Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by 李漫漫
Note by THF

2024 年 11 月 7 日

目录

Lecture 1

09.03

概述

资源

公众号：狗熊会、大数据文摘，好玩的数学
MOOC：爱课程，Coursera，Edx，网易公开课等

教师要求

教材：概率论与数理统计第二版
参考：The Lady Tasting Tea，程序员数学之概率统计，…
学习目的：自问自答，自言自语
考核及成绩组成：
期中（10）
作业与考勤（10）
期末（70）
MOOC（10）

课程简介

概率：Probability
统计：Statistics
概率论与数理统计：Probability theory and Mathematical statistics

Notation. 第一章重要但不突出

从概率到概率论：新增时间（随机事件、样本空间变化）
从统计到数理统计：统计最开始为记录性质，后来衍生出预测，通过数学模型引入数理统计
类似的还有政府统计、经济统计等
2000-2015 年间，IT 时代逐渐转换为 DT(Data Technology) 时代，大数据逐渐占时代主体

概率论部分

1 第一章

1.1 随机事件

1.1.1 现象

确定性现象：一定条件下必然发生
随机现象强调统计规律性

Notation. 统计规律性：

1. 每次试验前不能预测结果
2. 结果不止一个
3. 大量试验下有一定规律

Example. 星际旅行时宇航员看到的现象不是随机现象：
对星际旅行的人而言，无法完成大量试验
宇航员观测到的结果无规律，只能称为不确定现象 (Uncertain)

Example. 扔一个骰子不能预测结果，但可以知道结果是 $1,2,3,4,5,6$ 的一个，因此观察扔骰子是随机现象 (Random)

1.1.2 随机试验

随机试验 (E)：研究随机现象时进行的实验或观察等

Notation. 随机试验的特性：

1. 可以在完全相同的条件下重复进行
2. 试验的可能结果在试验前已知
3. 试验的结果不可预测

1.1.3 样本

在随机试验中，不可再分的最简单结果成为样本点 ω，全体样本点组成样本空间 Ω

Notation. 随机事件是基本事件的集合

Example. 扔骰子存在 6 个基本事件，可以产生 2^6 个随机事件
其中样本空间 $\Omega = \{x|x \in [1,6]\,, x \in \mathbb{R}\}$

Example. 1. 射击时用 ω_i 表示击中 i 环，样本空间为：

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}\}.$$

2. 微信用户每天收到信息条数的取值范围是 $[0, +\infty)$，样本空间为无限集：

$$\Omega = \{N|N \geq 0, N \in \mathbb{R}\}\,.$$

3. 电视机的寿命样本空间为 $\Omega = \{t|t > 0\}$，为连续的非负实数集
4. 投掷两枚硬币，样本空间为 $\Omega = \{(x,y)\,|x,y = 0,1\}$，其中 $0,1$ 分别代表正面和背面

Notation. 1. 样本点可以不是数
2. 样本空间可以是无限集

1.1.4 随机事件

1.2 事件关系与运算

1.1. $A \subset B$：A 发生必然 B 发生
1.2. $A = B$ ：$A \subset B, B \subset A$
2. $A \cup B$：A 和 B 至少有一个发生
2.1 $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_1$
3. $A \cap B$：A 和 B 只发生一个
4.1. A, B 互斥：不能同时发生：$AB = \varnothing$

4.2. A, B 对立：非此即彼：$A \cup B = \Omega$

5. $A - B$：$A\bar{B}$ 或 $A(\Omega - B)$，或 A 发生但 B 不发生

Notation. $A - B = A\bar{B} \subset A$，$B - A = B\bar{A} \subset B$

当 $AB = \varnothing$ 时，$A - B = A, B - A = B$

Notation. $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$，且 $P(\Omega) + P(\varnothing) = 1$ ，即 Ω 与 $\varnothing$ 互斥

6. 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
7. 分配律：$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$ ，$(AUB)C = AC \cup BC$
8. 交换律：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$

Notation. 德摩根律：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

Example.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}.$$

$$\overline{(A \cup B) \cup C} = \overline{A \cup B}\bar{C} = \dots.$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

1.3 事件的概率

概率分类：

$$\begin{cases} \text{主观概率} \\ \text{统计概率} \\ \text{古典概型} \\ \text{几何概型} \end{cases}.$$

Notation. 德摩根、蒲丰、皮尔逊、维纳均进行过投掷硬币的试验，随着试验次数的增加，出现正面的频率逐渐接近 0.5

大数定律说明，该事件的概率为 0.5

Definition. 统计概率：A 为试验 E 的一个事件，随着重复次数 n 的增加，A 的频率接近于某个常数 p，定义事件 A 的概率为 p，记为 $P(A) = p$

频率的特性:

1. 非负性: $f_n(A) \in [0,1]$
2. 规范性: $f_n(\Omega) = 1$
3. 有限可加性: A_i 两两互斥, 则 $f_n\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n f_n(A_i)$

Definition. 主观概率: 人对某个事件发生与否的可能性的估计

Definition. 完备事件组: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥, 且

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = 1.$$

或

$$\sum_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

则称 $A_1 \to A_n$ 为完备事件组(不重不漏)

Example. $A, \bar{A}$ 是完备事件组

1.3.1 古典概型

古典概型特点: 有限等可能性(基本事件数有限, 基本事件发生的可能性相等)

Notation. 概率计算:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Example. 某年级有 6 人在 9 月份出生, 求 6 个人中没有人同一天过生日的概率

基本事件总数: 30^6

目标事件: $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = P_{30}^6$

概率:

$$P(A) = \frac{\mathrm{P}_{30}^6}{30^6}.$$

Example. 有 N 个乒乓球中有 M 个白球、$N-M$ 个白球, 任取 $n(n<N)$ 个球, 分有放回和不放回, 求取到 m 个黄球的概率

1. 不放回:

基本事件总数: C_N^n

目标事件: $\mathrm{C}_M^m \mathrm{C}_{N-M}^{n-m}$

概率:

$$P = \frac{\mathrm{C}_M^m \mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{C}_N^n}, n = \max\{0, n-(N-M)\}, \ldots, \min\{n, M\}.$$

2. 有放回:

$$P = \frac{\mathrm{C}_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n} = \mathrm{C}_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}, m \in [0, n].$$

注意到该概率为伯努利分布 $\mathrm{C}_n^m B\left(n, \frac{M}{N}\right)$

匹配问题:

Example. 麦克斯韦-玻尔兹曼统计问题:

n 个质点随机落入 $N\left(N>n\right)$ 个盒子，盒子容量不限，设 A 表示指定的 n 个盒子各有一个质点，B 表示恰好有 n 个盒子装一个质点

基本事件总数：N^n

A 考虑顺序，即:

$$P\left(A\right)=\frac{n!}{N^n}.$$

同理:

$$P\left(B\right)=\frac{\mathrm{C}_N^n}{N^n}.$$

1.3.2 几何概型

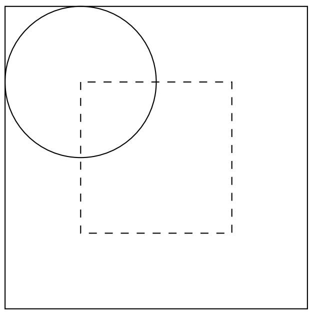
几何概型特点：使用事件所对应的**几何度量**计算

$$P\left(A\right)=\frac{m\left(A\right)}{m\left(\Omega\right)}.$$

Notation. 度量：面积、体积、长度等描述几何量大小的测度方式

Example. 地面铺满 2 dm 的地砖，向地面投掷一个 $r=0.5$ dm 的光盘，求光盘不与边线相交的概率

如图:

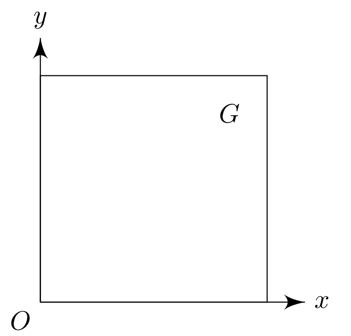


课后习题：A 组 8 题，B 组 3 题

Example. 两人相约 8-9 点间在某地相见，先到的人等待 20 分钟后离去，求二人会面的概率

设 (x,y) 分别表示两人到达的时刻

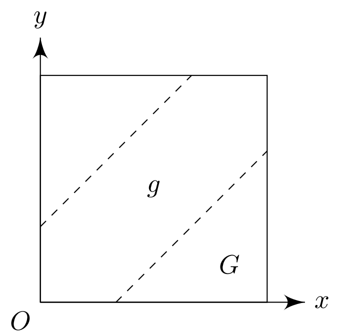
设 G 为样本空间，绘制样本空间:



由题：两人到达的时间之差的绝对值小于 20 分钟（$\frac{1}{3}$ 小时），即：

$$|x-y| \leq \frac{1}{3}.$$

将事件绘制：



$$P(g) = \frac{m(g)}{m(G)} = \frac{S(g)}{S(G)} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \frac{4}{9}.$$

Notation. 几何概型的特点：

1. 非负性：

$$P(A) \in [0,1].$$

2. 规范性：

$$P(\Omega) = 1.$$

3. 可列可加性：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Lecture 2

1.4 公理化

$$(\Omega, \mathscr{F}, p).$$

Lecture 2

Definition. Ω：随机试验所产生的所有样本点的集合

$\mathscr{F}$：集合内所有子集为元素的集合

$P(X)$：概率函数

Axiom. 非负性：

$$P(A) \geq 0, A \in \mathscr{F}.$$

Axiom. 规范性：

$$P(\Omega) = 1.$$

Axiom. 可列可加性：对两两互斥的事件 $A_1, A_2, \ldots,$

$$P\left(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

从三条公理得出的性质：

Notation. 1. $P(\varnothing) = 0$

2. 有限可加性：

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right).$$

3. $P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$

4. $A \subset B \implies P(B - A) = P(B) - P(A)$

5. $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Notation. 6.1.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC)$$

$$-P(AC) + P(ABC).$$

6.2.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+i}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i A_j A_k)$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Example. 从有号码 $1, 2, \ldots, n$ 的 n 个球中有放回地取 m 个球，求取出的 m 个球中最大号码为 k 的概率

$$P\{k = 1\} = \left(\frac{1}{n}\right)^m.$$

逐个列举计算较复杂，记事件 B_k 为取出的 m 个球最大号码不超过 k，只需保证每次摸出的球都不超过 k 即可：

$$P\left(B_k\right) = \frac{k^m}{n^m}.$$

又有 $P\left(A_k\right) = P\left(B_k\right) - P\left(B_{k-1}\right)$，且 $B_{k-1} \subset B_k$

所以：

$$P\left(A_k\right) = \frac{k^m}{n^m} - \frac{(k-1)^m}{n^m}.$$

Example. 匹配问题：n 个学生各带有一个礼品，随机分配礼品，设第 i 个人抽到自己的礼品称为一个配对，求至少有一个配对的概率

设 A_i 是第 i 个人抽到自己的礼品，A 为目标事件，则：

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

$$P\left(A_i\right) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

$$P\left(A_iA_j\right) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{\mathrm{P}_n^2}.$$

$$P\left(A_iA_jA_k\right) = \frac{1}{\mathrm{P}_n^3}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{1}{n!}.$$

$$P\left(A\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P\left(A_iA_j\right) + \ldots.$$

1.5 条件概率与乘法公式

Definition.

$$P\left(A\right) > 0, P\left(B|A\right) = \frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}.$$

即：在 **A 发生的条件下**，B 发生的概率

Definition. 乘法公式：

$$P\left(AB\right) = P\left(A\right)P\left(B|A\right) = P\left(B\right)P\left(A|B\right).$$

Notation. A, B 独立：$P\left(AB\right) = P\left(A\right)P\left(B\right)$

结合乘法公式：

$$P\left(B\right) = P\left(B|A\right).$$

$$P\left(A\right) = P\left(A|B\right).$$

1.6 全概率公式

Corollary. 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为完备事件组，事件 $B \subset \Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$，则：

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i).$$

Notation. 此时完备事件组的情况应该已知，通过完备事件组 A 的辅助可以求得较复杂事件 B 的概率

1.7 贝叶斯公式

Corollary.

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)}.$$

贝叶斯公式被称为“逆概率公式/后验公式”，其中事件 B 更可能是事件的结果，将事件组 A 看作结果出现的原因，则贝叶斯公式是一个从“结果”推“原因”的可能性的公式

Notation. 对比一般公式：事件 A 导致 B，求 B 发生的概率

贝叶斯公式：事件 A 导致 B，A 中的一个事件 A_i 导致 B 发生的概率

Axiom. 条件概率的公理：

1. 非负性：$P(A) \in [0,1]$
2. 规范性：$P(\Omega|A) = 1$
3. 可列可加性：

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

Corollary.

$$P(\bar{B}|A) = P(\Omega - B|A) = P(\Omega|A) - P(B|A).$$

Corollary.

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2).$$

$$\implies P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 B_2|A).$$

Corollary. 乘法公式：

$$P(ABC) = P(A(BC)) = P(A) P(BC|A) = P(A) P(B|A) P(C|AB).$$

Example. 8 个红球 2 个白球，求前三次结果是“红红白”的概率：

1. 不放回取 3 个（和一次取三个球相同）

所有可能性：$10 \times 9 \times 8$

目标事件：$8 \times 7 \times 2$

或使用乘法公式：设 A_i 为第 i 次取到红球，目标事件可表示为 $A_1 A_2 \bar{A}_3$

概率:

$$P\left(A_1A_2\bar{A}_3\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2|A_1\right)P\left(\bar{A}_3|A_1A_2\right)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{7}{45}.$$

2. 每次取后放回，并加入两个同色的球，取 3 次（不能使用古典概型）

概率:

$$P\left(A_1A_2\bar{A}_3\right)=\frac{8}{10}\times\frac{8}{12}\times\frac{2}{14}=\frac{8}{105}.$$

Example. 某疾病的发病率为 0.0004, 患病检测呈阳性的概率为 0.99, 误诊为阴性的概率为 0.01, 误诊为阳性的概率为 0.05，不患病检测呈阴性概率为 0.95，一个人检测呈阳性，求其患病的概率

设阳性为 A，患病为 B

则:

$$P\left(A|B\right)=0.99, P\left(A|\bar{B}\right)=0.05, P\left(B\right)=0.0004.$$

要求：$P\left(B|A\right)$

使用贝叶斯公式:

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(B\right)P\left(A|B\right)}{P\left(AB\right)+P\left(A\bar{B}\right)}.$$

$$=\frac{P\left(B\right)P\left(A|B\right)}{P\left(B\right)P\left(A|B\right)+P\left(A|\bar{B}\right)P\left(\bar{B}\right)}=0.0079.$$

1.8 独立性

Definition. A, B 独立，则：$P\left(A|B\right)=P\left(A\right)$

Notation. 证明独立性:

1. $P\left(A\right)P\left(B\right)=P\left(AB\right)$

Notation. 独立事件的特点:

1. A, B 独立有：A, B 所有的组合（包含补集）均独立
2. A, B 独立的充要条件：$P\left(A|B\right)=P\left(A\right)$ or $P\left(B|A\right)=P\left(B\right)$
3. $\varnothing$ 与任何随机事件独立，Ω 与任何随机事件独立

对于三个事件相互独立:

$$\begin{cases}P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)\\P\left(AC\right)=P\left(A\right)P\left(C\right)\\P\left(BC\right)=P\left(C\right)P\left(C\right)\\P\left(ABC\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)P\left(C\right)\end{cases}.$$

对比乘法公式：$P\left(ABC\right)=P\left(A\right)P\left(B|A\right)P\left(C|AB\right)$

Definition. 相互独立：

有 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 事件组，对 $\forall s \in [2, n]$ 个事件 $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_s}$ 均有：

$$P\left(\prod_{n=1}^{s} A_{k_n}\right) = \prod_{n=1}^{s} P\left(A_{k_n}\right).$$

称事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立

Definition. 两两独立：对事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ，若任意两个事件独立，则称为两两独立

Notation. 相互独立一定两两独立，反之不一定

Notation. 相互独立事件组的性质：

1. 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立，将其中任意部分改为对立事件，事件组仍为相互独立

2. 事件相互独立，将事件组任意分为两组（或多组），对组内事件进行“并、交、差、补”操作后，事件间依然相互独立

独立重复实验

Definition. E_1, E_2 中一个试验的任何结果和另一个试验的任何结果相互独立，则试验相互独立；若 n 个独立试验相互独立且试验相同，称 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 为 n 次独立重复实验，或 n 重独立试验

Example. 扔硬币和掷骰子为独立试验，其中扔硬币为伯努利试验（只有两个结果）

Definition. n 重独立试验 E 中，每次试验都是伯努利试验（可能结果只有两个），称 E 为 n 重伯努利试验

1. 二项概率公式：成功 k 次的概率记为 $P_n(k)$，假定前 k 次成功，后 $n-k$ 次失败，则

$$P_i = p^k (1-p)^{n-k}.$$

指定事件 A 发生的位置有 C_n^k 种，则：

$$P_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

称为二项概率公式

2. 几何概率公式：首次成功恰好发生在第 k 次的概率记为 $G(k)$ ，设前 $k-1$ 次失败，则：

$$G(k) = q^{k-1} p.$$

可以验证：$\sum G(k) = 1$

3. 负二项概率：需要成功 r 次，第 r 次成功恰好发生在第 k 次的概率记为 $G_r(k)$ ，设前 $k-1$ 次试验有 $r-1$ 次成功，则：

$$G_r(k) = \mathrm{C}_{k-1}^{n-1} p^r q^{k-r}.$$

同样有：$\sum G_r(k) = 1$

Lecture 3

2 一维随机变量及其分布

2.1 随机变量及其分布函数

随机变量

$$\text{随机变量}\begin{cases}\text{函数}\\\text{连续}\end{cases}.$$

Example. 下一个进入教室的同学可能是男是女，分别记为 1,2，则有映射：

$$\{\text{男},\text{女}\}\to\{1,2\}.$$

将离散的结果映射为坐标轴上离散的数值，所有的数值性的观测结果无需改变，如：下一个进入教室的同学身高为 ω，则有映射：

$$X(\omega)=\omega.$$

Definition. 实值变量（无分布函数）使用小写字母，随机变量（有分布函数）使用大写字母

对 $\forall x\in\mathbb{R}$ ，$\{X\le x\}=\{\omega|X(\omega)\le x,\omega\le\Omega\}\in\mathscr{F}$，则 X 称为**概率空间的随机变量**

Example. 对于 $\{M,F\}\to\{1,2\}$ ，取 $x=1$ ，写出定义式：

$$\{X\le 1\}=\{M\}.$$

同时由于 $x\in\mathbb{R}$ ，取 $x=1.5$ 时，$\{X\le 1.5\}=\{M\}$ 取 $x=4$ 时，$\{X\le 4\}=\{M,F\}$

由于 $x\in\mathbb{R}$ ，则可以引入其他分布函数辅助，继而引用微积分理论

对于 $(\Omega,\mathscr{F},P)$：

$$P:\Omega\to[0,1].$$

Notation. X 具有随机性（样本点具有随机性），是定义在 Ω 上的函数

X 是随机变量时 $\{a\le X\le b\},a<b,a,b\in\mathbb{R}$ 均为随机事件

X 是随机变量，$g(x)$ 是非单点的实值函数，则 $Y=g(X)$ 也是随机变量：

$$Y(\omega)=g(X(\omega)).$$

Example. 对灯泡做寿命试验，用 X 表示测得灯泡的寿命，样本空间 $\Omega=[0,+\infty)$，则：

$A=$ “测得灯泡寿命大于 500 h” $=\{X>500\}$

$B=$ “测得灯泡寿命小于 5000 h” $=\{X\le 5000\}$

分布函数

Definition. 分布函数：记

$$F(x) = P\{X \leq x\}, x \in \mathbb{R}.$$

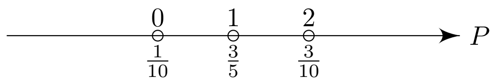
为 X 的分布函数

Example. 3 白 2 黑，不放回取三次球，求取到的黑球个数 X 的分布函数

X 可以取到：0,1,2

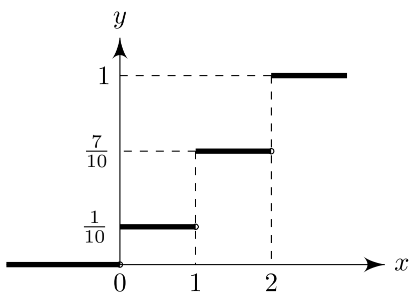
$$P\{X=0\} = \frac{\mathrm{C}_3^3}{\mathrm{C}_5^3}, P\{X=1\} = \frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_5^3}, P\{X=2\} = \frac{\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_5^3}.$$

概率在坐标轴上体现：



$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{10}, x \in [0,1) \\ \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}, x \in [1,2) \\ 1, x \geq 2 \end{cases}.$$

图像：



Notation. 分布函数的特性：

1. 非负性：$P \in [0,1]$
2. 单调不减性
3. 右连续性：

$$F(x) = \lim_{t \to x+0^+} F(t).$$

3.1 不满足左连续，例：$P(0) - P(0^-) \neq 0$

4. 规范性：

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

关于 X 的事件都可以使用分布函数表示：

$$\begin{cases} P\left\{X=a\right\}=\lim_{\varepsilon\to 0^{+}} P\left\{a-\varepsilon<X\leq a\right\}=F\left(a\right)-F\left(a-0^{+}\right) \\ P\left\{a\leq X<b\right\}=F\left(b-0^{+}\right)-F\left(a-0^{+}\right) \\ \ldots\ldots \end{cases}.$$

Example. 在 $[a,b]$ 内随机取一个数 X ，求 X 的分布函数

关键区域：$x\in[a,b)$,

$$\left\{X\leq x\right\}=\left\{a\leq X\leq x\right\}.$$

$$F\left(x\right)=P\left\{X\leq x\right\}=\frac{x-a}{b-a}.$$

作业：预习第 2,3 节

Lecture 4

$$随机变量\begin{cases} 离散型\begin{cases} 有限型 \\ 无限型 \end{cases} \\ 连续型 \end{cases}.$$

Notation. 回忆：分布函数有以下特征：

1. 非负性
2. 规范性
3. 右连续性
4. $\forall x<y\in\mathbb{R},F\left(x\right)\leq F\left(y\right)$

计算随机变量的概率可以用分布函数表达：

$$P\left\{a\leq X\leq b\right\}=F\left(b\right)-F\left(a\right).$$

2.2 常见分布律

1. 退化分布
2. 两点分布

2.1. $0\sim 1$ 分布（$X\sim B\left(1,p\right)$）：

$$P\left\{X=k\right\}=p^{k}\left(1-p\right)^{1-k},k=0,1.$$

3. 二项分布（$X\sim B\left(n,p\right)$）：

$$P\left\{X=k\right\}=\mathrm{C}_{n}^{k}p^{k}\left(1-p\right)^{k},k=0,1,2,\ldots,n,p\in\left(0,1\right).$$

4. 几何分布（$X \sim G(p)$）:

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,3,\ldots, p \in (0,1).$$

5. 泊松分布（$X \sim P(\lambda)$）: 用于描述稀有事件的发生

$$P\{X=k\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k=0,1,2,\ldots,\lambda>0.$$

Notation. 由

$$\mathrm{e}^x=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}.$$

可得:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P\{X=k\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=1.$$

Notation. 分布律的基本性质:

1. 非负性: $p_i \geq 0$
2. 正则性: $\sum_{i=1}^{+\infty}p_i=1$，即每一个点的概率都应该知道

Example. 保险问题

若一年中某类保险受保人死亡的概率为 0.005, 现有 10000 人参加保险，求未来一年中:

1. 40 人死亡的概率

设 X 为未来一年中死亡的人数，有 $X \sim B(10000, 0.005)$ ，计算:

$$P\{X=40\}=\mathrm{C}_{10000}^{40}0.005^{40}\cdot 0.995^{9960}\approx 2.143\times 10^{-2}.$$

直接计算较为复杂，可以使用近似计算

有两种近似计算方法: 泊松定理、中心极限定理

Notation. 泊松定理: 二项分布有时可以转化为泊松分布:

如果 $\lim_{n\to+\infty}np_n=\lambda>0$（极小但不为 0），则:

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{C}_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k=0,1,2\ldots.$$

前提: n 大 p 小

将保险问题转换为泊松分布:

$$\lambda=np=50.$$

$$P\{X=40\}=\frac{50^{40}}{40!}\mathrm{e}^{-50}\approx 0.02.$$

2. 死亡人数不超过 70 的概率

$$P\left\{X \le 70\right\} = \sum_{k=0}^{70} \mathrm{C}_{10000}^{k} 0.005^{k} \cdot 0.995^{(10000-k)}.$$

$$= \sum_{k=0}^{70} \frac{50^k}{k!} \mathrm{e}^{-50} \left(\lambda = np = 50\right).$$

Notation. 几何分布具有无记忆性：当前试验对过去的试验无任何影响，即：

$$P\left\{X = k+1 | X > k\right\} = P\left\{X = 1\right\}.$$

可以使用条件概率证明：

$$P\left\{X = k+1 | X > k\right\} = \frac{P\left\{X = k+1, X > k\right\}}{P\left\{X > k\right\}}.$$

由于：

$$P\left\{X > k\right\} = \sum_{j=k}^{+\infty} p\left(1-p\right)^j = p\sum_{j=k}^{+\infty}\left(1-p\right)^j = p\left(1-p\right)^k \cdot \frac{1}{1-1+p} = \left(1-p\right)^j.$$

2.3 连续型随机变量

Definition.

$$F\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(x\right) \mathrm{d}x, x \in \mathbb{R}.$$

则 X 为连续型随机变量，$f\left(x\right)$ 称为 X 的密度函数

连续型随机变量的性质：

1. 非负性：$f\left(x\right) \ge 0, x \in \mathbb{R}$
2. 规范性：
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) \mathrm{d}x = 1.$$
3.
$$P\left\{a < X \le b\right\} = \int_{b}^{a} f\left(x\right) \mathrm{d}x, a < b.$$
4. F 连续
5. $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$

Notation. 由于连续性随机变量的分布函数 F 处处连续，所以 $\forall x \in \mathbb{R}$ ，有 $P\left\{X = x\right\} = F\left(x\right) - F\left(x-0\right) = 0$，即：概率为 0 的事件不一定是不可能事件

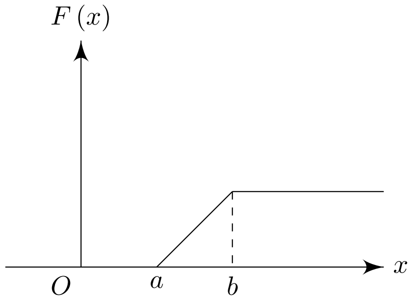
Example.

常见的连续型密度函数:

1. 均匀分布（$X \sim U[a,b]$）:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}.$$

对应的分布函数图像:



2. 指数分布（$X \sim \Gamma(1,\lambda)$）:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}.$$

Notation. 指数分布大多数与等待时间有关

指数分布的充分必要条件为

$$\forall s,t \geq 0, P\{X > s+t | X > s\} = P\{X > t\}.$$

即指数分布有无记忆性/无后效型（指数分布的特点）

3. 正态分布（$X \sim N(\mu,\sigma^2)$）:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Notation. σ^2 ：方差，μ ：数学期待

3.1. 标准正态分布（$X \sim N(0,1)$）:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}}.$$

Lecture 5

Notation. 马尔可夫分布也具有无记忆性

回忆：正态分布（高斯分布）

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

标准正态分布

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

2.4 标准化

Definition. 标准化将随机变量转化为另一组随机变量

对于 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ，移除前者的中心（将中心变为 0），除以标准差，即得到符合标准正态分布的 $Y \sim N(0,1)$

1. 去中心化
2. 除以标准差

即：

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}.$$

标准化后的随机变量期望为 0，方差为 1

$$P\{|X-\mu| < k\sigma\} = P\left\{\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right| < k\right\} = P\{Y < k\}.$$

此时 $Y \sim N(0,1)$ ，即符合标准正态分布

对于原来的 3σ 原则，转化为 $P\{-3 < Y < 3\}$

$$P\{-3 < Y < 3\} = F_Y(3) - F_Y(-3).$$
$$= \phi(3) - \phi(-3).$$

Notation.

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

$$= 2\phi(3) - 1.$$

Example. 设人的高度符合正态分布 $X \sim N(170, 49)$，问在公共设施处的门需要设计多高才能使至少 90% 的人通过

求门高 H 使得 $P\{X \leq H\} \geq 0.9$

$$P\{X \leq H\} \implies P\left\{\frac{X-170}{49} \leq \frac{H-170}{49}\right\}.$$

即:

$$\phi\left(\frac{H-170}{49}\right) \geq 0.9.$$

$$\frac{H-170}{49} \geq 1.28 \implies H \geq 1.80.$$

2.5 随机变量函数的分布

Example.

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}.$$

$$Y = g(X) \sim F_Y(Y).$$

求解 $F_Y(Y)$

Example. $D \sim U[a,b]$ 且

$$S = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi\rho^2}{4}.$$

1. X 离散：Y 一般是离散的
2. X 连续：Y 可能连续，可能分段连续（离散）

Example. X 的分布律:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.15 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

求 $Y = X^2$ 的分布律

列举 Y 的分布律：合并后:

表 1: Y Func

0.15	0.1	0.1	0.2	0.3	0.15
4	1	0	1	4	9

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.45 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Example. 分析法：$X \sim G(0.5)$ （几何分布），求 $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的分布律

易得：Y 可以取得：0,1,-1

$$Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)=\begin{cases}-1, X=4n-1\\0, X=4n\text{且}X=4n-2\\1, X=4n-3\end{cases}.$$

$$P\left\{Y=-1\right\}=\sum_{n=1}^{+\infty}P\left\{X=4n-1\right\}=\sum_{n=1}^{+\infty}0.5\times 0.5^{4n-1-1}.$$

同理:

$$P\left\{Y=0\right\}=\sum_{n=1}^{+\infty}0.5\times 0.5^{2n-1}.$$

$$P\left\{Y=1\right\}=\sum_{n=1}^{+\infty}0.5\times 0.5^{4n-4}.$$

求得 Y 的分布律:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15}\end{pmatrix}.$$

Lecture 6

Corollary. X 是连续性随机变量，密度函数为 $f_X\left(x\right)$

随机变量 $Y=g\left(X\right)$，且 $\exists D, P\left\{Y\in D\right\}=1$，$g\left(x\right)$ 存在反函数 $h\left(y\right)$ 且严格单调可导，则:

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\left|h'\left(y\right)\right|f_X\left(h\left(y\right)\right), y\in D\\0, \text{Others}\end{cases}.$$

Notation. 指数分布 $X\sim\Gamma\left(1,\lambda\right)$ 的数学期望 $E\left(X\right)=\frac{1}{\lambda}$

3 多维随机变量函数及其分布

在实际问题中，试验结果有时需要使用两个或两个以上的随机变量 (random value, r.v.) 来描述

Example. 天气预报：温度、湿度、风力、降水等

3.1 二维随机变量及其分布

Definition. 设 Ω 为随机试验的样本空间，则

$$\forall\omega\in\Omega\xrightarrow{\text{某种变化}}\exists\left(X\left(\omega\right),Y\left(\omega\right)\right)\in\mathbb{R}^2.$$

或:

$$\left\{X\le x, Y\le y\right\}=\left\{\omega|X\left(\omega\right)\le x, Y\left(\omega\right)\le y,\omega\in\Omega\right\}\in\mathscr{F}.$$

称 (X,Y) 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的二维随机变量

Notation. $\{X \le x, Y \le y\} = \{X \le x\} \cap \{Y \le y\}$

性质:

1. $F(x,y) \in [0,1]$
2. 关于每个变量单调不减，即固定 x ，对 $\forall y_1 < y_2$，

$$F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

3. 对每个变量右连续，即:

$$F(x_0, y_0) = F\left(x_0 + 0^+, y_0\right) = F\left(x_0, y_0 + 0^+\right).$$

4. 对 $\forall a < b, c < d$ ，有:

$$F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \ge 0.$$

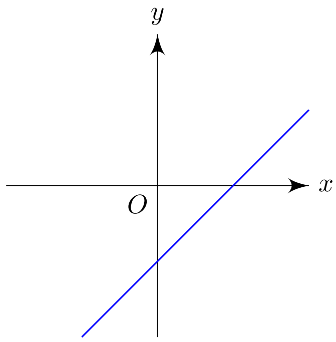
即: 在任意地方框一个矩形，内部区域的概率必须大于等于 0

Example. 性质 4 例题: 设

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, x+y<1 \\ 1, x+y \ge 1 \end{cases}.$$

讨论 $F(x,y)$ 能否成为二维随机变量的分布函数

图 1: 分布函数图像



Notation.

$$P\{X > a, Y > c\} \ne 1 - F(a,c).$$

3.2 二维随机变量的边缘分布函数

边缘分布：降一维

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \le x\} \\ &= P\{X \le x, Y < +\infty\} \\ &= F(x, +\infty) \end{aligned}$$

.

Example. 设随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y) = A\left(B + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(C + \arctan\frac{y}{2}\right), x, y \in (-\infty, +\infty).$$

求 A, B, C

解：$\arctan x$ 的性质：

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

则

$$F(+\infty,+\infty) = A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$
$$F(-\infty,+\infty) = A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$
$$F(-\infty,-\infty) = A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

联立解出 A, B, C

3.3 联合分布律

表 2: 联合分布律

$X \backslash Y$	b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$p_{a\cdot}$
a_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\sum_{n=1}^{j} p_{nj}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\sum_{n=2}^{j} p_{nj}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\sum_{n=i}^{j} p_{nj}$
$p_{b\cdot}$	$\sum_{m=1}^{i} p_{im}$	$\sum_{m=2}^{i} p_{im}$	$\cdots$	$\sum_{m=1}^{i} p_{im}$	1

二维离散随机变量的联合分布函数

$$F\left(x,y\right)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}.$$

如何求 p_{ij} :

1. 古典概型
2. 乘法公式:

$$p_{ij}=P\left\{X=x_i\right\}P\left\{Y=y_i|X=x_i\right\}=P\left\{X=x_i,Y=y_i\right\}.$$

3.4 二维连续性随机变量及其概率特性

Definition. 若

$$F\left(x,y\right)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f\left(u,v\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

则称 $f\left(x,y\right)$ 为二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 的联合密度函数，称 $\left(X,Y\right)$ 为二维连续型随机变量

Notation. 联合密度与联合分布函数的性质:

1. $f\left(x,y\right)\ge 0$
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=1=F\left(-\infty,+\infty\right).$$
3. 对每个边缘连续，在 $f\left(x,y\right)$ 的连续点处:

$$\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=f\left(x,y\right).$$

从而有: $P\left(x<X\le x+\Delta x,y<Y\le y+\Delta y\right)\approx f\left(x,y\right)\Delta x\Delta y$

Lecture 7

两个随机变量的独立性

证明. 当 A,B 独立时: $P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$

$$\forall i,j:P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=P\left\{X=x_i\right\}P\left(Y=y_j\right).$$

□

Notation. 离散随机变量独立的情况下: $P_{ij}=P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}$

如何证明 X,Y 独立:

$$F\left(x,y\right)=P\left\{X\le x,Y\le y\right\}=P\left\{X\le x\right\}P\left\{Y\le y\right\}=F_X\left(X\right)\cdot F_Y\left(y\right).$$

由联合分布律得边缘分布律:

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = \lim_{y_0 \to +\infty} P\{X \le x, Y \le y_0\}.$$

Notation. 连续性随机变量的区间 D 概率:

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \iint_{u=x, v=y} f(u, v)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

概率函数

Notation. 二维均匀分布:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)}, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}.$$

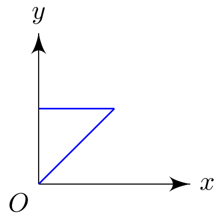
Example.

$$f(x, y) = \begin{cases} Axy, & x \in (0, 1), y \in (0, 1) \\ 0, & \text{Others} \end{cases}.$$

1. 求 A

$$\iint_{x \in [0, y], y \in [0, 1]} Axy \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

图 2: $f(x, y)$

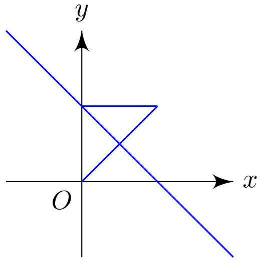


$A = 8$

2. $P\{X + Y \ge 1\}$

$$\begin{aligned} P\{X + Y \ge 1\} &= \iint_{x+y \ge 1} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{x+y \ge 1} 8xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{0.5}^{1} \mathrm{d}y \int_{1-y}^{y} 8xy \mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

图 3: $P(x+y\geq 1)$



3. X, Y 的分布函数

3.1 $x\in(-\infty,0), y\in(-\infty,0)$

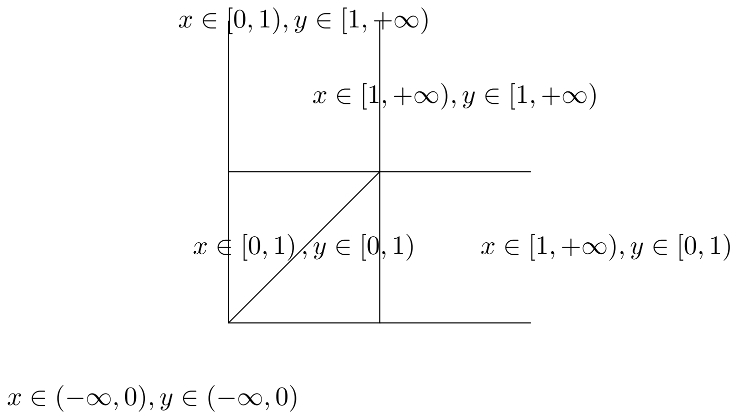
3.2 $x\in[0,1), y\in[0,x)$

3.3 $x\in[0,1), y\in[x,1)$

3.4 $x\in[0,1), y\in[1,+\infty)$

3.5 $x\in[1,+\infty), y\in[0,1)$

3.6 $x\in[1,+\infty), y\in[1,+\infty)$



分段对 Axy 积分:

$$F(x,y)=\iint_{x\leq u,y\leq v} f(u,v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3.5 多维随机变量及分布

Definition. 二维推广至多维:

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leq x_1,X_2\leq x_2,\cdots,X_n\leq x_n\}.$$

称 F 为 n 维随机变量的联合分布函数

Definition. 多维联合分布律:

$$P\left\{X_1=a_{1k_1},X_2=a_{2k_2},\cdots,X_n=a_{nk_n}\right\}.$$

联合分布函数和联合分布律的关系:

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right).$$

$$=\sum_{a_{1k_1}\le x_1}\sum_{a_{2k_2}\le x_2}\cdots\sum_{a_{nk_n}\le x_n}P\left\{X_1=a_{1k_1},X_2=a_{2k_2},\cdots,X_n=a_{nk_n}\right\}.$$

Notation. 二项分布推广多项分布:

$A_1,A_2,\cdots,A_r$ 是 E 的完备事件组，$P\left(A_i\right)=p_i,i=1,2,\cdots,r$，对 E 进行 n 次独立重复试验，X_i 表示 A_i 发生的次数，则:

$$P\left\{X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_r=k_r\right\}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}\prod_{i=1}^{r}p_i^{k_i}.$$

其中 $k_i\ge 0,\sum_{i=1}^{r}k_i=n$，当 $n=2$ 时为二项分布

3.5.1 多维随机变量的独立性

Definition.

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}\left(x_i\right).$$

称随机变量相互独立

等价于:

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}\left(x_i\right).$$

Lecture 8

10.15

3.5.2 条件分布

Notation. 离散型条件分布:

$$P\left\{X=a_i|Y=b_j\right\}=\frac{P\left\{X=a_i,Y=b_j\right\}}{P\left\{Y=b_j\right\}}.$$

$$P\left\{Y=b_j\right\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\left\{Y=b_j,X=a_i\right\}.$$

性质:

1. $P\left\{X=a_i|Y=b_j\right\}\ge 0$
2. $\sum_{i=1}^{+\infty}P=1$

Notation. 连续型条件分布:

$$P\left\{X=a|Y=b\right\}=0.$$

（无穷多个点）

通过微元法:

$$\begin{aligned}P\left\{X\le x|Y=y\right\}&=\lim_{\varepsilon\to0^+}P\left\{X\le x|y-\varepsilon<Y\le y\right\}\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P\left\{X\le x,Y\in(y-\varepsilon,y]\right\}}{P\left\{Y\in(y-\varepsilon,y]\right\}}\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{F\left(x,y\right)-F\left(x,y-\varepsilon\right)}{F_Y\left(y\right)-F_Y\left(y-\varepsilon\right)}\\&=\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}}\\&=\frac{\int_{-\infty}^{x}f\left(u,y\right)\mathrm{d}u}{f_Y\left(y\right)}\\&=\int_{-\infty}^{x}\frac{f\left(u,y\right)}{f_Y\left(y\right)}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

3.6 二维随机变量函数的分布

$$\begin{cases}aX+bY+c\\ \max\{X,Y\}\\ \min\{X,Y\}\end{cases}.$$

重点公式：3.4.5 ~ 3.4.8

假设随机变量 Z=aX+bY+c，有分布函数 $(X,Y)\to F\left(x,y\right)$

$$\begin{aligned}F_Z\left(z\right)&=P\left\{Z\le z\right\}\\&=P\left\{aX+bY+c\le z\right\}\\&=\begin{cases}\sum\limits_{ax_i+by_j+c\le z}\sum P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}, & (X,Y)\text{ 离散}\\ \iint_{ax+by+c\le z}P\left\{X=x,Y=y\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & (X,Y)\text{ 连续}\end{cases}.\end{aligned}$$

Notation. 二项分布可加性：有两个相互独立的试验 $X\sim B\left(m,p\right),Y\sim B\left(n,p\right)$，相当于一个试验 $Z\sim B\left(m+n,p\right)$

泊松分布可加性：相互独立的两个随机变量 $X\sim P\left(\lambda_1\right),Y\sim P\left(\lambda_2\right)$，相当于一个分布 $Z\sim P\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$

Notation. 极值公式:

两个随机变量（连续）X, Y 相互独立，求 $Z_1 = \max(X, Y), Z_2 = \min(X, Y)$ 的分布函数和密度函数

1. $F_{Z_1}(z)$：最大的不超过 z 等价于每一个都不超过 z

$$\begin{aligned} F_{Z_1}(z) &= P\{X \le z, Y \le z\} \\ &= P\{X \le z\} \cdot P\{Y \le z\} \\ &= F_X(z) \cdot F_Y(z). \end{aligned}$$

2. $F_{Z_2}(z)$: 最小的不超过 z 不等价于每一个都不超过 z，但最小的超过 z 等价与每一个都超过了 z

$$\begin{aligned} F_{Z_2}(z) &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)]. \end{aligned}$$

Notation. 独立同分布：变量相互独立且分布律相同

对极值公式扩展：$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 独立同分布：

$$F_{Z_1}(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z).$$

由于同分布，因此 $F_{X_i}(z) = F_X(z)$

$$F_{Z_1}(z) = (F_X(z))^n.$$

$$f_{Z_1}(z) = (F_{Z_1}(z))' = n(F_X(z))^{n-1}.$$

Notation. 3.4.5:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X + Y \le z\} \\ &= \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{z} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t - x)\, \mathrm{d}x \\ f_Z(z) &= F'_Z(z) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Lecture 8

同理：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$$

称以上两个公式为卷积公式：$f_Z=f_X * f_Y$

Notation. 正态分布的可加性：

$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ ，且 X,Y 相互独立，则：

$$X+Y=Z\sim N\left(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2\right).$$

多元：

$$Z=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right).$$

3.7 二元正态分布

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \\ \times\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\}.$$

Lecture 9

10.17

Example. $X\sim U[-1,1]$ ，对应的密度函数：

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<-1 \text{ or } x>1\\ \frac{1}{2}, & x\in[-1,1]\end{cases}.$$

同理 $Y\sim U[-1,1]$，求 $Z=|X-Y|$ 的分布函数

解：Z 的取值：[0,2]

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\le z\}\\&=P\{|X-Y|\le z\}\\&=\begin{cases}0, & z<0\\ 1, & z\ge 2\\ P\{-z\le X-Y\le z\}, & z\in[0,2)\end{cases}.\end{aligned}$$

其中

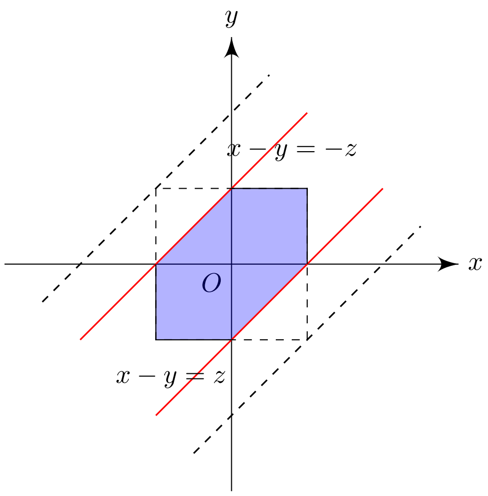
$$P\{z-z\le X-Y\le z\}=\iint_{-z\le x-y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

通过 f_X和f_Y 求联合密度函数：X, Y 独立，即 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x, y < -1 \text{ or } x, y > 1 \\ \frac{1}{4}, & x, y \in [-1, 1] \end{cases}.$$

$$P\{-z \le X - Y \le z\} = \iint\limits_{-z \le x-y \le z, x, y \in [-1,1]} \frac{1}{4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

画图确认积分区域：



Notation. i.i.d. ：独立同分布

Notation. 伽马分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 的密度函数：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Notation. 重点题目：3.6.2

4 数字特征

- 数学期望：$E(X)$
- 方差：$D(X)$ or $\mathrm{Var}(X)$
- 协方差：$\mathrm{cov}(X, Y)$
- 相关系数：$\rho(X, Y)$
- 矩：$E(X)^k$ and $E(X - EX)^k$

$$D(X) = E(X - EX)^2.$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)).$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}.$$

Notation. $|\rho_{X,Y}| \in [0, 1]$

ρ 越大越线性相关，$\rho > 0.8$ 时基本可以确定为线性相关

Notation. 矩 (moment) 是最一般的概念

矩分为两大类：k 阶原点矩和 k 阶中心矩

原点矩：$E(X)^k$

中心矩：$E(X - EX)^k$

$k + l$ 阶混合中心矩：$E\left((X - EX)^k (Y - EY)^l\right)$

Example. 数学期望为一阶原点矩

方差为一阶中心矩

协方差为二阶混合中心矩

可以写出无穷阶的中心矩等同于通过泰勒原理得出分布函数

本章重点：如何计算任意随机变量有关函数的数学期望

唯一计算公式：4.1.5 和 4.1.6

4.1 数学期望

Definition. 离散型随机变量 X 的分布律：$P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \ldots$

若级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ **绝对收敛**（$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| p_i < +\infty$），则 X 的数学期望**存在**（x_i 为取值，p_i 为权重，$p_i \geq 0$）

$$E(X) = EX = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i.$$

Rule. 当一个随机变量的密度函数与分布律已知：$X \to f(x), P\{X = x_i\} = p_i$

即可以求关于 X 函数的数学期望（公式 4.1.5）：

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i) P\{X = x_i\}, & X\text{离散} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x, & X\text{连续} \end{cases}.$$

Rule. 扩展至二阶：$(X, Y) \to P\{X = x_i, Y = y_j\}, f(x, y)$

关于 (X, Y) 的函数的数学期望（公式 4.1.6）：

$$E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\}, & \text{离散} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{连续} \end{cases}.$$

Notation. 柯西分布：

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

常见分布数学期望：

Notation. 伯努利分布 $X \sim B(n,p)$ ： $EX = np$
泊松分布 $X \sim P(\lambda)(\lambda > 0)$ ： $EX = \lambda$
柯西分布：EX 不存在（柯西分布不绝对收敛）

Notation. 柯西活了 68 岁，21 岁成名（导师拉格朗日）,27 岁当选法国科学院院士

Lecture 10

10.22

Example. $(X,Y) \sim N_2(0,1), \phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2+y^2/2}$，令 $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ ，求 $E(Z)$

解：由定理：

Rule.

$$E(g(X,Y)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\}, & \text{离散} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{连续} \end{cases}.$$

可得数学期望：

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Z \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4.2 数学期望的性质

- 线性可加性
- 独立性

○ $E(aX+bY+c) = E(aX+bY)+c$：常数的数学期望为其本身

Notation. 什么是数学期望：一个随机变量的中心
方差：去中心化的随机变量
常数的中心为其本身

○ $E(aX+bY) = E(aX)+E(bY) = aE(X)+bE(Y)$：线性性

证明. 已知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = F_X(x).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,\mathrm{d}x = E(X).$$

$$
\begin{aligned}
E\left(aX+bY\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(ax+by\right)f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + b\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= aE\left(X\right)+bE\left(Y\right).
\end{aligned}
$$

□

Example. $E\left(X\right)\pm E\left(Y\right)=E\left(X\pm Y\right)$

- ∘ 对于独立的随机变量：$E\left(XY\right)=E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right)$

证明. 二重积分转换为二次积分：

$$
\begin{aligned}
E\left(XY\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y\left(y\right)\mathrm{d}y\right) \\
&= E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right).
\end{aligned}
$$

□

Notation.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)&=0 \\
\implies \rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}&=0 \\
\implies X,Y\text{无相关（独立）}&.
\end{aligned}
$$

Notation. 线性可加性：

$$
E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+c\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE\left(X_i\right)+c.
$$

将 n 重积分转换为一重积分

4.3 方差的性质

$$
D\left(X\right)=E\left(X-EX\right)^2.
$$

Notation. 方差是描述数据偏离中心的程度值

- 常数的方差等于 0：$D(c)=0$

Notation. 正态分布的方差 σ 不大：3σ 准则保证数据方差在可控范围内

- $D(aX+b)=D(aX)=\boldsymbol{a^2}D(X)$： 离散程度与整体移动无关

证明.

$$\begin{aligned}
D(aX+b) &= E(aX+b-E(aX+b))^2 \\
&= E(aX+b-aE(X)-b)^2 \\
&= E(aX-aE(X))^2 = D(aX) \\
&= a(X-E(X))\cdot aE(X-E(X)) \\
&= a^2E(X-E(X))^2 \\
&= \boldsymbol{a^2}D(X).
\end{aligned}$$

□

- $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm E((X-EX)\cdot(Y-EY))$

证明.

$$\begin{aligned}
D(X-Y) &= E(X-Y-E(X-Y))^2 \\
&= E(X-Y-(EX-EY))^2 \\
&= E((X-EX)-(Y-EY))^2 \\
&= E\left((X-EX)^2-2(X-EX)(Y-EY)+(Y-EY)^2\right) \\
&= E(X-EX)^2-2E(X-EX)(Y-EY)+E(Y-EY)^2 \\
&= D(X)+D(Y)-2\operatorname{cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= E(X-EX)(Y-EY) \\
&= E(XY-X\cdot EY-Y\cdot EX+EX\cdot EY) \\
&= E(XY)-E(X\cdot EY)-E(Y\cdot EX)+E(EX\cdot EY) \\
&= E(XY)-EY\cdot E(X)-EX\cdot E(Y)+EX\cdot EY \\
&= E(XY)-E(X)\cdot E(Y).
\end{aligned}$$

当 X,Y 独立时：$\operatorname{cov}(X,Y)=0$，即 $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$ ，加法同理 □

Notation. 当 $X = Y$ 时:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \operatorname{cov}(X,X)\\ &= E(X-EX)(X-EX)\\ &= E(X-EX)^2\\ &= D(X).\end{aligned}$$

即协方差退化为方差

Notation. 均方偏离函数: $f(x) = E(X-x)^2 \geq D(X)$, 当且仅当 $x = E(X)$ 时 $f(X) = D(X)$

- 切比雪夫不等式（概率论最基础的不等式）

$$P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

或:

$$P\{|X-EX| > \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon}.$$

证明时使用:

$$P\left\{(X-EX)^2 \leq \varepsilon^2\right\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

证明.

$$\begin{aligned}P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} &= \int_{|x-EX|\geq\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_{|x-EX|\geq\varepsilon} \frac{|x-EX|^2}{\varepsilon^2} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x-EX|^2}{\varepsilon^2} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-EX)^2 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} E(X-EX)^2\\ &= \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

□

Notation. 切比雪夫不等式 $\Longrightarrow$ 马尔可夫不等式 $\Longrightarrow$ 协方差不等式 $\Longrightarrow$ 阶乘不等式 $\Longrightarrow \ldots$

$D(X) = 0$ 的充要条件为 $P = 1$

Lecture 11

10.24

Review:

Notation. 数学期望的性质：

1. $E(c)=c$
2. $E(cX)=cE(X)$
3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

3.1 $E(E(Y)X)=E(Y)E(X)$

4. X,Y 相互独立，$E(XY)=E(X)E(Y)$

协方差：$\operatorname{cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)=E(XY)-E(X)E(Y)$

若 X,Y 独立则 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$

Notation. 方差的性质：

1. $D(c)=0$
2. $D(cX)=c^2D(X)$

2.1. $D(X)=E(X-EX)^2=E\left(X^2\right)-E(X)^2$

3. X,Y 相互独立，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$

当 $X=Y$ ，$\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(X,X)=E(X-EX)^2=D(X)$

或：$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E\left(X^2\right)-E(X)^2$

Example. $D(aX+bY+c)=D(aX+bY)$

$$
\begin{aligned}
D(aX+bY)&=E((aX+bY)-E(aX+bY))^2\\
&=E(a(X-EX)+b(Y-EY))^2\\
&=E\left(a^2(X-EX)^2+2ab(X-EX)(Y-EY)+b^2(Y-EY)^2\right)\\
&=a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\operatorname{cov}(X,Y).
\end{aligned}
$$

◦ 切比雪夫不等式：已知一个随机变量的方差可以估算出数学期望

Question. 一个随机变量 X 分布未知，已知 $\mu=18,\sigma=2.5$ ，求 $P\{X\in(8,28)\}$

解：由切比雪夫不等式：

$$
\begin{aligned}
P\{X\in(8,28)\}&=P\{X-18\in(-10,10)\}\\
&=P\{|X-18|<10\}\\
&=P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\\
&\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\\
&=1-\frac{2.5^2}{10^2}=0.9375.
\end{aligned}
$$

◦ 马尔可夫不等式

Example. $X_1, X_2, \ldots, X_n : i.i.d, X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，证明：

1. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
2. 设 $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}, i = 1, 2, \ldots, n$ 则 $E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) = n$

证明. 1. 由线性性：

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(E\overline{X}, D\overline{X}\right).$$

由于 X 之间相互独立，有 $D\left(X_1 + X_2\right) = D\left(X_1\right) + D\left(X_2\right)$

$$E\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \mu, \qquad D\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2. 由题：$EY_i = 0, DY_i = 1$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} EY_i^2.$$

Notation. Y_i^2 符合自由度为 1 的卡方分布：$Y_i^2 \sim \chi^2(1)$

即：$\sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i^2\right) = nE\left(Y_i^2\right)$
由方差的定义：$D\left(Y_i\right) = E\left(Y_i^2\right) - E\left(Y_i\right)^2$ ：

$$EY_i^2 = D\left(Y_i\right) + E\left(Y_i\right)^2 = 1 + 0^2 = 1$$
$$\sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i^2\right) = nE\left(Y_i^2\right) = n.$$

□

4.4 协方差的性质

- $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$ （对称性）
- $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(X, Y)$

证明. 已知：$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(aX, bY) &= E(aXbY) - E(aX)E(bY)\\ &= abE(XY) - abE(X)E(Y)\\ &= ab\operatorname{cov}E(X, Y).\end{aligned}$$

□

- $\operatorname{cov}(c, X) = 0$

Notation. 协方差用于衡量随机变量之间的线性关系，常数和其他随机变量不存在线性关系

证明.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(cX) &= E(cX) - E(c)E(X) \\ &= cE(X) - cE(X) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Notation. $\operatorname{cov}(c,c) = D(c) = 0$

○ $\operatorname{cov}(aX+bY,cZ) = ac\operatorname{cov}(X+Y) + bc\operatorname{cov}(Y+Z)$ （分配律）

证明.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(aX+bY,cZ) &= E((aX+bY)cZ) - E(aX+bY)E(cZ) \\ &= E(acXZ+bcYZ) - cEZ(aEX+bEY) \\ &= acE(XZ) + bcE(YZ) - acEXEZ - bcEYEZ \\ &= ac\operatorname{cov}(X,Z) + bc\operatorname{cov}(Y,Z).\end{aligned}$$

□

Notation. $\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, b_i Z\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \operatorname{cov}(X_i, Z)$

Notation. $D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 DX_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$

4.5 相关系数

4.5.1 标准化

$$X^\star = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}.$$

标准化后的变量 $EX^\star = 0, DX^\star = 1$

Definition. $X^\star, Y^\star$ 的协方差 $\operatorname{cov}(X^\star, Y^\star)$ 为 X, Y 的相关系数 $\rho(X,Y)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X^\star,Y^\star) &= \operatorname{cov}\left(\frac{X-EX}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y-EY}{\sqrt{DX}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\operatorname{cov}(X-EX, Y-EY).\end{aligned}$$

易得 $\operatorname{cov}(X-EX,Y-EY) = \operatorname{cov}(X,Y)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X^\star,Y^\star) &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \\ &= \rho(X,Y).\end{aligned}$$

4.5.2 性质

- ∘ $|\rho(X,Y)| \leq 1$
- ∘ $P\{X^\star = \pm Y^\star\} = 1$ 是 $\rho(X,Y) = \pm 1$ 的充要条件

Lecture 12

10.29

Notation. 相关系数/Pearson 相关系数：描述两个随机变量之间的线性相关性
只能描述数值性的变量

$|\rho(X,Y)| = 1$ 时：正相关
$|\rho(X,Y) > 0.8|$ ：强相关
$|\rho(X,Y) \in (0,0.5)|$：弱相关
$\rho = 0$ ：不相关/非线性关系

Notation. 相关系数本质上描述：

$$P\{Y = aX + b\}.$$

Example. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ ，求：
1. X,Y 的相关性；2. X,Y 的独立性

解：1.

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\pi}\mathrm{d}y \\ &= 0. \end{aligned}$$

同理 $EY = 0$，即不相关
2.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_D f(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

同理 $f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$ ，易得 $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ ，即不独立

数理统计部分

5 大数定律和中心极限定理

Definition. 大数定律:

$$\bar{X} \xrightarrow[P]{n\to+\infty} EX.$$

即:以某事件发生的频率估计该事件的概率

Definition. 中心极限定理:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

其中 $X_1, X_2, \ldots X_i$ 独立同分布

该随机变量序列存在分布,中心极限定理提出不论 $\bar{X}$ 的分布是什么,该序列的分布为正态分布

$$\bar{X} \xrightarrow[n\to\infty]{L} N\left(E\bar{X}, D\bar{X}\right).$$

如何判断随机变量的敛散性:

Corollary. 依概率收敛:

对 $\forall\varepsilon$ 有:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|X_n - X| < \varepsilon\right\} = 1.$$

代表序列 $\{X_n\}$ 收敛于随机变量 X ,记为 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$

Corollary. 依分布收敛:

序列的分布函数为 $F_n(x)$,随机变量的分布函数 $F(x)$,对 $\forall x$,有:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

则 $\{X_n\}$ 依分布收敛于 X ,记为 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L} X$

Notation. 测度变换:通过将问题映射到另一个空间简化计算

依分布收敛要求更弱,即:依概率收敛 $\Rightarrow$ 依分布收敛

当收敛对象为常数时二者可互推

Notation. 撞骗:只要发出的短信足够多,成功率符合大数定律

三大大数定律:

$$\begin{cases}\textbf{切比雪夫大数定律}\text{:最根本} \\ \text{伯努利大数定律:例子} \\ \text{辛钦大数定律}\end{cases}.$$

5.1 大数定律

Notation. 切比雪夫大数定律:

Definition. $\{X_i\}\, i.i.d$, $\exists EX_i, DX_i$, 且 $\exists C$, 使得 $DX_i \le C$ (方差有界), 则对 $\forall \varepsilon > 0$ 当:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\bar{X_n} - E\bar{X_n}\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

时:

$$\bar{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} E\bar{X_n}.$$

证明. $\bar{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 有:

$$\begin{aligned} E\bar{X_n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i \\ D\bar{X_i} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \\ &\le \frac{C}{n}. \end{aligned}$$

由切比雪夫不等式:

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\bar{X_n} - E\bar{X_n}\right| < \varepsilon\right\} &\ge 1 - \frac{D\bar{X_n}}{\varepsilon^2} \\ &\ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时原式收敛于 1 □

Notation. 辛钦大数定律: 序列中的随机变量独立同分布

Notation. 伯努利大数定律: 序列中 $X_i \sim B(1,p)$ (已知分布), 记 μ_s 为随机变量序列之和, 有:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_s}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

即: $\frac{\mu_s}{n}$ 依概率收敛于 p

5.2 中心极限定理

Example. 高尔顿钉板

Corollary. $i.i.d$ 的中心极限定理:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\bar{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x).$$

Corollary. 棣莫弗-拉普拉斯定理: X_i 独立同分布, $X_i \sim B(1,p)$, 令 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, 对 $\forall x$ 有:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x).$$

Lecture 13

10.31

Notation. 偏度 r_1：三阶标准化随机变量的矩，用于描述对称性

峰度 r_2：四阶标准化随机变量的矩，一般使正态分布的峰度 $r_2=0$，描述分布的陡峭程度

表 3: 常见分布的数字特征

分布	EX	DX	r_1	r_2
$B(1,p)$	p	$p(1-p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}$	$\frac{1}{p(1-p)-6}$
$B(n,p)$	np	$np(1-p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	$\frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$
$P(\lambda)$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{1}{\lambda}$
$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$	$6+\frac{p^2}{1-p}$
$U[a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	0	$\frac{9}{5}-3$
$\Gamma(1,\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	2	6
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	0	0

6 数理统计基本概念

随机变量引入：使样本空间映射到实数轴上

分布函数：任意随机变量的概率

大数定律和中心极限定理：由概率论过渡到数理统计

$$\begin{cases} \text{描述统计学：过去的实验数据/相关分析图} \\ \text{推断统计学：根据现有的实验数据决策} \begin{cases} \text{参数估计：第七章} \\ \text{假设检验：第八章} \\ \text{回归分析：第九章} \end{cases} \end{cases}.$$

Definition. 总体：全部研究对象，可以用分布描述（随机变量组）

Definition. 个体：组成总体的成员，符合总体分布（每一个个体都是一个随机变量）

Example. 从总体中抽取 n 个样本

对数据记录：$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 称为 n 维随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 对应的观测值，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本

Notation. 简单样本：$X_1,X_2,\ldots,X_n$ $i.i.d$，且与总体分布相符

特点：

- 独立性
- 代表性

Definition. 样本空间：$\boldsymbol{\Omega}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|x_i\in\mathbb{R},\mathrm{i}=1,2,\ldots,n\}$

Notation. 样本联合分布和总体分布的关系 $(i.i.d)$：

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n\}\\&=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i\le x_i\}\\&=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)\,.\end{aligned}$$

扩展：X 为连续型，密度函数的关系：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i)\\&=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\quad x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\ldots,n.\end{aligned}$$

6.1 经验分布函数

经验分布函数：$F_n(x)$
将样本观测值 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 按大小分类为 $x_{(1)},x_{(2)},\ldots,x_{(n)}$

$$\begin{aligned}F_n(x)&=f_n\{X\le x\}\\&=\begin{cases}0, & x<x_{(1)}\\ \frac{k}{n}, & x\in[x_{(k)},x_{(k+1)})\\ 1, & x\ge x_{(n)}\end{cases}\\&\approx F(X)\,.\end{aligned}$$

Corollary. 格利文科定理：

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty,x\in\mathbb{R}}|F(x)-F_n(x)=0|\right\}=1.$$

根据格利文科定理：可以使用经验分布函数来估计理论分布函数

Lecture 14

11.05

6.2 密度函数

Notation. 密度函数和分布函数的关系：

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$
$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}.$$

对于直方图：将中点光滑连接 = 密度函数

或：核密度

直方图

Notation. 直方图的面积代表频率：

$$\text{高度}h_i = \frac{\text{面积}f_i}{\text{区间长度}\Delta x_i}.$$

直方图的高度代表密度，直方图的横坐标的取值范围为观测值的取值范围，直方图分块的区间来源一般为经验公式：$m \approx 1.87\,(n-1)^{0.4}$，其中 m 为区间分组数量

计算直方图频率：

$$\text{频率}f_i = \frac{\text{落入区间的个数}y_i}{\text{总个数}y}.$$

6.3 统计量

统计量 (statistic)，统计学 (statistics)

Definition. 统计量：关于样本的函数，不含任何未知参数

完整定义：

Example. X_1, X_2 来自正态总体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的样本（这两个任意抽出一个都属于一个样本），其中 μ, σ 均未知，以下表达式：

- $\frac{1}{4}(X_1 + X_2) - \mu$
- $\frac{X_1}{\sigma}$

均不是统计量（使用了未知的数），以下表达式都是统计量

- $3X_1$
- $X_1 - 8$
- $X_1^2 + X_2^2$

提出统计量的目的：通过样本估计或检测未知量，因此统计量不能含未知量

常见统计量：

- 样本均值（算术平均数）：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
- 样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)$
- 样本标准差：$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}$
- 样本阶原点矩
- 样本阶中心距

Notation. 样本均值：若 $X_1,X_2,\dots X_n$ $i.i.d$：根据辛钦大数定律：$\bar{X}\xrightarrow[n\to+\infty]{P}E\bar{X}=EX$

Notation. 样本阶中心矩：

$$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^k\xrightarrow[n\to\infty]{P}DX.$$

或：$S^2=B_2\times\frac{n}{n-1}\Rightarrow E\left(S^2\right)=DX$

证明.

$$\begin{aligned}
S^2&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)\\
&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\bar{X}+\bar{X}^2\right)\\
&=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}Xi^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2\\
ES^2&=E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)\right]\\
&=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-nE\bar{X}^2\right)\\
&=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(DX_i+(EX_i)^2\right)-n\left(D\bar{X}+\left(E\bar{X}\right)^2\right)\right]\\
&=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(DX+(EX)^2\right)-n\left(\frac{DX}{n}+(EX)^2\right)\right]\\
&=\frac{1}{n-1}\left[nDX+n\left(EX\right)^2-DX-n\left(EX\right)^2\right]=\frac{1}{n-1}\left(n-1\right)DX=DX.
\end{aligned}$$

即：$EB_2=E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)=\frac{n-1}{n}DX$ □

用样本均值估计总体均值：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-x\right)^2.$$

顺序统计量

令 $X_{(1)}=\min\left\{X_1,X_2,\dots,X_n\right\}$ 为最小顺序统计量，最大同理

要求第几小的顺序统计量：R 成为样本极差，$\widetilde{X}$ 称为样本中位数

6.4 样本均值的分布

Theorem. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 来自 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ，则

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1).$$

定义 $\bar{X}$ 为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的线性函数，$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$，计算期望和方差，将 $\bar{X}$ 标准化

Theorem. 标准化后的线性函数 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ ：

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{L} N(0,1).$$

Example. 总体：$X \sim N(20,9)$ ，求样本容量 n 多大时使样本均值与总体均值的绝对值之差 ≤ 0.3 的概率 $> 95\%$

6.4.1 三大抽样分布

- 卡方分布：$\chi^2(n)$

Notation. 卡方分布实际上为 $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{n}{2}$ 的 Gamma 分布
当 $n = 2$ 时为参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布
一般称 $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}$ 为伽马分布族

Definition. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(0,1)$ $i.i.d$ ，令 $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ ，称 χ^2 为自由度为 n 的卡方分布

Notation. 卡方分布具有可加性：

$$Y_1 \sim \chi^2(m), Y_2 \sim \chi^2(n) : Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(m+n).$$

从 $n = 3$ 开始，卡方分布出现最大值，且 n 越大卡方分布的方差越大
卡方分布的性质：

- $E\left(\chi^2\right) = n, D\left(\chi^2\right) = 2n$
- 可加性
- 分位点：

对性质 1：

证明.

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = nEX^2 \\
&= n\left(DX + (EX)^2\right) \\
D\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= nDX^2 = n\left(E\left(X^2\right)^2 - \left(EX^2\right)^2\right) \\
&= n\left(EX^4 - 1\right).
\end{aligned}$$

□