

Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by SongHao

Note by THF

2024 年 9 月 17 日

目录

| | | |
|----------|-----------------|----------|
| 1 | 引言 | 2 |
| 1.1 | 确定事件 | 2 |
| 1.2 | 随机事件 | 2 |
| 1.3 | 统计规律 | 2 |
| 2 | 事件 | 3 |
| 2.1 | 试验 | 3 |
| 2.2 | 随机试验 | 3 |
| 2.3 | 事件 | 3 |
| 2.4 | 随机事件 | 3 |
| 2.5 | 基本事件 | 3 |
| 2.6 | 复合事件 | 4 |
| 2.7 | 必然事件 | 4 |
| 2.8 | 不可能事件 | 4 |
| 2.9 | 样本空间 | 4 |
| 2.10 | 样本点 | 4 |
| 3 | 事件的集合表示 | 5 |

| | | |
|----------|-----------------|-----------|
| 4 | 事件间的关系 | 6 |
| 4.1 | 包含 | 6 |
| 4.2 | 相等 | 6 |
| 4.3 | 并与和 | 7 |
| 4.4 | 交与积 | 7 |
| 4.5 | 差 | 9 |
| 4.6 | 互不相容 | 10 |
| 4.7 | 对立 | 10 |
| 4.8 | 完备事件组 | 12 |
| 5 | 事件间的运算律 | 13 |
| 5.1 | 交换律 | 13 |
| 5.2 | 结合律 | 13 |
| 5.3 | 分配律 | 13 |
| 5.4 | 对偶律 | 14 |

1 引言

1.1 确定事件

一定发生的事件

1.2 随机事件

可能发生的事件

1.3 统计规律

大量试验得出的宏观规律

2 事件

2.1 试验

对对象观察、测量、实验

2.2 随机试验

随机试验的条件：

1. 在相同条件下可重复
2. 结果不止一个
3. 试验前无法预测出现的实验结果

使用 E 代表随机试验。

2.3 事件

随机试验的每种结果。

2.4 随机事件

可能出现的事件，用 $A, B, C \dots$ 表示

2.5 基本事件

不能或不必再分的事件（基于试验的事件）

Example. 扔一次骰子，实验目的为：骰子朝上的点数，基本事件为：出现 1, 2, 3, 4, 5, 6 点。

Example. 扔一次骰子，实验目的为：骰子的位置，此时出现的点数不是基本事件。

Example. 扔一次硬币，实验目的为：硬币朝上的面，基本事件为：出现正面或反面。

Example. 扔一次硬币，实验目的为：硬币某根已知的轴线与已知直线的夹角
基本事件为：夹角 $\theta \in [0, 2\pi]$
此时正面朝上与反面朝上不是基本事件。

2.6 复合事件

由基本事件复合而成的事件

Example. 扔一次骰子，点数小于 7 点表示为：

$$\Omega = \{x|x < 7\}$$

点数大于 7 点表示为：

$$\emptyset = \{x|x > 7\}$$

2.7 必然事件

一定发生的结果，用 Ω 表示

2.8 不可能事件

不可能发生的结果，用 \emptyset 表示

Example. 扔一次骰子，点数大于 7 点为不可能事件

2.9 样本空间

所有基本事件的集合（实验目的确定），与必然事件相似，用 Ω 表示。

2.10 样本点

样本空间中的元素，即基本事件，用 ω 表示。

Example. 扔硬币研究某面朝上的样本空间： $\Omega = \{\text{正}, \text{反}\}$
样本点： $\omega_1 = \text{正面朝上}$ ， $\omega_2 = \text{反面朝上}$

Example. 扔一个骰子研究某点朝上的样本空间：

$$\Omega = \{x | x \in [1, 6], x \in \mathbb{R}\}$$

样本点：

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Example. 扔两个硬币，研究朝上的面，样本空间为：

$$\Omega = \{(x, y) | (0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$$

或：

$$\Omega = \{(x, y) | x, y \in \{0, 1\}\}$$

Notation. 样本空间可以是无限集。

Example. 在 $[0, 1]$ 内扔一个质子，求其坐标。

其样本空间为：

$$\Omega = \{x | x \in [0, 1]\}$$

Notation. 质子/点：无大小

Example. 向平面扔一个点：

$$\Omega = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

3 事件的集合表示

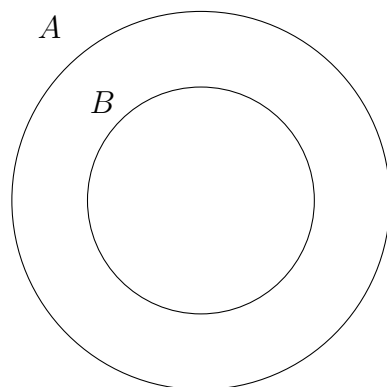
集合 (set)： $A = \{2, 4, 6\}$ 等。

Notation. Ω 与必然事件、样本空间等同， \emptyset 与不可能事件、空集等同。

任何事件都是 Ω 的子集， \emptyset 是所有事件的子集。

4 事件间的关系

4.1 包含

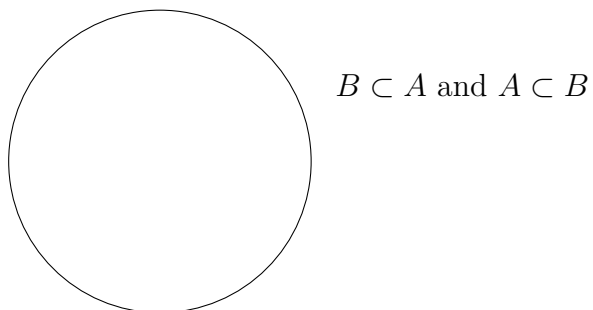


$$B \subset A \text{ or } A \supset B$$

A 发生必然有 B 发生, 且有:

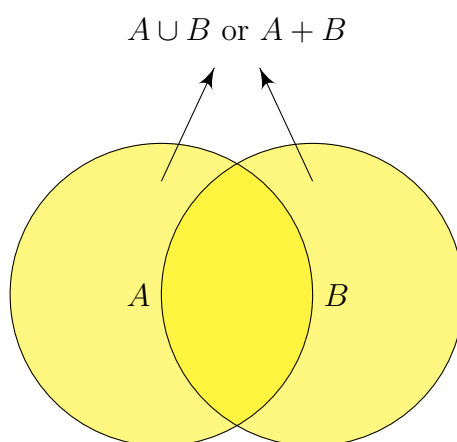
$$\forall A, \emptyset \subset A \subset \Omega.$$

4.2 相等



称 A 与 B 相等。

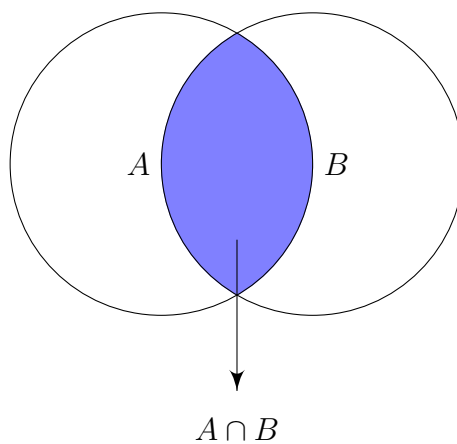
4.3 并与和



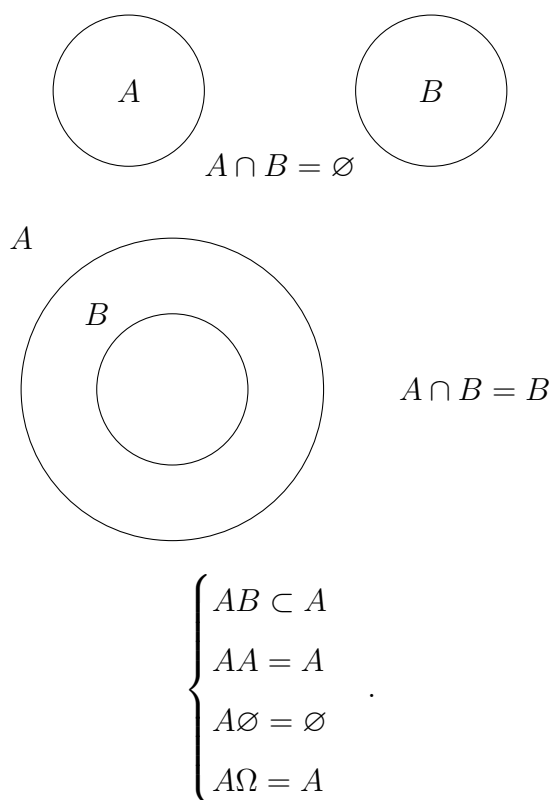
$A \cup B$: (并/和) A 与 B 至少有一个发生

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B \subset A, \\ A + A = A, \\ A + \emptyset = A, \\ A + \Omega = \Omega. \end{array} \right.$$

4.4 交与积



$A \cap B$: (交/积) A 与 B 同时发生



Definition. 无限可列个：能按某种规律排成一个序列

Example. 自然数无限可列： $0, 1, 2, \dots$

Example. 整数无限可列： $0, 1, -1, 2, -2, \dots$

Example. 有理数：能写成 $\frac{p}{q}$ 的数

$0.\dot{5}\dot{6}$ 可以写为： $\frac{56}{99}$

$0.1\dot{2}$ 可以写为： $\frac{11}{90}$

有理数无限可列： $0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \dots$

Example. 实数集、平面点集非无限可列。

以下定义：

Definition. n 个事件互斥时：

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

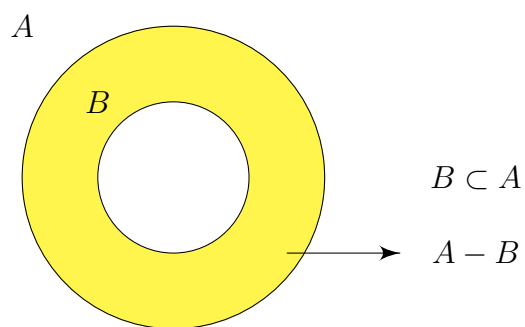
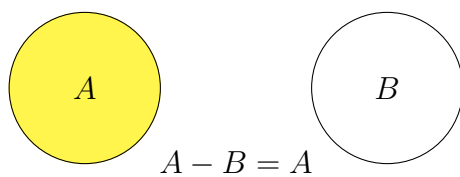
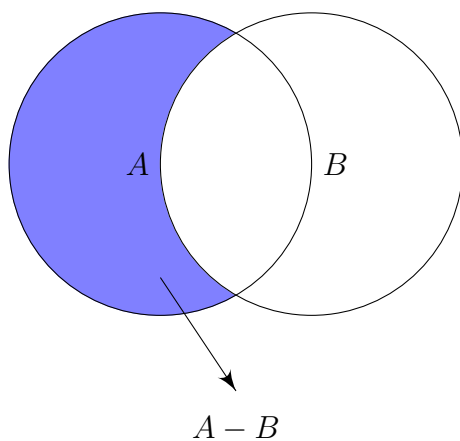
n 个事件同时发生：

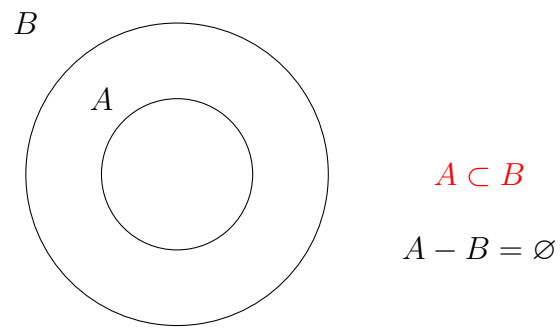
$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

该定义支持无限可列个。

4.5 差

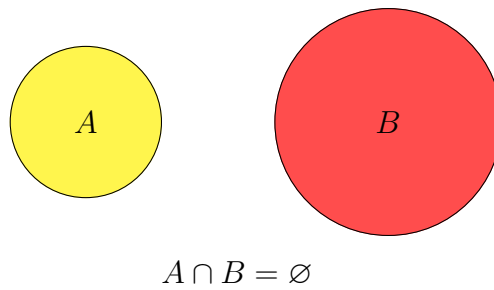
$A - B$: A 发生而 B 不发生。





4.6 互不相容

A 与 B 不同时发生，即： $AB = \emptyset$



n 个事件：

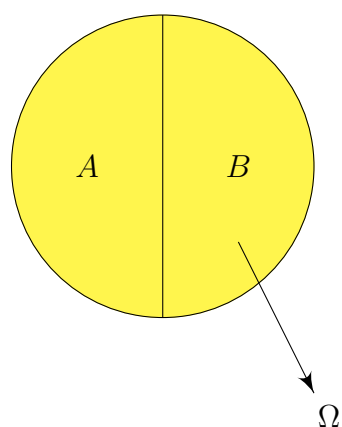
$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

互不相容，则：

$$\forall i, j : A_i A_j = \emptyset.$$

4.7 对立

$$AB = \emptyset \text{ 且 } A \cup B = \Omega$$



记作：

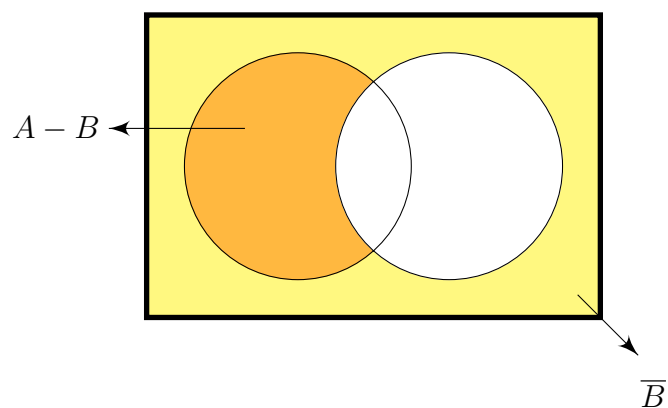
$$A = \overline{B}.$$

或：

$$B = \overline{A}.$$

由此可得：

$$\begin{cases} \overline{\overline{A}} = A \\ A - B = A - AB = A\overline{B} \end{cases}.$$

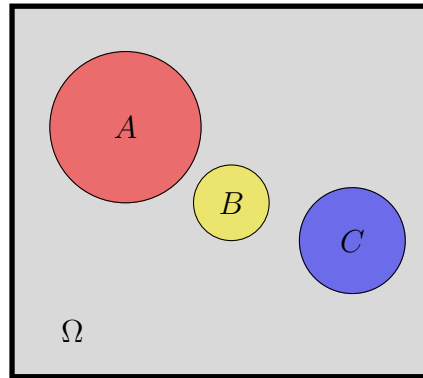


Notation. 若两事件对立，则一定互不相容.

互不相容的事件不一定对立.

Notation. 互不相容适用于多个事件.

对立只适用于两个事件.



Notation. 互不相容：不能同时发生，但可以都不发生
对立：必须有一个发生

4.8 完备事件组

A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容，且

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

则为完备事件组。



5 事件间的运算律

5.1 交换律

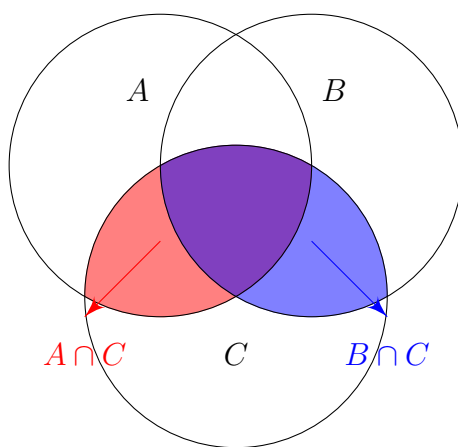
$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}.$$

5.2 结合律

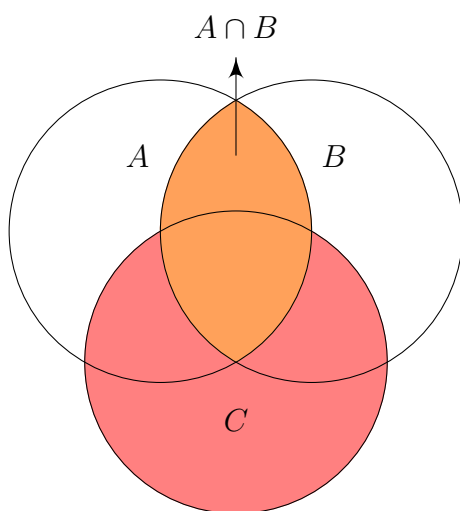
$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}.$$

5.3 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

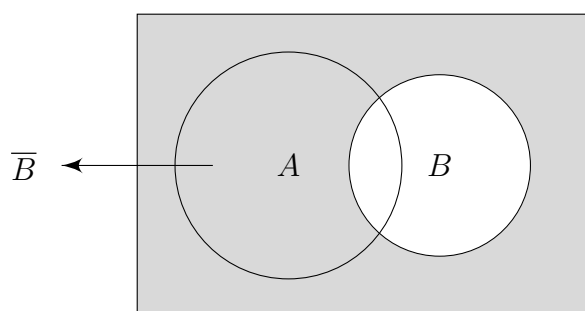
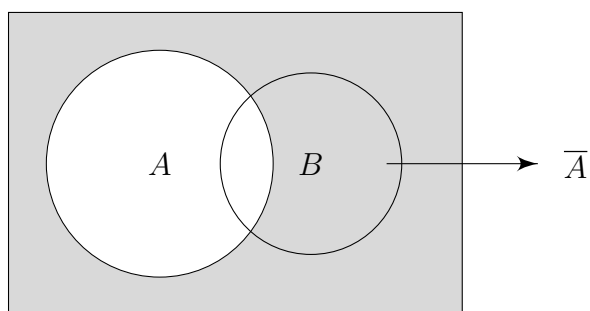


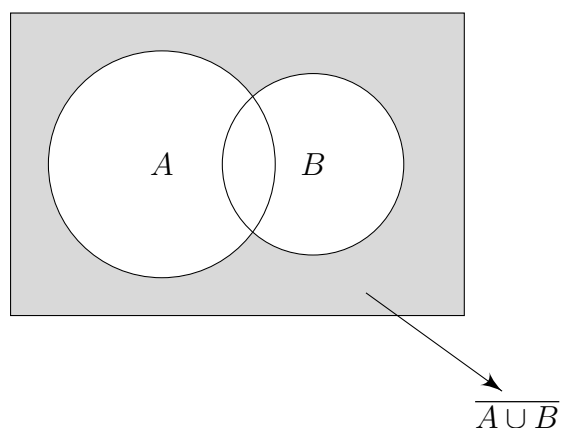
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$



5.4 对偶律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$





$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

记法:

1. 画图
2. 长线变短线, 开口换方向
3. 事件定义

Notation. 多个事件的对偶律:

$$\begin{cases} \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \\ \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} \end{cases}.$$

Example. A, B, C 是试验 E 的随机事件, 用符号表示以下事件:

1. 只有 A 发生: $A\bar{B}\bar{C}$
2. A 发生: A
3. A, B, C 只有一个发生: $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
4. A, B, C 同时发生: ABC
5. A, B, C 至少一个发生: $A + B + C$
6. A, B, C 至多一个发生: $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC$
7. A, B, C 恰有两个发生: $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$
8. A, B, C 至少两个发生: $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$ 或 $AB + BC + AC$

Example. 从产品中抽查，不放回，一共取了三次： A_1, A_2, A_3 代表三次取得合格品：

1. 三次都合格： $A_1 A_2 A_3$
2. 至少一次合格： $A_1 + A_2 + A_3$
3. 恰有两次合格： $A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$
4. 最多一次合格： $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$

Example. 射击三枪, $A_i, i = 1, 2, 3$ 表示第 i 次击中目标，解释以下事件：

1. $A_1 + A_2$ ：前两次至少击中一次
2. \bar{A}_2 ：第二次不击中
3. $A_1 + A_2 + A_3$ ：至少击中一次
4. $A_1 A_2 A_3$ ：全部击中
5. $A_2 - A_3$ ：第二次击中而第三次不击中
6. $\overline{A_1 + A_3} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_3$ （使用对偶律）：第一次和第三次不击中
7. $\bar{A}_1 + \bar{A}_3$ ：第一次和第三次至少一次未能击中