Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by 李漫漫
Note by THF

2024 年 11 月 22 日

目录

Lecture 16

11.12

Review:

1. 抽样分布定理：定理 6.4.3
2. 表达式 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 什么时候是统计量：σ^2 已知

当 σ^2 未知时：表达式符合 $\chi^2(n-1)$，称为**枢轴量**

Corollary. $X_1, X_2, \ldots X_n$ 来自总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，样本均值和方差记为 $\bar{X}, S^2$，则：

a. 求 ES^2 ：$ES^2 = \sigma^2$
b. 求 DS^2 ：$DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$
c. 构造 t 分布：$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} / \sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

（上述 $\sqrt{(n-1)S^2/\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 且 $(\bar{X}-\mu)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sim \Phi(x)$）

重点题目：例 6.4.4

Corollary. 两个正态总体的抽样分布定理：两个总体记为 X, Y，样本容量分别为 m, n，样本分布分别符合 $\mu = \mu_1, \sigma^2 = \sigma_1^2$ 和 $\mu = \mu_2, \sigma^2 = \sigma_2^2$ 的正态分布，...

1 参数估计

参数：$param$

- 点估计
  - 矩估计
  - 极大似然估计
- 区间估计

1.1 矩估计

使用样本矩 $\bar{X}$ 替代总体矩 $\hat{\mu}$

Notation. 总体矩不存在（无穷）时不能使用矩估计

Example. 总体 $X \sim U[a,b]$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体的样本，求 a, b 的矩估计量

解：

$$\begin{cases} EX &= \frac{a+b}{2} \\ DX &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}.$$

求解得：$\begin{cases} a &= EX - \sqrt{3DX} \\ b &= EX + \sqrt{3DX} \end{cases}$，替代后为：$\begin{cases} \hat{a} &= \bar{X} - \sqrt{3M_2^\star} \\ \hat{b} &= \bar{X} + \sqrt{3M_2^\star} \end{cases}$，$\hat{a}$ 代表对 a 的估计

1.2 极大似然估计

似然函数：样本的联合概率分布函数（P167）

Example. 同矩估计例题，求 a, b 的极大似然估计量

解：写出联合密度函数：$L(\ldots) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$，由于 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{Others} \end{cases}$，则联合密度函数为：

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x_i) \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \prod_{i=1}^n I_{[a,b]}(x_i). \end{aligned}$$

Lecture 18

11.19

Review:

∘ 对参数（完全可观测数据）进行点估计：极大似然估计、矩估计

两种方法得到的结果可能一样或不一样

∘ 点估计的评价标准：

（渐进）无偏 估计的参数的期望 $E\hat{\theta}$ 求极限为 θ
有效性 在无偏的前提下：$D\hat{\theta}$ 越小越有效
相合性（一致性） $\text{MSE}\left(\hat{\theta},\theta\right)$：均方误差

Example. $\bar{X}$ 和 $\hat{W}=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ 可以证明都是 μ 的无偏估计，称 $\bar{X}$ 为算术均值，$\hat{W}$ 为加权均值，且算术均值比加权均值更有效（均值不等式）

Notation. 均方误差：$\text{MSE}\left(\hat{\theta},\theta\right)=E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2$

1.3 区间估计

Definition. 置信区间：α 为给定值，总体的分布函数为 $F(x,\theta)$ ，有两个从总体中抽取后构造的统计量 T_1,T_2 ，当：

$$P\{T_1<\theta<T_2\}=1-\alpha.$$

时：称 P 为置信度，区间长度 T_2-T_1 的数学期望 $E(T_2-T_1)$ 为精度

纽曼提出的准则：先确定 α 来确定置信度，再确定置信上下限

Notation. 已知标准正态分布 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 中的 σ^2 ，置信度为 $1-\alpha$ 时参数 μ 的置信区间：

$$(T_1,T_2)=\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

如果 σ^2 未知：通过 t 分布可得：$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$ ，置信区间为：

$$(T_1,T_2)=\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

Notation. 卡方分布下：方差为 σ^2 ，置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间：

$$(T_1,T_2)=\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right).$$

对应的标准差为 σ ，置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间：$T_1'=\sqrt{T_1},T_2'=\sqrt{T_2}$

如果 μ 已知，σ^2 未知，令 $S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ ，因为 $\chi^2=\frac{nS_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$ ，可得置信度为 $1-\alpha$ 的方差的置信区间为：

$$\left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right).$$

2 假设检验

Notation. 在医药研发大量应用

- 参数假设检验：假设效果
- 非参数假设检验

Notation. 下节课之前准备一个本专业的假设检验问题

Lecture 19

11.21

Example. 参数假设检验：主场优势：NBA 某球队进行 82 场比赛，41 场为主场，统计过去 15 年主场胜率 P_1 和客场胜率 P_2 ，判断该球队是否存在主场优势

通过胜率差 $\Delta P = P_1 - P_2$，当 $\Delta P = 0$ 时不存在，当 $\Delta P > 0$ 时存在

Notation. 非参数假设检验：住房面积和家庭生活幸福感的关系，学历程度和年均收入的关系；非参数假设检验的两个变量独立

Example. 规定工业废水中 Cr(VI) 排放浓度不超过 0.5，即 $c_{\mathrm{Cr(VI)}} \leq 0.5$，设 X 为工业废水有害物质排放浓度总体，抽取 16 份废水 $X_1, X_2, \ldots, X_{16}$，测得物质浓度 $\bar{x} = 0.52, s^2 = 0.09$，假设该物质浓度分布为 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ，求排放浓度是否符合规定（$\alpha = 0.5$）

解：

$$\bar{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i \quad s^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}\left(x_i - \bar{x}\right)^2.$$

判断是否超标：通过检测 $\mu \leq 0.5$ 达标，$\mu > 0.5$ 超标：一般把带等号的假设设为原假设 $H_0 : \mu \leq 0.5$ ，被则假设 $H_1 : \mu > 0.5$ ；

检验水平 $\alpha = 0.05$ ：通常不超过 0.1 ，表示犯第一类错误的概率（$\alpha = P\left(\bar{H_0}\right)$）；对比 β ：犯第二类错误

选择检验统计量：将最大似然估计标准化：$\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = T$ ，当 H_0 成立时：$T = \frac{\bar{X}-0.5}{s/\sqrt{n}} \sim t(15)$（分布为 t 分布，该检验方法为 t 检验法）

确定拒绝域 $\mathscr{X}_0$：确定拒绝域的形式，由于被则假设为 $H_1 : \mu > 0.5$ ，假设拒绝域为 $\left\{\bar{X} - 0.5 > c\right\}$ ，c 为未知量

犯第一类错误的概率 $P\left\{\bar{X} - 0.5 > c \mid \mu \leq 0.5\right\} \leq 0.05$，原式放缩：

$$\begin{aligned} P\left\{\bar{X} - 0.5 > c \mid \mu \leq 0.5\right\} &= P\left\{\frac{\bar{X} - 0.5}{\frac{s}{\sqrt{16}}} > \frac{c}{\frac{s}{\sqrt{16}}} \mid \mu \leq 0.5\right\} \\ &= P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{4}} > \frac{c + 0.5 - \mu}{\frac{s}{4}} \mid \mu \leq 0.5\right\} \\ &\leq P\left\{\frac{X - \mu}{\frac{s}{4}} > \frac{c}{\frac{s}{4}}\right\} = \alpha \quad (0.5 - \mu \geq 0). \end{aligned}$$

由题 $\frac{c}{s/4} = t_{0.95}(15)$，则检验统计量在拒绝域中可以表示：$\left\{ \frac{\bar{X}-0.5}{s/4} > t_{0.95}(15) \right\}$

判断：$\bar{x} = 0.52, s = 0.3$ ，查表得 $t_{0.95}(15) = 1.753$ ，带入原式得：$\frac{\bar{X}-0.5}{s/4} = \frac{0.52-0.5}{0.3/4} < 1.753$ ，因此并未落在拒绝域中，接受原假设 H_0

下结论：认为 $t \notin \mathscr{X}_0$ ，因此不拒绝原假设 H_0 ，**在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，可以认为该区域有害物质排放浓度符合规定**

假设检验的两类错误

假设 H_0 正确，可以认为 H_0 正确或错误，类似二分类问题

表 1: 假设检验的两类错误

判断 / 真实情况	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	第一类错误 α
H_0 为假	第二类错误 β	正确

对于上题：$\beta = \left\{ \frac{X-0.5}{s/4} \le t_{0.95}(15) \mid \mu > 0.5 \right\}$

$$\begin{aligned} \beta &= P\left\{ \frac{X-0.5}{\frac{s}{4}} < t_{0.95}(15) \mid \mu > 0.5 \right\} \quad \text{(We assume that: } \mu = 0.6) \\ &= P\left\{ \frac{X-0.5}{\frac{s}{4}} < t_{0.95(15)} + \frac{0.6-0.5}{\frac{s}{4}} \right\} \approx 60\%. \end{aligned}$$

使用被则假设检验一般有较大的概率犯错误，因此一般使用原假设检验

假设检验的内容：

$$\text{理论依据：小概率原理}\begin{cases} \text{参数检验}\begin{cases} \text{总体}\mu, \Delta\mu\text{的检验} \\ \text{总体}\sigma, \partial\sigma\text{的检验} \end{cases} \\ \text{非参数检验}\begin{cases} \text{分布拟合检验} \\ \text{符号检验} \\ \text{秩和检验：两个检验的分布是否是同一分布} \end{cases} \end{cases}.$$

Notation. 小概率原理：犯第一类错误的概率 α 为小概率；如果认为 H_0 正确，但是数据观测得到的是 $H_1 : \bar{x} - 0.5 > c$ ，则应该反过来认为 H_1 正确