

Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by SongHao

Note by THF

2024 年 9 月 13 日

目录

1	排列组合	2
1.1	排列	2
1.2	组合	2
2	事件的概率	5
2.1	概率的基本描述	5
2.2	古典概率模型	5
2.3	几何概率模型	6
3	频率与概率	11
4	公理化	12
4.1	公理	12
4.2	性质	12
4.3	例题	15

1 排列组合

1. 加法原理：完成事件有多类方案
2. 乘法原理：完成事件分多步

Example. 有三种馒头，四种米饭

加法原理：只吃一种，共 7 种

乘法原理：先吃馒头，后吃米饭，共 12 种

1.1 排列

1. 不重复排列

从 n 个不同元素中取出 m 个排列，不放回

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Example. $P_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$

2. 全排列

$$P_n^n = n!.$$

Example. $P_0^0 = 0! = 1$

3. 重复排列

从 n 个不同元素中取出 m 个排列，可放回

$$(P_n^m) = n^m.$$

1.2 组合

从 n 个不同元素中取出 m 个，不排列

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

$$\begin{cases} C_n^m = C_n^{n-m} \\ C_n^n = C_n^0 = 1 \end{cases}.$$

Example. 在书架上有序放置五本书，求其顺序为 1, 2, 3, 4, 5 的概率：

总样本点个数： P_5^5

目标事件样本点个数： 2（顺序、逆序）

概率：

$$P = \frac{2}{P_5^5} = \frac{1}{60}.$$

Example. 有四个邮箱，两封信，求：

1. 前两个邮箱各有一封的概率

总样本点个数： $4 \times 4 = 16$

第一个邮箱有一封信且第二个邮箱有一封信的样本点个数： $P_2^2 = 2$ （第一封信前往 1, 2，第二封信前往 2, 1）

概率：

$$P = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

2. 第二个邮箱恰有一封信的概率

事件：从两封信中抽一封放到邮箱 2 中，剩余的 1 封信在除 2 以外的三个邮箱中选一个放入

即：

$$C_2^1 C_3^1 = 6.$$

概率：

$$P = \frac{C_2^1 C_3^1}{4 \times 4} = \frac{3}{8}.$$

3. 两封信不在一个邮箱内的概率

事件：一封信随机投入一个邮箱，另一封信投入剩余的三个邮箱

概率：

$$P = \frac{4 \times 3}{4 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

或：1- 信在同一个邮箱的概率

$$= 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$$

Example. 有 5 白 4 黑共 9 个球，任取 3 个球，求：

1. 取出 2 白 1 黑的概率：

$$P = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3}.$$

2. 全是白球的概率：

$$P = \frac{C_5^3}{C_9^3}.$$

3. 颜色相同的概率：

$$P = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3}.$$

4. 颜色不同的概率：

$$P = \frac{C_5^1 C_3^2}{C_9^3} + \frac{C_5^2 C_3^1}{C_9^3}.$$

Example. 有 a 个白球, b 个黑球

1. 任取一个是白球的概率：

$$P = \frac{a}{a+b}.$$

2. 接连取出 m 个球 ($m \in [1, a+b]$) , 第 m 个是白球的概率：

法 1: 将所有球排为一排, 为全排列: $(a+b)!$

要使第 m 个球是白球:

先任从白球中拿一个放入该位置, 其他的球全排列

$$P = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}.$$

法 2: 只取 m 个球

从 $a+b$ 个中取出 m 个并排好: P_{a+b}^m

要使第 m 个是白球, 单独挑一个白球放在第 m 个上

然后在剩余的球中取出 $m-1$ 个并排好: P_{a+b-1}^{m-1}

概率:

$$P = \frac{P_{a+b-1}^{m-1} \times a}{P_{a+b}^m} = \frac{a \times \frac{(a+b-1)!}{(a+b-1-(m-1))!}}{\frac{(a+b)!}{(a+b-m)!}} = \frac{a}{a+b}.$$

法 3. 先取第 m 个位置的球

一共有 $a+b$ 个球, 选 a 个白球中的一个放入即可:

$$P = \frac{a}{a+b}.$$

2 事件的概率

2.1 概率的基本描述

发生 A 事件的可能性大小称作概率，记作 $P(A)$.

Example. 抛一枚硬币，正面朝上的概率为： $P(A) = P(\bar{A}) = 0.5$

性质：

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A) \in [0, 1]$

2.2 古典概率模型

古典概率模型应满足两个条件：

1. 样本空间中存在有限个样本
2. 所有样本点出现的可能性相同（等可能性）

Example. 扔硬币，观察朝上的面

该事件对应的样本空间只有两个样本：正面朝上与反面朝上

正面朝上与反面朝上的可能性相同： $P(A) = P(B) = 0.5$

因此为古典概率模型。

古典概率模型的概率计算：

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\omega(A)}{\omega(\Omega)}.$$

Notation. $N(A)$ ： A 事件所包含的基本事件个数

$\omega(A)$ ： A 事件所包含的样本点个数

Notation. 古典概率模型的特性：

1. 非负性： $P(A) \in [0, 1]$
2. 规范性： $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$

3. 有限可加性: $A_1, A_2 \dots A_n$ 互不相容, 则:

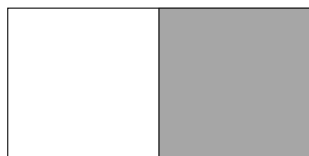
$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

缺点:

1. 有限个结果
2. 等可能性

2.3 几何概率模型

Example. 有一长方形, 右边部分的阴影占面积的 $\frac{1}{2}$, 扔一个质子, 落在阴影的概率为 $\frac{1}{2}$.



Example. 一条线段长 3, 阴影部分占 $[1, 2]$, 扔一个质子, 落在阴影的概率为 $\frac{1}{3}$.



与几何概率模型有关的元素:

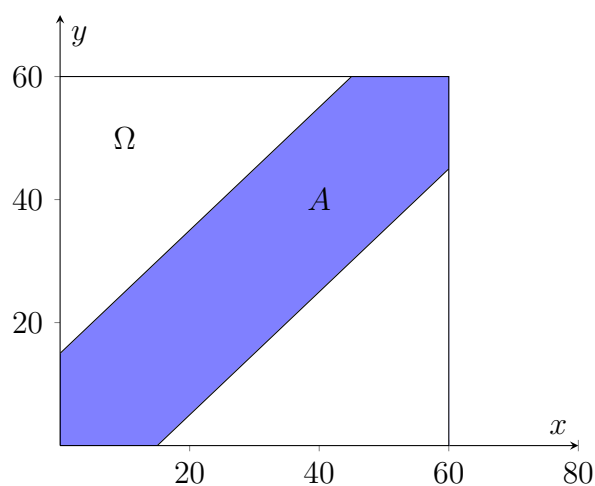
1. 线段
2. 平面
3. 立体

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}.$$

$\mu(G)$: 度量

Example. 会面问题:

甲乙两人约定从六点到七点见面, 先到的人等 15 分钟, 且这一小时内甲乙可在任意时刻到达, 求甲乙见面的概率。



令 A 为事件两人见面, x 为甲到达的时间, y 为乙到达的时间, A 发生的情况如下:

1. 甲先到, 乙后到, 即:

$$y > x, y - x \leq 15.$$

2. 乙先到, 甲后到, 即:

$$y < x, x - y \leq 15.$$

即:

$$|y - x| \leq 15.$$

如图:

$$S_A = 60 \times 60 - 45 \times 45 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1575.$$

$$S_\Omega = 60 \times 60 = 3600.$$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}.$$

Example. 蒲丰投针问题:

有两条平行线, 距离为 d , 朝平面内投掷长度为 l ($l < d$) 的针, 求针与任意一个平行线相交的概率

假设 x 表示针的中点离最近的一根线的距离, 有:

$$x \in \left[0, \frac{d}{2}\right].$$

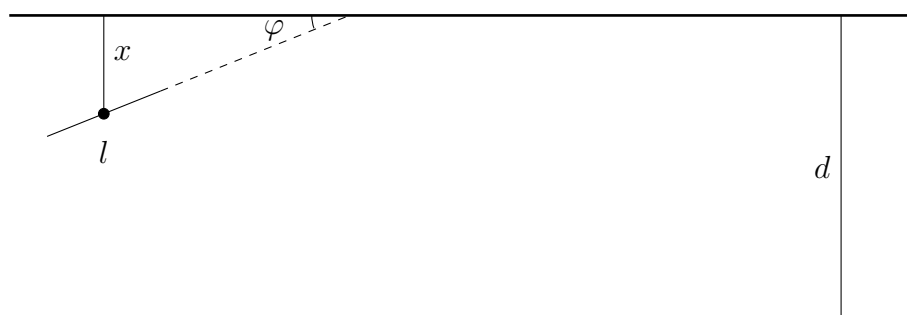
即针的一部分可以出来，但针的中点不能出来。

假设 φ 是针与线的夹角，有：

$$\varphi \in [0, \pi].$$

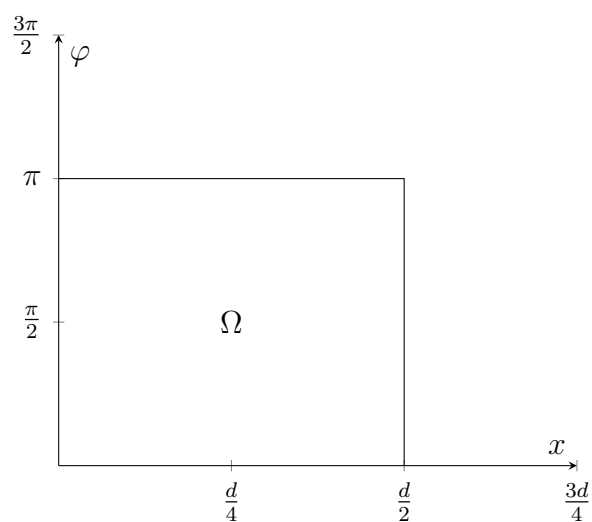
因此该事件全集写为：

$$\Omega = \left\{ (\varphi, x) \mid \varphi \in [0, \pi], x \in \left[0, \frac{d}{2}\right] \right\}.$$



Notation. 针的左右位置并不体现，但上下位置用 x 体现出来。

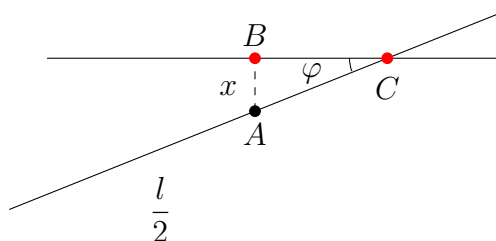
在坐标轴中绘制出全集图像：



判断相交条件：



放大观察：



可得相交的条件：

$$AC \leq \frac{l}{2}.$$

即：

$$\frac{x}{\sin(\varphi)} \leq \frac{l}{2}.$$

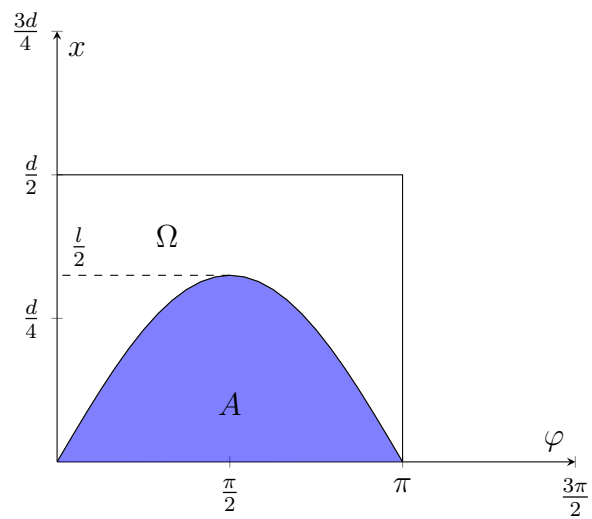
即：

$$x \leq \frac{l}{2} \cdot \sin(\varphi).$$

即事件发生可写做：

$$A = \left\{ (\varphi, x) \mid \varphi \in [0, \pi], x \in \left[0, \frac{l}{2} \cdot \sin(\varphi) \right] \right\}.$$

在坐标轴上绘制该区域：



即有：

$$P = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$

使用定积分求 S_A ：

$$S_A = \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin(\varphi) d\varphi = l.$$

$$S_\Omega = \frac{d}{2} \cdot \pi.$$

$$P = \frac{l}{\frac{d}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Remark. 蒙特卡洛方法：

实际实验时，使用了 N 根针，有 n 根落在线上，频率为

$$P_0 = \frac{n}{N}.$$

由蒙特卡洛方法有 $P_0 \approx P$ ，即：

$$\frac{2l}{\pi d} \approx \frac{n}{N}.$$

$$\pi \approx \frac{2lN}{nd}.$$

即：通过蒙特卡洛方法，设定一个未知数，通过计算得知包含该未知数的概率，实验得到频率，可以计算出该未知数的近似值。

Notation. 几何概率模型特性:

完全可加性 (A_i 彼此互不相容):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

3 频率与概率

频率: 看一个事件是否发生, 做 n 次实验, 发生了 m 次, 记为:

$$\omega_n(A) = \frac{m}{n}.$$

Example. 扔硬币 100 次, 正面朝上 54 次

频率:

$$\omega_{100} = \frac{54}{100} = 0.54.$$

概率:

$$P = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Notation. 频率特性:

1. 非负性:

$$\omega_n(A) \in [0, 1].$$

2. 规范性: 必然事件的频率等于 1, 不可能事件频率等于 0, 即:

$$\omega_n(\Omega) = 1, \omega_n(\emptyset) = 0.$$

3. 可加性: 若 A_1, A_2, \dots, A_m 互不相容, 则:

$$\omega_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m \omega_n(A_i).$$

Notation. 随着实验次数增多, 频率会逐渐接近于一个值

这个值称作统计概率

如扔硬币正面朝上的频率会接近于 0.5

4 公理化

提到了四种定义：

1. 描述
2. 古典
3. 几何
4. 统计

这些定义均含有三个性质：

1. 非负性
2. 规范性
3. 可加性

公理化尝试提出公理，找到其中相同的部分并将其统一

4.1 公理

Axiom. 非负性：

$$P(A) \in [0, 1].$$

Axiom. 规范性：

$$P(\Omega) = 1.$$

Axiom. 可加性：

A_1, A_2, \dots 互不相容，则：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

4.2 性质

Rule. $P(\emptyset) = 0$

证明.

$$\Omega = \Omega + \emptyset + \emptyset + \dots$$

$$P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset + \emptyset + \dots).$$

由于 Ω 与 \emptyset 互不相容，所以由无穷可加性：

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots = 0.$$

由非负性： $P(\emptyset) \in [0, 1]$ ，即： $P(\emptyset) = 0$ □

Rule. 有限可加性： A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容，则：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

证明. 有 A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容，再接上无穷多个 \emptyset 也互不相容
由完全可加性可得：

$$\begin{aligned} & P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \emptyset + \emptyset + \dots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \end{aligned} \quad (1)$$

即： $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ □

Rule. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

证明. A 和 \overline{A} 不相容，且 $A + \overline{A} = \Omega$ ，则：

$$P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

即： $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ □

Corollary. A_1, A_2, \dots, A_n 为完备事件组，利用有限可加性：

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Rule. $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

证明. 令 $A = (A - B) \cup AB$

由于 $A - B$ 和 AB 互不相容，由有限可加性：

$$P(A) = P((A - B) \cup AB) = P(A - B) + P(AB).$$

即 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ □

Rule.

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

and

$$P(A) \geq P(B)$$

if

$$B \subset A.$$

证明. 由 $B \subset A$ 可得:

$$P(AB) = P(B).$$

$$\text{即 } P(A - B) = P(A) - P(B)$$

由非负性:

$$P(A - B) = P(A) - P(B) \geq 0.$$

$$\text{即: } P(A) \geq P(B)$$

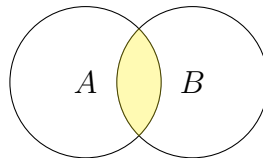
□

Rule. 加法公式 (very important)

对 $\forall A, B$ 有:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明. 画图如下:



$P(A) + P(B)$ 会多加一次 $P(AB)$ (图中黄色部分), 因此减去即可。

□

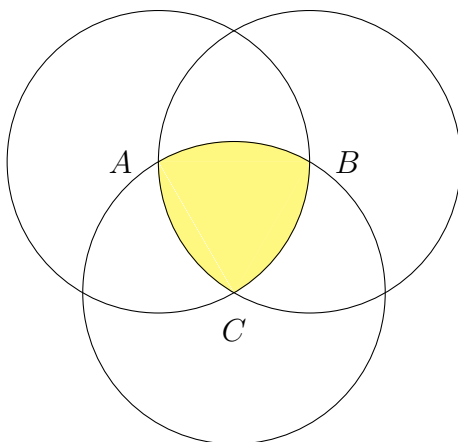
Notation. A, B 不相容时该公式也成立: $P(AB) = P(\emptyset) = 0$

即有限可加性: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Example. 三个事件相加:

$$\begin{aligned} &P(A + B + C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC). \end{aligned}$$

证明. 画图如下, 图示部分为 $P(ABC)$:

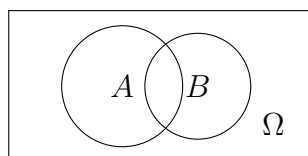


当 $P(A) + P(B) + P(C)$ 时, 图示部分被重复累加了 3 次, 减去 $P(AB) + P(BC) + P(AC)$ 后图示部分被减去了 3 次, 因此加上 $P(ABC)$ 即可。 \square

4.3 例题

Example. $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3, P(A+B) = 0.6$, 求 $P(A\bar{B})$

画图如下:



即 $P(AB) = 0.1, P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.3$

或: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

即: $P(AB) = P(A+B) - P(A) - P(B) = 0.1$

后续同上。

Example.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}.$$

且

$$P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}.$$

求 A, B, C 至少一个发生的概率和 A, B, C 都不发生的概率

$$\begin{aligned}
& P(A+B+C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\
&= \frac{3}{4} - 0 - \frac{1}{16} * 2 + P(ABC)
\end{aligned}$$

由于 $P(ABC) \in P(AB)$

所以: $P(ABC) \leq P(AB) = 0$, 即: $P(ABC) = 0$

即:

$$P(A+B+C) = \frac{5}{8}.$$

求 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$: 正难则反原则, 可先求出 A, B, C 至少发生一个的概率, 由于两个事件互斥, 即有: $P(A+B+C) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1$

即:

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = \frac{3}{8}.$$

Notation. 不可能事件的概率为 0, 但反之, 概率为 0 的事件不一定是不可能事件

即: 概率为 0 的事件可能会发生

Example. 朝一条长为 1, 头尾分别是 0,1 的线上扔一个质子, 扔到一个点 A 的概率为 0, 但该事件可能发生

Example. 有四个白球, 三个黑球, 任取三个球, 求这三个球至少有两个白球的概率

所有的情况: 从七个中取三个

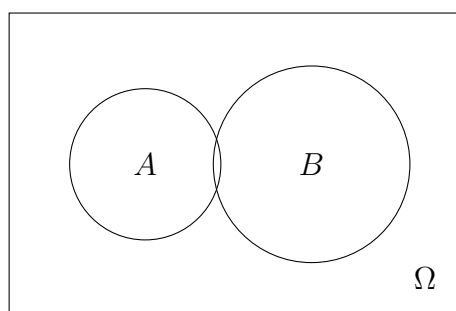
目标: 从四个白球中取两个/三个, 从三个黑球中取一个/不取

即:

$$P(A) = \frac{C_4^2 C_3^1 + C_4^3}{C_7^3}.$$

Example. 一个人看管两台机床, 第一台机床无需看管的概率为 0.9, 第二台为 0.8, 两台都需要看管的概率为 0.02, 求一小时内至少一台需要看管的概率

画图即可:



$$P(A) = 0.1, P(B) = 0.2, P(AB) = 0.02.$$

易得要求的是 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.28$

Example. 一共有 20 个产品，一等、二等、三等个数分别为：6, 10, 4，从中取出 3 个，求至少两件等级相同的概率

正难则反原则：求所有等级都不相同的概率

所有情况： $20 \rightarrow 3$

目标： $6 \rightarrow 1, 10 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 1$

概率：

$$P(\bar{A}) = \frac{C_6^1 C_{10}^1 C_4^1}{C_{20}^3}.$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{15}{19}.$$

Example. 生日问题：一个班上有 n 个学生，求至少两人生日相同的概率

正难则反：求所有人生日不同的概率

所有情况： 365^n

目标： $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - (n - 1))$

概率：

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - (n - 1))}{365^n}.$$

当 $n = 55$ 时， $P(A) \approx 0.99$

即这个班上几乎必然有生日在同一天的人