{nj}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2j}	$\sum_{n=2}^{j} p_{nj}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	p_{i1}	p_{i2}	$\ldots$	p_{ij}	$\sum_{n=i}^{j} p_{nj}$
$p_{b\cdot}$	$\sum_{m=1}^{i} p_{im}$	$\sum_{m=2}^{i} p_{im}$	$\ldots$	$\sum_{m=1}^{i} p_{im}$	1

1.4 二维连续性随机变量及其概率特性

Definition. 若

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

则称 $f(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数，称 (X,Y) 为二维连续型随机变量

Notation. 联合密度与联合分布函数的性质：

1. $f(x,y)\geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1 = F(-\infty,+\infty).$$
3. 对每个边缘连续，在 $f(x,y)$ 的连续点处：
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y).$$

从而有：$P(x<X\leq x+\Delta x, y<Y\leq y+\Delta y)\approx f(x,y)\,\Delta x\Delta y$

Lecture 7

两个随机变量的独立性

证明. 当 A, B 独立时: $P(AB) = P(A)P(B)$

$$\forall i, j : P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P(Y = y_j).$$

□

Notation. 离散随机变量独立的情况下: $P_{ij} = P_{i\cdot} \cdot P_{\cdot j}$

如何证明 X, Y 独立:

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} P\{Y \le y\} = F_X(X) \cdot F_Y(y).$$

由联合分布律得边缘分布律:

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \lim_{y_0 \to +\infty} P\{X \le x, Y \le y_0\}.$$

Notation. 连续性随机变量的区间 D 概率:

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \iint_{u=x, v=y} f(u,v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

概率函数

Notation. 二维均匀分布:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S(D)}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}.$$

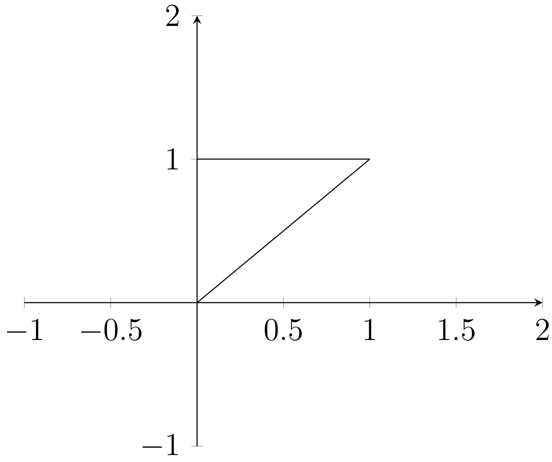
Example.

$$f(x,y) = \begin{cases} Axy, & x \in (0,1), y \in (0,1) \\ 0, & \text{Others} \end{cases}.$$

1. 求 A

$$\iint_{x \in [0,y], y \in [0,1]} Axy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

图 2: f(x,y)



$A=8$

2. $P\left\{X+Y \geq 1\right\}$

$$
\begin{aligned}
P\left\{X+Y \geq 1\right\} &= \iint_{x+y\geq 1} f\left(x,y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x+y\geq 1} 8xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{0.5}^{1} \mathrm{d}y \int_{1-y}^{y} 8xy\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

3. X,Y 的分布函数

3.1 $x \in (-\infty,0), y \in (-\infty,0)$

3.2 $x \in [0,1), y \in [0,x)$

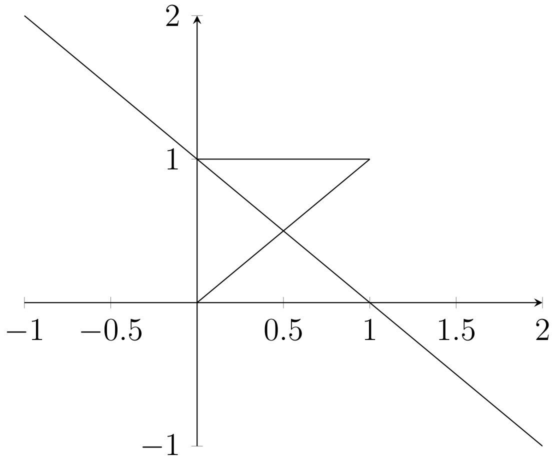
3.3 $x \in [0,1), y \in [x,1)$

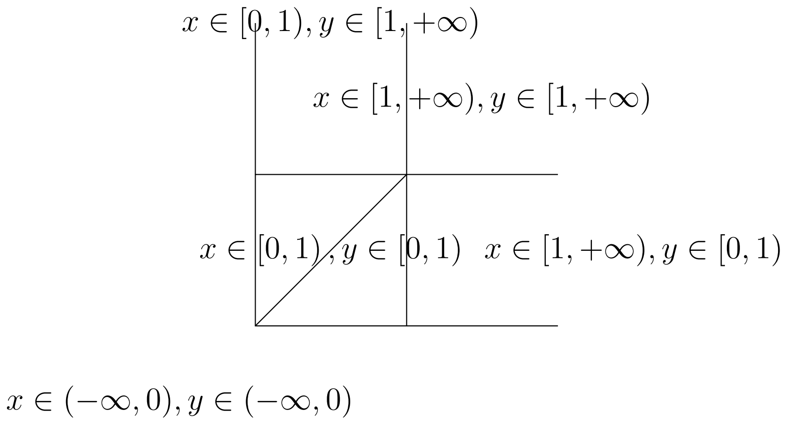
3.4 $x \in [0,1), y \in [1,+\infty)$

3.5 $x \in [1,+\infty), y \in [0,1)$

3.6 $x \in [1,+\infty), y \in [1,+\infty)$

图 3: P(x+y>= 1)





分段对 Axy 积分:

$$F(x,y) = \iint_{x \le u, y \le v} f(u,v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.5 多维随机变量及分布

Definition. 二维推广至多维:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}.$$

称 F 为 n 维随机变量的联合分布函数

Definition. 多维联合分布律:

$$P\left\{X_1=a_{1k_1},X_2=a_{2k_2},\cdots,X_n=a_{nk_n}\right\}.$$

联合分布函数和联合分布律的关系:

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right).$$

$$=\sum_{a_{1k_1}\le x_1}\sum_{a_{2k_2}\le x_2}\cdots\sum_{a_{nk_n}\le x_n}P\left\{X_1=a_{1k_1},X_2=a_{2k_2},\cdots,X_n=a_{nk_n}\right\}.$$

Notation. 二项分布推广多项分布:

$A_1,A_2,\cdots,A_r$ 是 E 的完备事件组, $P\left(A_i\right)=p_i,i=1,2,\cdots,r$, 对 E 进行 n 次独立重复试验, X_i 表示 A_i 发生的次数, 则:

$$P\left\{X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_r=k_r\right\}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}\prod_{i=1}^{r}p_i^{k_i}.$$

其中 $k_i\ge 0,\sum_{i=1}^{r}k_i=n$, 当 $n=2$ 时为二项分布

1.5.1 多维随机变量的独立性

Definition.

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}\left(x_i\right).$$

称随机变量相互独立

等价于:

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}\left(x_i\right).$$

Lecture 8

10.15

1.5.2 条件分布

Notation. 离散型条件分布:

$$P\left\{X=a_i|Y=b_j\right\}=\frac{P\left\{X=a_i,Y=b_j\right\}}{P\left\{Y=b_j\right\}}.$$

$$P\left\{Y=b_j\right\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\left\{Y=b_j,X=a_i\right\}.$$

性质:

1. $P\left\{X=a_i|Y=b_j\right\}\geq 0$
2. $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}P=1$

Notation. 连续型条件分布:

$$P\left\{X=a|Y=b\right\}=0.$$

(无穷多个点)

通过微元法:

$$\begin{aligned}
P\left\{X\leq x|Y=y\right\}&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P\left\{X\leq x|y-\varepsilon<Y\leq y\right\}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\left\{X\leq x,Y\in(y-\varepsilon,y]\right\}}{P\left\{Y\in(y-\varepsilon,y]\right\}}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{F\left(x,y\right)-F\left(x,y-\varepsilon\right)}{F_Y\left(y\right)-F_Y\left(y-\varepsilon\right)}\\
&=\frac{\dfrac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial y}}{\dfrac{\mathrm{d}F_Y\left(y\right)}{\mathrm{d}y}}\\
&=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f\left(u,y\right)\mathrm{d}u}{f_Y\left(y\right)}\\
&=\int_{-\infty}^{x}\frac{f\left(u,y\right)}{f_Y\left(y\right)}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

1.6 二维随机变量函数的分布

$$\begin{cases}aX+bY+c\\ \max\{X,Y\}\\ \min\{X,Y\}\end{cases}.$$

重点公式: 3.4.5 ~ 3.4.8

Lecture 8

假设随机变量 Z=aX+bY+c，有分布函数 $(X,Y)\to F(x,y)$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\le z\}\\&=P\{aX+bY+c\le z\}\\&=\begin{cases}\displaystyle\sum\sum_{ax_i+by_j+c\le z}P\{X=x_i,Y=y_j\}, & (X,Y)\text{ 离散}\\ \displaystyle\iint_{ax+by+c\le z}P\{X=x,Y=y\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{ 连续}\end{cases}.\end{aligned}$$

Notation. 二项分布可加性：有两个相互独立的试验 $X\sim B(m,p)\,,Y\sim B(n,p)$，相当于一个试验 $Z\sim B(m+n,p)$

泊松分布可加性：相互独立的两个随机变量 $X\sim P(\lambda_1)\,,Y\sim P(\lambda_2)$，相当于一个分布 $Z\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

Notation. 极值公式：

两个随机变量（连续）X,Y 相互独立，求 $Z_1=\max(X,Y)\,,Z_2=\min(X,Y)$ 的分布函数和密度函数

1. $F_{Z_1}(z)$：最大的不超过 z 等价于每一个都不超过 z

$$\begin{aligned}F_{Z_1}(z)&=P\{X\le z,Y\le z\}\\&=P\{X\le z\}\cdot P\{Y\le z\}\\&=F_X(z)\cdot F_Y(z)\,.\end{aligned}$$

2. $F_{Z_2}(z)$：最小的不超过 z 不等价于每一个都不超过 z，但最小的超过 z 等价与每一个都超过了 z

$$\begin{aligned}F_{Z_2}(z)&=1-P\{X>z,Y>z\}\\&=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)].\end{aligned}$$

Notation. 独立同分布：变量相互独立且分布律相同

对极值公式扩展：$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 独立同分布：

$$F_{Z_1}(z)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(z)\,.$$

Lecture 8

由于同分布，因此 $F_{X_i}(z) = F_X(z)$

$$F_{Z_1}(z) = (F_X(z))^n.$$

$$f_{Z_1}(z) = (F_{Z_1}(z))' = n(F_X(z))^{n-1}.$$

Notation. 3.4.5:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{X+Y \le z\} \\
&= \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{z} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t-x)\,\mathrm{d}x \\
f_Z(z) &= F_Z'(z) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

同理：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$$

称以上两个公式为卷积公式：$f_Z = f_X * f_Y$

Notation. 正态分布的可加性：

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，且 X, Y 相互独立，则：

$$X + Y = Z \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2\right).$$

多元：

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

1.7 二元正态分布

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}$$
$$\times\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\}.$$

Lecture 9

10.17

Example. $X\sim U[-1,1]$ ，对应的密度函数：

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<-1 \text{ or } x>1\\ \frac{1}{2}, & x\in[-1,1]\end{cases}.$$

同理 $Y\sim U[-1,1]$，求 $Z=|X-Y|$ 的分布函数

解：Z 的取值：[0,2]

$$\begin{aligned}F_Z\left(z\right)&=P\left\{Z\le z\right\}\\&=P\left\{|X-Y|\le z\right\}\\&=\begin{cases}0, & z<0\\ 1, & z\ge 2\\ P\left\{-z\le X-Y\le z\right\}, & z\in[0,2)\end{cases}.\end{aligned}$$

其中

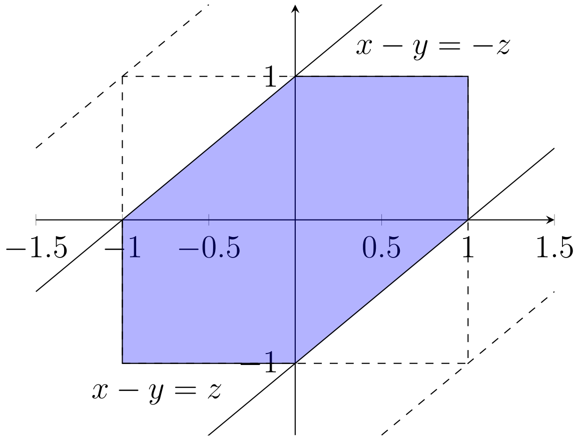
$$P\left\{z-z\le X-Y\le z\right\}=\iint_{-z\le x-y\le z} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

通过 f_X和f_Y 求联合密度函数：X,Y 独立，即 $f\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & x,y<-1 \text{ or } x,y>1\\ \frac{1}{4}, & x,y\in[-1,1]\end{cases}.$$

$$P\left\{-z\le X-Y\le z\right\}=\iint\limits_{-z\le x-y\le z,x,y\in[-1,1]}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

画图确认积分区域：



Notation. i.i.d. ：独立同分布

Notation. 伽马分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 的密度函数:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Notation. 重点题目：3.6.2

2 数字特征

$$\text{数字特征}\begin{cases}\text{数学期望：}E(X)\\ \text{方差：}D(X)\ \text{ or }\ \mathrm{Var}(X)\\ \text{协方差：}\mathrm{cov}(X,Y)\\ \text{相关系数：}\rho(X,Y)\\ \text{矩：}E(X)^k\ \text{ and }\ E(X-EX)^k\end{cases}.$$

Notation. $D(X)=E(X-EX)^2$

$\mathrm{cov}(X,Y)=E((X-EX)(Y-EY))$

$\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

Notation. $|\rho_{X,Y}| \in [0,1]$

ρ 越大越线性相关，$\rho > 0.8$ 时基本可以确定为线性相关

Notation. 矩 (moment) 是最一般的概念

矩分为两大类：k 阶原点矩和 k 阶中心矩

原点矩：$E\left(X\right)^k$

中心矩：$E\left(X-EX\right)^k$

$k+l$ 阶混合中心矩：$E\left(\left(X-EX\right)^k\left(Y-EY\right)^l\right)$

Example. 数学期望为一阶原点矩

方差为一阶中心矩

协方差为二阶混合中心矩

Notation. 可以写出无穷阶的中心矩等同于通过泰勒原理得出分布函数

本章重点：如何计算任意随机变量有关函数的数学期望

唯一计算公式：4.1.5 和 4.1.6

2.1 数学期望

Definition. 离散型随机变量 X 的分布律：$P\left\{X=x_i\right\}=p_i, i=1,2,\ldots$

若级数 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ **绝对收敛**（$\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \left|x_i\right| p_i < +\infty$），则 X 的数学期望**存在**（x_i 为取值，p_i 为权重，$p_i \geq 0$）

$$E\left(X\right)=EX=\sum_{i=1}^{+\infty} x_i P\left\{X=x_i\right\}=\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i.$$

Rule. 当一个随机变量的密度函数与分布律已知：$X \to f\left(x\right), P\left\{X=x_i\right\}=p_i$

即可以求关于 X 函数的数学期望（公式 4.1.5）：

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{+\infty} g\left(x_i\right)P\left\{X=x_i\right\}, & X\text{离散}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x, & X\text{连续}\end{cases}.$$

Rule. 扩展至二阶：$\left(X,Y\right) \to P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}, f\left(x,y\right)$

关于 (X,Y) 的函数的数学期望（公式 4.1.6）:

$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g\left(x_i,y_j\right)P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}, & \text{离散}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x,y\right)f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{连续}\end{cases}.$$

Notation. 柯西分布:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},x\in\mathbb{R}.$$

常见分布数学期望:

Notation. 伯努利分布 $X\sim B\left(n,p\right)$： $EX=np$

泊松分布 $X\sim P\left(\lambda\right)\left(\lambda>0\right)$： $EX=\lambda$

柯西分布: EX 不存在（柯西分布不绝对收敛）

Notation. 柯西活了 68 岁，21 岁成名（导师拉格朗日）,27 岁当选法国科学院院士

Lecture 10

10.22

Example. $(X,Y)\sim N_2\left(0,1\right),\phi\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2+y^2/2}$

$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ ，求 $E\left(Z\right)$

解：由定理:

Rule.

$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g\left(x_i,y_j\right)P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}, & \text{离散}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(x,y\right)f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{连续}\end{cases}.$$

可得数学期望:

$$E\left(Z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Z\cdot f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2.2 数学期望的性质

$$\begin{cases}\text{线性可加性}\\ \text{独立性}\end{cases}.$$

- $E\left(aX+bY+c\right)=E\left(aX+bY\right)+c$：常数的数学期望为其本身

Notation. 什么是数学期望：一个随机变量的中心
方差：去中心化的随机变量
常数的中心为其本身

- $E\left(aX+bY\right)=E\left(aX\right)+E\left(bY\right)=aE\left(X\right)+bE\left(Y\right)$：线性性

证明. 已知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y=F_X\left(x\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x,y\right)\mathrm{d}x=E\left(X\right).$$

$$\begin{aligned}E\left(aX+bY\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(ax+by\right)f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+b\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=aE\left(X\right)+bE\left(Y\right).\end{aligned}$$

□

Example. $E\left(X\right)\pm E\left(Y\right)=E\left(X\pm Y\right)$

- 对于独立的随机变量：$E\left(XY\right)=E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right)$

证明. 二重积分转换为二次积分:

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)\,f_Y(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= E(X)\cdot E(Y).
\end{aligned}
$$

□

Notation.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) &= 0 \\
\implies \rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} &= 0 \\
\implies X,Y\text{无相关（独立）}.
\end{aligned}
$$

Notation. 线性可加性:

$$
E\left(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + c\right) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) + c.
$$

将 n 重积分转换为一重积分

2.3 方差的性质

$$
D(X) = E(X-EX)^2.
$$

Notation. 方差是描述数据偏离中心的程度值

- 常数的方差等于 0: $D(c) = 0$

Notation. 正态分布的方差 σ 不大: 3σ 准则保证数据方差在可控范围内

- $D(aX+b) = D(aX) = \boldsymbol{a^2}D(X)$: 离散程度与整体移动无关

证明.

$$\begin{aligned}
D\left(aX+b\right) &= E\left(aX+b-E\left(aX+b\right)\right)^2 \\
&= E\left(aX+b-aE\left(X\right)-b\right)^2 \\
&= E\left(aX-aE\left(X\right)\right)^2 = D\left(aX\right) \\
&= a\left(X-E\left(X\right)\right)\cdot aE\left(X-E\left(X\right)\right) \\
&= a^2E\left(X-E(X)\right)^2 \\
&= \boldsymbol{a^2}D\left(X\right).
\end{aligned}$$

□

∘ $D\left(X\pm Y\right)=E\left(\left(X-EX\right)\cdot\left(Y-EY\right)\right)$

证明.

$$\begin{aligned}
D\left(X-Y\right) &= E\left(X-Y-E\left(X-Y\right)\right)^2 \\
&= E\left(X-Y-\left(EX-EY\right)\right)^2 \\
&= E\left(\left(X-EX\right)-\left(Y-EY\right)\right)^2 \\
&= E\left(\left(X-EX\right)^2-2\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)+\left(Y-EY\right)^2\right) \\
&= E\left(X-EX\right)^2-2E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)+E\left(Y-EY\right)^2 \\
&= D\left(X\right)+D\left(Y\right)-2\mathrm{cov}\left(X,Y\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}\left(X,Y\right) &= E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right) \\
&= E\left(XY-X\cdot EY-Y\cdot EX+EX\cdot EY\right) \\
&= E\left(XY\right)-E\left(X\cdot EY\right)-E\left(Y\cdot EX\right)+E\left(EX\cdot EY\right) \\
&= E\left(XY\right)-EY\cdot E\left(X\right)-EX\cdot E\left(Y\right)+EX\cdot EY \\
&= E\left(XY\right)-E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right).
\end{aligned}$$

当 X,Y 独立时：$\mathrm{cov}\left(X,Y\right)=0$，即 $D\left(X-Y\right)=D\left(X\right)-D\left(Y\right)$ ，加法同理 □

Notation. 当 $X=Y$ 时:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=\operatorname{cov}(X,X)\\&=E(X-EX)(X-EX)\\&=E(X-EX)^2\\&=D(X).\end{aligned}$$

即协方差退化为方差

Notation. 均方偏离函数: $f(x)=E(X-x)^2\geq D(X)$, 当且仅当 $x=E(X)$ 时 $f(X)=D(X)$

- 切比雪夫不等式（概率论最基础的不等式）

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

或:

$$P\{|X-EX|>\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon}.$$

证明时使用:

$$P\left\{(X-EX)^2\leq\varepsilon^2\right\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

证明.

$$\begin{aligned}P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}&=\int_{|x-EX|\geq\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_{|x-EX|\geq\varepsilon}\frac{|x-EX|^2}{\varepsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x-EX|^2}{\varepsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}E(X-EX)^2\\&=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

□

Notation. 切比雪夫不等式 $\Longrightarrow$ 马尔可夫不等式 $\Longrightarrow$ 协方差不等式 $\Longrightarrow$ 阶乘不等式 $\Longrightarrow$ ...

$D(X) = 0$ 的充要条件为 $P = 1$