

# Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by 李漫漫

Note by THF

2024 年 9 月 12 日

## 目录

<b>1 第一章</b>	<b>3</b>
1.1 随机事件 . . . . .	3
1.1.1 现象 . . . . .	3
1.1.2 随机试验 . . . . .	3
1.1.3 样本 . . . . .	3
1.1.4 随机事件 . . . . .	4
1.2 事件关系与运算 . . . . .	4
1.3 事件的概率 . . . . .	5
1.3.1 古典概型 . . . . .	6
1.3.2 几何概型 . . . . .	7
1.4 公理化 . . . . .	9
1.5 条件概率与乘法公式 . . . . .	12
1.6 全概率公式 . . . . .	12
1.7 贝叶斯公式 . . . . .	12

# 概述

## 资源

公众号：狗熊会、大数据文摘，好玩的数学

MOOC：爱课程，Coursera，Edx，网易公开课等

## 教师要求

教材：概率论与数理统计第二版

参考：The Lady Tasting Tea，程序员数学之概率统计，...

学习目的：自问自答，自言自语

考核及成绩组成：

期中（10）

作业与考勤（10）

期末（70）

MOOC（10）

## 课程简介

概率：Probability

统计：Statistics

概率论与数理统计：Probability theory and Mathematical statistics

**Notation.** 第一章重要但不突出

从概率到概率论：新增时间（随机事件、样本空间变化）

从统计到数理统计：统计最开始为记录性质，后来衍生出预测，通过数学模型引入数理统计

类似的还有政府统计、经济统计等

2000-2015 年间，IT 时代逐渐转换为 DT(Data Technology) 时代，大数据逐渐占时代主体

# 1 第一章

## 1.1 随机事件

### 1.1.1 现象

确定性现象：一定条件下必然发生

随机现象强调统计规律性

**Notation.** 统计规律性：

1. 每次试验前不能预测结果
2. 结果不止一个
3. 大量试验下有一定规律

**Example.** 星际旅行时宇航员看到的现象不是随机现象：

对星际旅行的人而言，无法完成大量试验

宇航员观测到的结果无规律，只能称为不确定现象 (Uncertain)

**Example.** 扔一个骰子不能预测结果，但可以知道结果是 1, 2, 3, 4, 5, 6 的一个，因此观察扔骰子是随机现象 (Random)

### 1.1.2 随机试验

随机试验 (E)：研究随机现象时进行的实验或观察等

**Notation.** 随机试验的特性：

1. 可以在完全相同的条件下重复进行
2. 试验的可能结果在试验前已知
3. 试验的结果不可预测

### 1.1.3 样本

在随机试验中，不可再分的最简单结果成为样本点  $\omega$ ，全体样本点组成样本空间  $\Omega$

**Notation.** 随机事件是基本事件的集合

**Example.** 扔骰子存在 6 个基本事件，可以产生  $2^6$  个随机事件，其中样本空间  $\Omega = \{x|x \in [1, 6], x \in \mathbb{R}\}$

**Example.** 1. 射击时用  $\omega_i$  表示击中  $i$  环，样本空间为：

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}\}.$$

2. 微信用户每天收到信息条数的取值范围是  $[0, +\infty)$ ，样本空间为无限集：

$$\Omega = \{N|N \geq 0, N \in \mathbb{R}\}.$$

3. 电视机的寿命样本空间为  $\Omega = \{t|t > 0\}$ ，为连续的非负实数集

4. 投掷两枚硬币，样本空间为  $\Omega = \{(x, y)|x, y = 0, 1\}$ ，其中 0, 1 分别代表正面和背面

**Notation.** 1. 样本点可以不是数

2. 样本空间可以是无限集

#### 1.1.4 随机事件

### 1.2 事件关系与运算

1.1.  $A \subset B$ :  $A$  发生必然  $B$  发生

1.2.  $A = B$ :  $A \subset B, B \subset A$

2.  $A \cup B$ :  $A$  和  $B$  至少有一个发生

2.1  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$

3.  $A \cap B$ :  $A$  和  $B$  只发生一个

4.1.  $A, B$  互斥: 不能同时发生:  $AB = \emptyset$

4.2.  $A, B$  对立: 非此即彼:  $A \cup B = \Omega$

5.  $A - B$ :  $A\bar{B}$  或  $A(\Omega - B)$ , 或  $A$  发生但  $B$  不发生

**Notation.**  $A - B = A\bar{B} \subset A$ ,  $B - A = B\bar{A} \subset B$

当  $AB = \emptyset$  时,  $A - B = A, B - A = B$

**Notation.**  $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$ , 且  $P(\Omega) + P(\emptyset) = 1$ , 即  $\Omega$  与  $\emptyset$  互斥

6. 结合律:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
7. 分配律:  $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$ ,  $(A \cup B)C = AC \cup BC$
8. 交换律:  $A \cup B = B \cup A, AB = BA$

**Notation.** 德摩根律:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

**Example.**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}.$$

$$\overline{(A \cup B) \cup C} = \overline{A \cup B} \bar{C} = \dots$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

### 1.3 事件的概率

概率分类:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{主观概率} \\ \text{统计概率} \\ \text{古典概型} \\ \text{几何概型} \end{array} \right\}.$$

**Notation.** 德摩根、蒲丰、皮尔逊、维纳均进行过投掷硬币的试验, 随着试验次数的增加, 出现正面的频率逐渐接近 0.5

大数定律说明, 该事件的概率为 0.5

**Definition.** 统计概率:  $A$  为试验  $E$  的一个事件, 随着重复次数  $n$  的增加,  $A$  的频率接近于某个常数  $p$ , 定义事件  $A$  的概率为  $p$ , 记为  $P(A) = p$

频率的特性:

1. 非负性:  $f_n(A) \in [0, 1]$
2. 规范性:  $f_n(\Omega) = 1$
3. 有限可加性:  $A_i$  两两互斥, 则  $f_n(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n f_n(A_i)$

**Definition.** 主观概率：人对某个事件发生与否的可能性的估计

**Definition.** 完备事件组： $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互斥，且

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = 1.$$

或

$$\sum_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

则称  $A_1 \rightarrow A_n$  为完备事件组（不重不漏）

**Example.**  $A, \bar{A}$  是完备事件组

### 1.3.1 古典概型

古典概型特点：有限等可能性（基本事件数有限，基本事件发生的可能性相等）

**Notation.** 概率计算：

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

**Example.** 某年级有 6 人在 9 月份出生，求 6 个人中没有人同一天过生日的概率

基本事件总数： $30^6$

目标事件： $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = P_{30}^6$

概率：

$$P(A) = \frac{P_{30}^6}{30^6}.$$

**Example.** 有  $N$  个乒乓球中有  $M$  个白球、 $N - M$  个黄球，任取  $n(n < N)$  个球，分有放回和不放回，求取到  $m$  个黄球的概率

1. 不放回：

基本事件总数： $C_N^n$

目标事件： $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$

概率：

$$P = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, n = \max\{0, n - (N - M)\}, \dots, \min\{n, M\}.$$

2. 有放回:

$$P = \frac{C_n^m M^m (N - M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}, m \in [0, n].$$

注意到该概率为伯努利分布  $C_n^m B\left(n, \frac{M}{N}\right)$

匹配问题:

**Example.** 麦克斯韦-玻尔兹曼统计问题:

$n$  个质点随机落入  $N$  ( $N > n$ ) 个盒子, 盒子容量不限, 设  $A$  表示指定的  $n$  个盒子各有一个质点,  $B$  表示恰好有  $n$  个盒子装一个质点

基本事件总数:  $N^n$

$A$  考虑顺序, 即:

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}.$$

同理:

$$P(B) = \frac{C_N^n}{N^n}.$$

### 1.3.2 几何概型

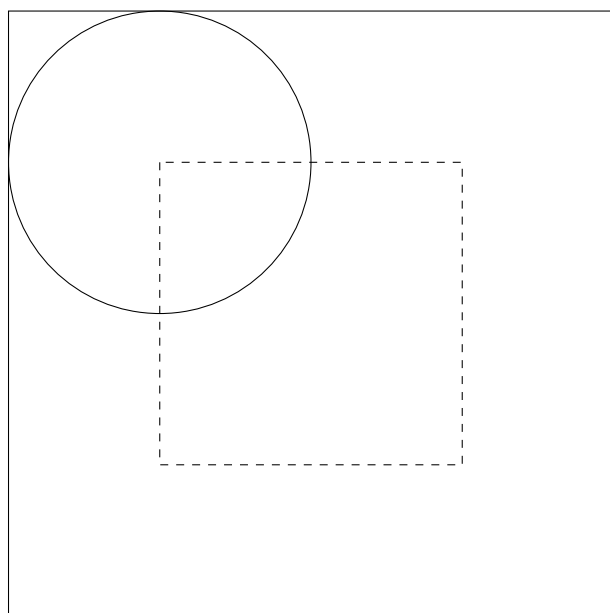
几何概型特点: 使用事件所对应的**几何度量**计算

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

**Notation.** 度量: 面积、体积、长度等描述几何量大小的测度方式

**Example.** 地面铺满 2 dm 的地砖, 向地面投掷一个  $r = 0.5$  dm 的光盘, 求光盘不与边线相交的概率

如图:

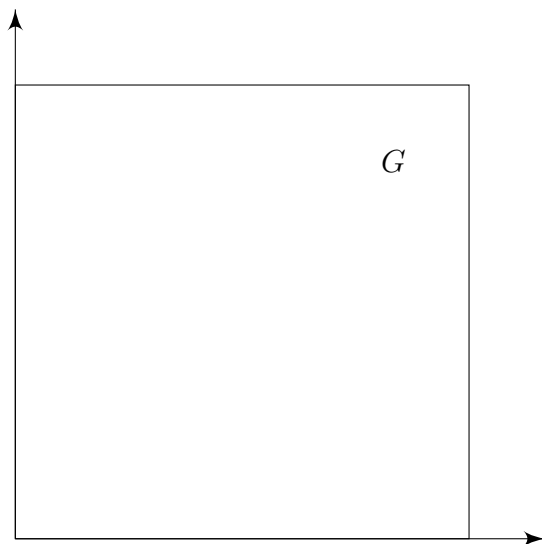


课后习题：A 组 8 题，B 组 3 题

**Example.** 两人相约 8-9 点间在某地相见，先到的人等待 20 分钟后离去，求二人会面的概率

设  $(x, y)$  分别表示两人到达的时刻

设  $G$  为样本空间，绘制样本空间：

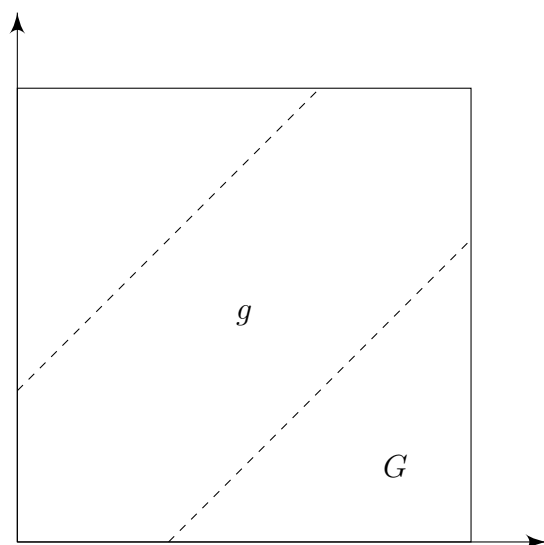


由题：两人到达的时间之差的绝对值小于 20 分钟 ( $\frac{1}{3}$  小时)，即：

$$|x - y| \leq \frac{1}{3}.$$



将事件绘制：



$$P(g) = \frac{m(g)}{m(G)} = \frac{S(g)}{S(G)} = \frac{1 - (\frac{2}{3})^2}{1} = \frac{4}{9}.$$

**Notation.** 几何概型的特点：

1. 非负性：

$$P(A) \in [0, 1].$$

2. 规范性：

$$P(\Omega) = 1.$$

3. 可列可加性：

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

## 1.4 公理化

$$(\Omega, \mathcal{F}, p).$$

**Definition.**  $\Omega$ ：随机试验所产生的所有样本点的集合

$\mathcal{F}$ ：集合内所有子集为元素的集合

$P(X)$ ：概率函数

**Axiom.** 非负性:

$$P(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}.$$

**Axiom.** 规范性:

$$P(\Omega) = 1.$$

**Axiom.** 可列可加性: 对两两互斥的事件  $A_1, A_2, \dots$ ,

$$P\left(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

从三条公理得出的性质:

**Notation.** 1.  $P(\emptyset) = 0$

2. 有限可加性:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right).$$

3.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4.  $A \subset B \implies P(B - A) = P(B) - P(A)$

5.  $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

6.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

**Notation.** 6.1.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

6.2.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n P(A_i A_j A_k) \\ &\quad \dots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right). \end{aligned}$$

**Example.** 从有号码  $1, 2, \dots, n$  的  $n$  个球中有放回地取出  $m$  个球，求取出的  $m$  个球中最大号码为  $k$  的概率

$$P\{k=1\} = \left(\frac{1}{n}\right)^m.$$

逐个列举计算较复杂，记事件  $B_k$  为取出的  $m$  个球最大号码不超过  $k$ ，只需保证每次摸出的球都不超过  $k$  即可：

$$P(B_k) = \frac{k^m}{n^m}.$$

又有  $P(A_k) = P(B_k) - P(B_{k-1})$ ，且  $B_{k-1} \subset B_k$

所以：

$$P(A_k) = \frac{k^m}{n^m} - \frac{(k-1)^m}{n^m}.$$

**Example.** 匹配问题：  $n$  个学生各带有一个礼品，随机分配礼品，设第  $i$  个人抽到自己的礼品称为一个配对，求至少有一个配对的概率

设  $A_i$  是第  $i$  个人抽到自己的礼品， $A$  为目标事件，则：

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

$$P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{P_n^2}.$$

$$P(A_i A_j A_k) = \frac{1}{P_n^3}.$$

.....

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{n!}.$$

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P(A_i A_j) + \dots$$

## 1.5 条件概率与乘法公式

**Definition.**

$$P(A) > 0, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

即：在 A 发生的条件下，B 发生的概率

**Definition.** 乘法公式：

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

**Notation.** A 与 B 独立：  $P(AB) = P(A)P(B)$

结合乘法公式：

$$P(B) = P(B|A).$$

$$P(A) = P(A|B).$$

## 1.6 全概率公式

**Corollary.** 事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为完备事件组，事件  $B \subset \Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ，则：

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

**Notation.** 此时完备事件组的情况应该已知，通过完备事件组 A 的辅助可以求得较复杂事件 B 的概率

## 1.7 贝叶斯公式

**Corollary.**

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}.$$

贝叶斯公式被称为“逆概率公式/后验公式”，其中事件 B 更可能是事件的结果，将事件组 A 看作结果出现的原因，则贝叶斯公式是一个从“结果”推“原因”的可能性的公式

**Notation.** 对比一般公式：事件 A 导致 B，求 B 发生的概率

贝叶斯公式：事件 A 导致 B，A 中的一个事件  $A_i$  导致 B 发生的概率

**Axiom.** 条件概率的公理:

1. 非负性:  $P(A) \in [0, 1]$
2. 规范性:  $P(\Omega|A) = 1$
3. 可列可加性:

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i|A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

**Corollary.**

$$P(\bar{B}|A) = P(\Omega - B|A) = P(\Omega|A) - P(B|A).$$

**Corollary.**

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2) &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2). \\ \implies P(B_1 \cup B_2|A) &= P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 B_2|A). \end{aligned}$$

**Corollary.** 乘法公式:

$$P(ABC) = P(A(BC)) = P(A)P(BC|A) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

**Example.** 8 个红球 2 个白球, 求前三次结果是“红红白”的概率:

1. 不放回取 3 个 (和一次取三个球相同)

所有可能性:  $10 \times 9 \times 8$

目标事件:  $8 \times 7 \times 2$

或使用乘法公式: 设  $A_i$  为第  $i$  次取到红球, 目标事件可表示为  $A_1 A_2 \bar{A}_3$   
概率:

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1 A_2) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{7}{45}.$$

2. 每次取后放回, 并加入两个同色的球, 取 3 次 (不能使用古典概型)  
概率:

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = \frac{8}{10} \times \frac{8}{12} \times \frac{2}{14} = \frac{8}{105}.$$