

Part III: Statistic

Lecture by SongHao

Note by THF

2025 年 3 月 18 日

目录

1	引言	3
1.1	确定事件	3
1.2	随机事件	3
1.3	统计规律	3
2	事件	3
2.1	试验	3
2.2	随机试验	3
2.3	事件	3
2.4	随机事件	3
2.5	基本事件	4
2.6	复合事件	4
2.7	必然事件	4
2.8	不可能事件	4
2.9	样本空间	4
2.10	样本点	5
3	事件的集合表示	5
4	事件间的关系	6
4.1	包含	6
4.2	相等	6
4.3	并与和	7
4.4	交与积	7
4.5	差	8
4.6	互不相容	9

4.7 对立	10
4.8 完备事件组	11
5 事件间的运算律	12
5.1 交换律	12
5.2 结合律	12
5.3 分配律	12
5.4 对偶律	13
6 排列组合	15
6.1 排列	15
6.2 组合	16
7 事件的概率	18
7.1 概率的基本描述	18
7.2 古典概率模型	18
7.3 几何概率模型	19
8 频率与概率	23
9 公理化	23
9.1 公理	24
9.2 性质	24
9.3 例题	26
10 条件概率	28
10.1 计算	29
10.2 性质	30
10.3 伯努利模型	30
11 随机变量及分布	31
11.1 总体与样本	32
12 大数定律	32
12.1 切比雪夫大数定律	33
13 抽样分布	33
13.1 t 分布	35
13.2 F 分布	36
14 正态总体下的抽样分布	38

15 参数估计	41
15.1 点估计	41
15.2 矩估计	41

Learn 1

1 引言

1.1 确定事件

一定发生的事件

1.2 随机事件

可能发生的事件

1.3 统计规律

大量试验得出的宏观规律

2 事件

2.1 试验

对对象观察、测量、实验

2.2 随机试验

随机试验的条件:

1. 在相同条件下可重复
 2. 结果不止一个
 3. 试验前无法预测出现的实验结果
- 使用 E 代表随机试验。

2.3 事件

随机试验的每种结果。

2.4 随机事件

可能出现的事件, 用 $A, B, C \dots$ 表示

2.5 基本事件

不能或不必再分的事件（基于试验的事件）

Example. 扔一次骰子，实验目的为：骰子朝上的点数

基本事件为：出现 1, 2, 3, 4, 5, 6 点。

Example. 扔一次骰子，实验目的为：骰子的位置

此时出现的点数不是基本事件。

Example. 扔一次硬币，实验目的为：硬币朝上的面

基本事件为：出现正面或反面。

Example. 扔一次硬币，实验目的为：硬币某根已知的轴线与已知直线的夹角

基本事件为：夹角 $\theta \in [0, 2\pi]$

此时正面朝上与反面朝上不是基本事件。

2.6 复合事件

由基本事件复合而成的事件

Example. 扔一次骰子，点数小于 7 点表示为：

$$\Omega = \{x | x < 7\}$$

点数大于 7 点表示为：

$$\emptyset = \{x | x > 7\}$$

2.7 必然事件

一定发生的结果，用 Ω 表示

2.8 不可能事件

不可能发生的结果，用 \emptyset 表示

Example. 扔一次骰子，点数大于 7 点为不可能事件

2.9 样本空间

所有基本事件的集合（实验目的确定），与必然事件相似，用 Ω 表示。

2.10 样本点

样本空间中的元素，即基本事件，用 ω 表示。

Example. 扔硬币研究某面朝上的样本空间： $\Omega = \{\text{正}, \text{反}\}$

样本点： $\omega_1 = \text{正面朝上}$ ， $\omega_2 = \text{反面朝上}$

Example. 扔一个骰子研究某点朝上的样本空间：

$$\Omega = \{x | x \in [1, 6], x \in \mathbb{R}\}$$

样本点：

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Example. 扔两个硬币，研究朝上的面，样本空间为：

$$\Omega = \{(x, y) | (0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$$

或：

$$\Omega = \{(x, y) | x, y \in \{0, 1\}\}$$

Notation. 样本空间可以是无限集。

Example. 在 $[0, 1]$ 内扔一个质子，求其坐标。

其样本空间为：

$$\Omega = \{x | x \in [0, 1]\}$$

Notation. 质子/点：无大小

Example. 向平面扔一个点：

$$\Omega = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

3 事件的集合表示

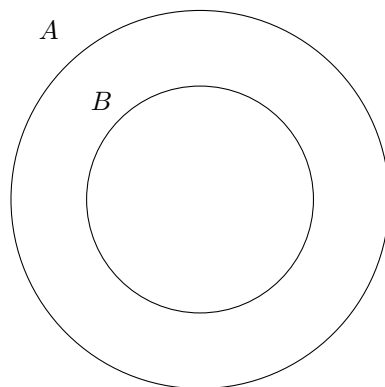
集合 (set)： $A = \{2, 4, 6\}$ 等。

Notation. Ω 与必然事件、样本空间等同， \emptyset 与不可能事件、空集等同。

任何事件都是 Ω 的子集， \emptyset 是所有事件的子集。

4 事件间的关系

4.1 包含

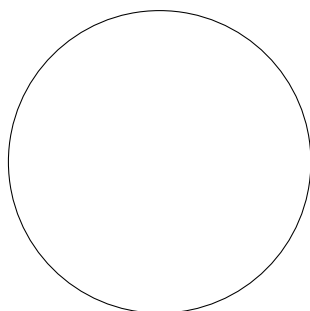


$$B \subset A \text{ or } A \supset B$$

A 发生必然有 B 发生，且有：

$$\forall A, \emptyset \subset A \subset \Omega.$$

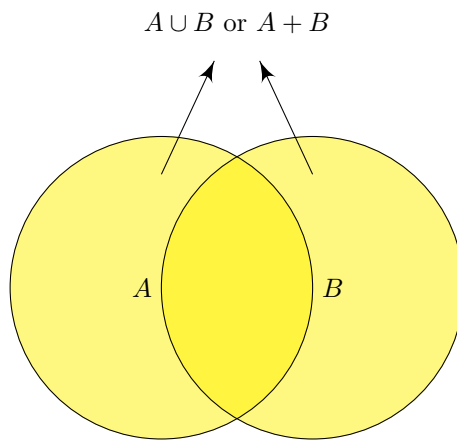
4.2 相等



$$B \subset A \text{ and } A \subset B$$

称 A 与 B 相等。

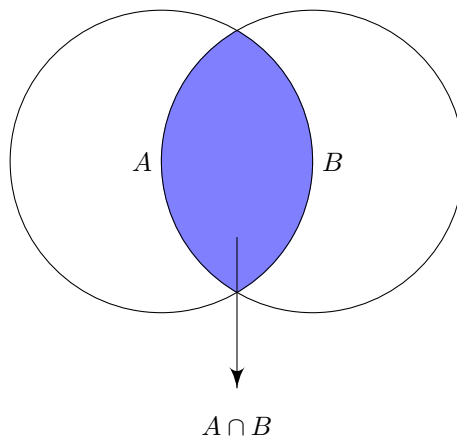
4.3 并与和



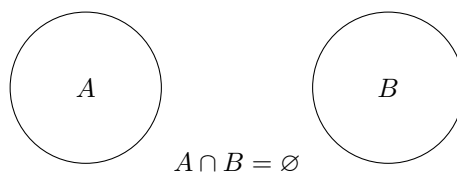
$A \cup B$: (并/和) A 与 B 至少有一个发生

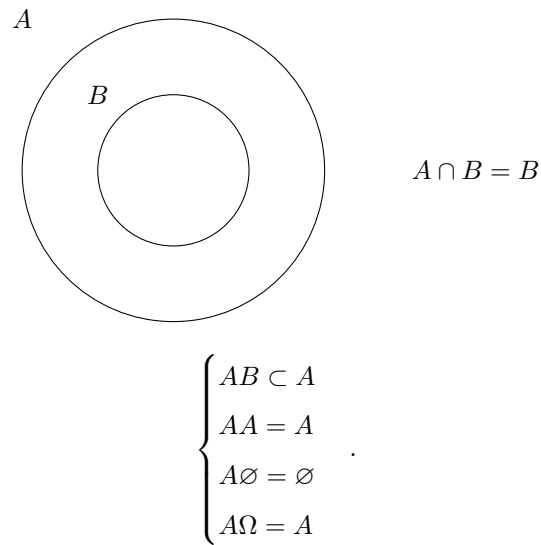
$$\left\{ \begin{array}{l} A + B \subset A, \\ A + A = A, \\ A + \emptyset = A, \\ A + \Omega = \Omega. \end{array} \right.$$

4.4 交与积



$A \cap B$: (交/积) A 与 B 同时发生





Definition. 无限可列个：能按某种规律排成一个序列

Example. 自然数无限可列： $0, 1, 2, \dots$

Example. 整数无限可列： $0, 1, -1, 2, -2, \dots$

Example. 有理数：能写成 $\frac{p}{q}$ 的数

$0.\dot{5}\dot{6}$ 可以写为： $\frac{56}{99}$

$0.1\dot{2}$ 可以写为： $\frac{11}{90}$

有理数无限可列： $0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \dots$

Example. 实数集、平面点集非无限可列。

以下定义：

Definition. n 个事件互斥时：

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

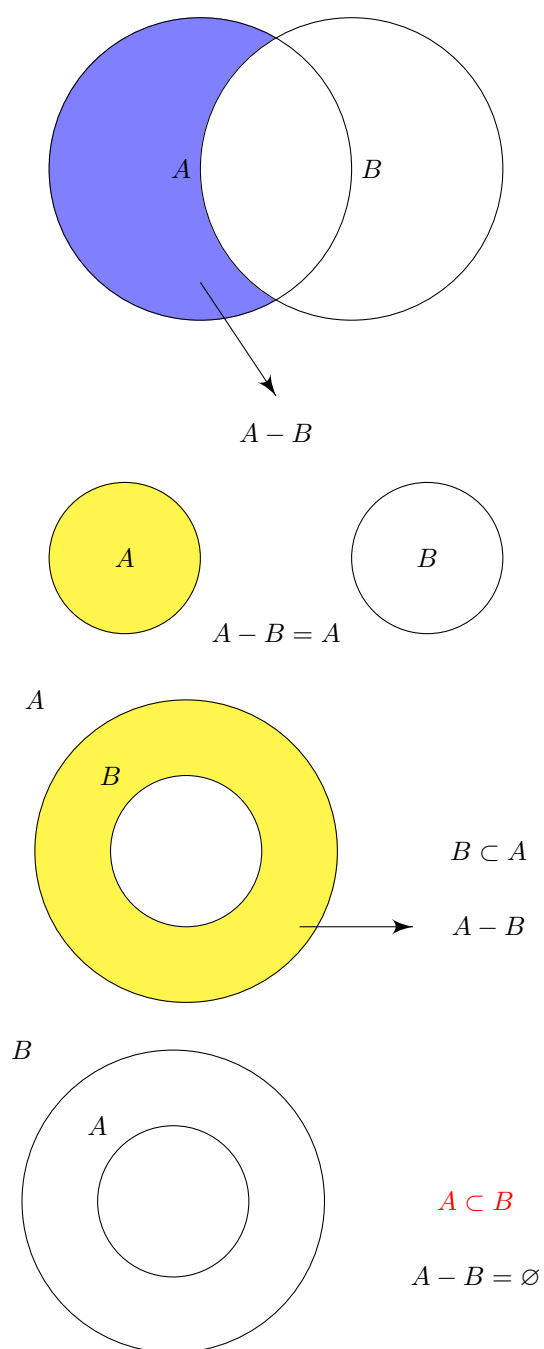
n 个事件同时发生：

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

该定义支持无限可列个。

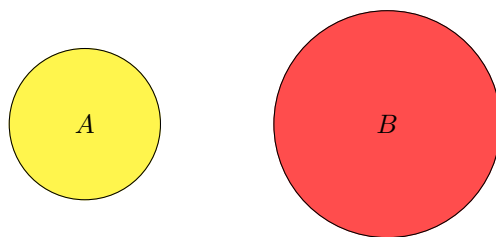
4.5 差

$A - B$: A 发生而 B 不发生。



4.6 互不相容

A 与 B 不同时发生, 即: $AB = \emptyset$



$$A \cap B = \emptyset$$

n 个事件:

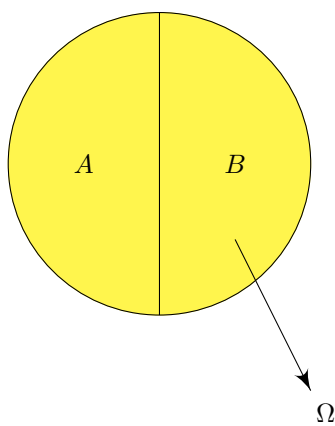
$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

互不相容, 则:

$$\forall i, j : A_i A_j = \emptyset.$$

4.7 对立

$$AB = \emptyset \text{ 且 } A \cup B = \Omega$$



记作:

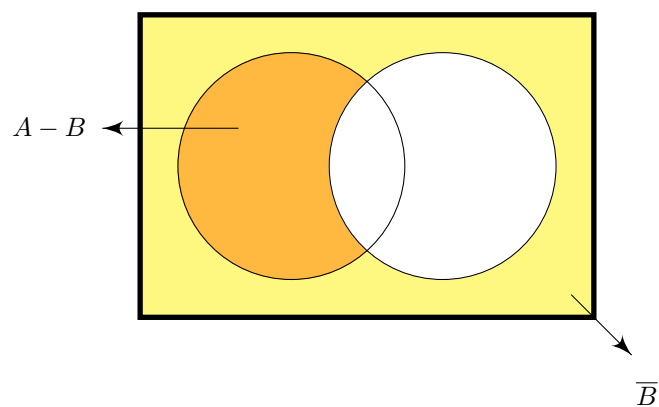
$$A = \overline{B}.$$

或:

$$B = \overline{A}.$$

由此可得:

$$\begin{cases} \overline{\overline{A}} = A \\ A - B = A - AB = A\overline{B} \end{cases}.$$

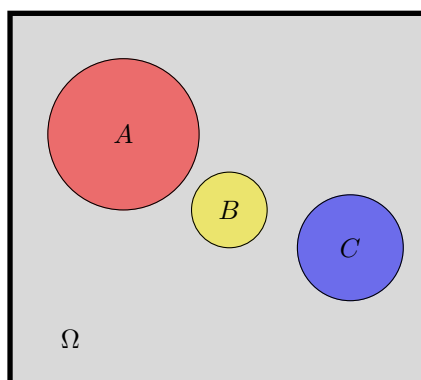


Notation. 若两事件对立，则一定互不相容.

互不相容的事件不一定对立.

Notation. 互不相容适用于多个事件.

对立只适用于两个事件.



Notation. 互不相容：不能同时发生，但可以都不发生

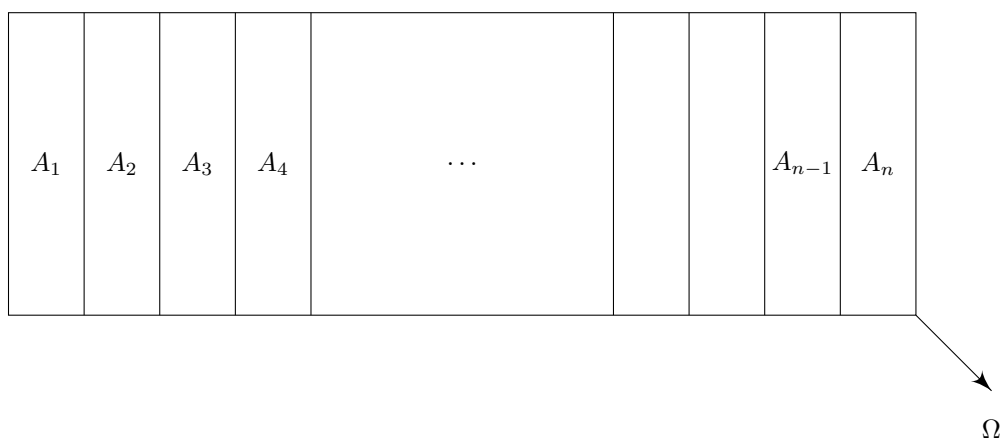
对立：必须有一个发生

4.8 完备事件组

A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容，且

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

则为完备事件组。



5 事件间的运算律

5.1 交换律

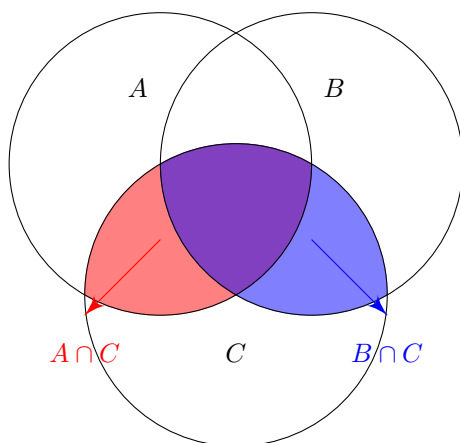
$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}.$$

5.2 结合律

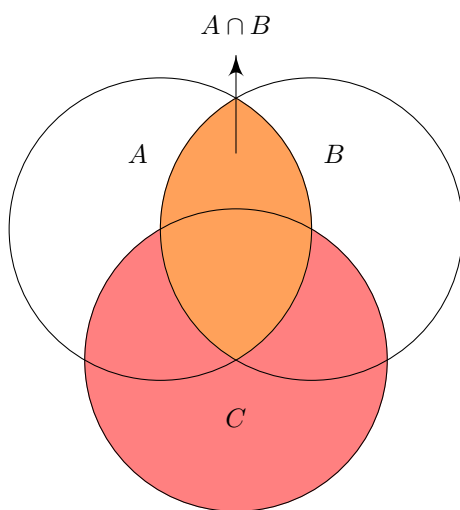
$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}.$$

5.3 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

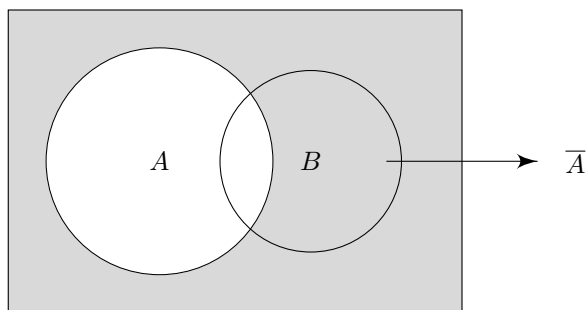


$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

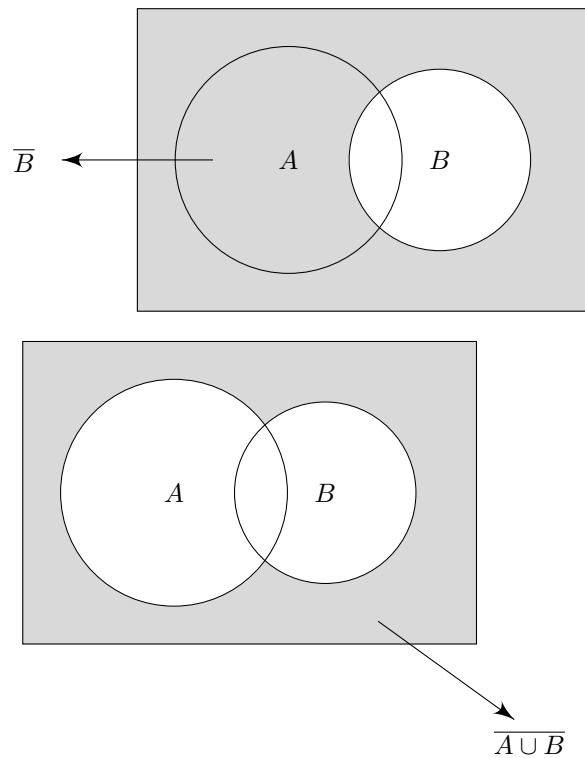


5.4 对偶律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$



Learn 1



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

记法：

1. 画图
2. 长线变短线，开口换方向
3. 事件定义

Notation. 多个事件的对偶律：

$$\begin{cases} \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \\ \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} \end{cases}.$$

Example. A, B, C 是试验 E 的随机事件，用符号表示以下事件：

1. 只有 A 发生： $A\bar{B}\bar{C}$
2. A 发生： A
3. A, B, C 只有一个发生： $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
4. A, B, C 同时发生： ABC
5. A, B, C 至少一个发生： $A + B + C$
6. A, B, C 至多一个发生： $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC$
7. A, B, C 恰有两个发生： $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$
8. A, B, C 至少两个发生： $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$ 或 $AB + BC + AC$

Example. 从产品中抽查，不放回，一共取了三次： A_1, A_2, A_3 代表三次取得合格品：

1. 三次都合格： $A_1 A_2 A_3$
2. 至少一次合格： $A_1 + A_2 + A_3$
3. 恰有两次合格： $A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$
4. 最多一次合格： $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$

Example. 射击三枪, $A_i, i = 1, 2, 3$ 表示第 i 次击中目标，解释以下事件：

1. $A_1 + A_2$ ：前两次至少击中一次
2. \bar{A}_2 ：第二次不击中
3. $A_1 + A_2 + A_3$ ：至少击中一次
4. $A_1 A_2 A_3$ ：全部击中
5. $A_2 - A_3$ ：第二次击中而第三次不击中
6. $\overline{A_1 + A_3} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_3$ （使用对偶律）：第一次和第三次不击中
7. $\overline{A_1 + A_3}$ ：第一次和第三次至少一次未能击中

Learn 2

6 排列组合

1. 加法原理：完成事件有多类方案
2. 乘法原理：完成事件分多步

Example. 有三种馒头，四种米饭

加法原理：只吃一种，共 7 种

乘法原理：先吃馒头，后吃米饭，共 12 种

6.1 排列

1. 不重复排列

从 n 个不同元素中取出 m 个排列，不放回

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Example. $P_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$

2. 全排列

$$P_n^n = n!.$$

Example. $P_0^0 = 0! = 1$

3. 重复排列

从 n 个不同元素中取出 m 个排列，可放回

$$(P_n^m) = n^m.$$

6.2 组合

从 n 个不同元素中取出 m 个，不排列

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

$$\begin{cases} C_n^m = C_n^{n-m} \\ C_n^n = C_n^0 = 1 \end{cases}.$$

Example. 在书架上有序放置五本书，求其顺序为 1, 2, 3, 4, 5 的概率：

总样本点个数： P_5^5

目标事件样本点个数：2（顺序、逆序）

概率：

$$P = \frac{2}{P_5^5} = \frac{1}{60}.$$

Example. 有四个邮箱，两封信，求：

1. 前两个邮箱各有一封的概率

总样本点个数： $4 \times 4 = 16$

第一个邮箱有一封信且第二个邮箱有一封信的样本点个数： $P_2^2 = 2$ （第一封信前往 1, 2，第二封信前往 2, 1）

概率：

$$P = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

2. 第二个邮箱恰有一封信的概率

事件：从两封信中抽一封放到邮箱 2 中，剩余的 1 封信在除 2 以外的三个邮箱中选一个放入

即：

$$C_2^1 C_3^1 = 6.$$

概率：

$$P = \frac{C_2^1 C_3^1}{4 \times 4} = \frac{3}{8}.$$

3. 两封信不在一个邮箱内的概率

事件：一封信随机投入一个邮箱，另一封信投入剩余的三个邮箱

概率：

$$P = \frac{4 \times 3}{4 \times 4} = \frac{3}{4}.$$

或：1- 信在同一个邮箱的概率

$$= 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$$

Example. 有 5 白 4 黑共 9 个球，任取 3 个球，求：

1. 取出 2 白 1 黑的概率：

$$P = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3}.$$

2. 全是白球的概率：

$$P = \frac{C_5^3}{C_9^3}.$$

3. 颜色相同的概率：

$$P = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_9^3}.$$

4. 颜色不同的概率：

$$P = \frac{C_5^1 C_4^2}{C_9^3} + \frac{C_5^2 C_3^1}{C_9^3}.$$

Example. 有 a 个白球， b 个黑球

1. 任取一个是白球的概率：

$$P = \frac{a}{a+b}.$$

2. 接连取出 m 个球 ($m \in [1, a+b]$)，第 m 个是白球的概率：

法 1：将所有球排为一排，为全排列： $(a+b)!$

要使第 m 个球是白球：

先任从白球中拿一个放入该位置，其他的球全排列

$$P = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}.$$

法 2：只取 m 个球

从 $a+b$ 个中取出 m 个并排好： P_{a+b}^m

要使第 m 个是白球，单独挑一个白球放在第 m 个上

然后在剩余的球中取出 $m-1$ 个并排好： P_{a+b-1}^{m-1}

概率：

$$P = \frac{P_{a+b-1}^{m-1} \times a}{P_{a+b}^m} = \frac{a \times \frac{(a+b-1)!}{(a+b-1-(m-1))!}}{\frac{(a+b)!}{(a+b-m)!}} = \frac{a}{a+b}.$$

法 3. 先取第 m 个位置的球

一共有 $a+b$ 个球，选 a 个白球中的一个放入即可：

$$P = \frac{a}{a+b}.$$

7 事件的概率

7.1 概率的基本描述

发生 A 事件的可能性大小称作概率，记作 $P(A)$.

Example. 抛一枚硬币，正面朝上的概率为： $P(A) = P(\bar{A}) = 0.5$

性质：

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A) \in [0, 1]$

7.2 古典概率模型

古典概率模型应满足两个条件：

1. 样本空间中存在有限个样本
2. 所有样本点出现的可能性相同（等可能性）

Example. 扔硬币，观察朝上的面

该事件对应的样本空间只有两个样本：正面朝上与反面朝上

正面朝上与反面朝上的可能性相同： $P(A) = P(B) = 0.5$

因此为古典概率模型。

古典概率模型的概率计算：

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\omega(A)}{\omega(\Omega)}.$$

Notation. $N(A)$ ： A 事件所包含的基本事件个数

$\omega(A)$ ： A 事件所包含的样本点个数

Notation. 古典概率模型的特性：

1. 非负性： $P(A) \in [0, 1]$
2. 规范性： $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
3. 有限可加性： $A_1, A_2 \dots A_n$ 互不相容，则：

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

缺点：

1. 有限个结果
2. 等可能性

7.3 几何概率模型

Example. 有一长方形，右边部分的阴影占面积的 $\frac{1}{2}$ ，扔一个质子，落在阴影的概率为 $\frac{1}{2}$.



Example. 一条线段长 3，阴影部分占 $[1, 2]$ ，扔一个质子，落在阴影的概率为 $\frac{1}{3}$.



与几何概率模型有关的元素：

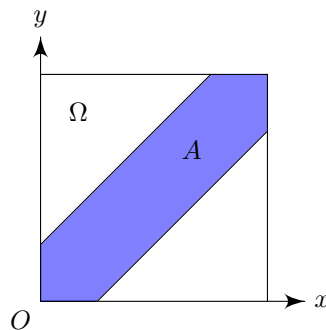
1. 线段
2. 平面
3. 立体

$$P(A) = \frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}.$$

$\mu(G)$ ：度量

Example. 会面问题：

甲乙两人约定从六点到七点见面，先到的人等 15 分钟，且这一小时内甲乙可在任意时刻到达，求甲乙见面的概率。



令 A 为事件两人见面， x 为甲到达的时间， y 为乙到达的时间， A 发生的情况如下：

1. 甲先到，乙后到，即：

$$y > x, y - x \leq 15.$$

2. 乙先到，甲后到，即：

$$y < x, x - y \leq 15.$$

即：

$$|y - x| \leq 15.$$

如图：

$$S_A = 60 \times 60 - 45 \times 45 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1575.$$

$$S_\Omega = 60 \times 60 = 3600.$$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}.$$

Example. 蒲丰投针问题：

有两条平行线，距离为 d ，朝平面内投掷长度为 l ($l < d$) 的针，求针与任意一个平行线相交的概率

假设 x 表示针的中点离最近的一根线的距离，有：

$$x \in \left[0, \frac{d}{2}\right].$$

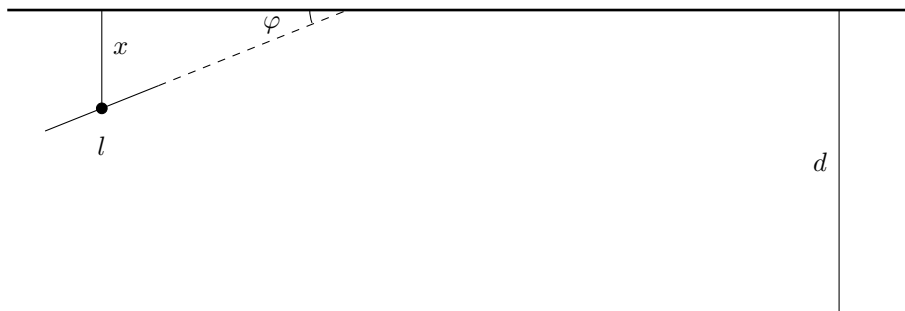
即针的一部分可以出来，但针的中点不能出来。

假设 φ 是针与线的夹角，有：

$$\varphi \in [0, \pi].$$

因此该事件全集写为：

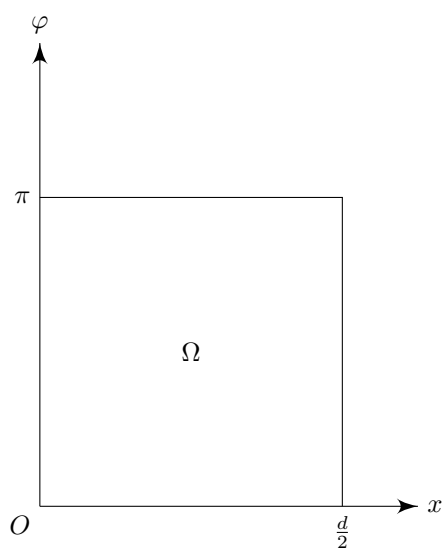
$$\Omega = \left\{ (\varphi, x) \mid \varphi \in [0, \pi], x \in \left[0, \frac{d}{2}\right] \right\}.$$



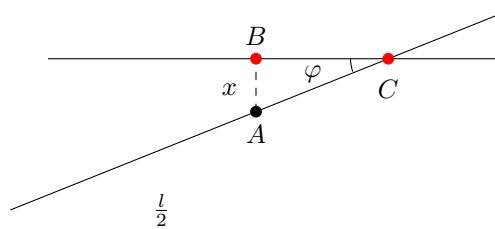
Notation. 针的左右位置并不体现，但上下位置用 x 体现出来。

在坐标轴中绘制出全集图像：

判断相交条件：



放大观察：



可得相交的条件：

$$AC \leq \frac{l}{2}.$$

即：

$$\frac{x}{\sin(\varphi)} \leq \frac{l}{2}.$$

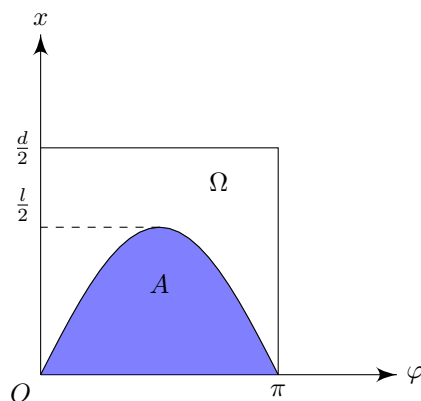
即：

$$x \leq \frac{l}{2} \cdot \sin(\varphi).$$

即事件发生可写做：

$$A = \left\{ (\varphi, x) \mid \varphi \in [0, \pi], x \in \left[0, \frac{l}{2} \cdot \sin(\varphi) \right] \right\}.$$

在坐标轴上绘制该区域：



即有：

$$P = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$

使用定积分求 S_A ：

$$S_A = \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin(\varphi) d\varphi = l.$$

$$S_\Omega = \frac{d}{2} \cdot \pi.$$

$$P = \frac{l}{\frac{d}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Remark. 蒙特卡洛方法：

实际实验时，使用了 N 根针，有 n 根落在线上，频率为

$$P_0 = \frac{n}{N}.$$

由蒙特卡洛方法有 $P_0 \approx P$ ，即：

$$\frac{2l}{\pi d} \approx \frac{n}{N}.$$

$$\pi \approx \frac{2lN}{nd}.$$

即：通过蒙特卡洛方法，设定一个未知数，通过计算得知包含该未知数的概率，实验得到频率，可以计算出该未知数的近似值。

Notation. 几何概率模型特性：

完全可加性 (A_i 彼此互不相容)：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

8 频率与概率

频率：看一个事件是否发生，做 n 次实验，发生了 m 次，记为：

$$\omega_n(A) = \frac{m}{n}.$$

Example. 扔硬币 100 次，正面朝上 54 次

频率：

$$\omega_{100} = \frac{54}{100} = 0.54.$$

概率：

$$P = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Notation. 频率特性：

1. 非负性：

$$\omega_n(A) \in [0, 1].$$

2. 规范性：必然事件的频率等于 1，不可能事件频率等于 0，即：

$$\omega_n(\Omega) = 1, \omega_n(\emptyset) = 0.$$

3. 可加性：若 A_1, A_2, \dots, A_m 互不相容，则：

$$\omega_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m \omega_n(A_i).$$

Notation. 随着实验次数增多，频率会逐渐接近于一个值

这个值称作统计概率

如扔硬币正面朝上的频率会接近于 0.5

9 公理化

提到了四种定义：

1. 描述
2. 古典
3. 几何
4. 统计

这些定义均含有三个性质：

1. 非负性
2. 规范性
3. 可加性

公理化尝试提出公理，找到其中相同的部分并将其统一

9.1 公理

Axiom. 非负性:

$$P(A) \in [0, 1].$$

Axiom. 规范性:

$$P(\Omega) = 1.$$

Axiom. 可加性:

A_1, A_2, \dots 互不相容, 则:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

9.2 性质

Rule. $P(\emptyset) = 0$

证明.

$$\Omega = \Omega + \emptyset + \emptyset + \dots$$

$$P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset + \emptyset + \dots).$$

由于 Ω 与 \emptyset 互不相容, 所以由无穷可加性:

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots = 0.$$

由非负性: $P(\emptyset) \in [0, 1]$, 即: $P(\emptyset) = 0$ □

Rule. 有限可加性: A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容, 则:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

证明. 有 A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容, 再接上无穷多个 \emptyset 也互不相容

由完全可加性可得:

$$\begin{aligned} & P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \emptyset + \emptyset + \dots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \end{aligned} \tag{1}$$

即: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ □

Rule. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

证明. A 和 \bar{A} 不相容, 且 $A + \bar{A} = \Omega$, 则:

$$P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

即: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

□

Corollary. A_1, A_2, \dots, A_n 为完备事件组, 利用有限可加性:

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Rule. $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

证明. 令 $A = (A - B) \cup AB$

由于 $A - B$ 和 AB 互不相容, 由有限可加性:

$$P(A) = P((A - B) \cup AB) = P(A - B) + P(AB).$$

即 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

□

Rule.

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

and

$$P(A) \geq P(B)$$

if

$$B \subset A.$$

证明. 由 $B \subset A$ 可得:

$$P(AB) = P(B).$$

即 $P(A - B) = P(A) - P(B)$

由非负性:

$$P(A - B) = P(A) - P(B) \geq 0.$$

即: $P(A) \geq P(B)$

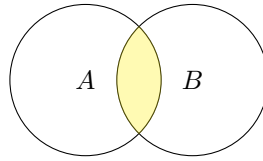
□

Rule. 加法公式 (very important)

对 $\forall A, B$ 有:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明. 画图如下:



$P(A) + P(B)$ 会多加一次 $P(AB)$ (图中黄色部分), 因此减去即可。 \square

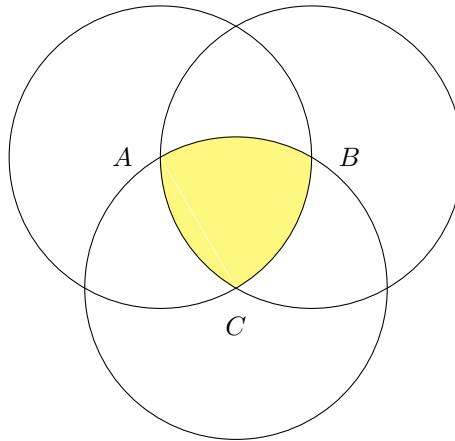
Notation. A, B 不相容时该公式也成立: $P(AB) = P(\emptyset) = 0$

即有限可加性: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Example. 三个事件相加:

$$\begin{aligned} &P(A + B + C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC). \end{aligned}$$

证明. 画图如下, 图示部分为 $P(ABC)$:

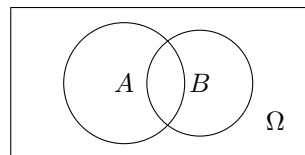


当 $P(A) + P(B) + P(C)$ 时, 图示部分被重复累加了 3 次, 减去 $P(AB) + P(BC) + P(AC)$ 后图示部分被减去了 3 次, 因此加上 $P(ABC)$ 即可。 \square

9.3 例题

Example. $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3, P(A + B) = 0.6$, 求 $P(A\bar{B})$

画图如下:



即 $P(AB) = 0.1$, $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.3$
 或: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
 即: $P(AB) = P(A+B) - P(A) - P(B) = 0.1$
 后续同上。

Example.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}.$$

且

$$P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}.$$

求 A, B, C 至少一个发生的概率和 A, B, C 都不发生的概率

$$\begin{aligned} &P(A+B+C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= \frac{3}{4} - 0 - \frac{1}{16} * 2 + P(ABC) \\ &\text{由于 } P(ABC) \in P(AB) \\ &\text{所以: } P(ABC) \leq P(AB) = 0, \text{ 即: } P(ABC) = 0 \\ &\text{即:} \end{aligned}$$

$$P(A+B+C) = \frac{5}{8}.$$

求 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$: 正难则反原则, 可先求出 A, B, C 至少发生一个的概率, 由于两个事件互斥,
 即有: $P(A+B+C) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1$

即:

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = \frac{3}{8}.$$

Notation. 不可能事件的概率为 0, 但反之, 概率为 0 的事件不一定是不可能事件

即: 概率为 0 的事件可能会发生

Example. 朝一条长为 1, 头尾分别是 0, 1 的线上扔一个质子, 扔到一个点 A 的概率为 0, 但该事件可能发生

Example. 有四个白球, 三个黑球, 任取三个球, 求这三个球至少有两个白球的概率

所有的情况: 从七个中取三个

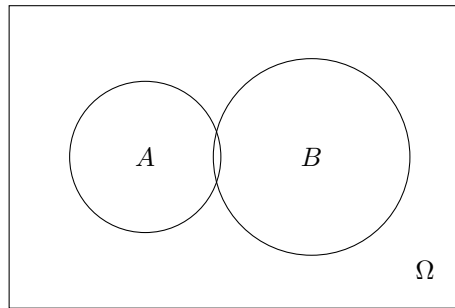
目标: 从四个白球中取两个/三个, 从三个黑球中取一个/不取

即:

$$P(A) = \frac{C_4^2 C_3^1 + C_4^3}{C_7^3}.$$

Example. 一个人看管两台机床, 第一台机床无需看管的概率为 0.9, 第二台为 0.8, 两台都需要看管的概率为 0.02, 求一小时内至少一台需要看管的概率

画图即可:



$$P(A) = 0.1, P(B) = 0.2, P(AB) = 0.02.$$

易得要求的是 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.28$

Example. 一共有 20 个产品，一等、二等、三等个数分别为：6, 10, 4，从中取出 3 个，求至少两件等级相同的概率

正难则反原则：求所有等级都不相同的概率

所有情况： $20 \rightarrow 3$

目标： $6 \rightarrow 1, 10 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 1$

概率：

$$P(\bar{A}) = \frac{C_6^1 C_{10}^1 C_4^1}{C_{20}^3}.$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{15}{19}.$$

Example. 生日问题：一个班上有 n 个学生，求至少两人生日相同的概率

正难则反：求所有人生日不同的概率

所有情况： 365^n

目标： $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - (n - 1))$

概率：

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - (n - 1))}{365^n}.$$

当 $n = 55$ 时， $P(A) \approx 0.99$

即这个班上几乎必然有生日在同一天的人

Learn 3

10 条件概率

Example. 有男女生各 50 人，有 30 个男生和 10 个女生抢到了宋浩老师的月饼，求在吃到月饼的学生中男生占比

分析：总人数 100 人为总样本空间 Ω ，吃到月饼的学生 40 人，为第二个样本空间 Ω_1

其中男生有 30 人，即概率为：

$$P(A) = \frac{30}{40}.$$

Learn 3

Definition. 条件概率: Ω 是样本空间, A, B 是两个事件, 假设 $P(B) > 0$, 求在 B 发生的条件下 A 发生的概率, 称为 A 对 B 的条件概率, 记作:

$$P(A|B).$$

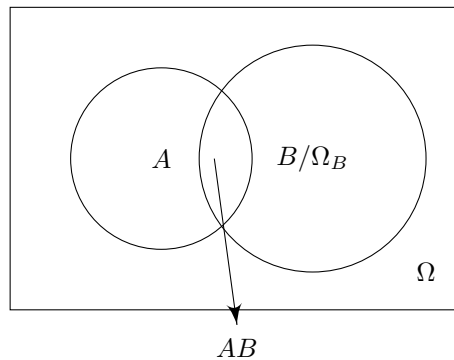
前面提及的概率 $P(A)$ 称作无条件概率, 样本空间为 Ω

条件概率的样本空间发生了变化, $P(A|B)$ 的样本空间变为了 $B = \Omega_B$

10.1 计算

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

图示如下:



Example. 有编号 1-6 的六个球, 随机取一个, 观察号码, B 代表号码为偶数, A_1, A_2 代表取到 1, 2 号, A_3 代表取到大于 4, 求:

1.
$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$
2.
$$P(A_1|B) = \frac{0}{3} = 0$$
3.
$$P(A_2) = \frac{1}{6}$$
4.
$$P(A_2|B) = \frac{1}{3}$$
5.
$$P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
6.
$$P(A_3|B) = \frac{1}{3}$$

Notation. 条件概率和无条件概率一般不相等

10.2 性质

Rule.

$$P(A|B) \geq 0.$$

Rule.

$$P(\Omega|B) = 1.$$

Rule. 可列可加性：对 $A_1, A_2 \dots A_n, \dots$ 不相容，则：

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

Rule. 乘法公式：

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

证明.

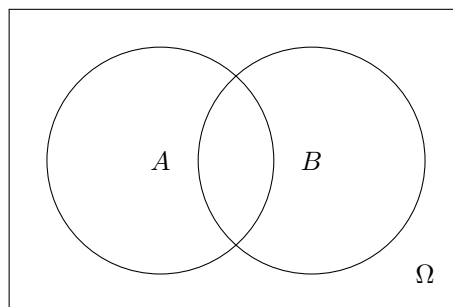
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

移项即得上式。

□

画图解释如下：



Learn 4

10.20

10.3 伯努利模型

Notation. 独立试验序列： E_1, E_2, \dots, E_n 彼此相互独立

n 重独立试验： E_1, E_1, \dots, E_1 做 n 遍，且相互独立，记作 E_1^n

伯努利试验：结果只有两种： $\Omega = \{A, \bar{A}\}$

Example. 抛硬币是伯努利试验

Notation. n 重伯努利试验：做 n 次结果只有两种的独立试验

Corollary. A 发生的概率为 p , $p \in (0, 1)$, 则 \bar{A} 的概率为 $1 - p$, 在 n 重伯努利试验中, A 发生 k 次的概率为:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{1-k}.$$

或:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{1-k} \quad q = 1 - p.$$

该公式称为二项概率公式

Notation. 为何称为二项概率公式:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_n(k) &= \sum_{k=1}^n C_n^k p^k q^{1-k} \\ &= (p + q)^n \\ &= (p + 1 - p)^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

本质为二项式展开

Example. 一批产品的废品率为 0.1, 良品率为 0.9, 每次取一个产品又放回, 共取三次, 求:

1. 恰有一次取到废品的概率
2. 恰有两次取到废品的概率
3. 三次都取到废品的概率
4. 三次都取到良品的概率

1. $C_3^1 0.1^1 \cdot 0.9^2$
2. $C_3^2 0.1^2 \cdot 0.9^1$
3. $C_3^3 0.1^3$
4. $C_3^0 0.9^3$

Example. 彩票每周开奖一次, 中奖率十万分之一, 十年一共买了 520 次彩票, 求十年从未中奖的概率

$$\text{解: } p = 0.99999, P_{520}(520) = C_{520}^{520} 0.99999^{520} \approx 0.9948$$

Notation. 为了更快计算二项公式的结果可以使用两种估算方法

11 随机变量及分布

Definition. 随机变量: 把试验的结果转化为符号语言

即: 用一个映射函数将试验的所有结果映射为数 $X = X(\omega)$

Example. $\{\omega | X(\omega) = a\}$ 表示一个事件, 也可以写成: $\{X = a\}$

事件的概率: $P\{X = a\}$ 或 $P(X = a)$

Learn 5

11.15

11.1 总体与样本

Definition. 总体：全体，分作有限总体和无限总体

令总体为 X ，总体的分布记为 X 的分布

在总体中抽样：样本

Definition. 抽样：在总体中抽一部分样本

假设抽了 n 次：得到样本 X_1, X_2, \dots, X_n ，如果测出了这些样本的值，记为 x_1, x_2, \dots, x_n ，即观测值

Notation. 抽样的方法：简单随机抽样，满足以下条件：

1. 同分布
2. 相互独立

Learn 6

11.16

12 大数定律

Corollary. 切比雪夫不等式：随机变量中任意 X 离期望的距离比 ϵ 大的概率比 $\frac{DX}{\epsilon^2}$ 小

证明. 假设 X 为连续型，由概率定义：

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) = \int_{|x - EX| \geq \epsilon} f(x) dx.$$

这里因为 $|X - EX| \geq \epsilon$ ，同时平方： $(X - EX)^2 / \epsilon^2 \geq 1$ ，即原式可以转为：

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) = \int_{|x - EX| \geq \epsilon} 1 \cdot f(x) dx \leq \int_{|x - EX| \geq \epsilon} \frac{(x - EX)^2}{\epsilon^2} f(x) dx.$$

这个积分有积分域，大小必然比从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 更小（或等于）：因为密度函数 $f(x) \geq 0$ ，因此不需要考虑被积函数正负问题，即：

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - EX)^2}{\epsilon^2} f(x) dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x) dx}{\epsilon^2} = \frac{DX}{\epsilon^2}.$$

□

该结论等价于：

1. $P(|X - EX| < \epsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$

$$2. P(|X - EX| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$$

当 DX 越小时 P 越大, 即方差越小, X 落在外面的概率越小

Example. 一个电网有 10000 盏灯, 每一盏灯打开的概率为 0.7, 求一个晚上开着的灯数量在 6800 到 7200 盏中的概率

解: 期望为 7000: $EX = 7000$, 即 $X \sim B(10000, 0.7)$, 由于二项分布 $EX = 7000, DX = np(1-p) = 10000 \times 0.7 \times (1-0.7) = 2100$

要求: $P\{X \in [6800, 7200]\}$: 转换后可得: $P\{X \in [6800, 7200]\} = P\{|X - 7000| \leq 200\}$

由切比雪夫不等式:

$$P(|X - 7000| \leq 200) \geq 1 - \frac{2100}{200^2} \approx 0.9475.$$

Example. 白细胞平均数为 7300, 标准差为 700, 求白细胞数在 5200 到 9400 的概率

解: $EX = 7300, DX = 700^2 = 490000$, 由切比雪夫不等式:

$$P(5200 \leq X \leq 9400) = P(|X - 7300| < 2100) \geq 1 - \frac{DX}{2100^2}.$$

Notation. 用切比雪夫不等式做题: 两边取到的距离应该相等

Example. 3σ 原则: 求 $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$

解: 由切比雪夫不等式:

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} \quad P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}.$$

Notation. 当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时, 这个概率约等于 0.0027

12.1 切比雪夫大数定律

Definition. 依概率收敛: 有一个随机变量序列, 越到 n 大时 X_n 能取得某数 a 的概率越来越接近 1, 即 X_n 的取值密集在 a 的附近, 记为:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} a.$$

Learn 7

11.23

13 抽样分布

Learn 7

Definition. 卡方分布 $\chi^2(n)$: 标准正态分布平方后的和是卡方分布

即: X_1, X_2, \dots, X_i 相互独立且都是标准正态分布, 则

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n) = \chi^2.$$

Example. X_1, X_2, \dots, X_8 独立同分布于 $N(0, 1)$, 则 $\sum_{i=1}^8 X_i^2 \sim \chi^2(8)$

Corollary. 卡方分布的期望 $EX = n$, 方差 $DX = 2n$

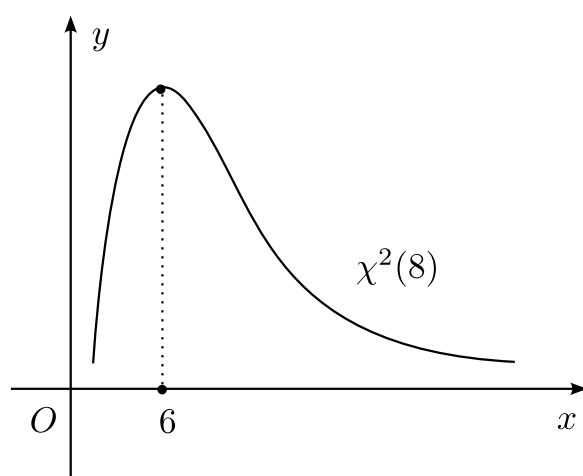


图 1: 卡方分布图像

Corollary. 中心极限定理可得: 如果 $X \sim \chi^2(n)$ 且 n 充分大的时候: $\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$ 近似符合标准正态分布 $N(0, 1)$

Notation. 独立同分布的中心极限定理不管分布种类

Corollary. $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$, 且 X, Y 独立, 则 $X + Y \sim \chi^2(m + n)$

Notation. 推论: $X_i \sim \chi^2(m_i)$, 则

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^n m_i\right).$$

即卡方分布符合可加性

Definition. 上 α 分位数: $P(\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)) = \alpha$: 在分布图某点右边的概率为 α , 这个点的值

Example. $\chi_{0.05}^2(10) = 18.3, \chi_{0.1}^2(25) = 34.4$

上 α 分位数查表可得: n 已知, 确定所需的概率 α

Example. 已知 $X \sim \chi^2(10)$ 求: 当 $P(X > a) = 0.025, P(X < b) = 0.05$ 时的 a, b

解: 由题: $n = 10, \alpha_1 = 0.025$, 查表可得: $\chi_{0.025}^2(10) = 20.5 = a$

易得 $P(X < b) = 0.05 = 1 - P(X \geq b)$ 即 $P(X \geq b) = 0.95 = \alpha_2$, 查表: $\chi_{\alpha_2}^2(10) = 3.94 = b$

Notation. 卡方分布为单峰曲线, $n - 2$ 时取最大值

13.1 t 分布

Definition. t 分布由标准正态分布和卡方分布组成: $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$, 且 X, Y 相互独立, 则 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

Notation. 上 α 分位数: $P(T > t_\alpha(n)) = \alpha$: α 为一个数, 由于 t 分布的对称性可得: $t_\alpha(n) = 1 - t_{1-\alpha}(n)$

Example. $X \sim N(2, 1), (Y_1, Y_2, \dots, Y_4) \sim N(0, 4)$, 且相互独立, 令 $T = \frac{4(X-2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 Y_i^2}}$, 求 T 的分布并求 $P(|T| > t_0) = 0.01$ 时的 t_0

Learn 8

11.24

解: 对 $Y_i: \mu = 0, \sigma = 2$, 先将 Y_i 改为标准正态分布: $\frac{Y_i-0}{2} \sim N(0, 1)$, 写出一个关于 $\frac{Y_i-0}{2}$ 的卡方分布:

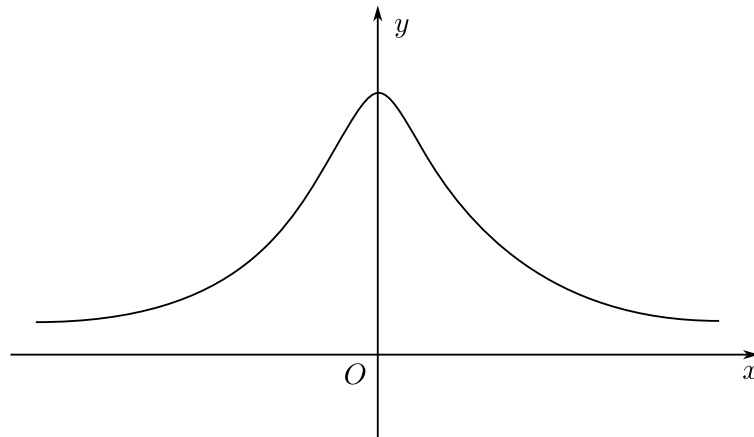
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{Y_i - 0^2}{2} = \frac{\sum_{i=1}^4 Y_i^2}{4} \sim \chi^2(4).$$

对 X 标准化: $\frac{X-2}{1} \sim N(0, 1)$, 由于 t 分布“上正态下卡方”, 所以:

$$\frac{(X-2)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 Y_i^2}{4}}} = \frac{4(X-2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 Y_i^2}} = T \sim t(4).$$

要求 $P(|T| > t_0) = 0.01$: 由 t 分布的对称性: $P(|T| > t_0) = 2P(T > t_0) = 0.01$, 即 $P(T > t_0) = 0.005$; 令 $\alpha = 0.005$, 查表 $t_{0.005}(4)$ 即可

查表得: $t_{0.005}(4) = 4.604$

图 2: t 分布图像

13.2 F 分布

形式: $F(n_1, n_2)$ (共 2 个参数)

Corollary. $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 且相互独立, 则:

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2).$$

同理:

$$\frac{Y/n_2}{X/n_1} \sim F(n_2, n_1).$$

记 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

Example. $X_1, X_2, \dots, X_6 \sim N(0, \sigma^2)$, 求 $\frac{2(X_1^2 + X_2^2)}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}$ 的分布

解: $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 则 $\frac{X_1^2}{\sigma^2} + \frac{X_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$, 同理: $\sum_{i=3}^6 \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4)$

$$\frac{\frac{X_1^2 + X_2^2}{\sigma^2} / 2}{\frac{\sum_{i=3}^6 X_i^2}{\sigma^2} / 4} = \frac{2(X_1^2 + X_2^2)}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2} \sim F(2, 4).$$

Notation. F 分布的上 α 分位数: $P(F > F_\alpha(n_1, n_2)) = \alpha$

Corollary.

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}.$$

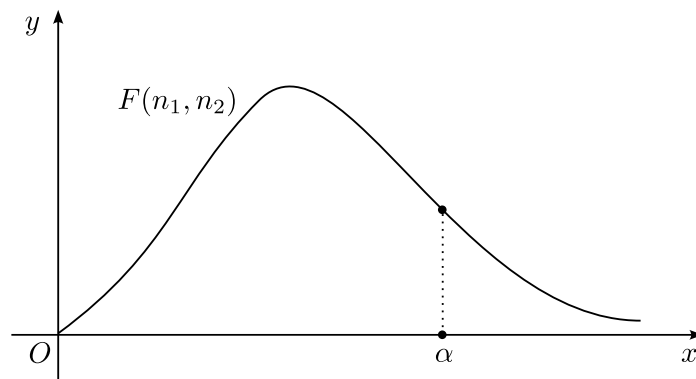


图 3: F 分布图像

证明. 假设 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim (n_2, n_1)$, 求 $P(F > F_{1-\alpha}(n_1, n_2)) = 1 - \alpha$
将两边同时取倒数, 符号反向:

$$\begin{aligned}
 1 - \alpha &= P(F > F_{1-\alpha}(n_1, n_2)) = P\left(\frac{1}{F} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right) \\
 &= 1 - P\left(\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right) \\
 \alpha &= P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right) \\
 \Rightarrow \frac{1}{F} &\sim F(n_2, n_1), \alpha = P\left(\frac{1}{F} > F_{\alpha}(n_2, n_1)\right) \\
 \Rightarrow F_{\alpha}(n_2, n_1) &= \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}.
 \end{aligned}$$

□

Example. $F \sim F(10, 15)$, 求 λ_1, λ_2 是 $P(F > \lambda_1) = 0.01, P(F \leq \lambda_2) = 0.01$

解: 查表可得: $F_{0.01}(10, 15) = \lambda_1 = 3.8$, 由题: $P(F \leq \lambda_2) = P\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{\lambda_2}\right) = 0.01$, 由于 $\frac{1}{F} \sim F(15, 10)$, 则可通过查表得 $F_{0.01}(15, 10)$ 求得 $\frac{1}{\lambda_2}$:

$$\text{得: } \begin{cases} \lambda_1 = 3.8 \\ \lambda_2 = 0.293 \end{cases}$$

Learn 9

11.25

14 正态总体下的抽样分布

Corollary. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且 X_1, X_2, \dots, X_n 为样本, 定义:

1. $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
2. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

结论:

1. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 标准化后 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
2. $E\bar{X} = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$
3. $D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$
4. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$
5. \bar{X} 和 S^2 相互独立

Notation. 均值的方差比原来的分布的方差小: 少量样本的平均数波动会较大 (取到两个很大的 + 取到两个很小的), 大量样本的平均数波动不大

Corollary. 1. $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$

2. $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

证明. 把 X_i 标准化后求和: $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$, 提取后即得 $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ \square

Notation. 区分: \bar{X} 为样本均值, 自由度为 $n-1$, μ 为总体期望, 自由度为 n ; 样本均值为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 相当于多了一个约束 (多了一个方程), 使得自由未知量少一个

Example.

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

自由未知量为 x_3, x_4

证明. $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$:

需要用到:

1. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$: S 和 σ 的关系
2. $\frac{X}{\sqrt{Y/(n-1)}} \sim t(n-1)$, 其中 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n-1)$

由于 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 构造 t 分布:

$$\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \cdot \sigma}{\sqrt{(n-1)S^2/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1).$$

即结论得证。 \square

以上为一个正态分布总体；以下为两个正态分布总体：

Corollary. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

有两个正态分布总体样本: $\{X_1, X_2, \dots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}\}$, 有以下结论:

1. $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
2. $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$
3. 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时: $T(\bar{X}, \bar{Y}, \mu_1, \mu_2, S_1, S_2)$ 的某个形式为 t 分布, 形式见证明 (太复杂了)

证明. 第一个结论: $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

由一个总体的正态分布结论有: $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n})$, $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n})$, 则由线性可加性:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

接着将这个分布标准化即可:

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

\square

证明. 第二个结论: $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$:

需要用到结论: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

两个卡方分布的比值即为 F 分布:

$$\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1).$$

\square

Notation. t 分布注意: 开根号、除自由度:

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n).$$

F 分布注意: 除参数:

$$\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2).$$

Notation. 某个复杂形式符合 t 分布的证明:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2).$$

或者更直白的形式:

$$T = \frac{\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\right)}{n_1-1+n_2-1}}} \sim t(n_1 - 1 + n_2 - 1).$$

不难发现: 上半部分为结论展示的正态分布, 下半部分中, 卡方分布部分利用卡方分布可加性: $\chi^2(n_1) + \chi^2(n_2) = \chi^2(n_1 + n_2)$, 用 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 组合:

$$\begin{cases} \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 - 1) \\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2).$$

最后通过构造 t 分布将两部分组合即可。

Example. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, \bar{X} 和 S^2 为样本均值和方差, 当 $n = 16$ 时, 求 k 使 $P(\bar{X} > \mu + kS) = 0.95$

解: 把原式转换:

$$P(\bar{X} > \mu + kS) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{16} > k \cdot \sqrt{16}\right).$$

由结论可得 $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{16} \sim t(15)$, 由 t 分布的对称性: $P(T > 4k) = 1 - P(T > -4k)$ 即 $P(T > -4k) = 0.05$, 因此查表 $t_{0.05}(15)$ 即可

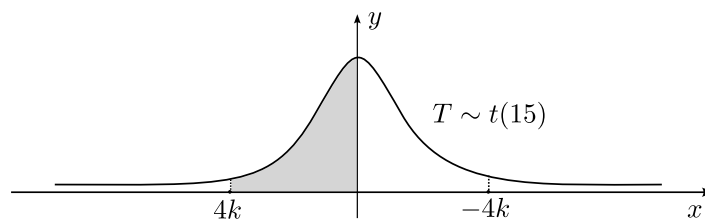


图 4: t 分布对称性

15 参数估计

Definition. 参数：对于分布的参数举例如下：
通过抽样 X_1, X_2, \dots, X_n 构造函数

表 1: 参数-分布关系	
总体分布	总体参数
$N(\mu, \sigma^2)$	μ, σ^2
$P(\lambda)$	λ
$U[a, b]$	a, b

Example. 抽取 50 个同学量身高，构造身高函数，通过观测值得到的估计参数来接近理论上的参数

Definition. 参数空间：参数的取值范围

15.1 点估计

Definition. 点估计：估计值为一个数
对比区间估计：估计值是一个区间

点估计构造的函数记为 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$

15.2 矩估计

Definition. 使用随机变量的矩估计参数
使用样本矩代替总体的矩，一般使用一阶矩样本矩代替一阶总体矩，二阶样本矩代替二阶总体矩

对于总体：

一阶（中心/原点）矩 $EX \leftarrow$ 一阶样本矩 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
二阶矩 $EX^2 \leftarrow$ 二阶样本矩 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

Example. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，取样 X_1, X_2, \dots, X_n ，使用矩估计估计参数 μ, σ

解： $EX = \mu, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ （一阶样本 \rightarrow 一阶总体）

即： $\hat{\mu} = \bar{X}$ （估计值）

同理： $DX = E(X - EX) = EX^2 - (EX)^2$ ，转换后： $EX^2 = DX + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2$ ，而
 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

即: $\hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = A_2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = A_2 - \hat{\mu}^2$ (估计值)

算出 $\hat{\sigma}$ 即得:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2} \end{cases} .$$