Part III-B: Statistic

Lecture by SongHao

Note by THF

2024 年 10 月 20 日

目录

Learn 3

1 条件概率

Example. 有男女生各 50 人，有 30 个男生和 10 个女生抢到了宋浩老师的月饼，求在吃到月饼的学生中男生占比

分析：总人数 100 人为总样本空间 Ω，吃到月饼的学生 40 人，为第二个样本空间 Ω_1

其中男生有 30 人，即概率为：

$$P\left(A\right)=\frac{30}{40}.$$

Definition. 条件概率：Ω 是样本空间，A, B 是两个事件，假设 $P(B) > 0$ ，求在 B 发生的条件下 A 发生的概率，称为 A 对 B 的条件概率，记作：

$$P(A|B).$$

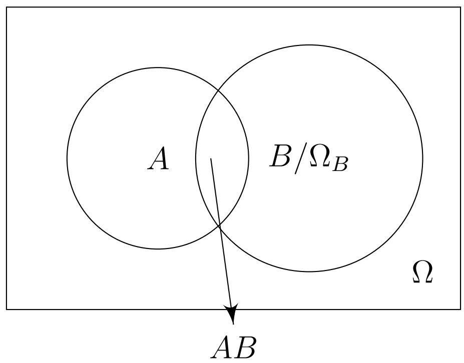
前面提及的概率 $P(A)$ 称作无条件概率，样本空间为 Ω

条件概率的样本空间发生了变化，$P(A|B)$ 的样本空间变为了 $B = \Omega_B$

1.1 计算

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

图示如下：



Example. 有编号 $1-6$ 的六个球，随机取一个，观察号码，B 代表号码为偶数，A_1, A_2 代表取到 $1, 2$ 号，A_3 代表取到大于 4 ，求：

1. $$P(A_1) = \frac{1}{6}$$
2. $$P(A_1|B) = \frac{0}{3} = 0$$
3. $$P(A_2) = \frac{1}{6}$$
4. $$P(A_2|B) = \frac{1}{3}$$

Learn 3

5.
$$P\left(A_3\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

6.
$$P\left(A_3|B\right)=\frac{1}{3}$$

Notation. 条件概率和无条件概率一般不相等

1.2 性质

Rule.
$$P\left(A|B\right)\geq 0.$$

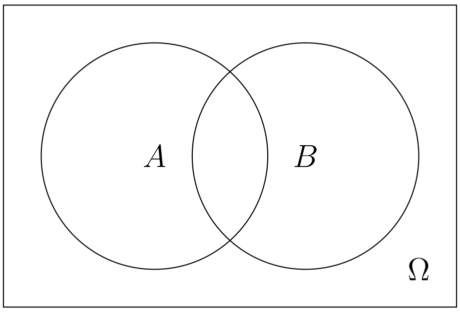
Rule.
$$P\left(\Omega|B\right)=1.$$

Rule. 可列可加性：对 $A_1, A_2 \dots A_n, \dots$ 不相容，则：
$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i|B\right).$$

Rule. 乘法公式：
$$P\left(AB\right)=P\left(B\right)P\left(A|B\right)=P\left(A\right)P\left(B|A\right).$$

Proof.
$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}.$$
$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}.$$
移项即得上式。 □

画图解释如下：



Learn 4

10.20

1.3 伯努利模型

Notation. 独立试验序列：$E_1, E_2, \ldots, E_n$ 彼此相互独立

n 重独立试验：$E_1, E_1, \ldots, E_1$ 做 n 遍，且相互独立，记作 E_1^n

伯努利试验：结果只有两种：$\Omega = \{A, \bar{A}\}$

Example. 抛硬币是伯努利试验

Notation. n 重伯努利试验：做 n 次结果只有两种的独立试验

Corollary. A 发生的概率为 p，$p \in (0,1)$，则 $\bar{A}$ 的概率为 $1-p$，在 n 重伯努利试验中，A 发生 k 次的概率为：

$$P_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{1-k}.$$

或：

$$P_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{1-k} \quad q = 1-p.$$

该公式称为二项概率公式

Notation. 为何称为二项概率公式：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_n(k) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{1-k} \\ &= (p+q)^n \\ &= (p+1-p)^n \\ &= 1.\end{aligned}$$

本质为二项式展开

Example. 一批产品的废品率为 0.1 ，良品率为 0.9，每次取一个产品又放回，共取三次，求：

1. 恰有一次取到废品的概率
2. 恰有两次取到废品的概率
3. 三次都取到废品的概率
4. 三次都取到良品的概率

1. $\mathrm{C}_3^1 0.1^1 \cdot 0.9^2$
2. $\mathrm{C}_3^2 0.1^2 \cdot 0.9^1$
3. $\mathrm{C}_3^3 0.1^3$
4. $\mathrm{C}_3^0 0.9^3$

Example. 彩票每周开奖一次，中奖率十万分之一，十年一共买了 520 次彩票，求十年从未中奖的概率

解：$p = 0.99999$，$P_{520}(520) = \mathrm{C}_{520}^{520} 0.99999^{520} \approx 0.9948$

Notation. 为了更快计算二项公式的结果可以使用两种估算方法

2 随机变量及分布

Definition. 随机变量：把试验的结果转化为符号语言
即：用一个映射函数将试验的所有结果映射为数 $X = X(\omega)$

Example. $\{\omega | X(\omega) = a\}$ 表示一个事件，也可以写成：$\{X = a\}$
事件的概率：$P\{X = a\}$ 或 $P(X = a)$