Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by 李漫漫
Note by THF

2024 年 11 月 28 日

目录

Lecture 1

09.03

概述

资源

公众号：狗熊会、大数据文摘，好玩的数学
MOOC：爱课程，Coursera，Edx，网易公开课等

教师要求

教材：概率论与数理统计第二版
参考：The Lady Tasting Tea，程序员数学之概率统计，...
学习目的：自问自答，自言自语
考核及成绩组成：
期中（10）
作业与考勤（10）
期末（70）
MOOC（10）

课程简介

概率：Probability
统计：Statistics
概率论与数理统计：Probability theory and Mathematical statistics

Notation. 第一章重要但不突出

从概率到概率论：新增时间（随机事件、样本空间变化）
从统计到数理统计：统计最开始为记录性质，后来衍生出预测，通过数学模型引入数理统计
类似的还有政府统计、经济统计等
2000-2015 年间，IT 时代逐渐转换为 DT(Data Technology) 时代，大数据逐渐占时代主体

概率论部分

1 第一章

1.1 随机事件

1.1.1 现象

确定性现象：一定条件下必然发生

随机现象强调统计规律性

Notation. 统计规律性:

1. 每次试验前不能预测结果
2. 结果不止一个
3. 大量试验下有一定规律

Example. 星际旅行时宇航员看到的现象不是随机现象:

对星际旅行的人而言，无法完成大量试验

宇航员观测到的结果无规律，只能称为不确定现象 (Uncertain)

Example. 扔一个骰子不能预测结果，但可以知道结果是 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的一个，因此观察扔骰子是随机现象 (Random)

1.1.2 随机试验

随机试验 (E): 研究随机现象时进行的实验或观察等

Notation. 随机试验的特性:

1. 可以在完全相同的条件下重复进行
2. 试验的可能结果在试验前已知
3. 试验的结果不可预测

1.1.3 样本

在随机试验中，不可再分的最简单结果成为样本点 ω，全体样本点组成样本空间 Ω

Notation. 随机事件是基本事件的集合

Example. 扔骰子存在 6 个基本事件，可以产生 2^6 个随机事件

其中样本空间 $\Omega = \{x | x \in [1, 6], x \in \mathbb{R}\}$

Example. 1. 射击时用 ω_i 表示击中 i 环，样本空间为:

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}\}.$$

2. 微信用户每天收到信息条数的取值范围是 $[0, +\infty)$，样本空间为无限集:

$$\Omega = \{N | N \geq 0, N \in \mathbb{R}\}.$$

3. 电视机的寿命样本空间为 $\Omega = \{t | t > 0\}$，为连续的非负实数集
4. 投掷两枚硬币，样本空间为 $\Omega = \{(x, y) | x, y = 0, 1\}$，其中 $0, 1$ 分别代表正面和背面

Notation. 1. 样本点可以不是数

2. 样本空间可以是无限集

1.1.4 随机事件

1.2 事件关系与运算

1.1. $A \subset B$：A 发生必然 B 发生

1.2. $A = B$ ：$A \subset B, B \subset A$

2. $A \cup B$：A 和 B 至少有一个发生

2.1 $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_1$

3. $A \cap B$：A 和 B 只发生一个

4.1. A, B 互斥：不能同时发生：$AB = \varnothing$

4.2. A, B 对立：非此即彼：$A \cup B = \Omega$

5. $A - B$：$A\bar{B}$ 或 $A(\Omega - B)$，或 A 发生但 B 不发生

Notation. $A - B = A\bar{B} \subset A$，$B - A = B\bar{A} \subset B$

当 $AB = \varnothing$ 时，$A - B = A, B - A = B$

Notation. $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$，且 $P(\Omega) + P(\varnothing) = 1$ ，即 Ω 与 $\varnothing$ 互斥

6. 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

7. 分配律：$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$ ，$(AUB)C = AC \cup BC$

8. 交换律：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

Notation. 德摩根律：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

Example.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}.$$

$$\overline{(A \cup B) \cup C} = \overline{A \cup B}\bar{C} = \ldots.$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

1.3 事件的概率

概率分类：

$$\begin{cases} \text{主观概率} \\ \text{统计概率} \\ \text{古典概型} \\ \text{几何概型} \end{cases}.$$

Notation. 德摩根、蒲丰、皮尔逊、维纳均进行过投掷硬币的试验，随着试验次数的增加，出现正面的频率逐渐接近 0.5

大数定律说明，该事件的概率为 0.5

Definition. 统计概率：A 为试验 E 的一个事件，随着重复次数 n 的增加，A 的频率接近于某个常数 p，定义事件 A 的概率为 p，记为 $P(A) = p$

频率的特性：

1. 非负性：$f_n(A) \in [0,1]$
2. 规范性：$f_n(\Omega) = 1$
3. 有限可加性：A_i 两两互斥，则 $f_n\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n f_n(A_i)$

Definition. 主观概率：人对某个事件发生与否的可能性的估计

Definition. 完备事件组：$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥，且

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = 1.$$

或

$$\sum_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

则称 $A_1 \to A_n$ 为完备事件组（不重不漏）

Example. $A, \bar{A}$ 是完备事件组

1.3.1 古典概型

古典概型特点：有限等可能性（基本事件数有限，基本事件发生的可能性相等）

Notation. 概率计算：

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Example. 某年级有 6 人在 9 月份出生，求 6 个人中没有人同一天过生日的概率

基本事件总数：30^6

目标事件：$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = P_{30}^6$

概率：

$$P(A) = \frac{\mathrm{P}_{30}^6}{30^6}.$$

Example. 有 N 个乒乓球中有 M 个白球、$N - M$ 个白球，任取 $n(n < N)$ 个球，分有放回和不放回，求取到 m 个黄球的概率

1. 不放回：

基本事件总数：C_N^n

目标事件：$\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}$
概率：

$$P=\frac{\mathrm{C}_M^m\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{C}_N^n}, n=\max\left\{0,n-(N-M)\right\},\ldots,\min\left\{n,M\right\}.$$

2. 有放回：

$$P=\frac{\mathrm{C}_n^m M^m\left(N-M\right)^{n-m}}{N^n}=\mathrm{C}_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}, m\in\left[0,n\right].$$

注意到该概率为伯努利分布 $\mathrm{C}_n^m B\left(n,\frac{M}{N}\right)$

匹配问题：

Example. 麦克斯韦-玻尔兹曼统计问题：
n 个质点随机落入 $N\left(N>n\right)$ 个盒子，盒子容量不限，设 A 表示指定的 n 个盒子各有一个质点，B 表示恰好有 n 个盒子装一个质点
基本事件总数：N^n
A 考虑顺序，即：

$$P\left(A\right)=\frac{n!}{N^n}.$$

同理：

$$P\left(B\right)=\frac{\mathrm{C}_N^n}{N^n}.$$

1.3.2 几何概型

几何概型特点：使用事件所对应的**几何度量**计算

$$P\left(A\right)=\frac{m\left(A\right)}{m\left(\Omega\right)}.$$

Notation. 度量：面积、体积、长度等描述几何量大小的测度方式

Example. 地面铺满 2 dm 的地砖，向地面投掷一个 $r=0.5$ dm 的光盘，求光盘不与边线相交的概率

如图: 课后习题：A 组 8 题，B 组 3 题

Example. 两人相约 8-9 点间在某地相见，先到的人等待 20 分钟后离去，求二人会面的概率
设 (x,y) 分别表示两人到达的时刻
设 G 为样本空间，绘制样本空间：

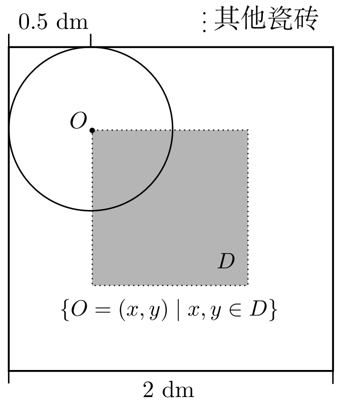
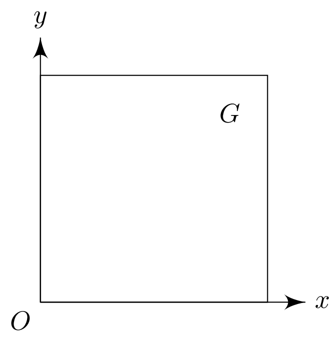


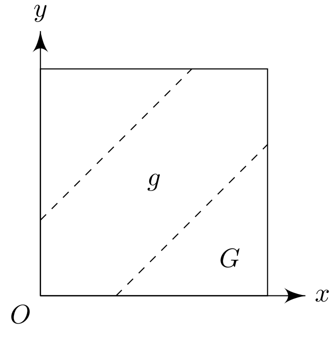
图 1: 例题 1



由题：两人到达的时间之差的绝对值小于 20 分钟（$\frac{1}{3}$ 小时），即：

$$|x-y| \leq \frac{1}{3}.$$

将事件绘制：



$$P(g) = \frac{m(g)}{m(G)} = \frac{S(g)}{S(G)} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \frac{4}{9}.$$

Notation. 几何概型的特点:

1. 非负性:

$$P(A) \in [0,1].$$

2. 规范性:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. 可列可加性:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Lecture 2

1.4 公理化

$$(\Omega, \mathscr{F}, p).$$

Definition. Ω: 随机试验所产生的所有样本点的集合

$\mathscr{F}$: 集合内所有子集为元素的集合

$P(X)$: 概率函数

Axiom. 非负性:

$$P(A) \geq 0, A \in \mathscr{F}.$$

Axiom. 规范性:

$$P(\Omega) = 1.$$

Axiom. 可列可加性: 对两两互斥的事件 $A_1, A_2, \ldots,$

$$P\left(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

从三条公理得出的性质:

Notation. 1. $P(\varnothing) = 0$

2. 有限可加性:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right).$$

3. $P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$
4. $A \subset B \implies P(B - A) = P(B) - P(A)$
5. $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Notation. 6.1.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)$$
$$-P(AC)+P(ABC).$$

6.2.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+i}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}P(A_iA_jA_k)$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right).$$

Example. 从有号码 $1,2,\ldots,n$ 的 n 个球中有放回地取 m 个球，求取出的 m 个球中最大号码为 k 的概率

$$P\{k=1\}=\left(\frac{1}{n}\right)^m.$$

逐个列举计算较复杂，记事件 B_k 为取出的 m 个球最大号码不超过 k，只需保证每次摸出的球都不超过 k 即可：

$$P(B_k)=\frac{k^m}{n^m}.$$

又有 $P(A_k)=P(B_k)-P(B_{k-1})$，且 $B_{k-1}\subset B_k$

所以：

$$P(A_k)=\frac{k^m}{n^m}-\frac{(k-1)^m}{n^m}.$$

Example. 匹配问题：n 个学生各带有一个礼品，随机分配礼品，设第 i 个人抽到自己的礼品称为一个配对，求至少有一个配对的概率

设 A_i 是第 i 个人抽到自己的礼品，A 为目标事件，则：

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}.$$

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{\mathrm{P}_n^2}.$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{1}{\mathrm{P}_n^3}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\frac{1}{n!}.$$

$$P(A)=P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}P(A_iA_j)+\ldots.$$

1.5 条件概率与乘法公式

Definition.

$$P(A) > 0, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

即：在 **A 发生的条件下**，B 发生的概率

Definition. 乘法公式：

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Notation. A, B 独立：$P(AB) = P(A)P(B)$

结合乘法公式：

$$P(B) = P(B|A).$$

$$P(A) = P(A|B).$$

1.6 全概率公式

Corollary. 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为完备事件组，事件 $B \subset \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，则：

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

Notation. 此时完备事件组的情况应该已知，通过完备事件组 A 的辅助可以求得较复杂事件 B 的概率

1.7 贝叶斯公式

Corollary.

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_kB)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}.$$

贝叶斯公式被称为“逆概率公式/后验公式”，其中事件 B 更可能是事件的结果，将事件组 A 看作结果出现的原因，则贝叶斯公式是一个从“结果”推“原因”的可能性的公式

Notation. 对比一般公式：事件 A 导致 B，求 B 发生的概率

贝叶斯公式：事件 A 导致 B，A 中的一个事件 A_i 导致 B 发生的概率

Axiom. 条件概率的公理：

1. 非负性：$P(A) \in [0, 1]$
2. 规范性：$P(\Omega|A) = 1$
3. 可列可加性：

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i|A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

Corollary.

$$P\left(\bar{B}|A\right)=P\left(\Omega-B|A\right)=P\left(\Omega|A\right)-P\left(B|A\right).$$

Corollary.

$$P\left(B_1\cup B_2\right)=P\left(B_1\right)+P\left(B_2\right)-P\left(B_1B_2\right).$$

$$\Longrightarrow\ P\left(B_1\cup B_2|A\right)=P\left(B_1|A\right)+P\left(B_2|A\right)-P\left(B_1B_2|A\right).$$

Corollary. 乘法公式：

$$P\left(ABC\right)=P\left(A\left(BC\right)\right)=P\left(A\right)P\left(BC|A\right)=P\left(A\right)P\left(B|A\right)P\left(C|AB\right).$$

Example. 8 个红球 2 个白球，求前三次结果是“红红白”的概率：

1. 不放回取 3 个（和一次取三个球相同）
所有可能性：$10\times 9\times 8$
目标事件：$8\times 7\times 2$
或使用乘法公式：设 A_i 为第 i 次取到红球，目标事件可表示为 $A_1A_2\bar{A}_3$
概率：

$$P\left(A_1A_2\bar{A}_3\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2|A_1\right)P\left(\bar{A}_3|A_1A_2\right)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{7}{45}.$$

2. 每次取后放回，并加入两个同色的球，取 3 次（不能使用古典概型）
概率：

$$P\left(A_1A_2\bar{A}_3\right)=\frac{8}{10}\times\frac{8}{12}\times\frac{2}{14}=\frac{8}{105}.$$

Example. 某疾病的发病率为 0.0004, 患病检测呈阳性的概率为 0.99, 误诊为阴性的概率为 0.01, 误诊为阳性的概率为 0.05，不患病检测呈阴性概率为 0.95，一个人检测呈阳性，求其患病的概率

设阳性为 A，患病为 B

则：

$$P\left(A|B\right)=0.99, P\left(A|\bar{B}\right)=0.05, P\left(B\right)=0.0004.$$

要求：$P\left(B|A\right)$

使用贝叶斯公式：

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(B\right)P\left(A|B\right)}{P\left(AB\right)+P\left(A\bar{B}\right)}.$$

$$=\frac{P\left(B\right)P\left(A|B\right)}{P\left(B\right)P\left(A|B\right)+P\left(A|\bar{B}\right)P\left(\bar{B}\right)}=0.0079.$$

1.8 独立性

Definition. A, B 独立，则：$P(A|B) = P(A)$

Notation. 证明独立性：

1. $P(A)P(B) = P(AB)$

Notation. 独立事件的特点：

1. A, B 独立有：A, B 所有的组合（包含补集）均独立
2. A, B 独立的充要条件：$P(A|B) = P(A)$ or $P(B|A) = P(B)$
3. $\varnothing$ 与任何随机事件独立，Ω 与任何随机事件独立

对于三个事件相互独立：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(C)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}.$$

对比乘法公式：$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$

Definition. 相互独立：

有 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 事件组，对 $\forall s \in [2, n]$ 个事件 $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_s}$ 均有：

$$P\left(\prod_{n=1}^{s} A_{k_n}\right) = \prod_{n=1}^{s} P(A_{k_n}).$$

称事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立

Definition. 两两独立：对事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ，若任意两个事件独立，则称为两两独立

Notation. 相互独立一定两两独立，反之不一定

Notation. 相互独立事件组的性质：

1. 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，将其中任意部分改为对立事件，事件组仍为相互独立

2. 事件相互独立，将事件组任意分为两组（或多组），对组内事件进行“并、交、差、补”操作后，事件间依然相互独立

独立重复实验

Definition. E_1, E_2 中一个试验的任何结果和另一个试验的任何结果相互独立，则试验相互独立；若 n 个独立试验相互独立且试验相同，称 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 为 n 次独立重复实验，或 n 重独立试验

Example. 扔硬币和掷骰子为独立试验，其中扔硬币为伯努利试验（只有两个结果）

Definition. n 重独立试验 E 中，每次试验都是伯努利试验（可能结果只有两个），称 E 为 n 重伯努利试验

1. 二项概率公式：成功 k 次的概率记为 $P_n(k)$，假定前 k 次成功，后 $n-k$ 次失败，则

$$P_i = p^k (1-p)^{n-k}.$$

指定事件 A 发生的位置有 C_n^k 种，则：

$$P_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

称为二项概率公式

2. 几何概率公式：首次成功恰好发生在第 k 次的概率记为 $G(k)$ ，设前 $k-1$ 次失败，则：

$$G(k) = q^{k-1}p.$$

可以验证：$\sum G(k) = 1$

3. 负二项概率：需要成功 r 次，第 r 次成功恰好发生在第 k 次的概率记为 $G_r(k)$ ，设前 $k-1$ 次试验有 $r-1$ 次成功，则：

$$G_r(k) = \mathrm{C}_{k-1}^{n-1} p^r q^{k-r}.$$

同样有：$\sum G_r(k) = 1$

Lecture 3

2 一维随机变量及其分布

2.1 随机变量及其分布函数

随机变量

$$\text{随机变量}\begin{cases}\text{函数}\\ \text{连续}\end{cases}.$$

Example. 下一个进入教室的同学可能是男是女，分别记为 1,2，则有映射：

$$\{\text{男}, \text{女}\} \to \{1, 2\}.$$

将离散的结果映射为坐标轴上离散的数值，所有的数值性的观测结果无需改变，如：下一个进入教室的同学身高为 ω，则有映射：

$$X(\omega) = \omega.$$

Definition. 实值变量（无分布函数）使用小写字母，随机变量（有分布函数）使用大写字母

对 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，$\{X \le x\} = \{\omega | X(\omega) \le x, \omega \le \Omega\} \in \mathscr{F}$，则 X 称为**概率空间的随机变量**

Example. 对于 $\{M, F\} \to \{1, 2\}$ ，取 $x = 1$ ，写出定义式：

$$\{X \le 1\} = \{M\}.$$

同时由于 $x \in \mathbb{R}$ ，取 $x = 1.5$ 时，$\{X \le 1.5\} = \{M\}$ 取 $x = 4$ 时，$\{X \le 4\} = \{M, F\}$

由于 $x \in \mathbb{R}$ ，则可以引入其他分布函数辅助，继而引用微积分理论

对于 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$：

$$P : \Omega \to [0, 1].$$

Notation. X 具有随机性（样本点具有随机性），是定义在 Ω 上的函数

X 是随机变量时 $\{a \le X \le b\}, a < b, a, b \in \mathbb{R}$ 均为随机事件

X 是随机变量，$g(x)$ 是非单点的实值函数，则 $Y = g(X)$ 也是随机变量：

$$Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Example. 对灯泡做寿命试验，用 X 表示测得灯泡的寿命，样本空间 $\Omega = [0, +\infty)$，则：

$A =$ “测得灯泡寿命大于 500 h” $= \{X > 500\}$

$B =$ “测得灯泡寿命小于 5000 h” $= \{X \le 5000\}$

分布函数

Definition. 分布函数：记

$$F(x) = P\{X \le x\}, x \in \mathbb{R}.$$

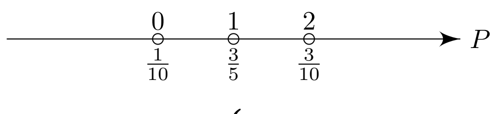
为 X 的分布函数

Example. 3 白 2 黑，不放回取三次球，求取到的黑球个数 X 的分布函数

X 可以取到：0,1,2

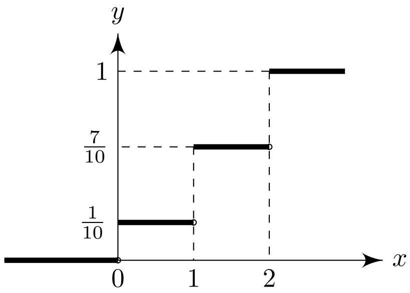
$$P\{X = 0\} = \frac{\mathrm{C}_3^3}{\mathrm{C}_5^3}, P\{X = 1\} = \frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_5^3}, P\{X = 2\} = \frac{\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_5^3}.$$

概率在坐标轴上体现：



$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{10}, x \in [0, 1) \\ \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}, x \in [1, 2) \\ 1, x \ge 2 \end{cases}.$$

图像：



Notation. 分布函数的特性：

1. 非负性：$P \in [0,1]$
2. 单调不减性
3. 右连续性：

$$F(x) = \lim_{t \to x+0^+} F(t).$$

3.1 不满足左连续，例：$P(0) - P(0^-) \neq 0$

4. 规范性：

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

关于 X 的事件都可以使用分布函数表示：

$$\begin{cases} P\{X = a\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} P\{a - \varepsilon < X \le a\} = F(a) - F(a - 0^+) \\ P\{a \le X < b\} = F(b - 0^+) - F(a - 0^+) \\ \ldots\ldots \end{cases}.$$

Example. 在 $[a,b]$ 内随机取一个数 X ，求 X 的分布函数

关键区域：$x \in [a,b)$，

$$\{X \le x\} = \{a \le X \le x\}.$$

$$F(x) = P\{X \le x\} = \frac{x-a}{b-a}.$$

作业：预习第 2,3 节

Lecture 4

$$随机变量 \begin{cases} 离散型 \begin{cases} 有限型 \\ 无限型 \end{cases} \\ 连续型 \end{cases}.$$

Notation. 回忆：分布函数有以下特征：

1. 非负性
2. 规范性
3. 右连续性
4. $\forall x < y \in \mathbb{R}, F(x) \leq F(y)$

计算随机变量的概率可以用分布函数表达：

$$P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a).$$

2.2 常见分布律

1. 退化分布
2. 两点分布

2.1. $0 \sim 1$ 分布（$X \sim B(1,p)$）：

$$P\{X = k\} = p^k (1-p)^{1-k}, k = 0, 1.$$

3. 二项分布（$X \sim B(n,p)$）：

$$P\{X = k\} = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^k, k = 0, 1, 2, \ldots, n, p \in (0,1).$$

4. 几何分布（$X \sim G(p)$）：

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, 3, \ldots, p \in (0,1).$$

5. 泊松分布（$X \sim P(\lambda)$）：用于描述稀有事件的发生

$$P\{X = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots, \lambda > 0.$$

Notation. 由

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

可得：

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\{X = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = 1.$$

Notation. 分布律的基本性质：

1. 非负性：$p_i \geq 0$
2. 正则性：$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$，即每一个点的概率都应该知道

Example. 保险问题

若一年中某类保险受保人死亡的概率为 0.005, 现有 10000 人参加保险，求未来一年中:

1. 40 人死亡的概率

设 X 为未来一年中死亡的人数，有 $X \sim B\left(10000, 0.005\right)$ ，计算:

$$P\left\{X = 40\right\} = \mathrm{C}_{10000}^{40} 0.005^{40} \cdot 0.995^{9960} \approx 2.143 \times 10^{-2}.$$

直接计算较为复杂，可以使用近似计算

有两种近似计算方法: 泊松定理、中心极限定理

Notation. 泊松定理: 二项分布有时可以转化为泊松分布:

如果 $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$（极小但不为 0），则:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{C}_n^k p_n^k \left(1 - p_n\right)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2 \ldots.$$

前提: n 大 p 小

将保险问题转换为泊松分布:

$$\lambda = np = 50.$$

$$P\left\{X = 40\right\} = \frac{50^{40}}{40!} \mathrm{e}^{-50} \approx 0.02.$$

2. 死亡人数不超过 70 的概率

$$P\left\{X \le 70\right\} = \sum_{k=0}^{70} \mathrm{C}_{10000}^{k} 0.005^{k} \cdot 0.995^{(10000-k)}.$$

$$= \sum_{k=0}^{70} \frac{50^k}{k!} \mathrm{e}^{-50} \left(\lambda = np = 50\right).$$

Notation. 几何分布具有无记忆性: 当前试验对过去的试验无任何影响，即:

$$P\left\{X = k + 1 | X > k\right\} = P\left\{X = 1\right\}.$$

可以使用条件概率证明:

$$P\left\{X = k + 1 | X > k\right\} = \frac{P\left\{X = k + 1, X > k\right\}}{P\left\{X > k\right\}}.$$

由于:

$$P\left\{X > k\right\} = \sum_{j=k}^{+\infty} p \left(1 - p\right)^j = p \sum_{j=k}^{+\infty} \left(1 - p\right)^j = p \left(1 - p\right)^k \cdot \frac{1}{1 - 1 + p} = \left(1 - p\right)^j.$$

2.3 连续型随机变量

Definition.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x, x \in \mathbb{R}.$$

则 X 为连续型随机变量，$f(x)$ 称为 X 的密度函数

连续型随机变量的性质：

1. 非负性：$f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$
2. 规范性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

3.

$$P\{a < X \leq b\} = \int_{b}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x, a < b.$$

4. F 连续
5. $F'(x) = f(x)$

Notation. 由于连续性随机变量的分布函数 F 处处连续，所以 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，有 $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0) = 0$，即：概率为 0 的事件不一定是不可能事件

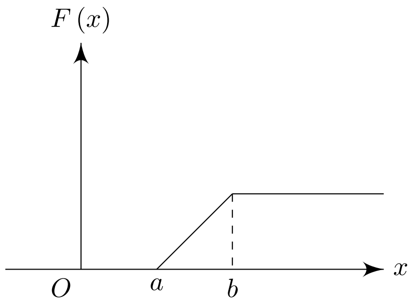
Example.

常见的连续型密度函数：

1. 均匀分布（$X \sim U[a,b]$）：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}.$$

对应的分布函数图像：



2. 指数分布（$X \sim \Gamma(1,\lambda)$）：

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}.$$

Notation. 指数分布大多数与等待时间有关

指数分布的充分必要条件为

$$\forall s, t \geq 0, P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\}.$$

即指数分布有无记忆性/无后效型（指数分布的特点）

3. 正态分布（$X \sim N(\mu, \sigma^2)$）：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Notation. σ^2 ： 方差，μ ： 数学期待

3.1. 标准正态分布（$X \sim N(0,1)$）：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}}.$$

Lecture 5

Notation. 马尔可夫分布也具有无记忆性

回忆：正态分布（高斯分布）

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

标准正态分布

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

2.4 标准化

Definition. 标准化将随机变量转化为另一组随机变量

对于 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，移除前者的中心（将中心变为 0），除以标准差，即得到符合标准正态分布的 $Y \sim N(0,1)$

1. 去中心化
2. 除以标准差

即：

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}.$$

标准化后的随机变量期望为 0，方差为 1

$$P\{|X - \mu| < k\sigma\} = P\left\{\left|\frac{x - \mu}{\sigma}\right| < k\right\} = P\{Y < k\}.$$

此时 $Y \sim N(0,1)$ ，即符合标准正态分布
对于原来的 3σ 原则，转化为 $P\{-3<Y<3\}$

$$P\{-3<Y<3\} = F_Y(3) - F_Y(-3).$$
$$= \phi(3) - \phi(-3).$$

Notation.

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

$$= 2\phi(3) - 1.$$

Example. 设人的高度符合正态分布 $X \sim N(170, 49)$，问在公共设施处的门需要设计多高才能使至少 90% 的人通过

求门高 H 使得 $P\{X \leq H\} \geq 0.9$

$$P\{X \leq H\} \implies P\left\{\frac{X-170}{49} \leq \frac{H-170}{49}\right\}.$$

即：

$$\phi\left(\frac{H-170}{49}\right) \geq 0.9.$$
$$\frac{H-170}{49} \geq 1.28 \implies H \geq 1.80.$$

2.5 随机变量函数的分布

Example.

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}.$$
$$Y = g(X) \sim F_Y(Y).$$

求解 $F_Y(Y)$

Example. $D \sim U[a,b]$ 且

$$S = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi\rho^2}{4}.$$

1. X 离散：Y 一般是离散的
2. X 连续：Y 可能连续，可能分段连续（离散）

表 1: Y Func

0.15	0.1	0.1	0.2	0.3	0.15
4	1	0	1	4	9

Example. X 的分布律：

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.15 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

求 $Y = X^2$ 的分布律

列举 Y 的分布律：合并后：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.45 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Example. 分析法：$X \sim G(0.5)$ （几何分布），求 $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的分布律

易得：Y 可以取得：0,1,-1

$$Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right) = \begin{cases} -1, X = 4n-1 \\ 0, X = 4n\text{且}X = 4n-2 \\ 1, X = 4n-3 \end{cases}.$$

$$P\{Y=-1\} = \sum_{n=1}^{+\infty} P\{X = 4n-1\} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0.5 \times 0.5^{4n-1-1}.$$

同理：

$$P\{Y=0\} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0.5 \times 0.5^{2n-1}.$$

$$P\{Y=1\} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0.5 \times 0.5^{4n-4}.$$

求得 Y 的分布律：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}.$$

Lecture 6

Corollary. X 是连续性随机变量，密度函数为 $f_X(x)$

随机变量 $Y = g(X)$，且 $\exists D, P\{Y \in D\} = 1$，$g(x)$ 存在反函数 $h(y)$ 且严格单调可导，则：

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| f_X(h(y)), y \in D \\ 0, \text{Others} \end{cases}.$$

Notation. 指数分布 $X \sim \Gamma(1, \lambda)$ 的数学期望 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

3 多维随机变量函数及其分布

在实际问题中，试验结果有时需要使用两个或两个以上的随机变量 (random value, r.v.) 来描述

Example. 天气预报：温度、湿度、风力、降水等

3.1 二维随机变量及其分布

Definition. 设 Ω 为随机试验的样本空间，则

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{某种变化}} \exists \left(X\left(\omega\right), Y\left(\omega\right)\right) \in \mathbb{R}^2.$$

或：

$$\{X \le x, Y \le y\} = \{\omega | X\left(\omega\right) \le x, Y\left(\omega\right) \le y, \omega \in \Omega\} \in \mathscr{F}.$$

称 (X, Y) 为概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的二维随机变量

Notation. $\{X \le x, Y \le y\} = \{X \le x\} \cap \{Y \le y\}$

性质：

1. $F\left(x, y\right) \in [0, 1]$
2. 关于每个变量单调不减，即固定 x ，对 $\forall y_1 < y_2$，

$$F\left(x, y_1\right) \le F(x, y_2).$$

3. 对每个变量右连续，即：

$$F\left(x_0, y_0\right) = F\left(x_0 + 0^+, y_0\right) = F\left(x_0, y_0 + 0^+\right).$$

4. 对 $\forall a < b, c < d$ ，有：

$$F\left(b, d\right) - F\left(b, c\right) - F\left(a, d\right) + F\left(a, c\right) \ge 0.$$

即：在任意地方框一个矩形，内部区域的概率必须大于等于 0

Example. 性质 4 例题：设

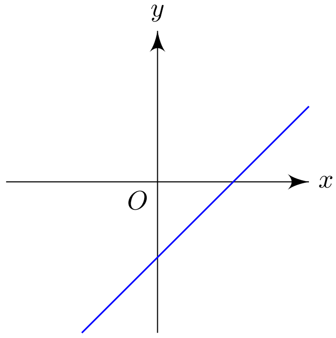
$$F\left(x, y\right) = \begin{cases} 0, x + y < 1 \\ 1, x + y \ge 1 \end{cases}.$$

讨论 $F\left(x, y\right)$ 能否成为二维随机变量的分布函数

Notation.

$$P\left\{X > a, Y > c\right\} \ne 1 - F\left(a, c\right).$$

图 2: 分布函数图像



3.2 二维随机变量的边缘分布函数

边缘分布：降一维

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P\{X \le x\} \\
&= P\{X \le x, Y < +\infty\} \\
&= F(x, +\infty)
\end{aligned}
$$

.

Example. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{2}\right), x, y \in (-\infty, +\infty).$$

求 A, B, C

解：$\arctan x$ 的性质：

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

则

$$
\begin{aligned}
F(+\infty, +\infty) &= A\left(B + \frac{\pi}{2}\right)\left(C + \frac{\pi}{2}\right) = 1. \\
F(-\infty, +\infty) &= A\left(B - \frac{\pi}{2}\right)\left(C + \frac{\pi}{2}\right) = 0. \\
F(-\infty, -\infty) &= A\left(B - \frac{\pi}{2}\right)\left(C - \frac{\pi}{2}\right) = 1.
\end{aligned}
$$

联立解出 A, B, C

3.3 联合分布律

二维离散随机变量的联合分布函数

$$F(x,y) = \sum_{x_i \le x}\sum_{y_j \le y} p_{ij}.$$

表 2: 联合分布律

$X^{\,Y}$	b_1	b_2	$\dots$	b_j	$p_{a\cdot}$
a_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\sum_{n=1}^{j} p_{nj}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\sum_{n=2}^{j} p_{nj}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\sum_{n=i}^{j} p_{nj}$
$p_{b\cdot}$	$\sum_{m=1}^{i} p_{im}$	$\sum_{m=2}^{i} p_{im}$	$\dots$	$\sum_{m=1}^{i} p_{im}$	1

如何求 p_{ij} ：

1. 古典概型
2. 乘法公式:

$$p_{ij} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_i | X = x_i\} = P\{X = x_i, Y = y_i\}.$$

3.4 二维连续性随机变量及其概率特性

Definition. 若

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, \mathrm{d}v \mathrm{d}u.$$

则称 $f(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数，称 (X, Y) 为二维连续型随机变量

Notation. 联合密度与联合分布函数的性质:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = 1 = F(-\infty, +\infty).$$
3. 对每个边缘连续，在 $f(x, y)$ 的连续点处:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

从而有: $P(x < X \leq x + \Delta x, y < Y \leq y + \Delta y) \approx f(x, y) \Delta x \Delta y$

Lecture 7

两个随机变量的独立性

证明. 当 A, B 独立时: $P(AB) = P(A) P(B)$

$$\forall i, j : P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P(Y = y_j).$$

□

Notation. 离散随机变量独立的情况下：$P_{ij} = P_{i\cdot} \cdot P_{\cdot j}$

如何证明 X, Y 独立：

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} P\{Y \le y\} = F_X(X) \cdot F_Y(y).$$

由联合分布律得边缘分布律：

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \lim_{y_0 \to +\infty} P\{X \le x, Y \le y_0\}.$$

Notation. 连续性随机变量的区间 D 概率：

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \iint_{u=x, v=y} f(u,v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

概率函数

Notation. 二维均匀分布：

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}.$$

Example.

$$f(x,y) = \begin{cases} Axy, & x \in (0,1), y \in (0,1) \\ 0, & \text{Others} \end{cases}.$$

1. 求 A

$$\iint_{x \in [0,y], y \in [0,1]} Axy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

$A = 8$

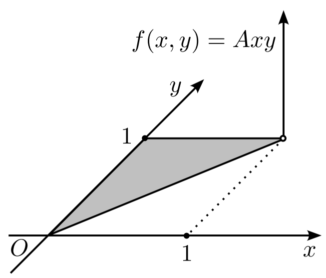
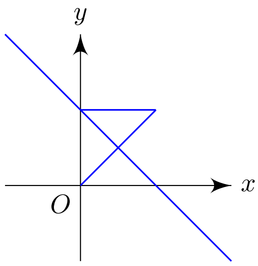


图 3: 函数积分域

2. $P\{X+Y\geq 1\}$

$$\begin{aligned}P\{X+Y\geq 1\} &= \iint_{x+y\geq 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_{x+y\geq 1} 8xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{0.5}^{1}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{y} 8xy\mathrm{d}x\\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

图 4: $P(x+y\geq 1)$



3. X,Y 的分布函数

3.1 $x\in(-\infty,0), y\in(-\infty,0)$

3.2 $x\in[0,1), y\in[0,x)$

3.3 $x\in[0,1), y\in[x,1)$

3.4 $x\in[0,1), y\in[1,+\infty)$

3.5 $x\in[1,+\infty), y\in[0,1)$

3.6 $x\in[1,+\infty), y\in[1,+\infty)$ 分段对 Axy 积分:

$$F(x,y) = \iint_{x\leq u, y\leq v} f(u,v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3.5 多维随机变量及分布

Definition. 二维推广至多维:

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = P\{X_1\leq x_1, X_2\leq x_2,\cdots,X_n\leq x_n\}.$$

称 F 为 n 维随机变量的联合分布函数

Definition. 多维联合分布律:

$$P\{X_1 = a_{1k_1}, X_2 = a_{2k_2},\cdots,X_n = a_{nk_n}\}.$$

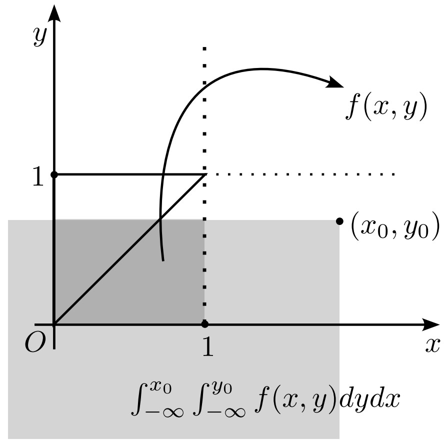


图 5: 积分区域

联合分布函数和联合分布律的关系:

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right).$$
$$=\sum_{a_{1k_1}\le x_1}\sum_{a_{2k_2}\le x_2}\cdots\sum_{a_{nk_n}\le x_n} P\left\{X_1=a_{1k_1}, X_2=a_{2k_2}, \cdots, X_n=a_{nk_n}\right\}.$$

Notation. 二项分布推广多项分布:

$A_1, A_2, \cdots, A_r$ 是 E 的完备事件组，$P\left(A_i\right)=p_i, i=1,2,\cdots,r$，对 E 进行 n 次独立重复试验，X_i 表示 A_i 发生的次数，则:

$$P\left\{X_1=k_1, X_2=k_2, \cdots, X_r=k_r\right\}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}\prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}.$$

其中 $k_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} k_i=n$，当 $n=2$ 时为二项分布

3.5.1 多维随机变量的独立性

Definition.

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}\left(x_i\right).$$

称随机变量相互独立

等价于:

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}\left(x_i\right).$$

Lecture 8

10.15

3.5.2 条件分布

Notation. 离散型条件分布:

$$P\left\{X=a_i|Y=b_j\right\}=\frac{P\left\{X=a_i,Y=b_j\right\}}{P\left\{Y=b_j\right\}}.$$

$$P\left\{Y=b_j\right\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\left\{Y=b_j,X=a_i\right\}.$$

性质:

1. $P\left\{X=a_i|Y=b_j\right\}\geq 0$
2. $\sum_{i=1}^{+\infty}P=1$

Notation. 连续型条件分布:

$$P\left\{X=a|Y=b\right\}=0.$$

(无穷多个点)

通过微元法:

$$\begin{aligned}
P\left\{X\leq x|Y=y\right\}&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P\left\{X\leq x|y-\varepsilon<Y\leq y\right\}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\left\{X\leq x,Y\in(y-\varepsilon,y]\right\}}{P\left\{Y\in(y-\varepsilon,y]\right\}}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{F\left(x,y\right)-F\left(x,y-\varepsilon\right)}{F_Y\left(y\right)-F_Y\left(y-\varepsilon\right)}\\
&=\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}}\\
&=\frac{\int_{-\infty}^{x}f\left(u,y\right)\mathrm{d}u}{f_Y\left(y\right)}\\
&=\int_{-\infty}^{x}\frac{f\left(u,y\right)}{f_Y\left(y\right)}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

3.6 二维随机变量函数的分布

$$\begin{cases}aX+bY+c\\ \max\{X,Y\}\\ \min\{X,Y\}\end{cases}.$$

重点公式: 3.4.5 ~ 3.4.8

假设随机变量 Z=aX+bY+c, 有分布函数 $(X,Y)\to F\left(x,y\right)$

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\
&= P\{aX + bY + c \le z\} \\
&= \begin{cases} \sum\limits_{ax_i+by_j+c\le z}\sum P\{X = x_i, Y = y_j\}, & (X,Y)\text{ 离散} \\ \iint_{ax+by+c\le z} P\{X = x, Y = y\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{ 连续} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Notation. 二项分布可加性：有两个相互独立的试验 $X \sim B(m,p), Y \sim B(n,p)$ ，相当于一个试验 $Z \sim B(m+n,p)$

泊松分布可加性：相互独立的两个随机变量 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$ ，相当于一个分布 $Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

Notation. 极值公式：

两个随机变量（连续）X, Y 相互独立，求 $Z_1 = \max(X,Y), Z_2 = \min(X,Y)$ 的分布函数和密度函数

1. $F_{Z_1}(z)$ ：最大的不超过 z 等价于每一个都不超过 z

$$\begin{aligned}
F_{Z_1}(z) &= P\{X \le z, Y \le z\} \\
&= P\{X \le z\} \cdot P\{Y \le z\} \\
&= F_X(z) \cdot F_Y(z).
\end{aligned}$$

2. $F_{Z_2}(z)$：最小的不超过 z 不等价于每一个都不超过 z ，但最小的超过 z 等价与每一个都超过了 z

$$\begin{aligned}
F_{Z_2}(z) &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\
&= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)].
\end{aligned}$$

Notation. 独立同分布：变量相互独立且分布律相同

对极值公式扩展：$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 独立同分布：

$$F_{Z_1}(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z).$$

由于同分布，因此 $F_{X_i}(z) = F_X(z)$

$$F_{Z_1}(z) = (F_X(z))^n.$$

$$f_{Z_1}(z) = (F_{Z_1}(z))' = n(F_X(z))^{n-1}.$$

Notation. 3.4.5:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{X+Y \le z\} \\
&= \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{z} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t-x)\,\mathrm{d}x \\
f_Z(z) &= F_Z'(z) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

同理：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$$

称以上两个公式为卷积公式：$f_Z = f_X * f_Y$

Notation. 正态分布的可加性：

$X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ ，且 X, Y 相互独立，则：

$$X+Y = Z \sim N\left(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2\right).$$

多元：

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right).$$

3.7 二元正态分布

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) = &\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \\
&\times\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\}.
\end{aligned}
$$

Lecture 9

10.17

Example. $X \sim U[-1,1]$ ，对应的密度函数：

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \text{ or } x > 1 \\ \frac{1}{2}, & x \in [-1,1] \end{cases}.$$

同理 $Y \sim U[-1,1]$，求 $Z = |X-Y|$ 的分布函数

解：Z 的取值：[0,2]

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\ &= P\{|X-Y| \le z\} \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1, & z \ge 2 \\ P\{-z \le X - Y \le z\}, & z \in [0,2) \end{cases}.\end{aligned}$$

其中

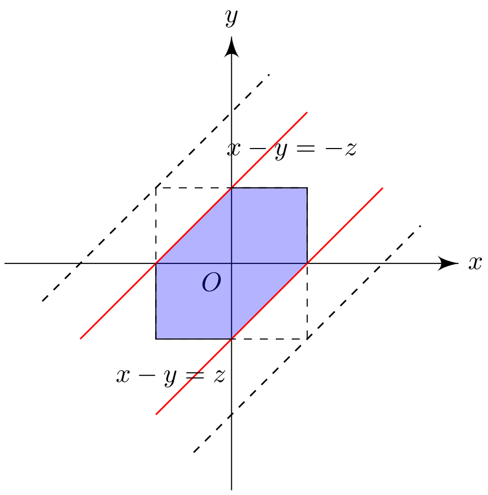
$$P\{z - z \le X - Y \le z\} = \iint_{-z \le x-y \le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

通过 f_X和f_Y 求联合密度函数：X, Y 独立，即 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x, y < -1 \text{ or } x, y > 1 \\ \frac{1}{4}, & x, y \in [-1,1] \end{cases}.$$

$$P\{-z \le X - Y \le z\} = \iint\limits_{-z \le x-y \le z, x, y \in [-1,1]} \frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

画图确认积分区域：



Notation. i.i.d. ：独立同分布

Notation. 伽马分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 的密度函数：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Notation. 重点题目：3.6.2

4 数字特征

- 数学期望：$E(X)$
- 方差：$D(X)$ or $\mathrm{Var}(X)$
- 协方差：$\mathrm{cov}(X,Y)$
- 相关系数：$\rho(X,Y)$
- 矩：$E(X)^k$ and $E(X-EX)^k$

$$D(X)=E(X-EX)^2.$$
$$\mathrm{cov}(X,Y)=E((X-EX)(Y-EY)).$$
$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}.$$

Notation. $|\rho_{X,Y}|\in[0,1]$

ρ 越大越线性相关，$\rho>0.8$ 时基本可以确定为线性相关

Notation. 矩 (moment) 是最一般的概念

矩分为两大类：k 阶原点矩和 k 阶中心矩

原点矩：$E(X)^k$

中心矩：$E(X-EX)^k$

$k+l$ 阶混合中心矩：$E\left((X-EX)^k(Y-EY)^l\right)$

Example. 数学期望为一阶原点矩

方差为一阶中心矩

协方差为二阶混合中心矩

可以写出无穷阶的中心矩等同于通过泰勒原理得出分布函数

本章重点：如何计算任意随机变量有关函数的数学期望

唯一计算公式：4.1.5 和 4.1.6

4.1 数学期望

Definition. 离散型随机变量 X 的分布律：$P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\dots$

若级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}x_ip_i$ **绝对收敛**（$\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|p_i<+\infty$），则 X 的数学期望**存在**（x_i 为取值，p_i 为权重，$p_i\geq 0$）

$$E(X)=EX=\sum_{i=1}^{+\infty}x_iP\{X=x_i\}=\sum_{i=1}^{+\infty}x_ip_i.$$

Rule. 当一个随机变量的密度函数与分布律已知：$X\to f(x), P\{X=x_i\}=p_i$

即可以求关于 X 函数的数学期望（公式 4.1.5）：

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_{i=1}^{+\infty}g(x_i)P\{X=x_i\}, & X\text{离散}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}x, & X\text{连续}\end{cases}.$$

Rule. 扩展至二阶：$(X,Y) \to P\{X=x_i, Y=y_j\}, f(x,y)$

关于 (X,Y) 的函数的数学期望（公式 4.1.6）：

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j)\,P\{X=x_i,Y=y_j\}, & \text{离散} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{连续} \end{cases}.$$

Notation. 柯西分布：

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

常见分布数学期望：

Notation. 伯努利分布 $X \sim B(n,p)$ ：$EX = np$

泊松分布 $X \sim P(\lambda)\,(\lambda > 0)$ ：$EX = \lambda$

柯西分布：EX 不存在（柯西分布不绝对收敛）

Notation. 柯西活了 68 岁，21 岁成名（导师拉格朗日）,27 岁当选法国科学院院士

Lecture 10

10.22

Example. $(X,Y) \sim N_2(0,1), \phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2+y^2/2}$，令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ ，求 $E(Z)$

解：由定理：

Rule.

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j)\,P\{X=x_i,Y=y_j\}, & \text{离散} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{连续} \end{cases}.$$

可得数学期望：

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Z \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4.2 数学期望的性质

- 线性可加性
- 独立性

∘ $E(aX+bY+c) = E(aX+bY)+c$：常数的数学期望为其本身

Notation. 什么是数学期望：一个随机变量的中心

方差：去中心化的随机变量

常数的中心为其本身

∘ $E(aX+bY) = E(aX)+E(bY) = aE(X)+bE(Y)$：线性性

证明. 已知:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = F_X(x).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,\mathrm{d}x = E(X).$$

$$\begin{aligned}
E(aX+bY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+by)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + b\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= aE(X)+bE(Y).
\end{aligned}$$

□

Example. $E(X)\pm E(Y)=E(X\pm Y)$

- ○ 对于独立的随机变量: $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

证明. 二重积分转换为二次积分:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= E(X)\cdot E(Y).
\end{aligned}$$

□

Notation.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0 \\
&\Longrightarrow \rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0 \\
&\Longrightarrow X,Y\text{无相关(独立)}.
\end{aligned}$$

Notation. 线性可加性:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+c\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)+c.$$

将 n 重积分转换为一重积分

4.3 方差的性质

$$D\left(X\right)=E\left(X-EX\right)^{2}.$$

Notation. 方差是描述数据偏离中心的程度值

- 常数的方差等于 0：$D\left(c\right)=0$

Notation. 正态分布的方差 σ 不大：3σ 准则保证数据方差在可控范围内

- $D\left(aX+b\right)=D\left(aX\right)=\boldsymbol{a}^{2}D\left(X\right)$： 离散程度与整体移动无关

证明.

$$\begin{aligned}D\left(aX+b\right)&=E\left(aX+b-E\left(aX+b\right)\right)^{2}\\&=E\left(aX+b-aE\left(X\right)-b\right)^{2}\\&=E\left(aX-aE\left(X\right)\right)^{2}=D\left(aX\right)\\&=a\left(X-E\left(X\right)\right)\cdot aE\left(X-E\left(X\right)\right)\\&=a^{2}E\left(X-E(X)\right)^{2}\\&=\boldsymbol{a}^{2}D\left(X\right).\end{aligned}$$

□

- $D\left(X\pm Y\right)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)\pm E\left(\left(X-EX\right)\cdot\left(Y-EY\right)\right)$

证明.

$$\begin{aligned}D\left(X-Y\right)&=E\left(X-Y-E\left(X-Y\right)\right)^{2}\\&=E\left(X-Y-\left(EX-EY\right)\right)^{2}\\&=E\left(\left(X-EX\right)-\left(Y-EY\right)\right)^{2}\\&=E\Big(\left(X-EX\right)^{2}-2\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)+\left(Y-EY\right)^{2}\Big)\\&=E\left(X-EX\right)^{2}-2E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)+E\left(Y-EY\right)^{2}\\&=D\left(X\right)+D\left(Y\right)-2\mathrm{cov}\left(X,Y\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\left(X,Y\right)&=E\left(X-EX\right)\left(Y-EY\right)\\&=E\left(XY-X\cdot EY-Y\cdot EX+EX\cdot EY\right)\\&=E\left(XY\right)-E\left(X\cdot EY\right)-E\left(Y\cdot EX\right)+E\left(EX\cdot EY\right)\\&=E\left(XY\right)-EY\cdot E\left(X\right)-EX\cdot E\left(Y\right)+EX\cdot EY\\&=E\left(XY\right)-E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right).\end{aligned}$$

当 X,Y 独立时：$\operatorname{cov}(X,Y)=0$，即 $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$ ，加法同理 $\square$

Notation. 当 $X=Y$ 时：

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=\operatorname{cov}(X,X)\\&=E(X-EX)(X-EX)\\&=E(X-EX)^2\\&=D(X).\end{aligned}$$

即协方差退化为方差

Notation. 均方偏离函数：$f(x)=E(X-x)^2\geq D(X)$, 当且仅当 $x=E(X)$ 时 $f(X)=D(X)$

- 切比雪夫不等式（概率论最基础的不等式）

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

或：

$$P\{|X-EX|>\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon}.$$

证明时使用：

$$P\left\{(X-EX)^2\leq\varepsilon^2\right\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

证明.

$$\begin{aligned}P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}&=\int_{|x-EX|\geq\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_{|x-EX|\geq\varepsilon}\frac{|x-EX|^2}{\varepsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x-EX|^2}{\varepsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}E(X-EX)^2\\&=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

$\square$

Notation. 切比雪夫不等式 $\Longrightarrow$ 马尔可夫不等式 $\Longrightarrow$ 协方差不等式 $\Longrightarrow$ 阶乘不等式 $\Longrightarrow\ \ldots$

$D(X)=0$ 的充要条件为 $P=1$

Lecture 11

10.24

Review:

Notation. 数学期望的性质：

1. $E(c) = c$
2. $E(cX) = cE(X)$
3. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

3.1 $E(E(Y)X) = E(Y)E(X)$

4. X, Y 相互独立，$E(XY) = E(X)E(Y)$

协方差：$\text{cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) = E(XY) - E(X)E(Y)$

若 X, Y 独立则 $\text{cov}(X,Y) = 0$

Notation. 方差的性质：

1. $D(c) = 0$
2. $D(cX) = c^2 D(X)$

2.1. $D(X) = E(X-EX)^2 = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

3. X, Y 相互独立，$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

$\text{cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY)$

当 $X = Y$ ，$\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(X,X) = E(X-EX)^2 = D(X)$

或：$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$

Example. $D(aX+bY+c) = D(aX+bY)$

$$\begin{aligned}
D(aX+bY) &= E((aX+bY) - E(aX+bY))^2 \\
&= E(a(X-EX) + b(Y-EY))^2 \\
&= E\left(a^2(X-EX)^2 + 2ab(X-EX)(Y-EY) + b^2(Y-EY)^2\right) \\
&= a^2 D(X) + b^2 D(Y) + 2ab\,\text{cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

◦ 切比雪夫不等式：已知一个随机变量的方差可以估算出数学期望

Question. 一个随机变量 X 分布未知，已知 $\mu = 18, \sigma = 2.5$ ，求 $P\{X \in (8,28)\}$

解：由切比雪夫不等式：

$$\begin{aligned}
P\{X \in (8,28)\} &= P\{X - 18 \in (-10,10)\} \\
&= P\{|X-18| < 10\} \\
&= P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \\
&\geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \\
&= 1 - \frac{2.5^2}{10^2} = 0.9375.
\end{aligned}$$

◦ 马尔可夫不等式

Example. $X_1, X_2, \ldots, X_n : i.i.d, X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，证明：

1. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
2. 设 $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}, i = 1, 2, \ldots, n$ 则 $E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) = n$

证明. 1. 由线性性：

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(E\overline{X}, D\overline{X}\right).$$

由于 X 之间相互独立，有 $D\left(X_1 + X_2\right) = D\left(X_1\right) + D\left(X_2\right)$

$$E\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \mu, \qquad D\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2. 由题：$EY_i = 0, DY_i = 1$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} EY_i^2.$$

Notation. Y_i^2 符合自由度为 1 的卡方分布：$Y_i^2 \sim \chi^2(1)$

即：$\sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i^2\right) = nE\left(Y_i^2\right)$
由方差的定义：$D\left(Y_i\right) = E\left(Y_i^2\right) - E\left(Y_i\right)^2$ ：

$$\begin{aligned} EY_i^2 = D\left(Y_i\right) + E\left(Y_i\right)^2 = 1 + 0^2 = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i^2\right) = nE\left(Y_i^2\right) = n. \end{aligned}$$

□

4.4 协方差的性质

- ○ $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$ （对称性）
- ○ $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(X, Y)$

证明. 已知：$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(aX, bY) &= E(aXbY) - E(aX)E(bY) \\ &= abE(XY) - abE(X)E(Y) \\ &= ab\operatorname{cov}E(X, Y). \end{aligned}$$

□

- ○ $\operatorname{cov}(c, X) = 0$

Notation. 协方差用于衡量随机变量之间的线性关系，常数和其他随机变量不存在线性关系

证明.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(cX) &= E(cX) - E(c)E(X)\\ &= cE(X) - cE(X)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Notation. $\operatorname{cov}(c,c) = D(c) = 0$

○ $\operatorname{cov}(aX+bY, cZ) = ac\operatorname{cov}(X+Y) + bc\operatorname{cov}(Y+Z)$ （分配律）

证明.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(aX+bY, cZ) &= E((aX+bY)cZ) - E(aX+bY)E(cZ)\\ &= E(acXZ + bcYZ) - cEZ(aEX + bEY)\\ &= acE(XZ) + bcE(YZ) - acEXEZ - bcEYEZ\\ &= ac\operatorname{cov}(X,Z) + bc\operatorname{cov}(Y,Z).\end{aligned}$$

□

Notation. $\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i, b_iZ\right) = \sum_{i=1}^n a_ib_i\operatorname{cov}(X_i,Z)$

Notation. $D\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 DX_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\neq i}^n a_ia_j\operatorname{cov}(X_i,X_j)$

4.5 相关系数

4.5.1 标准化

$$X^\star = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}.$$

标准化后的变量 $EX^\star = 0, DX^\star = 1$

Definition. $X^\star, Y^\star$ 的协方差 $\operatorname{cov}(X^\star, Y^\star)$ 为 X,Y 的相关系数 $\rho(X,Y)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X^\star,Y^\star) &= \operatorname{cov}\left(\frac{X-EX}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y-EY}{\sqrt{DX}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\operatorname{cov}(X-EX, Y-EY).\end{aligned}$$

易得 $\operatorname{cov}(X-EX,Y-EY) = \operatorname{cov}(X,Y)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X^\star,Y^\star) &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\\ &= \rho(X,Y).\end{aligned}$$

4.5.2 性质

- ○ $|\rho(X,Y)| \le 1$
- ○ $P\{X^{\star} = \pm Y^{\star}\} = 1$ 是 $\rho(X,Y) = \pm 1$ 的充要条件

Lecture 12

10.29

Notation. 相关系数/Pearson 相关系数：描述两个随机变量之间的线性相关性
只能描述数值性的变量

$|\rho(X,Y)| = 1$ 时：正相关
$|\rho(X,Y) > 0.8|$ ：强相关
$|\rho(X,Y) \in (0,0.5)|$：弱相关
$\rho = 0$ ：不相关/非线性关系

Notation. 相关系数本质上描述：

$$P\{Y = aX + b\}.$$

Example. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ ，求：
1. X,Y 的相关性；2. X,Y 的独立性

解：1.

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\pi}\mathrm{d}y \\ &= 0. \end{aligned}$$

同理 $EY = 0$，即不相关
2.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_D f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

同理 $f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$ ，易得 $f(x,y) \ne f_X(x)f_Y(y)$ ，即不独立

数理统计部分

5 大数定律和中心极限定理

Definition. 大数定律:

$$\overline{X} \xrightarrow[P]{n\to+\infty} EX.$$

即: 以某事件发生的频率估计该事件的概率

Definition. 中心极限定理:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

其中 $X_1, X_2, \ldots X_i$ 独立同分布

该随机变量序列存在分布, 中心极限定理提出不论 $\overline{X}$ 的分布是什么, 该序列的分布为正态分布

$$\overline{X} \xrightarrow[n\to\infty]{L} N\left(E\overline{X}, D\overline{X}\right).$$

如何判断随机变量的敛散性:

Corollary. 依概率收敛:

对 $\forall\varepsilon$ 有:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|X_n - X| < \varepsilon\right\} = 1.$$

代表序列 $\{X_n\}$ 收敛于随机变量 X , 记为 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$

Corollary. 依分布收敛:

序列的分布函数为 $F_n(x)$, 随机变量的分布函数 $F(x)$, 对 $\forall x$, 有:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

则 $\{X_n\}$ 依分布收敛于 X , 记为 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L} X$

Notation. 测度变换: 通过将问题映射到另一个空间简化计算

依分布收敛要求更弱, 即: 依概率收敛 $\Rightarrow$ 依分布收敛

当收敛对象为常数时二者可互推

Notation. 撞骗: 只要发出的短信足够多, 成功率符合大数定律

三大大数定律:

$$\begin{cases} \textbf{切比雪夫大数定律}\text{: 最根本} \\ \text{伯努利大数定律: 例子} \\ \text{辛钦大数定律} \end{cases}.$$

5.1 大数定律

Notation. 切比雪夫大数定律:

Definition. $\{X_i\}\, i.i.d$ ，$\exists EX_i, DX_i$ ，且 $\exists C$ ，使得 $DX_i \le C$ （方差有界），则对 $\forall \varepsilon > 0$ 当:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{X_n} - E\overline{X_n}\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

时:

$$\overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} E\overline{X_n}.$$

证明. $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，有:

$$\begin{aligned} E\overline{X_n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i \\ D\overline{X_i} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \\ &\le \frac{C}{n}. \end{aligned}$$

由切比雪夫不等式:

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\overline{X_n} - E\overline{X_n}\right| < \varepsilon\right\} &\ge 1 - \frac{D\overline{X_n}}{\varepsilon^2} \\ &\ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时原式收敛于 1 □

Notation. 辛钦大数定律：序列中的随机变量独立同分布

Notation. 伯努利大数定律：序列中 $X_i \sim B(1,p)$ (已知分布)，记 μ_s 为随机变量序列之和，有:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_s}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

即: $\frac{\mu_s}{n}$ 依概率收敛于 p

5.2 中心极限定理

Example. 高尔顿钉板

Corollary. $i.i.d$ 的中心极限定理:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x).$$

Corollary. 棣莫弗-拉普拉斯定理：X_i 独立同分布，$X_i \sim B(1,p)$，令 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$，对 $\forall x$ 有:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x).$$

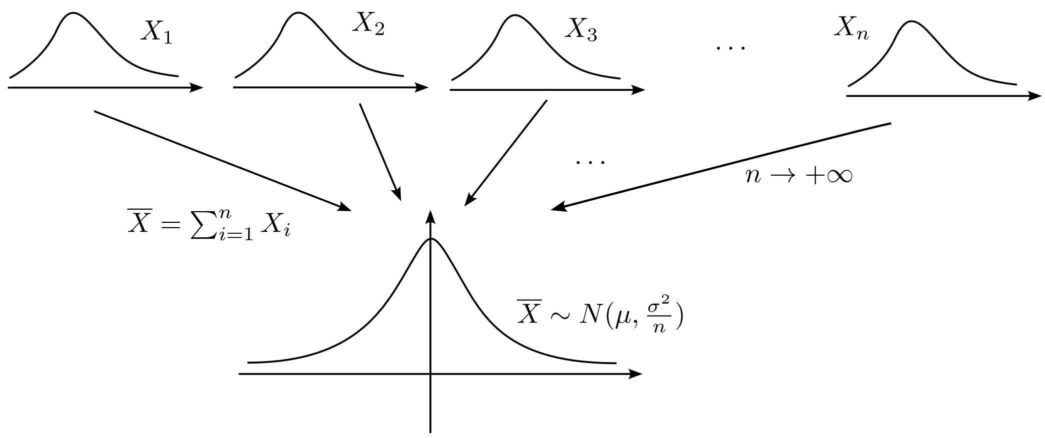


图 6: 中心极限定理

Lecture 13

10.31

Notation. 偏度 r_1：三阶标准化随机变量的矩，用于描述对称性

峰度 r_2：四阶标准化随机变量的矩，一般使正态分布的峰度 $r_2 = 0$，描述分布的陡峭程度

表 3: 常见分布的数字特征

分布	EX	DX	r_1	r_2
$B(1,p)$	p	$p(1-p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$	$\frac{1}{p(1-p)-6}$
$B(n,p)$	np	$np(1-p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	$\frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$
$P(\lambda)$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{1}{\lambda}$
$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$	$6+\frac{p^2}{1-p}$
$U[a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$\frac{9}{5}-3$
$\Gamma(1,\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	2	6
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	0	0

6 数理统计基本概念

随机变量引入：使样本空间映射到实数轴上

分布函数：任意随机变量的概率

大数定律和中心极限定理：由概率论过渡到数理统计

$$\begin{cases} \text{描述统计学：过去的实验数据/相关分析图} \\ \text{推断统计学：根据现有的实验数据决策} \begin{cases} \text{参数估计：第七章} \\ \text{假设检验：第八章} \\ \text{回归分析：第九章} \end{cases} \end{cases}.$$

Definition. 总体：全部研究对象，可以用分布描述（随机变量组）

Definition. 个体：组成总体的成员，符合总体分布（每一个个体都是一个随机变量）

Example. 从总体中抽取 n 个样本

对数据记录：$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为 n 维随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 对应的观测值，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本

Notation. 简单样本：$X_1, X_2, \ldots, X_n$ $i.i.d$，且与总体分布相符

特点：

◦ 独立性

◦ 代表性

Definition. 样本空间：$\boldsymbol{\Omega} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, | x_i \in \mathbb{R}, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, n\}$

Notation. 样本联合分布和总体分布的关系 ($i.i.d$)：

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \le x_i\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} F(x_i). \end{aligned}$$

扩展：X 为连续型，密度函数的关系：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \quad x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

6.1 经验分布函数

经验分布函数：$F_n(x)$

将样本观测值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 按大小分类为 $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= f_n\{X \leq x\} \\
&= \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & x \in [x_{(k)}, x_{(k+1)}) \\ 1, & x \geq x_{(n)} \end{cases} \\
&\approx F(X).
\end{aligned}$$

Corollary. 格利文科定理:

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty, x\in\mathbb{R}} |F(x) - F_n(x) = 0|\right\} = 1.$$

根据格利文科定理：可以使用经验分布函数来估计理论分布函数

Lecture 14

11.05

6.2 密度函数

Notation. 密度函数和分布函数的关系:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
f_X(x) &= \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

对于直方图：将中点光滑连接 = 密度函数

或：核密度

直方图

Notation. 直方图的面积代表频率:

$$\text{高度}h_i = \frac{\text{面积}f_i}{\text{区间长度}\Delta x_i}.$$

直方图的高度代表密度，直方图的横坐标的取值范围为观测值的取值范围，直方图分块的区间来源一般为经验公式：$m \approx 1.87(n-1)^{0.4}$，其中 m 为区间分组数量

计算直方图频率:

$$\text{频率}f_i = \frac{\text{落入区间的个数}y_i}{\text{总个数}y}.$$

6.3 统计量

统计量 (statistic)，统计学 (statistics)

Definition. 统计量：关于样本的函数，不含任何未知参数

完整定义：

Example. X_1, X_2 来自正态总体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的样本（这两个任意抽出一个都属于一个样本），其中 μ, σ 均未知，以下表达式：

- $\frac{1}{4}\left(X_1 + X_2\right) - \mu$
- $\frac{X_1}{\sigma}$

均不是统计量（使用了未知的数），以下表达式都是统计量

- $3X_1$
- $X_1 - 8$
- $X_1^2 + X_2^2$

提出统计量的目的：通过样本估计或检测未知量，因此统计量不能含未知量

常见统计量：

- 样本均值（算术平均数）：$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$
- 样本标准差：$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$
- 样本阶原点矩
- 样本阶中心距

Notation. 样本均值：若 $X_1, X_2, \ldots X_n$ $i.i.d$：根据辛钦大数定律：$\overline{X} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} E\overline{X} = EX$

Notation. 样本阶中心矩：

$$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k \xrightarrow[n\to\infty]{P} DX.$$

或：$S^2 = B_2 \times \frac{n}{n-1} \Rightarrow E\left(S^2\right) = DX$

证明.

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}Xi^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\\
ES^2 &= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-nE\overline{X}^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(DX_i+\left(EX_i\right)^2\right)-n\left(D\overline{X}+\left(E\overline{X}\right)^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(DX+\left(EX\right)^2\right)-n\left(\frac{DX}{n}+\left(EX\right)^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{n-1}\left[nDX+n\left(EX\right)^2-DX-n\left(EX\right)^2\right]=\frac{1}{n-1}\left(n-1\right)DX=DX.
\end{aligned}
$$

即：$EB_2=E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)=\frac{n-1}{n}DX$ □

用样本均值估计总体均值：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-x\right)^2.$$

顺序统计量

令 $X_{(1)}=\min\left\{X_1,X_2,\ldots,X_n\right\}$ 为最小顺序统计量，最大同理
要求第几小的顺序统计量：R 成为样本极差，$\widetilde{X}$ 称为样本中位数

6.4 样本均值的分布

Theorem. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 来自 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\sim N\left(0,1\right).$$

定义 $\overline{X}$ 为 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的线性函数，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，计算期望和方差，将 $\overline{X}$ 标准化

Theorem. 标准化后的线性函数 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\xrightarrow[n\to\infty]{L}N\left(0,1\right).$$

Example. 总体：$X \sim N(20,9)$ ，求样本容量 n 多大时使样本均值与总体均值的绝对值之差 ≤ 0.3 的概率 $> 95\%$

6.4.1 三大抽样分布

- 卡方分布：$\chi^2(n)$

Notation. 卡方分布实际上为 $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{n}{2}$ 的 Gamma 分布
当 $n = 2$ 时为参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布
一般称 $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}$ 为伽马分布族

Definition. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(0,1)$ $i.i.d$ ，令 $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ ，称 χ^2 为自由度为 n 的卡方分布

Notation. 卡方分布具有可加性：

$$Y_1 \sim \chi^2(m), Y_2 \sim \chi^2(n) : Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(m+n).$$

从 $n = 3$ 开始，卡方分布出现最大值，且 n 越大卡方分布的方差越大
卡方分布的性质：

- $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$
- 可加性
- 分位点：

对性质 1：

证明.

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = nEX^2 \\
&= n\left(DX + (EX)^2\right) \\
D\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= nDX^2 = n\left(E\left(X^2\right)^2 - \left(EX^2\right)^2\right) \\
&= n\left(EX^4 - 1\right).
\end{aligned}$$

□

Lecture 15

11.07

Lecture 16

11.12

Review:

1. 抽样分布定理：定理 6.4.3
2. 表达式 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 什么时候是统计量：σ^2 已知

当 σ^2 未知时：表达式符合 $\chi^2(n-1)$ ，称为**枢轴量**

Corollary. $X_1, X_2, \ldots X_n$ 来自总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ，样本均值和方差记为 $\overline{X}, S^2$ ，则：

a. 求 ES^2 ： $ES^2 = \sigma^2$
b. 求 DS^2 ： $DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$
c. 构造 t 分布：$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} / \sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

（上述 $\sqrt{(n-1)S^2/\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 且 $(\overline{X}-\mu)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sim \Phi(x)$）

重点题目：例 6.4.4

Corollary. 两个正态总体的抽样分布定理：两个总体记为 X, Y ，样本容量分别为 m, n ，样本分布分别符合 $\mu = \mu_1, \sigma^2 = \sigma_1^2$ 和 $\mu = \mu_2, \sigma^2 = \sigma_2^2$ 的正态分布，...

7 参数估计

参数：*param*

- 点估计
  - 矩估计
  - 极大似然估计
- 区间估计

7.1 矩估计

使用样本矩 $\overline{X}$ 替代总体矩 $\hat{\mu}$

Notation. 总体矩不存在（无穷）时不能使用矩估计

Example. 总体 $X \sim U[a,b]$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体的样本，求 a, b 的矩估计量

解：

$$\begin{cases} EX &= \frac{a+b}{2} \\ DX &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}.$$

求解得：$\begin{cases} a &= EX - \sqrt{3DX} \\ b &= EX + \sqrt{3DX} \end{cases}$ ，替代后为：$\begin{cases} \hat{a} &= \overline{X} - \sqrt{3M_2^\star} \\ \hat{b} &= \overline{X} + \sqrt{3M_2^\star} \end{cases}$ ，$\hat{a}$ 代表对 a 的估计

7.2 极大似然估计

似然函数：样本的联合概率分布函数（P167）

Example. 同矩估计例题，求 a, b 的极大似然估计量

解：写出联合密度函数：$L(\ldots) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$，由于 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{Others} \end{cases}$，则联合密度函数为：

$$
\begin{aligned}
L &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x_i) \\
&= \frac{1}{(b-a)^n} \prod_{i=1}^{n} I_{[a,b]}(x_i).
\end{aligned}
$$

Lecture 17

11.14

Lecture 18

11.19

Review:

○ 对参数（完全可观测数据）进行点估计：极大似然估计、矩估计

两种方法得到的结果可能一样或不一样

○ 点估计的评价标准：

（渐进）无偏 估计的参数的期望 $E\hat{\theta}$ 求极限为 θ

有效性 在无偏的前提下：$D\hat{\theta}$ 越小越有效

相合性（一致性） $\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}, \theta\right)$：均方误差

Example. $\overline{X}$ 和 $\hat{W} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ 可以证明都是 μ 的无偏估计，称 $\overline{X}$ 为算术均值，$\hat{W}$ 为加权均值，且算术均值比加权均值更有效（均值不等式）

Notation. 均方误差：$\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}, \theta\right) = E\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2$

7.3 区间估计

Definition. 置信区间：α 为给定值，总体的分布函数为 $F(x, \theta)$ ，有两个从总体中抽取后构造的统计量 T_1, T_2 ，当：

$$P\left\{T_1 < \theta < T_2\right\} = 1 - \alpha.$$

时：称 P 为置信度，区间长度 $T_2 - T_1$ 的数学期望 $E(T_2 - T_1)$ 为精度

纽曼提出的准则：先确定 α 来确定置信度，再确定置信上下限

Notation. 已知标准正态分布 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 中的 σ^2 ，置信度为 $1-\alpha$ 时参数 μ 的置信区间：

$$(T_1, T_2) = \left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

如果 σ^2 未知：通过 t 分布可得：$T = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t\left(n-1\right)$ ，置信区间为：

$$(T_1, T_2) = \left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)\right).$$

Notation. 卡方分布下：方差为 σ^2 ，置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间：

$$(T_1, T_2) = \left(\frac{\left(n-1\right)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)}, \frac{\left(n-1\right)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n-1\right)}\right).$$

对应的标准差为 σ ，置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间：$T_1' = \sqrt{T_1}, T_2' = \sqrt{T_2}$

如果 μ 已知，σ^2 未知，令 $S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$ ，因为 $\chi^2 = \frac{nS_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(n\right)$ ，可得置信度为 $1-\alpha$ 的方差的置信区间为：

$$\left(\frac{nS_1^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n\right)}, \frac{nS_1^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n\right)}\right).$$

8 假设检验

Notation. 在医药研发大量应用

- 参数假设检验：假设效果
- 非参数假设检验

Notation. 下节课之前准备一个本专业的假设检验问题

Lecture 19

11.21

Example. 参数假设检验：主场优势：NBA 某球队进行 82 场比赛，41 场为主场，统计过去 15 年主场胜率 P_1 和客场胜率 P_2 ，判断该球队是否存在主场优势

通过胜率差 $\Delta P = P_1 - P_2$，当 $\Delta P = 0$ 时不存在，当 $\Delta P > 0$ 时存在

Notation. 非参数假设检验：住房面积和家庭生活幸福感的关系，学历程度和年均收入的关系；非参数假设检验的两个变量独立

Example. 规定工业废水中 Cr(VI) 排放浓度不超过 0.5，即 $c_{\mathrm{Cr(VI)}} \le 0.5$，设 X 为工业废水有害物质排放浓度总体，抽取 16 份废水 $X_1, X_2, \ldots, X_{16}$，测得物质浓度 $\overline{x} = 0.52, s^2 = 0.09$，假设该物质浓度分布为 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ，求排放浓度是否符合规定（$\alpha = 0.5$）

解:

$$\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i \quad S^2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}\left(X_i-\overline{X}\right)^2.$$

判断是否超标：通过检测 $\mu\leq 0.5$ 达标，$\mu>0.5$ 超标：一般把带等号的假设设为原假设 $H_0:\mu\leq 0.5$ ，被则假设 $H_1:\mu>0.5$ ；

检验水平 $\alpha=0.05$ ：通常不超过 0.1 ，表示犯第一类错误的概率（$\alpha=P\left(\overline{H_0}\right)$）；对比 β ：犯第二类错误

选择检验统计量：将最大似然估计标准化：$\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}=T$ ，当 H_0 成立时：$T=\frac{\overline{X}-0.5}{S/\sqrt{n}}\sim t\left(15\right)$（分布为 t 分布，该检验方法为 t 检验法）

确定拒绝域 $\mathscr{X}_0$：确定拒绝域的形式，由于被则假设为 $H_1:\mu>0.5$ ，假设拒绝域为 $\left\{\overline{X}-0.5>c\right\}$ ，c 为未知量

犯第一类错误的概率 $P\left\{\overline{X}-0.5>c\mid\mu\leq 0.5\right\}\leq 0.05$，原式放缩：

$$\begin{aligned}P\left\{\overline{X}-0.5>c\mid\mu\leq 0.5\right\}&=P\left\{\frac{\overline{X}-0.5}{\frac{S}{\sqrt{16}}}>\frac{c}{\frac{S}{\sqrt{16}}}\mid\mu\leq 0.5\right\}\\&=P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{4}}>\frac{c+0.5-\mu}{\frac{S}{4}}\mid\mu\leq 0.5\right\}\\&\leq P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{4}}>\frac{c}{\frac{S}{4}}\right\}\\&=P\left(T>\frac{c}{S/4}\right)=\alpha\quad(0.5-\mu\geq 0).\end{aligned}$$

根据 t 分布的分位数定义可得：$\frac{c}{S/4}=t_{0.95}\left(15\right)$，则检验统计量在拒绝域中可以表示为：

$$\mathscr{X}=\left\{\frac{\overline{X}-0.5}{S/4}>t_{0.95}\left(15\right)\right\}.$$

查表得 $t_{0.95}\left(15\right)=1.753$ ，判断：$\overline{x}=0.52,s=0.3$ ，带入原式得：$\frac{\overline{x}-0.5}{s/4}=\frac{0.52-0.5}{0.3/4}<1.753$ ，因此并未落在拒绝域中，接受原假设 H_0

下结论：认为 $t\notin\mathscr{X}_0$ ，因此不拒绝原假设 H_0 ，**在显著性水平 $\boldsymbol{\alpha}=0.05$ 下，可以认为该区域有害物质排放浓度符合规定**

假设检验的两类错误

假设 H_0 正确，可以认为 H_0 正确或错误，类似二分类问题

表 4: 假设检验的两类错误

真实情况 \ 判断	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	第一类错误 α
H_0 为假	第二类错误 β	正确

对于上题：$\beta = \left\{ \frac{X-0.5}{s/4} \leq t_{0.95}\left(15\right) \mid \mu > 0.5 \right\}$

$$\begin{aligned} \beta &= P\left\{ \frac{X-0.5}{\frac{s}{4}} < t_{0.95}\left(15\right) \mid \mu > 0.5 \right\} \quad \text{(We assume that: } \mu = 0.6\text{)} \\ &= P\left\{ \frac{X-0.5}{\frac{s}{4}} < t_{0.95(15)} + \frac{0.6-0.5}{\frac{s}{4}} \right\} \approx 60\%. \end{aligned}$$

使用被则假设检验一般有较大的概率犯错误，因此一般使用原假设检验

假设检验的内容：

$$\text{理论依据：小概率原理} \begin{cases} \text{参数检验} \begin{cases} \text{总体}\mu, \Delta\mu\text{的检验} \\ \text{总体}\sigma, \partial\sigma\text{的检验} \end{cases} \\ \text{非参数检验} \begin{cases} \text{分布拟合检验} \\ \text{符号检验} \\ \text{秩和检验：两个检验的分布是否是同一分布} \end{cases} \end{cases} .$$

Notation. 小概率原理：犯第一类错误的概率 α 为小概率；如果认为 H_0 正确，但是数据观测得到的是 $H_1 : \overline{x} - 0.5 > c$ ，则应该反过来认为 H_1 正确

Lecture 20

11.26

Example. 假设产品出厂时要求次品率 $p \leq 0.04$ ，从 10000 件产品中抽取 12 件产品发现 3 件次品，问该批产品能否出厂；若抽出 1 件次品，能否出厂

解：不使用假设检验：$p_0 = \frac{3}{12} = 0.25 > 0.04$ ，明显不能出厂（不严谨），即使 $p_0 = \frac{1}{12} \approx 0.08 > 0.04$ 也不能出厂

Notation. 问题在于：12 件产品和 10000 件产品中出现次品数量的分布不一样

使用假设检验：假设 $p \leq 0.04$ ，抽查率 $\frac{12}{10000} \approx 0.001$，认为分布符合 $B\left(12, 0.04\right)$ ，即 12 重伯努利试验，计算得发生事件“在 12 个产品中抽到 3 个次品的概率为”：

$$P_{12}\left(3\right) = \mathrm{C}_{12}^{3} p^3 \left(1-p\right)^9 \approx 0.0097.$$

因此“在 12 个产品中抽到 3 个次品的概率”事件是小概率事件，但一次试验就发生，因此推翻原假设，即 $p > 0.04$ ，所以不能出厂

同理，

$$P_{12}\left(1\right) \approx 0.306.$$

概率并不算小，因此可以认为原假设 $p \leq 0.04$ 成立

Notation. 一致最优势假设检验：使第二类错误尽可能小

将上述问题建模:

1. 提出假设: $H_0 : p \leq 0.04, H_1 : p > 0.04$
2. 样本观测值: $(x_1, x_2, \ldots, x_{12})$
3. 设定小概率阈值: $\alpha = 0.01$

Question. 白糖打包机: 包装得到的糖重量为一个服从正态分布的随机变量 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ，运行正常时 $\mu = 100\ \mathrm{kg}, \sigma^2 = 0.05$ ，为检验运行是否正常，随机抽取 9 袋糖测得净重:

$$(99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.1, 100.5).$$

求机器是否运作正常 ($H_0 : \mu = 100, H_1 : \mu \neq 100$)

Solve. 由于 $\sigma^2 = 0.05$ ，且工艺不改变，因此可以认为方差不变，即 $X \sim N(\mu, 0.05)$;

假设: $\mu = \mu_0 = 100$ ，首先求出样本均值和方差: $\overline{X} = 99.978$

由于小概率事件原理以及: $\overline{X}$ 是 μ 的一致最小方差无偏估计量: $\left|\overline{X} - \mu\right|$ 应该很小; 易得 $\overline{X}$ 是 μ 的点估计 (矩估计、极大似然估计)，则当 H_0 成立时，$\left|\overline{X} - \mu_0\right|$ 也应该很小

设定拒绝域，即当

$$\left|\overline{X} - \mu_0\right| > c.$$

时就拒绝原假设

由于 $\alpha = P(\text{犯第一类错误}) = P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{成立})$，且 $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{n}\right)$ (上一章总体的结论)，标准化后为 $U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

根据标准化后的随机变量转换后:

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| > c\right) &= P\left(\frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{-c}{\sigma/\sqrt{n}} \leq U \leq \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha.
\end{aligned}$$

这里的显著性水平 α 可以随意定，但一般使用 $0.01, 0.025, 0.05$ 这几个值，假定 $\alpha = 0.05$ ，则对于标准正态分布: $P\left(U \leq \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \frac{1-\alpha}{2}$，查表得到 $u_{\frac{1-\alpha}{2}} = u_{0.475} = \frac{c}{\sigma/\sqrt{n}}$，即:

$$c = \frac{u_{0.475} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}.$$

已知 $\overline{X} = 99.98, \sigma = \sqrt{0.05}, \mu_0 = 100, \alpha = 0.05$，带入后

计算可得:

$$\left|\overline{X} - \mu_0\right| = 0.02.$$

假设检验的种类

a. $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_0$：双侧检验（简单原假设/简单备择假设）
b. $H_0 : \mu \leq \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$：右侧检验（拒绝域在右边）
c. $H_0 : \mu \geq \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$：左侧检验（拒绝域在左边）

Notation. 期末考试规范性：10 分，每步 2 分

a. 提出假设 H_0, H_1
b. 选择统计检验量 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ or $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$
c. 确定拒绝域 $\mathscr{X}$
d. 计算统计检验量的样本值，观察是否在拒绝域内
e. 下结论

Example. 书上例题 8.2.1：慢性铅中毒

Lecture 21

11.28

两个总体的参数估计

假设种类：

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2, H_1 : \mu_1 < \mu_2$
- $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2, H_2 : \mu_1 > \mu_2$
- ${}^\star H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq c, H_1 : \mu_1 - \mu_2 < c$
- ${}^\star H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq c, H_1 : \mu_1 - \mu_2 > c$

一般使用点估计：$\overline{X} = \hat{\mu_1}, \overline{Y} = \hat{\mu_2}$，将假设转为：$\mu_1 - \mu_2 \geq c \Rightarrow \overline{X} - \overline{Y} \geq c$
原因：$\overline{X} - \overline{Y}$ 是 $\mu_1 - \mu_2$ 的最小方差无偏估计

Notation. 两个总体匹配/不独立

Example. 一种马达正常工作的平均电流不超过 0.8A，抽取 16 台马达，测得 $\overline{X} = 0.92, S^2 = 0.32$，假设电流符合正态分布 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，取 $\alpha = 0.05$，求厂家的话是否可信

Solve. 确定假设：有两种可能的假设：

a. $H_0 : \mu \leq 0.8, H_1 : \mu > 0.8$
b. $H_0 : \mu \geq 0.8, H_1 : \mu < 0.8$

确定假设统计量：由于 σ 未知，因此使用 t 统计量：$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
分别带入数据后发现：对于 $H_0 : \mu < 0.8$ 和 $H_0 : \mu \geq 0.8$，都不拒绝原假设

Notation. 对于假设检验，任何假设都有犯错误的可能，拒绝原假设的可能是充分的（α 一般较小），不拒绝原假设有较大的可能犯错误（β 可能更大），因此不拒绝原假设的结论需要加大样本量继续验证

正态总体的方差的检验

检验统计量不使用 μ ： $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$
继续化简：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)\cdot \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma_0^2}.$$

此时使用 $S^2 = \hat{\sigma}^2$ 来估计 σ ，如果 μ 已知则可以使用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \hat{\sigma}^2$ 来估计 σ

总体分布的卡方拟合优度检验

根据样本预测总体的分布种类（假设）

Example. 某建筑工地发生事故的记录：求 $\alpha = 0.05$ 下，数据是否符合泊松分布 $P(\lambda)$

表 5: 工地事故

事故数	天数
0	102
1	59
2	30
3	8
4	0
5	1
≥ 6	0
合计	200

Notation. 泊松分布：

$$X \sim P(\lambda) \quad p = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Solve. 设每天发生事故 i 次为事件 A_i，确定假设：

- 原假设 $H_0 : \forall i, P(A_i) = p_i$
- 被则假设 $H_1 : \exists i, P(A_i) \neq p_i$

λ 可以使用 $\overline{X} = \hat{\lambda}$ 估计，即 $\hat{\lambda} = \overline{x} = 0.74$ ，使用 $P(0.74)$ 可以计算 $\hat{p}_i$

确定假设统计量：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{np_i} - n$$
$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{n\hat{p}_i} - n$$

.