Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by SongHao

Note by THF

2024 年 9 月 19 日

目录

1 排列组合

1. 加法原理：完成事件有多类方案
2. 乘法原理：完成事件分多步

Example. 有三种馒头，四种米饭

加法原理：只吃一种，共 7 种

乘法原理：先吃馒头，后吃米饭，共 12 种

1.1 排列

1. 不重复排列

从 n 个不同元素中取出 m 个排列，不放回

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Example. $P_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$

2. 全排列

$$P_n^n = n!.$$

Example. $P_0^0 = 0! = 1$

3. 重复排列

从 n 个不同元素中取出 m 个排列，可放回

$$(P_n^m) = n^m.$$

1.2 组合

从 n 个不同元素中取出 m 个，不排列

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

$$\begin{cases} C_n^m = C_n^{n-m} \\ C_n^n = C_n^0 = 1 \end{cases}.$$

Example. 在书架上有序放置五本书，求其顺序为 $1,2,3,4,5$ 的概率：

总样本点个数：P_5^5

目标事件样本点个数：2（顺序、逆序）

概率：

$$P = \frac{2}{P_5^5} = \frac{1}{60}.$$

Example. 有四个邮箱，两封信，求：

1. 前两个邮箱各有一封的概率

总样本点个数：$4 \times 4 = 16$

第一个邮箱有一封信且第二个邮箱有一封信的样本点个数：$P_2^2 = 2$ （第一封信前往 $1,2$ ，第二封信前往 $2,1$）

概率：

$$P = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

2. 第二个邮箱恰有一封信的概率

事件：从两封信中抽一封放到邮箱 2 中，剩余的 1 封信在除 2 以外的三个邮箱中选一个放入

即：

$$C_2^1 C_3^1 = 6.$$

概率：

$$P = \frac{C_2^1 C_3^1}{4 \times 4} = \frac{3}{8}.$$

3. 两封信不在一个邮箱内的概率

事件：一封信随机投入一个邮箱，另一封信投入剩余的三个邮箱

概率：

$$P = \frac{4 \times 3}{4 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

或：$1-$ 信在同一个邮箱的概率

$= 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$

Example. 有 5 白 4 黑共 9 个球，任取 3 个球，求：

1. 取出 2 白 1 黑的概率：

$$P = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3}.$$

2. 全是白球的概率：

$$P=\frac{C_5^3}{C_9^3}.$$

3. 颜色相同的概率：

$$P=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_9^3}.$$

4. 颜色不同的概率：

$$P=\frac{C_5^1C_3^2}{C_9^3}+\frac{C_5^2C_3^1}{C_9^3}.$$

Example. 有 a 个白球，b 个黑球

1. 任取一个是白球的概率：

$$P=\frac{a}{a+b}.$$

2. 接连取出 m 个球 $(m\in[1,a+b])$ ，第 m 个是白球的概率：

法 1：将所有球排为一排，为全排列：$(a+b)!$

要使第 m 个球是白球:

先任从白球中拿一个放入该位置，其他的球全排列

$$P=\frac{a\left(a+b-1\right)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

法 2：只取 m 个球

从 $a+b$ 个中取出 m 个并排好：P_{a+b}^m

要使第 m 个是白球，单独挑一个白球放在第 m 个上

然后在剩余的球中取出 $m-1$ 个并排好：P_{a+b-1}^{m-1}

概率：

$$P=\frac{P_{a+b-1}^{m-1}\times a}{P_{a+b}^m}=\frac{a\times\frac{(a+b-1)!}{(a+b-1-(m-1))!}}{\frac{(a+b)!}{(a+b-m)!}}=\frac{a}{a+b}.$$

法 3. 先取第 m 个位置的球

一共有 $a+b$ 个球，选 a 个白球中的一个放入即可：

$$P=\frac{a}{a+b}.$$

2 事件的概率

2.1 概率的基本描述

发生 A 事件的可能性大小称作概率，记作 $P(A)$.

Example. 抛一枚硬币，正面朝上的概率为：$P(A) = P\left(\bar{A}\right) = 0.5$

性质：

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(A) \in [0, 1]$

2.2 古典概率模型

古典概率模型应满足两个条件：

1. 样本空间中存在有限个样本
2. 所有样本点出现的可能性相同（等可能性）

Example. 扔硬币，观察朝上的面

该事件对应的样本空间只有两个样本：正面朝上与反面朝上

正面朝上与反面朝上的可能性相同：$P(A) = P(B) = 0.5$

因此为古典概率模型。

古典概率模型的概率计算：

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\omega(A)}{\omega(\Omega)}.$$

Notation. $N(A)$ ： A 事件所包含的基本事件个数

$\omega(A)$：A 事件所包含的样本点个数

Notation. 古典概率模型的特性：

1. 非负性：$P(A) \in [0, 1]$
2. 规范性：$P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$

3. 有限可加性：$A_1, A_2 \dots A_n$ 互不相容，则：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right).$$

缺点：

1. 有限个结果
2. 等可能性

2.3 几何概率模型

Example. 有一长方形，右边部分的阴影占面积的 $\frac{1}{2}$，扔一个质子，落在阴影的概率为 $\frac{1}{2}$.

Example. 一条线段长 3 ，阴影部分占 $[1,2]$ ，扔一个质子，落在阴影的概率为 $\frac{1}{3}$.

与几何概率模型有关的元素：

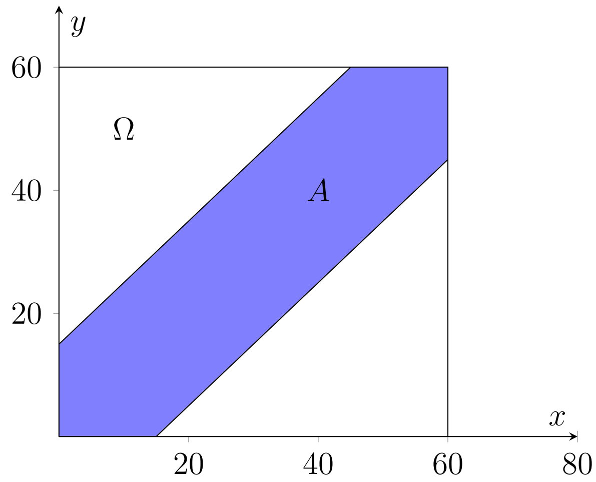
1. 线段
2. 平面
3. 立体

$$P\left(A\right) = \frac{\mu\left(G\right)}{\mu\left(\Omega\right)}.$$

$\mu\left(G\right)$ ： 度量

Example. 会面问题：

甲乙两人约定从六点到七点见面，先到的人等 15 分钟，且这一小时内甲乙可在任意时刻到达，求甲乙见面的概率。



令 A 为事件两人见面，x 为甲到达的时间，y 为乙到达的时间，A 发生的情况如下:

1. 甲先到，乙后到，即:

$$y > x, y - x \leq 15.$$

2. 乙先到，甲后到，即:

$$y < x, x - y \leq 15.$$

即:

$$|y - x| \leq 15.$$

如图:

$$S_A = 60 \times 60 - 45 \times 45 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1575.$$
$$S_\Omega = 60 \times 60 = 3600.$$
$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}.$$

Example. 蒲丰投针问题:
有两条平行线，距离为 d ，朝平面内投掷长度为 $l\,(l < d)$ 的针，求针与任意一个平行线相交的概率

假设 x 表示针的中点离最近的一根线的距离，有:

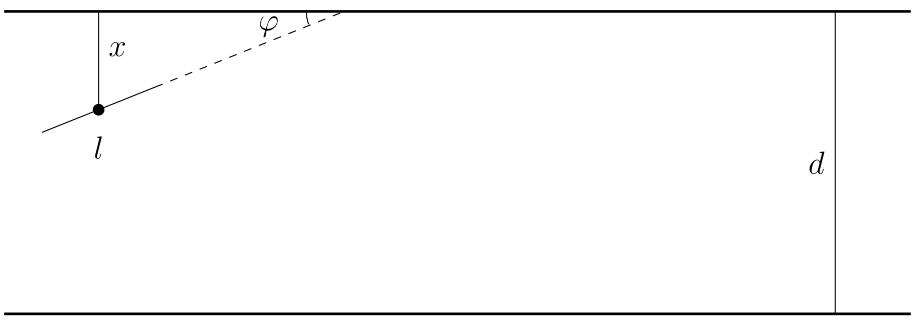
$$x \in \left[0, \frac{d}{2}\right].$$

即针的一部分可以出来，但针的中点不能出来。
假设 φ 是针与线的夹角，有：

$$\varphi \in [0, \pi] .$$

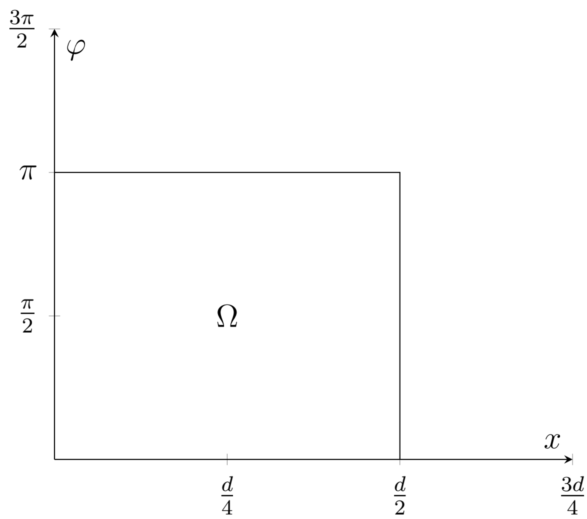
因此该事件全集写为：

$$\Omega = \left\{ (\varphi, x) \left| \varphi \in [0, \pi] , x \in \left[0, \frac{d}{2} \right] \right. \right\} .$$

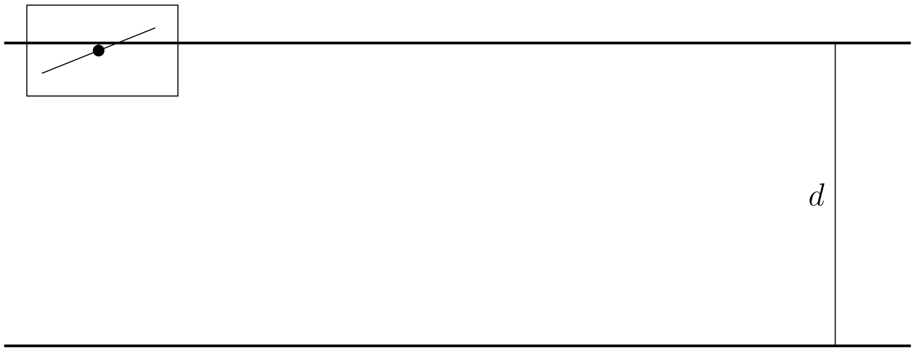


Notation. 针的左右位置并不体现，但上下位置用 x 体现出来。

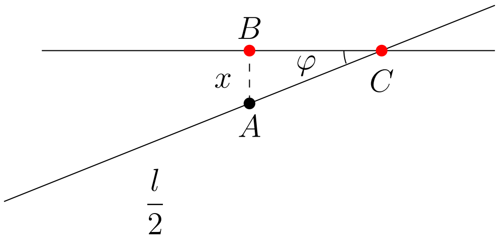
在坐标轴中绘制出全集图像：



判断相交条件：



放大观察:



可得相交的条件:

$$AC \leq \frac{l}{2}.$$

即:

$$\frac{x}{\sin(\varphi)} \leq \frac{l}{2}.$$

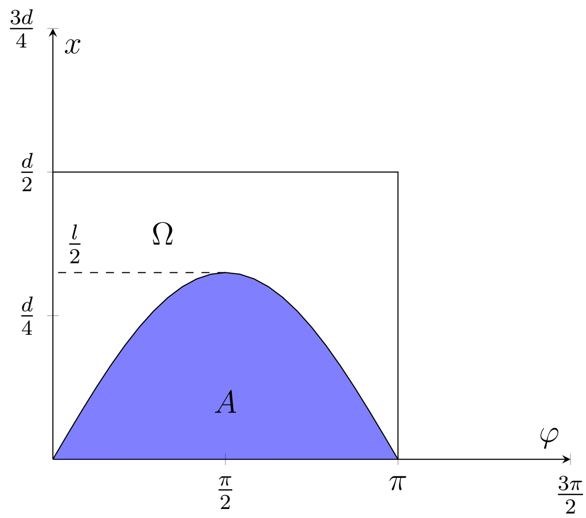
即:

$$x \leq \frac{l}{2} \cdot \sin(\varphi).$$

即事件发生可写做:

$$A = \left\{ (\varphi, x) \,|\varphi \in [0, \pi], x \in \left[0, \frac{l}{2} \cdot \sin(\varphi)\right] \right\}.$$

在坐标轴上绘制该区域:



即有：

$$P = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$

使用定积分求 S_A：

$$S_A = \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = l.$$

$$S_\Omega = \frac{d}{2} \cdot \pi.$$

$$P = \frac{l}{\frac{d}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Remark. 蒙特卡洛方法：

实际实验时，使用了 N 根针，有 n 根落在线上，频率为

$$P_0 = \frac{n}{N}.$$

由蒙特卡洛方法有 $P_0 \approx P$，即：

$$\frac{2l}{\pi d} \approx \frac{n}{N}.$$

$$\pi \approx \frac{2lN}{nd}.$$

即：通过蒙特卡洛方法，设定一个未知数，通过计算得知包含该未知数的概率，实验得到频率，可以计算出该未知数的近似值。

Notation. 几何概率模型特性：

完全可加性（A_i 彼此互不相容）：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

3 频率与概率

频率：看一个事件是否发生，做 n 次实验，发生了 m 次，记为：

$$\omega_n\left(A\right) = \frac{m}{n}.$$

Example. 扔硬币 100 次，正面朝上 54 次

频率：

$$\omega_{100} = \frac{54}{100} = 0.54.$$

概率：

$$P = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Notation. 频率特性：

1. 非负性：

$$\omega_n\left(A\right) \in \left[0,1\right].$$

2. 规范性：必然事件的频率等于 1 ，不可能事件频率等于 0 ，即：

$$\omega_n\left(\Omega\right) = 1, \omega_n\left(\varnothing\right) = 0.$$

3. 可加性：若 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 互不相容，则：

$$\omega_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \omega_n\left(A_i\right).$$

Notation. 随着实验次数增多，频率会逐渐接近于一个值

这个值称作统计概率

如扔硬币正面朝上的频率会接近于 0.5

4 公理化

提到了四种定义:

1. 描述
2. 古典
3. 几何
4. 统计

这些定义均含有三个性质:

1. 非负性
2. 规范性
3. 可加性

公理化尝试提出公理，找到其中相同的部分并将其统一

4.1 公理

Axiom. 非负性:

$$P(A) \in [0,1].$$

Axiom. 规范性:

$$P(\Omega) = 1.$$

Axiom. 可加性:

$A_1, A_2, \ldots$ 互不相容，则:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

4.2 性质

Rule. $P(\varnothing) = 0$

证明.

$$\Omega = \Omega + \varnothing + \varnothing + \ldots.$$

$$P(\Omega) = P(\Omega + \varnothing + \varnothing + \ldots).$$

由于 Ω 与 $\varnothing$ 互不相容，所以由无穷可加性：

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \ldots.$$

$$P(\varnothing) + P(\varnothing) + \ldots = 0.$$

由非负性：$P(\varnothing) \in [0,1]$ ，即：$P(\varnothing) = 0$ □

Rule. 有限可加性：$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 互不相容，则：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

证明. 有 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 互不相容，再接上无穷多个 $\varnothing$ 也互不相容

由完全可加性可得：

$$\begin{aligned}
&P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \varnothing + \varnothing + \ldots) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \ldots \\
&= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)
\end{aligned} \tag{1}$$

即：$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$ □

Rule. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

证明. A 和 $\overline{A}$ 不相容，且 $A + \overline{A} = \Omega$ ，则：

$$P(\Omega) = P\left(A + \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1.$$

即：$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$ □

Corollary. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为完备事件组，利用有限可加性：

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Rule. $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

证明. 令 $A = (A - B) \cup AB$

由于 $A - B$ 和 AB 互不相容，由有限可加性：

$$P(A) = P((A - B) \cup AB) = P(A - B) + P(AB).$$

即 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ □

Rule.

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

and

$$P(A)\geq P(B)$$

if

$$B\subset A.$$

证明. 由 $B\subset A$ 可得:

$$P(AB)=P(B).$$

即 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

由非负性:

$$P(A-B)=P(A)-P(B)\geq 0.$$

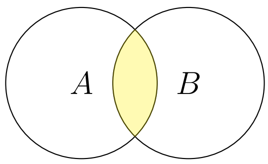
即: $P(A)\geq P(B)$ □

Rule. 加法公式 (very important)

对 $\forall A,B$ 有:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明. 画图如下:



$P(A)+P(B)$ 会多加一次 $P(AB)$ (图中黄色部分), 因此减去即可。 □

Notation. A,B 不相容时该公式也成立: $P(AB)=P(\varnothing)=0$

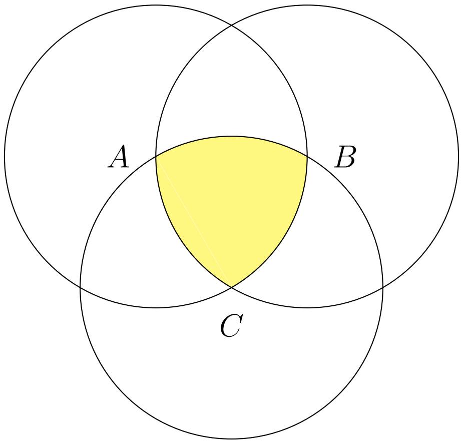
即有限可加性: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Example. 三个事件相加:

$$P(A+B+C)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

证明. 画图如下，图示部分为 $P(ABC)$ ：

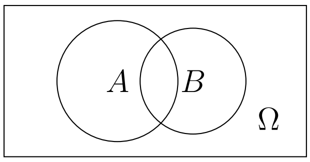


当 $P(A)+P(B)+P(C)$ 时，图示部分被重复累加了 3 次，减去 $P(AB)+P(BC)+P(AC)$ 后图示部分被减去了 3 次，因此加上 $P(ABC)$ 即可。 □

4.3 例题

Example. $P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A+B)=0.6$，求 $P\left(A\bar{B}\right)$

画图如下：



即 $P(AB)=0.1$，$P\left(A\bar{B}\right)=P(A)-P(AB)=0.3$

或：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

即：$P(AB)=P(A+B)-P(A)-P(B)=0.1$

后续同上。

Example.

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}.$$

且

$$P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}.$$

求 A,B,C 至少一个发生的概率和 A,B,C 都不发生的概率

$P(A+B+C)$
$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
$=\frac{3}{4}-0-\frac{1}{16}*2+P(ABC)$
由于 $P(ABC)\in P(AB)$
所以：$P(ABC)\leq P(AB)=0$，即：$P(ABC)=0$
即：

$$P(A+B+C)=\frac{5}{8}.$$

求 $P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)$ ：正难则反原则，可先求出 A,B,C 至少发生一个的概率，由于两个事件互斥，即有：$P(A+B+C)+P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)=1$

即：

$$P\left(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\right)=\frac{3}{8}.$$

Notation. 不可能事件的概率为 0 ，但反之，概率为 0 的事件不一定是不可能事件

即：概率为 0 的事件可能会发生

Example. 朝一条长为 1 ，头尾分别是 $0,1$ 的线上扔一个质子，扔到一个点 A 的概率为 0 ，但该事件可能发生

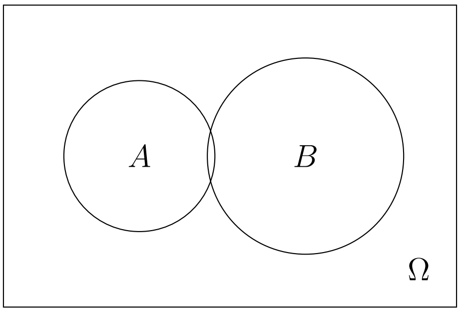
Example. 有四个白球，三个黑球，任取三个球，求这三个球至少有两个白球的概率

所有的情况：从七个中取三个
目标：从四个白球中取两个/三个，从三个黑球中取一个/不取
即：

$$P(A)=\frac{C_4^2C_3^1+C_4^3}{C_7^3}.$$

Example. 一个人看管两台机床，第一台机床无需看管的概率为 0.9 ，第二台为 0.8 ，两台都需要看管的概率为 0.02 ，求一小时内至少一台需要看管的概率

画图即可：



$$P(A) = 0.1, P(B) = 0.2, P(AB) = 0.02.$$

易得要求的是 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.28$

Example. 一共有 20 个产品，一等、二等、三等个数分别为：$6, 10, 4$ ，从中取出 3 个，求至少两件等级相同的概率

正难则反原则：求所有等级都不相同的概率

所有情况：$20 \to 3$

目标：$6 \to 1, 10 \to 1, 4 \to 1$

概率：

$$P\left(\bar{A}\right) = \frac{C_6^1 C_{10}^1 C_4^1}{C_{20}^3}.$$

$$P(A) = 1 - P\left(\bar{A}\right) = \frac{15}{19}.$$

Example. 生日问题：一个班上有 n 个学生，求至少两个人生日相同的概率

正难则反：求所有人生日不同的概率

所有情况：365^n

目标：$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - (n-1))$

概率：

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - (n-1))}{365^n}.$$

当 $n = 55$ 时，$P(A) \approx 0.99$

即这个班上几乎必然有生日在同一天的人