Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by 李漫漫

Note by THF

2024 年 10 月 30 日

目录

Lecture 11

10.24

Review:

Notation. 数学期望的性质：

1. $E(c) = c$
2. $E(cX) = cE(X)$
3. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

3.1 $E(E(Y)X) = E(Y)E(X)$

4. X, Y 相互独立，$E(XY) = E(X)E(Y)$

协方差：$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

若 X,Y 独立则 $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$

Notation. 方差的性质：

1. $D(c) = 0$

2. $D(cX) = c^2 D(X)$

2.1. $D(X) = E(X-EX)^2 = E(X^2) - E(X)^2$

3. X,Y 相互独立，$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY)$

当 $X = Y$ ，$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X,X) = E(X-EX)^2 = D(X)$

或：$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^2) - E(X)^2$

Example. $D(aX+bY+c) = D(aX+bY)$

$$\begin{aligned} D(aX+bY) &= E((aX+bY) - E(aX+bY))^2 \\ &= E(a(X-EX) + b(Y-EY))^2 \\ &= E\left(a^2(X-EX)^2 + 2ab(X-EX)(Y-EY) + b^2(Y-EY)^2\right) \\ &= a^2 D(X) + b^2 D(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X,Y). \end{aligned}$$

◦ 切比雪夫不等式：已知一个随机变量的方差可以估算出数学期望

Question. 一个随机变量 X 分布未知, 已知 $\mu = 18, \sigma = 2.5$, 求 $P\{X \in (8,28)\}$

解：由切比雪夫不等式：

$$\begin{aligned} P\{X \in (8,28)\} &= P\{X - 18 \in (-10,10)\} \\ &= P\{|X-18| < 10\} \\ &= P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \\ &\geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \\ &= 1 - \frac{2.5^2}{10^2} = 0.9375. \end{aligned}$$

◦ 马尔可夫不等式

Example. $X_1, X_2, \ldots, X_n : i.i.d, X \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明：

1. $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$
2. 设 $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}, i = 1, 2, \ldots, n$ 则 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2\right) = n$

证明. 1. 由线性性：

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(E\overline{X}, D\overline{X}\right).$$

由于 X 之间相互独立，有 $D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2)$

$$E\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \mu, \quad D\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2. 由题：$EY_i = 0, DY_i = 1$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} EY_i^2.$$

Notation. Y_i^2 符合自由度为 1 的卡方分布：$Y_i^2 \sim X^2(1)$

即：$\sum\limits_{i=1}^{n} E\left(Y_i^2\right) = nE\left(Y_i^2\right)$

由方差的定义：$D(Y_i) = E(Y_i^2) - E(Y_i)^2$ ：

$$EY_i^2 = D(Y_i) + E(Y_i)^2 = 1 + 0^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i^2\right) = nE\left(Y_i^2\right) = n.$$

□

0.1 协方差的性质

- $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$ （对称性）
- $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(X, Y)$

证明. 已知: $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(aX, bY) &= E(aXbY) - E(aX)E(bY) \\
&= abE(XY) - abE(X)E(Y) \\
&= ab\operatorname{cov}E(X, Y).
\end{aligned}$$

□

- ◦ $\operatorname{cov}(c, X) = 0$

Notation. 协方差用于衡量随机变量之间的线性关系，常数和其他随机变量不存在线性关系

证明.

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(cX) &= E(cX) - E(c)E(X) \\
&= cE(X) - cE(X) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Notation. $\operatorname{cov}(c, c) = D(c) = 0$

- ◦ $\operatorname{cov}(aX + bY, cZ) = ac\operatorname{cov}(X + Y) + bc\operatorname{cov}(Y + Z)$ （分配律）

证明.

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(aX + bY, cZ) &= E((aX + bY)cZ) - E(aX + bY)E(cZ) \\
&= E(acXZ + bcYZ) - cEZ(aEX + bEY) \\
&= acE(XZ) + bcE(YZ) - acEXEZ - bcEYEZ \\
&= ac\operatorname{cov}(X, Z) + bc\operatorname{cov}(Y, Z).
\end{aligned}$$

□

Notation. $\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, b_i Z\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \operatorname{cov}(X_i, Z)$

Notation. $D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 DX_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$

0.2 相关系数

0.2.1 标准化

$$X^* = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}.$$

标准化后的变量 $EX^* = 0, DX^* = 1$

Definition. X^*, Y^* 的协方差 $\operatorname{cov}(X^*, Y^*)$ 为 X, Y 的相关系数 $\rho(X, Y)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X^*, Y^*) &= \operatorname{cov}\left(\frac{X - EX}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - EY}{\sqrt{DX}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \operatorname{cov}(X - EX, Y - EY).\end{aligned}$$

易得 $\operatorname{cov}(X - EX, Y - EY) = \operatorname{cov}(X, Y)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X^*, Y^*) &= \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \\ &= \rho(X, Y).\end{aligned}$$

0.2.2 性质

- $|\rho(X, Y)| \leq 1$
- $P\{X^* = \pm Y^*\} = 1$ 是 $\rho(X, Y) = \pm 1$ 的充要条件

Lecture 12

10.29

Notation. 相关系数/Pearson 相关系数：描述两个随机变量之间的线性相关性
只能描述数值性的变量

$|\rho(X, Y)| = 1$ 时：正相关
$|\rho(X, Y) > 0.8|$ ：强相关
$|\rho(X, Y) \in (0, 0.5)|$：弱相关
$\rho = 0$ ：不相关/非线性关系

Notation. 相关系数本质上描述：

$$P\{Y = aX + b\}.$$

Example. $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leq 1\\ 0, & x^2+y^2>1\end{cases}$ ，求：

1. X,Y 的相关性；2. X,Y 的独立性

解：1.

$$\begin{aligned}EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\pi}\mathrm{d}y\\ &=0.\end{aligned}$$

同理 $EY=0$，即不相关

2.

$$\begin{aligned}f_X\left(x\right)&=\int_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\\ &=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y\\ &=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

同理 $f_Y\left(y\right)=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$ ，易得 $f\left(x,y\right)\neq f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$ ，即不独立

数理统计部分

1 大数定律和中心极限定理

Definition. 大数定律：

$$\bar{X}\xrightarrow[\mathrm{n}\to\infty]{\mathrm{P}}EX.$$

即：以某事件发生的频率估计该事件的概率

Definition. 中心极限定理：

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

Lecture 12

其中 $X_1, X_2, \ldots X_i$ 独立同分布

该随机变量序列存在分布，中心极限定理提出不论 $\bar{X}$ 的分布是什么，该序列的分布为正态分布

$$\bar{X} \xrightarrow[\mathrm{n} \to \infty]{\mathrm{L}} N\left(E\bar{X}, D\bar{X}\right).$$

如何判断随机变量的敛散性：

Corollary. 依概率收敛：

对 $\forall \varepsilon$ 有：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|X_n - X| < \varepsilon\right\} = 1.$$

代表序列 $\{X_n\}$ 收敛于随机变量 X ，记为 $X_n \xrightarrow[\mathrm{n}\to\infty]{\mathrm{P}} X$

Corollary. 依分布收敛：

序列的分布函数为 $F_n(x)$ ，随机变量的分布函数 $F(x)$ ，对 $\forall x$ ，有：

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

则 $\{X_n\}$ 依分布收敛于 X ，记为 $X_n \xrightarrow[\mathrm{n}\to\infty]{\mathrm{L}} X$

Notation. 测度变换：通过将问题映射到另一个空间简化计算

依分布收敛要求更弱，即：依概率收敛 $\Rightarrow$ 依分布收敛

当收敛对象为常数时二者可互推

Notation. 撞骗：只要发出的短信足够多，成功率符合大数定律

三大大数定律：

$$\begin{cases} \textbf{切比雪夫大数定律}\text{：最根本} \\ \text{伯努利大数定律：例子} \\ \text{辛钦大数定律} \end{cases}.$$

1.1 大数定律

Definition. $\{X_i\}\, i.i.d$ ，$\exists EX_i, DX_i$ ，且 $\exists C$ ，使得 $DX_i \le C$ （方差有界），则对 $\forall \varepsilon > 0$ 当：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\bar{X}_n - E\bar{X}_n\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

时:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[\mathrm{n}\to\infty]{\mathrm{P}} E\bar{X}_n.$$

证明. $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，有:

$$\begin{aligned} E\bar{X}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i \\ D\bar{X}_i &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \\ &\le \frac{C}{n}. \end{aligned}$$

由切比雪夫不等式:

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\bar{X}_n - E\bar{X}_n\right| < \varepsilon\right\} &\ge 1 - \frac{D\bar{X}_n}{\varepsilon^2} \\ &\ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时原式收敛于 1 □

Notation. 辛钦大数定律：序列中的随机变量独立同分布

Notation. 伯努利大数定律：序列中 $X_i \sim B(1, p)$（已知分布），记 μ_s 为随机变量序列之和，有:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_s}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

即: $\dfrac{\mu_s}{n}$ 依概率收敛于 p

1.2 中心极限定理

Example. 高尔顿钉板

Corollary. $i.i.d$ 的中心极限定理:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le x\right\} = \Phi(x).$$

Corollary. 拉普拉斯中心极限定理：X_i 独立同分布，$X_i \sim B(1,p)$，令 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$，对 $\forall x$ 有：

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \Phi(x).$$