Part III-B: Statistic

Lecture by SongHao
Note by THF

2024 年 11 月 25 日

目录

Learn 7

11.23

1 抽样分布

Definition. 卡方分布 $\chi^2(n)$ ： 标准正态分布平方后的和是卡方分布

即：$X_1, X_2, \ldots X_i$ 相互独立且都是标准正态分布，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n) = \chi^2.$$

Example. $X_1, X_2, \ldots, X_8$ 独立同分布于 $N(0,1)$ ，则 $\sum_{i=1}^{8} X_i \sim \chi^2(8)$

Corollary. 卡方分布的期望 $EX = n$ ，方差 $DX = 2n$

Corollary. 中心极限定理可得：如果 $X \sim \chi^2(n)$ 且 n 充分大的时候：$\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$ 近似符合标准正态分布 $N(0,1)$

Notation. 独立同分布的中心极限定理不管分布种类

Corollary. $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ ，且 X, Y 独立，则 $X + Y \sim \chi^2(m+n)$

Notation. 推论：$X_i \sim \chi^2(m_i)$ ，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right).$$

即卡方分布符合可加性

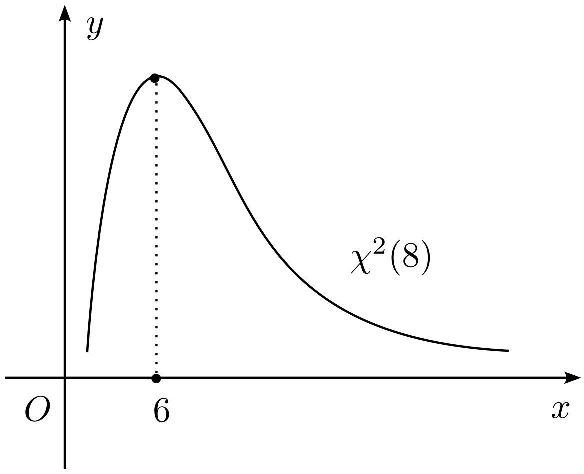

图 1: 卡方分布图像

Definition. 上 α 分位数：$P\left(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}(n)\right) = \alpha$ ：在分布图某点右边的概率为 α ，这个点的值

Example. $\chi^2_{0.05}(10) = 18.3, \chi^2_{0.1}(25) = 34.4$

上 α 分位数查表可得：n 已知，确定所需的概率 α

Example. 已知 $X \sim \chi^2(10)$ 求：当 $P(X > a) = 0.025, P(X < b) = 0.05$ 时的 a, b

解：由题：$n = 10, \alpha_1 = 0.025$ ，查表可得：$\chi^2_{0.025}(10) = 20.5 = a$
易得 $P(X < b) = 0.05 = 1 - P(X \geq b)$ 即 $P(X \geq b) = 0.95 = \alpha_2$,查表:$\chi^2_{\alpha_2}(10) = 3.94 = b$

Notation. 卡方分布为单峰曲线，$n - 2$ 时取最大值

1.1 t 分布

Definition. t 分布由标准正态分布和卡方分布组成：$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且 X, Y 相互独立，则 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

Notation. 上 α 分位数：$P(T > t_{\alpha}(n)) = \alpha$ ：α 为一个数，由于 t 分布的对称性可得：$t_{\alpha}(n) = 1 - t_{1-\alpha}(n)$

Example. $X \sim N(2,1), (Y_1, Y_2, \ldots, Y_4) \sim N(0,4)$ ，且相互独立，令 $T = \frac{4(X-2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} Y_i^2}}$ ，求 T 的分布并求 $P(|T| > t_0) = 0.01$ 时的 t_0

Learn 8

11.24

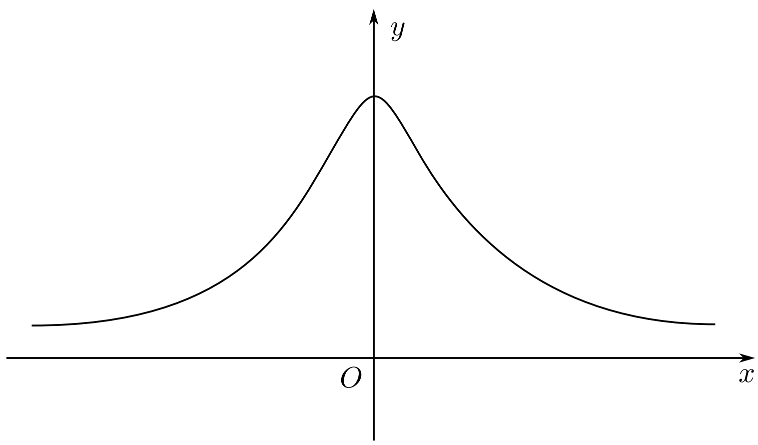

图 2: t 分布图像

解：对 Y_i：$\mu=0,\sigma=2$ ，先将 Y_i 改为标准正态分布：$\frac{Y_i-0}{2}\sim N(0,1)$，写出一个关于 $\frac{Y_i-0}{2}$ 的卡方分布：

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{4}\frac{Y_i-0}{2}^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}Y_i^2}{4}\sim\chi^2(4).$$

对 X 标准化：$\frac{X-2}{1}\sim N(0,1)$ ，由于 t 分布"上正态下卡方"，所以：

$$\frac{(X-2)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}Y_i^2}{4}/4}}=\frac{4(X-2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}Y_i^2}}=T\sim t(4).$$

要求 $P(|T|>t_0)=0.01$ ：由 t 分布的对称性：$P(|T|>t_0)=2P(T>t_0)=0.01$ ，即 $P(T>t_0)=0.005$ ；令 $\alpha=0.005$ ，查表 $t_{0.005}(4)$ 即可

查表得：$t_{0.005}(4)=4.604$

1.2 F 分布

形式：$F(n_1,n_2)$（共 2 个参数）

Corollary. $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$ ，且相互独立，则：

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2).$$

同理:

$$\frac{Y/n_2}{X/n_1} \sim F\left(n_2, n_1\right).$$

记 $F \sim F\left(n_1, n_2\right)$ ，则 $\frac{1}{F} \sim F\left(n_2, n_1\right)$

Example. $X_1, X_2, \ldots, X_6 \sim N\left(0, \sigma^2\right)$，求 $\frac{2\left(X_1^2+X_2^2\right)}{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2}$ 的分布

解：$\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$，则 $\frac{X_1^2}{\sigma^2}+\frac{X_2^2}{\sigma} \sim \chi^2(2)$ ，同理：$\sum_{i=3}^6 \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4)$

$$\frac{\frac{X_1^2+X_2^2}{\sigma^2}/2}{\frac{\sum_{i=3}^6 X_i^2}{\sigma^2}/4} = \frac{2\left(X_1^2+X_2^2\right)}{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2} \sim F(2,4).$$

Notation. F 分布的上 α 分位数：$P\left(F > F_\alpha\left(n_1, n_2\right) = \alpha\right)$

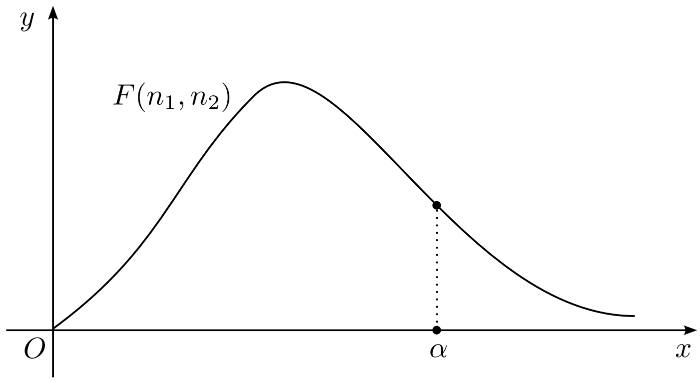

图 3: F 分布图像

Corollary.

$$F_{1-\alpha}\left(n_1, n_2\right) = \frac{1}{F_\alpha\left(n_2, n_1\right)}.$$

证明. 假设 $F \sim F\left(n_1, n_2\right)$，则 $\frac{1}{F} \sim \left(n_2, n_1\right)$，求 $P\left(F > F_{1-\alpha}\left(n_1, n_2\right)\right) = 1-\alpha$

将两边同时取倒数，符号反向：

$$.$$

$$
\begin{aligned}
1-\alpha=P\left(F>F_{1-\alpha}\left(n_1,n_2\right)\right)&=P\left(\frac{1}{F}<\frac{1}{F_{1-\alpha}\left(n_1,n_2\right)}\right)\\
&=1-P\left(\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}\left(n_1,n_2\right)}\right)\\
\alpha&=P\left(\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}\left(n_1,n_2\right)}\right)\\
\Rightarrow\frac{1}{F}\sim F\left(n_2,n_1\right),\alpha&=P\left(\frac{1}{F}>F_{\alpha}\left(n_2,n_1\right)\right)\\
\Rightarrow F_{\alpha}\left(n_2,n_1\right)&=\frac{1}{F_{1-\alpha\left(n_1,n_2\right)}}.
\end{aligned}
$$

□

Example. $F\sim F\left(10,15\right)$ ，求 λ_1,λ_2 是 $P\left(F>\lambda_1\right)=0.01,P\left(F\leq\lambda_2\right)=0.01$

解：查表可得：$F_{0.01}\left(10,15\right)=\lambda_1=3.8$ ，由题：$P\left(F\leq\lambda_2\right)=P\left(\frac{1}{F}>\frac{1}{\lambda_2}\right)=0.01$ ，由于 $\frac{1}{F}\sim F\left(15,10\right)$ ，则可通过查表得 $F_{0.01}\left(15,10\right)$ 求得 $\frac{1}{\lambda_2}$ ：

得：$\begin{cases}\lambda_1=3.8\\ \lambda_2=0.293\end{cases}$