Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by SongHao

Note by THF

2024 年 9 月 19 日

目录

1 引言

1.1 确定事件

一定发生的事件

1.2 随机事件

可能发生的事件

1.3 统计规律

大量试验得出的宏观规律

2 事件

2.1 试验

对对象观察、测量、实验

2.2 随机试验

随机试验的条件：
1. 在相同条件下可重复
2. 结果不止一个
3. 试验前无法预测出现的实验结果
使用 E 代表随机试验。

2.3 事件

随机试验的每种结果。

2.4 随机事件

可能出现的事件，用 A,B,$C\dots$ 表示

2.5 基本事件

不能或不必再分的事件（基于试验的事件）

Example. 扔一次骰子，实验目的为：骰子朝上的点数
基本事件为：出现 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 点。

Example. 扔一次骰子，实验目的为：骰子的位置
此时出现的点数不是基本事件。

Example. 扔一次硬币，实验目的为：硬币朝上的面
基本事件为：出现正面或反面。

Example. 扔一次硬币，实验目的为：硬币某根已知的轴线与已知直线的夹角
基本事件为：夹角 $\theta \in [0, 2\pi]$
此时正面朝上与反面朝上不是基本事件。

2.6 复合事件

由基本事件复合而成的事件

Example. 扔一次骰子，点数小于 7 点表示为：

$$\Omega = \{x | x < 7\}$$

点数大于 7 点表示为：

$$\varnothing = \{x | x > 7\}$$

2.7 必然事件

一定发生的结果，用 Ω 表示

2.8 不可能事件

不可能发生的结果，用 $\varnothing$ 表示

Example. 扔一次骰子，点数大于 7 点为不可能事件

2.9 样本空间

所有基本事件的集合（实验目的确定），与必然事件相似，用 Ω 表示。

2.10 样本点

样本空间中的元素，即基本事件，用 ω 表示。

Example. 扔硬币研究某面朝上的样本空间：$\Omega = \{$正，反$\}$
样本点：$\omega_1 =$ 正面朝上，$\omega_2 =$ 反面朝上

Example. 扔一个骰子研究某点朝上的样本空间：

$$\Omega = \{x|x \in [1,6], x \in \mathbb{R}\}$$

样本点：

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_6) = (1,2,3,4,5,6)$$

Example. 扔两个硬币，研究朝上的面，样本空间为：

$$\Omega = \{(x,y)|(0,0),(1,1),(0,1),(1,0))\}$$

或：

$$\Omega = \{(x,y)|x,y \in \{0,1\}\}$$

Notation. 样本空间可以是无限集。

Example. 在 $[0,1]$ 内扔一个质子，求其坐标。

其样本空间为：

$$\Omega = \{x|x \in [0,1]\}$$

Notation. 质子/点：无大小

Example. 向平面扔一个点：

$$\Omega = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$$

3 事件的集合表示

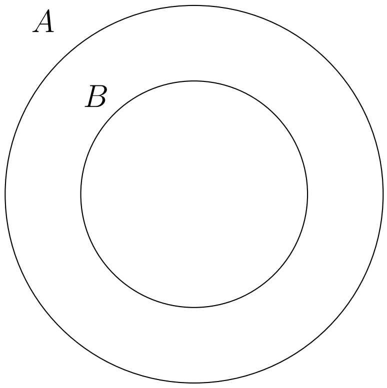
集合（set）：$A = \{2,4,6\}$ 等。

Notation. Ω 与必然事件、样本空间等同，$\varnothing$ 与不可能事件、空集等同。

任何事件都是 Ω 的子集，$\varnothing$ 是所有事件的子集。

4 事件间的关系

4.1 包含

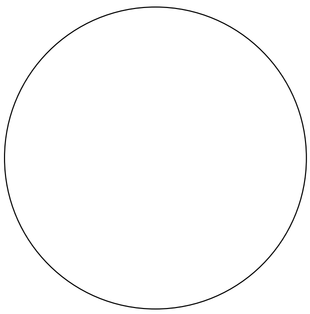


$B \subset A$ or $A \supset B$

A 发生必然有 B 发生，且有：

$$\forall A, \varnothing \subset A \subset \Omega.$$

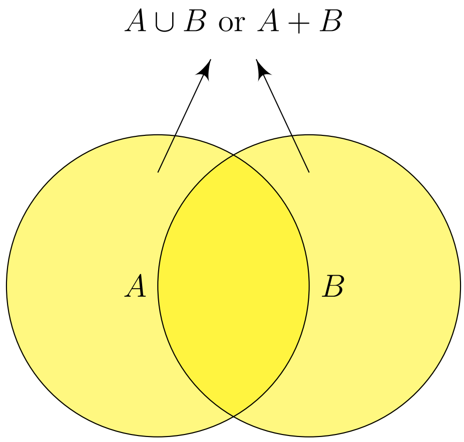
4.2 相等



$B \subset A$ and $A \subset B$

称 A 与 B 相等。

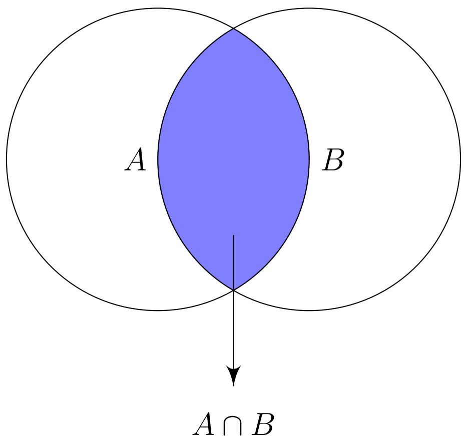
4.3 并与和



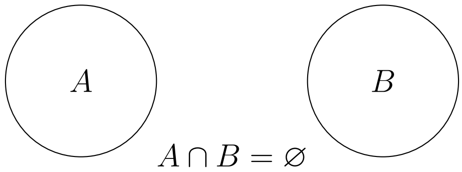
$A \cup B$:（并/和）A 与 B 至少有一个发生

$$
\begin{cases}
A + B \subset A, \\
A + A = A, \\
A + \varnothing = A, \\
A + \Omega = \Omega.
\end{cases}
$$

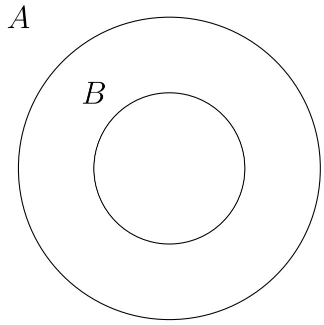
4.4 交与积



$A \cap B$:（交/积）A 与 B 同时发生



$A \cap B = \varnothing$



$A \cap B = B$

$$\begin{cases} AB \subset A \\ AA = A \\ A\varnothing = \varnothing \\ A\Omega = A \end{cases}.$$

Definition. 无限可列个：能按某种规律排成一个序列

Example. 自然数无限可列：$0, 1, 2, \ldots$

Example. 整数无限可列：$0, 1, -1, 2, -2, \ldots$

Example. 有理数：能写成 $\dfrac{p}{q}$ 的数

$0.\dot{5}\dot{6}$ 可以写为：$\dfrac{56}{99}$

$0.1\dot{2}$ 可以写为：$\dfrac{11}{90}$

有理数无限可列：$0, \dfrac{1}{1}, \dfrac{-1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2} \ldots$

Example. 实数集、平面点集非无限可列。

以下定义：

Definition. n 个事件互斥时：

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

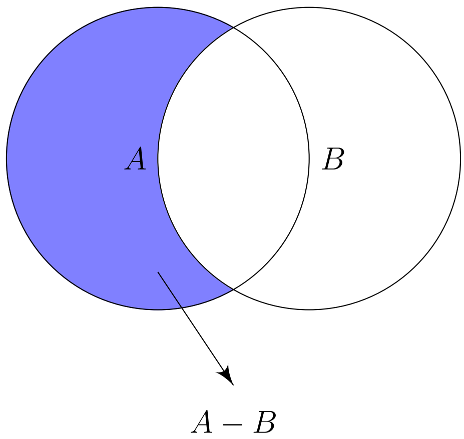
n 个事件同时发生：

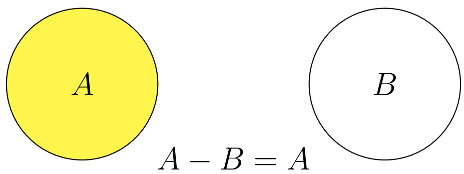
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

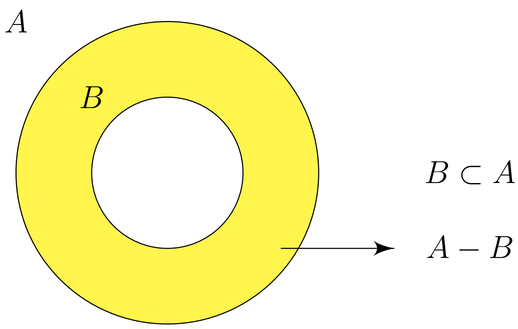
该定义支持无限可列个。

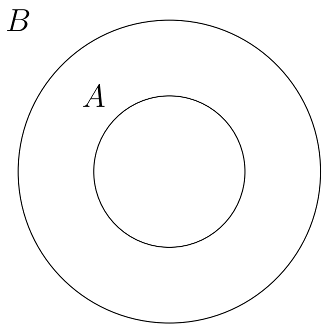
4.5 差

$A - B$: A 发生而 B 不发生。







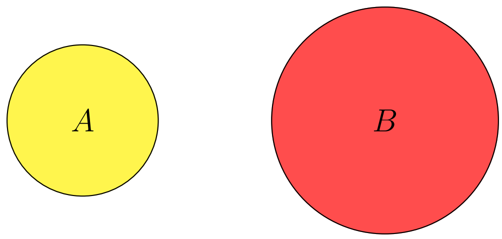


$A \subset B$

$A - B = \varnothing$

4.6 互不相容

A 与 B 不同时发生，即：$AB = \varnothing$



$A \cap B = \varnothing$

n 个事件：

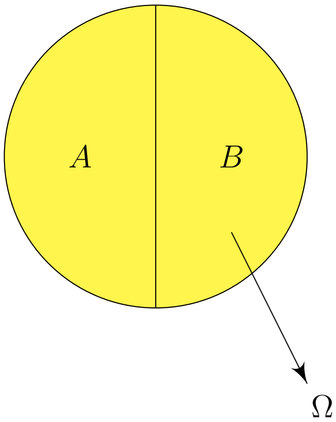
$$A_1, A_2, \ldots A_n.$$

互不相容，则：

$$\forall i, j : A_i A_j = \varnothing.$$

4.7 对立

$AB = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$



记作:

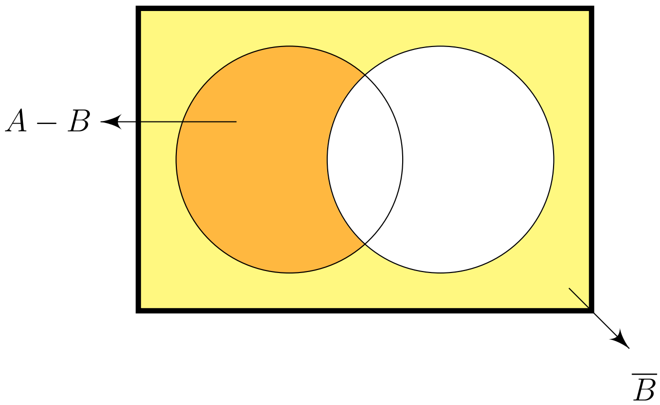
$$A = \overline{B}.$$

或:

$$B = \overline{A}.$$

由此可得:

$$\begin{cases} \overline{\overline{A}} = A \\ A - B = A - AB = A\overline{B} \end{cases}.$$

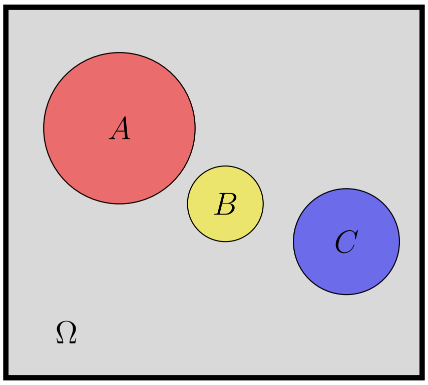


Notation. 若两事件对立，则一定互不相容.

互不相容的事件不一定对立.

Notation. 互不相容适用于多个事件.

对立只适用于两个事件.



Notation. 互不相容：不能同时发生，但可以都不发生

对立：必须有一个发生

4.8 完备事件组

$A_1, A_2, \ldots A_n$ 两两互不相容，且

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

则为完备事件组。

5 事件间的运算律

5.1 交换律

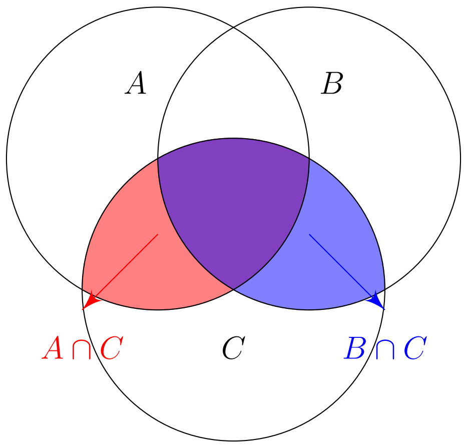
$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}.$$

5.2 结合律

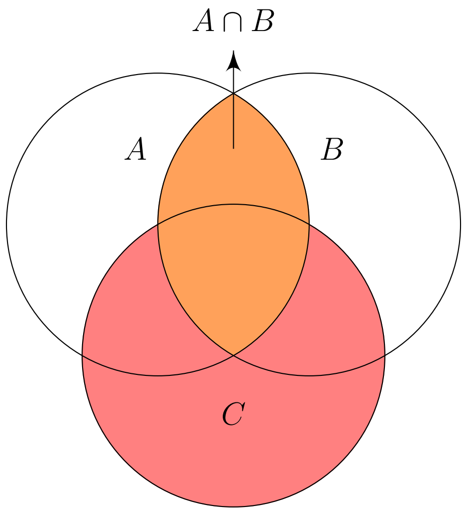
$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}.$$

5.3 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

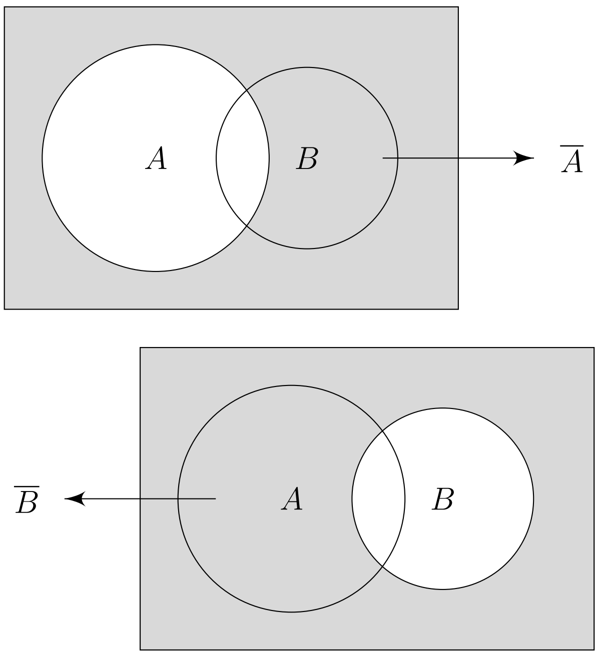


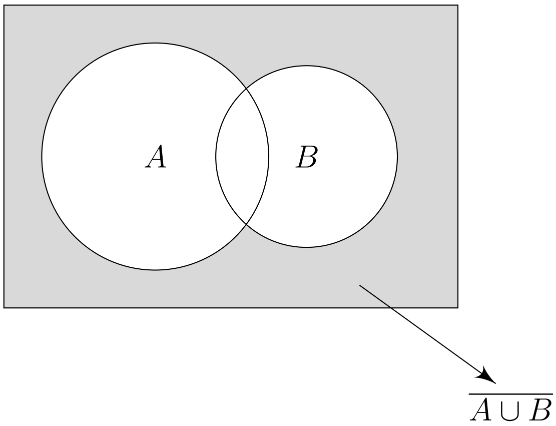
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$



5.4 对偶律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$





$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

记法：

1. 画图
2. 长线变短线，开口换方向
3. 事件定义

Notation. 多个事件的对偶律：

$$\begin{cases} \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i} \\ \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i} \end{cases}.$$

Example. A, B, C 是试验 E 的随机事件，用符号表示以下事件：

1. 只有 A 发生：$A\bar{B}\bar{C}$
2. A 发生：A
3. A, B, C 只有一个发生：$A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
4. A, B, C 同时发生：ABC
5. A, B, C 至少一个发生：$A + B + C$
6. A, B, C 至多一个发生：$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
7. A, B, C 恰有两个发生：$AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$
8. A, B, C 至少两个发生：$AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$ 或 $AB + BC + AC$

Example. 从产品中抽查，不放回，一共取了三次：A_1, A_2, A_3 代表三次取得合格品：

1. 三次都合格：$A_1A_2A_3$
2. 至少一次合格：$A_1 + A_2 + A_3$
3. 恰有两次合格：$A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$
4. 最多一次合格：$\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

Example. 射击三枪,$A_i, i = 1, 2, 3$ 表示第 i 次击中目标，解释以下事件：

1. $A_1 + A_2$： 前两次至少击中一次
2. $\overline{A_2}$： 第二次不击中
3. $A_1 + A_2 + A_3$： 至少击中一次
4. $A_1A_2A_3$： 全部击中
5. $A_2 - A_3$： 第二次击中而第三次不击中
6. $\overline{A_1 + A_3} = \overline{A_1} \cap \overline{A_3}$（使用对偶律）：第一次和第三次不击中
7. $\overline{A_1} + \overline{A_3}$： 第一次和第三次至少一次未能击中