

Part III-B: Statistic

Lecture by SongHao

Note by THF

2024 年 11 月 1 日

目录

1 条件概率	1
1.1 计算	2
1.2 性质	2
1.3 伯努利模型	3
2 随机变量及分布	4

Learn 3

1 条件概率

Example. 有男女生各 50 人，有 30 个男生和 10 个女生抢到了宋浩老师的月饼，求在吃到月饼的学生中男生占比

分析：总人数 100 人为总样本空间 Ω ，吃到月饼的学生 40 人，为第二个样本空间 Ω_1
其中男生有 30 人，即概率为：

$$P(A) = \frac{30}{40}.$$

Definition. 条件概率： Ω 是样本空间， A, B 是两个事件，假设 $P(B) > 0$ ，求在 B 发生的条件下 A 发生的概率，称为 A 对 B 的条件概率，记作：

$$P(A|B).$$

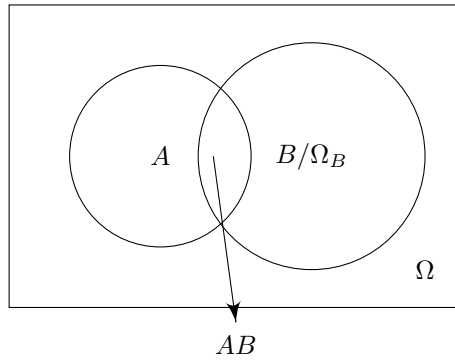
前面提及的概率 $P(A)$ 称作无条件概率，样本空间为 Ω

条件概率的样本空间发生了变化， $P(A|B)$ 的样本空间变为了 $B = \Omega_B$

1.1 计算

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

图示如下：



Example. 有编号 1–6 的六个球，随机取一个，观察号码， B 代表号码为偶数， A_1, A_2 代表取到 1, 2 号， A_3 代表取到大于 4，求：

1.

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

2.

$$P(A_1|B) = \frac{0}{3} = 0$$

3.

$$P(A_2) = \frac{1}{6}$$

4.

$$P(A_2|B) = \frac{1}{3}$$

5.

$$P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6.

$$P(A_3|B) = \frac{1}{3}$$

Notation. 条件概率和无条件概率一般不相等

1.2 性质

Rule.

$$P(A|B) \geq 0.$$

Rule.

$$P(\Omega|B) = 1.$$

Rule. 可列可加性：对 $A_1, A_2 \dots A_n, \dots$ 不相容，则：

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

Rule. 乘法公式：

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

证明.

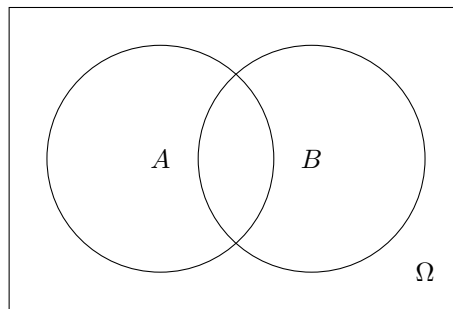
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

移项即得上式。

□

画图解释如下：



Learn 4

10.20

1.3 伯努利模型

Notation. 独立试验序列： E_1, E_2, \dots, E_n 彼此相互独立

n 重独立试验： E_1, E_1, \dots, E_1 做 n 遍，且相互独立，记作 E_1^n

伯努利试验：结果只有两种： $\Omega = \{A, \bar{A}\}$

Example. 抛硬币是伯努利试验

Notation. n 重伯努利试验：做 n 次结果只有两种的独立试验

Corollary. A 发生的概率为 p , $p \in (0, 1)$, 则 \bar{A} 的概率为 $1 - p$, 在 n 重伯努利试验中, A 发生 k 次的概率为：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{1-k}.$$

或：

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{1-k} \quad q = 1 - p.$$

该公式称为二项概率公式

Notation. 为何称为二项概率公式：

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_n(k) &= \sum_{k=1}^n C_n^k p^k q^{1-k} \\ &= (p + q)^n \\ &= (p + 1 - p)^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

本质为二项式展开

Example. 一批产品的废品率为 0.1，良品率为 0.9，每次取一个产品又放回，共取三次，求：

1. 恰有一次取到废品的概率
2. 恰有两次取到废品的概率
3. 三次都取到废品的概率
4. 三次都取到良品的概率

1. $C_3^1 0.1^1 \cdot 0.9^2$
2. $C_3^2 0.1^2 \cdot 0.9^1$
3. $C_3^3 0.1^3$
4. $C_3^0 0.9^3$

Example. 彩票每周开奖一次，中奖率十万分之一，十年一共买了 520 次彩票，求十年从未中奖的概率

$$\text{解： } p = 0.99999, P_{520}(520) = C_{520}^{520} 0.99999^{520} \approx 0.9948$$

Notation. 为了更快计算二项公式的结果可以使用两种估算方法

2 随机变量及分布

Definition. 随机变量：把试验的结果转化为符号语言

即：用一个映射函数将试验的所有结果映射为数 $X = X(\omega)$

Example. $\{\omega | X(\omega) = a\}$ 表示一个事件，也可以写成： $\{X = a\}$

事件的概率： $P\{X = a\}$ 或 $P(X = a)$