UNIVERSIDAD DE CÁDIZ
MÁSTER EN MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA DINÁMICA DEL BUQUE

M Carmen Plaza Bermejo

Tutora: Dra. María Victoria Redondo Neble
Tutor: Dr. José Rafael Rodríguez Galván

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ
MÁSTER EN MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA DINÁMICA DEL BUQUE

M Carmen Plaza Bermejo

Tutora: Dra. María Victoria Redondo Neble
Tutor: Dr. José Rafael Rodríguez Galván

Firma de la alumna Firma de la tutora

Puerto Real, Cádiz, Febrero de 2.021

Abstract

This project is based on mathematical modeling of ship dinamics. To do this, we are going to solve the problem of the Navier-Stokes equations using the finite element method. We are going to develope different simulations of this equations using meshes of different geometries, for example, rectangles and circunferencies in two dimensions, as well as meshes in three dimensions of a sphere, a NACA profile and a ship, Shuttle tanker. These simulations will allow us to study the behavior of the flow in the different surfaces of the objects that we have mentioned, in detail.

A mi familia.

Resumen

Este trabajo, como su propio nombre indica, se basa en la modelización matemática de la dinámica del buque. Para ello resolveremos el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el método de los elementos finitos. Realizaremos distintas simulaciones de estas ecuaciones utilizando mallas de diferentes geometrías, como por ejemplo, rectángulos y circunferencias en dos dimensiones, así como mallas en tres dimensiones de un perfil NACA y un buque, Shuttle tanker. Estas simulaciones nos permitirán estudiar con detalle el comportamiento del flujo en las distintas superficies de los objetos que hemos mencionado.

Acknowledgements

A mi familia, en especial a mis padres y a mi hermano, por haber estado apoyándome siempre, dándome ánimos para que siguiera adelante. Aconsejándome en cada paso que doy, y motivándome día a día.

A mi pareja, por estar siempre conmigo al pie del cañón, confiando en mi.

A todos los compañeros que he conocido este año. Nunca pensé que este curso me llevaría tan buenos amigos. Gracias.

Y sobre todo a mis tutores, Victoria Redondo y Rafael Rodríguez, por haberme ayudado tanto a realizar este trabajo, pese a las circunstancias excepcionales que nos ha tocado vivir este curso. Sin olvidarme de José Juan Alonso, sin él no hubiera sido posible realizar una de las partes más importantes de este trabajo. Gracias por prestarme tu ayuda y dedicarme tu tiempo.

Gracias.

Mª Carmen Plaza Bermejo

febrero 2021

Índice general

1 Introducción **1**

2 Fundamentos básicos **3**

2.1 Términos físicos 3

2.2 Términos matemáticos 4

2.3 Términos del sector naval 8

3 Las ecuaciones de Navier-Stokes **11**

3.1 Deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes 12

3.1.1 Leyes de conservación 13

3.1.2 Leyes constitutivas 16

3.1.2.1 Ecuaciones de Euler 17

3.1.2.2 Ecuaciones de Navier-Stokes 17

3.1.3 Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes 18

4 Descripción del Método de los Elementos Finitos **23**

4.1 Historia 24

4.2 El Método de los Elementos Finitos 25

4.2.1 Formulación variacional 27

4.2.1.1 Aproximación variacional interna (Método de Galerkin) . 27

4.2.1.2 Principios generales del Método de los Elementos Finitos 30

4.2.2 Elementos finitos en dimensión 1 30

4.2.2.1 Elementos Finitos P1 31

4.2.2.2 Convergencia y estimación de error 33

4.2.2.3 Elementos Finitos P_2 34

4.2.2.4 Propiedades cualitativas. 35

4.2.3 Elementos finitos en dimensiones $N \geq 2$ 36

4.2.3.1 Elementos finitos triangulares 36
4.2.3.2 Convergencia y estimación de error 38
4.2.3.3 Elementos finitos para el problema de Stokes 40
4.3 Método de las características 42
4.3.0.1 Sistemas hiperbólicos 42
4.3.0.2 Leyes de conservación 43

5 Ensayos numéricos **45**
5.1 Introducción 45
5.1.1 FreeFem++ 46
5.1.2 Atom 46
5.1.3 ParaView 47
5.1.4 Gmsh 47
5.1.5 Python 48
5.2 Mallado 49
5.2.1 Perfil NACA de revolución 49
5.3 Experimentos numéricos 54
5.3.1 Experimento nº 1. Ecuaciones de Stokes 55
5.3.2 Experimento nº 2. Ecuaciones de Stokes evolutivas 58
5.3.3 Experimento nº 3. Ecuaciones de Navier-Stokes. 62
5.3.4 Experimento nº 4. Ecuaciones de Navier-Stokes. 68
5.3.5 Experimento nº 5. Ecuaciones de Navier-Stokes. 69
5.3.6 Experimento nº 6. Ecuaciones de Navier-Stokes. Circunferencia. . 70
5.3.7 Experimento nº 7. Ecuaciones de Navier-Stokes. Perfil NACA. . . 76
5.3.8 Experimento nº 8. Ecuaciones de Navier-Stokes. Perfil NACA de revolución. 79

6 Conclusiones y trabajos futuros **89**
6.1 Conclusiones 89
6.2 Trabajos futuros 90

A Esfera **91**
A.1 Mallado esfera 91

B Shuttle tanker **97**

B.1 Mallado Shuttle tanker 97

B.1.1 Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes. Casco Shuttle tanker. . 100

Bibliografía **103**

CHAPTER

1

Introducción

El proyecto que vamos a llevar a cabo, Modelización Matemática de la Dinámica del Buque, se basa principalmente en el estudio de los flujos que se originan en la superficie del casco del buque durante la navegación de éste en un fluido, en nuestro caso agua salada. Para ello, deduciremos y haremos uso de las ecuaciones de Navier-Stokes que modelizan la dinámica de un fluido. Para resolver el problema que se nos plantea de manera aproximada haremos uso del método de los elementos finitos, el cual describiremos en esta memoria. El trabajo se centra principalmente en la realización de diferentes experimentos y las respectivas simulaciones que realizaremos de objetos inmersos en un fluido. Este proceso lo llevaremos a cabo utilizando diferentes programas que nos permitirán la simulación de la dinámica del buque de una forma más detallada y con una mayor precisión. Para ello, debemos aproximar el dominio geométrico de nuestro problema. Las mallas utilizadas en este trabajo serán convenientemente explicadas. Entre los dominios que trataremos, iremos desde uno muy simple como es el cuadrado, hasta uno con mayor complejidad, como el casco de un buque shuttle tanker. Algunos de los dominios que trataremos en los ensayos de este trabajo serán en tres dimensiones (N = 3), aunque incluiremos otros más sencillos en dos dimensiones (N = 2) para explicar términos básicos. No consideraremos el mallado unidimensional (N = 1) ya que carece de interés práctico en este trabajo.

La memoria del presente trabajo sigue la siguiente estructura.

En el capítulo 2 nos centraremos principalmente en la caracterización de algunos conceptos matemáticos, físicos y del sector naval, que nos serán de gran interés para así poder lograr entender el trabajo en su totalidad, incluso si el sector naval fuera un ámbito nuevo para nosotros.

Posteriormente, en el capítulo 3, pasaremos a deducir las ecuaciones de Navier-Stokes. Para ello, partiremos de las leyes de conservación y haciendo uso de las leyes constitutivas propias del medio en el que nos movemos llegaremos a las ecuaciones de Navier-Stokes que constituyen la base del modelo en todos nuestros experimentos.

A continuación, en el capítulo 4, nos centraremos en la descripción del método de los elementos finitos, que será el que utilizaremos para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes.

En el capítulo 5, expondremos los distintos programas que hemos utilizado en este trabajo, explicando de forma detallada cómo hemos construido los mallados que utilizaremos para los experimentos. Se desarrollan con detalle los experimentos planteados sobre mallas en 2 y 3 dimensiones, siendo la más destacada la malla de un buque shuttle tanker que incluiremos en el siguiente capítulo.

Por último, en el capítulo 6 plantearemos las conclusiones de este trabajo así como proyectos futuros que puedan tener lugar a partir de éste.

CHAPTER

2

Fundamentos básicos

En este capítulo vamos a caracterizar algunos conceptos que necesitamos conocer para poder abordar el trabajo que vamos a desarrollar. Hemos diferenciado tres tipos de términos: términos físicos, términos matemáticos y térmicos del sector naval. Para llevar a cabo este apartado hemos hecho uso de [1], [2], [3] y [4].

2.1 Términos físicos

- **Fluido.** Se denomina fluido a un tipo de medio continuo formado por alguna sustancia entre cuyas partículas existe una fuerza de atracción débil. Los fluidos pueden cambiar de forma sin que aparezcan fuerzas restitutivas tendentes a recuperar la forma "original".

- **Fluido Newtoniano.** Fluido cuya viscosidad puede considerarse constante.

- **Flujo isotérmico.** Flujo cuya temperatura es constante.

- **Flujo incompresible.** La densidad permanece constante a lo largo de todo el flujo.

- **Fluido ideal.** Aquel en el que las fuerzas a través de una superficie son normales a esa superficie.

- **Flujo laminar.** Se caracteriza por trayectorias suaves o regulares de partículas del fluido. En un flujo laminar, el fluido se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse, siguiendo cada partícula del fluido una trayectoria suave, llamada línea de corriente.

- **Flujo turbulento.** Se caracteriza por el movimiento irregular de partículas, también podemos decir que se trata de un movimiento caótico del fluido. El fluido no fluye en capas paralelas, la mezcla lateral es muy alta y hay una interrupción entre las capas.

- **Número de Reynolds.** Número adimensional utilizado en mecánica de fluidos para caracterizar el movimiento de un fluido.

$$Re = \frac{LU}{v}$$

  En ciertos casos, el número de Reynolds nos permitirá determinar si se trata de un flujo laminar o turbulento. Para la mayoría de los autores que tratan el número de Reynolds, un flujo será de carácter laminar cuando el número de Reynolds no exceda de 2300, y será un flujo turbulento cuando dicho número exceda de 4000.

2.2 Términos matemáticos

- **Mallado.** División del dominio espacial mediante volúmenes elementales muy simples como triángulos, tetraedros, paralepípedos, etc.

- **Operadores diferenciales.**

  - **Gradiente:** $\nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_d u)^T \in \mathbb{R}^d$ si u es un valor de $\mathbb{R}$ ó $\nabla u = (\partial_j u_i)_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq d} \in \mathbb{R}^{m,d}$ si u es un valor de $\mathbb{R}^m$.
  - **Divergencia:** $\nabla\cdot = \sum_{i=1}^d \partial_i u_i$ si u es un valor de $\mathbb{R}^d$ ó $\nabla\cdot = (\sum_{j=1}^d \partial_j u_{ij})_{1\leq i\leq m}^T \in \mathbb{R}^m$ si u es un valor de $\mathbb{R}^{m,d}$.
  - **Operador Laplace:** $\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_{ii} u$ si u es un valor de $\mathbb{R}$ ó $\Delta u = (\sum_{j=1}^d \partial_{jj} u_i)_{1\leq i\leq m}^T \in \mathbb{R}^m$ si u es un valor de $\mathbb{R}^m$.

- **Espacios polinómicos $\mathbf{P_k}$.** Dado $x = (x_1, ..., x_d)$ se define P_k como el espacio de polinomios en las variables $x_1, ..., x_d$ con coeficientes reales y grado máximo k,

$$\mathbf{P}_k = \{p(x) = \sum_{0\leq i_1,...,i_d\leq k} \alpha_{i_1}...i_d x_1^{i_1}...x_d^{i_d}; \qquad \alpha_{i_1}...i_d \in \mathbb{R}\}$$

Se puede comprobar que $\mathbf{P_k}$ es un espacio vectorial de dimensión

$$dim\,\mathbf{P_k} = \binom{d+k}{k} = \begin{cases} k+1 & \text{si } d=1, \\ \frac{1}{2}(k+1)(k+2) & \text{si } d=2, \\ \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3) & \text{si } d=3. \end{cases}$$

donde d es la dimensión del espacio.

- **Espacios L^P.** Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 < p < \infty$, entonces el espacio

$$L^P(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}/f \text{ es medible y } \int_\Omega |f|^P < \infty\}$$

y consideraremos la norma

$$||f||_{L^P} = ||f||_P = \Big(\int_\Omega |f(x)|^P d\mu\Big)^{1/P}$$

Establecemos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ es medible y existe una constante C tal que } |f(x)| \leq C \text{ sobre } \Omega\}$$

con norma

$$||f||_{L^\infty} = ||f||_\infty = inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ sobre } \Omega\}$$

Si $f \in L^\infty$ entonces tenemos

$$|f(x)| \leq ||f||_\infty \text{ sobre } \Omega$$

- **Espacios de Hilbert.** Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H equipado con un producto escalar tal que H está completo para la norma $||\cdot||$.

  Ejemplo. La aplicación $(\cdot,\cdot) : L^2 \times L^2 \to \mathbb{R}$ dada por $(f,g) = \int fg\,d\mu$ es un producto escalar en L^2 y $(L^2,(\cdot,\cdot))$ es un espacio de Hilbert.

- **Derivadas débiles.** Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$. Denotamos por $D(\Omega)$ o $C_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω.

  Dado un dominio Ω, el conjunto de funciones localmente integrables viene denotado por

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f/f \in L^1(K)\,\forall\, K \text{ compacto} \subset \dot{\Omega}\}$$

siendo $\dot{\Omega}$ el interior de Ω.

Decimos que una función dada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tiene una derivada débil, $D^\alpha_w f$, siempre que exista una función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\phi^{(\alpha)}(x)dx \, \forall \phi \in D(\Omega)$$

Si existe g, definimos $D^\alpha_w f = g$.

- **Espacios de Sobolev.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio abierto cualquiera y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq +\infty$, definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como

$$W^{1,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^P(\Omega), j = 1, ..., N\}$$

consideraremos las normas

$1 \leq p < \infty \to ||v||_{W^{1,p}(\Omega)} = (\int_\Omega |v|^p + \int_\Omega |\nabla v|^p)^{1/p}$

$p = +\infty \to ||v||_{W^{1,p}(\Omega)} = max(||v||_{L^\infty(\Omega)}, ||\nabla v||_{L^\infty(\Omega)})$

$1 < p < \infty \to W^{1,p}(\Omega)$ es separable y reflexivo.

$1 \leq p < \infty \to W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

Para $p = 2$ se puede probar que la aplicación

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

es un producto escalar en $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, y $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

- **Espacios $H^1(\Omega)$.** Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$. El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ viene caracterizado por

$$H^1(\Omega) = v \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \forall i \in 1, ..., N \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$$

donde $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ es la derivación parcial débil de v.
Cuyo producto escalar

$$(u, v) = \int_\Omega \Big(u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\Big)dx$$

y con norma asociada al producto escalado

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \Big((|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx\Big)^{1/2}$$

el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

- **Espacios $H^m(\Omega)$.** Para un entero $m \geq 0$, el espacio de Sobolev H^m viene caracterizado por

$$H^m(\Omega) = \{u \in H^{m-1}(\Omega)/\nabla u \in H^{m-1}(\Omega)^N\}$$

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)/\partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ para cualquier } \alpha \in Z_+^N |\alpha| \leq m\}$$

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{k \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \cdot \partial^\alpha v$$

- **Teorema de Lax-Milgram.** Sea V un espacio real de Hilbert. Si $L(\cdot)$ es una forma lineal continua en V, $a(\cdot,\cdot)$ forma bilineal coercitiva y continua, entonces la formulación variacional

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u,v) = L(v) \text{ para cada } v \in V$$

admite una única solución. Además, esta solución depende continuamente de la forma lineal L.

Las hipótesis de a y de L son:

  - $L(\cdot)$ es una forma lineal continua en V, esto es, $v \to L(v)$ es una forma lineal de V en $\mathbb{R}$ y existe $C > 0$ tal que

$$|L(v)| \leq C||v|| \text{ para todo } v \in V$$

  - $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal en V, esto es, $w \to a(w,v)$ es una forma lineal de V en $\mathbb{R}$ para todo $v \in V$; y $v \to a(w,v)$ es una forma lineal V en $\mathbb{R}$ para todo $w \in V$
  - $a(\cdot,\cdot)$ es continua, esto es, existe $M > 0$ tal que

$$|a(w,v)| \leq M||w||\,||v|| \qquad \text{para todo } w, v \in V$$

  - $a(\cdot,\cdot)$ es coercitiva (o elíptica), esto es, existe $\nu > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \nu||v||^2 \text{ para todo } v \in V$$

2.3 Términos del sector naval

- **Proa.** Parte delantera de todo buque en el sentido de avance normal del movimiento.
- **Popa.** Parte posterior del buque en el sentido de avance normal del movimiento.
- **Estribor.** Parte del buque que queda a la derecha de un observador colocado en el centro, mirando de popa a proa.
- **Babor.** Parte del buque que queda a la izquierda de un observador colocado en el centro, mirando de popa a proa.

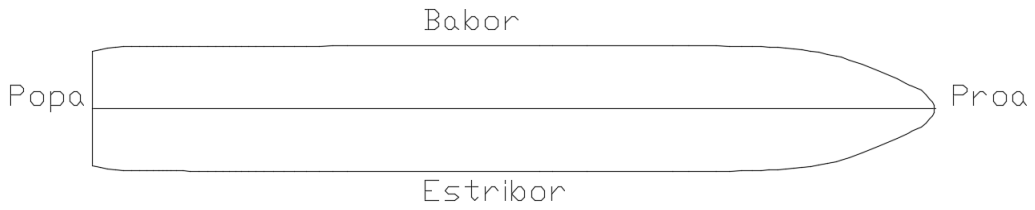

Figura 2.1: Términos sector naval. Realizado con Autocad.

- **Eslora.** Longitud del buque medida en sentido longitudinal de proa a popa. En un buque, se pueden considerar las siguientes esloras:
  - **Eslora entre perpendiculares.** Longitud medida horizontalmente entre la perpendicular de proa y la perpendicular de popa.
  - **Eslora total.** Distancia medida horizontalmente entre los puntos más salientes de proa y popa.
  - **Eslora en la flotación.** Longitud medida horizontalmente entre los puntos más externos de cualquiera de las flotaciones que se considere.
- **Manga.** Máxima medida horizontal del buque medida en sentido transversal, o sea, la anchura del buque medida en la zona donde ésta sea mayor, es decir, en la cuaderna maestra.
- **Quilla.** Pieza de madera o hierro, que va de popa a proa por la parte inferior del barco y en que se asienta toda su armazón.
- **Puntal.** Distancia medida verticalmente desde la quilla hasta la cubierta principal.

- **Casco.** Estructura integral consistente esencialmente en un forro impermeable relativamente delgado, soportado por una serie de refuerzos transversales y longitudinales, los cuales a su vez, están reforzados y soportados por un sistema de planchas horizontales y verticales. El esqueleto del casco se compone parcialmente de una serie de elementos transversales y longitudinales, o de un sistema mixto de ambos.

- **Obra viva.** Superficie del casco del buque que se encuentra sumergida, es decir, que está por debajo de la línea de flotación, también se conoce con el nombre de carena.

- **Obra muerta.** Parte del casco que se encuentra por encima de la superficie del agua. La obra muerta generalmente se considera limitada por la última cubierta continua y resistente del buque. Con este concepto a todas las construcciones ligeras por encima de la cubierta resistente se les denominarán superestructuras.

- **Calado.** Profundidad de la carena, o sea, la distancia vertical existente entre el canto inferior de la quilla y la línea de flotación del buque o también la altura vertical de la obra viva.

- **Flotación.** Plano correspondiente a una línea de agua, límite de la superficie sumergida, que se materializa en el casco pintando una línea en el forro exterior. En el costado viene determinada por una franja que representa los distintos calados que puede tener el buque.

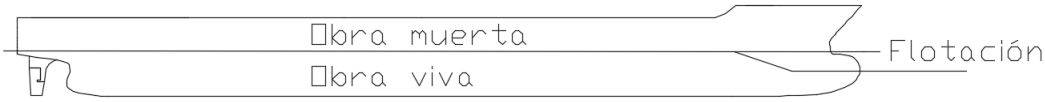

Figura 2.2: Términos sector naval. Realizado en Autocad.

- **Cuaderna.** Cada una de las piezas curvas cuya base o parte inferior encaja en la quilla del buque y desde allí arrancan a derecha e izquierda, en dos ramas simétricas, formando las costillas del casco.

- **Cuaderna maestra.** Cuaderna de la zona media de un buque que representa las formas más llenas de éste, es la máxima sección transversal, en la mayoría de los casos coincide con la sección media del buque.

- **Shuttle tanker.** Buque diseñado para el transporte de petróleo desde una plataforma petrolífera en alta mar, como una alternativa a la construcción de oleoductos.

CHAPTER

3

Las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes modelizan la dinámica de los fluidos. Estas ecuaciones fueron determinadas por el mátemático e ingeniero francés Claude-Louis Navier en 1822, quien dedujo un sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de algunos fluidos. Sería veinte años después, cuando Sir George Gabriel Stokes, partiendo de un modelo diferente, completaría la descripción de dichas ecuaciones, es por ello que estas ecuaciones serán llamadas "ecuaciones de Navier-Stokes" en honor a ambos. De forma simplificada, podemos decir que estas ecuaciones se obtienen aplicando los principios de conservación de la mecánica y de la termodinámica a un volumen fluido. Aunque estas ecuaciones fueron formuladas en el siglo XIX, a nivel continuo permanece abierto el problema de la unicidad de solución débil en dominios tridimensionales y la existencia global de solución fuerte (clásica). En nuestro proyecto, resolveremos este problema obteniendo soluciones aproximadas.

En este capítulo deduciremos las ecuaciones de Navier-Stokes haciendo uso de [5] y [6] .

3.1 Deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes

Llevaremos a cabo la deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes teniendo en cuenta que el fluido que vamos a utilizar en el desarrollo de nuestro trabajo será el agua salada, cuya densidad es $1,025\ tn/m^3$. Por tanto, se tratará de un fluido Newtoniano, isotérmico e incompresible.

Dichas ecuaciones describen la dinámica de fluidos, parte de la física comprendida dentro de la mecánica de medios continuos, que estudian los fenómenos de tipo mecánico a los que se ven sometidos los medios continuos. Para dichos medios

Densidad de masa.

$\exists\, \rho \in C^1(\bar{\Omega} \times [0,T)), \rho > 0$, tal que "Masa en W en el instante t"

$$m(W,t) = \int_W \rho(x,t)dx\, \forall W, \forall t$$

Campo de velocidades.

$\exists\ \vec{u} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0,T)), \mathbb{R}^N$, tal que "Cantidad de movimiento en W en el instante t"

$$\vec{M}\ (W,t) = \int_W (\rho\ \vec{u})(x,t)dx\, \forall W, \forall t$$

Densidad de energía interna por unidad de masa.

$\exists\, w \in C^1(\bar{\Omega} \times [0,T)), w > 0$, tal que "Energía total en W en el instante t"

$$E_{Total}(W,t) = \int_\Omega (\frac{1}{2}\rho|\ \vec{u}\ |^2 + \rho w)(x,t)dx\, \forall W, \forall t$$

Por otra parte, definiremos **la función flujo**:

Por definición, $\vec{\phi}$: $(x,t) \in \Omega \times [0,T) \rightarrow \vec{\phi}\ (x,t) \in \Omega$, siendo $\vec{\phi}\ (x,t) = \vec{y}_x\ (t)$ y siendo $\vec{y}_x\ (t)$ la única solución maximal del SDO

$$\begin{cases} \dfrac{d\ \vec{y}}{dt} & = \vec{u}\ (\vec{y}, t) \\ \vec{y}\ (0) & = x \end{cases}$$

Admitimos que $\vec{\phi}\ (x,t)$ está bien definida $\forall (x,t) \in \Omega \times [0,T)$.

Dado $x \in \Omega, t \rightarrow \vec{\phi}\ (x,t)$ define una curva en Ω que es la trayectoria que sigue la partícula del medio que inicialmente está en x.

Entonces, $W_t = \{\vec{\phi}\ (x,t) | x \in W\}\, \forall W$

A continuación daremos algunos de los resultados que utilizaremos.

Teorema del transporte: Si $f_0 \in C^1(\bar{\Omega} \times [0,T))$ y $W \subset \Omega$ es por ejemplo una bola abierta, entonces

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{W_t} f_0(x,t)dx\Big) = \int_{W_t} \Big\{\frac{\partial f_0}{\partial t} + \nabla \cdot (f_0 \ \vec{u})\Big\}(x,t)dx \qquad \forall t \in [0,T) \tag{3.1}$$

Teorema de la divergencia (Fórmula de Gauss): Si $W \subset \Omega$ es un abierto acotado, ∂W es regular y $\mathbf{q} \in C^1(W;\mathbb{R}^N)$, por tanto

$$\int_W \nabla \cdot \mathbf{q}\, dx = \int_{\partial W} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, dT \tag{3.2}$$

siendo $\mathbf{n}$ el vector normal.

En los siguientes apartados vamos a deducir las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos. Dichas ecuaciones derivan de las leyes de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento así como de la ley de la conservación de la energía. En primer lugar, obtendremos unas ecuaciones más simples, que son las ecuaciones de Euler para un fluido ideal. Posteriormente tendremos en cuenta los efectos viscosos que tienen lugar en el transporte molecular de la cantidad de movimiento. El problema fundamental en la mecánica de medios continuos consiste en calcular la densidad ρ y el vector velocidad $\mathbf{u}$ admitiendo conocidas las características experimentales del medio, es decir, aquellas que se pueden obtener a partir de resultados experimentales, y conociendo ρ y $\mathbf{u}$ en el instante inicial $(t = 0)$. Para ello, en primer lugar obtendremos un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que verificarán ρ y $\mathbf{u}$, partiendo de las leyes de conservación y las leyes constitutivas. En capítulos posteriores, se añadirán condiciones complementarias (condiciones iniciales, de contorno, etc.) que harán que el problema esté bien planteado e intentaremos resolverlo numéricamente mediante adecuados métodos de aproximación.

3.1.1 Leyes de conservación

Las leyes de conservación son leyes físicas que describen que durante la evolución temporal de un sistema aislado, algunas magnitudes tienen un valor constante. Dichas leyes son de carácter universal, pudiendo ser definidas en todos los medios.

En adelante supondremos que las funciones $\mathbf{u}$ y ρ (así como todas las que aparecerán) son suficientemente regulares para que las operaciones y los cálculos se puedan realizar y estemos en las hipótesis de los teoremas enunciados.

La obtención de las ecuaciones que vamos a desarrollar se basa en tres principios básicos:

1. La masa ni se crea ni se destruye.
2. La variación de la cantidad de movimiento es directamente proporcional a la fuerza aplicada (segunda ley de Newton).
3. La energía ni se crea ni se destruye.

A continuación, vamos a tratar los tres principios que acabamos de enunciar.

- **Ley de conservación de la masa.** Dicha ley nos dice que si tenemos un sistema aislado, la masa total en el sistema permanecerá constante, es decir, la masa consumida es igual a la masa de los productos obtenidos.

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{W_t} \rho(x,t)\, dx\right) \ \forall W, \forall t$$

  Utilizando el teorema del transporte, (3.1), obtenemos la EDP de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{u}) = 0 \tag{3.3}$$

  siendo ρ la densidad del fluido, y $\mathbf{u}$ el vector velocidad.

- **Ley de conservación de la cantidad de movimiento.** Esta ley enuncia que en todo sistema cerrado (no existen fuerzas exteriores, y las fuerzas internas no son disipadoras) la cantidad de movimiento total no puede ser cambiada y permanece constante en el tiempo. Esta ley también es conocida como segunda ley de Newton.

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{W_t} (\rho\, \mathbf{u})(x,t) dx\Big) = \mathbf{F}(W_t,t) = \mathbf{T}(W_t,t) + \mathbf{F}_{ext}(W_t,t) \tag{3.4}$$

donde $\mathbf{F}$ será la fuerza resultante y $\mathbf{T}$ el resultado de las fuerzas ejercidas sobre W_t por las otras partículas, es decir, se trata de la fuerza de tensión. $\mathbf{F}_{ext}$ será el resultado de las fuerzas ejercidas desde el exterior, es decir, las fuerzas exteriores.

Normalmente se admite:

Un **tensor de esfuerzos** σ tal que $\mathbf{T}(W_t,t) = \int_{\partial W_t} \sigma(x,t) \cdot \mathbf{n}\, dT \ \forall W \, \forall t$ y una **densidad de esfuerzos exteriores** tal que $F_{ext}(W_t,t) = \int_{\partial W_t} (\rho\, \mathbf{f})(x,t) dx \ \forall W \, \forall t$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, si aplicamos (3.1) al primer miembro de (3.4) y (3.2) a la primera integral del segundo miembro, obtenemos:

$$\rho\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\Big) - \nabla\cdot\,\sigma = \rho\,\mathbf{f} \tag{3.5}$$

Por lo tanto, vemos que el tensor de esfuerzos σ modifica el transporte de impulso en la frontera de W_t. Elegiremos σ para que se aproxime de manera razonable al transporte de impulso por movimiento.

Hasta ahora hemos desarrollado la ecuación de conservación de masa (3.3) y la de conservación de la cantidad de movimiento (3.5). Si trabajaramos en un espacio tridimensional, estaríamos hablando de cuatro ecuaciones.

- **Ley de conservación de la energía.** Esta ley expone que la cantidad total de energía en cualquier sistema físico aislado no varía con el tiempo, aunque esta energía pueda transformarse en otro tipo de energía. Esta ley también es conocida como primer principio de la termodinámica.

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{W_t}\Big(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2+\rho\,w\Big)dx\Big) = P(W_t,t) = P_{ten}(W_t,t)+P_{ext}(W_t,t)+P_{cal}(W_t,t) \tag{3.6}$$

Siendo P la pontencia, P_{ten} la potencia ejercida por las fuerzas de tensión, P_{ext} la porencia ejercida por las fuerzas exteriores y P_{cal} la potencia ejercida por las fuerzas de cualquier otro mecanismo.

Se admite normalmente

$$\exists\,\mathbf{q}\in C^1(\bar{\Omega}\times[0,T);\mathbb{R}^N) \text{ tal que } P_{cal}(W_t,t) = -\int_{\partial W_t}\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dT$$

Por tanto, aplicando (3.1) al primer miembro de (3.6) y (3.2) a las integrales ∂W_t del segundo miembro, realizamos los cálculos y obtenemos la EDP de la conservación de la energía

$$\rho\Big(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla w\Big) = -\nabla\cdot\mathbf{q} + \sigma : \nabla\mathbf{u} \tag{3.7}$$

siendo ρ la densidad del fluido, $\mathbf{u}$ el vector velocidad, σ el vector tensor, w la entalpía y q la presión. del problema.

Hasta ahora hemos obtenido: ecuación de conservación de la masa (3.3), ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento (3.5) y la ecuación de conservación de la

energía (3.7). Tenemos $(N+2)$ ecuaciones en derivadas parciales para $\dfrac{N(N+5)}{2}+2$ incógnitas $(\rho, u_i, \sigma_{ij}\ (i \leq j), w, q_i)$. Para que el problema esté bien planteado debemos llegar a un problema que contenga el mismo número de incógnitas que ecuaciones, para ello emplearemos las leyes constitutivas.

3.1.2 Leyes constitutivas

Las leyes constitutivas, o también conocidas como leyes de comportamiento, son aquellas que constituyen cualquier relación entre magnitudes tensoriales, que no son derivables de leyes de conservación y otro tipo de leyes universales y que son específicas del tipo de problema a estudiar. Estas leyes nos permiten particularizar llegando a sistemas de EDP con igual número de ecuaciones y de incógnitas, es decir, se trata de leyes que permiten particularizar.

Ahora tendremos en cuenta que solo trataremos fluidos, es por ello que no aparecerá en ningún momento la rigidez en el movimiento.

Si suponemos un fluido ideal, aquel que cumple que para cualquier movimiento de un fluido existe una función $p(x,t)$ denominada presión, de tal forma que si S es una superficie en el fluido con $\mathbf{n}$ el vector normal exterior, la fuerza ejercida sobre la superficie S por unidad de área en $x \in S$ en el instante de tiempo t es $p(x,t)\mathbf{n}$.

$$\exists\, p \in C^1(\bar{\Omega} \times [0,T)) \qquad \text{tal que } \ \sigma = -pI$$

siendo I la matriz identidad.

$$\mathbf{T}(W_t, t) = -\int_{\partial W_t} p\,\mathbf{n} dT$$

siendo p la presión dinámica.

En un fluido ideal las fuerzas de tensión son siempre frontales, es decir, no hay fuerzas tangenciales.

Además, si se tratara de un fluido incompresible tendríamos que la densidad permanece constante a lo largo de todo el flujo.

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{W_t} dx\right) = 0$$

Aplicando (3.1) obtenemos $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Por último supondremos que se trata de un fluido homogéneo, siendo $\rho = \rho(t)$. Teniendo en cuenta (3.3) y $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, podemos obtener $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ de donde llegamos a $\rho = \rho_0(constante)$.

3.1.2.1 Ecuaciones de Euler

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores y simplificando, llegamos a las **ecuaciones de Euler incompresibles**

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = \mathbf{f}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T) \tag{3.8}$$

La EDP de la energía queda desacoplada, es por ello que no la hemos considerado. Una vez calculada **u**, podría calcularse w si se desea.

3.1.2.2 Ecuaciones de Navier-Stokes

Hasta ahora hemos considerado un fluido ideal, aquel en el que las fuerzas a través de una superficie eran normales a esta, pues bien, ahora consideraremos fluidos más generales. Es por ello que a continuación nos centraremos en las leyes de comportamiento de un fluido Newtoniano viscoso, incompresible y homogéneo, esto se debe principalmente a que en la práctica, como veremos más adelante en nuestro proyecto, ningún fluido es ideal. Por tanto, para cambiar la definición anterior, en vez de suponer

$$\text{Fuerza por unidad de área } = -p\mathbf{n}$$

ahora supondremos

$$\text{Fuerza por unidad de área } = -p \cdot \mathbf{n} + \tau \cdot n$$

es decir, en vez de considerar $\sigma = -pI$ ahora $\sigma = -pI + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \dfrac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})I$. Considerando la segunda ley de Newton (ley de conservación de la cantidad de movimiento) tenemos

$$\mathbf{T}(W_t, t) = -\int_{\partial W_t} p\,\mathbf{n}\,dT + \int_{\partial W_t} \tau \cdot \mathbf{n}\,dT$$

Por tanto, vemos que τ modifica el transporte de la cantidad de movimiento a través de la frontera de W_t.

A diferencia del caso anterior, ahora habrá esfuerzos de tensión tangencial debidos al rozamiento y a la viscosidad del fluido.

Entonces, teniendo en cuenta que un fluido homogéneo ($\rho = \rho_0$ constante) e incompresible $\left(\frac{d}{dt}(\int_{W_t} dx) = 0 \forall W, \forall t\right)$, que implica que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ podemos simplificar el sistema de ecuaciones que obtuvimos anteriormente y llegar a las **EDP de Navier-Stokes incompresibles**:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho_0}\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = \mathbf{f}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T)$$

donde $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$.

De nuevo la EDP de la energía queda desacoplada.

En el caso tridimensional, si $\mathbf{u} = (u, v, w)$ entonces las ecuaciones de Navier-Stokes quedan descritas por

$$\begin{cases} u_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ v_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)v - \nu\Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ w_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)w - \nu\Delta w + \partial_z p & = f_3 \text{ en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Los términos convectivos (no lineales) que aparecen en cada ecuación son los que se muestran a continuación:

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)u = (u, v, w) \cdot (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)^T = u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u$

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)v = (u, v, w) \cdot (\partial_x v, \partial_y v, \partial_z v)^T = u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v$

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)w = (u, v, w) \cdot (\partial_x w, \partial_y w, \partial_z w)^T = u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w$

3.1.3 Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes

A continuación, analizaremos algunas propiedades de escala de las ecuaciones de Navier-Stokes con el objetivo de introducir un parámetro adimensional, el número de Reynolds, que mide el efecto de la viscosidad en el flujo.

Para un problema dado, sea L una longitud característica y U una velocidad característica. Estos números se eligen de una manera algo arbitraria. Por ejemplo, si consideramos el flujo más allá de una esfera, L podría ser el radio o el diámetro de la esfera, y U podría ser la magnitud de la velocidad del fluido en el infinito. L y U son simplemente escalas razonables de longitud y velocidad típicas del flujo en cuestión. Su elección determina una escala de tiempo por $T = L/U$.

Entonces, podemos medir **x**, **u** y t como fracciones de estas escalas, haciendo un cambio de variables e introduciendo las siguientes cantidades adimensionales

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \qquad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \qquad y \qquad t' = \frac{t}{T}$$

La componente x de la ecuación de Navier-Stokes incompresible es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

El cambio de variables produce

$$\frac{\partial(u'U)}{\partial t'}\frac{\partial(t')}{\partial t} + Uu'\frac{\partial(u'U)}{\partial x'}\frac{\partial(x')}{\partial x} + Uv'\frac{\partial(u'U)}{\partial y'}\frac{\partial(y')}{\partial y} + Uw'\frac{\partial(u'U)}{\partial z'}\frac{\partial(w')}{\partial z} =$$
$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2(u'U)}{\partial(Lx')^2} + \frac{\partial^2(u'U)}{\partial(Ly')^2} + \frac{\partial^2(u'U)}{\partial(Lz')^2}\right]$$

$$\left[\frac{U^2}{L}\right]\left[\frac{\partial u'}{\partial t} + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right] = -\left[\frac{U^2}{L}\right]\frac{\partial(p/(\rho_0 U^2))}{\partial x'} + \left[\frac{U}{L^2}\right]\nu\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right]$$

De la misma forma, obtendríamos las ecuaciones para las componentes y y z. Combinando las tres ecuaciones, y dividiendo entre U^2/L, obtenemos las ecuaciones adimensionalizadas de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}'\nabla')\mathbf{u}' = -\nabla p' + \frac{\nu}{LU}\Delta'\mathbf{u}'$$

donde $p' = p/(\rho_0 U^2)$. Y la ecuación de incompresibilidad también se puede definir como:

$$\nabla \cdot u' = 0$$

A continuación vamos a definir el número de Reynolds (Re) como el número adimensional

$$Re = \frac{LU}{\nu}$$

Dos flujos con la misma geometría y el mismo número de Reynolds se denominan similares. Es decir, si suponemos que u_1 y u_2 son dos flujos en las regiones D_1 y D_2 que están relacionadas por un factor de escala λ de modo que $L_1 = \lambda L_2$. Eligiendo U_1 y U_2

para cada flujo, y siendo las viscosidades ν_1 y ν_2 respectivamente. Si

$$Re_1 = Re_2, \qquad \text{esto es} \qquad \frac{L_1 U_1}{\nu_1} = \frac{L_2 U_2}{\nu_2}$$

entonces los campos de velocidad adimensional u_1' y u_2' satisfacen la misma ecuación en la misma región. Por lo tanto, podemos concluir que u_1 puede obtenerse de una solución adecuadamente reescalada u_2, o lo que es lo mismo u_1 y u_2 son similares.

El principio de la similitud de los flujos anterior se utiliza principalmente en el diseño de modelos experimentales. Por ejemplo, supongamos que estamos diseñando un nuevo modelo de un buque, y deseamos conocer el comportamiento del flujo de un fluido alrededor del casco de éste. En lugar de construir un buque a tamaño real y estudiar el comportamiento, cosa que sería inviable económicamente, se construye un modelo de éste a una escala reducida que nos permitirá de una forma más rápida y económica realizar las pruebas necesarias. De esta forma diseñamos nuestro modelo para que tenga la misma geometría que el buque real y elegimos los valores de velocidad, coeficiente de viscosidad, etc., de tal manera que el número de Reynolds de nuestro experimento coincida con el del flujo real. De esta forma, podemos obtener resultados del experimento realistas y adecuados al flujo real sobre el casco del buque a gran escala.

Aunque nos centraremos principalmente en los casos en los que el número de Reynolds sea grande, no despreciaremos aquellos en los que el número de Reynolds sea pequeño.

Al igual que con el flujo ideal incompresible, la presión p en el flujo viscoso incompresible se determina a través de la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

En las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido viscoso incompresible

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u}$$

llamaremos

$$\frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} \qquad \text{el término de difusión o disipativo,}$$

y

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \qquad \text{la inercia o término convectivo}$$

Supongamos ahora que Re es muy pequeño, entonces el término difusivo tendría mucha importancia, es decir, tendría un valor elevado. En tal caso una buena aproximación de las ecuaciones de Navier-Stokes sería

$$\partial_t \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} \qquad \text{y} \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

siendo estas las **ecuaciones de Stokes** para flujo incompresible.

En estos casos en los que el término difusivo es importante frente al término convectivo estamos ante un problema parabólico mientras que si el número de Reynolds es muy grande el término difusivo sería pequeño, o muy pequeño, cobrando importancia el término convectivo, estando en este caso en un problema de tipo hiperbólico.

CHAPTER

4

Descripción del Método de los Elementos Finitos

Para llevar a cabo la resolución numérica de los problemas que vamos a plantear en nuestro trabajo vamos a utilizar el método de los elementos finitos (MEF). Utilizaremos este método para la discretización en espacio, mientras que para la discretización en tiempo haremos uso del método de Euler y del método de las características. El método de los elementos finitos se basa principalmente en transformar un problema de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado. Dicha aproximación se denomina discretización del modelo. Se trata de conseguir una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos.

El MEF permite conocer características reales de buques, sin la necesidad de crear prototipos, aunque se trata de un modelo matemático aproximado de cálculo. Es por ello que los prototipos siguen siendo necesarios, aunque en menor número, ya que el método puede acercarse bastante al diseño óptimo. En el caso del problema que se nos plantea en nuestro proyecto, los cascos de los buques son probados a una escala determinada en canales de experiencia, como en el Canal de Experiencia del Pardo de Madrid. La existencia de estos métodos de cálculo ayudan a que la fabricación de diferentes cascos de prueba para un mismo buque se vea reducida, haciendo así posible el cálculo de ciertos parámetros de una forma más económica.

El MEF es una herramienta muy potente y está considerado como uno de los métodos más influyentes en mecánica computacional.

La estructura que llevaremos a cabo en este capítulo será la siguiente: en primer lugar haremos una breve introducción sobre la historia del método, continuando con el desarrollo de éste, para terminar definiendo el método de las características.

Para desarrollar este apartado utilizaremos [1], [2], [7] y [8].

4.1 Historia

El método de los elementos finitos que conocemos actualmente tiene aproximadamente setenta años. Dicho método no surgió de forma repentina, sino que se trata del resultado de diversas aportaciones e ideas de varias generaciones de matemáticos e ingenieros, principalmente aeronáuticos, que han ido aportando su granito de arena para crear finalmente este método.

Si nos remontamos a la época de la construcción de las pirámides egipcias, los egipcios ya empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Arquímedes (287-212 a.C) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En Oriente, también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos. El matemático chino Lui Hui (300 d.C) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias, con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3.1416.

El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural fundamentalmente en el campo aeroespacial. Courant (1888-1972) propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rauleigh-Ritz para aproximar soluciones.

John Hadji Argyris (1913-2004), ingeniero aeronáutico, está considerado como el padre del método de los elementos finitos, siendo la solución del problema de la protección al calor de la lanzadera espacial de la NASA durante su reentrada en la atmósfera una de sus contribuciones más importantes.

Este método no fue muy conocido hasta 1955 cuando los ingenieros, enfrentados a problemas de elasticidad, empiezan a prestarle atención. Será entre 1955 y 1964 cuando se definirán la mayoría de los elementos finitos y las principales extensiones de dicho método.

La audiencia del método aumentará ampliamente a partir de 1965, que será cuando se empiecen a publicar numerosas obras relacionadas con el MEF.

Es con la llegada de los ordenadores cuando se instaura el cálculo matricial de estructuras, partiendo éste de la discretización de la estructura de elementos lineales tipo barra de los que se conoce su rigidez frente a los desplazamientos de sus nodos. Es en ese momento cuando se plantea un sistema de ecuaciones resultado de aplicar las ecuaciones de equilibrio a los nodos de la estructura.

Aunque el auge del método de los elementos finitos comenzó en la década de los 50, coincidiendo con la aparición de los ordenadores, la base teórica de este método data del siglo XIX. Como podemos suponer, hasta los años 50 este método no era muy útil, ya que no se disponían de los aparatos necesarios para llevar a cabo el cálculo rápido y preciso que métodos de estas características requerían. Es por ello, que este método resurgió con la aparición de los ordenadores que permitieron realizar los cálculos de forma rápida y precisa, así como la realización de gráficos que permiten visualizar los resultados de una forma más cómoda. Estos avances informáticos han sido los responsables de poner a disposición del usuario diversos programas que permiten realizar cálculos con elementos finitos, de una forma relativamente sencilla.

Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo de las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Entre estas, además de permitir la descentralización de los programas de EF, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación.

4.2 El Método de los Elementos Finitos

El punto de partida del método de los elementos finitos es la reescritura del problema que se nos plantea de forma completamente diferente, es decir, en su formulación variacional o débil. Este método está diseñado para la resolución de problemas elípticos (estacionarios),

pudiéndose emplear junto con otros métodos, como por ejemplo el método de las diferencias finitas para aproximar problemas parabólicos e hiperbólicos (evolutivos). Es muy útil cuando los dominios son complicados, es decir, cuando se trata de geometrías irregulares.

En nuestro proyecto nos vamos a centrar en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Es por ello que utilizaremos el método de los elementos finitos para la discretización en espacio de nuestro problema, mientras que para la discretización en tiempo de éste utilizaremos el método de las características que explicaremos al final del capítulo. Esto se debe principalmente a que se trata de un problema hiperbólico cuando el número de Reynolds es elevado, y la parte convectiva de la ecuación toma mayor importancia que la difusiva como va a ocurrir en los problemas que plantearemos.

En general, en cualquier problema estacionario que vayamos a analizar podemos distinguir:

- Dominio: espacio geométrico donde se va a analizar el sistema, Ω.
- Condiciones de contorno: variables conocidas y que condicionan el cambio del sistema: cargas, desplazamientos, temperaturas, etc. en la frontera del dominio.
- Incógnitas: variables del sistema que deseamos conocer después de que las condiciones de contorno han actuado sobre el sistema: desplazamientos, tensiones, temperaturas, etc.

Para resolver el problema que se nos plantea mediante el método de los elementos finitos, el dominio ha de estar discretizado en subdominios denominados elementos. En el caso unidimensional el dominio se dividirá en subintervalos, en el caso bidimensional se dividirá mediante triángulos, mientras que en el caso tridimensional se dividirá mediante tetraedros, de forma que el dominio total en estudio se aproxime mediante un conjunto de elementos en que se subdivide. Estos subdominios se definirán por un número discreto de puntos, denominados nodos, que conectan entre sí los elementos. La solución de nuestro problema será más exacta, entre otras consideraciones, cuanto mayor sea el número de subdivisiones. Para que el problema se pueda manipular fácilmente con ordenador éste se formulará en forma matricial.

Por simplicidad en el capítulo, vamos a definir el método de los elementos finitos en dimensión uno, dando los conceptos más importantes en el caso de dimensiones superiores. Introduciremos conceptos fundamentales como “malla” (triangular, en nuestro caso) y

"grados de libertad", entre otros, que nos permitirán la resolución de nuestro problema mediante el método.

Aunque para la resolución de nuestro problema nos basemos en el método de los elementos finitos, existen otros métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales como son el método de las diferencias finitas, el método de volúmenes finitos, el método de los elementos de contorno, el método espectral y el método de Fourier, entre otros.

A continuación detallaremos el proceso de aproximación variacional interna.

4.2.1 Formulación variacional

La idea principal del método de los elementos finitos es reemplazar el espacio V de Hilbert en el que planteamos la formulación variacional por un subespacio V_h de dimensión finita. El problema "aproximado" planteado sobre V_h se reduce a la resolución de un sistema lineal de ecuaciones. Además, podemos construir V_h de tal manera que el subespacio V_h tenga buenas propiedades, siendo una buena aproximación de V y que la solución u_h en V_h de la formulación variacional, esté cerca de la solución exacta del problema, u en V.

4.2.1.1 Aproximación variacional interna (Método de Galerkin)

Dado un espacio de Hilbert V, una forma bilineal continua y coercitiva $a(u, v)$, y una forma lineal continua $L(v)$, consideramos la siguiente formulación variacional:

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in V \tag{4.1}$$

que sabemos que admite una única solución por el teorema de Lax-Milgram. La aproximación interna de esta formulación variacional consiste en reemplazar el espacio de Hilbert V por un subespacio de dimensión finita V_h, de tal manera que nuestro problema consistiría en:

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h \tag{4.2}$$

El siguiente lema nos lleva a la resolución práctica del problema.

Lema 1. *Sea V un espacio de Hilbert real y V_h un subespacio de dimensión finita. Supongamos que $a(u, v)$ es una forma bilineal continua y coercitiva sobre V, y $L(v)$ una forma lineal continua sobre V. Entonces la aproximación interna (4.2) admitirá una solución única. Además, esta solución se puede obtener resolviendo un sistema lineal de ecuaciones con una matriz definida positiva.*

Demostración. La existencia y unicidad de $u_h \in V_h$, la solución de (4.2), proviene del teorema de Lax-Milgram aplicado a V_h. Para definir el problema de una forma sencilla, introducimos la base $(\phi_j)_{1\leq j\leq N_h}$ siendo N_h la dimensión de V_h. Si $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j\phi_j$, establecemos el vector $U_h = (u_1, ..., u_{N_h})$ en $\mathbb{R}^{N_h}$ de coordenadas de u_h. Por tanto, el problema (4.2) es equivalente a:

$$\text{Hallar } U_h \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tal que } \Big(\sum_{j=1}^{N_h} u_j\phi_j, \phi_i\Big) = L(\phi_i) \qquad \forall\ 1 \leq i \leq N_h,$$

que se puede escribir en forma de sistema lineal

$$K_hU_h = b_h, \tag{4.3}$$

para $1 \leq i, j \leq N_h$,

$$(K_h)_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), \qquad (b_h)_i = L(\phi_i).$$

La coercitividad de la forma bilineal $a(u, v)$ implica el carácter definido positivo de la matriz K_h, y por tanto su invertivilidad. En efecto, para todo vector $U_h \in \mathbb{R}^{N_h}$, tenemos:

$$K_hU_h \cdot U_h \geq v\Big|\Big|\sum_{j=1}^{N_h} u_j\phi_j\Big|\Big|^2 \geq C|U_h|^2 \text{ con } C > 0$$

ya que todas las normas son equivalentes en dimensiones finitas y donde $|\,|$ es la norma euclídea. De la misma forma, la simetría de $a(u, v)$ implica la de K_h.

Ahora acotaremos el error cometido al reemplazar el espacio V por el subespacio V_h. De forma más precisa, acotaremos la diferencia $||u - u_h||$ donde u es la solución en V de (4.1) y u_h para V_h en (4.2). Recordemos que por hipótesis:

$$a(u, u) \geq v||u||^2 \qquad \forall u \in V,$$

$$|a(u, v)| \leq M||u||\ ||v|| \qquad \forall u, v \in V$$

donde $\mu > 0$ es la constante de coercitividad y $M < 0$ la de continuidad de la a. El lema que enunciaremos a continuación muestra que el error entre la solución exacta u y la solución aproximada u_h está acotado uniformemente con respecto al subespacio V_h por la distancia entre u y V_h.

Lema 2. (Céa) *Supongamos que se verifican las hipótesis del Lema 1. Sea u la solución de (4.1) y u_h la de (4.2). Entonces se verifica:*

$$||u - u_h|| \leq \frac{M}{v} \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||. \tag{4.4}$$

Demostración. Ya que $V_h \subset V$, deducimos, por diferencia de las formulaciones variacional de (4.1) y (4.2), que

$$a(u - u_h, w_h) = 0 \qquad \forall w_h \in V_h.$$

Aplicando las hipótesis de coercitividad y continuidad de la forma bilineal a obtenemos:

$$v||u - u_h||^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M||u - u_h||\,||u - v_h||,$$

de donde se deduce (4.4).

A continuación vamos a dar un resultado de convergencia del método de Galerkin.

Lema 3. *Utilizando las hipótesis del lema 2, suponemos que existe un subespacio $\Upsilon \subset V$ denso en V, y un operador r_h de Υ en V_h (llamado operador de interpolación) tal que*

$$\lim_{h \to 0} ||v - r_h(v)|| = 0 \qquad \forall v \in \Upsilon \tag{4.5}$$

Entonces el método de aproximación variacional interna (método de Galerkin) converge, es decir

$$\lim_{h \to 0} ||u - u_h|| = 0 \tag{4.6}$$

Demostración. Tomamos $\varepsilon > 0$. Debido a la densidad de ν, existe $v \in \Upsilon$ tal que $||u - v|| \leq \varepsilon$. Además, existe un $h_0 > 0$ que depende de ε tal que, para este elemento $v \in \Upsilon$, tenemos

$$||v - r_h(v)|| \leq \varepsilon \qquad \forall h \leq h_0$$

Del lema 2 como $r_h(v) \in V_h$, obtenemos

$$||u - u_h|| \leq C||u - r_h(v)|| \leq C(||u - v|| + ||v - r_h(v)||) \leq 2C_\varepsilon$$

de donde hemos deducido el resultado.

Podemos concluir que para obtener una aproximación numérica de la solución exacta del problema variacional (4.1) , debemos introducir un espacio de dimensión finita V_h que resuelva un sistema lineal simple asociado con la aproximación variacional interna (4.2). La elección de V_h debe satisfacer dos criterios:

- Debemos construir un operador de interpolación r_h de Υ en V_h satisfaciendo (4.5).
- La resolución del sistema lineal $K_h U_h = b_h$ debe ser eficiente.

A pesar de su utilidad en el marco teórico desarrollado anteriormente, el método de Galerkin no es útil desde un punto de vista práctico. La matriz K_h que obtenemos generalmente está "llena", es decir, muchos de los coeficientes son distintos de cero en general y "mal condicionada", esto conducirá a que haya inestabilidad y la solución sea muy sensible a los errores de redondeo en el ordenador.

El método de los elementos finitos parte del método de Galerkin donde el espacio considerado V_h es elegido cumpliendo buenas propiedades, es decir, se pueden extraer bases que permiten calcular los coeficientes de este sistema que se calculen de forma sencilla y que la matriz sea hueca.

4.2.1.2 Principios generales del Método de los Elementos Finitos

El método de los elementos finitos se basa principalmente en construir espacios de aproximación V_h a partir de espacios funcionales $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H^2(\Omega), ...$ basándose esta definición en el concepto geométrico de malla de dominio conocido Ω, siendo h en V_h el tamaño máximo de dicha malla.

4.2.2 Elementos finitos en dimensión 1

Para llevar a cabo el desarrollo del método de los elementos finitos partiremos de los elementos finitos en dimensión uno, para posteriormente generalizar dicho método en dimensión dos y superior.

En el caso de una malla en dimensión uno, podemos elegir un domino $\Omega = [0, 1]$, de esta forma, la malla estará formada por una serie de puntos, tal que

$$x_0 = 0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = 1$$

si estos puntos, x_j, son equidistantes, la malla será denominada como malla uniforme y los puntos x_i serán denominados vértices o nodos de la malla.

Para el desarrollo del método de los elementos finitos en una dimensión consideraremos el siguiente problema modelo, con condiciones de contorno Dirichlet homogénea

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

del cual podemos asegurar que admite una única solución en $H_0^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$.

4.2.2.1 **Elementos Finitos P1**

El método de los elementos finitos P_1 usa el siguiente espacio discreto

$$V_h = \{v \in C([0,1]) \text{ tal que } v|_{[x_j,x_{j+1}]} \in P_1 \text{ para todo } 0 \leq j \leq n\} \tag{4.8}$$

y su subespacio

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v(0) = v(1) = 0\} \tag{4.9}$$

El método de los elementos finitos P_1 es el método de aproximación variacional interna de la aproximación general que hemos explicado anteriormente, aplicando esto a los espacios V_h o V_{oh} definidos por (4.8) y (4.9).

Como estos espacios son de dimensión finita las funciones de V_h o V_{0h}, que son funciones afines a trozos pueden ser representadas utilizando funciones de bases muy simples. Introduciendo la función "sombrero" ϕ que viene definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & si \qquad |x| \leq 1, \\ 0 & si \qquad |x| > 1. \end{cases}$$

Si la malla es uniforme, para $0 \leq j \leq n+1$ podemos definir las funciones base de la siguiente forma

$$\phi_j(x) = \phi(\frac{x - x_j}{h}) \tag{4.10}$$

Lema 4. *Siendo el espacio V_h un subespacio de $H^1(0,1)$ en dimensión N+2, y cada función $v_h \in V_h$ está definida de forma única por los valores en los vértices $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$*

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j)\phi_j(x) \qquad \forall x \in [0,1]$$

De la misma forma, V_{0h} es un subespacio de $H_0^1(0,1)$ de dimensión n, y cada función $v_h \in V_{0h}$ es definida únicamente por los valores en los vértices $(x_j)_{1\leq j\leq 0}$

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{n} v_h(x_j)\phi_j(x) \qquad \forall x \in [0,1]$$

La base (ϕ_j), definida por (4.10), nos permite caracterizar una función de V_h por sus valores en los nodos de la malla. En este caso hablamos de elementos finitos de Lagrange. Aquí, como las funciones son localmente P^1 decimos que V_h es el espacio de elementos finitos de Lagrange de orden 1.

A continuación vamos a obtener la solución práctica del problema de Dirichlet (4.7) mediante el método de los elementos finitos P_1. La formulación variacional, (4.2), será ahora

$$\text{Hallar } u_h \in V_{0h} \text{ tal que } \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \qquad \forall v_h \in V_{0h} \quad (4.11)$$

Descomponiendo u_h en base a $(\phi_j)_{1\leq j\leq n}$ y tomando $v_h = \phi_i$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} u_h(x_j) \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$

Denotando $U_h = (u_h(x_j))_{1\leq j\leq n}, b_h = (\int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx)_{1\leq i\leq n}$ e introduciendo la matriz de rigidez

$$K_h = (\int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx)_{1\leq i,j\leq n}$$

Por tanto, tenemos que la formulación variacional en V_{0h} se reduce a resolver en R^N el sistema lineal

$$K_h U_h = b_h$$

Como las funciones ϕ_i tienen soporte pequeño muchos elementos de K_h serán cero.

Problema de Neumann. A continuación vamos a llevar a cabo la aplicación del método de los elementos finitos en P_1 para el siguiente problema de Neumann

$$\begin{cases} -u'' + au = f \text{ en } [0,1] \\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta \end{cases} \qquad (4.12)$$

El cual admite una única solución en $H^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $a \in L^\infty(\Omega)$ tal que $a(x) \geq a_0 > 0$ en Ω. Por tanto, la formulación variacional (4.2) en este caso será:

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } \int_0^1 (u_h'(x)v_h'(x)+a(x)u_h(x)v_h(x))dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx - \alpha v_h(0) + \beta v_h(1),$$

para todo $v_h \in V_h$. Si descomponemos u_h en las bases de $(\psi_j)_{0\leq j\leq n+1}$ la formulación variacional en V_h se reduce a resolver en $\mathbb{R}^{N+2}$ el siguiente sistema lineal

$$K_h U_h = b_h$$

con $U_h = (u_h(x_j))_{0\leq j\leq n+1}$. Por tanto, la nueva matriz del sistema será

$$K_h = (\int_0^1 (\psi_j'(x)\psi_i'(x) + a(x)\psi_j(x)\psi_i(x))dx)_{0\leq i,j\leq n+1}$$

$$\text{y } (b_h)_i = \int_0^1 f(x)\psi_i(x)dx \qquad si \qquad 1 \leq i \leq n,$$

$$(b_h)_0 = \int_0^1 f(x)\psi_0(x)dx - \alpha,$$

$$(b_h)_{n+1} = \int_0^1 f(x)\psi_{n+1}(x)dx + \beta$$

En el caso en el que $a(x)$ no sea una función constante, será necesario utilizar una fórmula de cuadratura para evaluar correctamente los coeficientes de la matriz K_h.

4.2.2.2 **Convergencia y estimación de error**

En este apartado vamos a demostrar la convergencia del método de los elementos finitos P_1 en una dimensión. Para ello comenzaremos definiendo el operador de interpolación r_h. Este operador está definido de $H^1(0,1)$ en V_h, viene definido para todo $v \in H^1(0,1)$, por

$$(r_h v)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v(x_j)\phi_j(x)$$

Las funciones de $H^1(0,1)$ son continuas y, por lo tanto, los valores de sus puntos están bien definidos. El operador de interpolación $r_h v$ de una función v es simplemente la función que es afín a trozos que coincide con v en los vértices de la malla x_j.

La convergencia del método de elementos finitos P_1 se basa en el siguiente lema.

Lema 5. Error de interpolación. *Sea r_h el operador de interpolación P_1. Para cada $v \in H^1(0,1)$, se satisface*

$$\lim_{h\to 0} ||v - r_h v||_{H^1(0,1)} = 0$$

Además, si $v \in H^2(0,1)$, existe una constante C independiente de h tal que

$$||v - r_h v||_{H^1(0,1)} \leq Ch||v''||_{L^2(0,1)}$$

Teorema. Dados $u \in H_0^1(0,1)$ y $u_h \in V_{0h}$ soluciones de (4.7) y (4.12) respectivamente. Entonces, el método de los elementos finitos en P_1 converge, es decir:

$$\lim_{h\to 0} ||u - u_h||_{H^1(0,1)} = 0 \tag{4.13}$$

Además, si $u \in H^2(0,1)$ (esto es cierto si $f \in L^2(0,1)$), entonces existe una constante C independiente de h tal que

$$||u - u_h||_{H^1(0,1)} \leq Ch||u''||_{L^2(0,1)} \tag{4.14}$$

4.2.2.3 **Elementos Finitos P_2**

El método de elementos finitos P_2 usa el siguiente espacio discreto

$$V_h = \{v \in C([0,1]) \text{ tal que } v|_[x_j, x_{j+1}] \in P_2 \text{ para todo } 0 \leq j \leq n\} \tag{4.15}$$

y el subespacio

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v(0) = v(1) = 0\} \tag{4.16}$$

El método de elementos finitos P_2 es el método de aproximación variacional interna aplicada a los espacios V_h o V_{0h}. Estando estos compuestos por funciones cuadráticas continuas a trozos.

Para explicar de una forma más sencilla los elementos finitos P_2, en primer lugar introduciremos los puntos medios de los segmentos $[x_j, x_{j+1}]$ definidos por $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ para $0 \leq j \leq n$. Definiremos también las dos funciones de "referencia" que se muestran a continuación

$$\phi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x) & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ (1-x)(1-2x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

y

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{si} \quad |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1/2 \end{cases}$$

Siempre que la malla sea uniforme, para $0 \leq j \leq n+1$ definiremos las funciones base de la siguiente forma

$$\psi_j = \phi\Big(\frac{x - x_j}{h}\Big), 0 \leq j \leq n+1, \qquad \text{y} \qquad \psi_{j+1/2}(x) = \psi\Big(\frac{x - x_{j+1/2}}{h}\Big), 0 \leq j \leq n.$$

Lema 6. *Sea el espacio V_h un subespacio de $H^1(0,1)$ de dimensión 2n+3, y siendo cada función $v_h \in V_h$ definida únicamente por sus valores en los vértices $(x_j)_{0\leq j\leq n+1}$ y en los puntos medios $(x_{j+1/2})_{0\leq j\leq n}$*

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j)\psi_j(x) + \sum_{j=0}^{n} v_h(x_{j+1/2})\psi_{j+1/2}(x) \qquad \forall x \in [0,1]$$

De la misma forma, V_{0h} es un subespacio de $H_0^1(0,1)$ de dimension 2n+1, estando cada función $v_h \in V_{0h}$ definida únicamente por sus valores en los vértices $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ y en los puntos medios $(x_{j+1/2})_{0\leq j\leq n}$

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{n} v_h(x_j)\phi_j(x) + \sum_{j=0}^{n} v_h(x_{j+1/2})\psi_{j+1/2}(x) \qquad \forall x \in [0,1]$$

4.2.2.4 **Propiedades cualitativas.**

Sabiendo que la solución de un problema de Dirichlet satisface el principio del máximo:

Si $f \geq 0$ en casi todo Ω, entonces $u \geq 0$ en casi todo Ω.

Es importante conocer si esta propiedad es conservada por la aproximación variacional interna. Para ello llevaremos a cabo el principio del máximo discreto.

Problema (Principio del máximo discreto). Suponemos que $f \geq 0$ casi para todo $(0,1)$. Entonces, la solución u_h de la aproximación variacional por el método de los elementos finitos P_1 satisface $u_h \geq 0$ en [0,1].

Sea u_h la solución de (4.11). Tenemos:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} u_h(x_j)\phi_j(x)$$

donde las funciones ϕ_j son funciones base de elementos finitos P_1 en V_{0h} y $U_h = (u_h(x_j))_{1\leq j\leq n}$ es la solución del siguiente sistema lineal

$$K_h U_h = b_h \tag{4.17}$$

Las funciones ϕ_j son las funciones sombrero que son no negativas. Por tanto, es suficiente demostrar que todos los componentes del vector $U_h = (U_h^j)_{1\leq j\leq n}$ son no negativos para demostrar que la función u_h es no negativa en [0,1].

4.2.3 Elementos finitos en dimensiones $N \geq 2$

En nuestro proyecto nos basaremos principalmente en los elementos finitos en dimensión dos, y superiores, ya que las mallas que vamos a tratar son, en su gran mayoría, mallas en dos dimensiones, y otras más complejas que realizaremos en tres dimensiones. No usando en este proyecto mallas en dimensión uno ya que carecen de interés práctico.

En este apartado trataremos de forma general los conceptos más importantes en dimensiones $N \geq 2$.

Para empezar, vamos a considerar el problema de Dirichlet como problema modelo

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.18}$$

el cual admite una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$, si $f \in L^2(\Omega)$.

Para el desarrollo de este punto supondremos que el dominio, Ω, es un poliedro, es decir, $\bar{\Omega}$ es una unión finita de poliedros en $\mathbb{R}^N$. Siendo un poliedro una intersección finita de semiespacios de $\mathbb{R}^N$ y denominándose caras los diferentes hiperplanos que constituyen los diferentes contornos de éste.

4.2.3.1 Elementos finitos triangulares

Las mallas en el dominio Ω estarán definidas por triángulos en dimensión N=2, mientras que lo harán mediante tetraedros para N=3.

Agrupamos los triángulos y los tetraedros en la familia más general de N-símpleces. Llamamos N-símplex K de $\mathbb{R}^N$ a la envolvente convexa de (N + 1) puntos $(a_j)_{1\leq j\leq N+1}$ en $\mathbb{R}^N$, llamados vértices de K. Un 2-símplex es un triángulo y un 3-símplex un tetraedro. Decimos que el N-simplex K es no degenerado si los puntos $(a_j)_{1\leq j\leq N+1}$ no pertenecen al mismo hiperplano de $\mathbb{R}^N$ (el triángulo o el tetraedro no es "plano"). Si denotamos por $(a_j)_{1\leq j\leq N}$ las coordenadas del vector a_j, la condición de no degeneración en K es que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N+1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

sea invertible. Un N-símplex tiene tantas caras como vértices, que son en sí mismas (N-1)-símplices.

Definición. Sea Ω un poliedro abierto conectado en $\mathbb{R}^N$. Una malla triangular o una triangulación de $\bar{\Omega}$ es un conjunto T_h N-símplices $(K_i)_{1\leq i\leq n}$ no degenerados que satisface

1. $K_i \subset \bar{\Omega}$ y $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^{n} K_i$

2. La intersección $K_i \cap K_j$ de dos N-símplices distintos es un m-símplex, con $0 \leq m \leq N-1$, cuyos vértices son también vértices de K_i y K_j. En dimensión N = 2, la intersección de dos triángulos está vacía o se reduce a un vértice común, o un lado común completo; en dimensión N = 3, la intersección de dos tetraedros está vacía, o es vértice común, o una arista común completa, o una cara común interna.

Los vértices o nodos de la malla T_h son los vértices de los N-símplices K_i que la componen. Por convención, el parámetro h denota el diámetro máximo de los N-símplices K_i.

Definición. Dada una malla T_h de un conjunto poliédrico abierto Ω, el método de los elementos finitos P_k, o elementos finitos triangulares de Lagrange de orden K, viene defino por el espacio discreto

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) \text{ tal que } v|_{K_i} \in P_k \text{ para todo } K_i \in T_h\} \tag{4.20}$$

Llamamos grados de libertad de una función $v \in V_h$ el conjunto de los valores de v en los nodos $(\hat{a}_i)_{1\leq i\leq n_{dl}}$. También definimos el subespacio V_{0h} por

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \tag{4.21}$$

Si

- k = 1, los nodos de estos grados de libertad coinciden con los vértices de la malla.

- k = 2, estos nodos se componen, por un lado, de los vértices de la malla y, por otro lado, de los puntos medios de los lados que unen dos vértices.

4.2.3.2 Convergencia y estimación de error

En este apartado vamos a comprobar la convergencia de los métodos de los elementos finitos P_k para el problema de Dirichlet (4.18). Para ello haremos uso de varias hipótesis geométricas de la malla. Para cada N-símplex K introduciremos dos parámetros geométricos, que serán: el diámetro, diam(K), y el diámetro de la bola más grande contenida en K, que denotaremos por $\rho(K)$.

$$diam(K) = \max_{x,y \in K} ||x - y||, \qquad \rho(K) = \max_{B_r \subset K} (2r)$$

Siempre vamos a tener $diam(K)/\rho(K) > 1$. Esta relación es mayor cuando K está "tensada": es una medida de la degeneración de K. Tanto en la práctica como en la teoría debemos evitar el uso de N-símplices K que son demasiado planos.

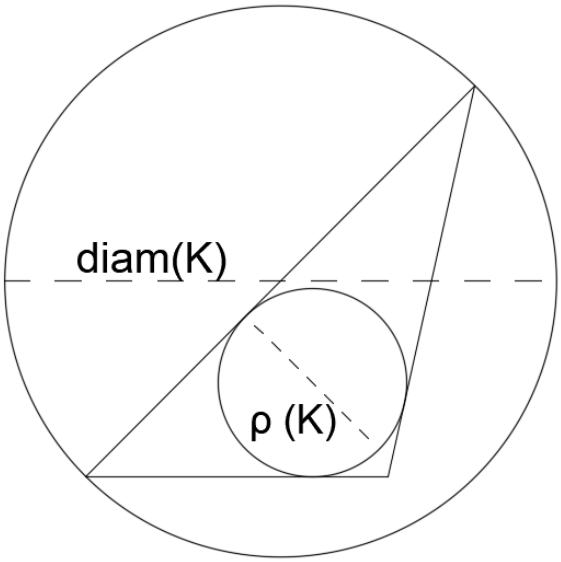

Figura 4.1: diam (K) y ρ(K) para un triángulo K

Definición. Sea $(T_h)_{h \geq 0}$ una sucesión de mallas en Ω. Decimos que es una sucesión de mallas regulares si

1. la sucesión $h = \max_{K_i \in T_h} diam(K_i)$ tiende a 0.
2. si existe una constante C tal que, para todo $h > 0$ y para todo $K \in T_h$

$$\frac{diam(K)}{\rho(K)} \leq C$$

Teorema. Sea $(T_h)_{h>0}$ una sucesión de mallas regulares en Ω. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ la solución del problema de Dirichlet (4.18), y $u_h \in V_{0h}$ la aproximación variacional interna por el método de los elementos finitos P_k. Entonces, el método de los elementos finitos P_k converge, tal que

$$\lim_{h\to 0} ||u - u_h||_{H^1(\Omega)} = 0 \tag{4.22}$$

Además, si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ y $k+1 > N/2$, entonces tenemos que la estimación de error será

$$||u - u_h||_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k ||u||_{H^{k+1}(\Omega)} \tag{4.23}$$

donde C es una constante independiente de h y de u.

El teorema que acabamos de enunciar se aplica a todos los métodos de elementos finitos de Lagrange. El único argumento utilizado es la construcción de un operador de interpolación basado en la caracterización de las funciones de V_h por sus valores en los vértices de los grados de libertad, lo que siempre es posible para los elementos finitos de Lagrange. Para los casos físicamente pertinentes N = 2 o N = 3, la condición $k + 1 > N/2$ siempre se satisface cuando $k \geq 1$.

La comprobación el teorema anterior se basa en la siguiente definición del operador de interpolación r_h y en el resultado de la interpolación de la proposición que enunciaremos a continuación. Hemos denotado por $(a_i)_{1\leq i\leq n_{dl}}$ a la familia de los vértices de los grados de libertad y $(\phi_i)1 \leq i \leq n_{dl}$ a las bases de V_{0h} del método de elementos finitos P_k. Para cada función continua v, definimos su interpolante

$$r_h v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(a_i)\phi_i(x) \tag{4.24}$$

La principal diferencia con el estudio realizado en dimensión N = 1 es que como las funciones de $H^1(\Omega)$ no son continuas cuando $N \geq 2$ el operador interpolación r_h no está definido en $H^1(\Omega)$. Sin embargo, esta es la razón para la hipótesis $k + 1 > N/2$, r_h está bien definido en $H^{k+1}(\Omega)$ porque las funciones de $H^{k+1}(\Omega)$ son continuas.

Proposición. Sea $(T_h)_{h>0}$ una secuencia regular de mallas de Ω. Suponemos que $k + 1 > N/2$. Entonces, para todo $v \in H^{k+1}(\Omega)$ el interpolante $r_h v$ está bien definido, y existe una constante C, independiente de h y de v, tal que

$$||v - r_h v||_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k ||v||_{h^{k+1}(\Omega)} \tag{4.25}$$

Si suponemos cierta este proposición, podemos concluir la convergencia del método de elementos finitos P_k.

Demostración teorema. Para demostrar (4.22) usamos el lema 3 con $\Upsilon = C_c^\infty(\Omega)$ que es denso en $H_0^1(\Omega)$. Como $C_c^\infty(\Omega) \subset H^{k+1}(\Omega)$, la estimación 4.25 nos permite verificar la hipótesis (4.5) del lema 3.

Para obtener la estimación de error (4.23) usamos el lema 2 que nos dice

$$||u - u_h||_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_{oh}} ||u_- v_h||_{H^1(\Omega)} \leq C||u - r_h u||_{H^1(\Omega)},$$

si $r_h u$ pertenece a $H^1(\Omega)$. Por la aplicación de la proposición anterior a u obtenemos (4.23).

4.2.3.3 Elementos finitos para el problema de Stokes

Aunque la generalización del método de los elementos finitos a sistemas de EDP no plantee problemas particulares, no será éste el caso para el sistema de ecuaciones de Stokes, debido a la incompresibilidad en el fluido ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$). Tenemos que las ecuaciones de Stokes con dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, en presencia de fuerzas externas $f(x)$ y dadas unas condiciones de contorno, se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{cases} \nabla p - \nu \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.26}$$

siendo $u > 0$ la viscosidad del fluido. Por tanto, tenemos que la formulación variacional del problema que acabamos de plantear (4.26) será

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } \int_\Omega \nu \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f \cdot v dx \qquad \forall v \in V \tag{4.27}$$

siendo V el espacio de Hilbert que viene definido de la siguiente forma

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tal que } \nabla \cdot v = 0, \text{ en } \Omega\} \tag{4.28}$$

En la práctica resulta complicado llevar a cabo la aproximación variacional de (4.27) debido a la restricción de incompresibilidad ,$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, que se le presenta a V.

La dificultad principalmente es definir un subespacio V_h de V de dimensión finita cuyos elementos se escriben utilizando las funciones base de elementos finitos P_k o Q_k.

La condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ aplicada a la definición de V_h mezcla los componentes de $\mathbf{u}$, es por ello que se hace muy difícil caracterizar una base explícita de V_h. Por tanto, la formulación variacional que utilizaremos para definir el método de los elementos finitos no será (4.27).

La formulación variacional que utilizaremos en la práctica para el problema de las ecuaciones de Stokes consiste en no forzar la incompresibilidad cuando definamos el espacio, y suponer la presión como desconocida. Por tanto, al multiplicar la primera ecuación de (4.26) por la función test $v \in H_0^1(\Omega)^N$ y la segunda ecuación por la función test $q \in L^2(\Omega)$, y realizando la integración por partes correspondiente en ambos términos de la ecuación llegamos a:

Hallar $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega p \nabla \cdot v \, dx & = \int_\Omega f \cdot v \mathrm{dx} \\ \int_\Omega q \nabla \cdot u \, dx & = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

$\forall (v, q) \in H_0^1(\Omega)^N x \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Lema 7. *Dado $(u, p) \in H_0^1(\Omega \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. El par (u,p) será solución de (4.29) si y solo si es la solución de las ecuaciones de Stokes (4.26).*

Por tanto, para construir una aproximación variacional interna de (4.29) introduciremos los siguientes espacios discretos

$$\begin{cases} V_{0h} = \{v \in C(\bar{\Omega})^N \text{ tal que } v|K_i \in P_K^N \text{ para todo } K_i \in T_h \text{ y } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}, \\ Q_h = \{q \in C(\bar{\Omega})/\mathbb{R} \text{ tal que } q|K_i \in P_{K'} \text{ para todo } K_i \in T_h\} \end{cases}$$

siendo $V_{0h} \times Q_h$ un subespacio de $H_0^1(\Omega)^N \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ de dimensión finita. Llegamos entonces a la aproximación variacional simple de (4.29), siendo esta la que se muestra a continuación

$$\begin{cases} \int_\Omega \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx - \int_\Omega p_h \nabla \cdot v_h \, dx = \int_\Omega f \cdot v_h \, dx \\ \int_\Omega q_h \nabla \cdot u_h \, dx = 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

$\forall \, (v_h, q_h) \in V_{0h} \times Q_h$.

4.3 Método de las características

En los casos prácticos, cuando el número de Reynolds es grande, estaremos ante un problema hiperbólico. En este caso, realizaremos la aproximación en tiempo mediante el método de las características.

El método de las características es una técnica para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales. Normalmente se aplica a ecuaciones de primer orden, aunque más generalmente el método es válido para cualquier ecuación diferencial parcial hiperbólica. Este método se basa en reducir una ecuación diferencial parcial a una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias a lo largo de la cual la solución se puede integrar en función de los datos iniciales dados en una adecuada hipersuperficie.

En el experimento n° 3 utilizaremos este método y daremos algunos detalles más.

4.3.0.1 Sistemas hiperbólicos

Los sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales se pueden utilizar para modelar una amplia variedad de fenómenos que involucran el movimiento ondulatorio o el transporte advectivo de ciertas sustancias.

Generalmente consideramos problemas que dependen del tiempo, por lo que a su vez la solución de éste también dependerá del tiempo, así como de otras variables espaciales. Si suponemos un sistema homogéneo de primer orden, en una dimensión, de una ecuación parcial diferencial en x y t, este tendrá la siguiente forma

$$q_t(x,t) + Aq_x(x,t) = 0$$

se trata del caso más sencillo. Aquí $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es un vector con m componentes que representan las funciones desconocidas, como son la presión, la velocidad, etc. que queremos determinar, y A es una matriz real constante $m \times m$. Para que este problema sea hiperbólico, la matriz debe satisfacer ciertas propiedades. En concreto, el sistema anterior se dice hiperbólico si la matriz es diagonalizable y todos sus autovalores son reales. El transporte advectivo se refiere a una sustancia que se transporta por el movimiento de un fluido, por ejemplo.

4.3.0.2 Leyes de conservación

Las leyes de conservación constituyen un caso importante de las ecuaciones hiperbólicas homogéneas. El ejemplo más simple de conservación unidimensional es la EDP

$$u_t(x,t) + f(q(x,t))_x = 0$$

donde $f(q)$ es la función flujo. Si reescribimos esta ecuación de forma cuasilineal tenemos

$$q_t + f'(q)q_x = 0$$

esto indica que la ecuación es hiperbólica si la matriz jacobiana del flujo $f(q)$ satisface las condiciones dadas para la matriz A, es decir, la matriz jacobiana es diagonalizable con autovalores reales.

Problema de Cauchy. El problema de Cauchy consiste en encontrar una función

$$u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \longmapsto \Omega$$

que sea solución de la ecuación

$$u_t(x,t) + f(q(x,t))_x = 0$$

y que verifique la condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}$$

donde $u_0 : \mathbb{R} \longmapsto \Omega$ es una función dada.

Definición. Una función $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \longmapsto \Omega$ es una solución clásica del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(x,t) + f(u(x,t))_x = 0 & (x,t) \in R \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.31}$$

si u es una función de clase C^1 que verifica el problema anterior puntualmente.

Definición. Sea $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ una solución clásica. Definimos las curvas características en $\mathbb{R} \times [0, T]$ como las curvas $t \mapsto (X(t), t)$ dadas por la ecuación diferencial

$$\frac{dX(t)}{dt} = f'(u(X(t), t)) \tag{4.32}$$

La principal particularidad de estas curvas características es que la solución u, denominada variable característica, es constante a lo largo de ellas ya que se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(X(t),t) &= u_x(X(t),t)\cdot X'(t) + u_t(X(t),t)\\ &= u_x(X(t),t)\cdot f'(u(X(t),t)) + u_t(X(t),t)\\ &= f_x(u(X(t),t)) + u_t(X(t),t) = 0\end{aligned}$$

por ser u solución de

$$u_t(x,t) + f(q(x,t))_x = 0$$

Podemos concluir que la propiedad principal de las curvas características es proporcionar una solución constante a lo largo de dichas curvas. En nuestro proyecto, esta solución es aproximada por el operador **convect** que emplearemos en FreeFem++ , 5.1.1, uno de los programas que utilizaremos para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

CHAPTER

5

Ensayos numéricos

5.1 Introducción

En este capítulo realizaremos diferentes experimentos en los que trataremos de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en distintos entornos. Concretamente, utilizaremos mallas en dominios de dimensión 2 y 3, con geometrías diferentes así como modificaremos las condiciones de contorno y las condiciones iniciales de dichos experimentos. Además, se experimentará con números de Reynolds de distinto orden. Empezaremos resolviendo las ecuaciones de Stokes en 2 dimensiones, para posteriormente abordar el caso no lineal y poder obtener los resultados de las simulaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para realizar todos estos ensayos, y como hemos mencionado en apartados anteriores, utilizaremos el método de los elementos finitos. Para llevar a cabo estas simulaciones vamos a utilizar el entorno de elementos finitos "Freefem++"(5.1.1). Para escribir los programas se usará un editor de código fuente conocido como "Atom"(5.1.2), podríamos haber utilizado cualquier otro adecuado. También utilizaremos "Paraview"(5.1.3), que nos permitirá la visualización del experimento realizado con una mayor resolución, obteniendo gráficas de mayor calidad. Además, haremos uso de "Gmsh"(5.1.4) para crear las mallas que utilizaremos en los diferentes experimentos.

5.1.1 FreeFem++

FreeFem++ es un lenguaje de programación y un entorno de software que está enfocado a resolver ecuaciones en derivadas parciales para sistemas multifísicos no lineales en dominios 2D y 3D usando el método de los elementos finitos. FreeFem incluye un algoritmo de interpolación rápido y un lenguaje para la manipulación de datos múltiples en mallas. Utiliza un lenguaje de alto nivel inspirado en C++, permitiendo una rápida descripción del problema y especificando la formulación correspondiente, incorporando las condiciones de contorno al mismo tiempo. Se trata de un lenguaje de programación intuitivo que, combinado con otras técnicas de aproximación pueden resolver problemas de evolución, problemas no lineales y problemas con dominios variables entre otros. Incorpora algoritmos de adaptación de mallas así como resolución de problemas de autovalores-autofunciones.

Dicho programa fue desarrollado y mantenido por la Universidad Pierre y Marie Curie y el Laboratorio Jacques-Louis Lions. Se trata de un software libre capaz de ser ejecutado en GNU/Linux, Solaris, OS X y MS Windows.

La primera versión de FreeFem fue creada por Olivier Pironneau, en 1987, y fue llamada MacFem ya que solo funcionaba en Macintosh. Poco después, apareció PCFem. Ambos fueron escritos en Pascal, lenguaje de programación creado por el profesor suizo Niklaus Wirth.

En 1992 fue reescrito en C++ por F. Hecht y otros, y denominado FreeFem, siendo FreeFem+ (1996) y FreeFem++ (1998) versiones posteriores que utilizaron el mismo lenguaje.

La versión actual de FreeFem++ es resultado de más de 25 años de trabajo, experiencia y constancia de varios investigadores y profesores que han desarrollado este producto, poniéndolo a disposición completa del resto de la comunidad científica.

5.1.2 Atom

Atom es un editor de código fuente con licencia de código abierto para MacOS, Linux y Windows, con soporte para múltiples paquetes o plug-ins escritos en Node.js y control de versiones Git integrado, desarrollado por GitHub. Atom constituye por tanto una aplicación de escritorio construida utilizando tecnologías web.

La mayor parte de estos paquetes tienen licencias de software libre y están desarrollados y mantenidos por la comunidad de usuarios. En particular, existen paquetes que facilitan la interacción del programador con FreeFem++. Atom está basado en Electrón, un framework que permite crear aplicaciones de escritorio multiplataforma usando Chromium y Node.j.s. Está escrito en CoffeScript y Less, y también puede ser utilizado como un entorno de desarrollo integrado (IDE). Atom liberó su beta en la versión 1.0, el 25 de junio de 2015, siendo llamado por sus desarrolladores «editor de textos hackeable para el siglo XXI».

5.1.3 **ParaView**

ParaView es una aplicación de visualización y análisis de datos multiplataforma de código abierto. Los usuarios de ParaView pueden crear rápidamente visualizaciones para analizar sus datos utilizando técnicas cualitativas y cuantitativas. La exploración de datos se puede hacer interactivamente en 3D o mediante programación utilizando las capacidades de procesamiento por lotes de ParaView.

ParaView se desarrolló para analizar conjuntos de datos extremadamente grandes utilizando recursos informáticos de memoria distribuida. Se puede ejecutar en supercomputadoras para analizar conjuntos de datos de tamaño peta escala, así como en computadoras portátiles para datos más pequeños, se ha convertido en una herramienta integral en muchos laboratorios nacionales, universidades e industrias, y ha ganado varios premios relacionados con la computación de alto rendimiento.

5.1.4 **Gmsh**

Gmsh es un programa de descripción, visualización y discretización de entidades geométricas. Gmsh se basa en un lenguaje de programación capaz de describir las entidades geométricas básicas y de configurar los parámetros necesarios para mallar tanto superficies como volúmenes.

Gmsh es un generador de mallas de elementos finitos, con un motor CAD incorporado y un postprocesador, desarrollado por Christophe Geuzaine y Jean-François Remacle. Su objetivo de diseño es proporcionar una herramienta de malla rápida, ligera y fácil de usar con entrada paramétrica y capacidades de visualización avanzadas. Lanzado bajo la Licencia Pública General de GNU, Gmsh es un programa de código abierto, libre y gratuito que

puede ser modificado para ajustar sus características a nuevas necesidades, que es lo suficientemente versátil como para definir y mallar la mayoría de geometrías. Este programa se basa en 4 módulos: descripción de geometría, mallado, resolución y postprocesamiento. Gmsh admite entrada paramétrica y tiene mecanismos de visualización avanzados. En nuestro proyecto utilizaremos este software para desarrollar tres mallas diferentes en dimensión 3. La primera de ellas será un perfil NACA de revolución que llevaremos a cabo mediante programación en Python; de la misma forma realizaremos el casco de un Shuttle Tanker así como el mallado de una esfera. Todas estas mallas serán exportadas posteriormente a FreeFem++ donde podremos obtener con detalle la actuación del fluido en sus superficies, pudiendo ser visualizado el experimento completo con ParaView.

5.1.5 **Python**

Python es un lenguaje de programación que permite trabajar rápidamente e integrar sistemas de manera más efectiva. La filosofía de este lenguaje hace hincapié en la legibilidad de su código. Se trata de un lenguaje de programación multiparadigma, ya que soporta orientación a objetos, programación imperativa y, en menor medida, programación funcional. Dicho software es administrado por la Python Software Foundation. Posee una licencia de código abierto, denominada Python Software Foundation License, que es compatible con la Licencia pública general de GNU a partir de la versión 2.1.1., e incompatible en ciertas versiones anteriores. Python fue creado a finales de los años 80 por Guido Van Rossum en el Centro para las Matemáticas y la informática (CWI, Centrum Wiskunde & Informatica), en los Países Bajos, como sucesor del lenguaje de programación ABC. El nombre que recibe este lenguaje proviene de la afición de su creador por los humoristas británicos Monty Python. Python es un lenguaje de programación multiparadigma. Esto significa que más que forzar a los programadores a adoptar un estilo particular de programación, permite varios estilos: programación orientada a objetos, programación imperativa y programación funcional. Otros paradigmas están soportados mediante el uso de extensiones. Python usa tipado dinámico y conteo de referencias para la administración de memoria. Una característica importante de Python es la resolución dinámica de nombres, es decir, lo que enlaza un método y un nombre de variable durante la ejecución del programa. Otro objetivo del diseño del lenguaje es la facilidad de extensión. Se pueden

escribir nuevos módulos facilmente en C o C++. Python puede incluirse en aplicaciones que necesitan una interfaz programable.

En nuestro caso, hemos programado con este software todos los puntos que constituyen las mallas que utilizaremos para nuestro proyecto. Resultando así más sencillo el desarrollo de la malla, tanto de sus puntos, como de las líneas que unen estos entre sí así como de las superficies y volúmenes creados.

5.2 Mallado

En la práctica, el mallado consiste en la discretización de una línea, superficie o volumen en porciones de tamaño finito. Estas porciones, además de tener un tamaño característico varias veces menor que el espacio discretizado, serán entidades geométricas elementales como los triángulos o cudriláteros en dos dimensiones o los tetraedros o prismas en tres dimensiones. Esta discretización en estructuras más elementales es esencial para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales en dominios arbitrarios por el método de los volúmenes finitos, FVM, o el método de los elementos finitos, FEM.

El proceso de mallado más habitual es el de discretizar sucesivamente entidades de mayor dimensión como si de un problema de contorno se tratara. Por ejemplo, si queremos mallar un cubo primero definiremos los puntos de control en cada una de sus doce aristas y luego discretizaremos en porciones elementales cada uno de sus seis lados para finalmente discretizar el volumen.

Las mallas en 3 dimensiones que utilizaremos en algunos de los experimentos que llevaremos a cabo en este trabajo han sido realizadas en Gmsh 5.1.4. Las mallas desarrolladas mediante este programa han sido tres: esfera, perfil NACA de revolución y casco de Shuttle Tanker. El mallado del perfil NACA de revolución lo podremos encontrar explicado a continuación, mientras que el mallado de la esfera así como el del casco del Shuttle tanker se incluirán como trabajos futuros.

5.2.1 Perfil NACA de revolución

Los perfiles NACA son una serie de perfiles que fueron creados por la NACA (National Advisory Committe for Aeronautics). Se engloban según sus características, pudiendo ser estos de 4 o 5 dígitos.

En este trabajo hemos utilizado un perfil NACA de 4 dígitos.

- El primer dígito describe la curvatura máxima como porcentaje de la cuerda ($\%c$).
- El segundo dígito describe la distancia de máxima curvatura desde el borde de ataque en 1/10 del porcentaje de la cuerda.
- Los dos últimos dígitos describen el máximo espesor como $\%$ de la cuerda.

En nuestro caso hemos utilizado un perfil NACA 0015:

- Perfil simétrico (00).
- Máximo espesor del 15 $\%$ de la cuerda.

La ecuación de un perfil NACA simétrico de 4 dígitos es la siguiente:

$$y_t = 5t[0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4]$$

Donde:

- x: posición a lo largo de la cuerda de 0 a 1(0 a 100 $\%$).
- y_t: grosor medio en un valor dado de x (línea central de superficie).
- t: grosor máximo.

Dado que para nuestro proyecto queremos utilizar una malla que represente un perfil NACA de revolución en tres dimensiones, tenemos que determinar las diferentes expresiones que utilizaremos para el eje y así como para el eje $z$en función de x que, como hemos dicho anteriormente, el eje x constituye una "cuerda" (eje horizontal). Estas ecuaciones son:

$$y = 5 \cdot 0.15 \cdot cos(\theta)[0.2969\sqrt{x} - 0.1260 - 0.3516x^2 - 0.2843x^3 - 0.1015x^4]$$

$$z = 5 \cdot 0.15 \cdot sen(\theta)[0.2969\sqrt{x} - 0.1260 - 0.3516x^2 - 0.2843x^3 - 0.1015x^4]$$

Donde:

- θ: ángulo que forma la línea que une cada punto con el punto centro de la respectiva circunferencia, con respecto a la horizontal.

Una vez que tenemos todas las ecuaciones necesarias para llevar a cabo el desarrollo del perfil NACA de revolución nos disponemos a llevarlo a cabo, para ello, hemos utilizado el programa **Python**,5.1.5, mediante el cual hemos programado todas las funciones necesarias para obtener los puntos básicos de la geometría de nuestro perfil NACA así como las líneas que los unen y las superficies que forman, y de esta forma proceder al desarrollo de dicho perfil en **Gmsh**, 5.1.4.

Para desarrollar de una forma rápida y sencilla la programación de todos los puntos que constituyen este perfil, comenzamos obteniendo los diferentes puntos que constituirán las circunferencias del perfil NACA, comando *Point*. Una vez que obtenemos los diferentes puntos mediante un bucle en **Python** estos serán exportados a un archivo .geo que será el que nos permita desarrollar la figura en **Gmsh**. Por tanto, una vez tengamos creado este archivo lo abriremos con dicho programa, **Gmsh**, haciendo "click" en *Reload scrip* cada vez que modifiquemos algún punto o cualquier otro elemento en el archivo .geo para, de esta forma, actualizar nuestro programa **Gmsh**.

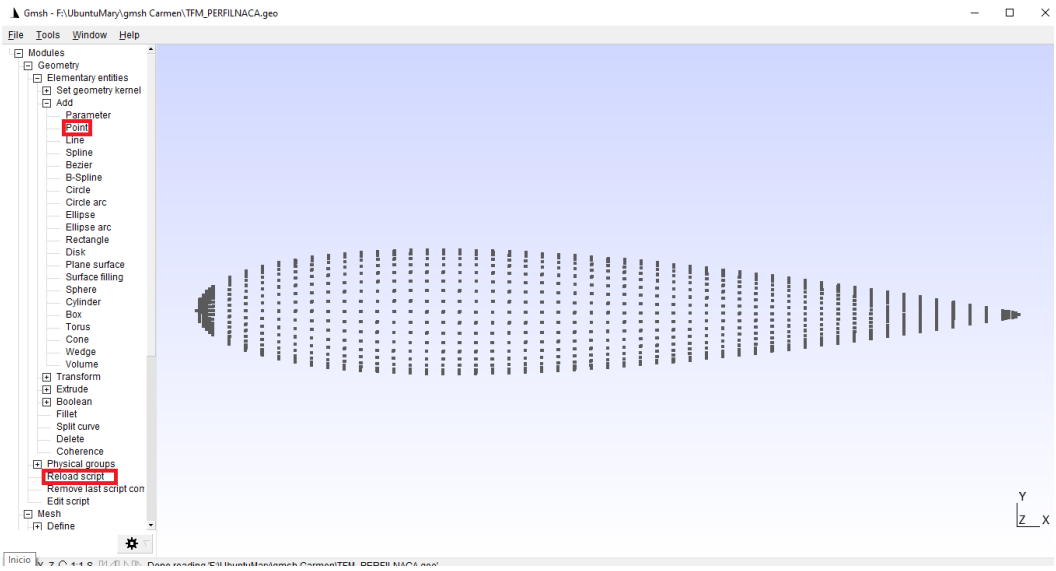

Figura 5.1: Puntos perfil NACA de revolución. Creados con Gmsh.

Una vez que tenemos todos los puntos en **Gmsh**, figura 5.1, nos disponemos a unir dichos puntos de forma que crearemos las circunferencias que constituirán dicho perfil, figura 5.2, de la misma forma tendremos que unir los puntos de unas circunferencias con otras para ir creando una "malla" totalmente cerrada. Estas lineas se llevarán a cabo mediante el comando *Line*. Para crear las circunferencias de una forma más rápida y sencilla,

hemos programado la unión de los puntos mediante líneas con la ayuda de **Python**.

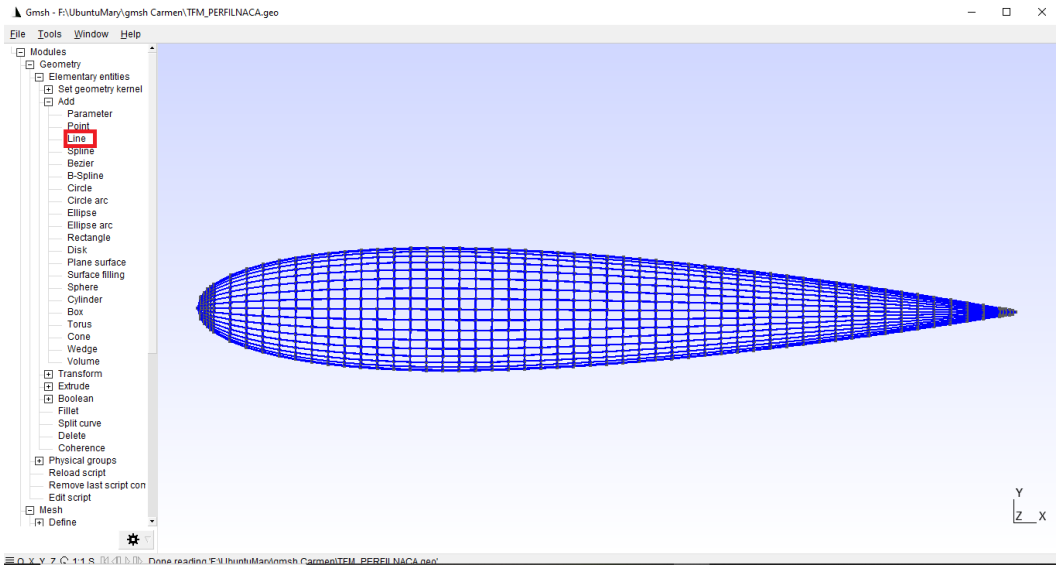

Figura 5.2: Unión puntos perfil NACA de revolución. Creados con Gmsh.

De esta forma, ya podemos crear las superficies de nuestro perfil NACA, para ello utilizaremos la función *Plane surface*, y de la misma forma que para la creación de las líneas, también usaremos **Python** para acelerar el proceso de creación de superficies. Debemos crear las superficies de todos los rectángulos que constituyen la malla, para de esta forma poder generar posteriormente el volumen. Dicho volumen se generará mediante el comando *Volume*. Sabremos que se trata de un volumen cerrado ya que nos aparecerá una esfera de tamaño reducido en el centro de nuestra figura. Podemos apreciarlo de forma gráfica en las figuras 5.3 y 5.4.

En nuestro caso, queremos que el volumen que creamos sea una caja que en su interior contenga el hueco del perfil NACA de revolución. Para ello, tenemos que crear un volumen que contemple dicho hueco. Esto se hace creando un volumen que esté formado por los dos anteriores, es decir, por la caja y el perfil NACA. Posteriormente, crearemos una *Physical Surface* que contenga todas las superficies del perfil NACA, esto nos permitirá establecer la frontera entre la parte “hueca” de nuestra malla, y la parte “maciza” donde realizaremos el experimento.

Para mallar este volumen utilizamos el comando *Mesh-3D*, figura 5.5, de esta forma podremos guardar nuestro archivo con extensión .msh y así exportarlo a **FreeFem++** para poder realizar los cálculos necesarios.

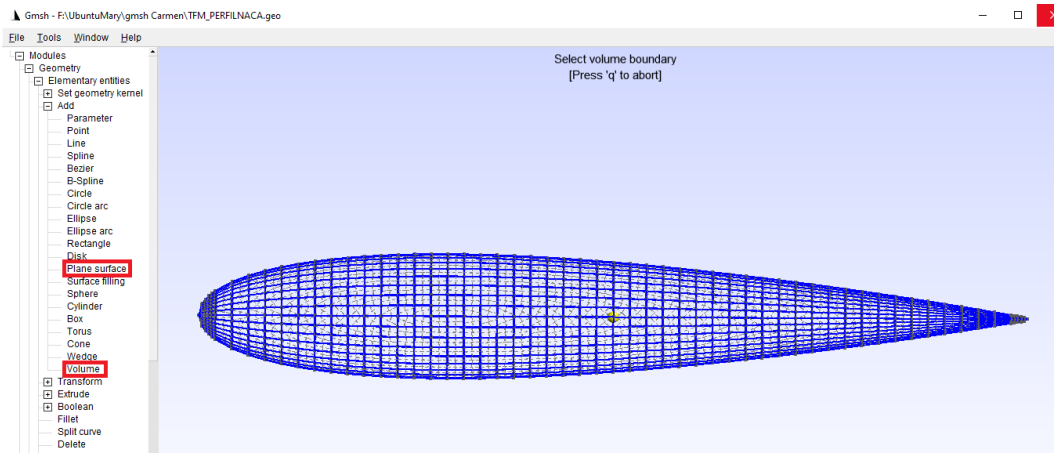

Figura 5.3: Superficies y volumen perfil NACA de revolución. Creados con Gmsh.

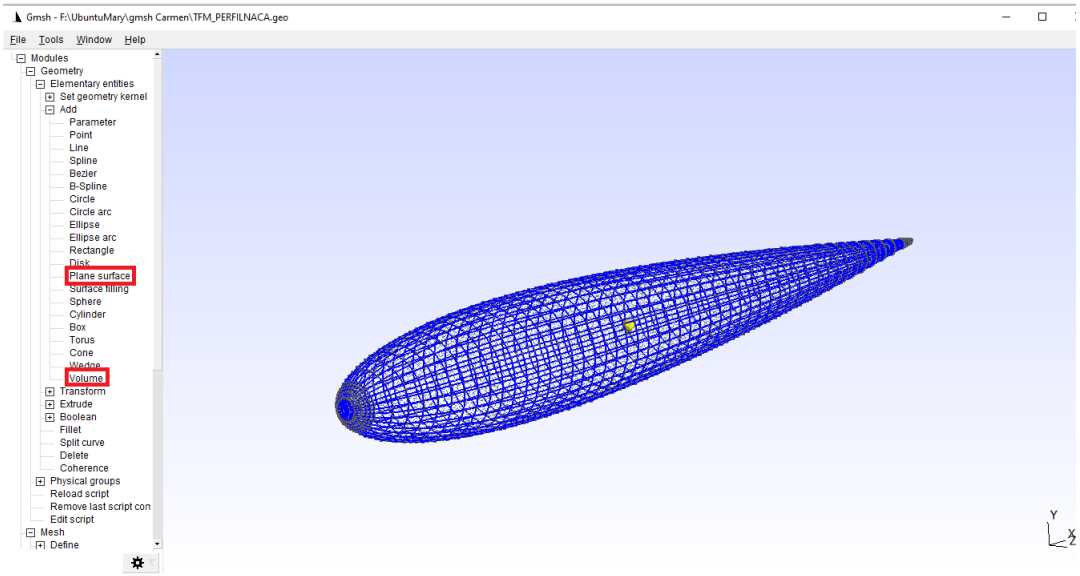

Figura 5.4: Superficies y volumen perfil NACA de revolución. Creados con Gmsh.

De la misma forma que hemos generado la malla del perfil NACA de revolución, generaremos una “caja”, 5.6, que encerrará dicho perfil. Ahora sí, podemos proceder al mallado de ambos volúmenes, 5.7.

Las dimensiones de la caja están preestablecidas, es decir, para que el experimento que vamos a realizar se pueda llevar a cabo de forma correcta las paredes laterales, superior e inferior deberán estar a 3 veces la anchura del perfil mientras que la trasera deberá estar a dos veces la cuerda.

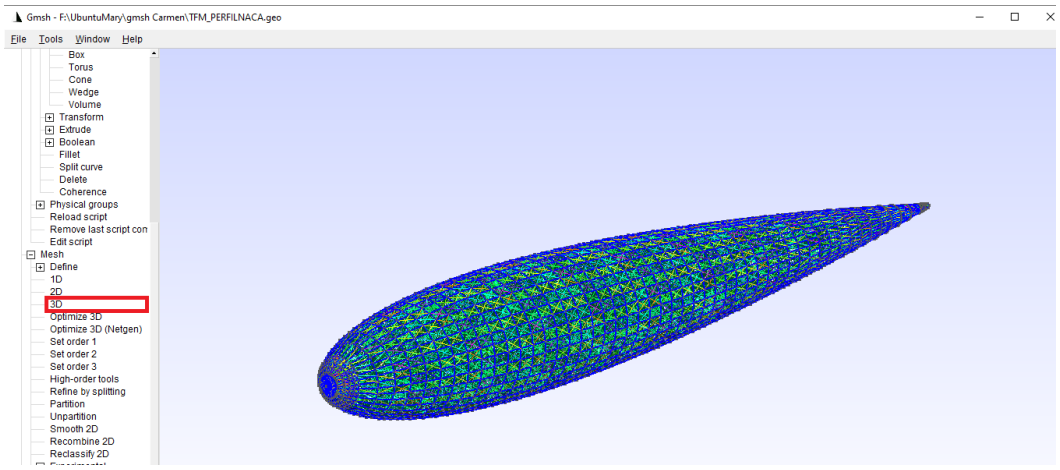

Figura 5.5: Mallado 3D perfil NACA de revolución. Creados con Gmsh.

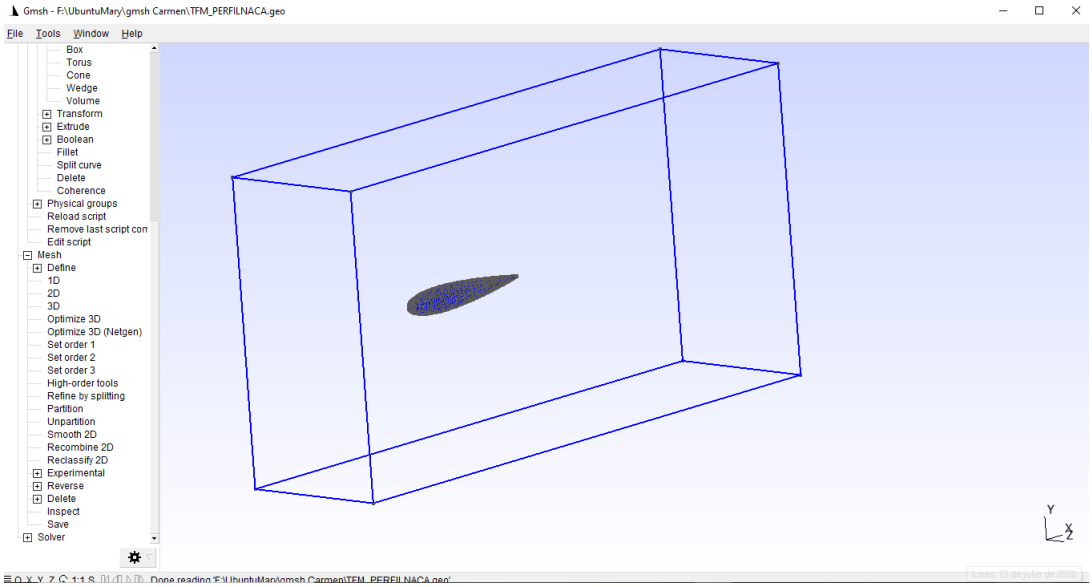

Figura 5.6: Mallado 3D perfil NACA de revolución con caja. Creados con Gmsh.

5.3 Experimentos numéricos

A continuación realizaremos los experimentos utilizando el lenguaje FreeFem++. El código utilizado se puede descargar de `https://github.com/MCarmenPlazaBermejo/TFM_ModelizacionMatematicaDeLaDinamicaDelBuque`. Empezaremos con un mallado cuadrado, en 2 dimensiones, donde resolveremos en primer lugar las ecuaciones de Stokes, a las que le añadiremos las iteraciones en tiempo, obteniendo así el resultado

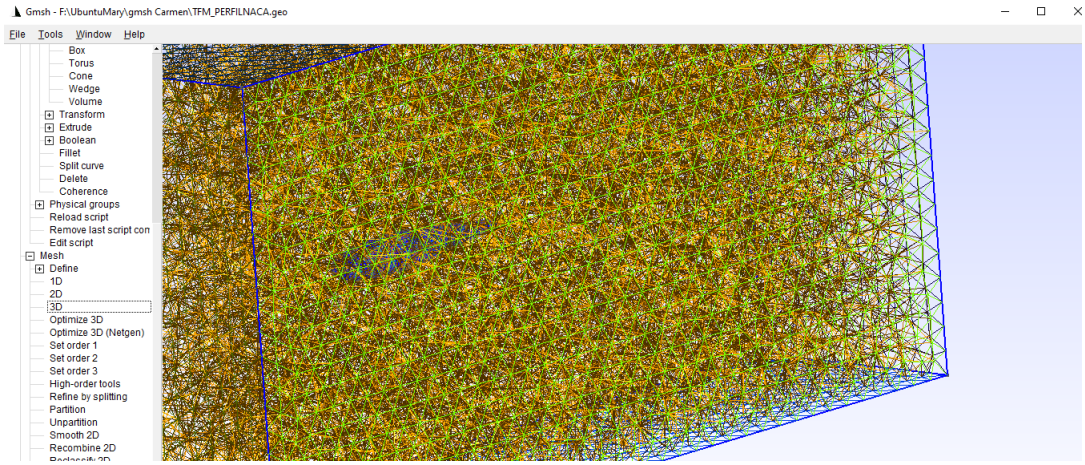

Figura 5.7: Mallado 3D perfil NACA de revolución con caja mallada. Creados con Gmsh.

para Stokes evolutivo. Posteriormente añadiremos el término de convección no lineal, lo que hará que obtengamos el resultado de las ecuaciones de Navier-Stokes en este mallado. Luego procederemos a realizar varios experimentos similares a los anteriores con alguna variación. Utilizaremos otras mallas diferentes, como una circunferencia y un perfil NACA en dos dimensiones. Por último, realizaremos tres experimentos con mallas en 3D. Se trata de una esfera, un perfil NACA de revolución y, el caso más realista, el casco de un Shuttle Tanker.

5.3.1 Experimento nº 1. Ecuaciones de Stokes

En este primer experimento vamos a tratar las ecuaciones de Stokes en un dominio cuadrado. En concreto, definiremos Ω como el cuadrado $(0,1)^2 = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y plantearemos el siguiente problema: hallar el campo de velocidades $\vec{\mathbf{u}} = (u,v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ y la función presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ -\nu\Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ \partial_x u + \partial_y v & = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

junto con las siguientes condiciones de contorno

$$u = 1, v = 0 \text{ en la pared superior de } \Omega,$$

$$u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega.$$

En este caso fijamos el coeficiente de viscosidad $\nu = 1$ y consideramos fuerzas externas nulas, es decir, $\vec{\mathbf{f}} = (f_1, f_2) = (0, 0)$. Este tipo de simulaciones numéricas se suele conocer como ≪test de cavidad≫.

Para resolver numéricamente las ecuaciones de Stokes hemos utilizado el método de los elementos finitos, donde asignamos P2 al espacio para la velocidad y P1 al espacio para la presión (es decir, elementos finitos de tipo Taylor-Hood). Este par de elementos finitos es estable pues, como hemos estudiado en la sección 4, verifican la condición inf-sup discreta.

Para calcular la solución de este problema se ha usado el software de elementos finitos FreeFem++ (5.1.1) con una malla estructurada definida por $n = 20$ subintervalos en cada uno de los cuatro lados de Ω (figura 5.8). El resultado obtenido se puede apreciar en las figuras 5.9 y 5.10. En concreto, el campo de velocidades se muestra en la figura 5.9, donde se observa una recirculación del fluido provocado por la condición de contorno $u = 1$ en la frontera superior. Además, la figura 5.10 muestra cómo se producen picos de presión de distinto signo en las esquinas superiores del dominio. Este es precisamente el tipo de resultados esperados en un test de cavidad.

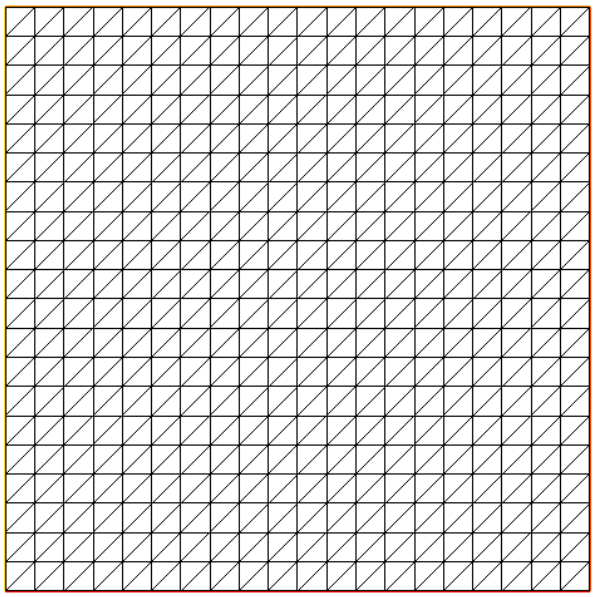

Figura 5.8: Malla estructurada. FreeFem++.

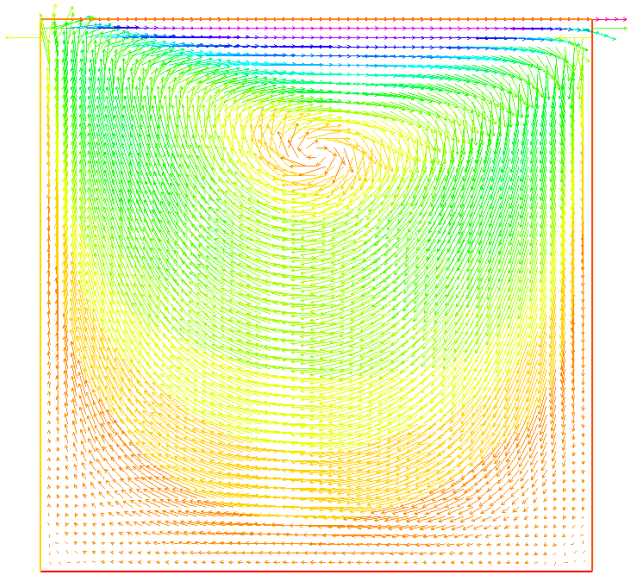

Figura 5.9: Campo de velocidades para el test de la cavidad (ecuaciones de Stokes) con FreeFem++.

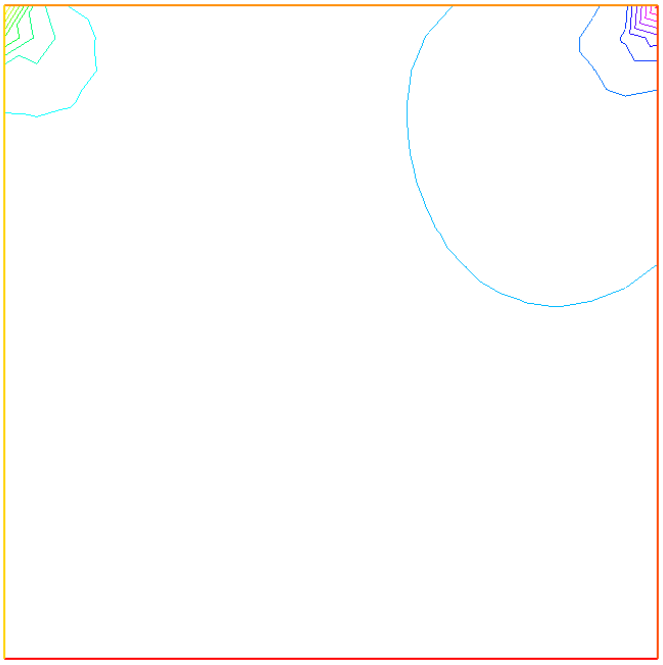

Figura 5.10: Presión obtenida para el test de la cavidad (ecuaciones de Stokes) con FreeFem++.

5.3.2 Experimento nº 2. Ecuaciones de Stokes evolutivas

En el segundo experimento que realizamos trataremos las ecuaciones de Stokes evolutivas, es decir, este experimento será similar al anterior con la única diferencia de que incluiremos los términos que se refieren al tiempo. Este experimento tendrá lugar en el mismo dominio que hemos definido en el experimento anterior, Ω como el cuadrado $(0,1)^2 = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. En este caso, la malla ha sido adaptada, mediante el comando "adaptmesh", de forma que esta sea más fina dónde el campo de velocidades sea mayor. Plantearemos entonces el siguiente problema: hallar el campo de velocidades $\vec{\mathbf{u}} = (u,v) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^2$, donde $T > 0$ es el instante final de tiempo, y la función presión $p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ v_t - \nu\Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ \partial_x u + \partial_y v & = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

junto con las condiciones de contorno

$$u = g(x,t), v = 0 \text{ en la pared superior de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega$$

Y las condiciones iniciales

$$u(0) = 0,$$
$$v(0) = 0$$

Es decir, la componente vertical y horizontal de la velocidad en el instante inicial de tiempo es cero.

La función $g : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ se explicará más adelante.

En este caso hemos fijado el coeficiente de viscosidad $\mu = 0.001$, y consideramos, al igual que en el experimento anterior, las fuerzas externas nulas, $\vec{\mathbf{f}} = (f_1, f_2) = (0,0)$. Al igual que en el experimento nº 1, resolveremos este experimento utilizando el método de los elementos finitos, donde asignamos P2 al espacio para la velocidad y P1 al espacio para la presión (elementos finitos de tipo Taylor-Hood). Utilizando el software de elementos finitos FreeFem++ (5.1.1) con una malla que inicialmente es estructurada, pero que, en cada paso de tiempo, es adaptada (figura 5.11). Para la adaptación de la malla usamos la orden "adaptmesh"de FreeFem++, en función del módulo de la velocidad. Es por ello que la malla se refina cerca del borde superior, donde la velocidad es mayor.

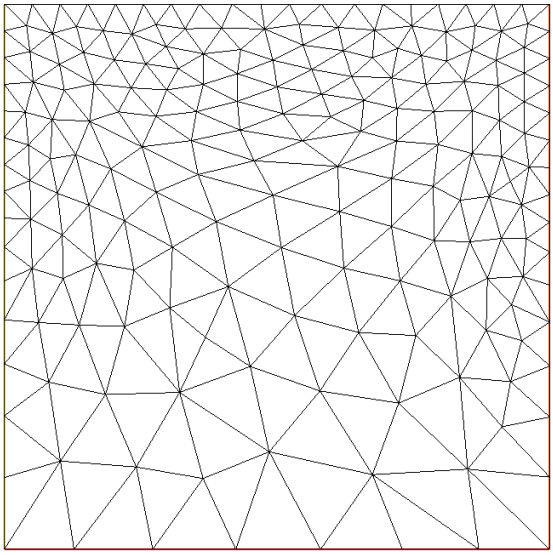

Figura 5.11: Malla cuadrada adaptada. FreeFem++

Realizaremos un total de 100 iteraciones en un intervalo de tiempo $[0, 200]$, en las que podremos ver el cambio de sentido de la velocidad, que es debido a las condiciones de contorno en la "superficie" del dominio y se modelizarán utilizando una función $g : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ que será un dato conocido en la simulación. En concreto hemos elegido $g(x, t) = \sin(0.1 \cdot t)$. Éstas podrían entenderse como la tracción del viento, que cambia de dirección.

Para desarrollar dichas iteraciones, hemos llevado a cabo la discretización en tiempo mediante el esquema de Euler implícito para el problema de Stokes evolutivo. Dicha discretización consiste en:

- Considerar la partición del intervalo de tiempo $[0, T]$:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < t_{m+1} < ... < t_M = T$$

- Suponemos $t_{m+1} - t_m = \Delta t = (constante)$.

- Hallaremos valores $u^m \approx u(t_m)$, para $m = 0, 1, ..., M$.

Los valores de u^m se calcularán de la siguiente forma:

- Inicialización: para $m = 0; u^0 = u_0$ (siendo u_0 el dato inicial).

- Iteración en tiempo m: una vez conocida la solución en la etapa $m-1$ hallamos u^m como solución de:

$$\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} - \Delta u^m = f^m \text{ en } \Omega,$$
$$u^m = g_m \text{ sobre } \partial\Omega \text{ (condiciones de contorno).}$$

donde $f^m(x)$ y $g^m(x)$ serán $f(x,t^m)$ y $g(x,t^m)$ respectivamente. En cada etapa de tiempo, se trata de un problema estacionario, ya que el tiempo t_m está fijo, y lo podemos resolver mediante el método de los elementos finitos. En el caso del problema que estamos tratando, planteamos hallar $u^m \approx u(x,t_m)$, $v^m \approx v(x,t_m)$, $p_m \approx p(x,t_m)$ todas ellas funciones definidas en el conjunto abierto Ω, tales que:

$$\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} - \nu\Delta u^m + \partial_x p^m = f_1^m$$

$$\frac{v^m - v^{m-1}}{\Delta t} - \nu\Delta v^m + \partial_y p^m = f_2^m$$

$$\Delta u^m = \partial_x u^m + \partial_y v^m = 0$$

junto a las condiciones de contorno

$$u^m(x) = g^{m(x)}, v^m(x) = 0 \, \forall x \in \partial\Omega$$

El resultado obtenido al realizar este experimento se puede apreciar en las figuras (5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 y 5.17). En ellas podemos ver como en el instante de tiempo inicial tiene lugar una recirculación del fluido provocado por la condición de contorno $g(x,t) = \sin(0.1 \cdot t)$. Inicialmente, se tiene que $u = 1$ en la frontera superior. Sin embargo la velocidad en la superficie luego empieza a decrecer gradualmente hasta que la componente horizontal de la velocidad cambia de signo a negativa. En el instante en que se produce el cambio de sentido de la velocidad, podemos apreciar que el vórtice que se produce en el interior del dominio también ha cambiado de sentido. Como vemos, inicialmente la recirculación del fluido tiene lugar en sentido negativo, o sea en el sentido de las agujas del reloj, seguidamente, cuando la velocidad cambia de sentido, la recirculación también debe haber cambiado de, teniendo entonces sentido positivo, opuesto al movimiento de las agujas del reloj. Esto se repite periódicamente ya que, como hemos indicado anteriormente,

hemos realizado 100 iteraciones en este experimento, dándose el cambio de sentido de la velocidad aproximadamente cada 15 segundos.

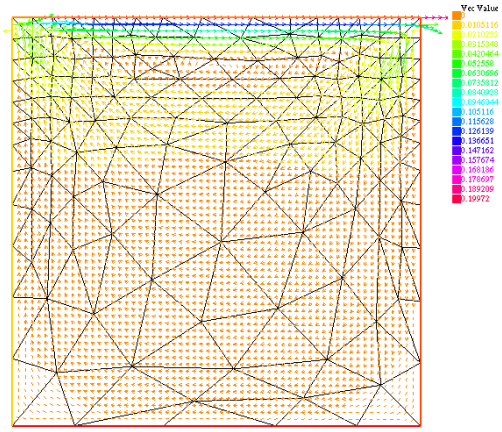

Figura 5.12: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=0. FreeFem++

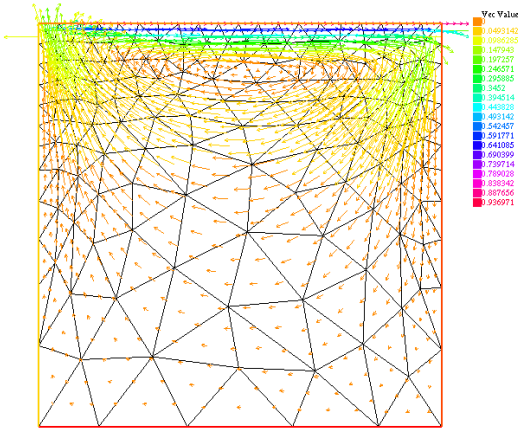

Figura 5.13: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=5. FreeFem++

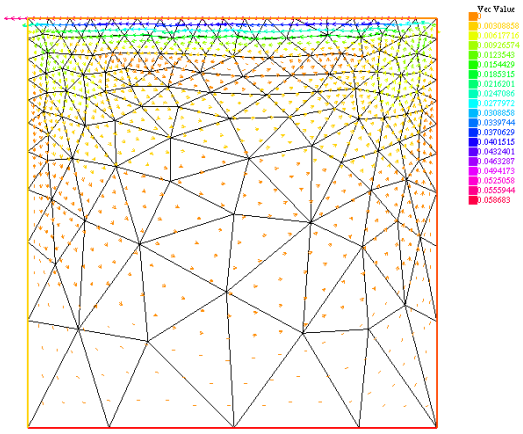

Figura 5.14: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=15. FreeFem++

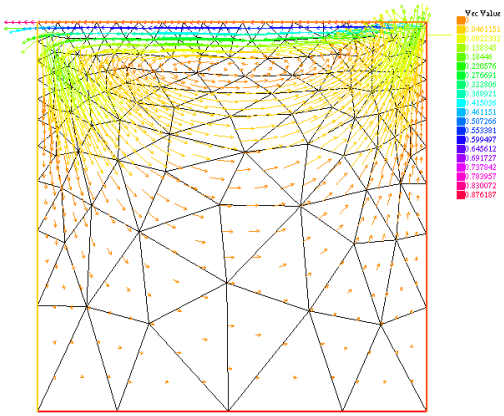

Figura 5.15: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=20. FreeFem++

Visualmente, podemos ver lo que ocurre con mayor precisión al graficar este experimento mediante el programa Paraview (5.1.3), como apreciamos en las figuras (5.18, 5.19, 5.20 y 5.21).

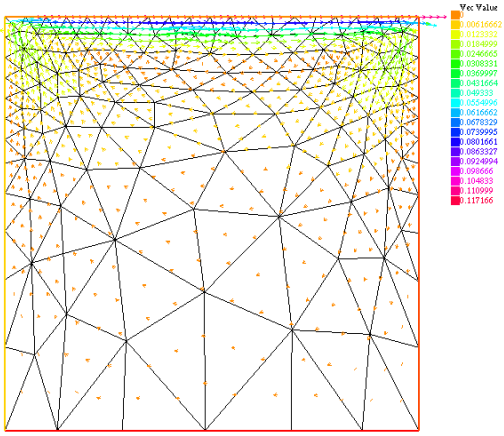

Figura 5.16: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=30. FreeFem++

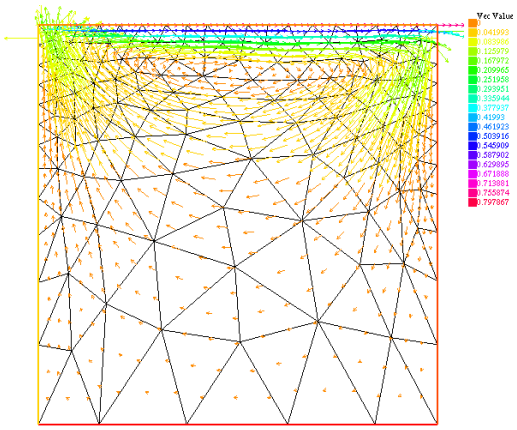

Figura 5.17: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=35. FreeFem++

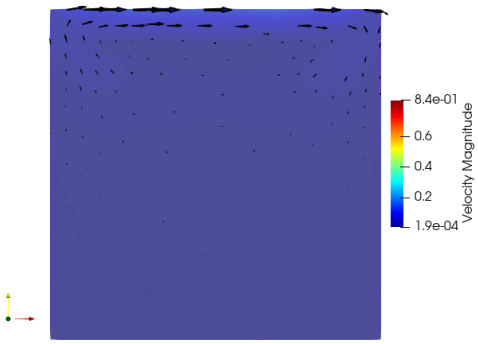

Figura 5.18: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=0. Paraview

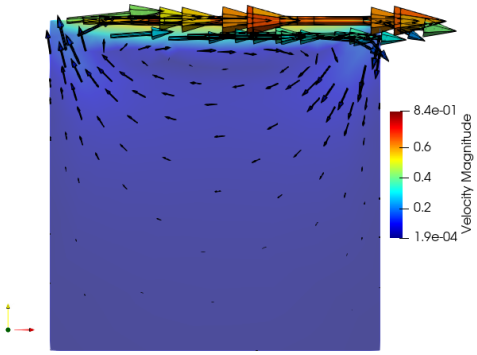

Figura 5.19: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=5. Paraview

5.3.3 Experimento nº 3. Ecuaciones de Navier-Stokes.

En este tercer experimento vamos a resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, en el dominio cuadrado que veníamos utilizando hasta ahora, es decir, definimos Ω como el cuadrado $(0,1)^2 = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y planteamos el siguiente problema: hallar el campo de velocidades $\vec{\mathbf{u}} = (u, v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ y la función presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_t + (\mathbf{u}\nabla)u - \nu\Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ v_t + (\mathbf{u}\nabla)v - \nu\Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ \partial_x u + \partial_y v & = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

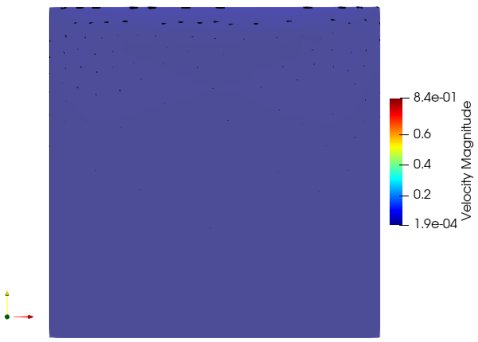

Figura 5.20: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=15. Paraview

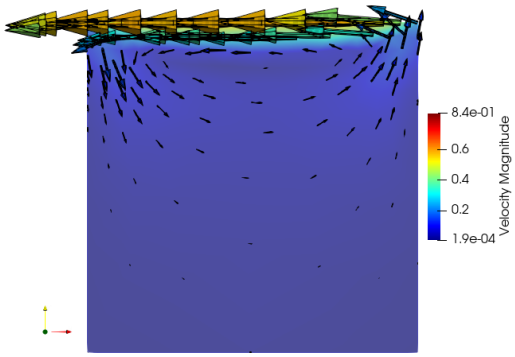

Figura 5.21: Resolución ecuaciones Stokes Evolutivo t=20. Paraview

junto con las condiciones de contorno:

$$u = g(x,t), v = 0 \text{ en la pared superior de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega$$

Y las condiciones iniciales

$$u(0) = 0,$$
$$v(0) = 0$$

Al igual que en el experimento anterior $g(x,t) = \sin(0.1 \cdot t)$.

Como en el experimento anterior hemos adaptado nuestra malla de geometría cuadrada, figura 5.22, siendo esta más fina cuando el campo de velocidades sea mayor. En este caso hemos fijado el coeficiente de viscosidad $\mu = 0.001$, y realizaremos un total de 100 iteraciones en un intervalo de tiempo $[0, 200]$.

El resultado que hemos obtenido tras la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para una malla de geometría cuadrada en dos dimensiones es el que se muestra en las figuras 5.23, 5.24, 5.25 y 5.26. De la misma forma que en el apartado anterior podemos ver como se produce una recirculación del fluido debida a la condición de contorno establecida en la pared superior y que coincide con la que se detalló en el apartado anterior. Así mismo, el sentido de la velocidad cambia transcurrido un tiempo, en este caso cada 15 segundos aproximadamente. Como vemos en este experimento las velocidades son mayores que en el caso anterior, siendo esto principalmente debido a la convección.

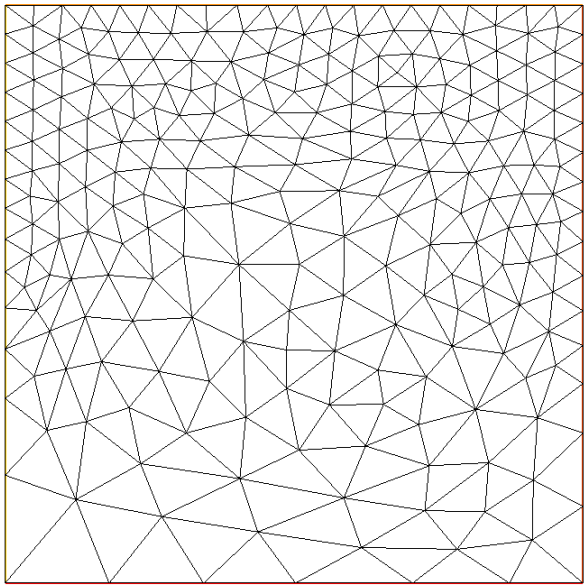

Figura 5.22: Malla cuadrada adaptada. FreeFem++

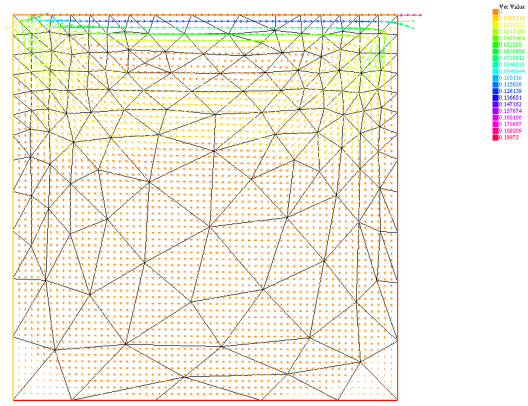

Figura 5.23: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=0. FreeFem++.

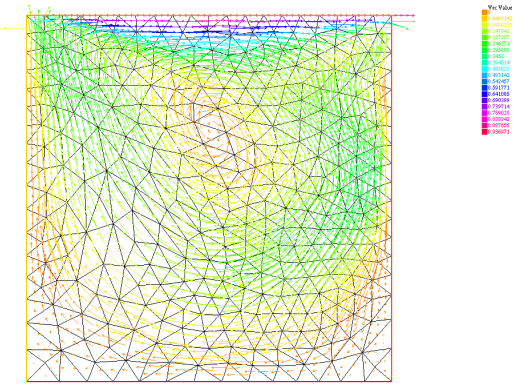

Figura 5.24: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=5. FreeFem++.

Podemos observar los resultados con más detalle en las gráficas realizadas con Paraview, figuras (5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31 y 5.32).

Para obtener estos resultados hemos utilizado la función “convect” en FreeFem++. Se trata de una función muy potente que nos permite resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en regimenes turbulentos. Para resolver este tipo de problemas, dicha función utiliza el método de las características.

Función “convect”

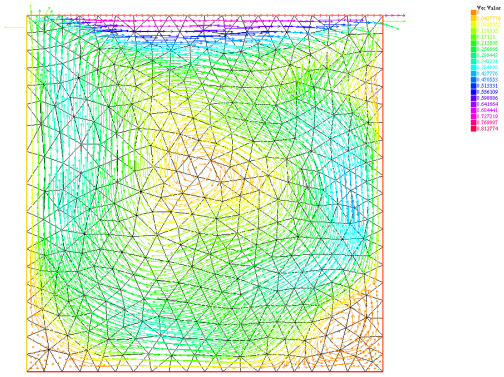

Figura 5.25: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=10. FreeFem++.

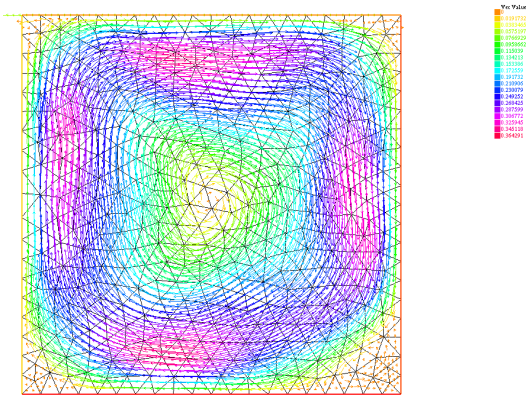

Figura 5.26: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=15. FreeFem++.

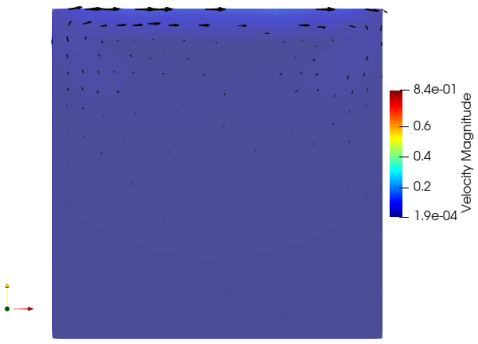

Figura 5.27: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=0. Paraview

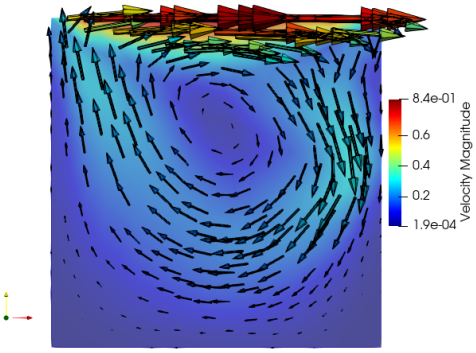

Figura 5.28: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=5. Paraview

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio circular centrado en (0,0) consideramos el vector de rotación

$$u = [u_1, u_2]$$

La convección pura para u es:

$$\partial_t c + u \cdot \nabla c = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T),$$

$$c(t = 0) = c^0 \text{ en } \Omega.$$

La solución exacta $c(x_t, t)$ en el tiempo t en el punto x_t viene dada por

$$c(x_t, t) = c^0(x, 0)$$

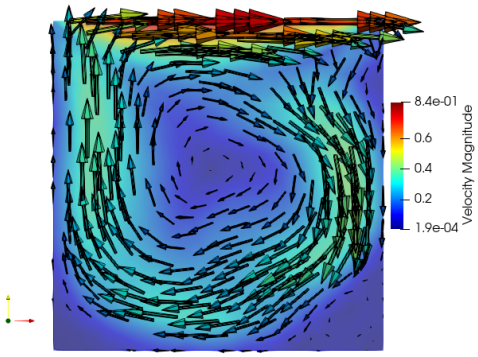

Figura 5.29: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=10. Paraview

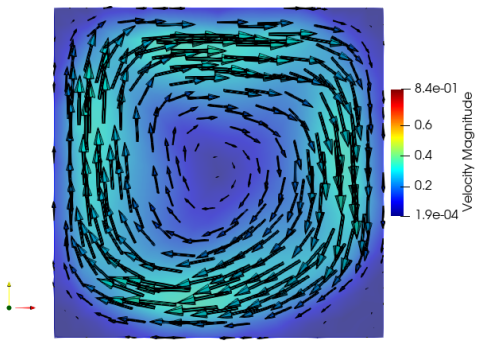

Figura 5.30: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=15. Paraview

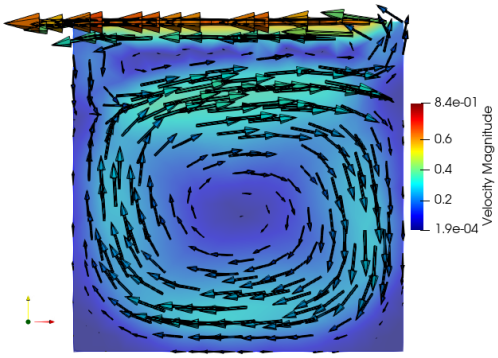

Figura 5.31: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=20. Paraview

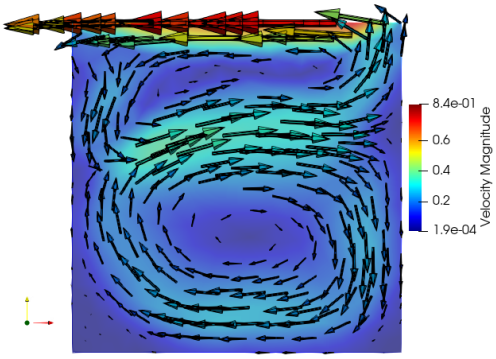

Figura 5.32: Resolución ecuaciones Navier-Stokes t=25. Paraview

donde x_t es la ruta que siguen las partículas transportadas por el flujo u que, en el instante de tiempo 0 ($t = 0$), están situadas en el punto x. Por lo que x_t son las soluciones de

$$\dot{x}_t = u(x_t), \qquad x_{t=0} = x \qquad donde \qquad \dot{x}_t = \frac{d(x_t)}{dt}$$

Estas EDO son reversibles. Por tanto, si queremos la solución en el punto x en el instante de tiempo t, (no en el punto x_t) basta ir hacia atrás en el tiempo, desde el instante t hasta el instante 0 (o sea, avanzar -t instantes para llegar hasta cero). En ese momento, estaremos en algún punto al que denotaremos x_{-t}. Si, de alguna forma, somos capaces de calcular el punto inicial x_{-t}, tendremos:

$$c(x,t) = c^0(x_{-t}, 0).$$

Solución por el método de las características-Galerkin

El método numérico de las características-Galerkin se encarga del cálculo del punto x_{-t} anterior. En concreto, para cada etapa de tiempo, con paso dt, debemos retroceder $t = dt$ instantes hasta llegar a la iteración anterior, en la que conocemos la solución aproximada.

Como ya sabemos, esto significa resolver la siguiente EDO:

$$\dot{x_t} = u(x_t), x_{t=0} = x,$$

utilizando la solución para calcular el punto x_{-t} resultante de retroceder $t = dt$ instantes.

Precisamente, como hemos mencionado anteriormente, en FreeFem++ existe una función llamada **convect**$([u_1, u_2], dt, c)$ que utiliza este método numérico para calcular la solución aproximada, c, que es transportada a lo largo del tiempo dt por el vector $u = [u_1, u_2]$.

Para resolver la EDO anterior, se utiliza el hecho de que u es constante en cada elemento y así x_t es una curva poligonal que puede ser calculada de forma exacta.

5.3.4 Experimento nº 4. Ecuaciones de Navier-Stokes.

En este cuarto experimento vamos a tratar las ecuaciones de Navier-Stokes de la misma forma que lo hemos hecho en el experimento anterior, con la única diferencia que ahora trataremos un fluido más viscoso, $\mu = 0.1$, es por ello que el número de Reynolds ahora será menor. Por tanto, como podremos ver a continuación se trata de un flujo laminar.

Los resultados obtenidos mediante este experimento los podemos apreciar en las figuras 5.33, 5.34, 5.35 y 5.36, realizadas con FreeFem++, y en las figuras 5.37, 5.38, 5.39 y 5.40 realizadas con Paraview.

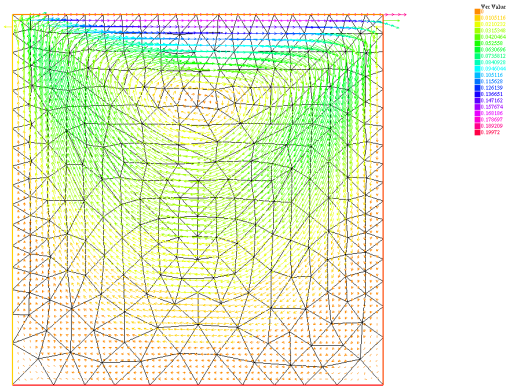

Figura 5.33: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 0.1$, t=0. FreeFem++.

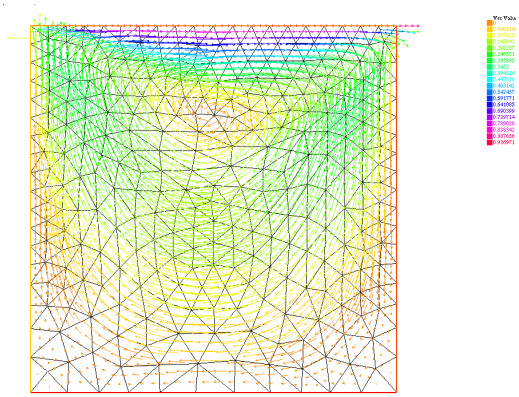

Figura 5.34: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 0.1$, t=5. FreeFem++.

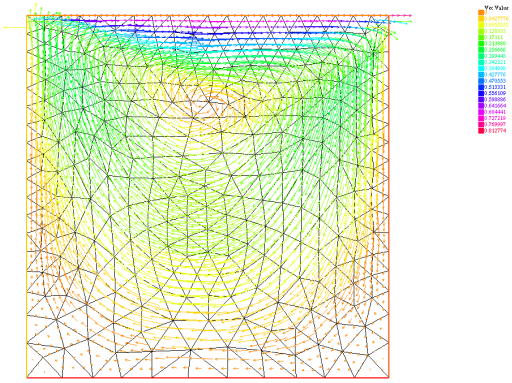

Figura 5.35: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 0.1$, t=10. FreeFem++.

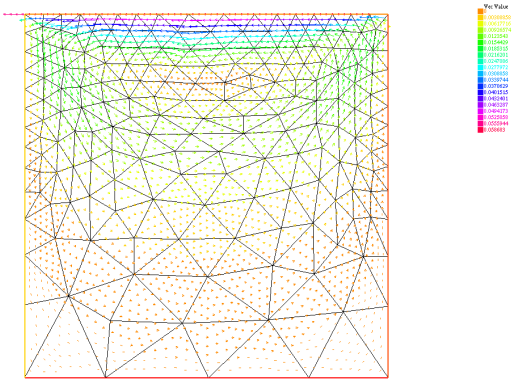

Figura 5.36: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 0.1$, t=15. FreeFem++.

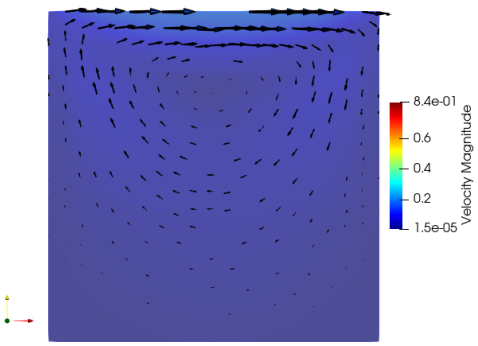

Figura 5.37: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 0.1$, t=0. Paraview

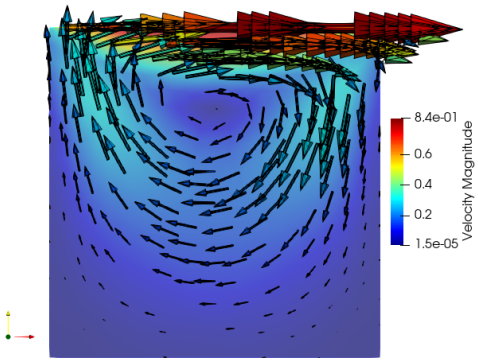

Figura 5.38: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 0.1$, t=5. Paraview

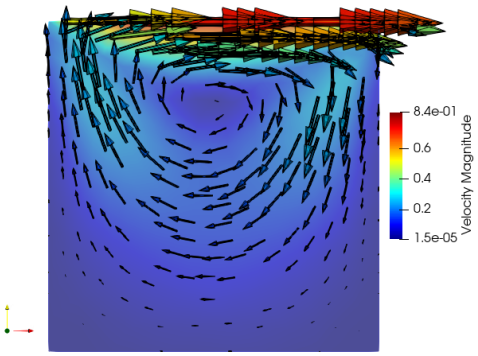

Figura 5.39: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 0.1$, t=10. Paraview

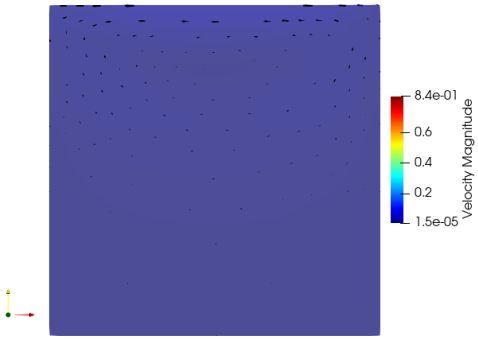

Figura 5.40: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 0.1$, t=15. Paraview

5.3.5 Experimento nº 5. Ecuaciones de Navier-Stokes.

En este quiento experimento, de nuevo, trataremos las ecuaciones de Navier-Stokes de la misma forma que hemos hecho en el experimento nº. 3. En este caso, trataremos un fluido mucho menos viscoso, $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$, por tanto, ahora se tratará de un número de Reynolds mucho mayor.

Los resultados obtenidos mediante este experimento los podemos apreciar en las figuras 5.41, 5.42, 5.43 y 5.44. En estas podemos ver el orden caótico que presentan las párticulas, es decir, se trata de un flujo turbulento, debido al elevado número de Reynolds que ahora hemos considerado para realizar este experimento.

El caos generado se aprecia mejor en las siguientes figuras (5.45, 5.46, 5.47 y 5.48) realizadas con Paraview.

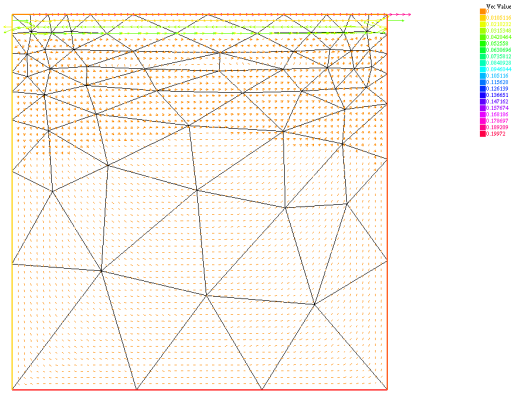

Figura 5.41: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$, t=0. FreeFem++.

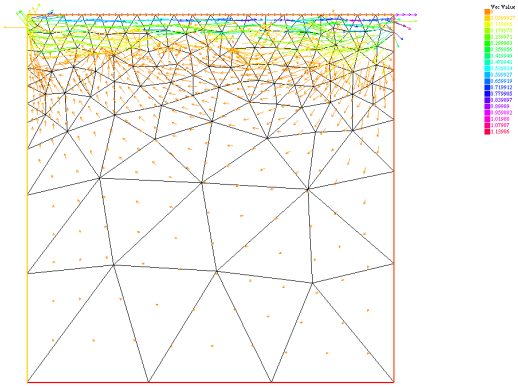

Figura 5.42: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$, t=5. FreeFem++.

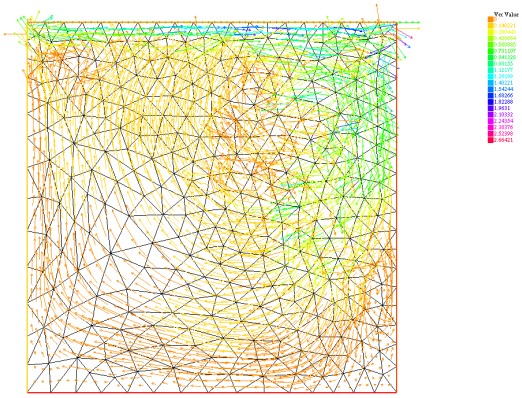

Figura 5.43: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$, t=10. FreeFem++.

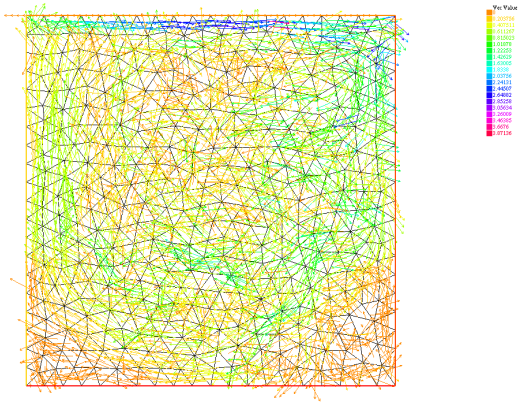

Figura 5.44: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$, t=15. FreeFem++.

5.3.6 Experimento nº 6. Ecuaciones de Navier-Stokes. Circunferencia.

En el experimento número 6 vamos a estudiar la apliación de las ecuaciones de Navier-Stokes a un dominio rectangular (Ω) en el que incluiremos un hueco en forma de circunferencia, figura 5.49. Estudiaremos entonces lo que sucede alrededor de dicha circunferencia cuando son aplicadas las ecuaciones de Navier-Stokes junto con las condiciones de contorno

$$u = g(x,t), v = 0 \text{ en la pared izquierda de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0 \text{ en la frontera del cilindro.}$$

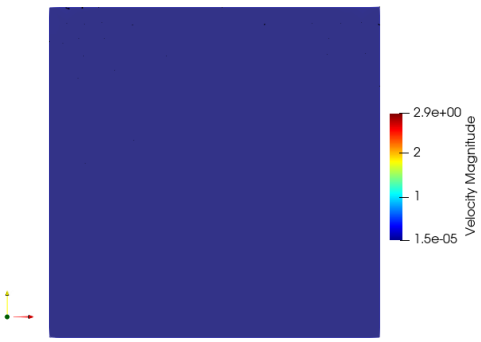

Figura 5.45: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$, t=0. Paraview

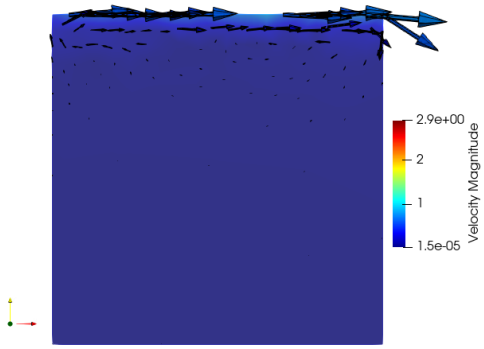

Figura 5.46: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$, t=5. Paraview

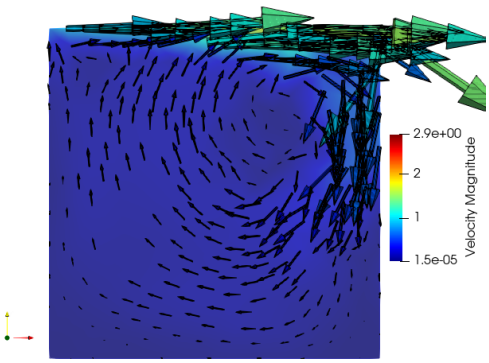

Figura 5.47: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$, t=10. Paraview

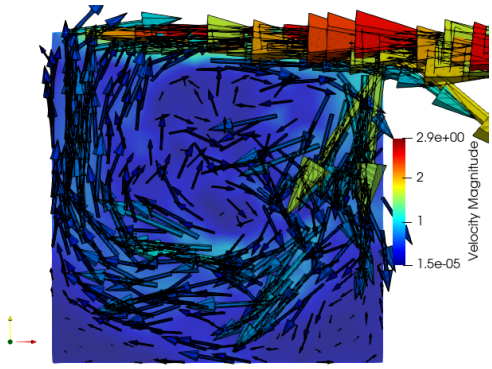

Figura 5.48: Resolución ecuaciones Navier-Stokes, $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$, t=15. Paraview

donde $g(x,t) = 0.1\dfrac{t - T_0}{T_1 - T_0}$.
Y las condiciones iniciales

$$u(0) = 0,$$
$$v(0) = 0.$$

Al igual que en todos los experimentos que hemos realizado hasta ahora, el número de iteraciones que realizaremos será de 100 en un intervalo de tiempo $[0, 1000]$, esto es así ya que hemos considerado que con este número de iteraciones podemos apreciar facilmente lo que ocurre en el mallado que estamos estudiando.

Como podemos ver en las figuras (5.50),5.51,5.52 y 5.53), en el instante de tiempo inicial, el flujo permanece en reposo. Cuando el flujo pasa alrededor de la esfera con una

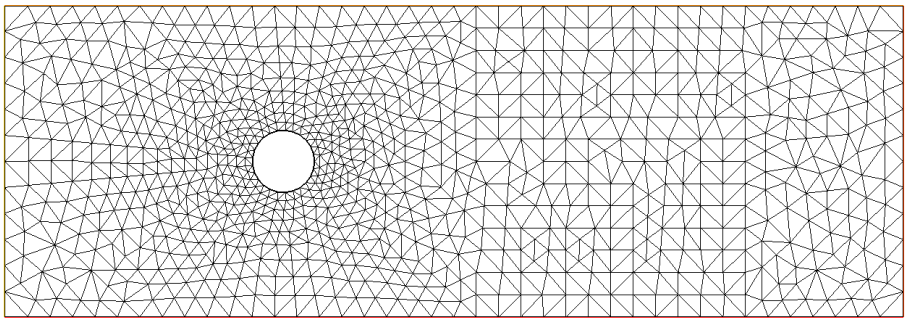

Figura 5.49: Malla rectangular con hueco circular. FreeFem++.

cierta velocidad, apreciamos que la velocidad mínima se da justo delante y detrás de la circunferencia, es decir, en estos puntos de la circunferencia el fluido se encontrará practicamente parado. Sin embargo, apreciamos que la velocidad más grande tiene lugar a ambos lados de la circunferencia (arriba y abajo). Esta velocidad, se hace cada vez mayor con el transcurso del tiempo. Es decir, la velocidad aumenta donde el dominio se estrecha. A este fenómeno físicamente, se le conoce como "efecto Venturi". Dicho fenómeno se caracteriza por la disminución de la presión en las zonas donde la velocidad es más elevada (figuras 5.54, 5.55, 5.56 y 5.57).

Figura 5.50: Malla rectangular con hueco circular. Campo de velocidades, t= 0. Paraview.

Debido a que para realizar este experimento hemos utilizado un número de Reynolds elevado ($Re = 9 \cdot 10^6$), en la figura (5.53) podemos apreciar un patrón que se repite, este es conocido como los Vórtices de Von Karman.

Por último, en las figuras (5.58 y 5.59), podemos ver las líneas de corriente en torno a la circunferencia. Estas líneas nos indican la dirección que sigue el fluido, siguiendo la dirección del vector velocidad en cada punto. Si las comparamos con las figuras anteriores,

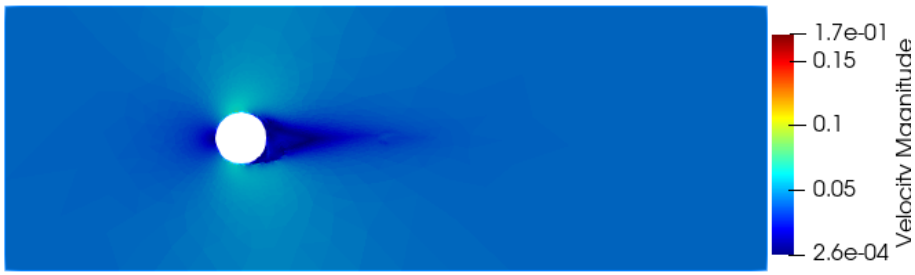

Figura 5.51: Malla rectangular con hueco circular. Campo de velocidades, t= 40. Paraview.

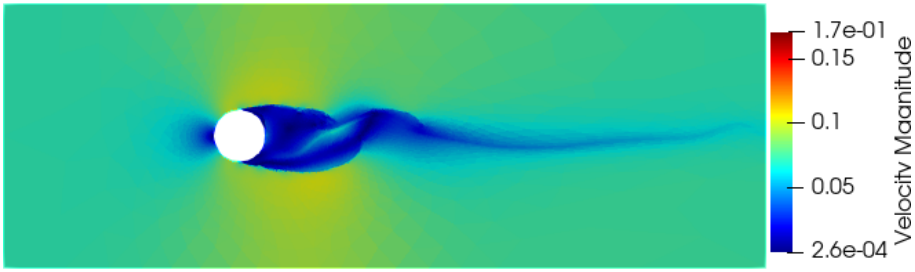

Figura 5.52: Malla rectangular con hueco circular. Campo de velocidades, t= 70. Paraview.

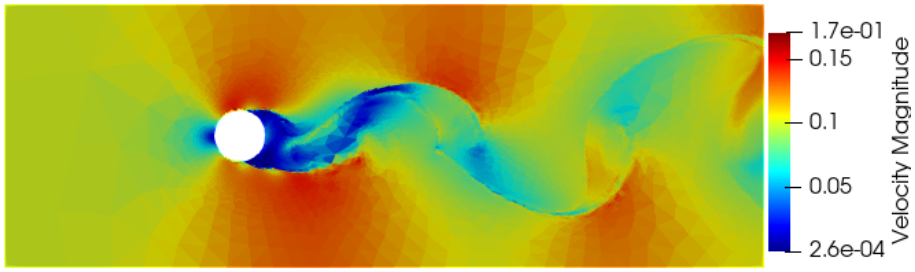

Figura 5.53: Malla rectangular con hueco circular. Campo de velocidades, t= 99. Paraview.

Figura 5.54: Malla rectangular con hueco circular. Campo de presiones, t= 0. Paraview.

Figura 5.55: Malla rectangular con hueco circular. Campo de presiones, t= 40. Paraview.

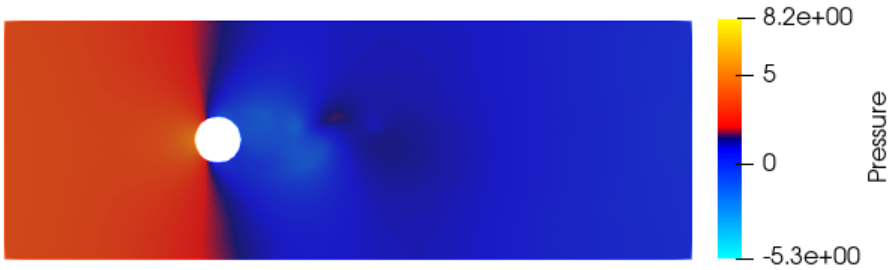

Figura 5.56: Malla rectangular con hueco circular. Campo de presiones, t= 70. Paraview.

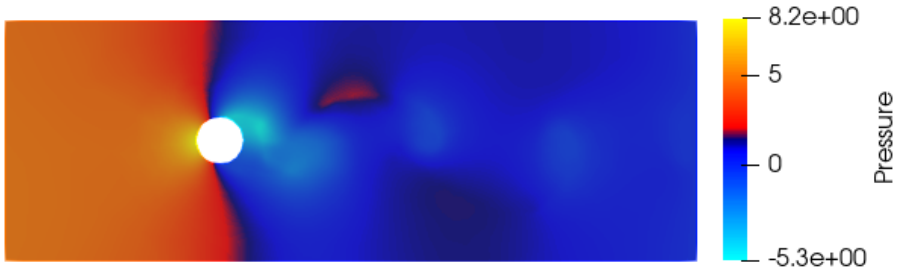

Figura 5.57: Malla rectangular con hueco circular. Campo de presiones, t= 99. Paraview.

en las podíamos ver el campo de velocidades, podremos apreciar como, efectivamente, el sentido recorrido por la velocidad es el correcto.

Vórtices de Von Karman.

Se trata de un patrón de vórtices que se repite en remolino, estos son causados por la separación no estacionara de la capa de fluido al pasar sobre cuerpos sumergidos. Este fenómeno ocurre normalmente cuando el número de Reynolds (Re) alcanza ciertos valores.

Si realizaramos el mismo experimento, esta vez con un número de Reynolds mucho inferior ($Re = 100$), los vórtices de Von Karman no tendrían lugar, siendo el campo de

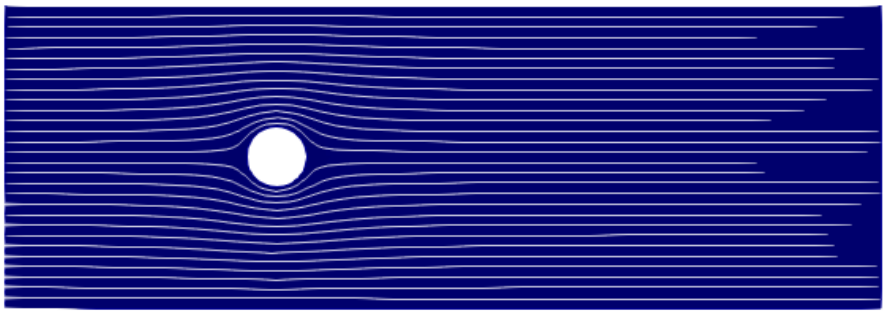

Figura 5.58: Malla rectangular con hueco circular. Líneas de corriente, t=0. Paraview.

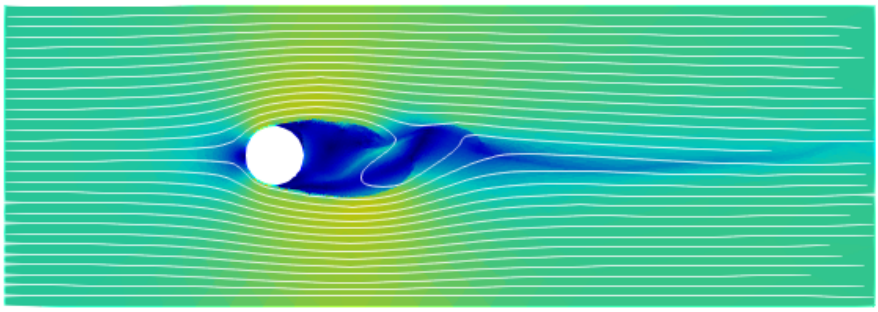

Figura 5.59: Malla rectangular con hueco circular. Líneas de corriente, t=70. Paraview.

velocidades en los instantes de tiempo t=40 y t=80 los que se muestran en las figuras (5.60) y (5.61). Utilizando el mismo rango de velocidades que para el resto de figuras expuestas en este apartado.

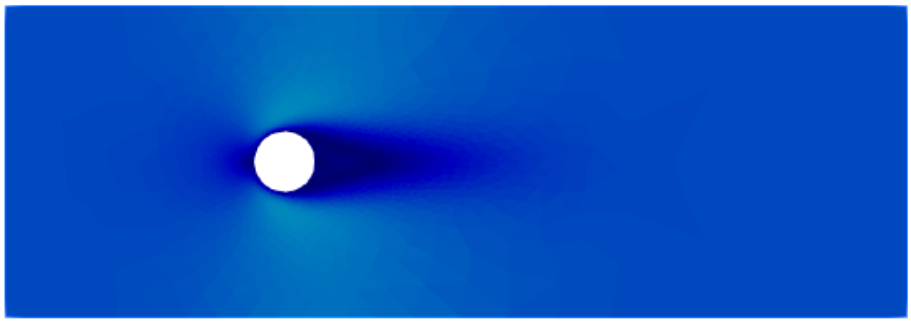

Figura 5.60: Malla rectangular con hueco circular. Campo de velocidades, t=40. Número de Reynolds pequeño. Paraview.

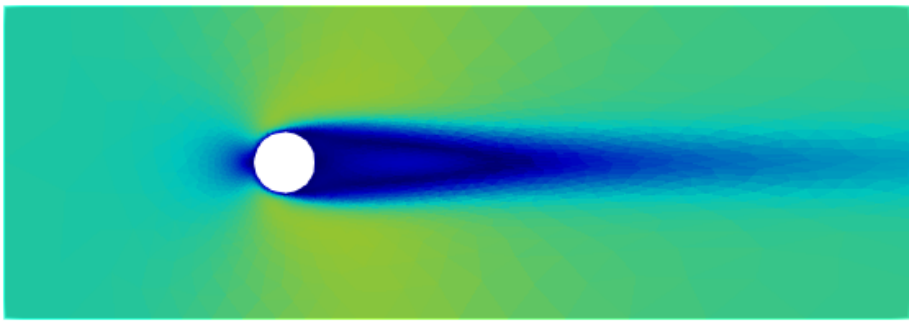

Figura 5.61: Malla rectangular con hueco circular. Campo de velocidades, t=80. Número de Reynolds pequeño. Paraview.

5.3.7 Experimento nº 7. Ecuaciones de Navier-Stokes. Perfil NACA.

Para llevar a cabo este experimento aplicaremos las ecuaciones de Navier-Stokes a un dominio rectangular (Ω) al igual que en el experimento nº 6 junto con las condiciones de contorno:

$$u = g(x,t), v = 0 \text{ en la pared izquierda de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0 \text{ en la frontera del perfil NACA}$$

donde $g(x,t) = 0.1\dfrac{t - T_0}{T_1 - T_0}$.
Y las condiciones iniciales

$$u(0) = 0,$$
$$v(0) = 0$$

En este caso, el objeto que encontraremos en el interior del rectángulo será un perfil NACA (figura 5.62). Para poder observar los vórtices de Von Karman que tienen lugar en la parte trasera de dicho perfil, hemos utilizado un número de Reynolds elevado ($Re = 9{\cdot}10^5$), ya que de utilizar un número de Reynolds inferior, este fenómeno no ocurriría (figura 5.71 y 5.72). Realizaremos un total de 100 iteraciones en tiempo en un intervalo de tiempo $[0, 200]$, para de esta forma poder visualizar con claridad lo que ocurre en este experimento.

En las figuras (5.63, 5.64, 5.65 y 5.66) podemos apreciar como en el primer instante de tiempo, la velocidad en la superficie del perfil es nula, siendo esta velocidad mínima en la parte delantera y trasera del perfil durante todo el experimento. Podemos apreciar,

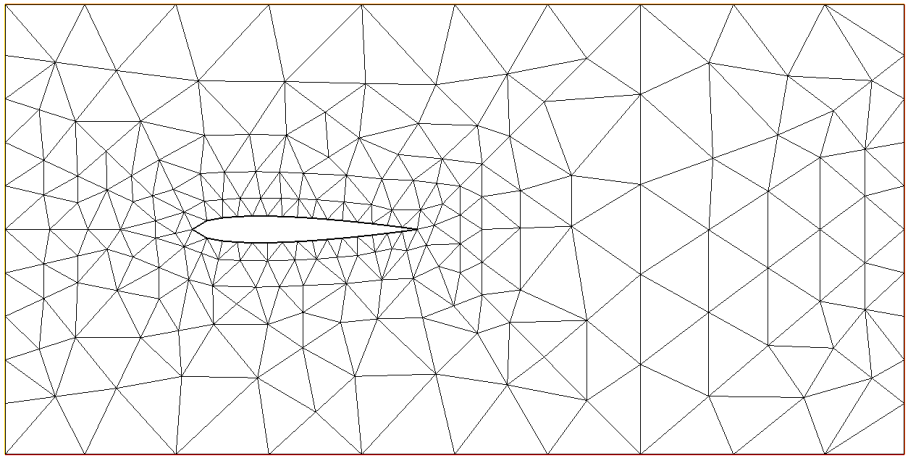

Figura 5.62: Malla rectangular con hueco perfil NACA. FreeFem++.

como hemos indicado anteriormente, que en este caso también se producirán los llamados Vórtices de Von Karman.

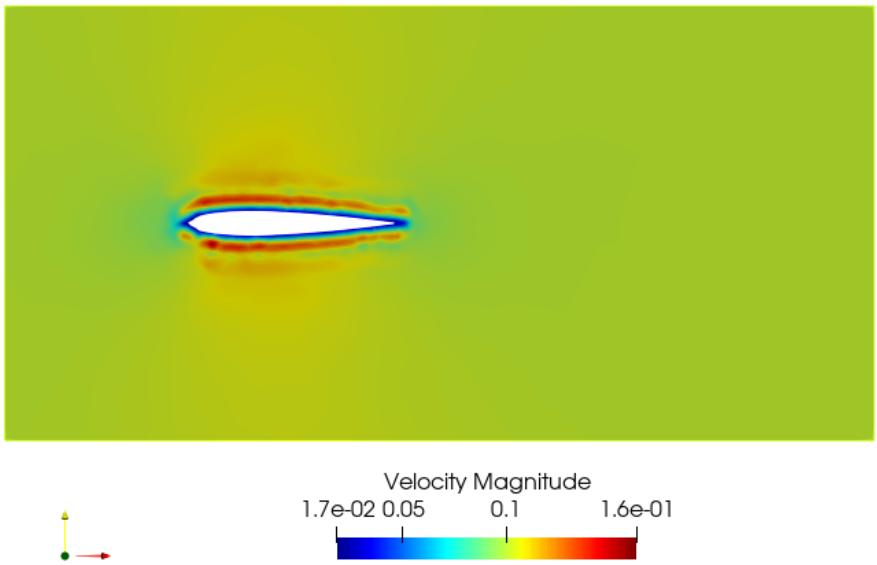

Figura 5.63: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Campo de velocidades, t=0. Paraview.

Como vemos en las figuras (5.67 y 5.68), al igual que pasa en el experimento anterior, la presión es menor donde la velocidad es más elevada. Esto se debe, como hemos indicado anteriormente, a que la malla se hace más estrecha en esa parte del perfil.

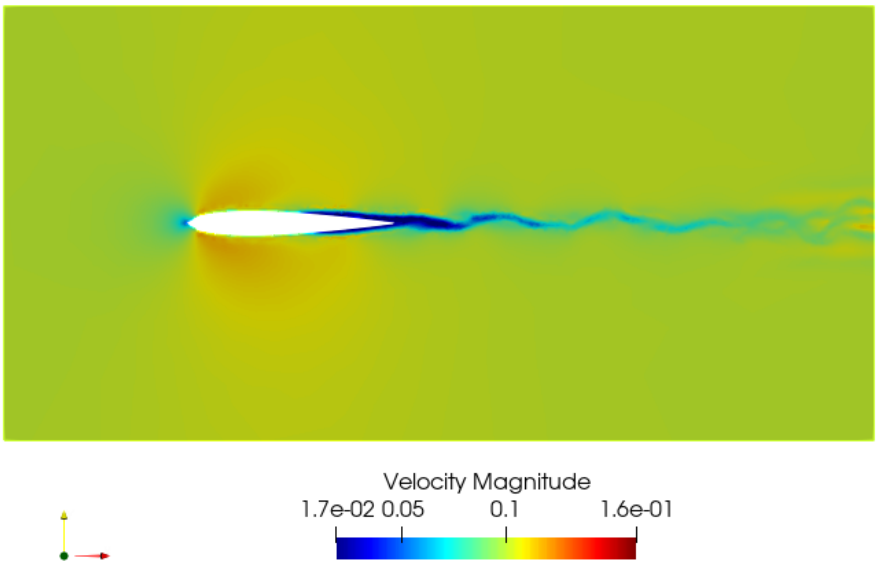

Figura 5.64: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Campo de velocidades, t=40. Paraview.

Las líneas de corriente de este perfil NACA son las que se indican en las figuras (5.69y 5.70).

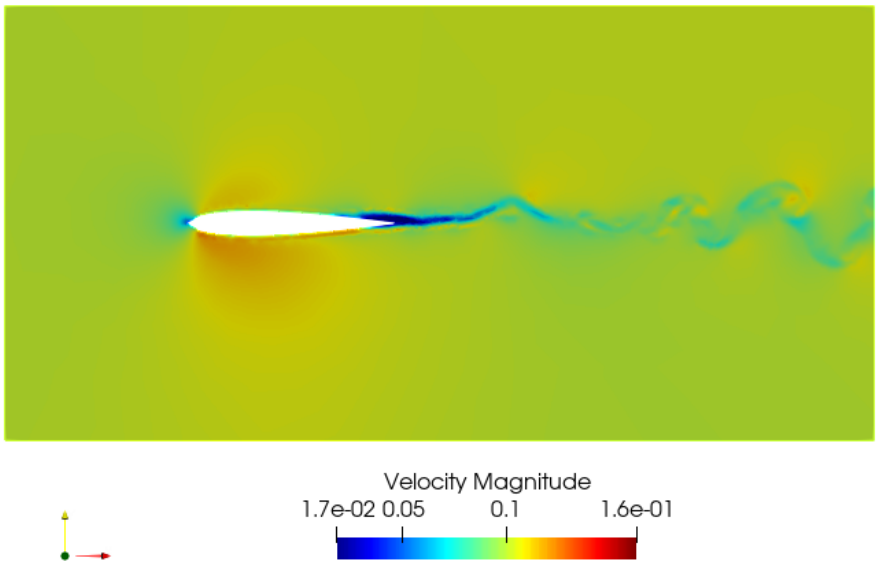

Figura 5.65: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Campo de velocidades, t=70. Paraview.

5.3.8 Experimento nº 8. Ecuaciones de Navier-Stokes. Perfil NACA de revolución.

En el octavo experimento resolveremos las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio en 3 dimensiones. Este dominio será un prisma rectangular, en el interior del cual encontraremos un objeto con forma de perfil NACA de revolución, figura (5.73). En dicho dominio plantearemos el siguiente problema: hallar el campo de velocidades $\vec{\mathbf{u}} = (u, v, w) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ y la función presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{u} \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ v_t + \mathbf{u} \cdot \nabla v - \nu \Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w - \nu \Delta w + \partial_z p & = f_3 \text{ en } \Omega \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w & = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

junto con las condiciones de contorno:

$$u = 1, v = 0, w = 0 \text{ en la pared izquierda de } \Omega,$$

$$u = 0, v = 0, w = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega,$$

$$u = 0, v = 0, w = 0 \text{ en la frontera del perfil NACA.}$$

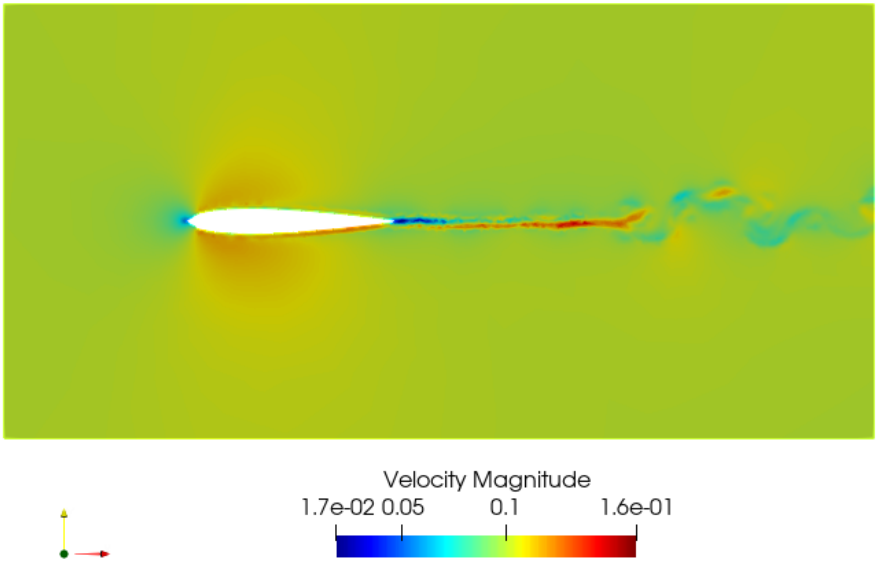

Figura 5.66: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Campo de velocidades, t=99. Paraview.

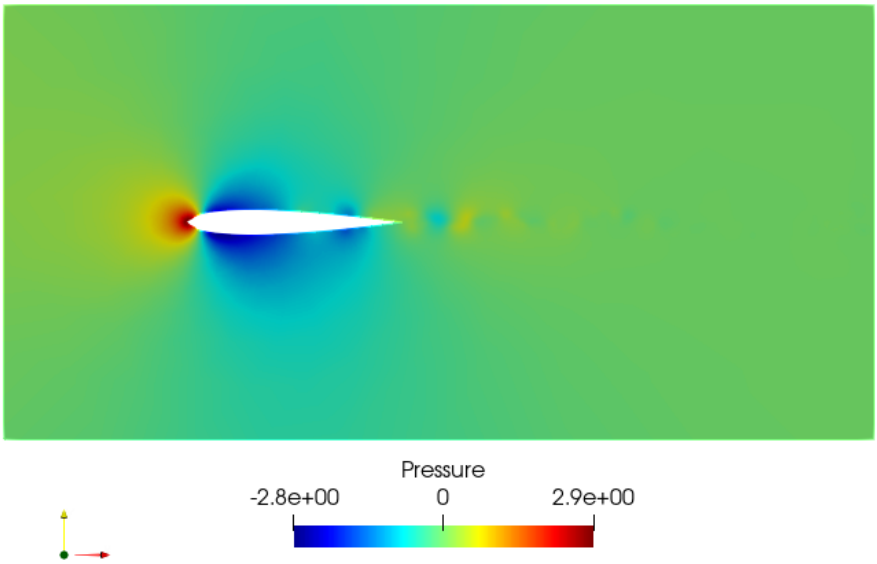

Figura 5.67: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Campo de presiones, t=40. Paraview.

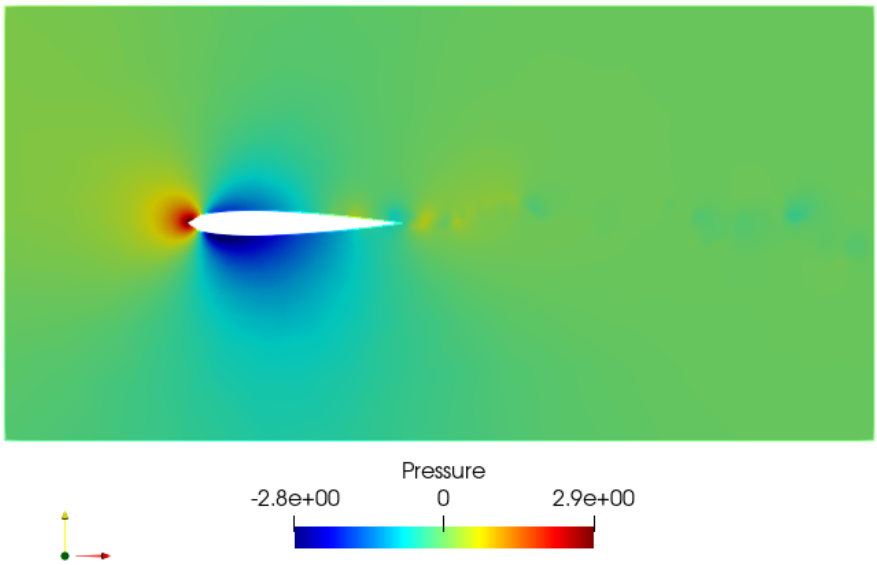

Figura 5.68: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Campo de presiones, t=70. Paraview.

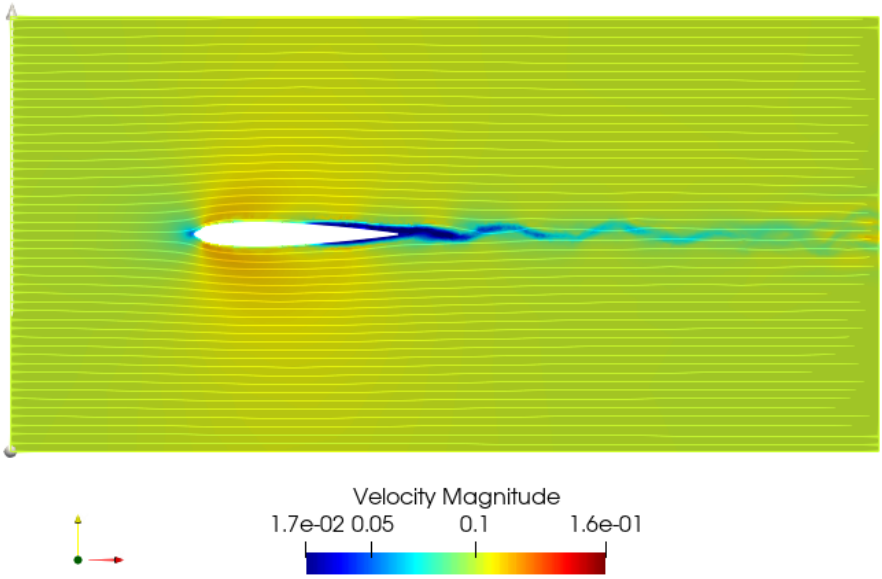

Figura 5.69: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Líneas de corriente, t=40. Paraview.

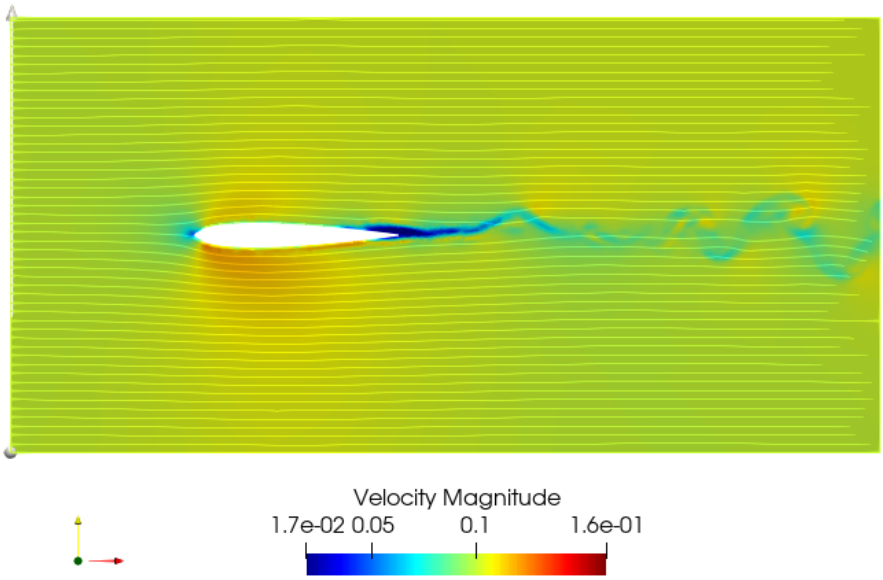

Figura 5.70: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Líneas de corriente, t=70. Paraview.

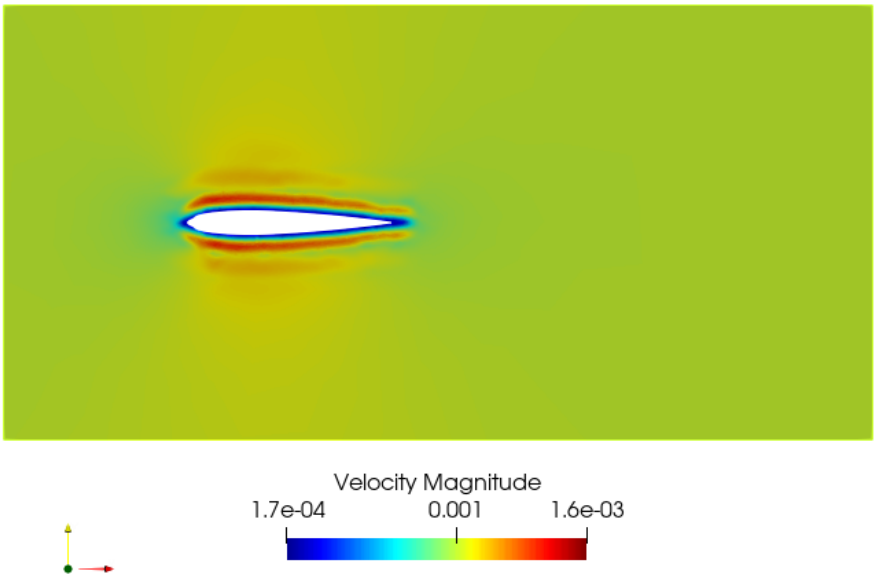

Figura 5.71: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Campo de velocidades, t=40. Número de Reynolds pequeño. Paraview.

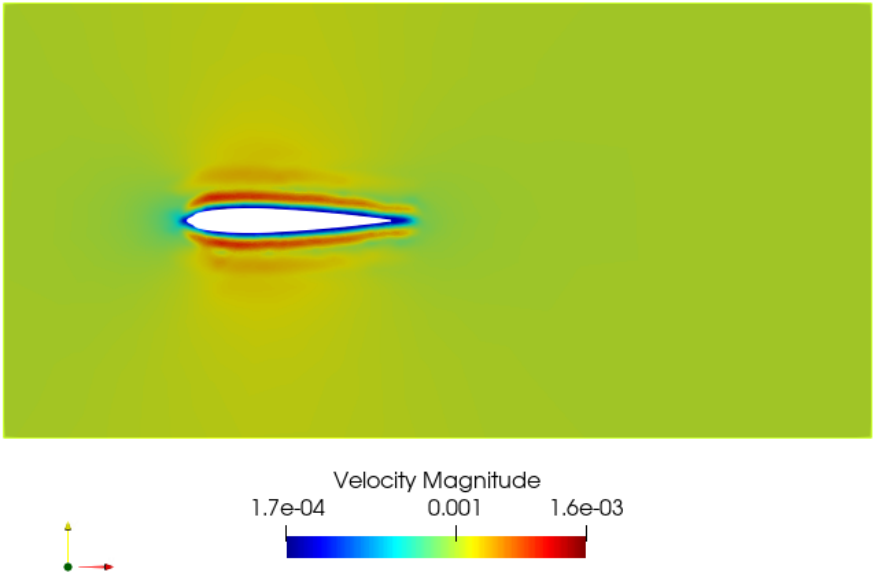

Figura 5.72: Malla rectangular con hueco perfil NACA. Campo de velocidades, t=70. Número de Reynolds pequeño. Paraview.

Y las condiciones iniciales

$$u(0) = 0,$$
$$v(0) = 0,$$
$$w(0) = 0$$

Para desarrollar el experimento en el que nos encontramos vamos a realizar un número total de 50 iteraciones en tiempo, espaciadas en un intervalo de tamaño superior al que hemos utilizado en apartados anteriores, debido principalmente que la malla que estamos utilizando en este experimento es más compleja respecto a geometría, que las que hemos utilizado en los experimentos anteriores. Realizaremos dos experimentos diferentes en este dominio, en uno de ellos utilizaremos un $Re = 1$, y en el otro utilizaremos $Re = 10^{-4}$.

Para visualizar los resultados de este experimento, en concreto correspondientes a la evolución con el tiempo de la magnitud de la velocidad, realizaremos cortes longitudinales (en planos horizontales). Los resultados se pueden apreciar en las figuras (5.74, 5.75, 5.76, 5.77) para $Re = 1$. Y en las figuras (5.78, 5.79, 5.80, 5.81) cuando $Re = 10^{-4}$.

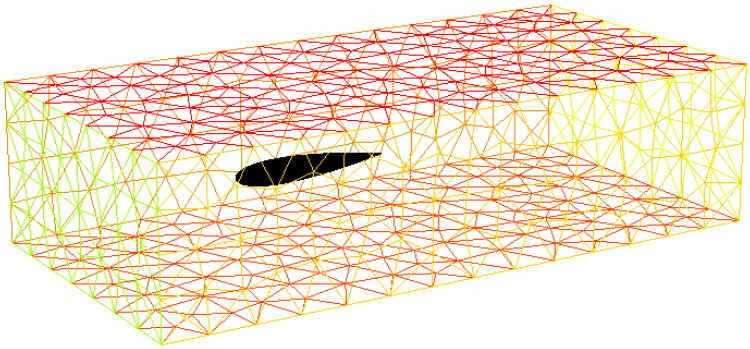

Figura 5.73: Dominio. Prisma rectangular con hueco perfil NACA de revolución. FreeFem++

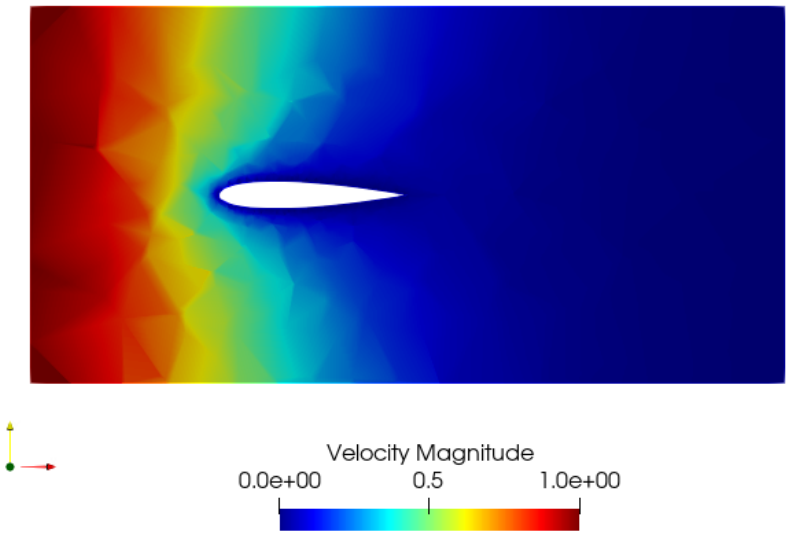

Figura 5.74: Malla perfil NACA de revolución. Campo de velocidades, t=5, $Re = 1$. Paraview.

Observando los resultados que hemos obtenido en los diferentes experimentos podemos llegar a la conclusión de que aunque aumentemos el número de Reynolds no vamos a lograr ver Vórtices de Von Karman ya que la aproximación en tiempo que estamos hacien-

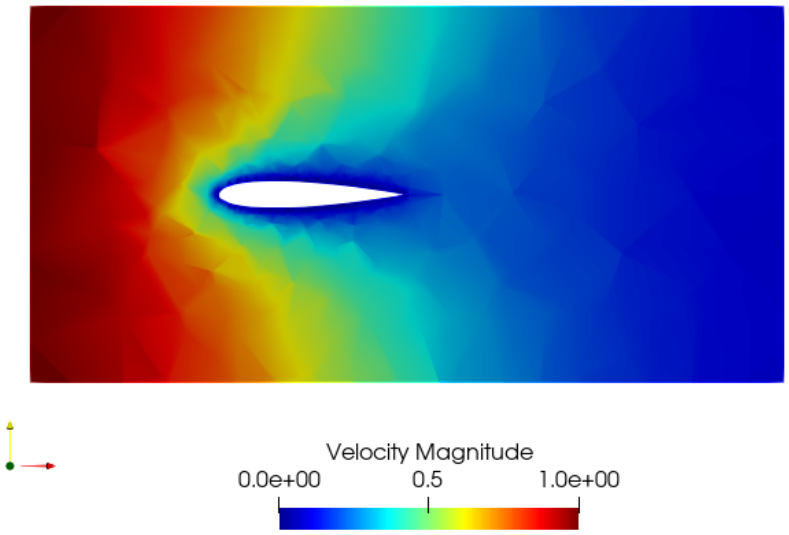

Figura 5.75: Malla perfil NACA de revolución. Campo de velocidades, t=15, $Re = 1$. Paraview.

do no es adecuada; no es como la que utilizamos en 2 dimensiones cuando hacemos uso del operador "convect". En 3 dimensiones actualmente, y según hemos investigado, el operador "convect" no ha sido implementado en FreeFem++. Cuando el número de Reynolds es grande, las ecuaciones de Navier-Stokes tienen un carácter cada vez más hiperbólico y aproximar numéricamente ecuaciones hiperbólicas mediante elementos finitos no es sencillo, hay que utilizar técnicas especializadas como el método de las características, del que hemos hablado en otros apartados de esta memoria. Como se ha comentado anteriormente, el operador "convect" hace precisamente eso, utiliza el método de las características para aproximar la solución y gracias a eso consigue aproximar las ecuaciones de tipo más hiperbólico (con número de Reynolds grande). Por tanto, si no utilizamos estas técnicas no vamos a poder ver Vórtices de Von Karman.

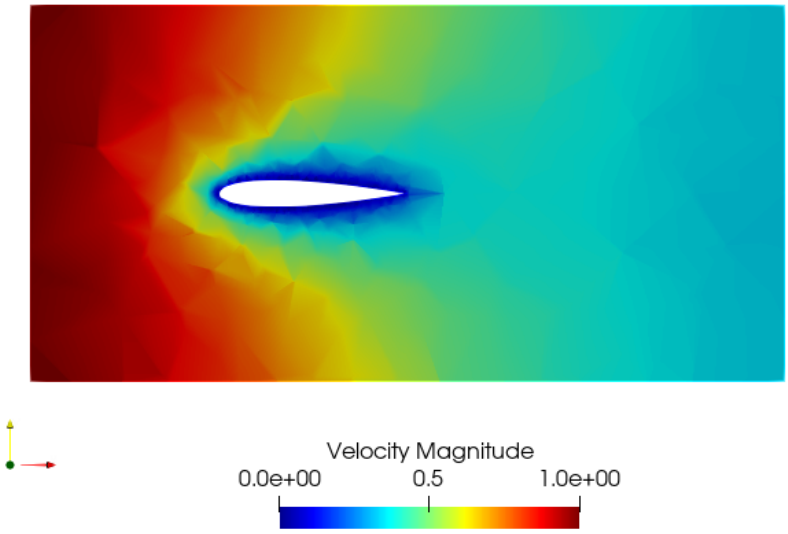

Figura 5.76: Malla perfil NACA de revolución. Campo de velocidades, t=30, $Re = 1$. Paraview.

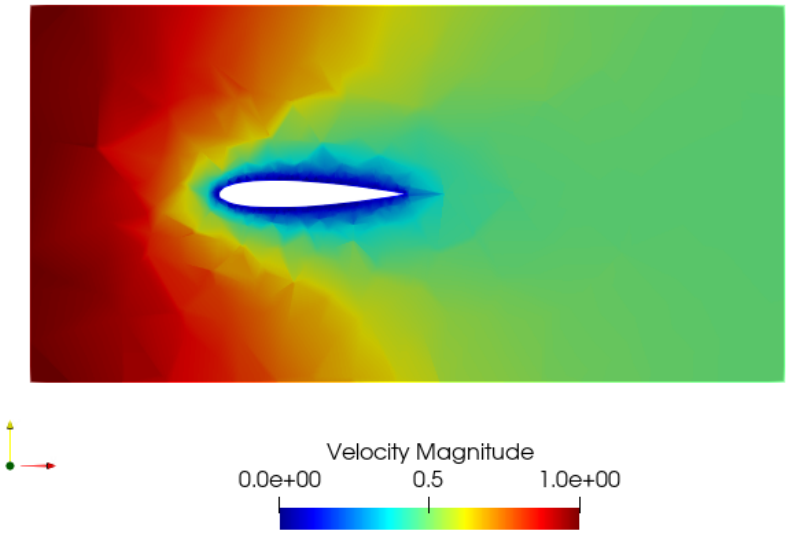

Figura 5.77: Malla perfil NACA de revolución. Campo de velocidades, t=50, $Re = 1$. Paraview.

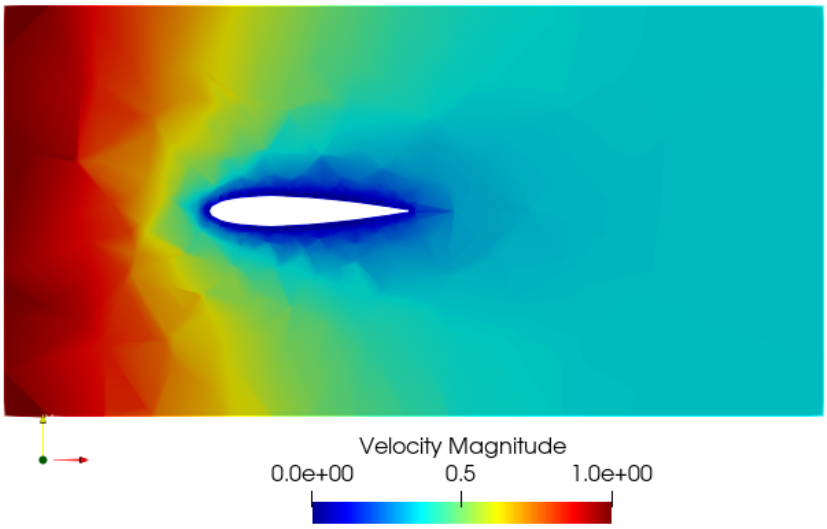

Figura 5.78: Malla perfil NACA de revolución. Campo de velocidades, t=5, $Re = 10^{-4}$. Paraview.

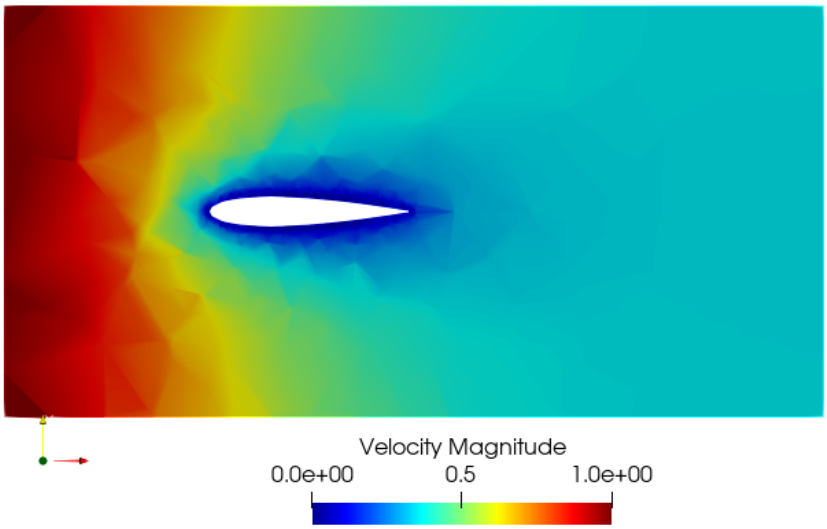

Figura 5.79: Malla perfil NACA de revolución. Campo de velocidades, t=15, $Re = 10^{-4}$. Paraview.

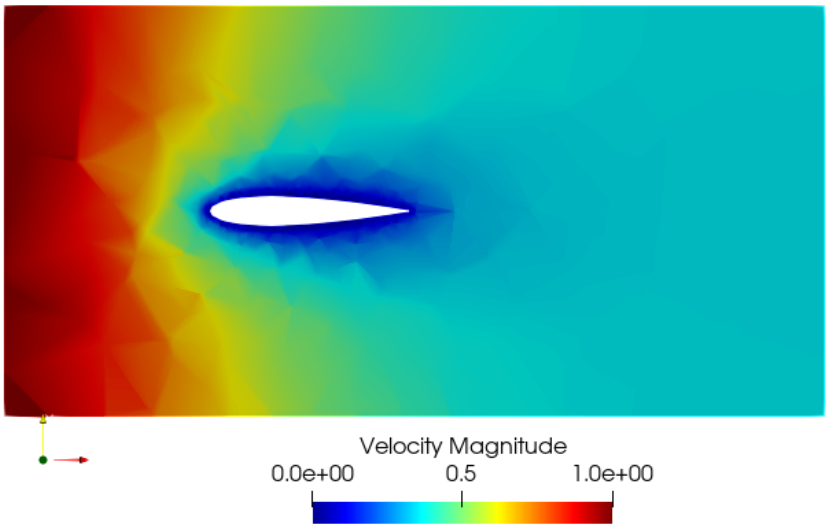

Figura 5.80: Malla perfil NACA de revolución. Campo de velocidades, t=30, $Re = 10^{-4}$. Paraview.

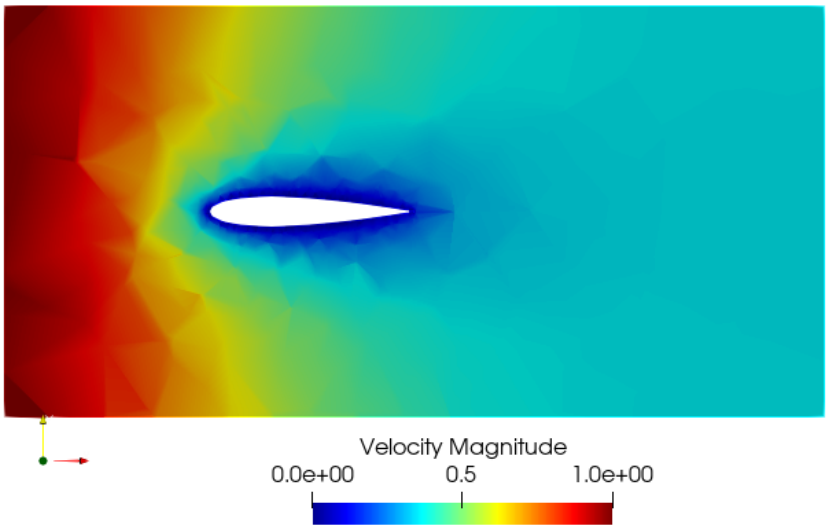

Figura 5.81: Malla perfil NACA de revolución. Campo de velocidades, t=50, $Re = 10^{-4}$. Paraview.

CHAPTER

6

Conclusiones y trabajos futuros

6.1 Conclusiones

En este trabajo nos hemos centrado en el estudio de los flujos en torno a la superficie del casco de un buque durante la navegación de este en un fluido. Para ello hemos comenzado definiendo algunos términos que hemos considerado importantes en el ámbito físico así como en el matemático, desarrollando también algunas definiciones más específicas del sector naval. A continuación hemos llevado a cabo el desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes que serán las que modelizan la dinámica del fluido. Hemos continuado desarrollando en profundidad el método de los elementos finitos ya que es el que utilizamos para resolver el problema que hemos planteado.

Como punto fuerte de nuestro proyecto hemos realizado diferentes experimentos, haciendo uso de mallas en dos dimensiones, rectángulo, circunferencia y perfil NACA entre otras, así como de una malla en tres dimensiones, perfil NACA de revolución. Quizás esta última malla haya sido la que más nos ha costado desarrollar debido a la complejidad que esta conlleva. Es interesante subrayar que algunas simulaciones se han realizado para números de Reynolds relativamente grandes, lo que nos ha posibilitado observar interesantes fenómenos como los vórtices de Von Karman.

Como fruto del esfuerzo dedicado a la generación de mallas complejas en 3D, hemos adquirido el conocimiento necesario para automatizar su generación, utilizando los lenguajes Python y Gmsh, lo que nos puede abrir las puertas para mallar geometrías más complejas.

6.2 Trabajos futuros

En el apartado anterior, conclusiones, comentamos que hemos realizado experimentos para una malla en tres dimensiones, perfil NACA de revolución. Sin embargo, no ha sido esta la única que hemos empezado a desarrollar a lo largo de este proyecto, ya que hemos estado trabajando en otras dos mallas en tres dimensiones; una esfera y un buque, Shuttle tanker. Por tanto, los trabajos futuros a considerar serían aprender a manejar mejor las mallas en tres dimensiones para hacer que funcionen, ya que nos hemos encontrado diversos obstáculos en el camino que no nos han permitido realizar las simulaciones oportunas para poder plasmarlas en este proyecto.

Respecto al mallado de la esfera, el principal obstáculo que nos hemos encontrado ha sido poder llevar a cabo la resolución del problema en este dominio, ya que nos ha sido imposible implementar esta malla en Freefem++. No obstante, la hemos realizado en Gmsh, ver apéndice A. Por tanto, nos gustaría poder realizar el experimento utilizando dicha malla y poder observar lo que ocurre en la superficie de esta.

Nuestro objetivo principal una vez terminado este trabajo, es poder resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio realista, utilizando la malla del buque Shuttle tanker, ver apéndice B. Ya que nos parece un trabajo bastante interesante en el que hemos invertido mucho tiempo, y además consta de una gran utilidad en el ámbito naval. Nos gustaría poder realizar este tipo de experimentos con diferentes tipos de buque, para poder de esta forma apreciar lo que ocurre en el casco de cada uno de ellos cuando entra en contacto con el fluido que lo rodea.

APPENDIX

A

Esfera

En este apéndice nos vamos a centrar en el mallado de la esfera. La malla de la esfera la podríamos incluir como un mallado anterior a la creación del mallado del perfil NACA de revolución, ya que a partir de la esfera podríamos dar paso a dicho perfil NACA. En el siguiente apartado vamos a desarrollar con detalle la realización de la malla de una esfera de dos formas diferentes, sin embargo, hemos tenido diversos problemas para que esta malla funcione en "FreeFem++" debido a la complejidad que presenta en algunas ocasiones la integración de mallas "Gmsh" en este tipo de programas.

A.1 Mallado esfera

El mallado de la esfera en tres dimensiones lo hemos realizado de dos formas diferentes, siendo la más adecuada para realizar los ensayos oportunos la segunda de ellas, debido a que esta presenta un mallado más fino, y por tanto, los resultados del experimento serían más fáciles de apreciar en ella. Esta malla la hemos realizado haciendo uso únicamente de los comandos de "Gmsh".

Para realizar esta malla, en primer lugar hemos definido 6 puntos principales, así como el punto central de esta, para ello hemos utilizado el comando *Point*. Una vez definidos estos puntos los hemos unido entre ellos mediante el comando *Circle arc*, obteniendo el resultado que aparece en la figura A.1.

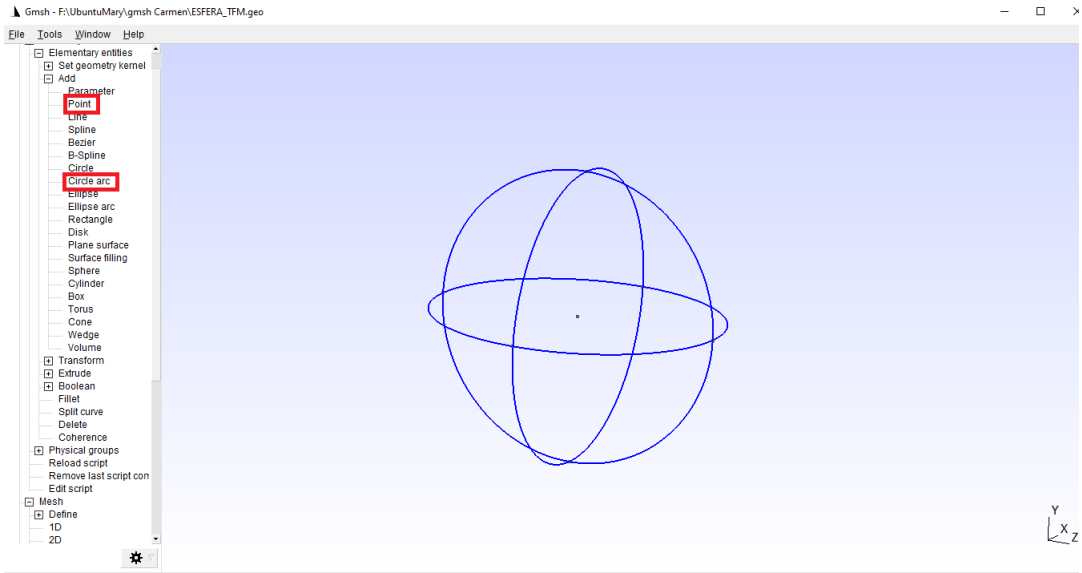

Figura A.1: Puntos y líneas mallado esfera 3D. Creados con Gmsh.

A continuación, creamos las superficies que constituirán la esfera, esta vez utilizaremos el comando *Surface filling*. Una vez definidas todas las superficies de la esfera, definiremos el volumen utilizando el comando *Volume*. Para identificar que el volumen se ha creado correctamente nos fijamos en que aparece en el centro de la figura una pequeña esfera de color amarillo, ver figura A.2.

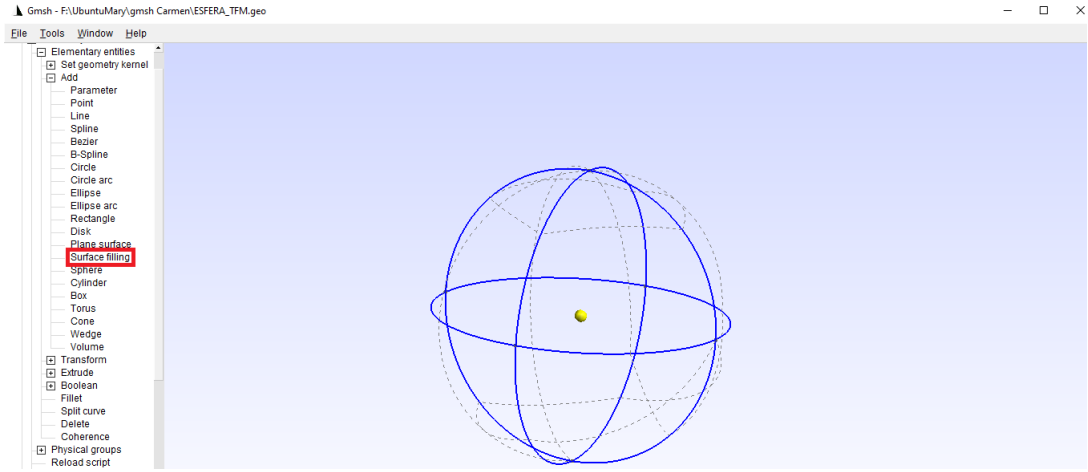

Figura A.2: Superficies y volumen mallado esfera 3D. Creados con Gmsh.

Mediante el comando *Mesh-3D* crearemos el mallado 3D de la esfera, figura A.3, y

podremos guardar la malla de la esfera en 3 dimensiones en un archivo con extensión .msh, que será el que utilizaremos en **FreeFem++** para realizar los cálculos necesarios.

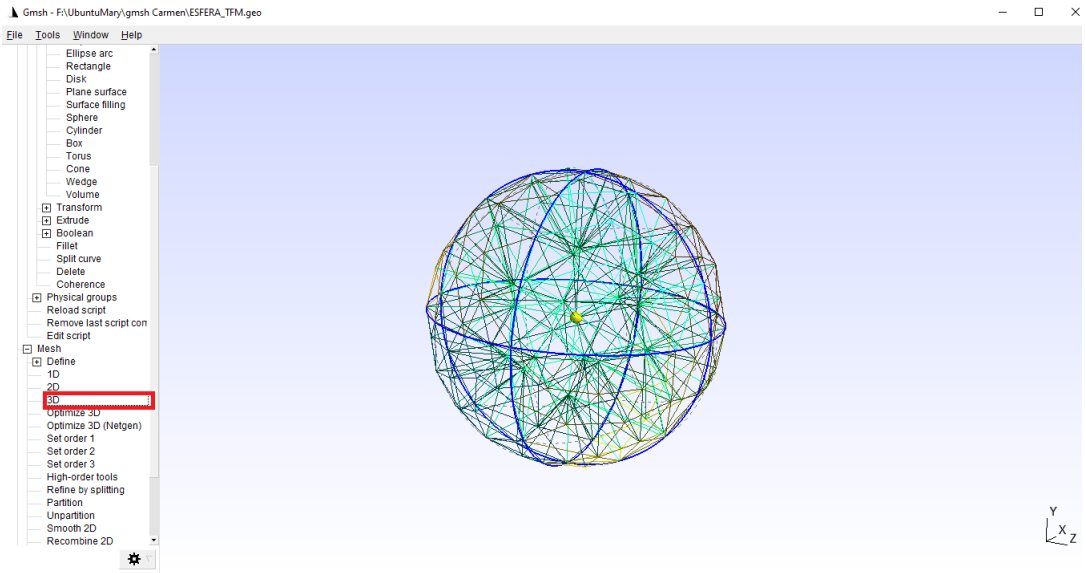

Figura A.3: Mallado esfera 3D. Creados con Gmsh.

No obstante, esta malla no nos serviría para poder aplicar las ecuaciones de Navier-Stokes, ya que necesitamos saber lo que ocurre en la superficie de la esfera, no en su interior. Es por ello, que de la misma forma que hemos desarrollado la esfera en este programa, generaremos una "caja" que encerrará a la esfera. Las dimensiones de dicha caja están preestablecidas, es decir, para que el experimento que vamos a realizar se pueda llevar a cabo de forma correcta las paredes laterales, superior e inferior deberán estar a 3 veces la anchura de la figura mientras que la trasera deberá estar a dos veces la cuerda. Para generar la caja en primer lugar hemos definido los vértices de esta, introduciendo los puntos mediante el comando *Point*. A continuación hemos unido dichos puntos mediante el comando *Line*, para posteriormente poder crear las superficies de la caja, *Plane Surface*. Una vez creadas las superficies, y de la misma forma que para la esfera, crearemos el volumen de la caja, figura A.4.

Por último procederemos al mallado 3D que aparece en la figura A.5, del conjunto de figuras, es decir, de la esfera y de la caja. Esto se hará mediante el comando *Mesh-3D*. Cabe tener en cuenta, que para que esta malla pueda ser exportada correctamente en **FreeFem++**, se deberá guardar en la versión 2 ASCII, y con una extensión de archivo .msh.

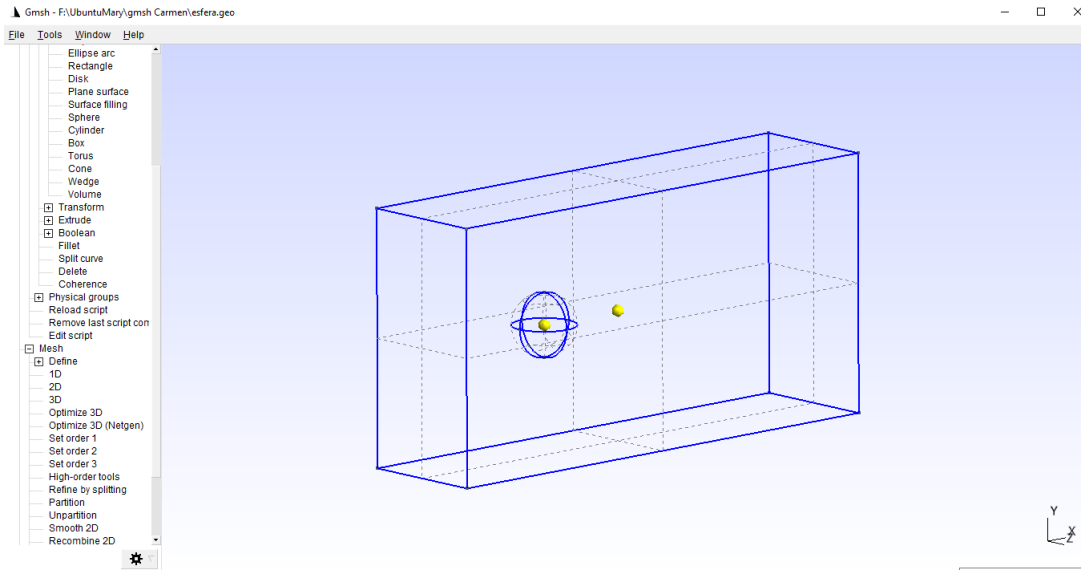

Figura A.4: Esfera 3D con caja. Creados con Gmsh.

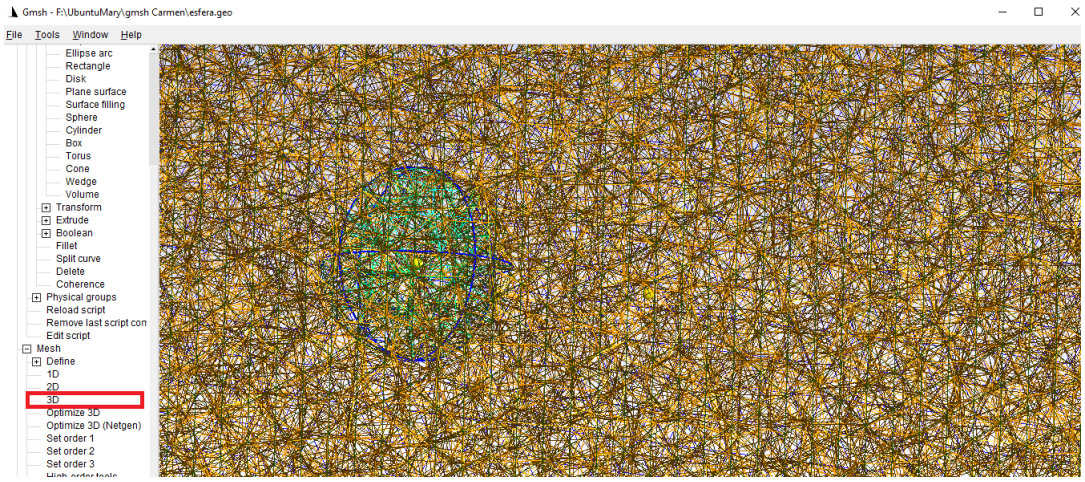

Figura A.5: Mallado esfera 3D y caja. Creados con Gmsh.

A continuación definiremos la forma de realizar el mallado de la esfera mediante un método aparentemente más sencillo.

En primer lugar, crearemos la esfera. Para ello bastará con utilizar el comando *sphere*, tal como se muestra en la figura A.6, donde podremos añadir las coordenadas del punto del centro de nuestra esfera, así como el radio de esta.

De la misma forma crearemos la "caja" en la que se encontrará la esfera. Esta vez utilizaremos el comando *box* (figura A.7), donde incluiremos las dimensiones de la caja,

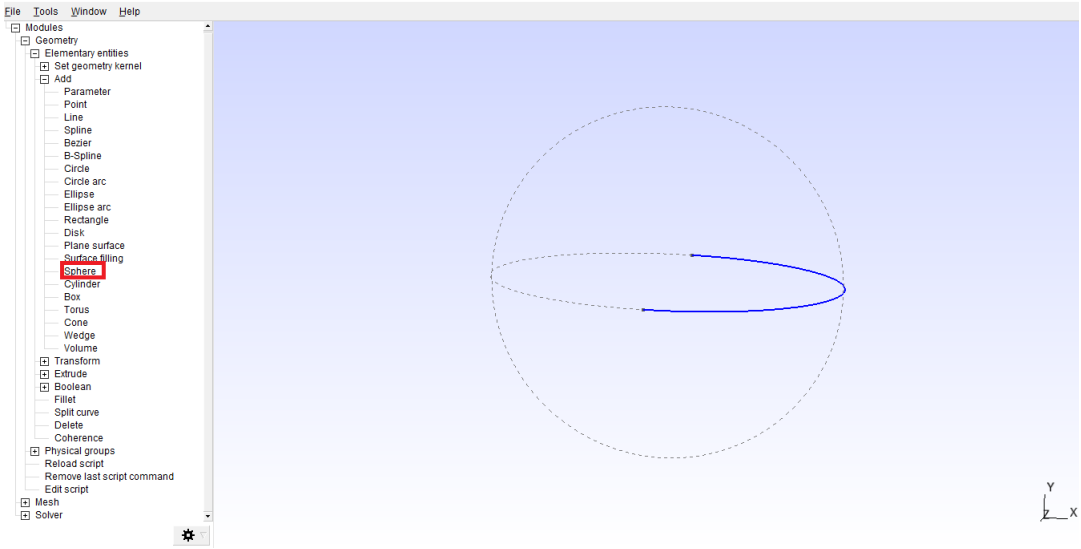

Figura A.6: Esfera 3D. Creado con Gmsh.

así como la posición en la que la queremos colocar.

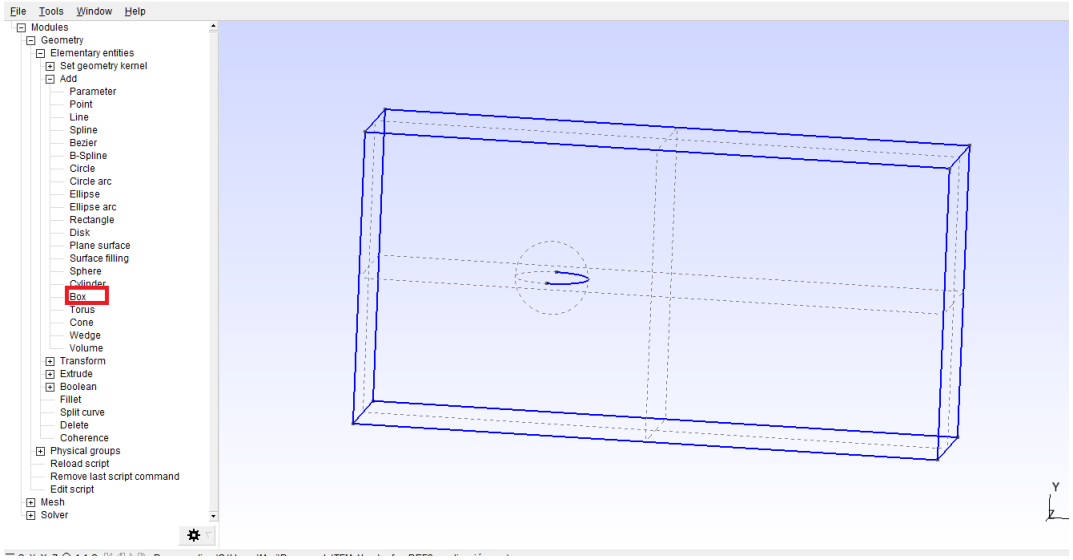

Figura A.7: Esfera 3D y caja. Creados con Gmsh.

El resto del proceso de creación de la malla será exactamente igual que el que hemos definido anteriormente para la esfera en tres dimensiones.

El experimento a realizar con esta malla sería el mismo que hemos realizado para el mallado del perfil NACA de revolución. Este experimento no ha podido realizarse ya que

hemos obtenido diversos errores al intentar integrar esta malla en “FreeFem”, es por ello que lo estamos considerando como trabajo futuro para poder seguir trabajando en ello.

APPENDIX

B

Shuttle tanker

En este apartado vamos a tratar el que era nuestra meta en este trabajo, el mallado del casco de un buque shuttle tanker. A pesar de la complejidad que presenta la malla de un buque hemos logrado terminarla, sin embargo, no hemos conseguido integrarla en su totalidad en "FreeFem++". A continuación vamos a explicar como hemos realizado el mallado de este buque.

B.1 Mallado Shuttle tanker

En este apartado vamos a realizar una malla más realista. Se trata del mallado del casco de un buque, en este caso un Shuttle Tanker. Para llevar a cabo esta malla se nos han proporcionado todos los puntos que constituyen la superficie del casco de este buque ordenados por cuadernas. Por ello, en primer lugar hemos trasladado estos puntos desde un archivo .txt a un archivo .csv que más tarde incluiríamos en **Python**, donde hemos ido creando cuaderna por cuaderna todos los puntos que constituyen al buque, programando de la misma forma las líneas que unen los puntos de dichas cuadernas y creando a su vez las superficies que estas forman.

Por tanto, mediante programación en **Python** hemos creado el archivo .geo con todos los puntos que constituyen esta malla. En esta caso, los puntos se han ido incluyendo en **Gmsh** de forma intercalada con las líneas que los unen para mayor facilidad de unión de los puntos de las distintas cuadernas. De la misma forma se ha procedido a la creación de

superficies, mediante el comando *Plane Surface*, ya que la dificultad sería mucho mayor si hubiéramos incluido primero todos los puntos, luego todas las líneas y finalmente las superficies. Esto se debe principalmente a que la visualización de todos los elementos hubiera sido mucho más complicada, pudiendo esto provocar diversos errores.

Definidas todas las superficies de nuestra malla, el resultado lo podemos apreciar en las figuras B.1, B.2 y B.3.

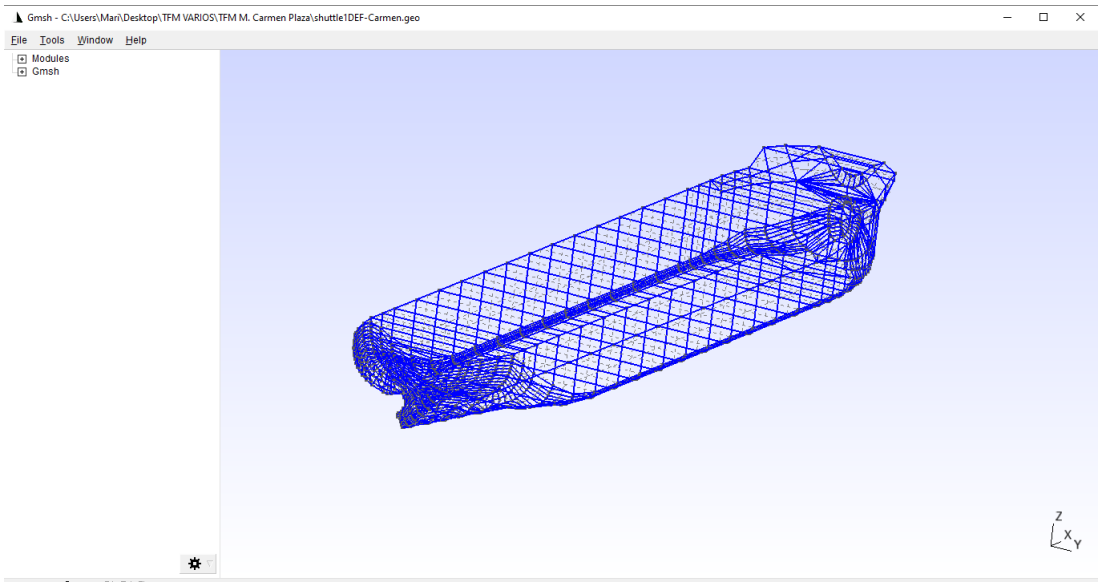

Figura B.1: Puntos, Líneas y Superficies. Shuttle Tanker. Popa-Proa.

Una vez creadas todas las superficies, pasaremos a crear el volumen de nuestra figura. Para ello, al igual que en los casos anteriores, utilizaremos el comando *Volume*, y constataremos que nuestro buque conforma una superficie cerrada cuando podamos apreciar la esfera amarilla del centro, que nos indicará que el volumen ha sido creado de forma correcta (figura B.4).

Cuando hayamos creado el volumen de nuestro buque, procederemos a realizar la "caja" en la que se encontrará, creando a su vez el volumen de esta (figura B.5).

Por último, crearemos el mallado en 3D (figura B.6) mediante el comando *Mesh-3D* que guardaremos en formato .msh para poder utilizar nuestra malla en otros programas como **FreeFem++**. Como vemos, no apreciamos con claridad el buque dentro de la caja, esto se debe principalmente a la gran cantidad de puntos que constituyen esta malla.

La malla que hemos creado constituye tanto la obra viva como la obra muerta del buque,

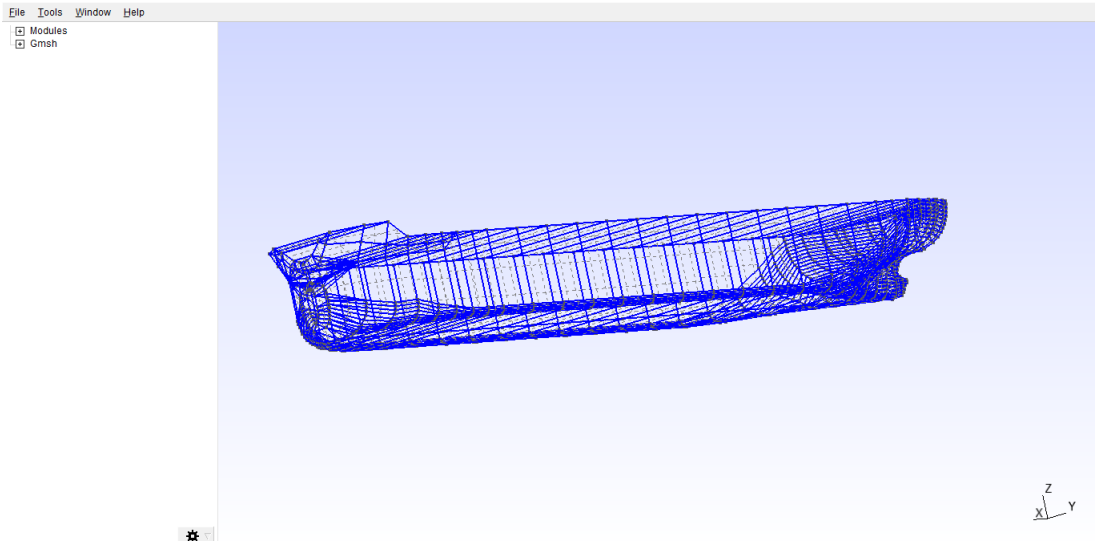

Figura B.2: Puntos, Líneas y Superficies. Shuttle Tanker. Proa-Popa.

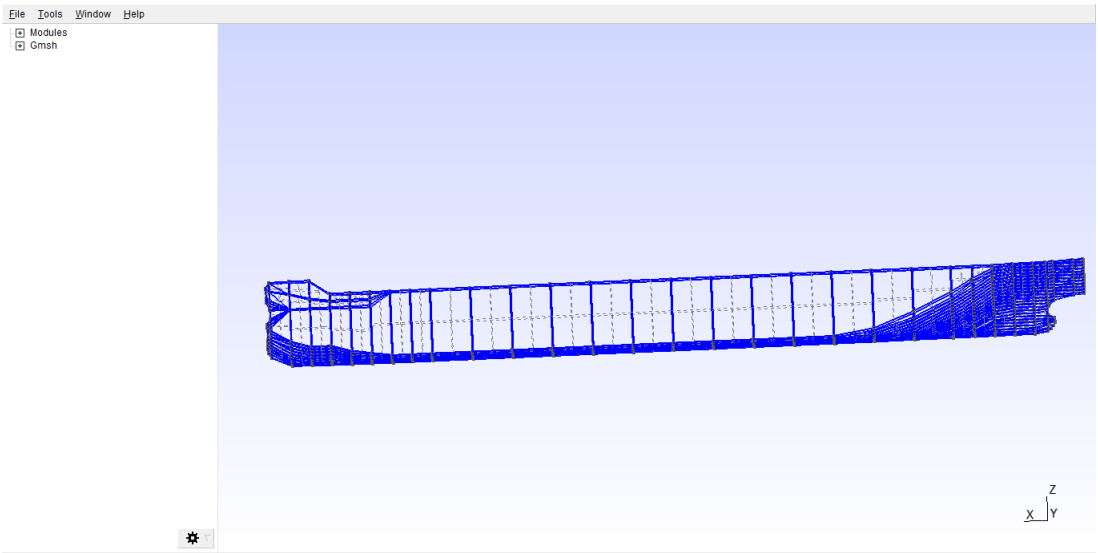

Figura B.3: Puntos, Líneas y Superficies. Shuttle Tanker. Perfil.

sin embargo, para que nuestro experimento pudiera ser llevado a cabo de una forma más realista bastaría con considerar únicamente las superficies que conforman la obra viva del buque. Todo este procedimiento lo hemos realizado, sin embargo, la integración de esta malla en “Freefem++” nos ha sido imposible de realizar, ya que debido a la complejidad que esta malla conlleva y al gran número de puntos que la constituyen nos ha sido inviable la búsqueda de errores que se nos presentaban. El experimento en el que estamos trabajando

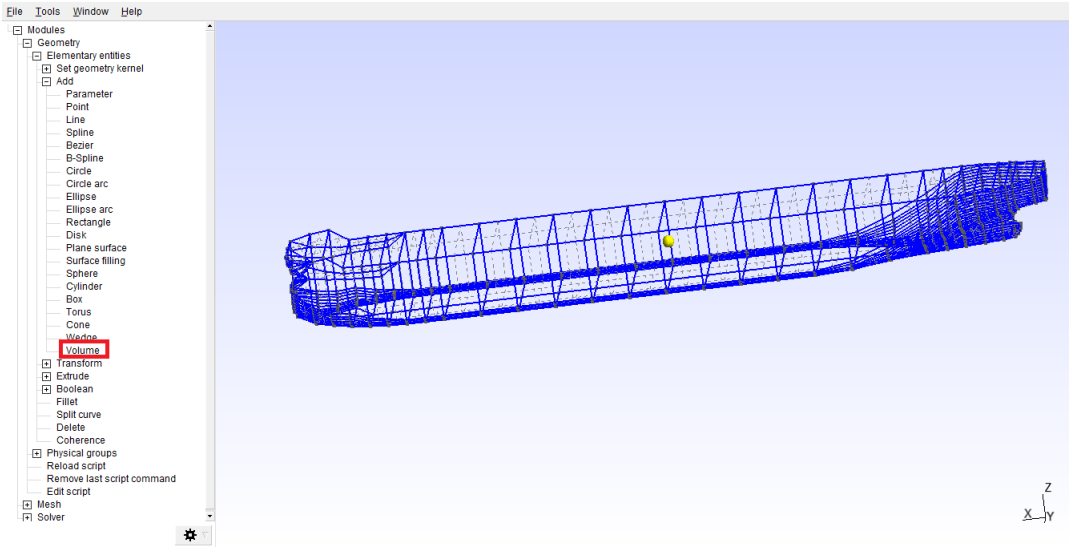

Figura B.4: Volumen. Shuttle Tanker.

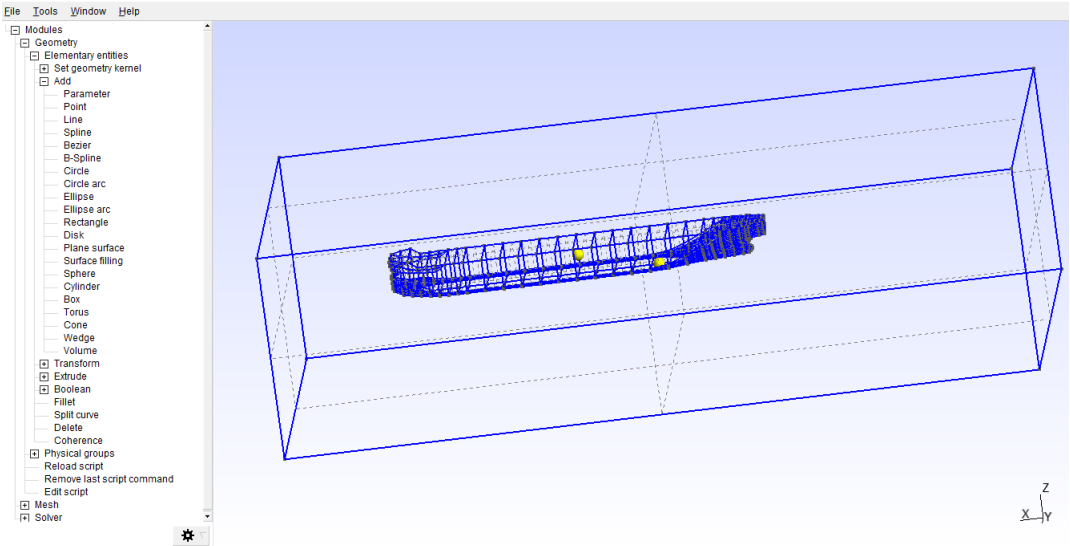

Figura B.5: Volumen. Shuttle Tanker y caja.

es el siguiente.

B.1.1 Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes. Casco Shuttle tanker.

Para llevar a cabo este experimento hemos creado un mallado realista del casco de un buque Shuttle tanker. Se trata de un buque diseñado para el transporte de petróleo desde una

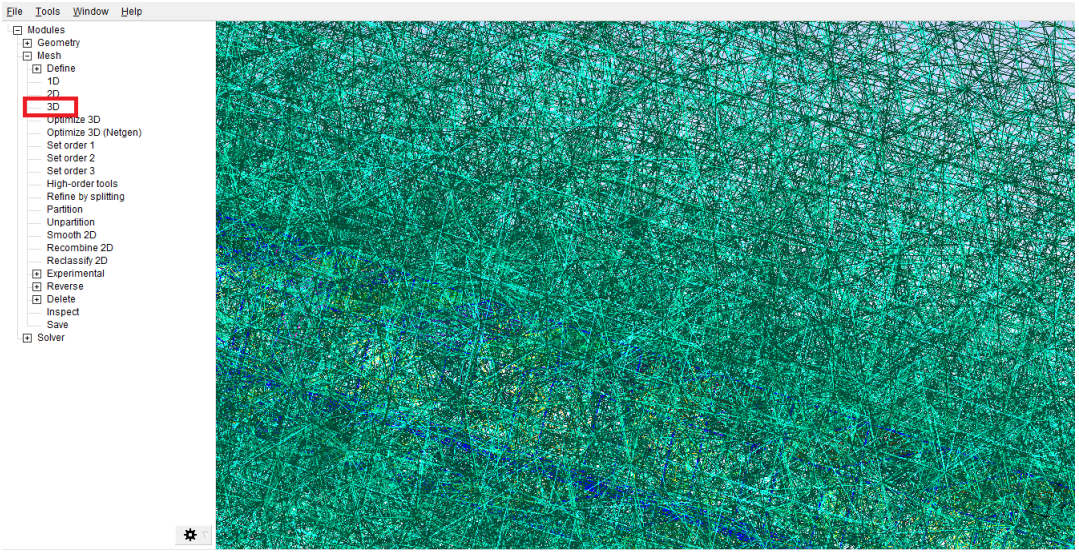

Figura B.6: Mallado en 3D. Shuttle Tanker.

plataforma petrolífera en alta mar, como una alternativa a la construcción de oleoductos, figura B.7.

Figura B.7: Buque Shuttle tanker.

Las dimensiones principales del buque que hemos utilizado para crear la malla son:

- Eslora entre perpendiculares (Lpp) = 267 m
- Eslora total (LOA) = 275 m

- Manga (B) = 44 m
- Puntal (D) = 23,25 m
- Calado (T) = 16 m

La definición de las zonas del buque que hemos mencionado las podemos encontrar en el apartado 2.3.

En este último experimento nos gustaría resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio realista, casco Shuttle tanker alojado en el interior de un prisma rectangular. Para llevar a cabo este experimento tendremos en cuenta únicamente la obra viva del casco del buque, ya que será la que esté en contacto con el fluido, es por ello, que lo que ocurra alrededor del resto del casco del buque no es de interés en este apartado. En dicho dominio plantearemos el siguiente problema: hallar el campo de velocidades $\vec{\mathbf{u}} = (u, v, w) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ y la función presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{u} \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ v_t + \mathbf{u} \cdot \nabla v - \nu \Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w - \nu \Delta w + \partial_z p & = f_3 \text{ en } \Omega \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w & = 0 \end{cases}$$

Bibliografía

[1] G Allaire. *Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modelling and numerical simulation*. Oxford University Press, 2007. 3, 24

[2] Alexandre Ern and Guermond Jean-Luc. *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer, 2000. 3, 24

[3] Jesús Victoria Meizoso. *Principios de Ingeniería Naval*. Tórculo Edicións, 2011. 3

[4] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010. 3

[5] Alexandre J Chorin and Jerrold E Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.* Springer, 2000. 11

[6] Yunus A Çengel and John M Cimbala. *Mecánica de Fluidos. Fundamentos y aplicaciones*. Mc Graw Hill, 2006. 11

[7] R. J LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University Press, 2002. 24

[8] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 2008. 24

[9] Frank M White. *Mecánica de fluidos*. Mc Graw Hill, 2004.

[10] Leo Miguel González Gutierrez. *Integración de las ecuaciones de Navier-Stokes mediante el método de los elementos finitos y el método de las características*. Archivo Digital UPM, 2001.

[11] Juan Carlos Barea Hernández. *Estudio del comportamiento del fluido al paso por válvulas hidráulicas mediante ensayo experimental y modelación CFD*. Universidad de Almería, 2007.

[12] Varios autores. Freefem, obtenido de https://freefem.org/, 1987.

[13] Francisco Ortegón Gallego. *Introducción al Método de los Elementos Finitos*. Universidad de Cádiz., 2011.

[14] Varios autores. Atom documentation, obtenido de https://atom.io/, 2015.

[15] Varios autores. Paraview, obtenido de https://www.paraview.org/, 2002.

[16] C. Geuzaine and RemacleJ.F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. , obtenido de https://gmsh.info/, 2009.

[17] Varios autores. Python documentation, obtenido de https://www.python.org/doc/, 2001.