

# Part III-B: Probability Theory and Mathematical Statistics

Lecture by SongHao

Note by THF

2024 年 9 月 4 日

## 目录

<b>1</b>	<b>引言</b>	<b>2</b>
1.1	确定事件 . . . . .	2
1.2	随机事件 . . . . .	2
1.3	统计规律 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>事件</b>	<b>3</b>
2.1	试验 . . . . .	3
2.2	随机试验 . . . . .	3
2.3	事件 . . . . .	3
2.4	随机事件 . . . . .	3
2.5	基本事件 . . . . .	3
2.6	复合事件 . . . . .	4
2.7	必然事件 . . . . .	4
2.8	不可能事件 . . . . .	4
2.9	样本空间 . . . . .	4
2.10	样本点 . . . . .	4
<b>3</b>	<b>事件的集合表示</b>	<b>5</b>

<b>4</b>	<b>事件间的关系</b>	<b>6</b>
4.1	包含 . . . . .	6
4.2	相等 . . . . .	6
4.3	并与和 . . . . .	7
4.4	交与积 . . . . .	7
4.5	差 . . . . .	9
4.6	互不相容 . . . . .	10
4.7	对立 . . . . .	10
4.8	完备事件组 . . . . .	12
<b>5</b>	<b>事件间的运算律</b>	<b>13</b>
5.1	交换律 . . . . .	13
5.2	结合律 . . . . .	13
5.3	分配律 . . . . .	13
5.4	对偶律 . . . . .	14

# 1 引言

## 1.1 确定事件

一定发生的事件

## 1.2 随机事件

可能发生的事件

## 1.3 统计规律

大量试验得出的宏观规律

## 2 事件

### 2.1 试验

对对象观察、测量、实验

### 2.2 随机试验

随机试验的条件：

1. 在相同条件下可重复
2. 结果不止一个
3. 试验前无法预测出现的实验结果

使用  $E$  代表随机试验。

### 2.3 事件

随机试验的每种结果。

### 2.4 随机事件

可能出现的事件，用  $A, B, C \dots$  表示

### 2.5 基本事件

不能或不必再分的事件（基于试验的事件）

**Example.** 扔一次骰子，实验目的为：骰子朝上的点数，  
基本事件为：出现 1, 2, 3, 4, 5, 6 点。

**Example.** 扔一次骰子，实验目的为：骰子的位置，  
此时出现的点数不是基本事件。

**Example.** 扔一次硬币，实验目的为：硬币朝上的面，  
基本事件为：出现正面或反面。

**Example.** 扔一次硬币，实验目的为：硬币某根已知的轴线与已知直线的夹角

基本事件为：夹角  $\theta \in [0, 2\pi]$

此时正面朝上与反面朝上不是基本事件。

## 2.6 复合事件

由基本事件复合而成的事件

**Example.** 扔一次骰子，点数小于 7 点表示为：

$$\Omega = \{x|x < 7\}$$

点数大于 7 点表示为：

$$\emptyset = \{x|x > 7\}$$

## 2.7 必然事件

一定发生的结果，用  $\Omega$  表示

## 2.8 不可能事件

不可能发生的结果，用  $\emptyset$  表示

**Example.** 扔一次骰子，点数大于 7 点为不可能事件

## 2.9 样本空间

所有基本事件的集合（实验目的确定），与必然事件相似，用  $\Omega$  表示。

## 2.10 样本点

样本空间中的元素，即基本事件，用  $\omega$  表示。

**Example.** 扔硬币研究某面朝上的样本空间： $\Omega = \{\text{正}, \text{反}\}$

样本点： $\omega_1 = \text{正面朝上}$ ， $\omega_2 = \text{反面朝上}$

**Example.** 扔一个骰子研究某点朝上的样本空间：

$$\Omega = \{x | x \in [1, 6], x \in \mathbb{R}\}$$

样本点：

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

**Example.** 扔两个硬币，研究朝上的面，样本空间为：

$$\Omega = \{(x, y) | (0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\}$$

或：

$$\Omega = \{(x, y) | x, y \in \{0, 1\}\}$$

**Notation.** 样本空间可以是无限集。

**Example.** 在  $[0, 1]$  内扔一个质子，求其坐标。

其样本空间为：

$$\Omega = \{x | x \in [0, 1]\}$$

**Notation.** 质子/点：无大小

**Example.** 向平面扔一个点：

$$\Omega = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

### 3 事件的集合表示

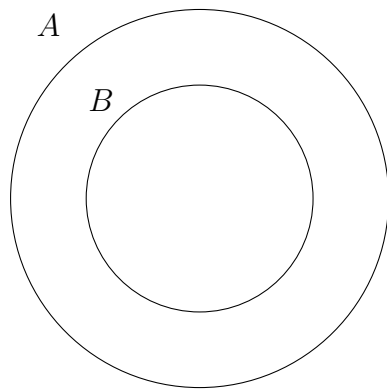
集合 (set)：  $A = \{2, 4, 6\}$  等。

**Notation.**  $\Omega$  与必然事件、样本空间等同， $\emptyset$  与不可能事件、空集等同。

任何事件都是  $\Omega$  的子集， $\emptyset$  是所有事件的子集。

## 4 事件间的关系

### 4.1 包含

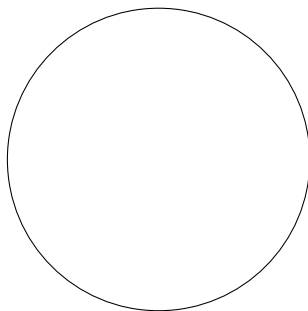


$$B \subset A \text{ or } A \supset B$$

$A$  发生必然有  $B$  发生，且有：

$$\forall A, \emptyset \subset A \subset \Omega.$$

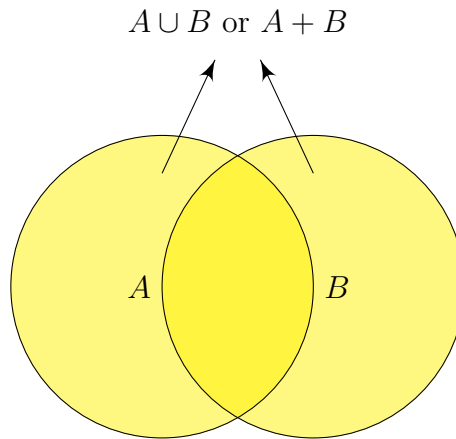
### 4.2 相等



$$B \subset A \text{ and } A \subset B$$

称  $A$  与  $B$  相等。

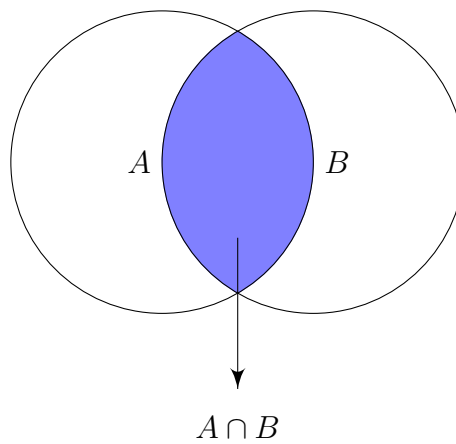
### 4.3 并与和



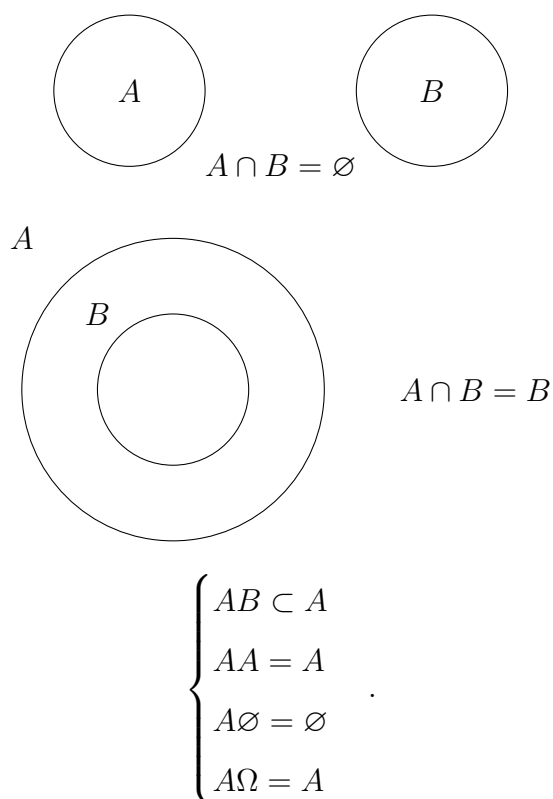
$A \cup B$ : (并/和)  $A$  与  $B$  至少有一个发生

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B \subset A, \\ A + A = A, \\ A + \emptyset = A, \\ A + \Omega = \Omega. \end{array} \right.$$

### 4.4 交与积



$A \cap B$ : (交/积)  $A$  与  $B$  同时发生



**Definition.** 无限可列个：能按某种规律排成一个序列

**Example.** 自然数无限可列： $0, 1, 2, \dots$

**Example.** 整数无限可列： $0, 1, -1, 2, -2, \dots$

**Example.** 有理数：能写成  $\frac{p}{q}$  的数

$0.\dot{5}6$  可以写为： $\frac{56}{99}$

$0.1\dot{2}$  可以写为： $\frac{11}{90}$

有理数无限可列： $0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \dots$

**Example.** 实数集、平面点集非无限可列。

以下定义：

**Definition.**  $n$  个事件互斥时：

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$



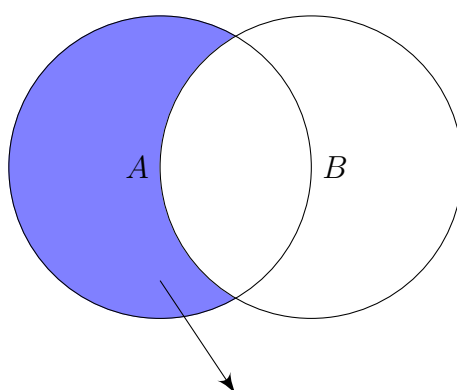
$n$  个事件同时发生：

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

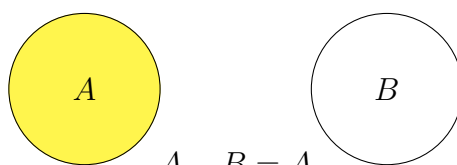
该定义支持无限可列个。

## 4.5 差

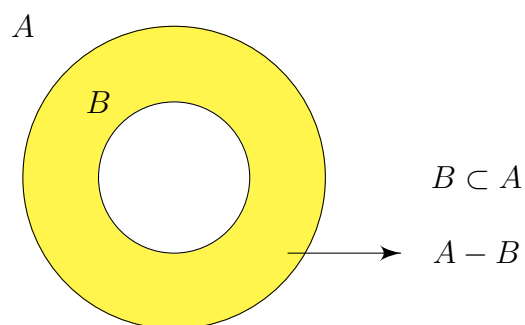
$A - B$ :  $A$  发生而  $B$  不发生。



$A - B$

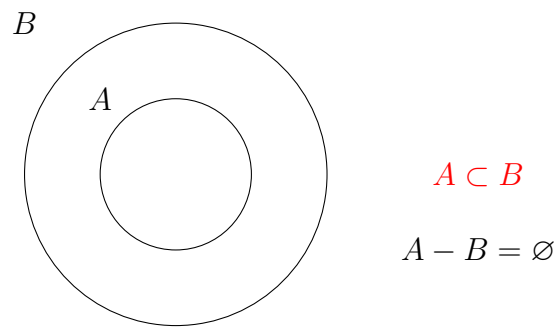


$A - B = A$



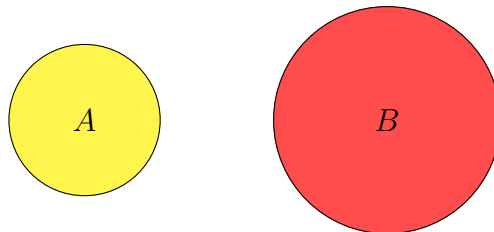
$B \subset A$

$A - B$



#### 4.6 互不相容

$A$  与  $B$  不同时发生，即：  $AB = \emptyset$



$$A \cap B = \emptyset$$

$n$  个事件：

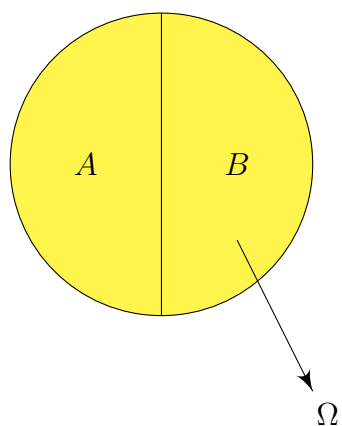
$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

互不相容，则：

$$\forall i, j : A_i A_j = \emptyset.$$

#### 4.7 对立

$$AB = \emptyset \text{ 且 } A \cup B = \Omega$$



记作：

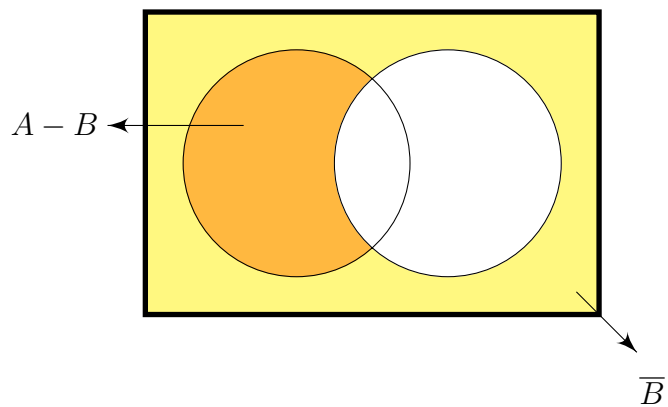
$$A = \overline{B}.$$

或：

$$B = \overline{A}.$$

由此可得：

$$\begin{cases} \overline{\overline{A}} = A \\ A - B = A - AB = A\overline{B} \end{cases}.$$

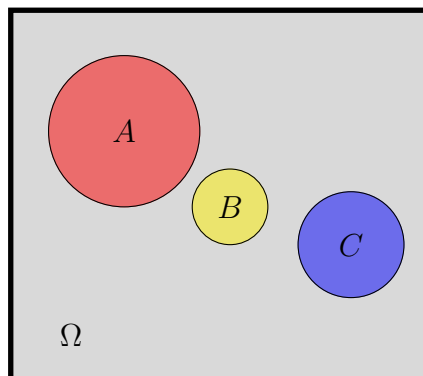


**Notation.** 若两事件对立，则一定互不相容.

互不相容的事件不一定对立.

**Notation.** 互不相容适用于多个事件.

对立只适用于两个事件.



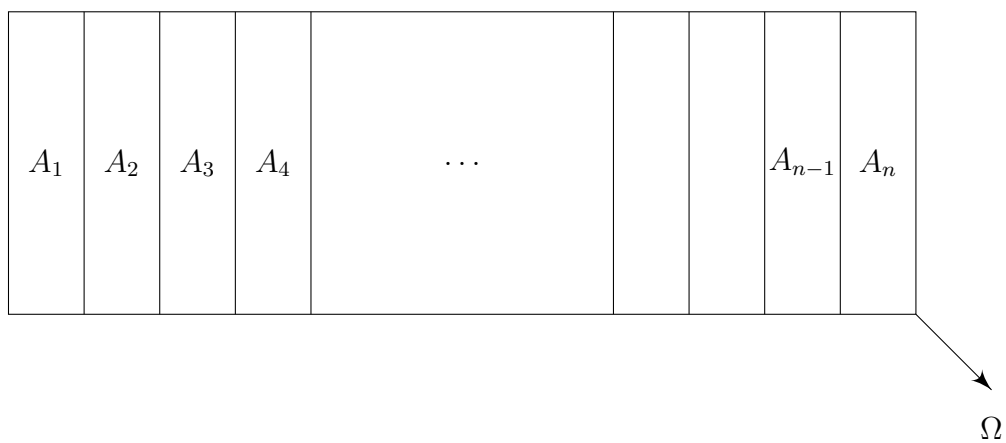
**Notation.** 互不相容：不能同时发生，但可以都不发生  
 对立：必须有一个发生

## 4.8 完备事件组

$A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互不相容，且

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

则为完备事件组。



## 5 事件间的运算律

### 5.1 交换律

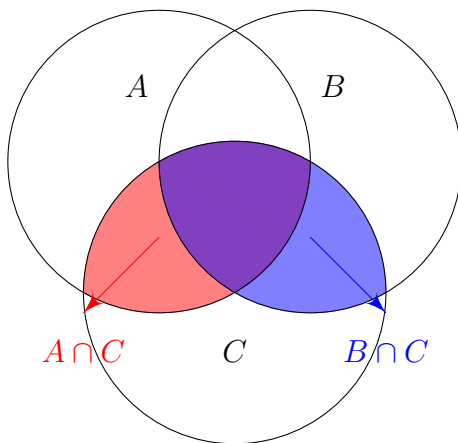
$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}.$$

### 5.2 结合律

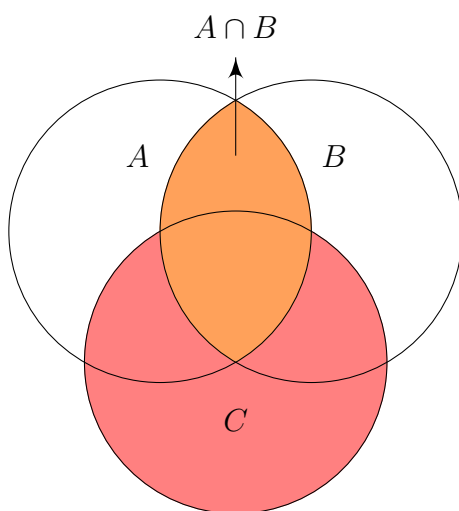
$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}.$$

### 5.3 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

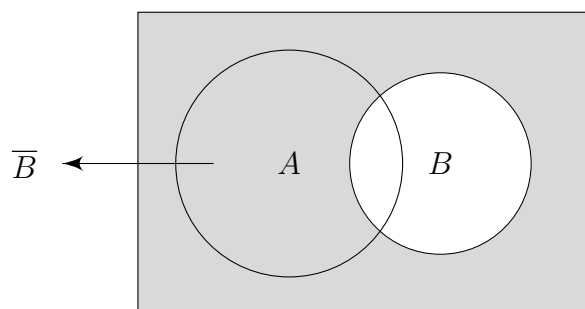
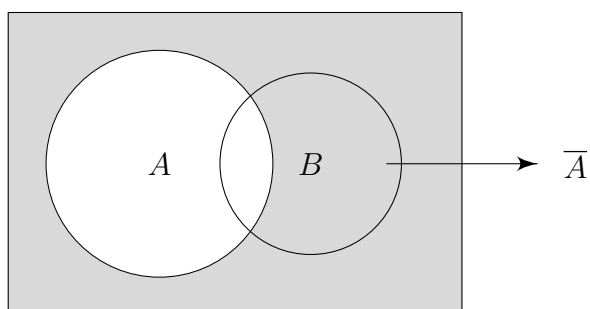


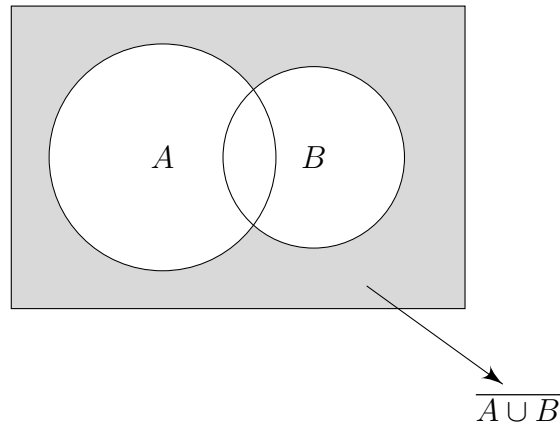
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$



## 5.4 对偶律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$





$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

记法:

1. 画图
2. 长线变短线, 开口换方向
3. 事件定义

**Notation.** 多个事件的对偶律:

$$\begin{cases} \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \\ \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} \end{cases}.$$

**Example.**  $A, B, C$  是试验  $E$  的随机事件, 用符号表示以下事件:

1. 只有  $A$  发生:  $A\bar{B}\bar{C}$
2.  $A$  发生:  $A$
3.  $A, B, C$  只有一个发生:  $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
4.  $A, B, C$  同时发生:  $ABC$
5.  $A, B, C$  至少一个发生:  $A + B + C$
6.  $A, B, C$  至多一个发生:  $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$
7.  $A, B, C$  恰有两个发生:  $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$
8.  $A, B, C$  至少两个发生:  $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$  或  $AB + BC + AC$

**Example.** 从产品中抽查，不放回，一共取了三次： $A_1, A_2, A_3$  代表三次取得合格品：

1. 三次都合格： $A_1 A_2 A_3$
2. 至少一次合格： $A_1 + A_2 + A_3$
3. 恰有两次合格： $A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$
4. 最多一次合格： $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$

**Example.** 射击三枪, $A_i, i = 1, 2, 3$  表示第  $i$  次击中目标，解释以下事件：

1.  $A_1 + A_2$ ：前两次至少击中一次
2.  $\bar{A}_2$ ：第二次不击中
3.  $A_1 + A_2 + A_3$ ：至少击中一次
4.  $A_1 A_2 A_3$ ：全部击中
5.  $A_2 - A_3$ ：第二次击中而第三次不击中
6.  $\overline{A_1 + A_3} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_3$ （使用对偶律）：第一次和第三次不击中
7.  $\bar{A}_1 + \bar{A}_3$ ：第一次和第三次至少一次未能击中