MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA DINÁMICA DEL BUQUE

Máster Interuniversitario en Matemáticas

M Carmen Plaza Bermejo

Febrero 2021

Contenido

1 Ecuaciones de Navier-Stokes

Contenido

1. Ecuaciones de Navier-Stokes
2. Aproximación numérica
   - Método de los Elementos Finitos
   - Método de las Características

Contenido

1. Ecuaciones de Navier-Stokes
2. Aproximación numérica
   - Método de los Elementos Finitos
   - Método de las Características
3. Ensayos numéricos

Contenido

1. Ecuaciones de Navier-Stokes
2. Aproximación numérica
   - Método de los Elementos Finitos
   - Método de las Características
3. Ensayos numéricos
4. Conclusiones

Contenido

1. Ecuaciones de Navier-Stokes
2. Aproximación numérica
   - Método de los Elementos Finitos
   - Método de las Características
3. Ensayos numéricos
4. Conclusiones
5. Trabajos futuros

Contenido

1. Ecuaciones de Navier-Stokes
2. Aproximación numérica
   - Método de los Elementos Finitos
   - Método de las Características
3. Ensayos numéricos
4. Conclusiones
5. Trabajos futuros
6. Bibliografía

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

Densidad de masa.

$\exists\, \rho \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T)), \rho > 0$, tal que "Masa en W en el instante t"

$$m(W, t) = \int_W \rho(x, t) dx \, \forall W, \forall t$$

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

Densidad de masa.

$\exists\, \rho \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T)), \rho > 0$, tal que "Masa en W en el instante t"

$$m(W, t) = \int_W \rho(x, t) dx \, \forall W, \forall t$$

Campo de velocidades.

$\exists\, \mathbf{u} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T)), \mathbb{R}^N$, tal que
"Cantidad de movimiento en W en el instante t"

$$\vec{M}\,(W, t) = \int_W (\rho\, \vec{u})(x, t) dx \, \forall W, \forall t$$

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

Densidad de energía interna por unidad de masa.

$\exists\, w \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T)), w > 0$, tal que
"Energía total en W en el instante t"

$$E_{Total}(W, t) = \int_{\Omega} (\frac{1}{2}\rho |\ \vec{u}\ |^2 + \rho w)(x, t) dx \,\forall W, \forall t$$

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

Teorema del transporte

Si $f_0 \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T))$ y $W \subset \Omega$ es, por ejemplo, una bola abierta, entonces

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{W_t} f_0(x,t)dx\Big) = \int_{W_t} \Big\{\frac{\partial f_0}{\partial t} + \nabla \cdot (f_0 \ \vec{u})\Big\}(x,t)dx \qquad \forall t \in [0, T)$$

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

Teorema del transporte

Si $f_0 \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T))$ y $W \subset \Omega$ es, por ejemplo, una bola abierta, entonces

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{W_t} f_0(x,t)dx\Big) = \int_{W_t} \Big\{\frac{\partial f_0}{\partial t} + \nabla \cdot (f_0 \ \vec{u})\Big\}(x,t)dx \qquad \forall t \in [0, T)$$

Teorema de la divergencia (Fórmula de Gauss)

Si $W \subset \Omega$ es un abierto acotado, ∂W es regular y $\mathbf{q} \in C^1(W; \mathbb{R}^N)$, entonces

$$\int_W \nabla \cdot \mathbf{q}\, dx = \int_{\partial W} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, dT$$

siendo $\mathbf{n}$ el vector normal.

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

- **Leyes de conservación**

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

- **Leyes de conservación**

- **Leyes constitutivas**

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

- **Leyes de conservación**
  1. La masa ni se crea ni se destruye.

- **Leyes constitutivas**

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

- **Leyes de conservación**
  1. La masa ni se crea ni se destruye.
  2. La variación de la cantidad de movimiento es directamente proporcional a la fuerza aplicada (segunda ley de Newton).
- **Leyes constitutivas**

Deducción ecuaciones Navier-Stokes

- **Leyes de conservación**
  1. La masa ni se crea ni se destruye.
  2. La variación de la cantidad de movimiento es directamente proporcional a la fuerza aplicada (segunda ley de Newton).
  3. La energía ni se crea ni se destruye, solo se transforma.
- **Leyes constitutivas**

Leyes de conservación

Ley de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \, \mathbf{u}) = 0$$

Leyes de conservación

Ley de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{u}) = 0$$

Ley de conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{W_t} (\rho\, \mathbf{u})(x,t)dx \Big) = \mathbf{F}(W_t, t)$$

$$\rho\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\Big) - \nabla \cdot \sigma = \rho\, \mathbf{f}$$

Leyes de conservación

Ley de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{u}) = 0$$

Ley de conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{W_t} (\rho\, \mathbf{u})(x,t)dx \Big) = \mathbf{F}(W_t, t)$$

$$\rho\Big(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\Big) - \nabla \cdot \sigma = \rho\, \mathbf{f}$$

Ley de conservación de la energía

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{W_t} \Big(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\, w\Big)dx \Big) = P(W_t, t)$$

Leyes constitutivas

- Si el fluido es ideal

$$\exists p \in C^1(\Omega \times [0, T)) \text{ tal que } \sigma = -pI$$

siendo I la matriz identidad.

Leyes constitutivas

- Si el fluido es ideal

$$\exists p \in C^1(\Omega \times [0, T)) \text{ tal que } \sigma = -pI$$

siendo I la matriz identidad.

- Si el fluido es incompresible

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Leyes constitutivas

- Si el fluido es ideal

$$\exists p \in C^1(\Omega \times [0, T)) \text{ tal que } \sigma = -pI$$

siendo I la matriz identidad.

- Si el fluido es incompresible

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- Si el fluido es homogéneo

$$\rho = \rho_0(constante)$$

Leyes constitutivas

Ecuaciones de Euler incompresibles

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = \mathbf{f}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T)$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

En vez de considerar

$$\sigma = -pI$$

ahora

$$\sigma = -pI + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})I$$

Denotamos por ∇ el operador gradiente, Δ al operador laplaciano y $\nabla\cdot$ al operador divergencia.

Ecuaciones de Navier-Stokes

En vez de considerar

$$\sigma = -pI$$

ahora

$$\sigma = -pI + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})I$$

Ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho_0}\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = \mathbf{f}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T)$$

donde $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$.

Denotamos por ∇ el operador gradiente, Δ al operador laplaciano y $\nabla\cdot$ al operador divergencia.

Ecuaciones de Navier-Stokes

En el caso tridimensional, si $\mathbf{u} = (u, v, w)$ entonces las ecuaciones de Navier-Stokes quedan descritas por

$$\begin{cases} u_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ v_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)v - \nu \Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ w_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)w - \nu \Delta w + \partial_z p & = f_3 \text{ en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Términos convectivos:

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)u = u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u$

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)v = u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v$

$(\mathbf{u} \cdot \nabla)w = u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w$

Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes

Número de Reynolds

$$Re = \frac{LU}{\nu}$$

- L longitud característica
- U velocidad característica
- ν viscosidad del fluido

Dos flujos con la misma geometría y el mismo número de Reynolds se denominan **similares.**

$$Re_1 = Re_2, \qquad \text{esto es} \qquad \frac{L_1 U_1}{\nu_1} = \frac{L_2 U_2}{\nu_2}$$

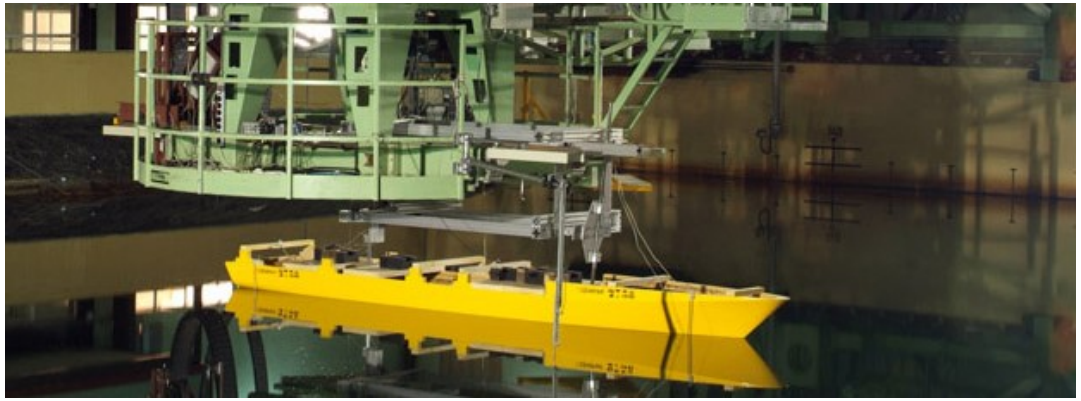


Figura: Canal de Experiencias Hidrodinámicas de El Pardo

Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes

Ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido viscoso incompresible

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad y \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

donde

$$\frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} \qquad \text{término de difusión}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \qquad \text{término convectivo}$$

Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes

Ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido viscoso incompresible

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad y \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

donde

$$\frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} \qquad \text{término de difusión}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \qquad \text{término convectivo}$$

Ecuaciones de Stokes para flujo incompresible

$$\partial_t \mathbf{u} - \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{y} \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

Método de los Elementos Finitos

- Método de los elementos finitos - Discretización en espacio

Método de los Elementos Finitos

- Método de los elementos finitos - Discretización en espacio
- Método de las características - Discretización en tiempo

Método de los elementos finitos

Distinguiremos tres etapas:

1. Formulación variacional del problema de contorno

Método de los elementos finitos

Distinguiremos tres etapas:

1. Formulación variacional del problema de contorno
2. Aproximación de la formulación variacional

Método de los elementos finitos

Distinguiremos tres etapas:

1. Formulación variacional del problema de contorno
2. Aproximación de la formulación variacional
3. Construcción de espacios de dimensión finita, mediante la técnica de los elementos finitos

Aproximación variacional interna (Método de Galerkin)

Dado:

- Un espacio de Hilbert V
- Una forma bilineal continua y coercitiva $a(u, v)$
- Una forma continua $L(v)$

consideramos la siguiente **formulación variacional:**

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in V$$

con

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

y

$$L(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx$$

Aproximación variacional interna (Método de Galerkin)

La **aproximación interna** de esta formulación variacional consiste en reemplazar el espacio de Hilbert V por un subespacio de dimensión finita V_h. Nuestro problema consistiría en:

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h$$

Aproximación variacional interna (Método de Galerkin)

Demostración

La existencia y unicidad de $u_h \in V_h$ proviene del teorema de Lax-Milgram aplicado a V_h. Para definir el problema de una forma sencilla, introducimos la base $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N_h}$ siendo N_h la dimensión de V_h. Si $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j$, establecemos el vector $U_h = (u_1, ..., u_{N_h})$ en $\mathbb{R}^{N_h}$ de coordenadas de u_h. Por tanto, el problema anterior es equivalente a:

$$\text{Hallar } U_h \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tal que } \left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j, \phi_i \right) = L(\phi_i) \qquad \forall\, 1 \leq i \leq N_h,$$

que se puede escribir en forma de sistema lineal

$$K_h U_h = b_h,$$

para $1 \leq i, j \leq N_h$,

$$(K_h)_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), \qquad (b_h)_i = L(\phi_i).$$

Elementos finitos en dimensión 1

Problema modelo, con condiciones de contorno Dirichlet homogénea

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ en } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Formulación variacional

Hallar $u_h \in V_{0h}$ tal que $\displaystyle\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \qquad \forall v_h \in V_{0h}$

Descomponiendo u_h en base a $(\phi_j)_{1\leq j\leq n}$ y tomando $v_h = \phi_i$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} u_h(x_j) \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$

Principios generales del Método de los Elementos Finitos

Denotando $U_h = (u_h(x_j))_{1\leq j\leq n}$, $b_h = (\int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx)_{1\leq i\leq n}$ e introduciendo la matriz de rigidez

$$K_h = (\int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx)_{1\leq i,j\leq n}$$

Por tanto, tenemos que la **formulación variacional** en V_{0h} se reduce a resolver en R^N el sistema lineal

$$K_h U_h = b_h$$

Elementos finitos triangulares

Elementos finitos en dimensiones $N \geq 2$

Definición:

Dada una malla T_h de un conjunto poliédrico abierto Ω, el método de los elementos finitos P_k, o elementos finitos triangulares de Lagrange de orden K, viene defino por el espacio discreto

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) \text{ tal que } v|_{K_i} \in P_k \text{ para todo } K_i \in T_h\}$$

Llamamos grados de libertad de una función $v \in V_h$ el conjunto de los valores de v en los nodos $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$. También definimos el subespacio V_{0h} por

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

Elementos finitos triangulares

Elementos finitos en dimensiones $N \geq 2$

Definición:

Dada una malla T_h de un conjunto poliédrico abierto Ω, el método de los elementos finitos P_k, o elementos finitos triangulares de Lagrange de orden K, viene defino por el espacio discreto

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) \text{ tal que } v|_{K_i} \in P_k \text{ para todo } K_i \in T_h\}$$

Llamamos grados de libertad de una función $v \in V_h$ el conjunto de los valores de v en los nodos $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$. También definimos el subespacio V_{0h} por

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

- k = 1, los nodos de estos grados de libertad coinciden con los vértices de la malla.

Elementos finitos triangulares

Elementos finitos en dimensiones $N \geq 2$

Definición:

Dada una malla T_h de un conjunto poliédrico abierto Ω, el método de los elementos finitos P_k, o elementos finitos triangulares de Lagrange de orden K, viene defino por el espacio discreto

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) \text{ tal que } v|_{K_i} \in P_k \text{ para todo } K_i \in T_h\}$$

Llamamos grados de libertad de una función $v \in V_h$ el conjunto de los valores de v en los nodos $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$. También definimos el subespacio V_{0h} por

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tal que } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

- k = 1, los nodos de estos grados de libertad coinciden con los vértices de la malla.
- k = 2, estos nodos se componen de los vértices de la malla y de los puntos medios de los lados que unen dos vértices.

Método de las características

Problema de Cauchy

Consiste en encontrar una función

$$u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \longmapsto \Omega$$

que sea solución de la ecuación

$$u_t(x,t) + f(q(x,t))_x = 0$$

y que verifique la condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}$$

donde $u_0 : \mathbb{R} \longmapsto \Omega$ es una función dada.

Método de las Características

Definición. Una función $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \longmapsto \Omega$ es una solución clásica del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(x,t) + f(u(x,t))_x = 0 & (x,t) \in R \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

si u es una función de clase C^1 que verifica el problema anterior puntualmente.

Método de las Características

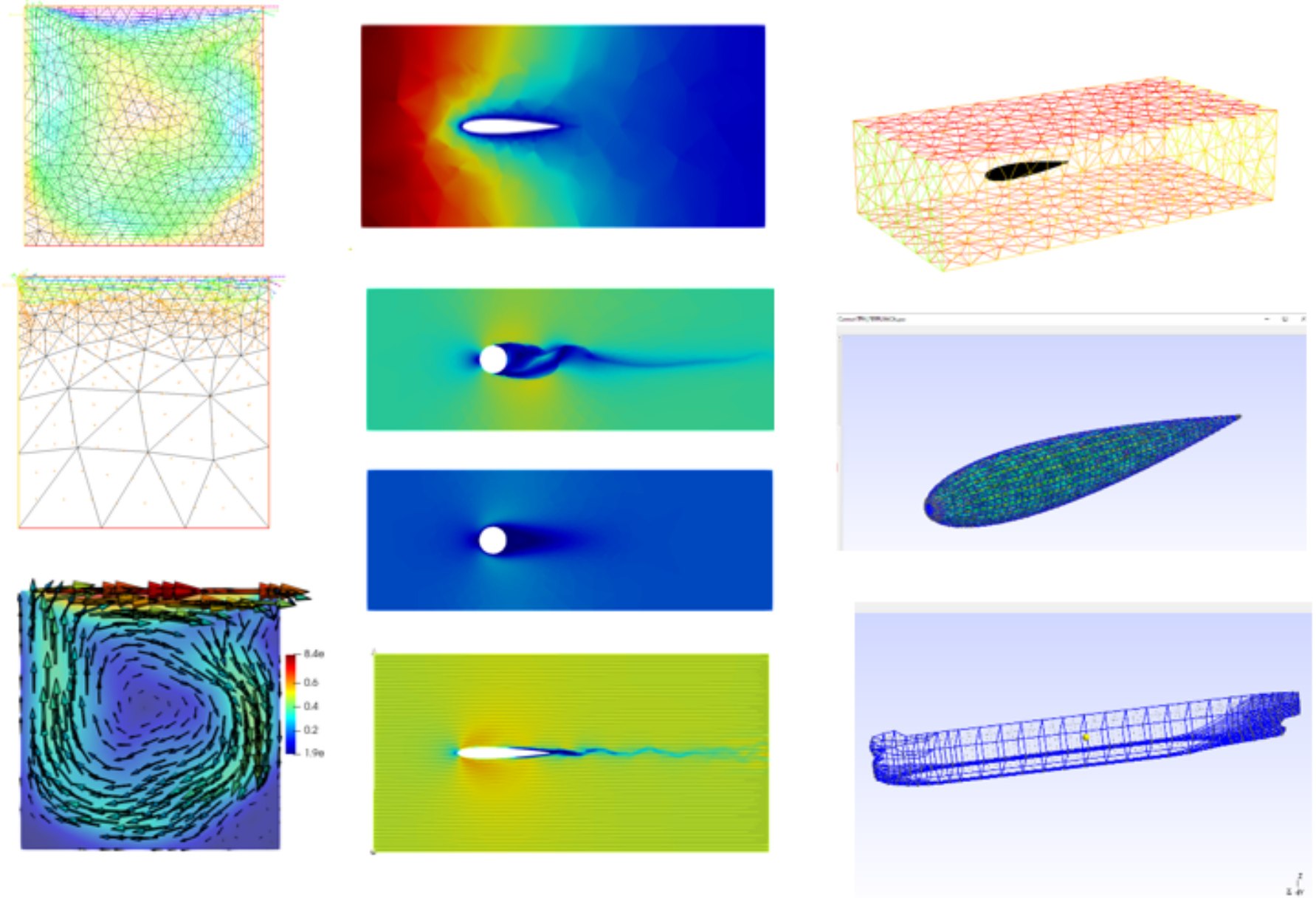
Definición. Sea $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ una solución clásica. Definimos las curvas características en $\mathbb{R} \times [0, T]$ como las curvas $t \mapsto (X(t), t)$ dadas por la ecuación diferencial

$$\frac{dX(t)}{dt} = f'(u(X(t), t))$$

La principal particularidad de estas curvas características es que la solución u, denominada variable característica, es constante a lo largo de ellas,por ser u solución de

$$u_t(x, t) + f(q(x, t))_x = 0$$

Ensayos numéricos



Ensayos numéricos

Programas

Ensayos numéricos

FREEFEM — **FreeFEM**

PROGRAMAS

Ensayos numéricos

PROGRAMAS

FREEFEM — **FreeFEM**

ATOM —

Ensayos numéricos

- Programas
  - Freefem — FreeFEM
  - Atom — ATOM
  - Paraview — ParaView

Ensayos numéricos

- Programas
  - Freefem — FreeFEM
  - Atom — ATOM
  - Paraview — ParaView
  - Gmsh — gmsh

Ensayos numéricos

- Programas
  - Freefem — FreeFEM
  - Atom — ATOM
  - Paraview — ParaView
  - Gmsh — gmsh
  - Python — python

Experimento. Ecuaciones de Stokes estacionarias

Problema (test de la cavidad): hallar el campo de velocidades $\vec{\mathbf{u}} = (u, v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ y la función presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ -\nu\Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ \partial_x u + \partial_y v & = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

junto con las siguientes condiciones de contorno

$$u = 1, v = 0 \text{ en la pared superior de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega.$$

Experimento. Ecuaciones de Stokes estacionarias

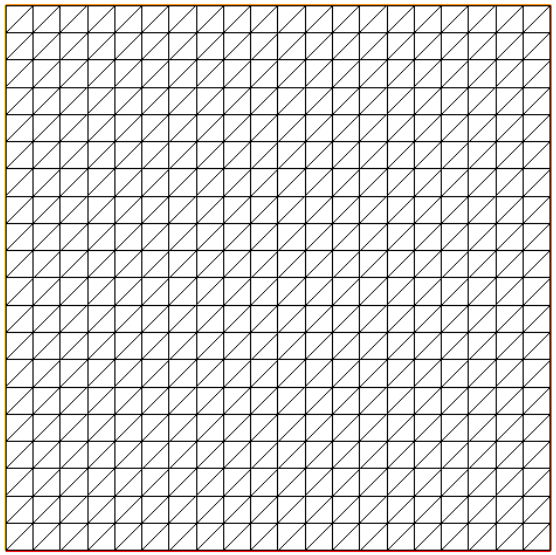


Figura: Malla.

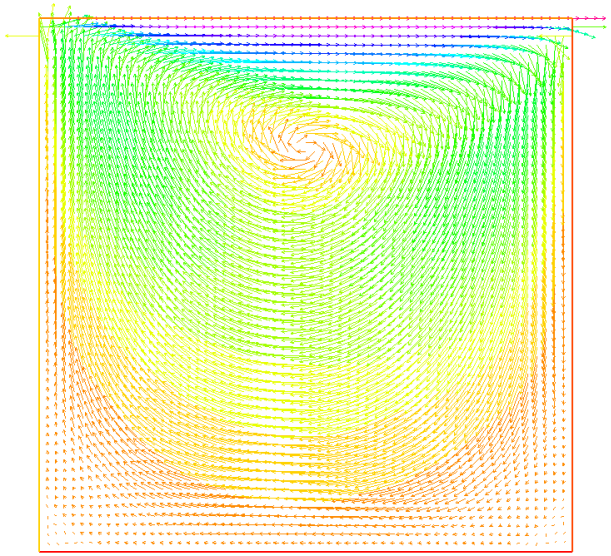


Figura: Campo de velocidades.

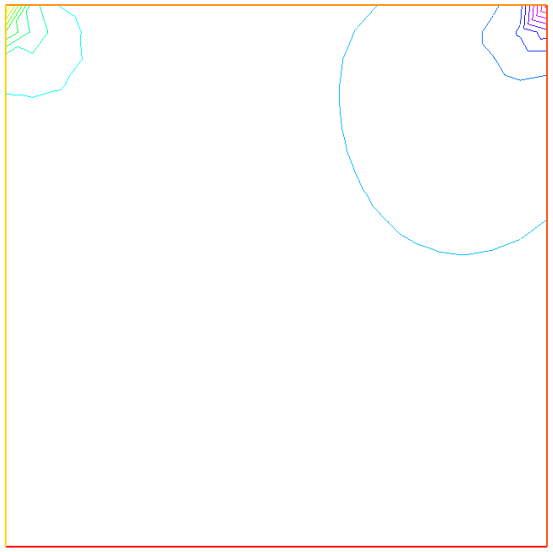


Figura: Campo de presiones.

Experimento. Ecuaciones de Stokes evolutivas

Problema: hallar el campo de velocidades $\vec{\mathbf{u}} = (u, v) : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^2$, donde $T > 0$ es el instante final de tiempo, y la función presión $p : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ v_t - \nu \Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ \quad \partial_x u + \partial_y v & = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

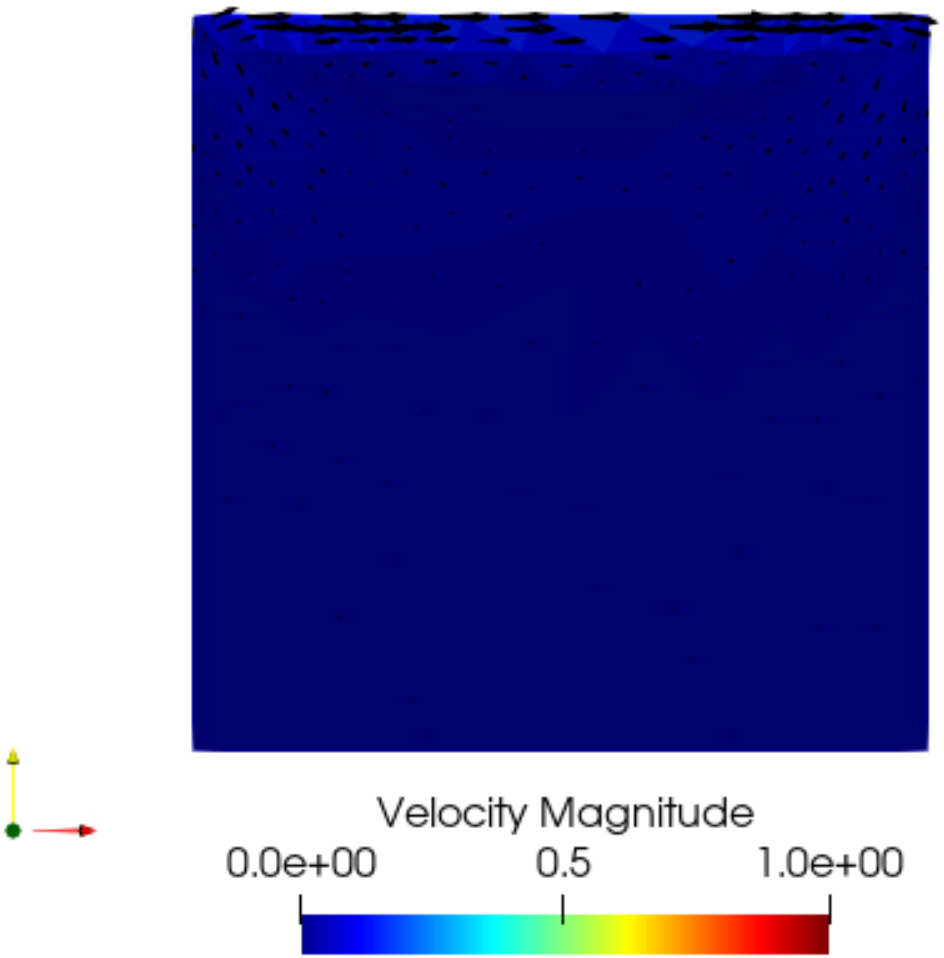
junto con las condiciones de contorno

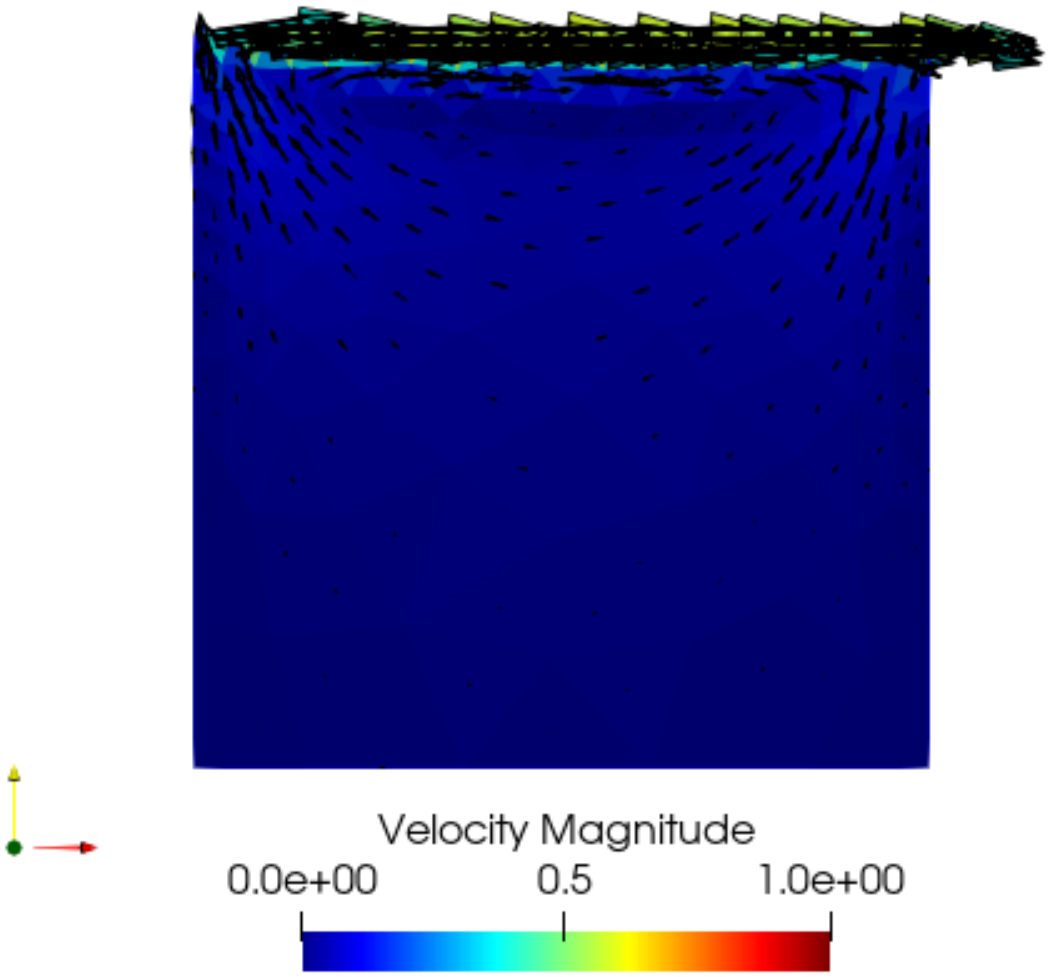
$$u = g(x, t), v = 0 \text{ en la pared superior de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega$$

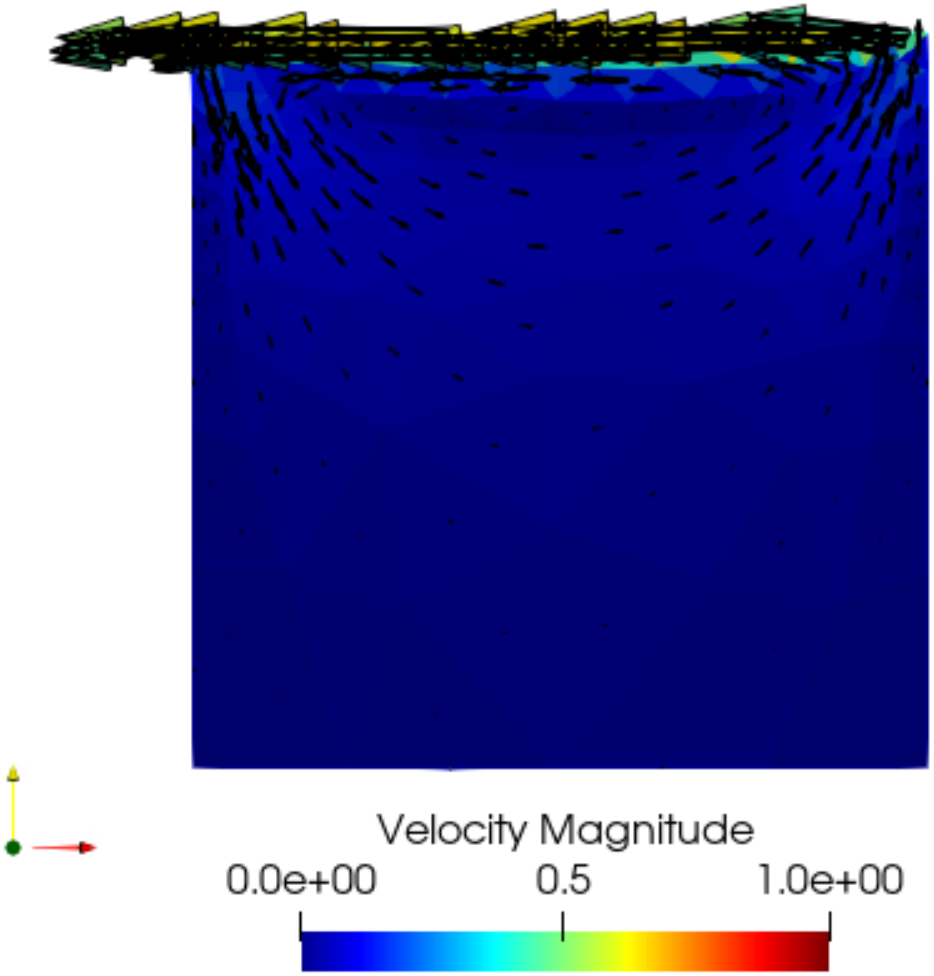
Y las condiciones iniciales

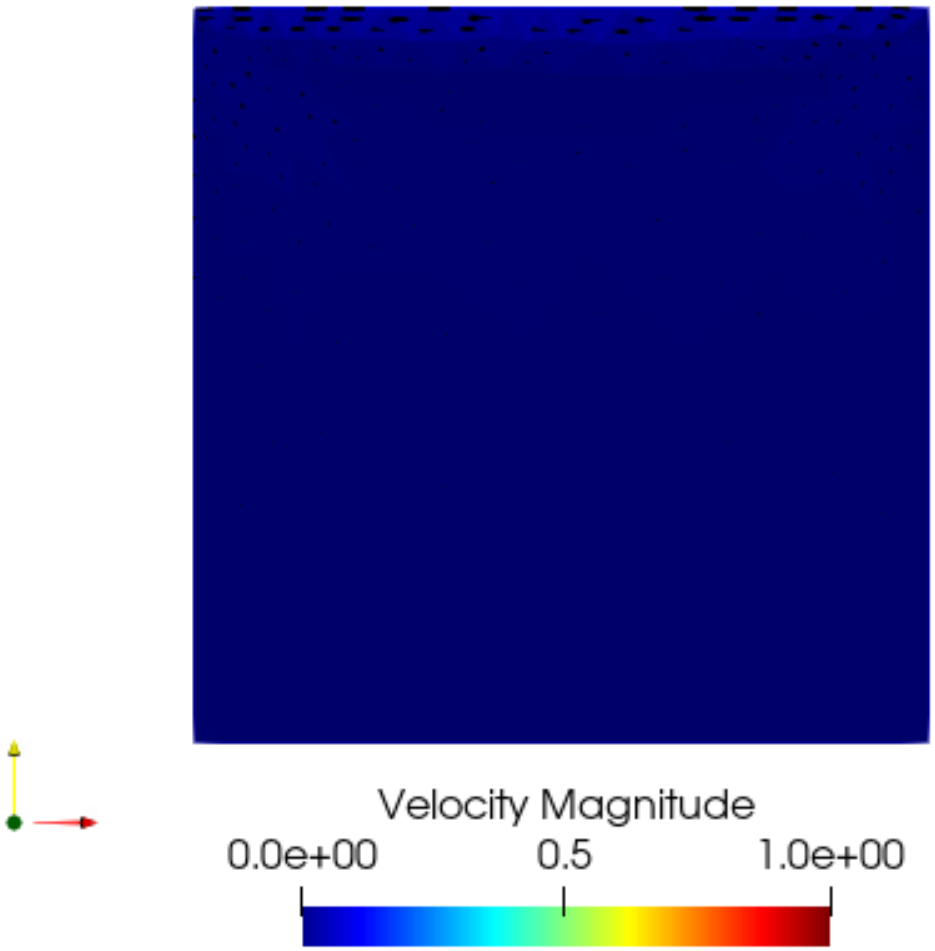
$$u(0) = 0,$$
$$v(0) = 0$$

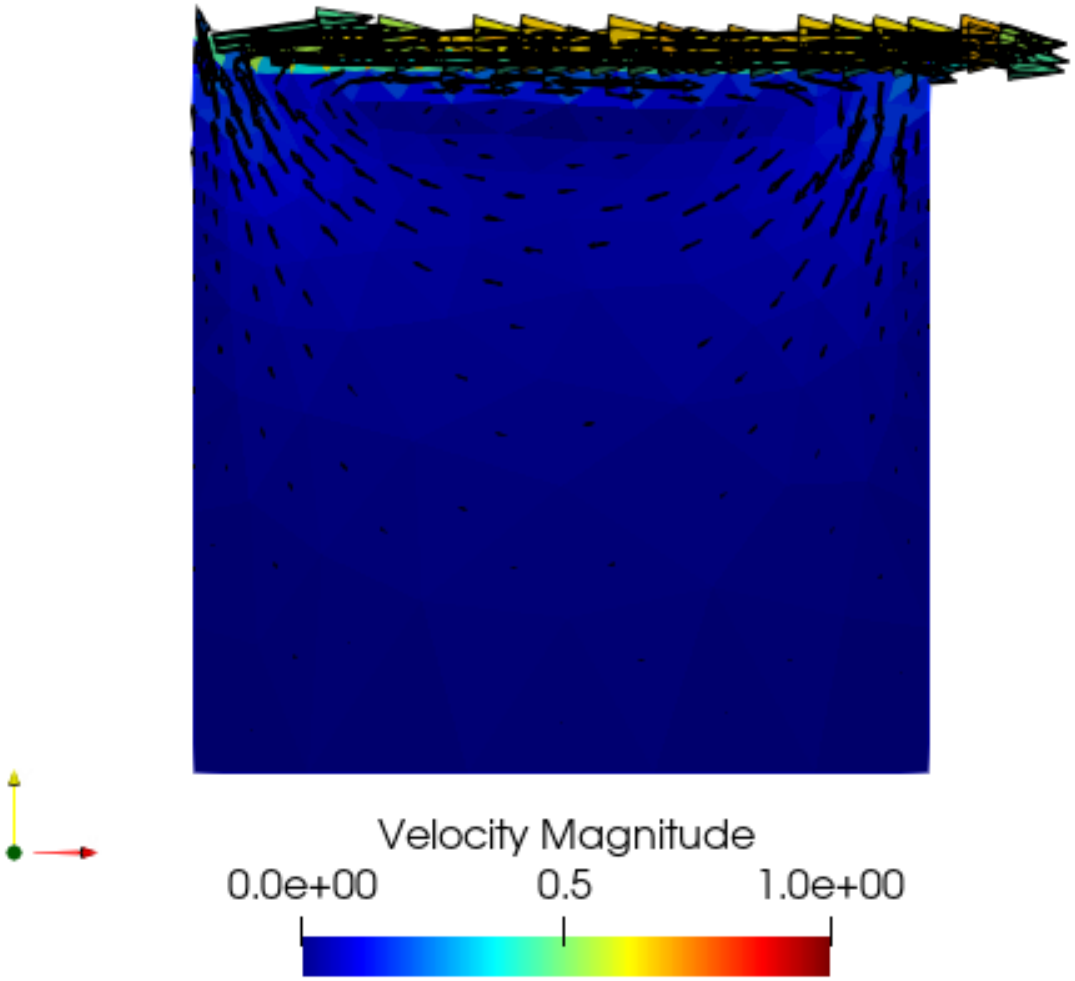
Ecuaciones de Stokes evolutivas

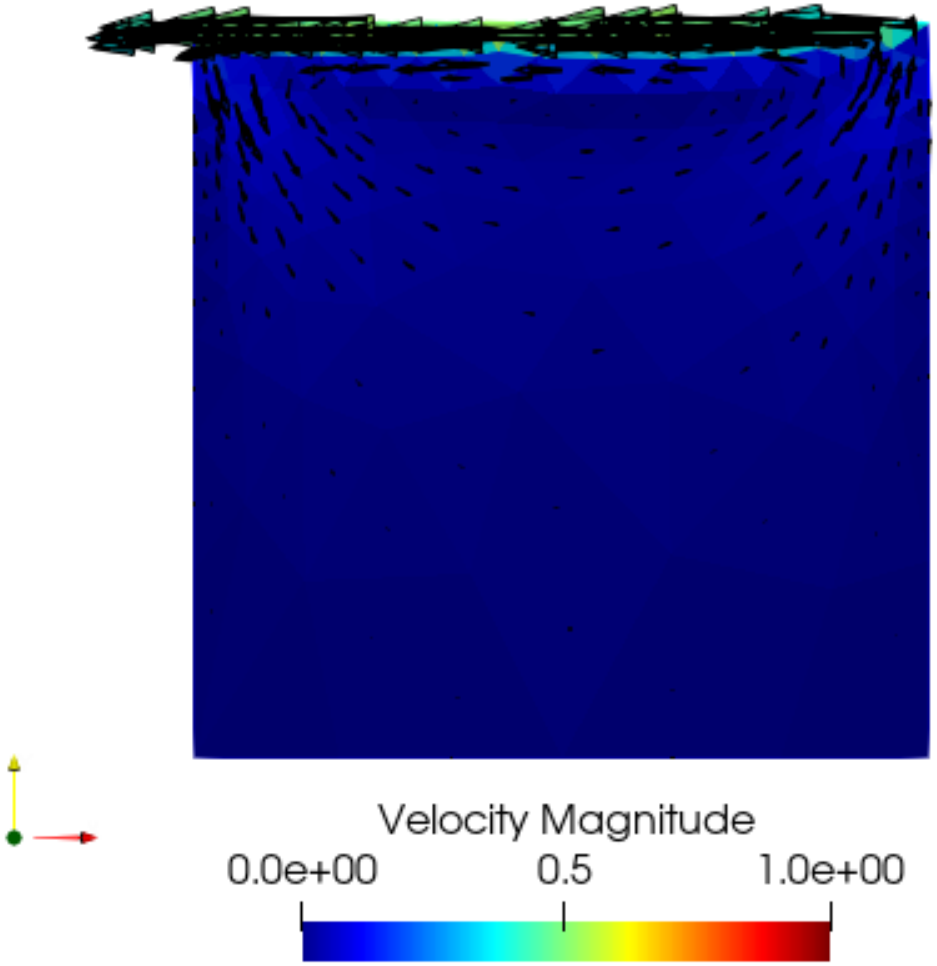

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

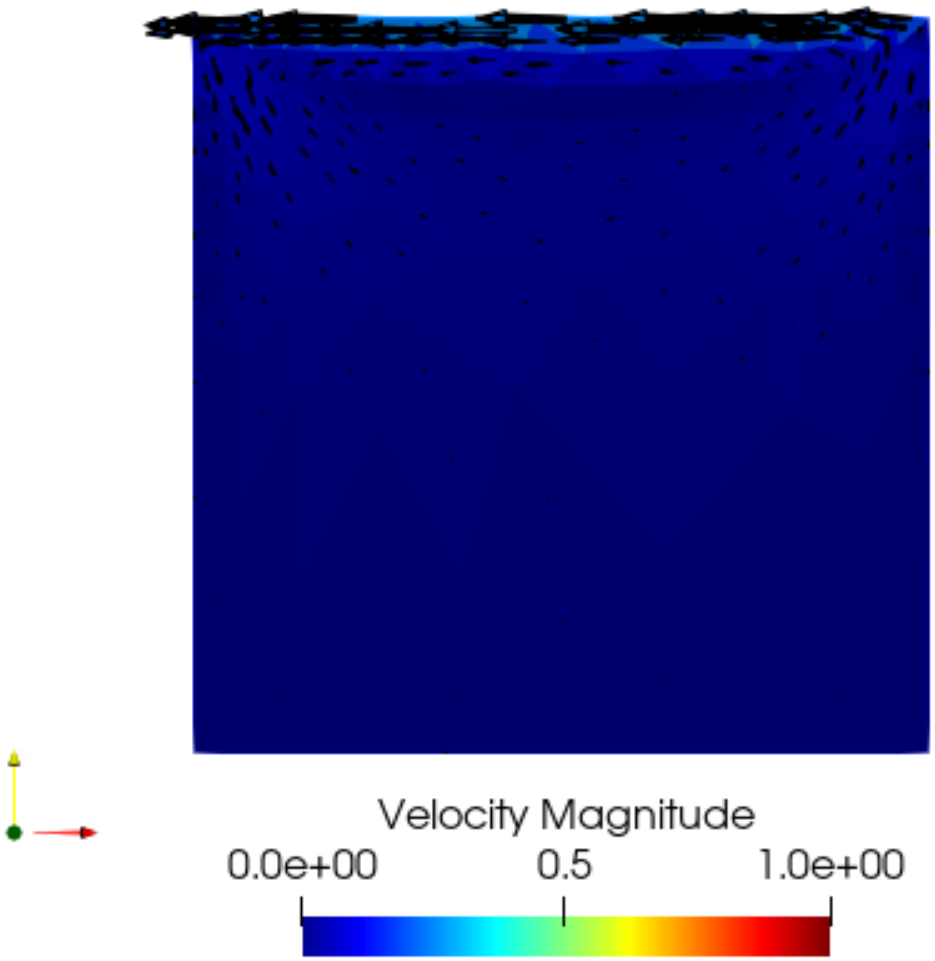

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

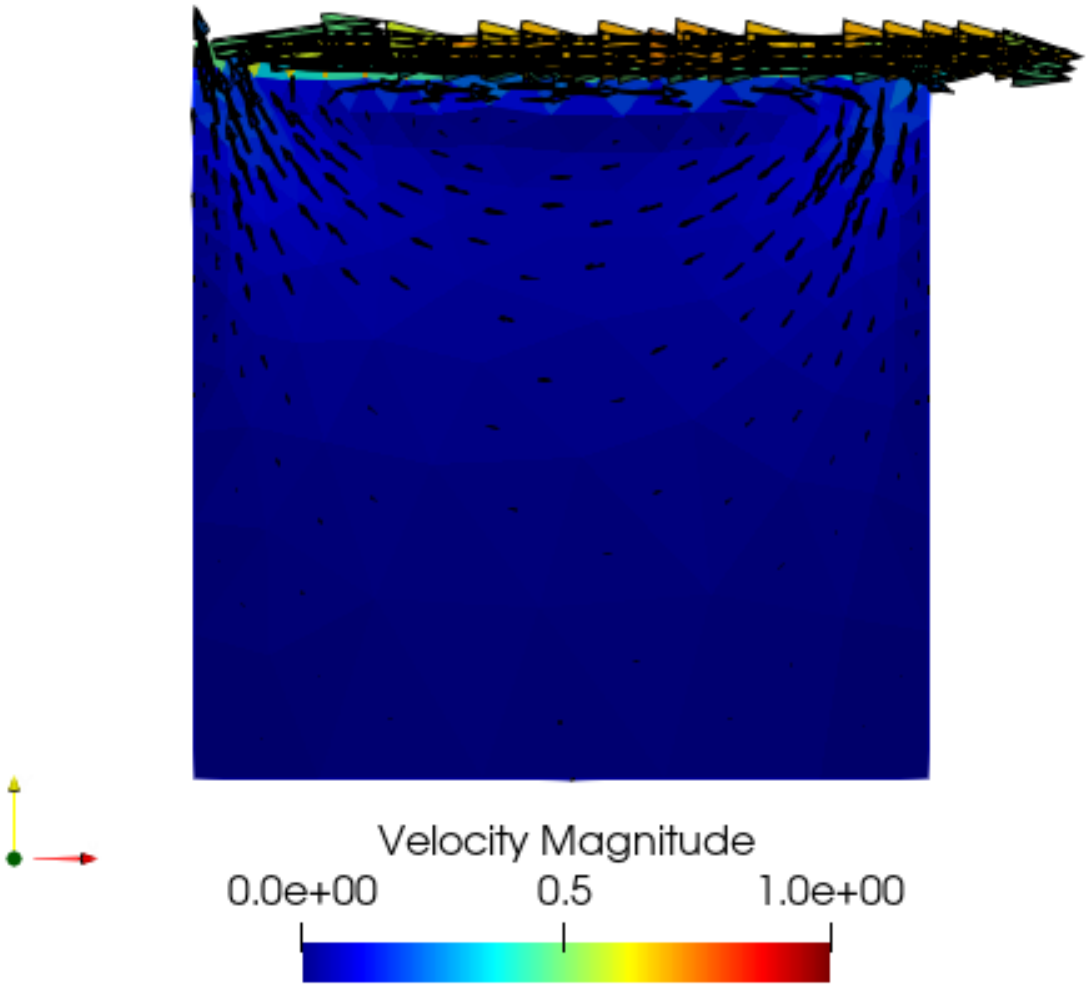

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

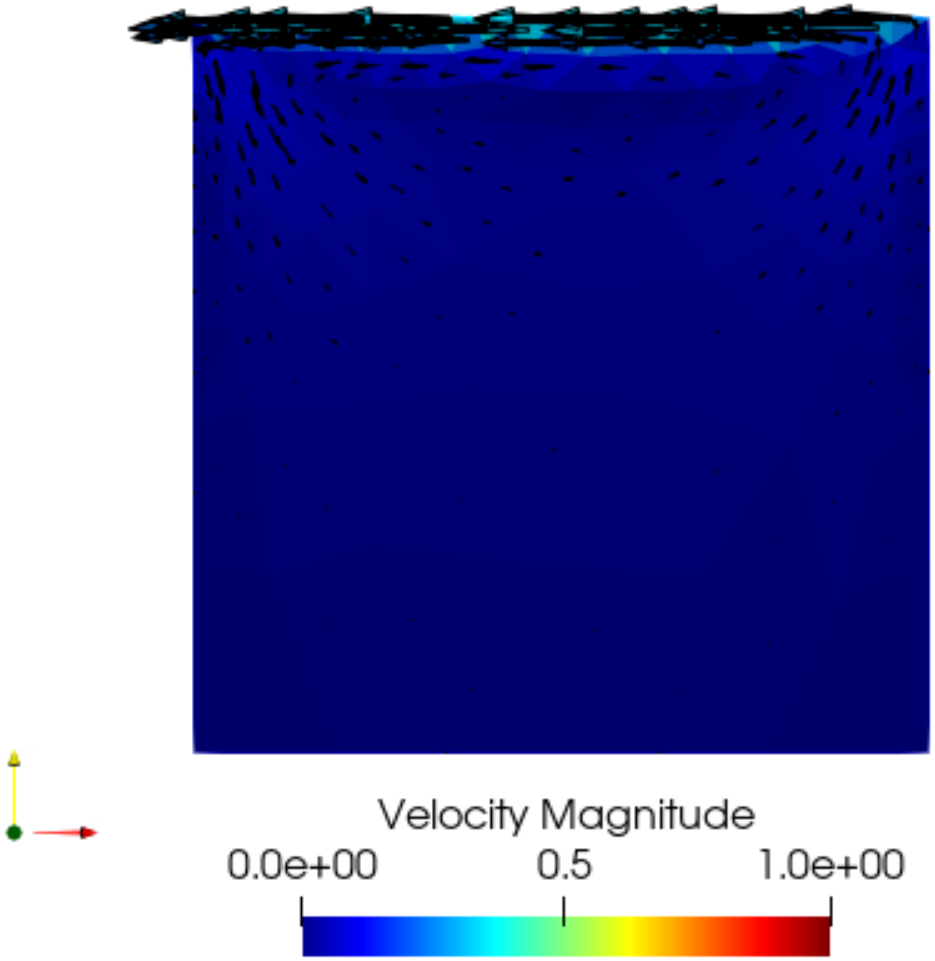

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

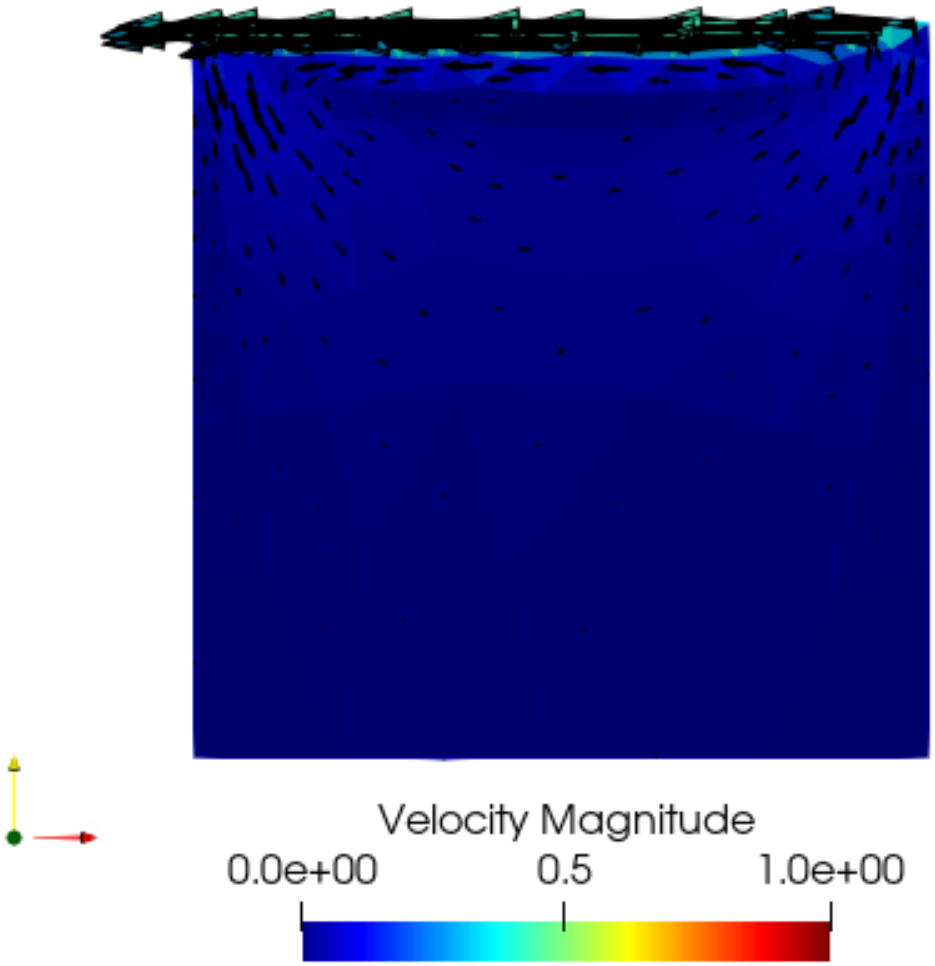

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes

Problema: hallar el campo de velocidades $\vec{\mathbf{u}} = (u, v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ y la función presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_t + (\mathbf{u}\nabla)u - \nu\Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ v_t + (\mathbf{u}\nabla)v - \nu\Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ \partial_x u + \partial_y v & = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

junto con las condiciones de contorno:

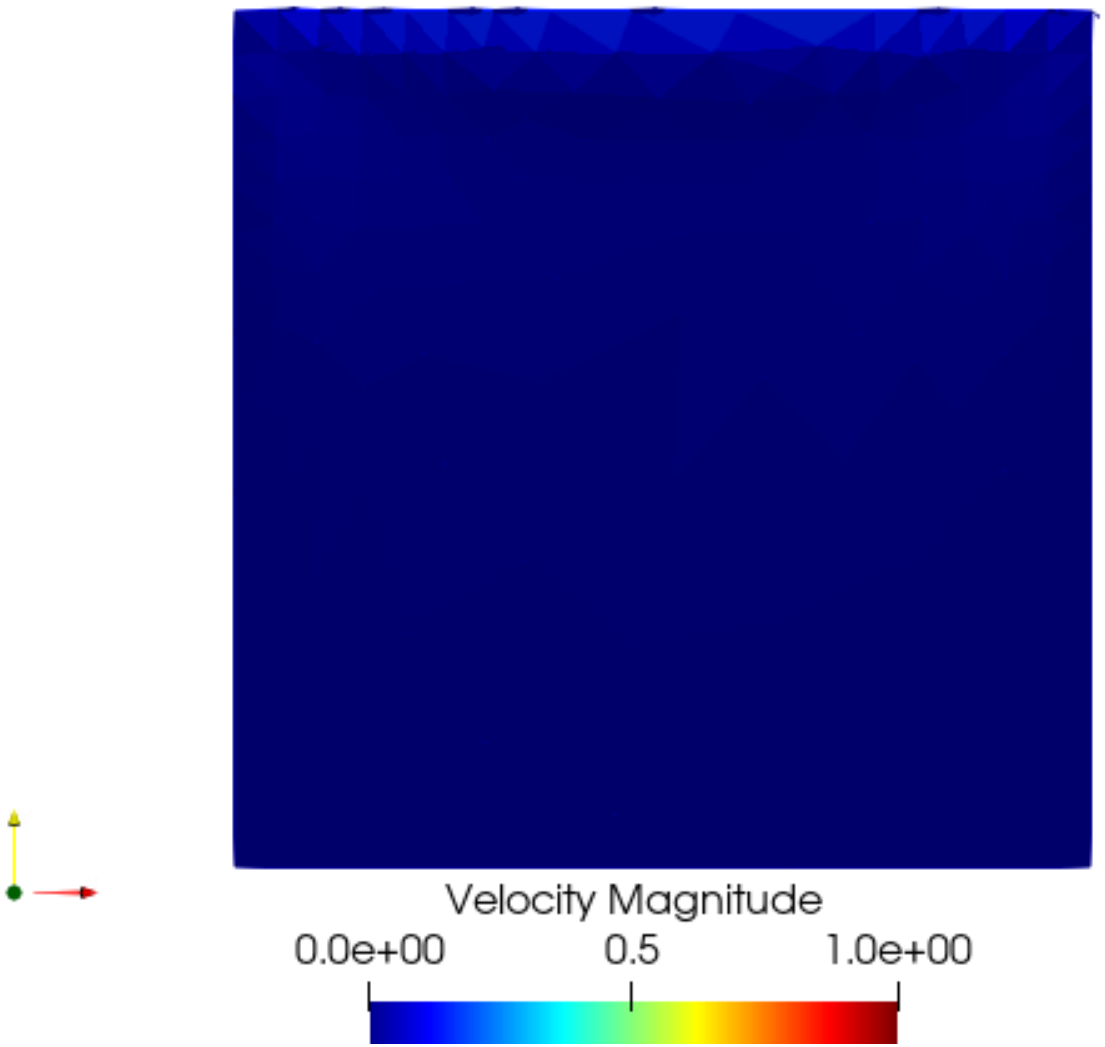
$$u = g(x, t), v = 0 \text{ en la pared superior de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega$$

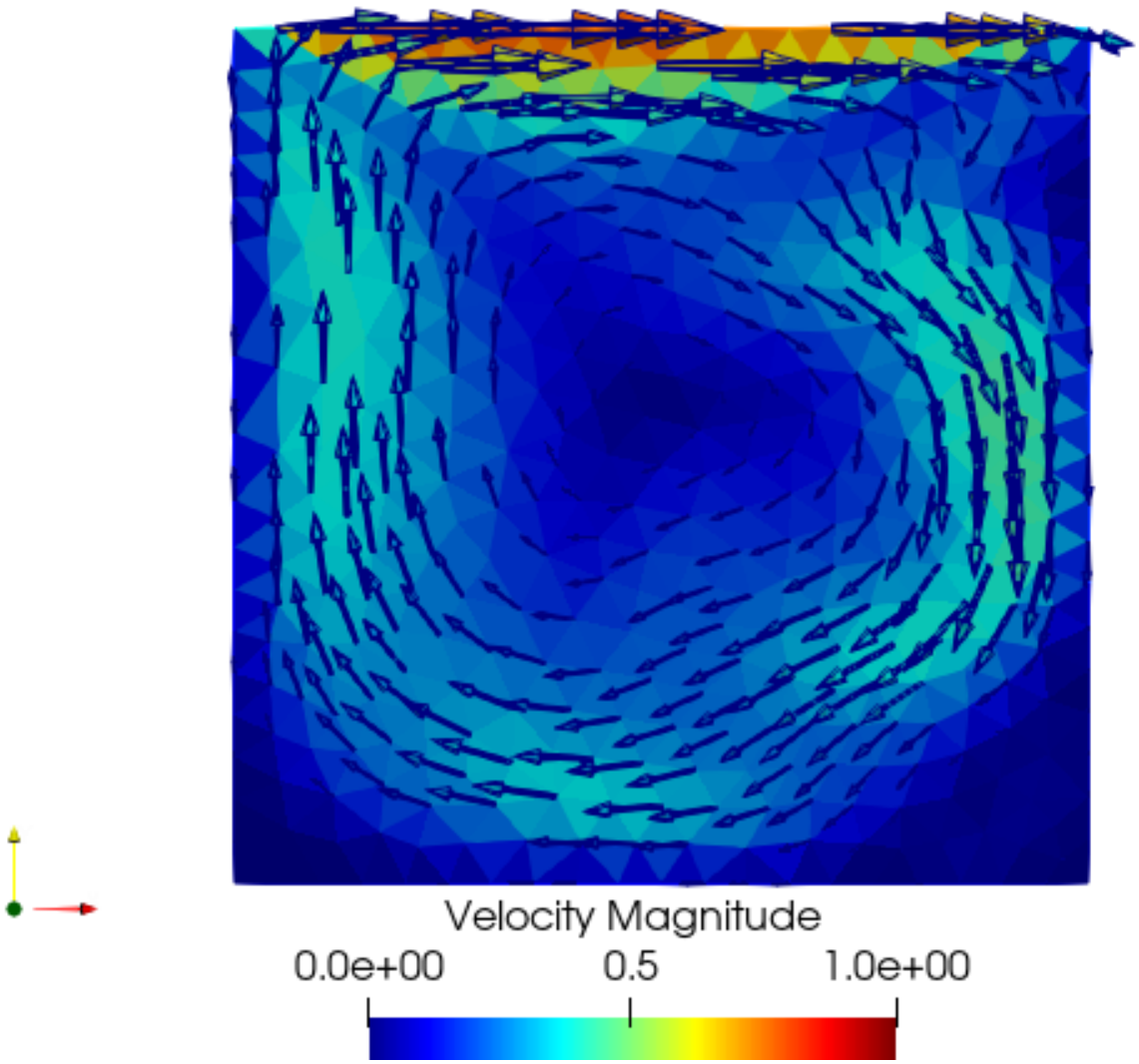
Y las condiciones iniciales

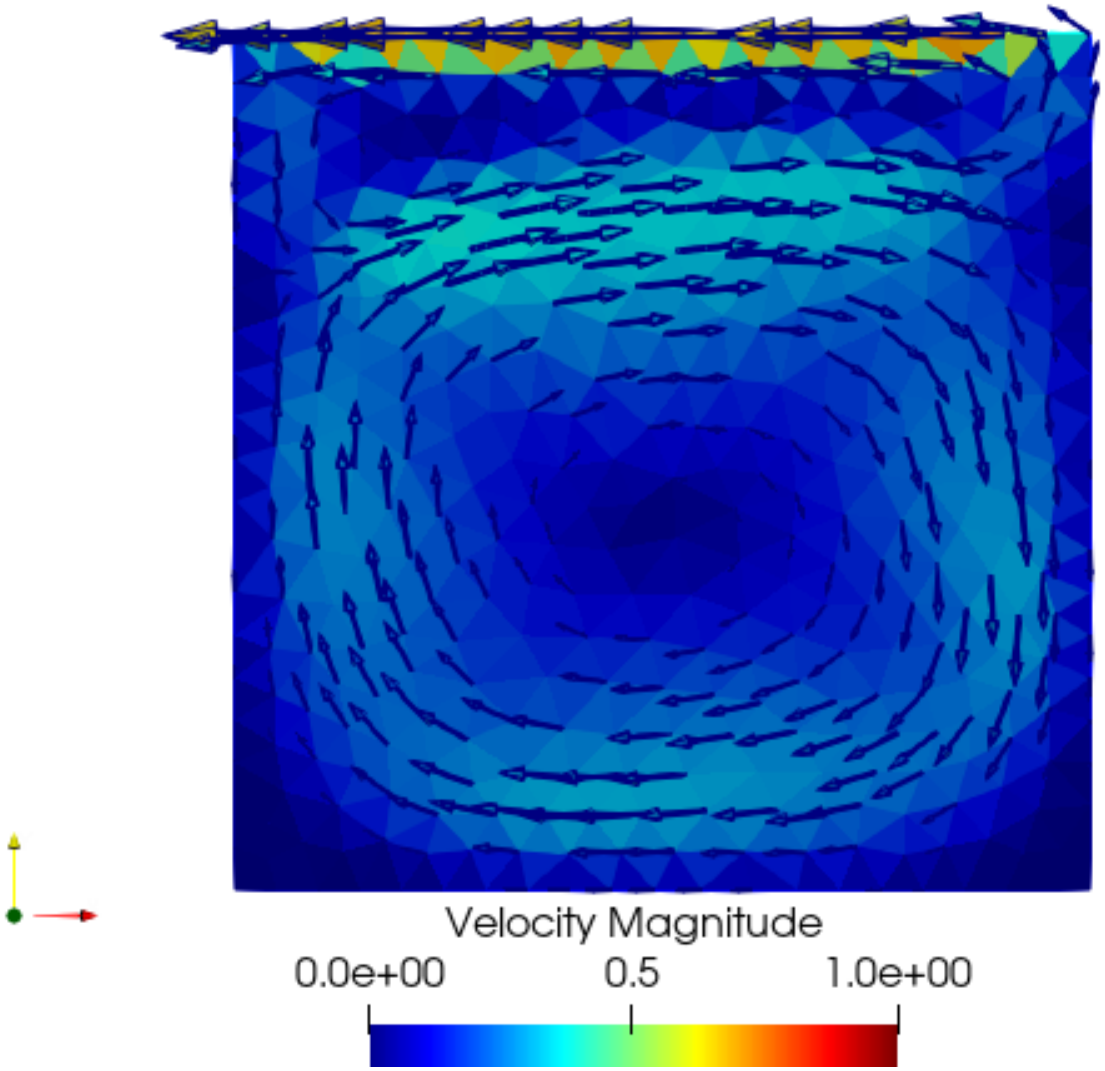
$$u(0) = 0,$$
$$v(0) = 0$$

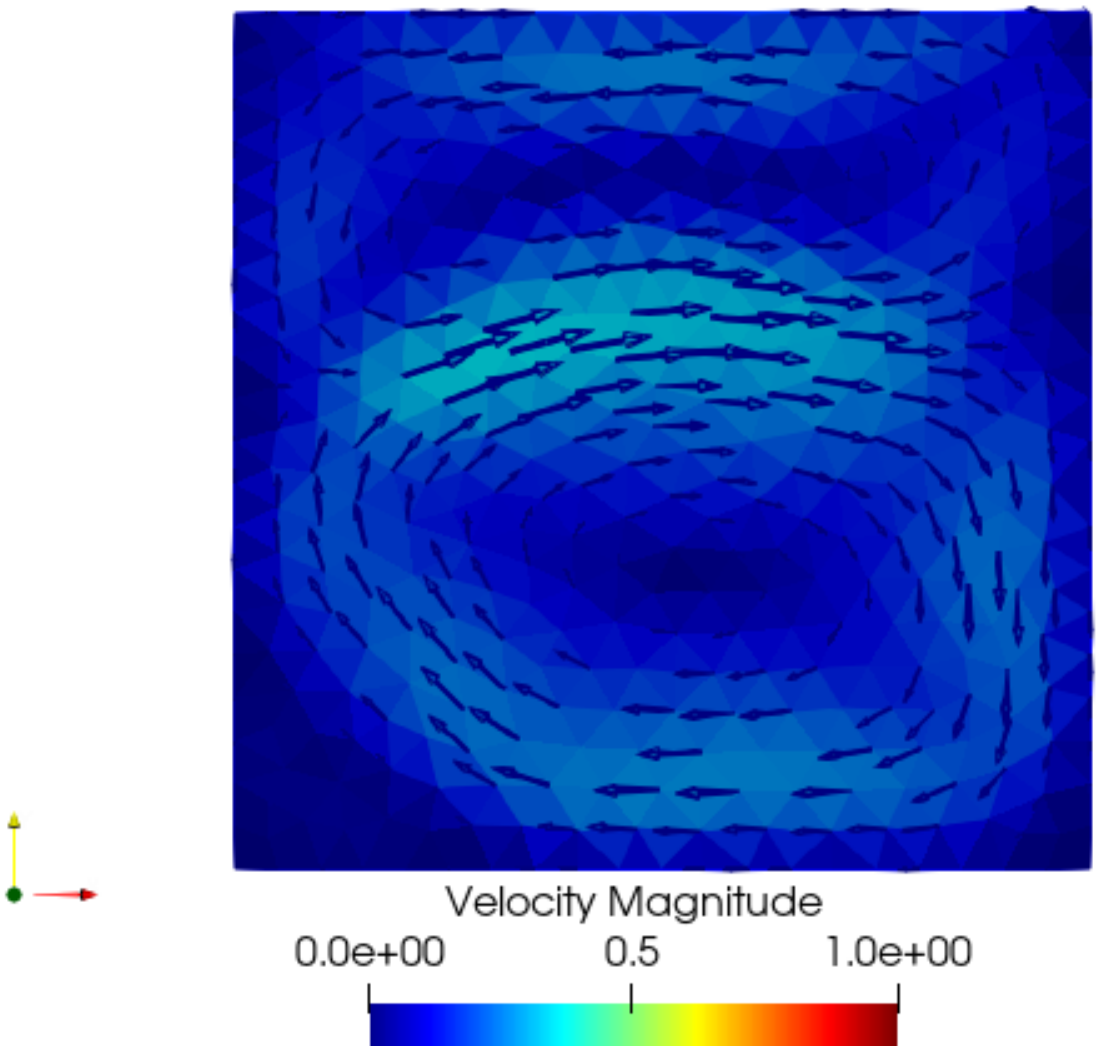
Al igual que en el experimento anterior, $g(x, t) = \sin(0{,}1 \cdot t)$.

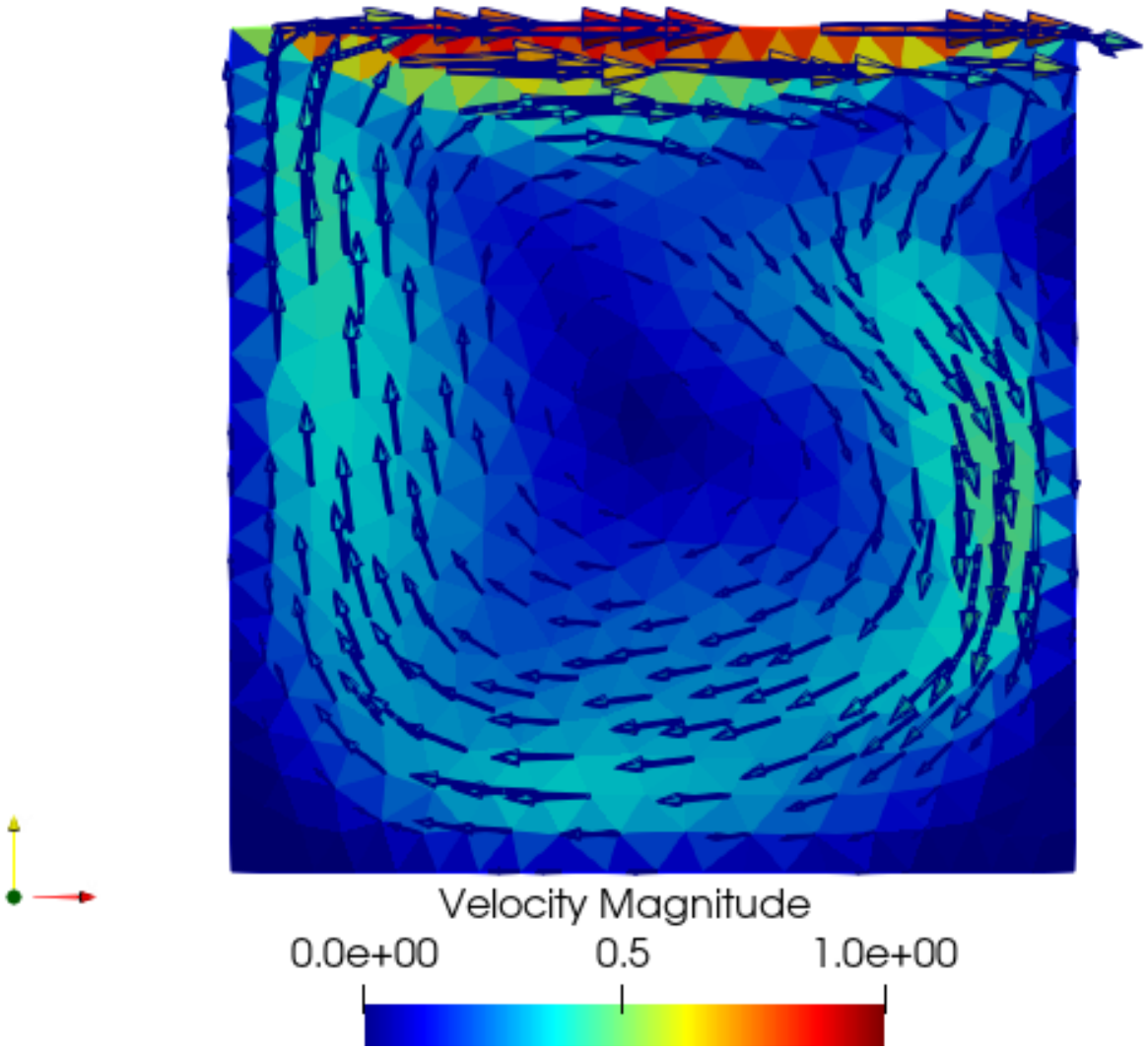
Ecuaciones de Navier-Stokes

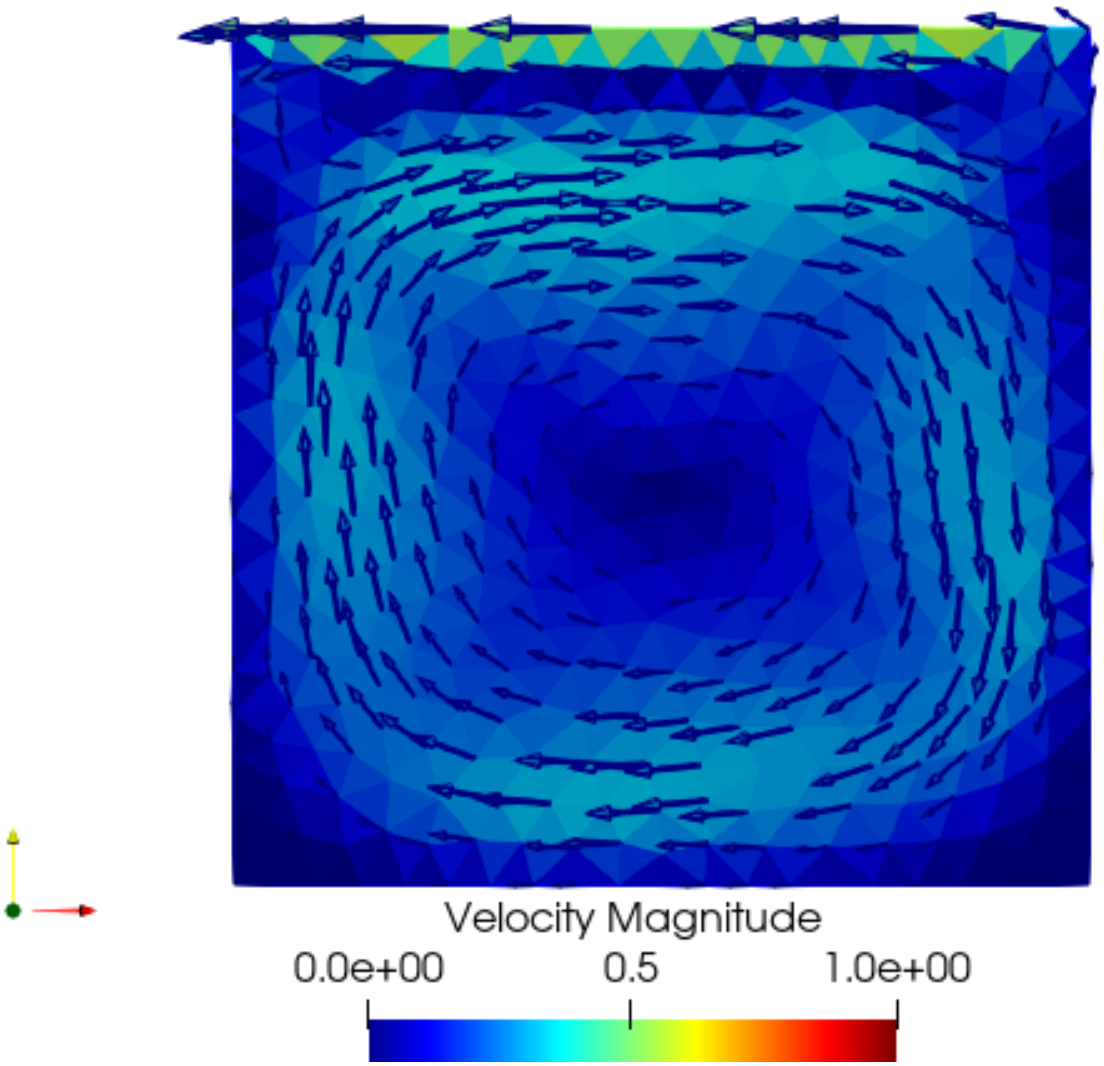

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

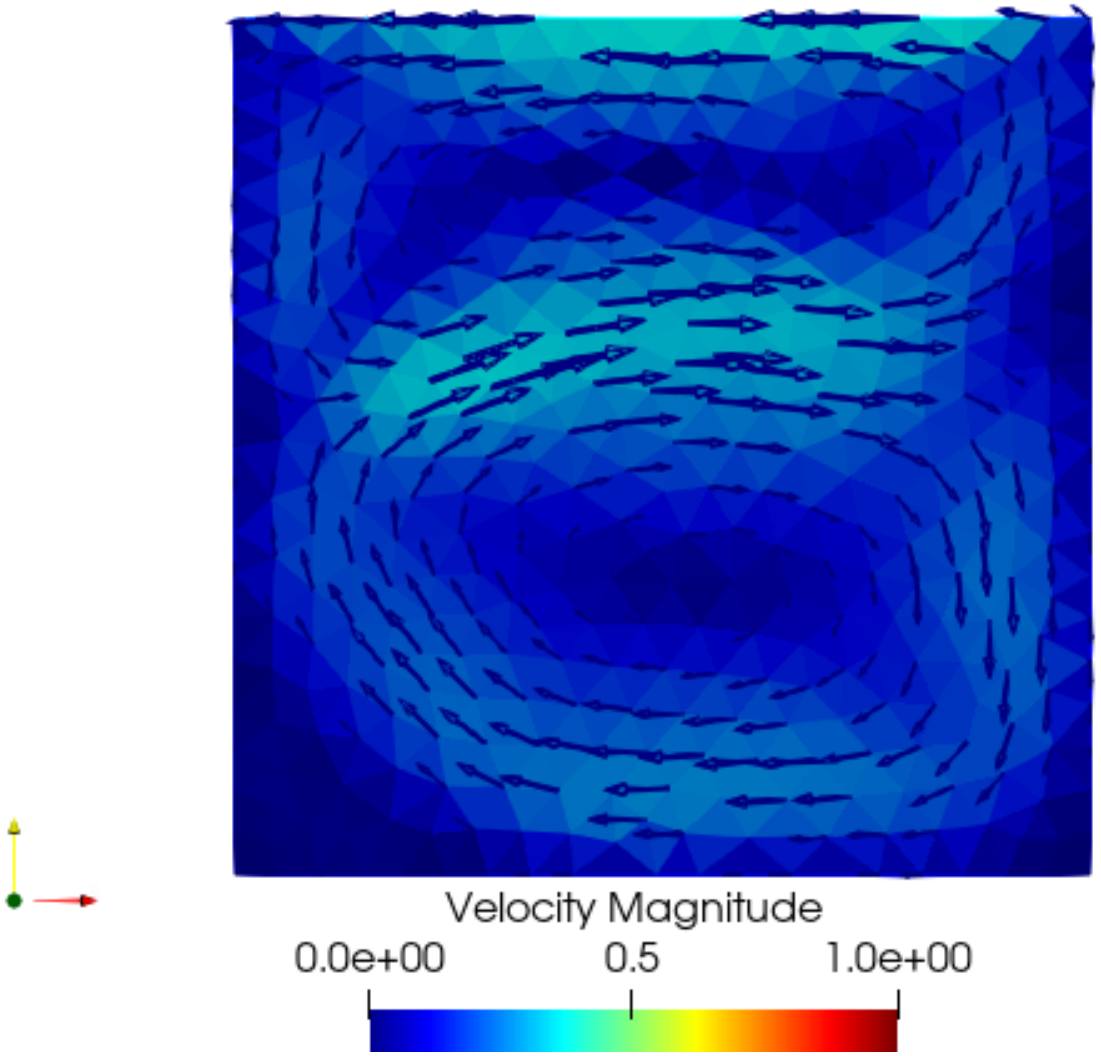

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

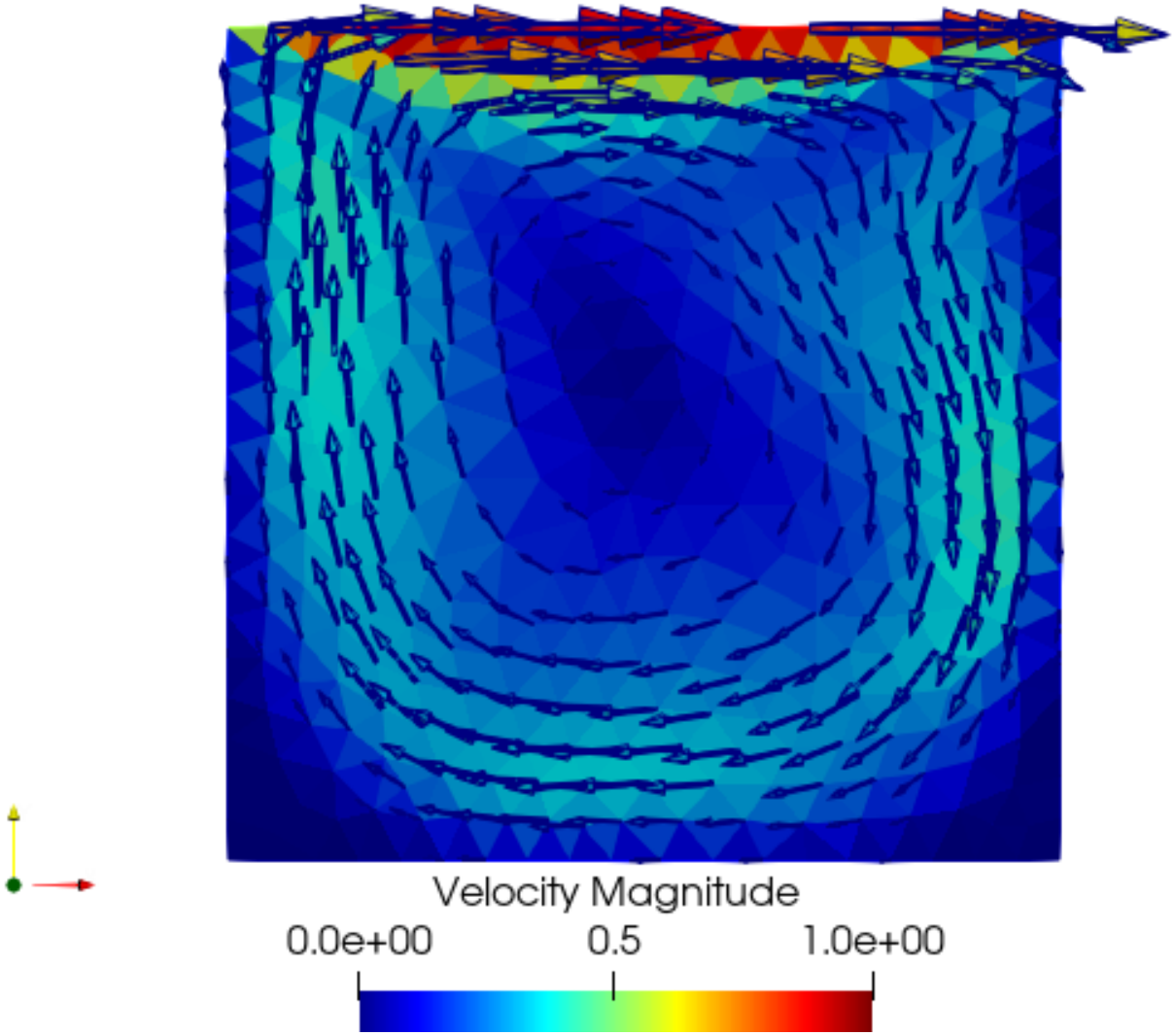

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

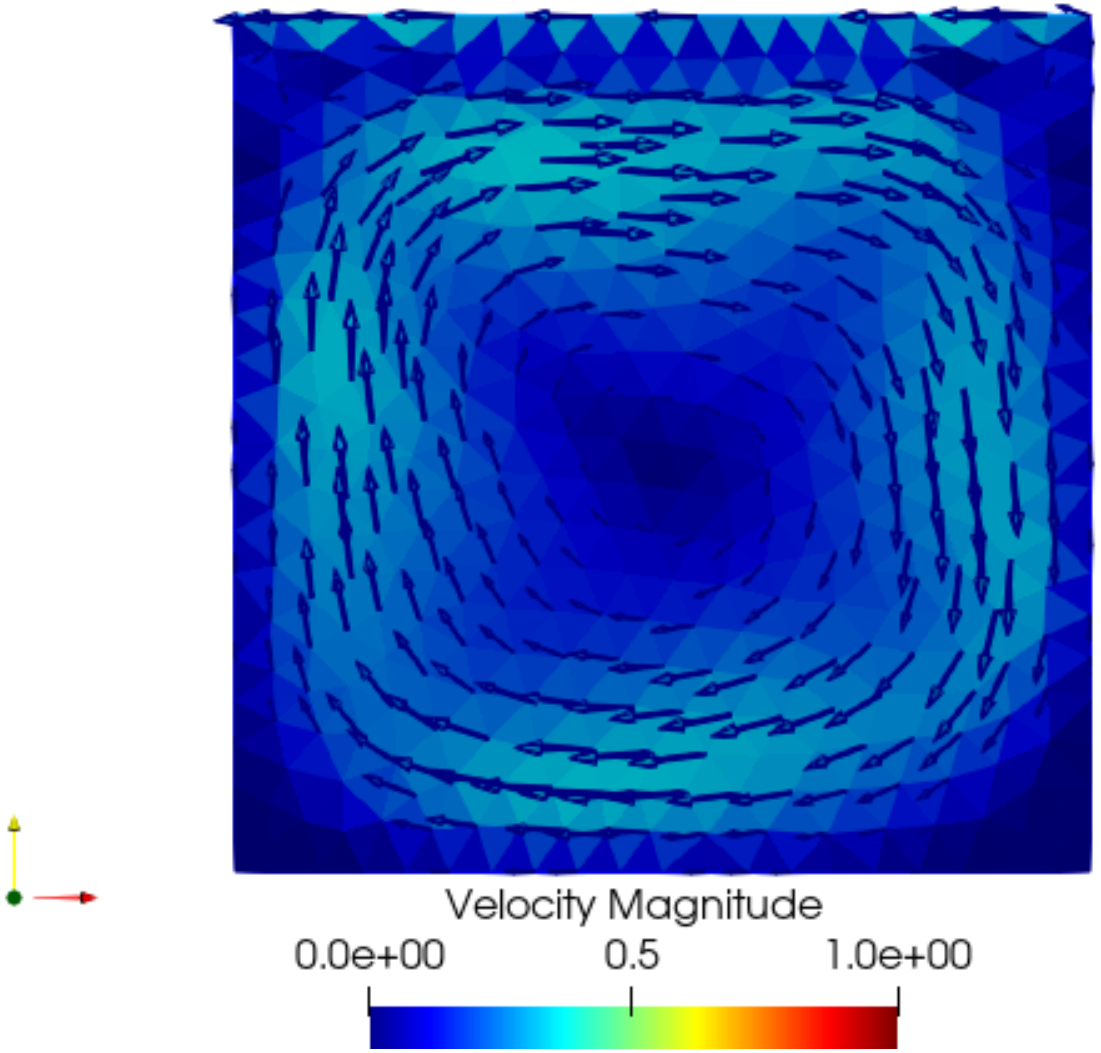

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

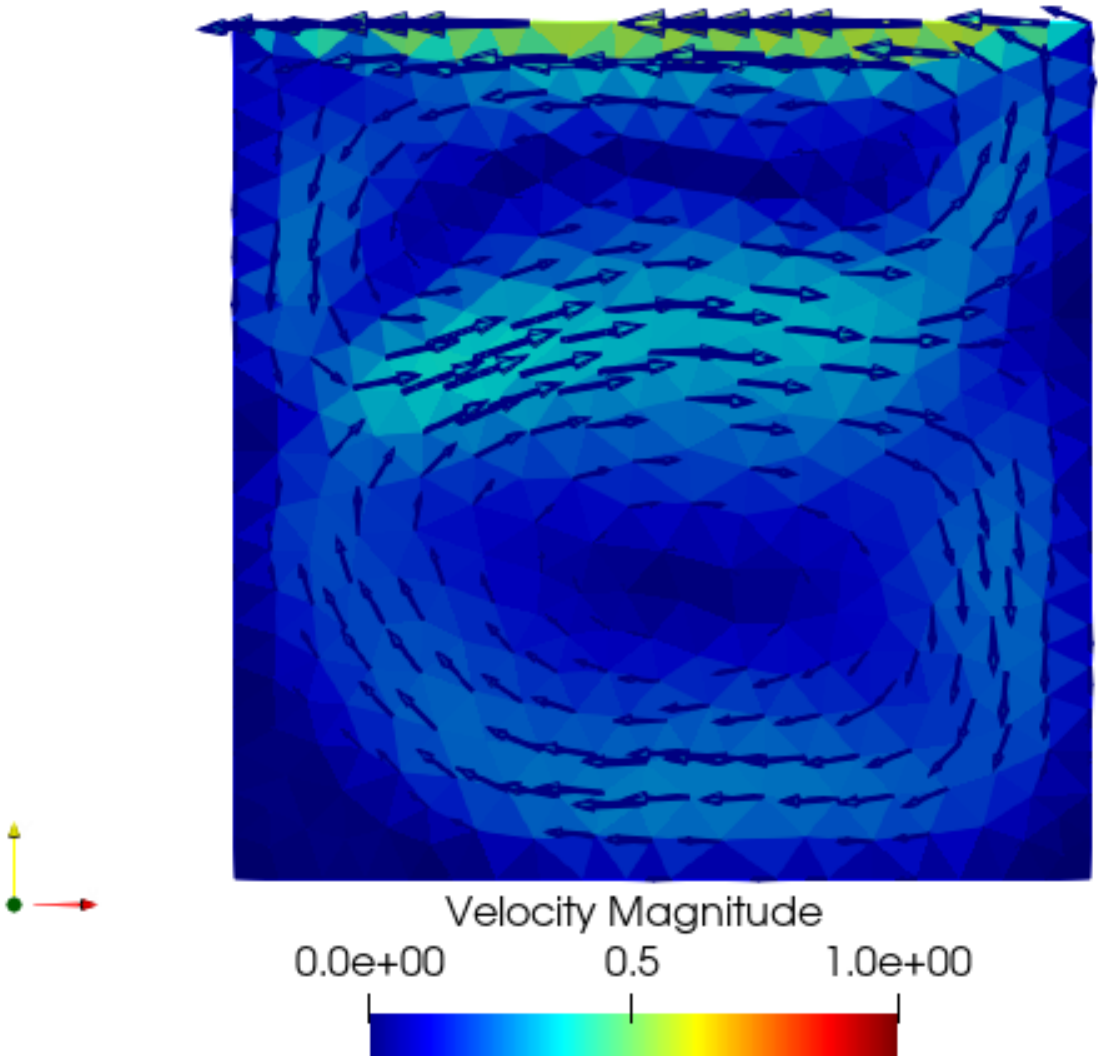

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes. Circunferencia

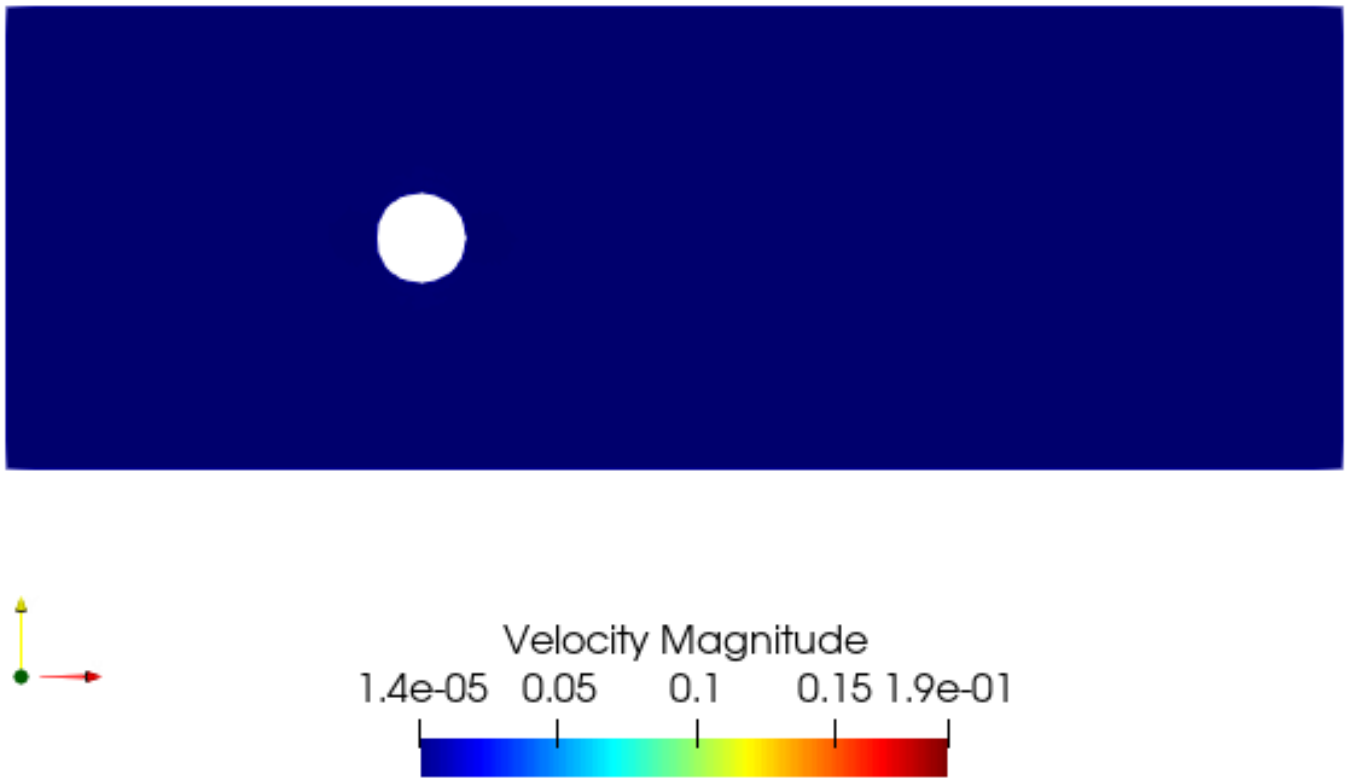
Estudiaremos lo que sucede alrededor de una circunferencia cuando son aplicadas las ecuaciones de Navier-Stokes junto con las condiciones de contorno:

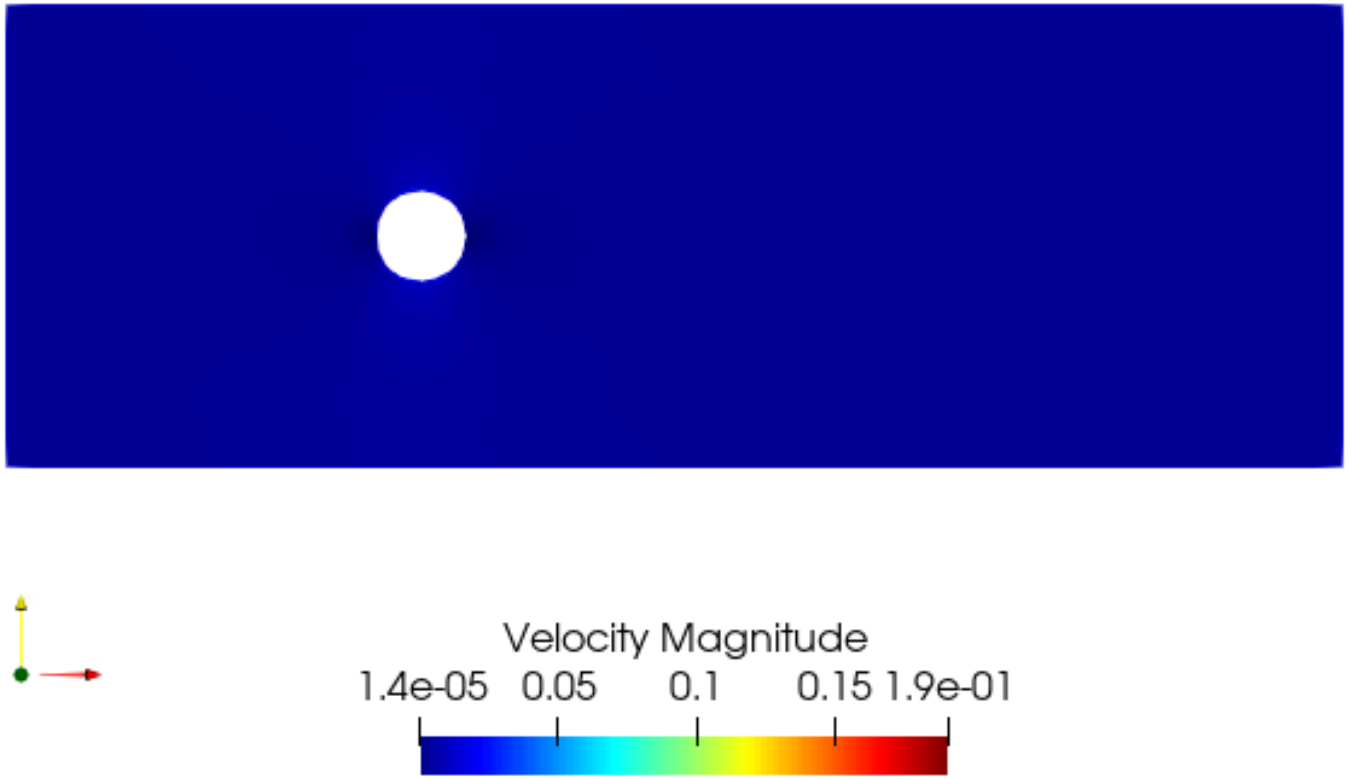
$$\begin{aligned} u = g(x,t), v = 0 \text{ en la pared izquierda de } \Omega, \\ u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega, \\ u = 0, v = 0 \text{ en la frontera del cilindro.} \end{aligned}$$

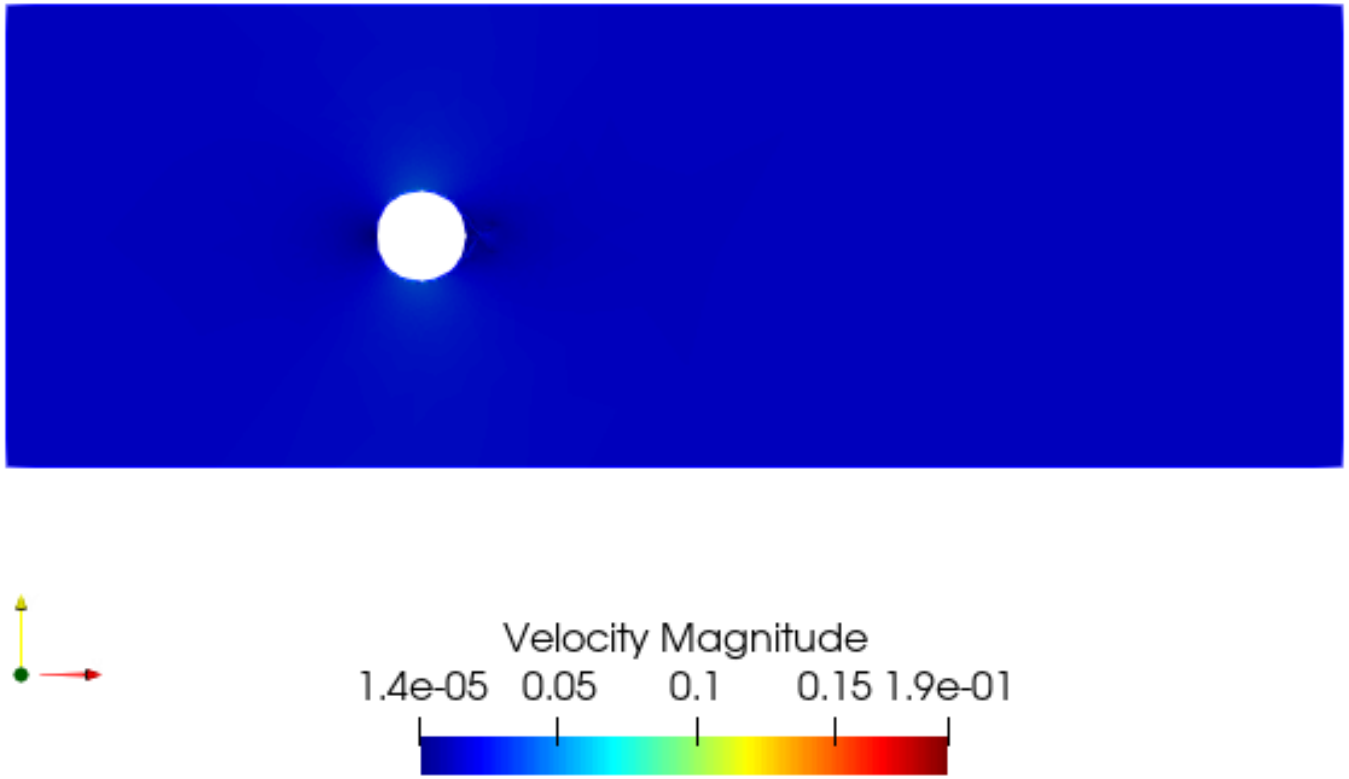
donde $g(x,t) = 0{,}1\dfrac{t - T_0}{T_1 - T_0}$.
Y las condiciones iniciales

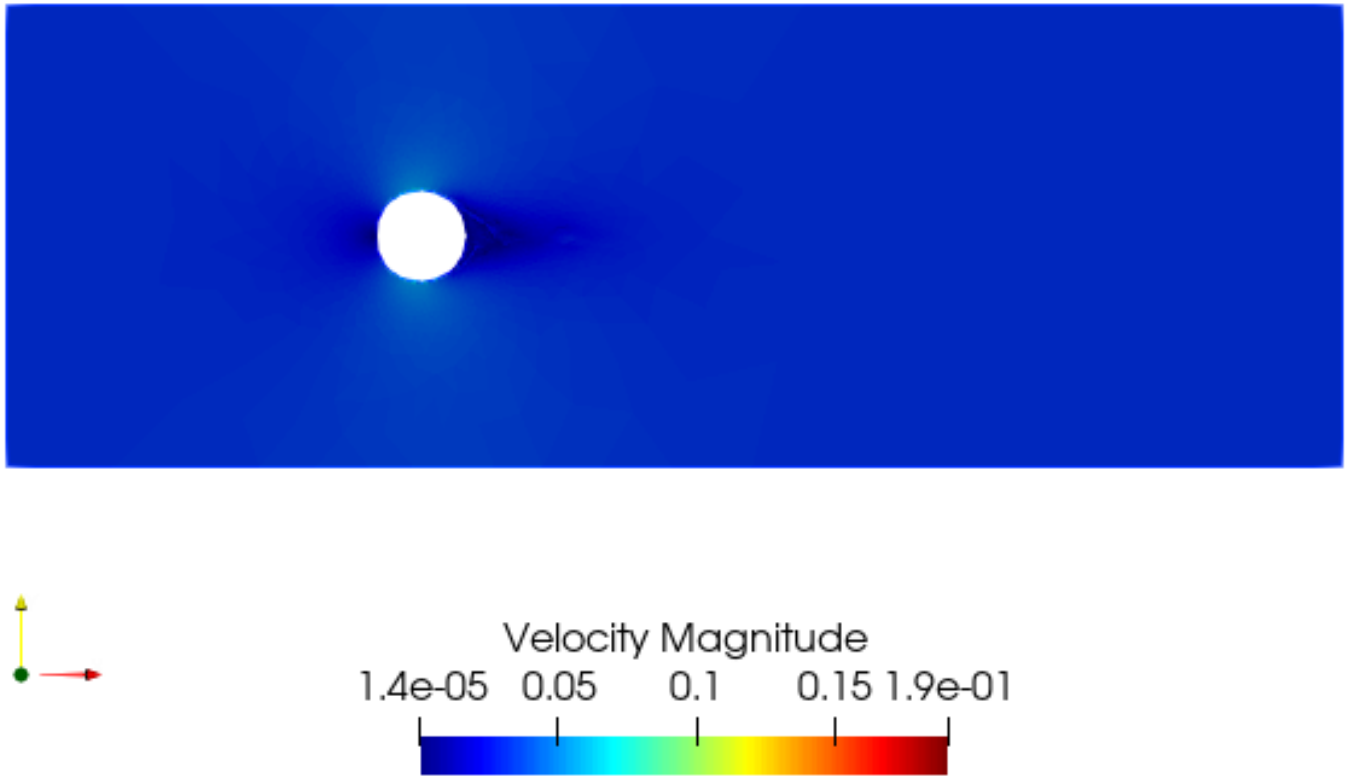
$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ v(0) &= 0. \end{aligned}$$

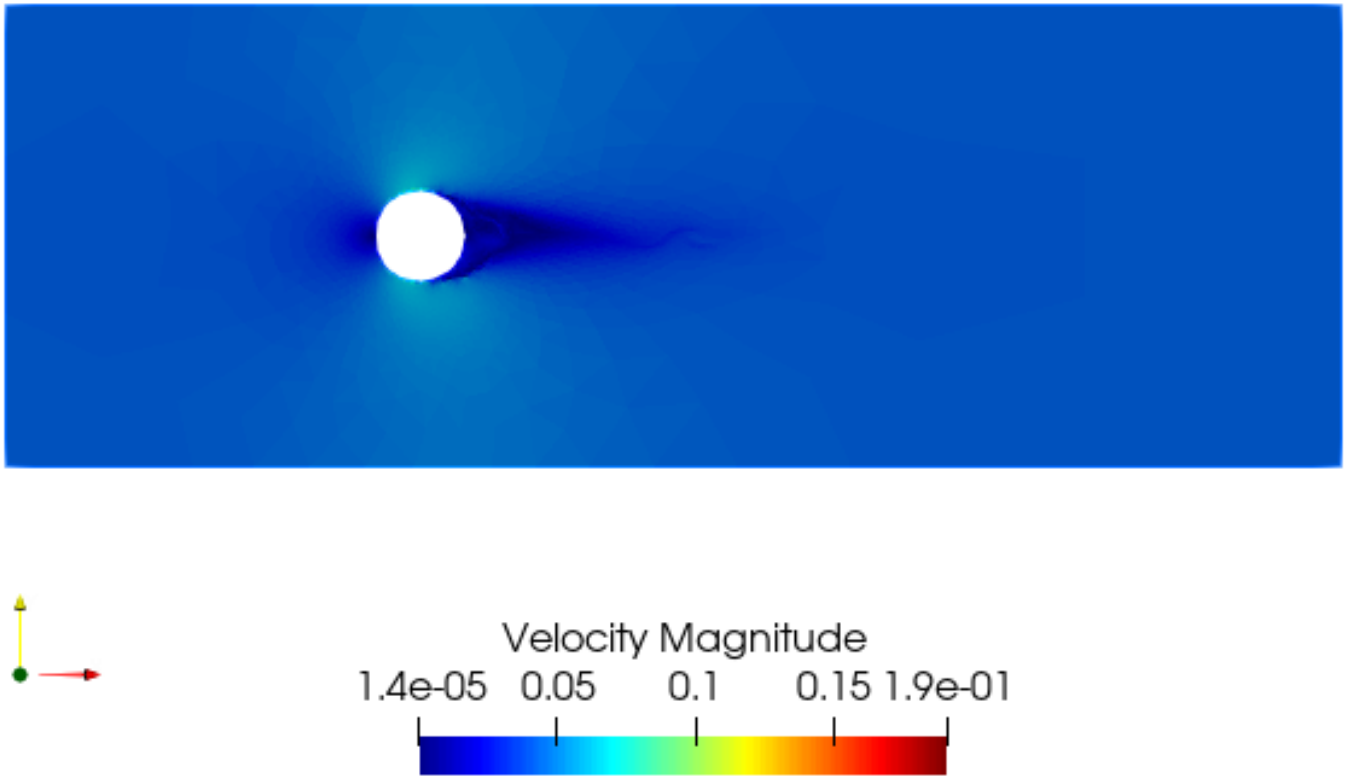
Campo de velocidades. $Re = 9 \cdot 10^6$

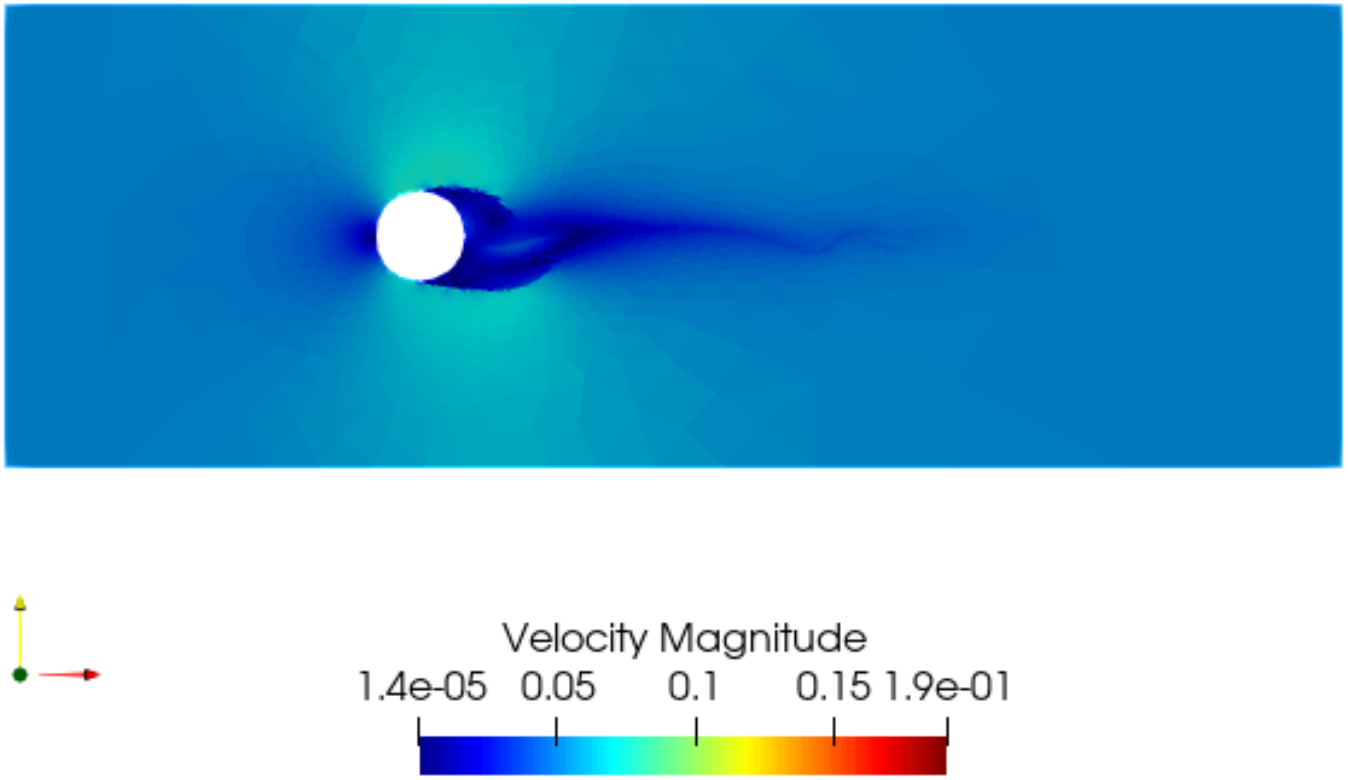

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

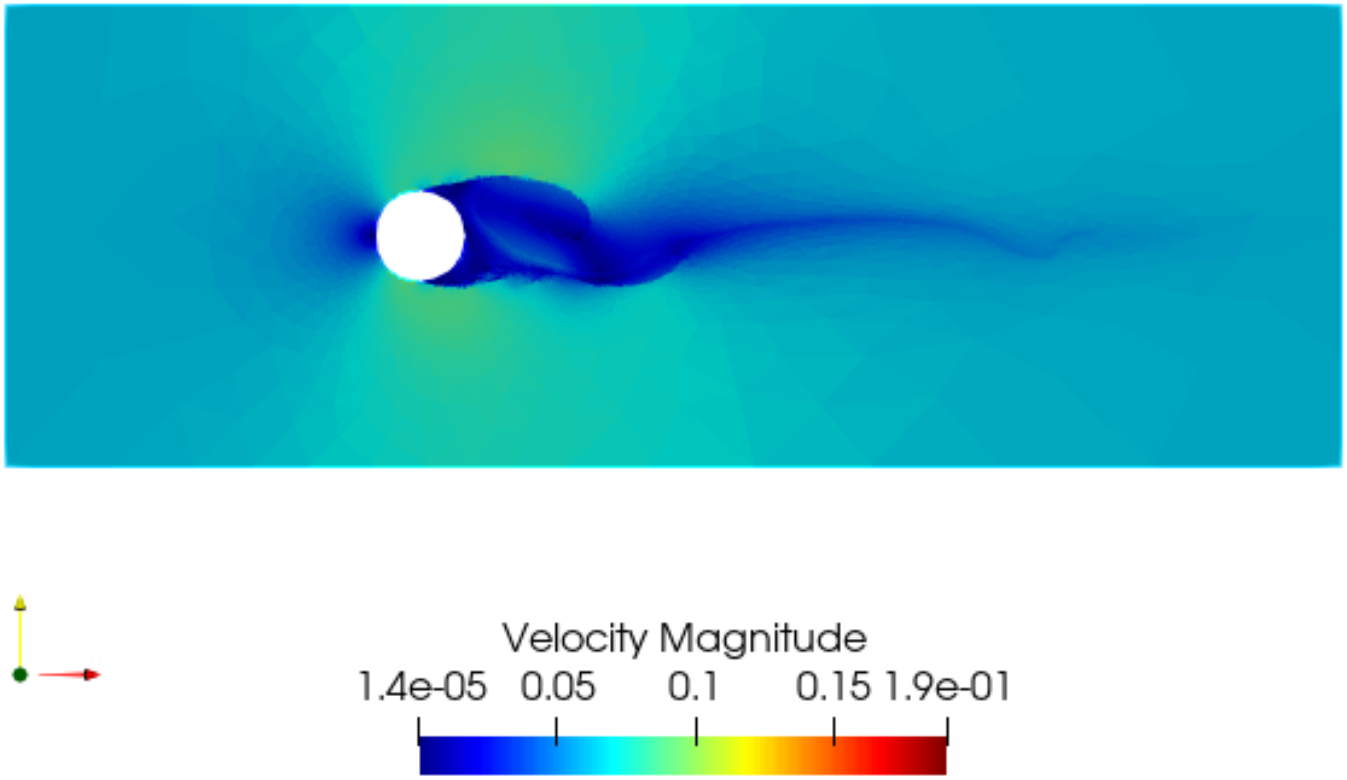

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

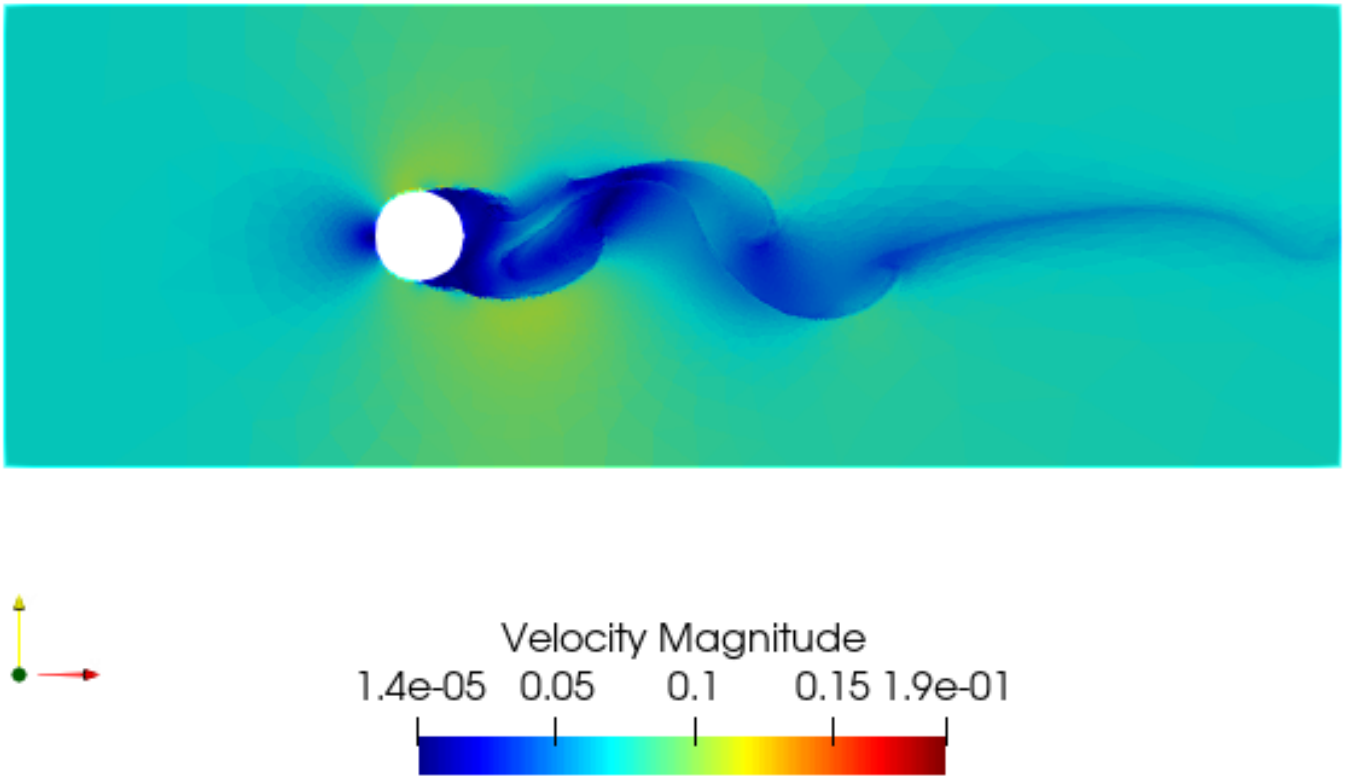

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

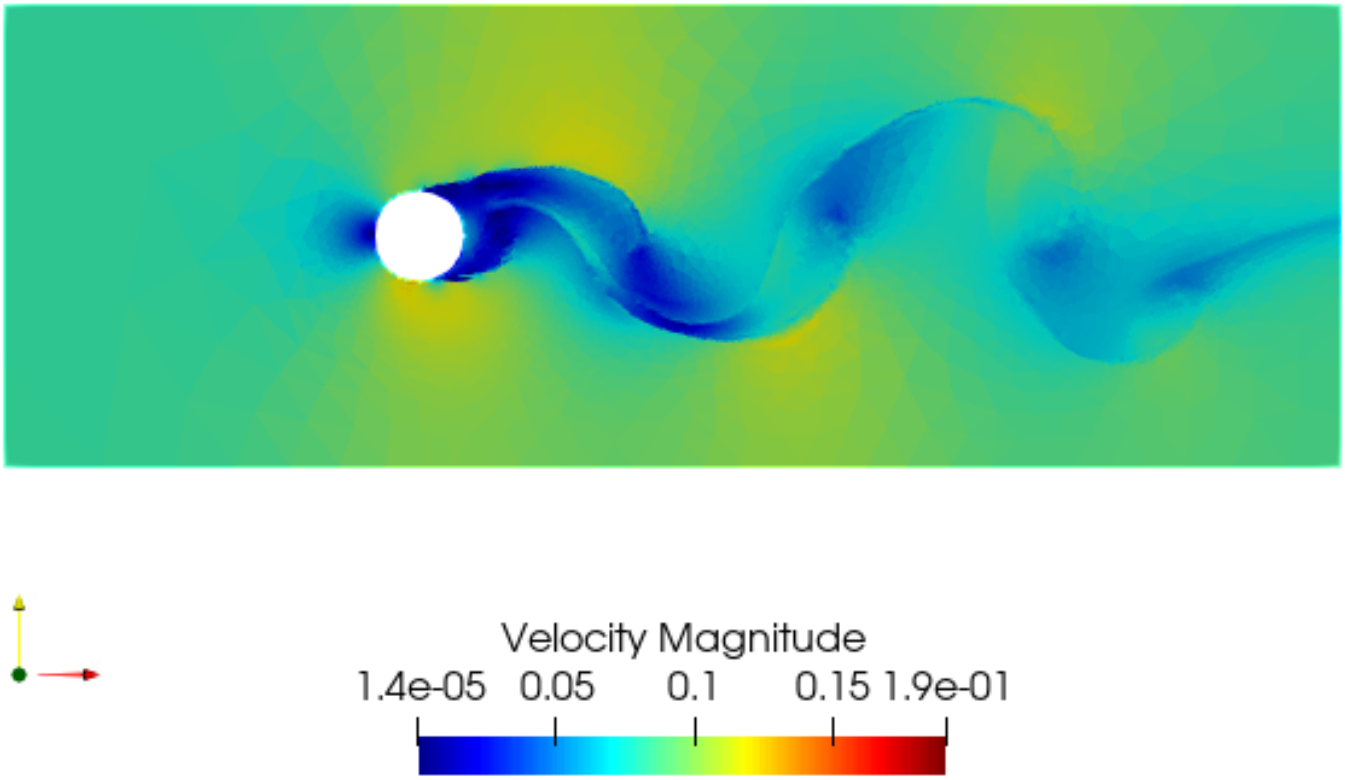

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

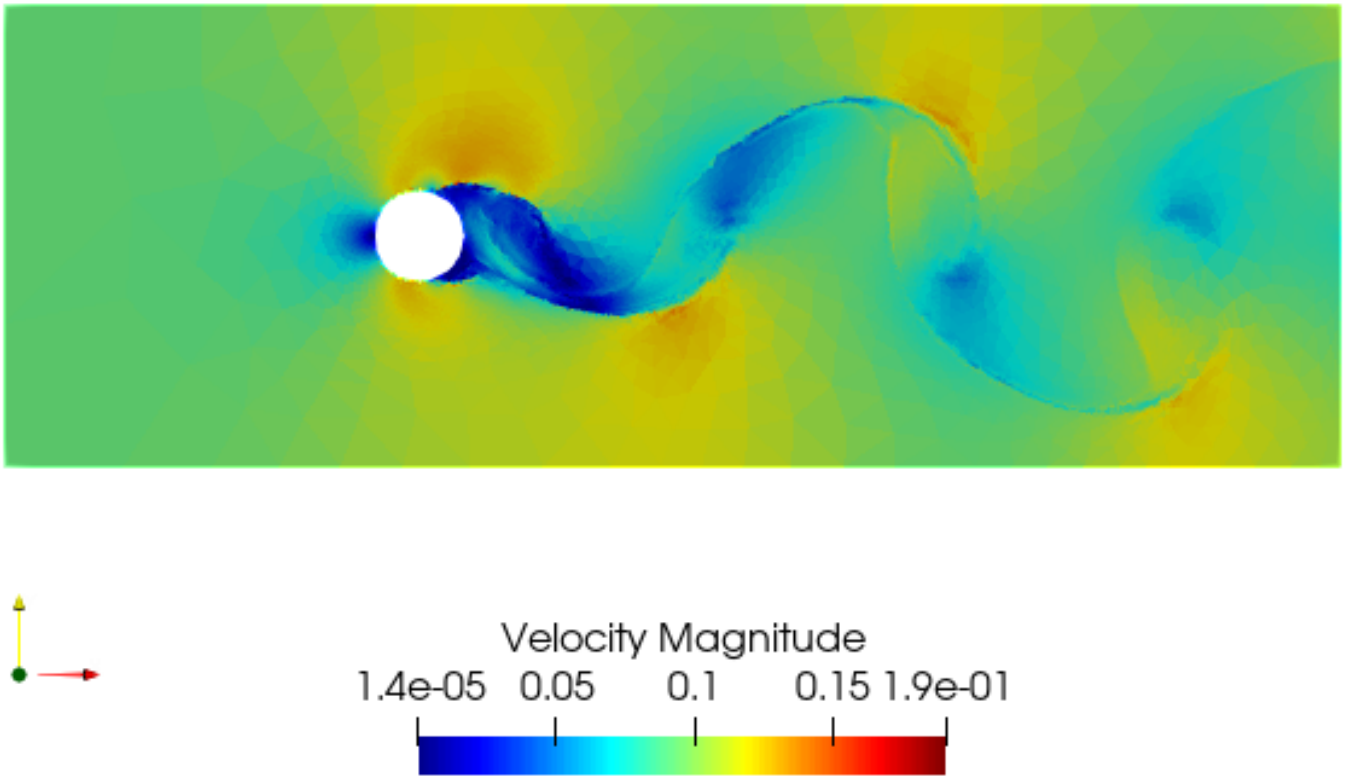

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes. Circunferencia

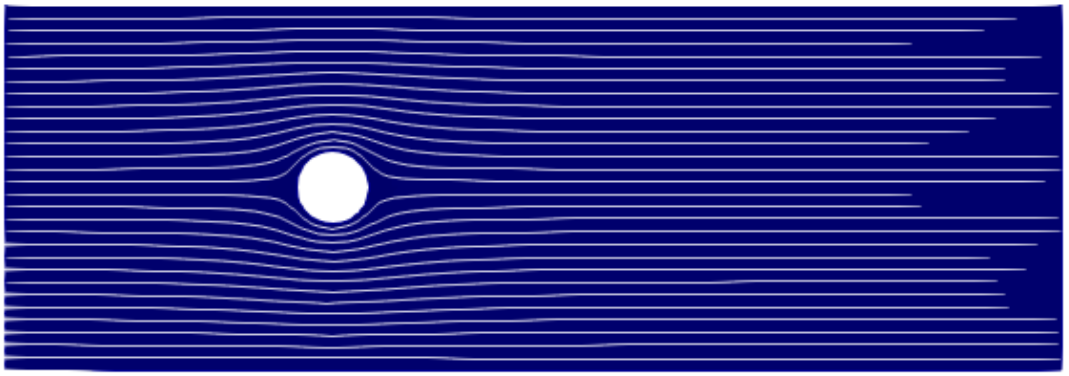


Figura: Líneas de corriente, t=0.

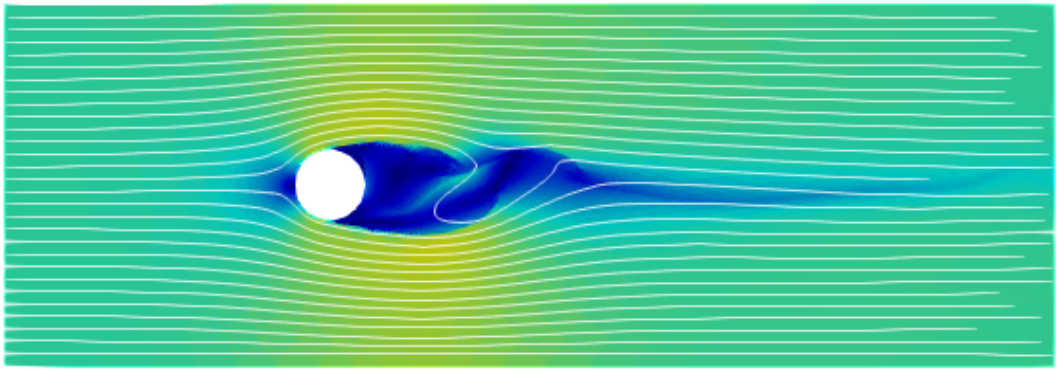
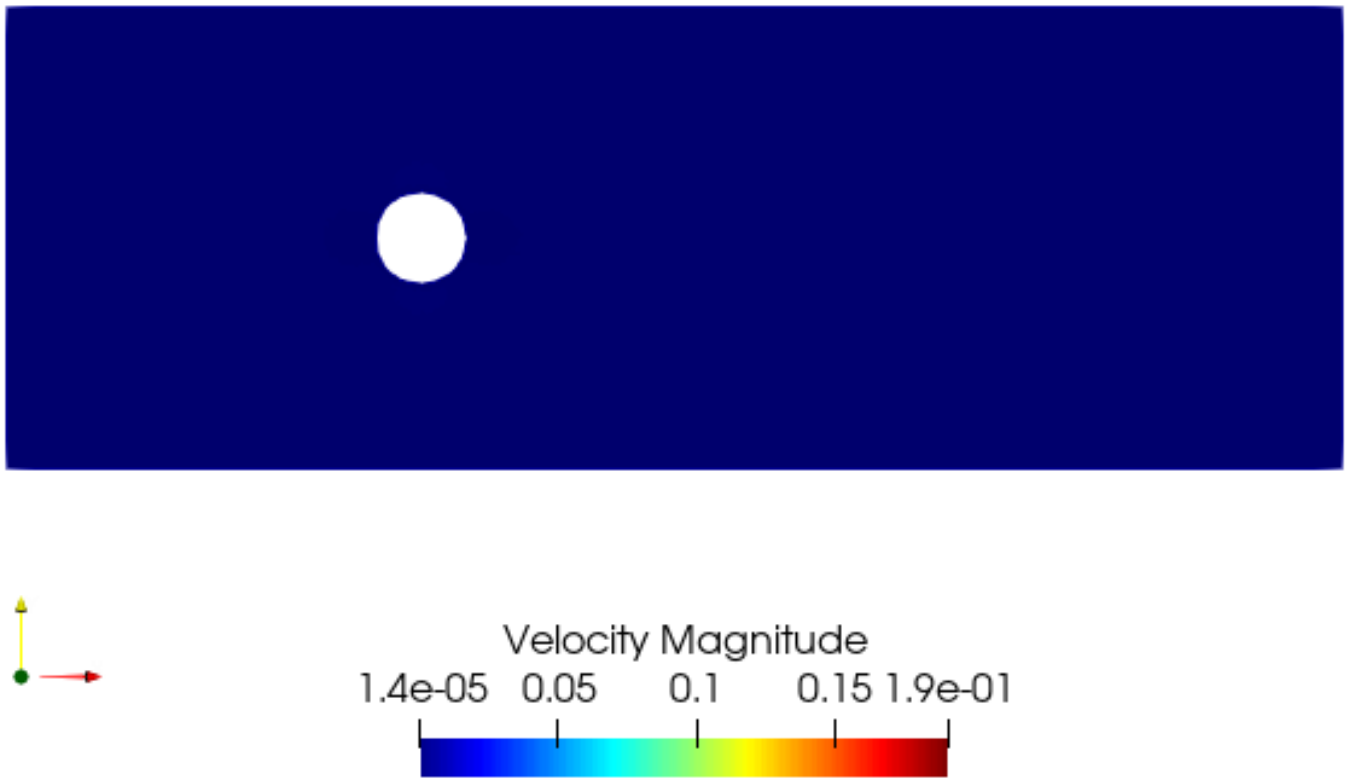
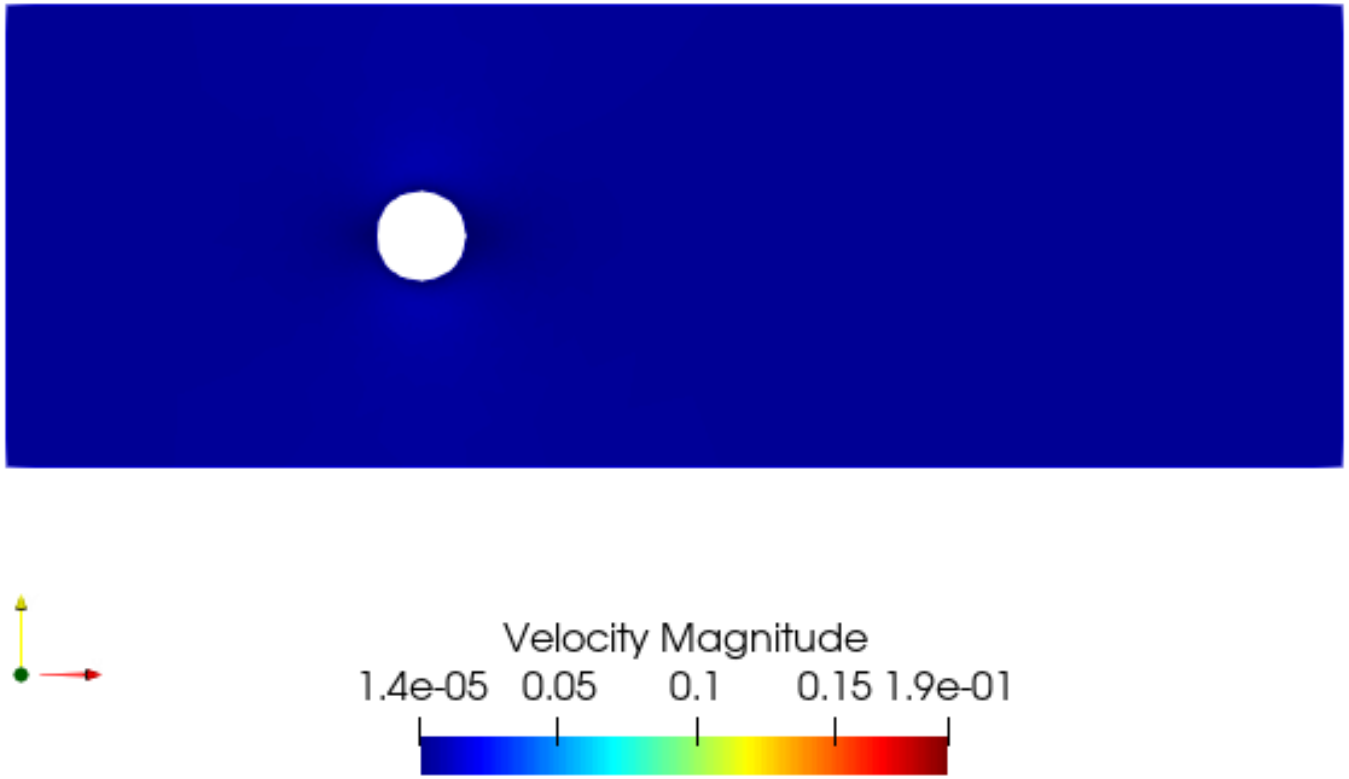
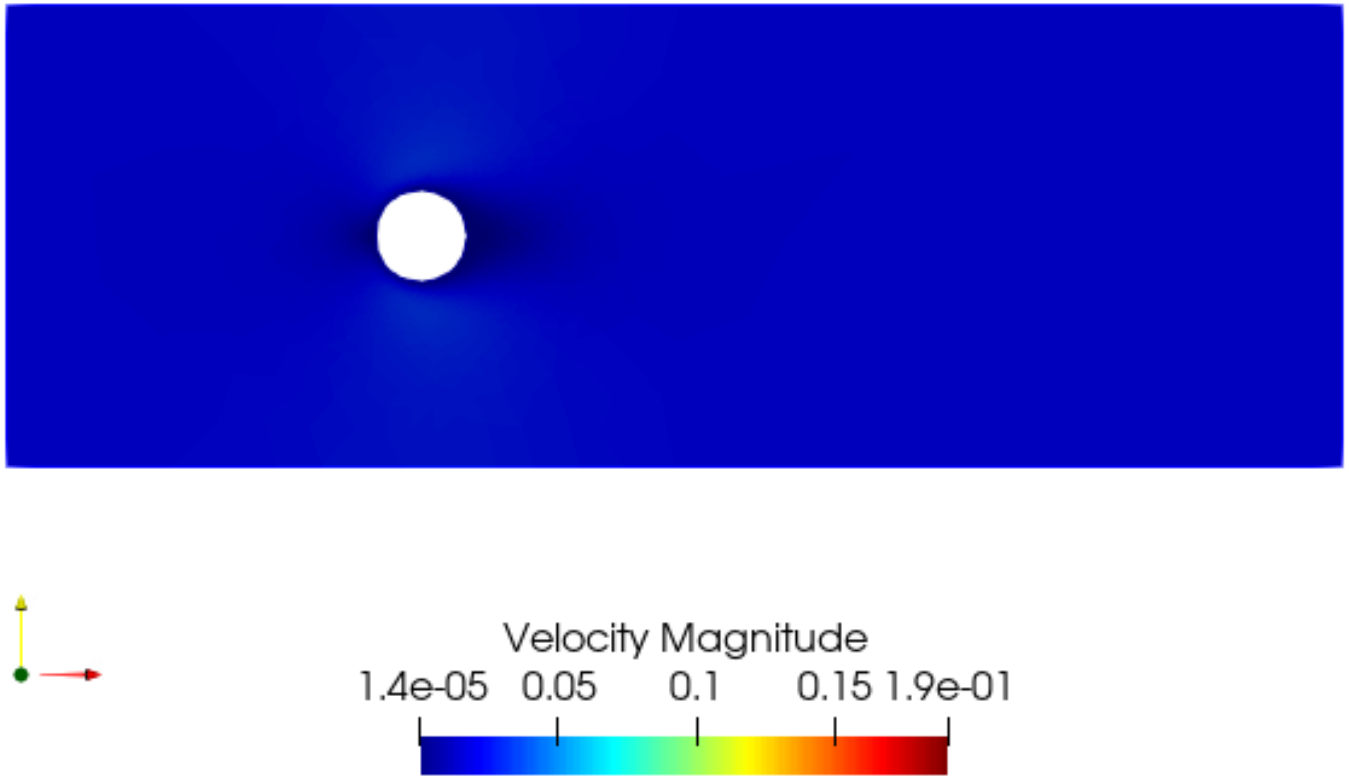


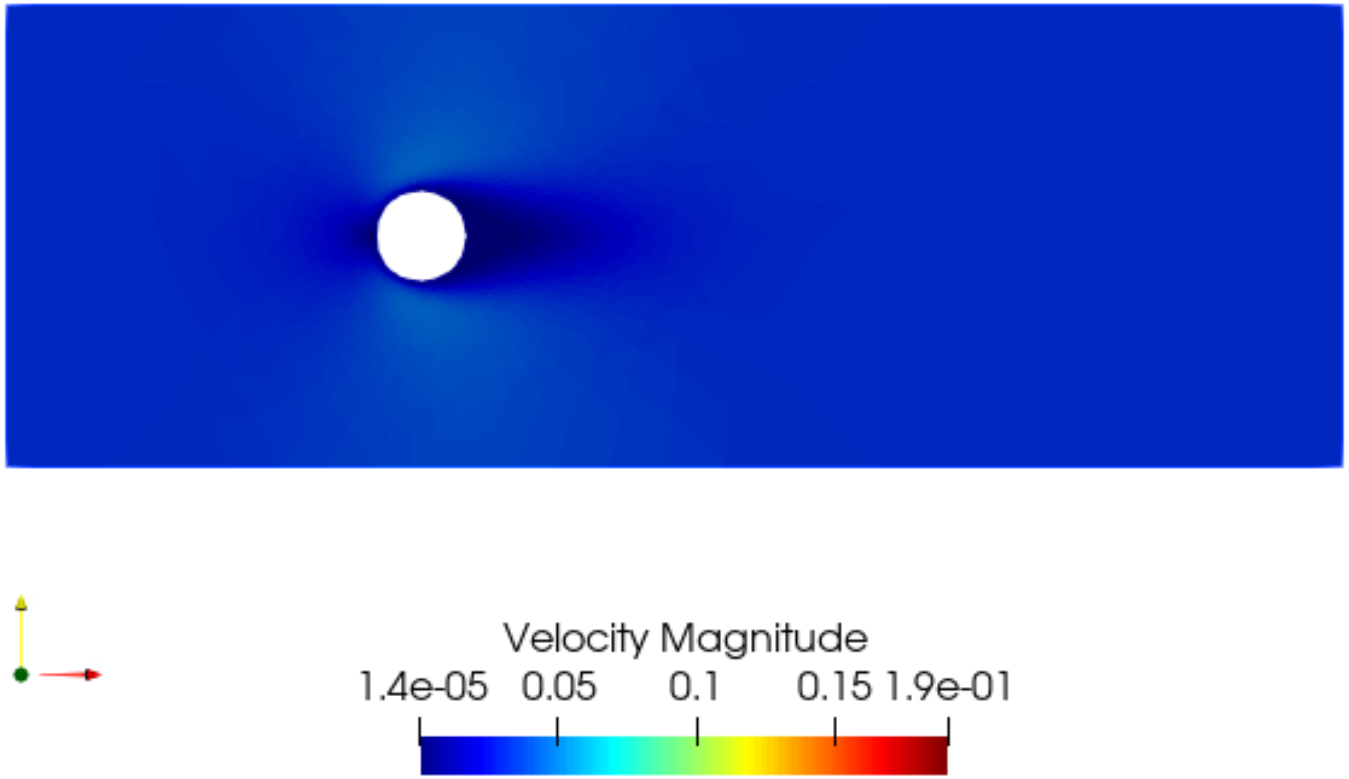
Figura: Líneas de corriente, t=70.

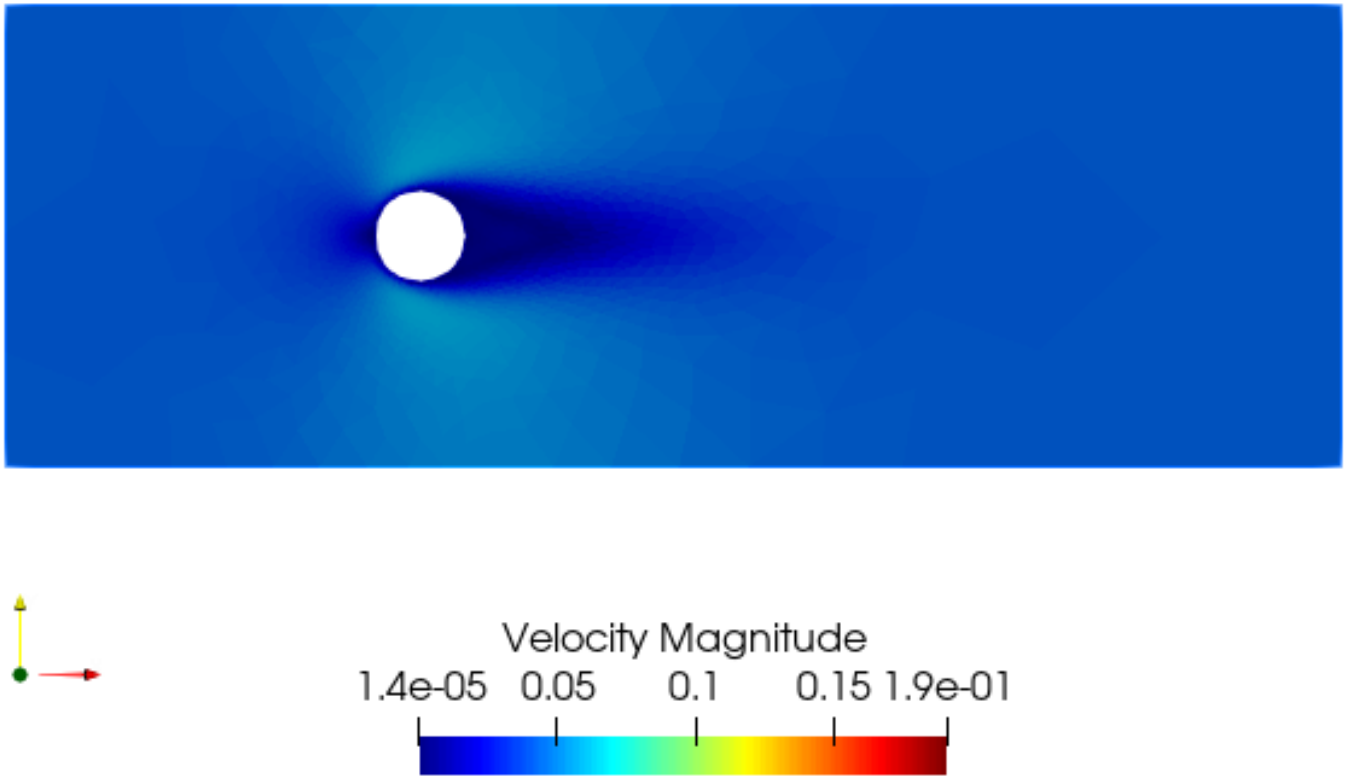
Campo de velocidades. $Re = 100$

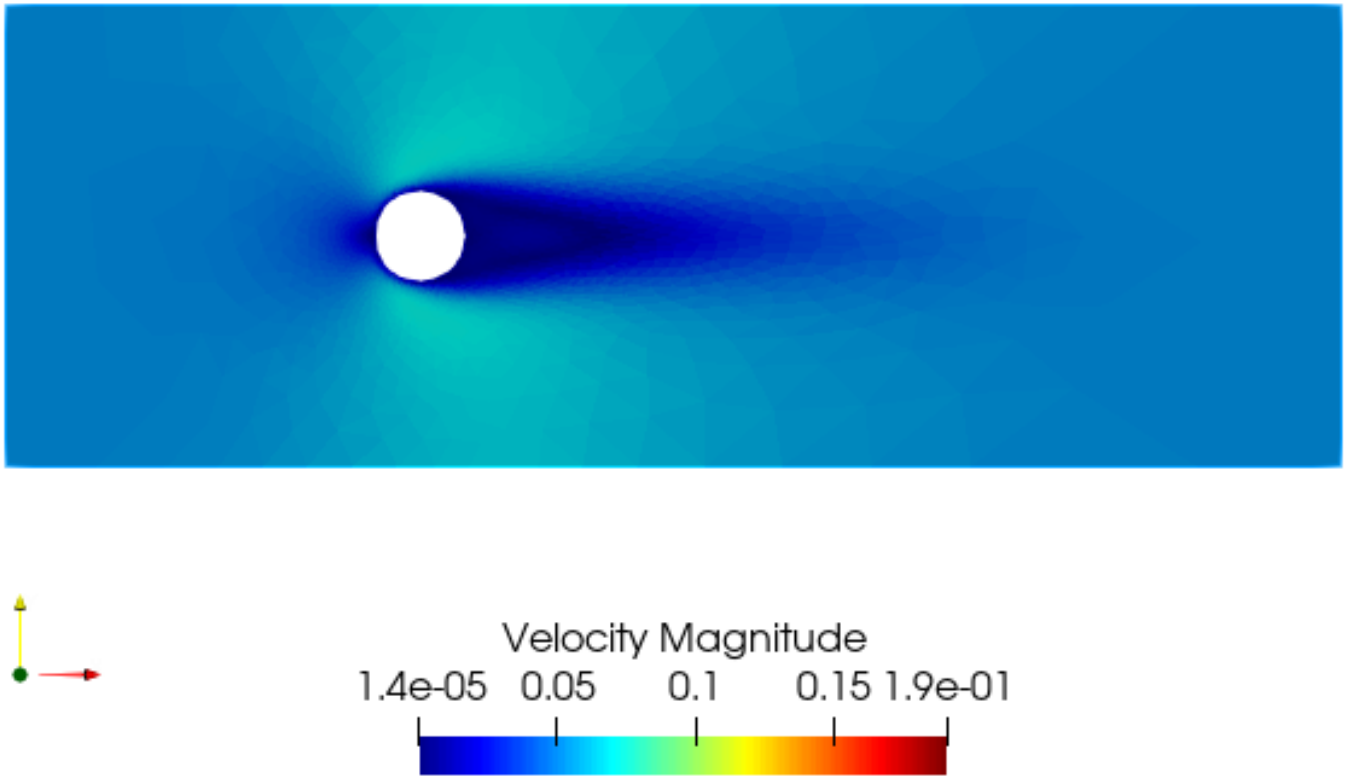

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

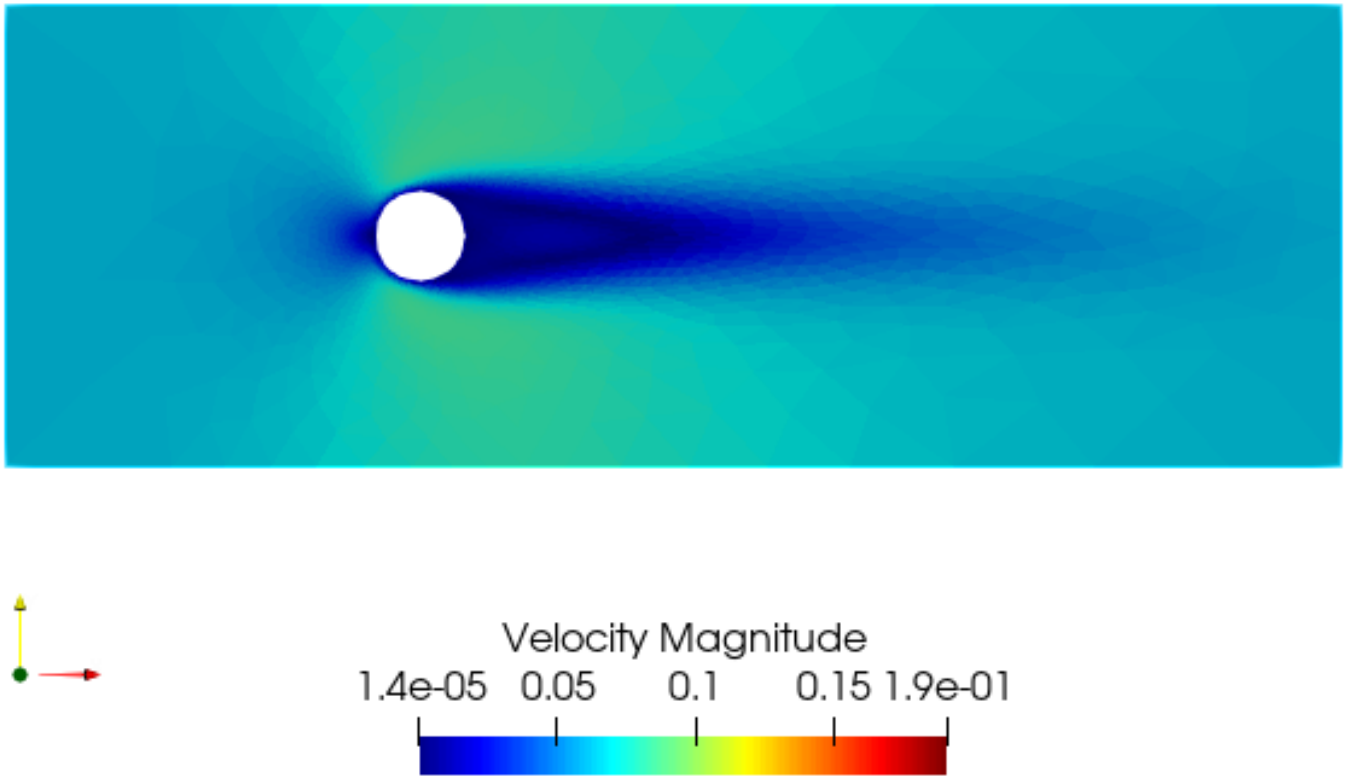

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

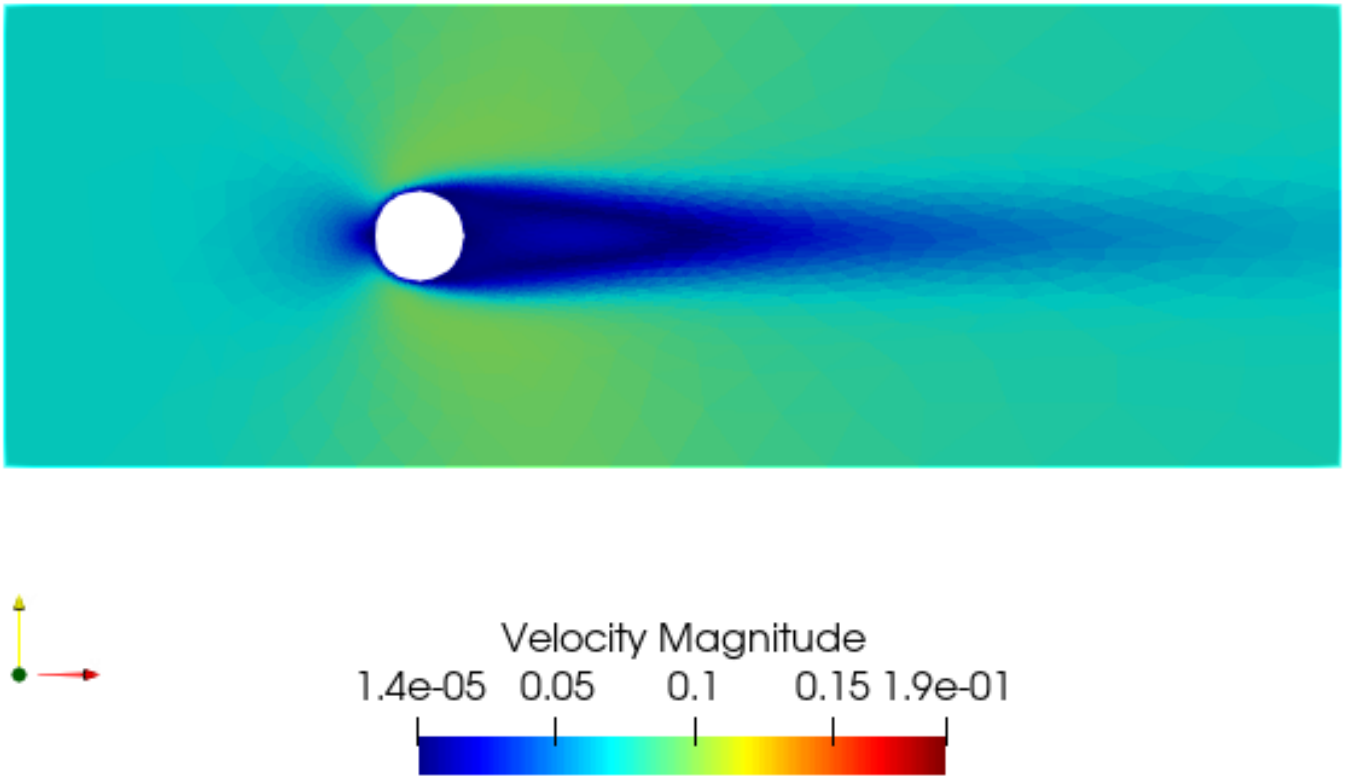

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

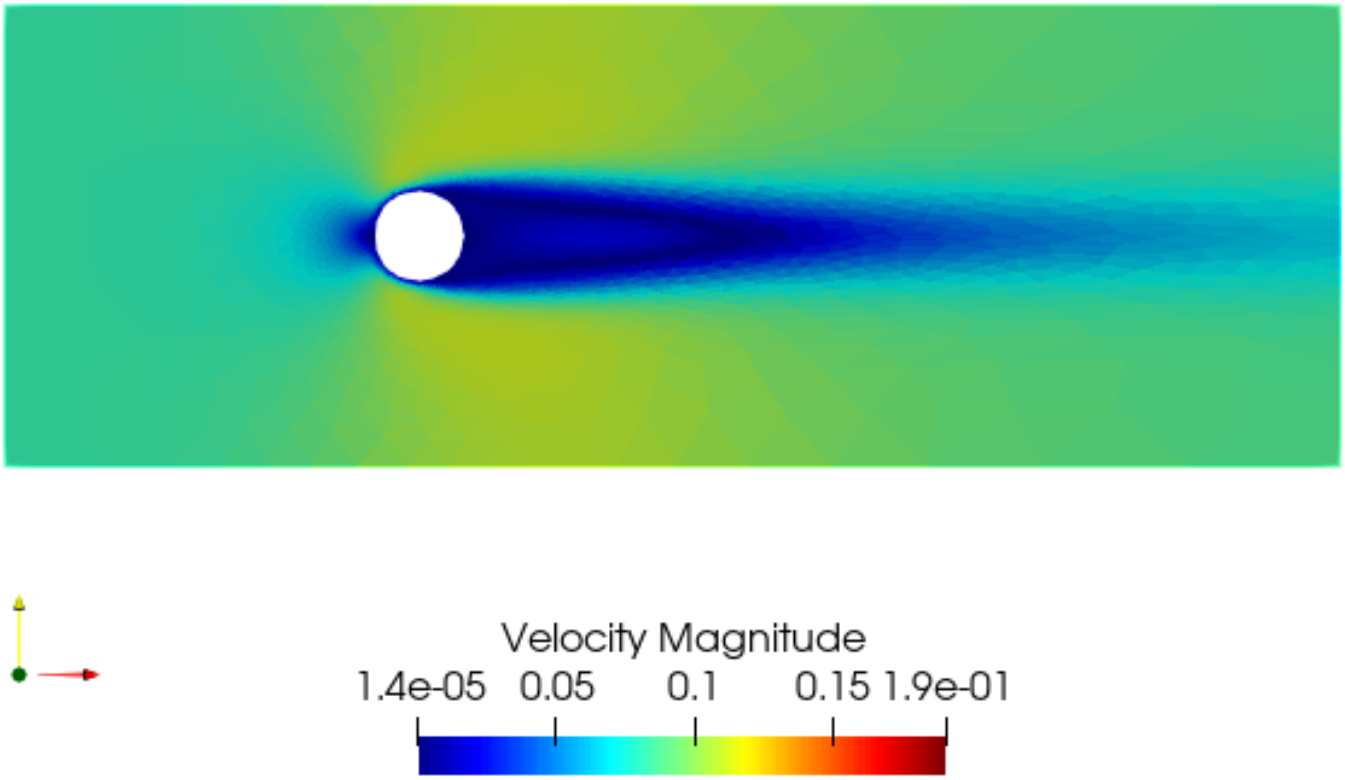

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

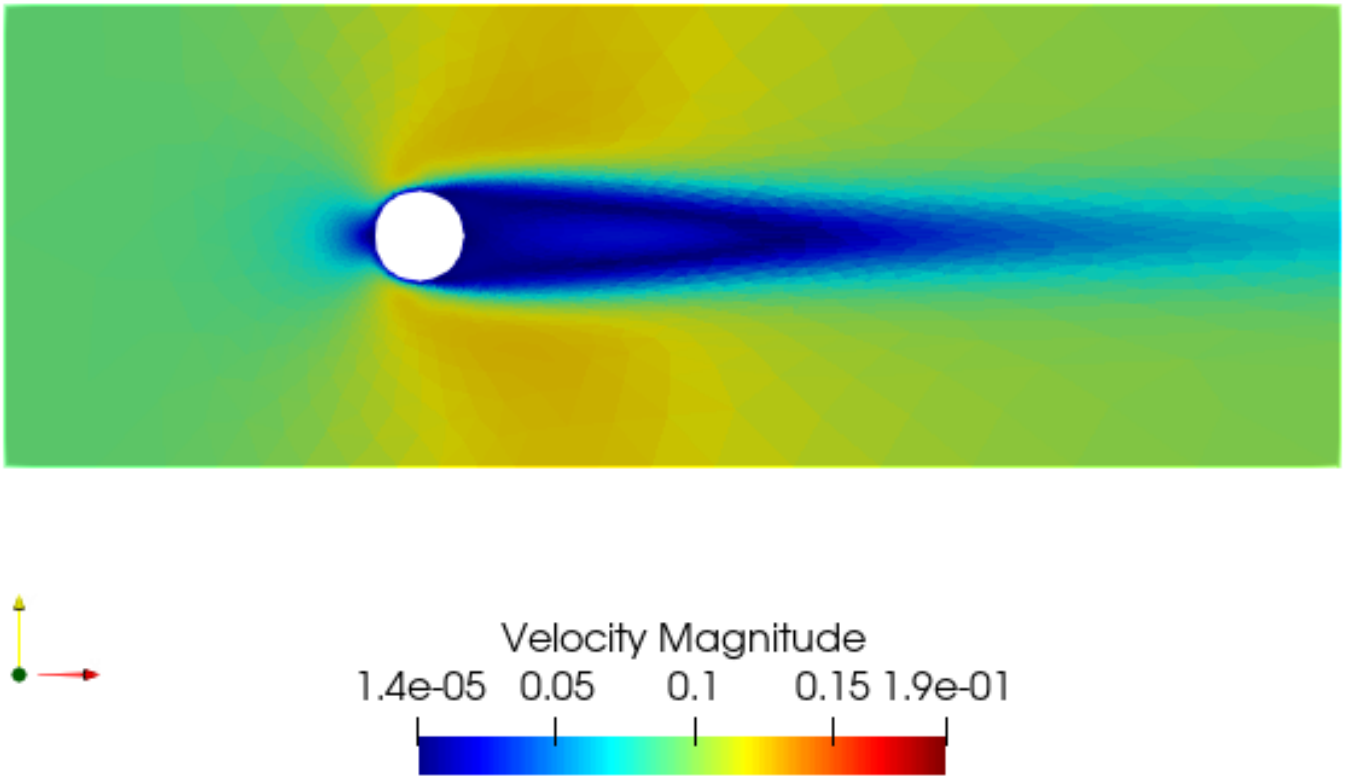

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes. Perfil NACA

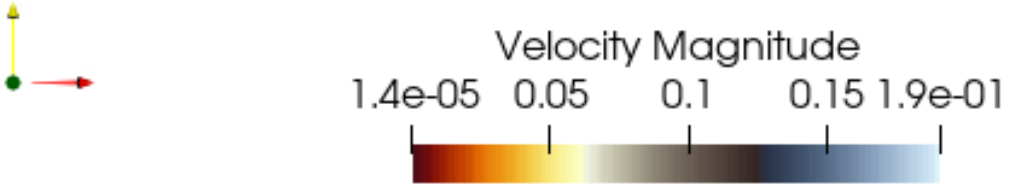
En este experimento aplicaremos las ecuaciones de Navier-Stokes alrededor de un perfil NACA junto con las condiciones de contorno:

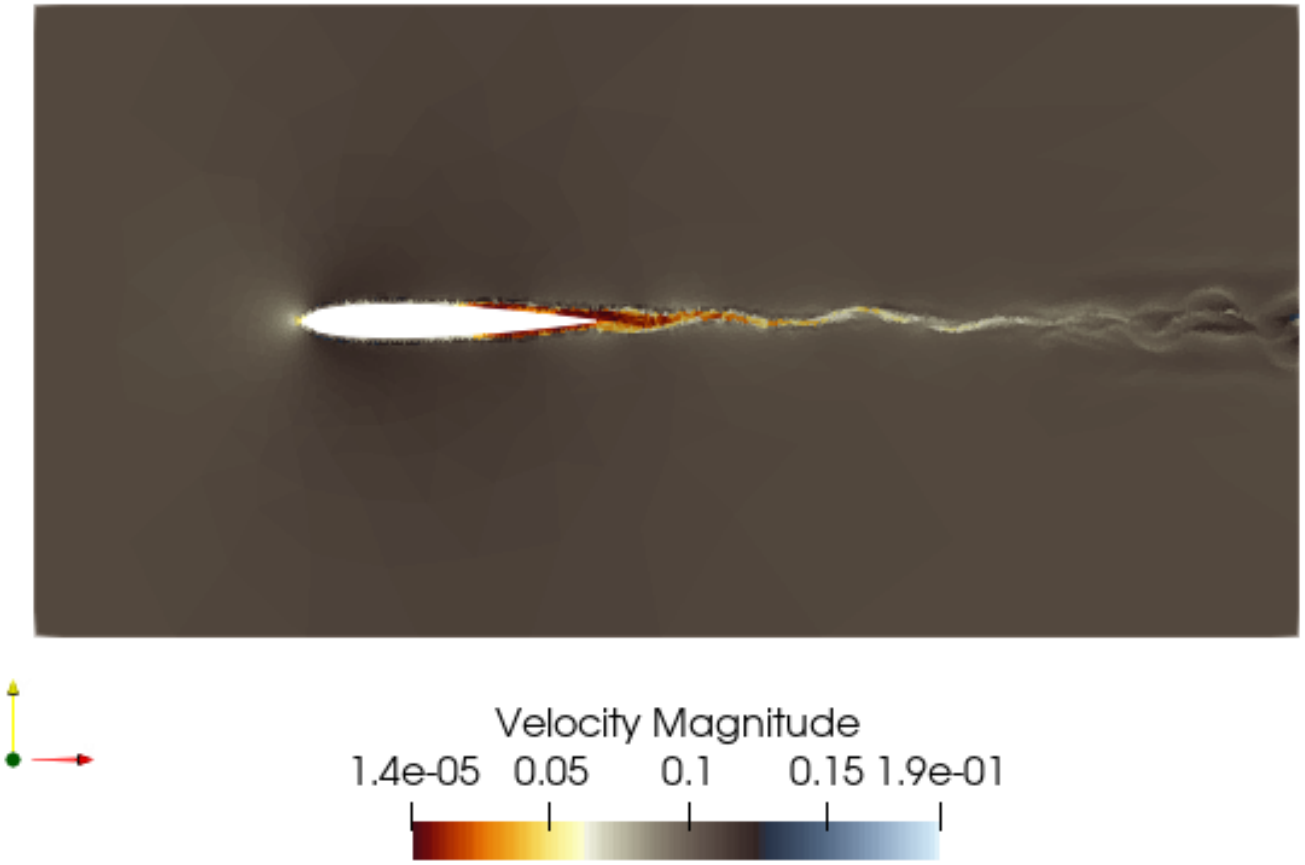
$$\begin{aligned} u = g(x,t), v = 0 \text{ en la pared izquierda de } \Omega, \\ u = 0, v = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega, \\ u = 0, v = 0 \text{ en la frontera del perfil NACA} \end{aligned}$$

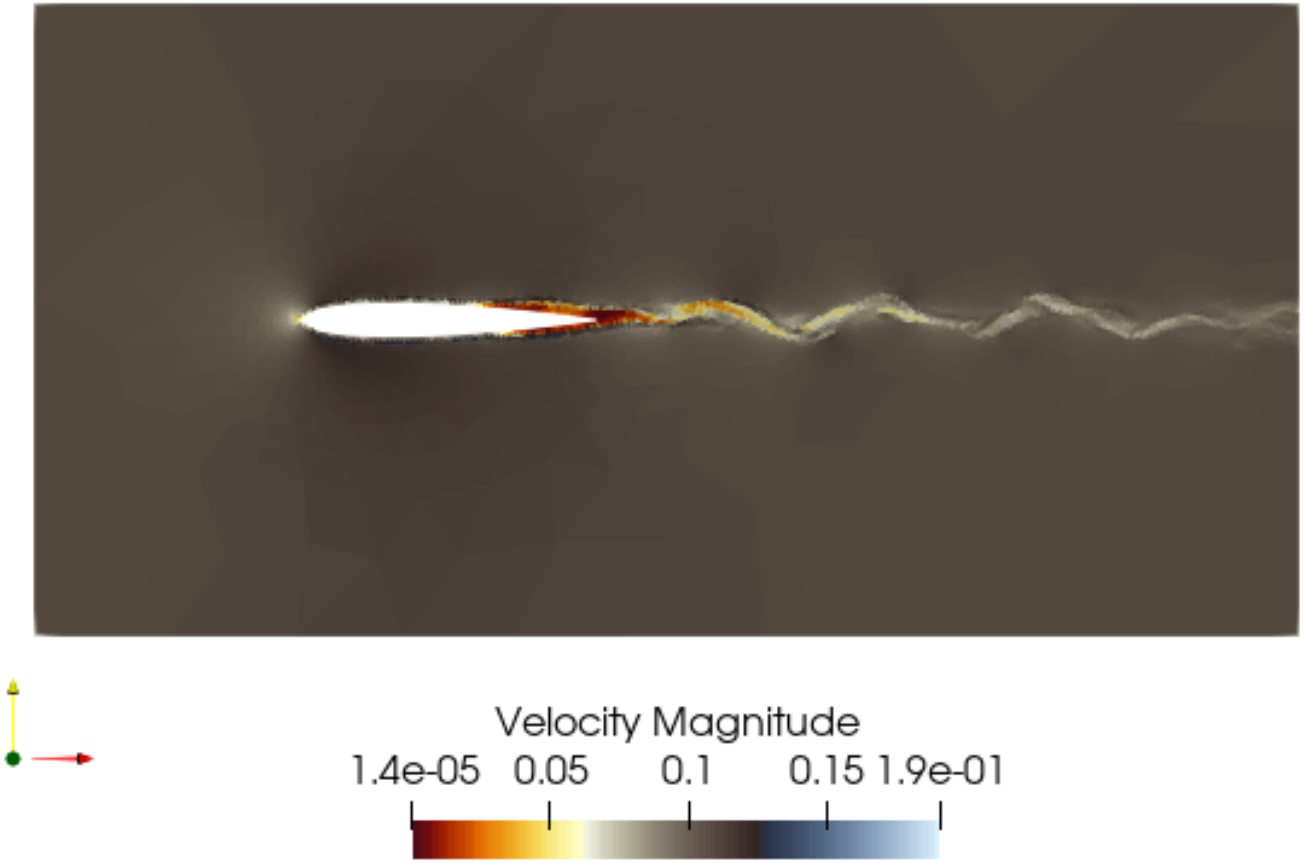
donde $g(x,t) = 0{,}1\dfrac{t - T_0}{T_1 - T_0}$.
Y las condiciones iniciales

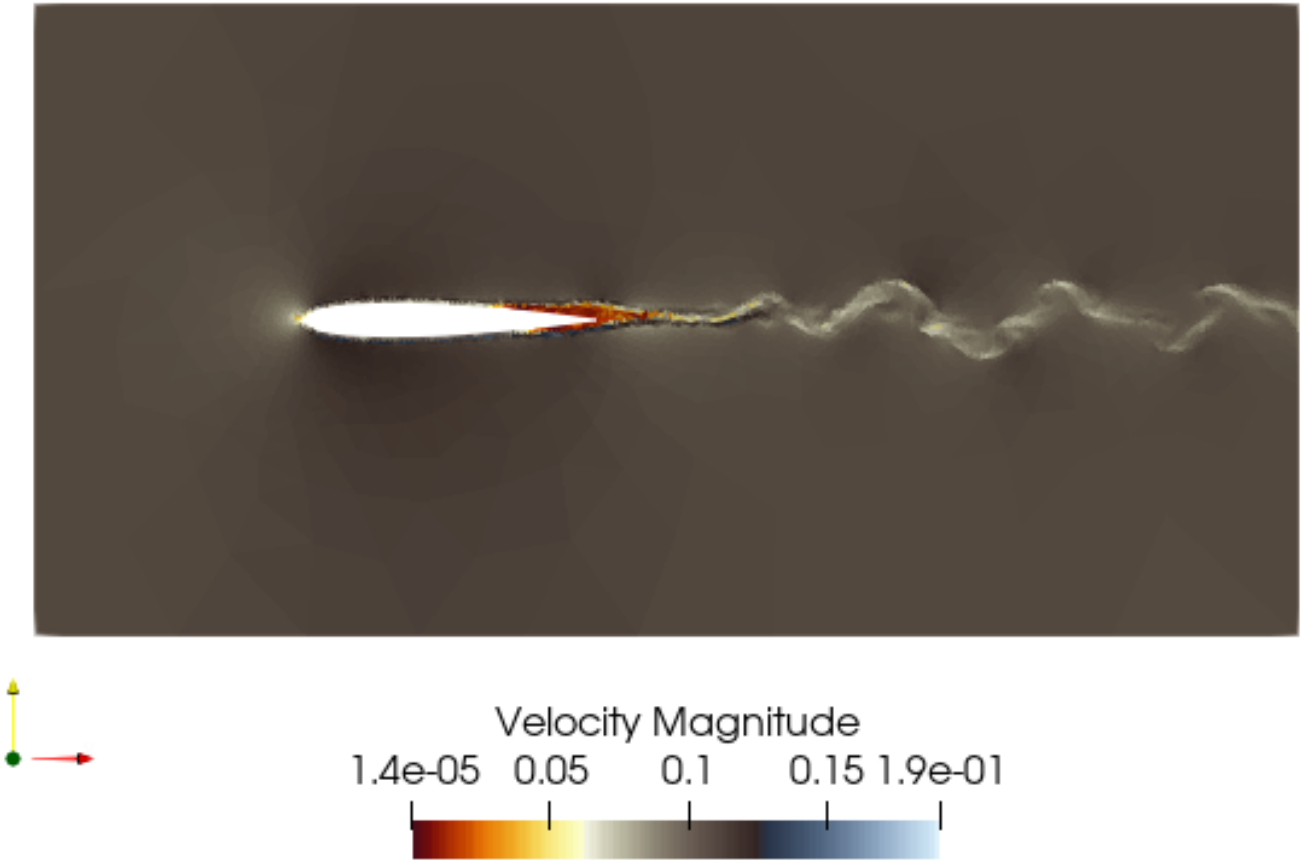
$$\begin{aligned} u(0) = 0, \\ v(0) = 0 \end{aligned}$$

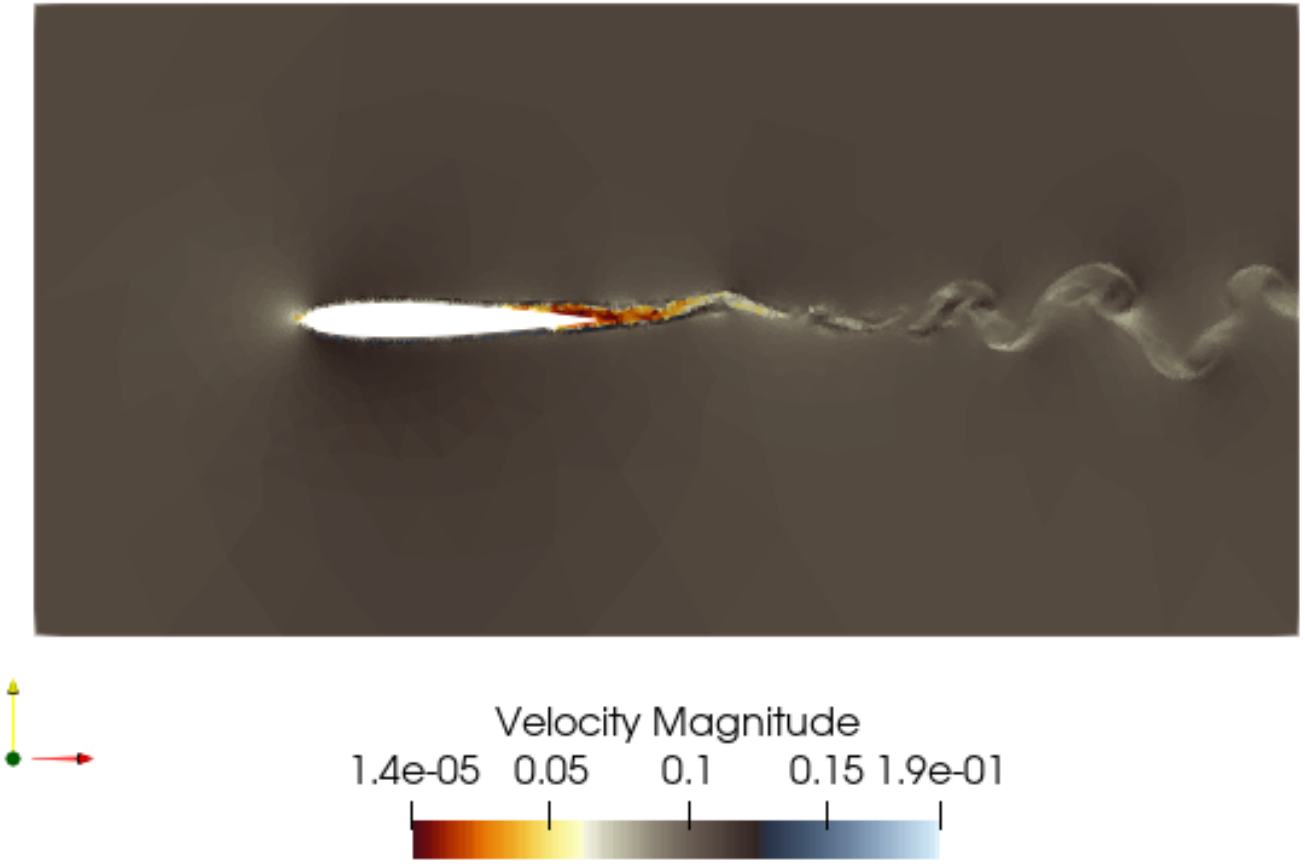
Campo de velocidades. $Re = 9 \cdot 10^5$

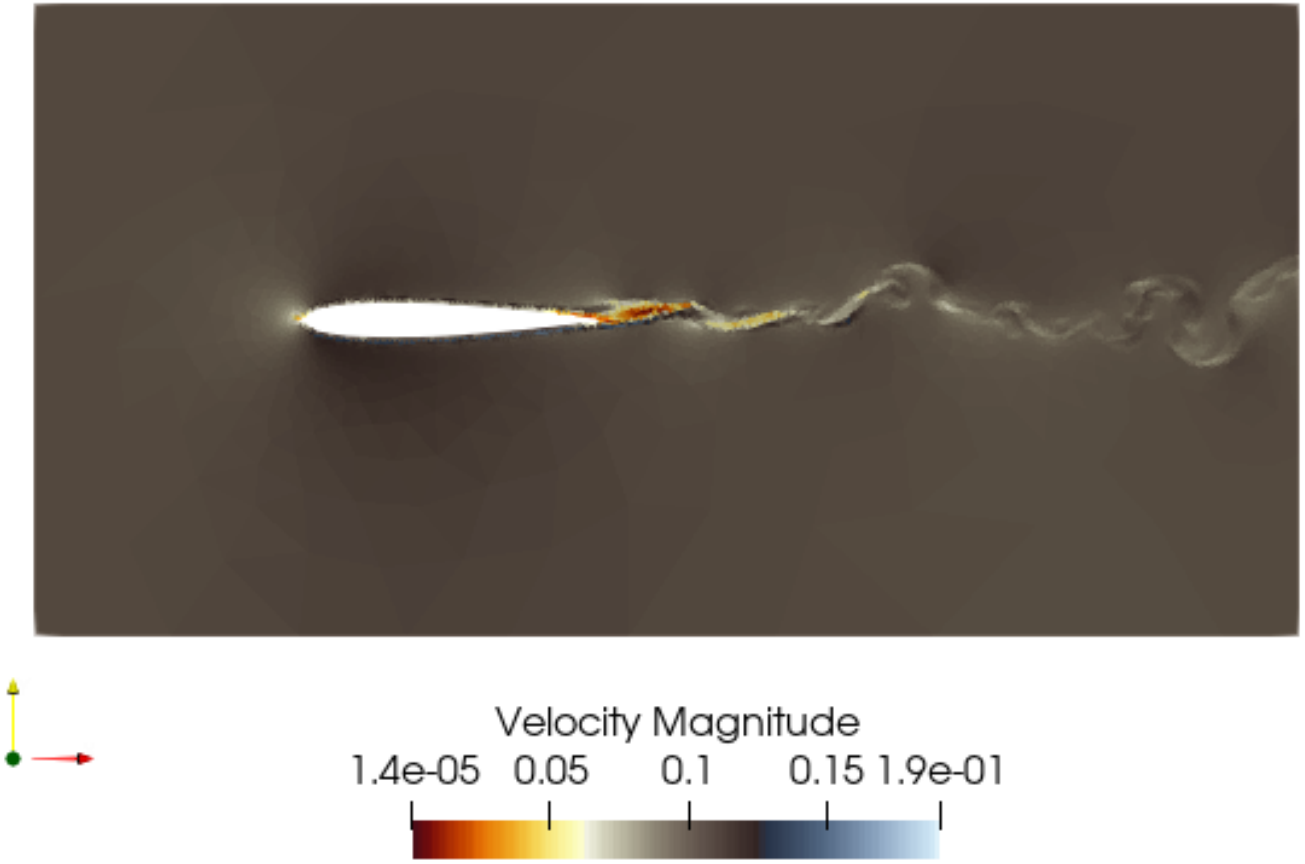

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

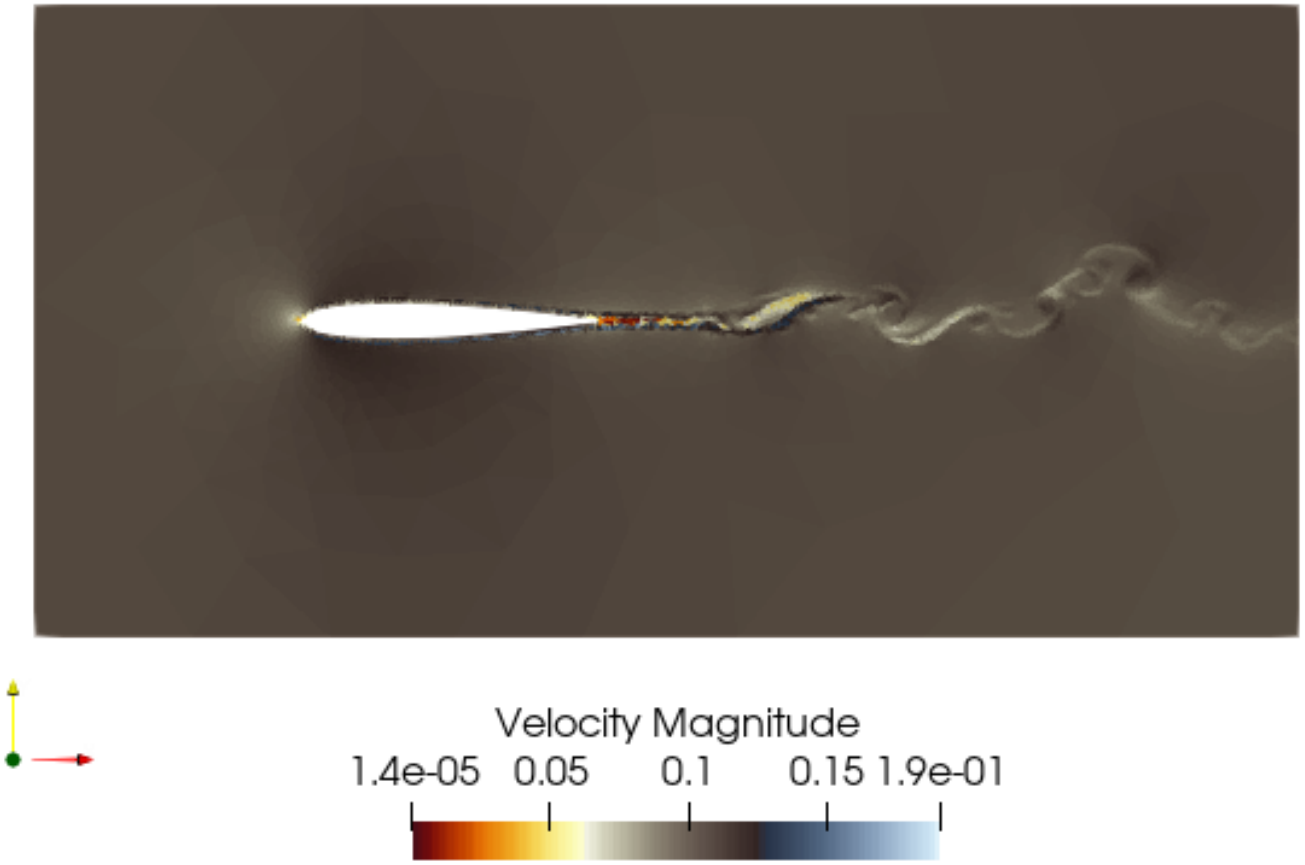

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

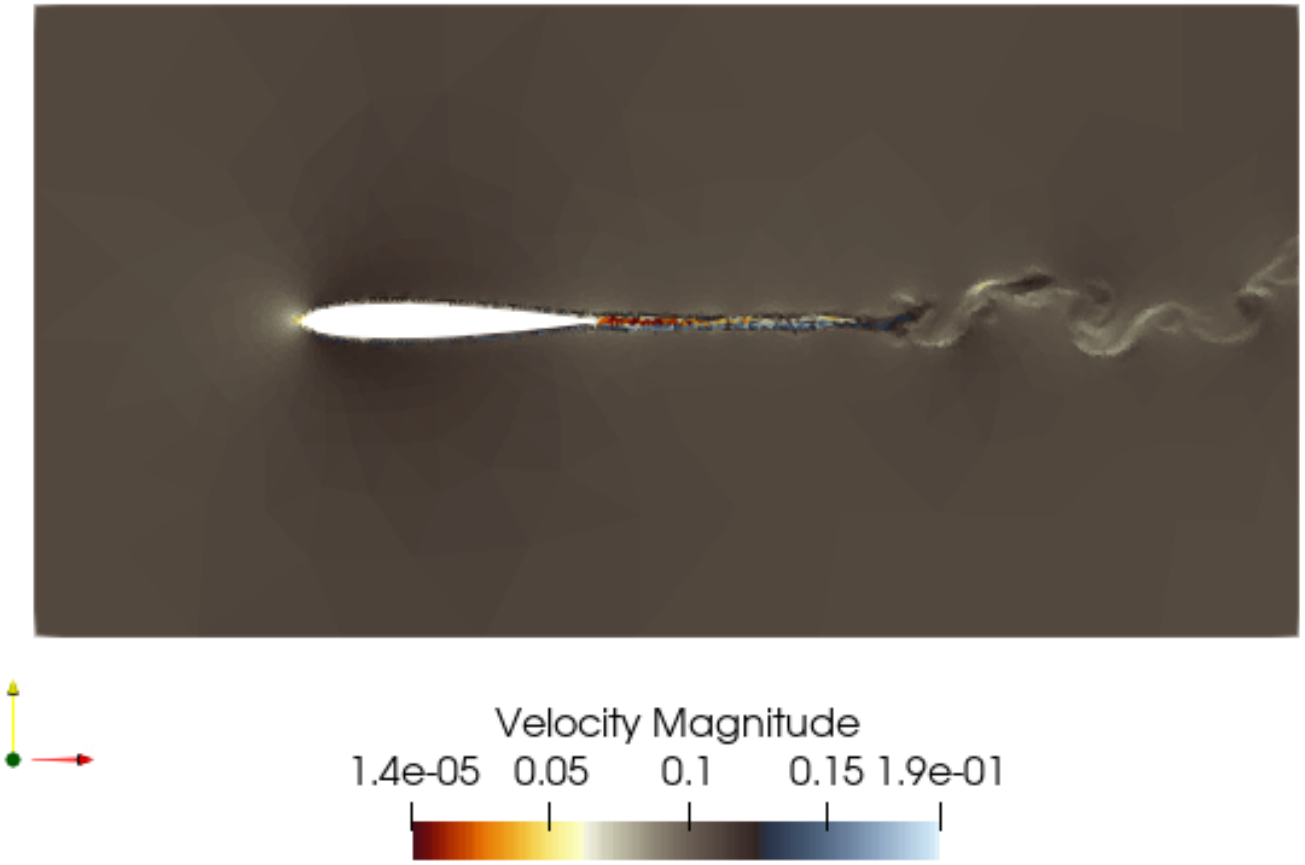

Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01


Velocity Magnitude
1.4e-05 0.05 0.1 0.15 1.9e-01

Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes. Perfil NACA.

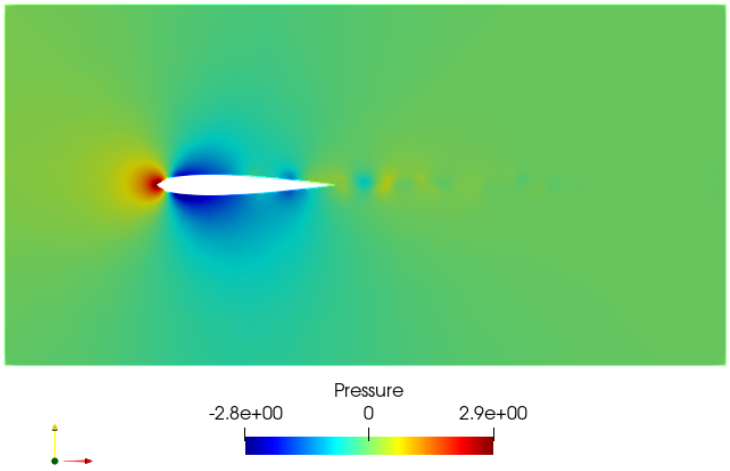


Figura: Campo de presiones, t=40.

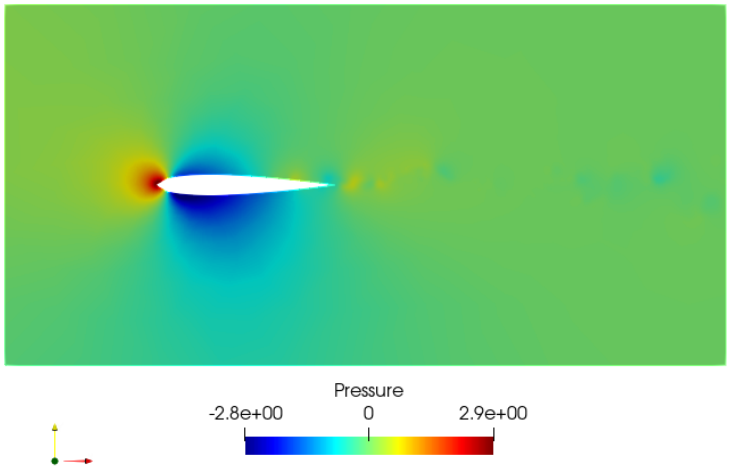


Figura: Campo de presiones, t=70.

Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes. Perfil NACA.

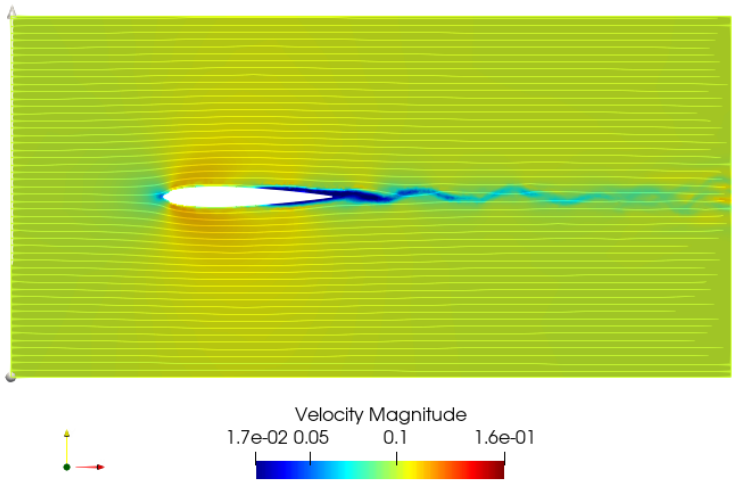


Figura: Líneas de corriente, t=40.

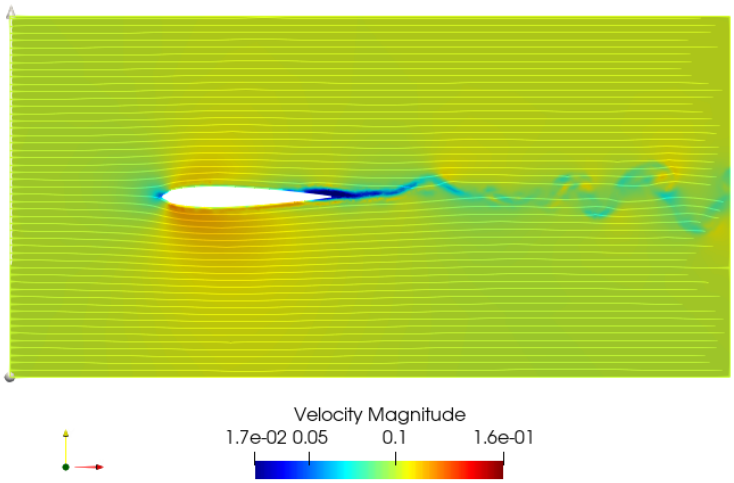


Figura: Líneas de corriente, t=70.

Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes. Perfil NACA de revolución

Problema: hallar el campo de velocidades $\vec{\mathbf{u}} = (u, v, w) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ y la función presión $p : \Omega \to \mathbb{R}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{u} \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \partial_x p & = f_1 \text{ en } \Omega \\ v_t + \mathbf{u} \cdot \nabla v - \nu \Delta v + \partial_y p & = f_2 \text{ en } \Omega \\ w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w - \nu \Delta w + \partial_z p & = f_3 \text{ en } \Omega \\ \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w & = 0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

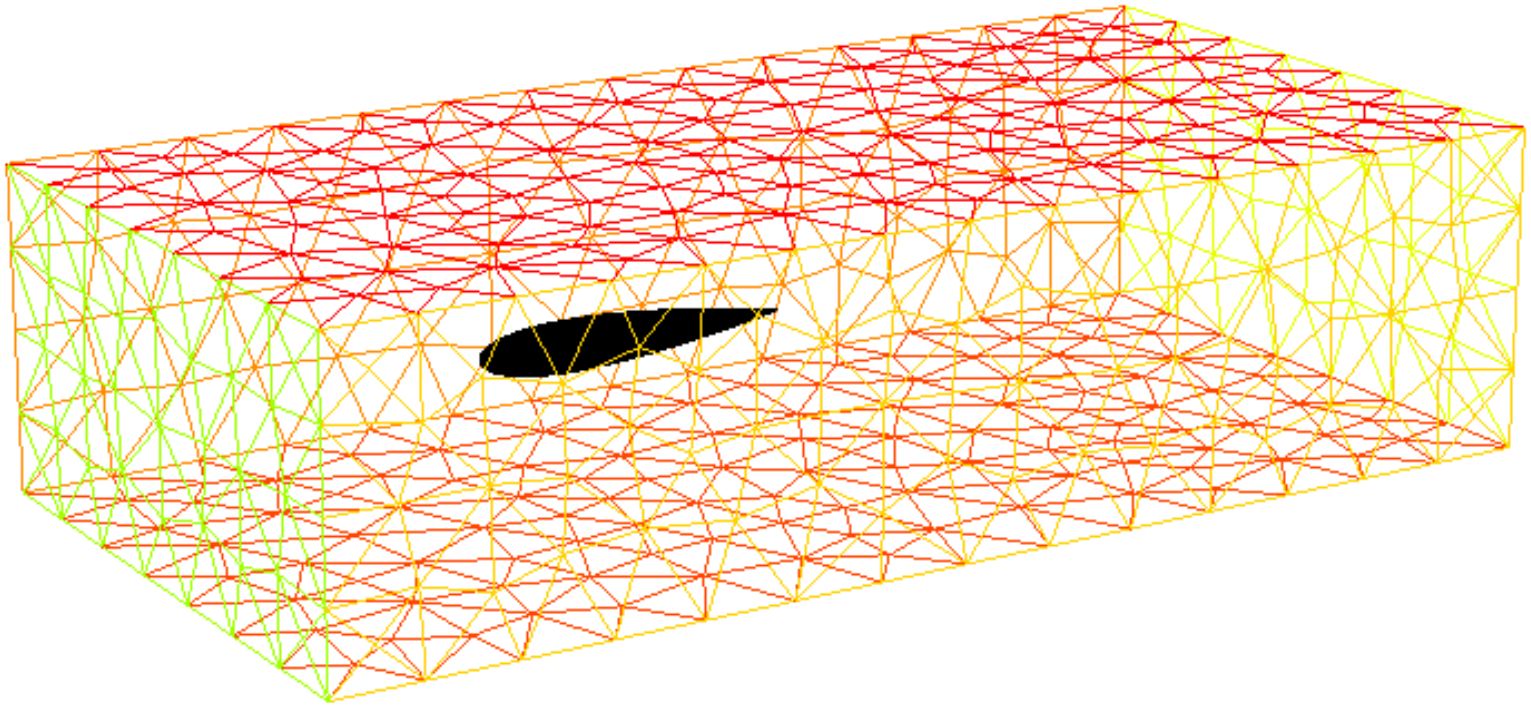
junto con las condiciones de contorno:

$$u = 1, v = 0, w = 0 \text{ en la pared izquierda de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0, w = 0 \text{ en el resto de la frontera de } \Omega,$$
$$u = 0, v = 0, w = 0 \text{ en la frontera del perfil NACA.}$$

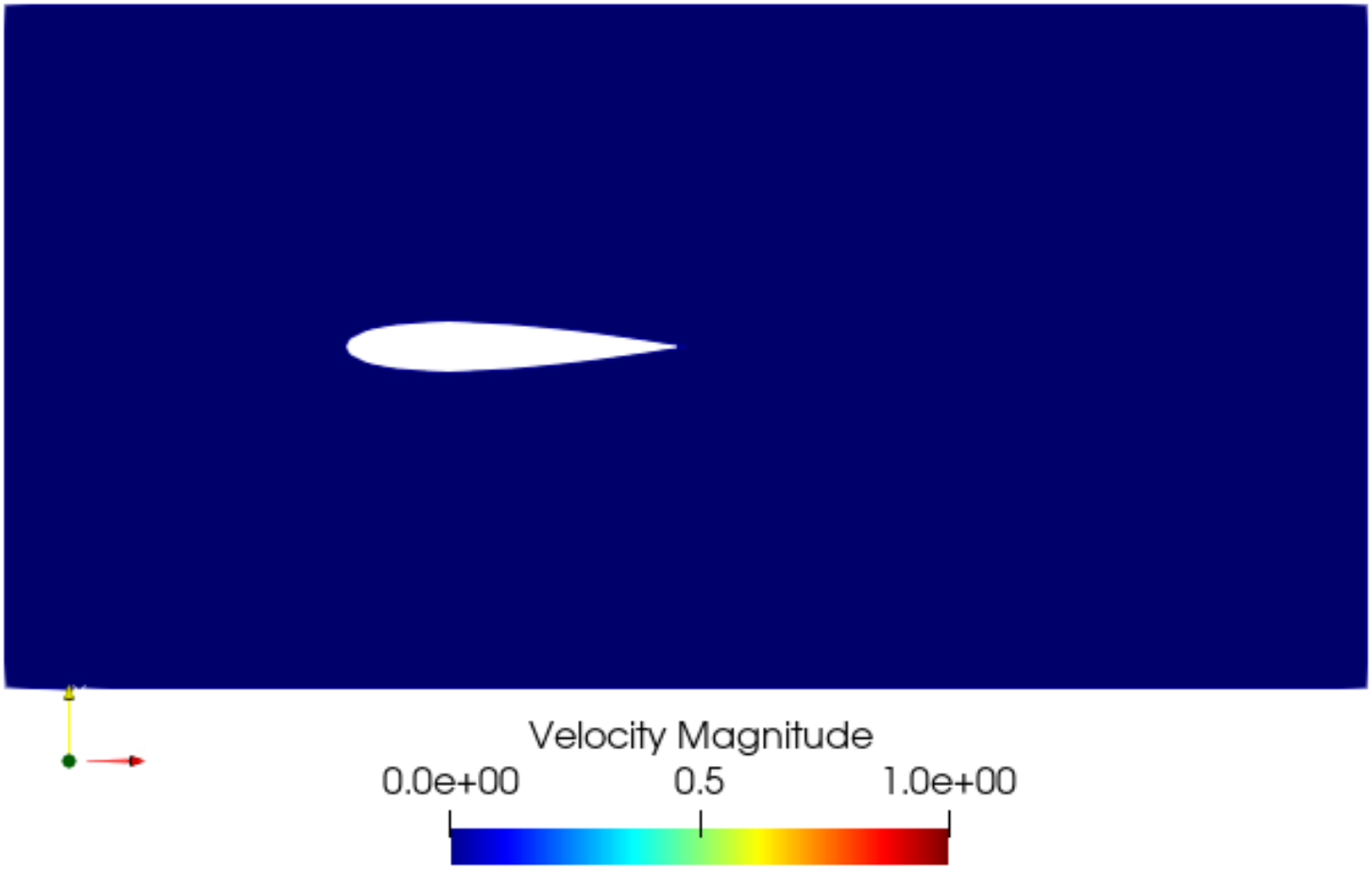
Experimento. Ecuaciones de Navier-Stokes. Perfil NACA de revolución

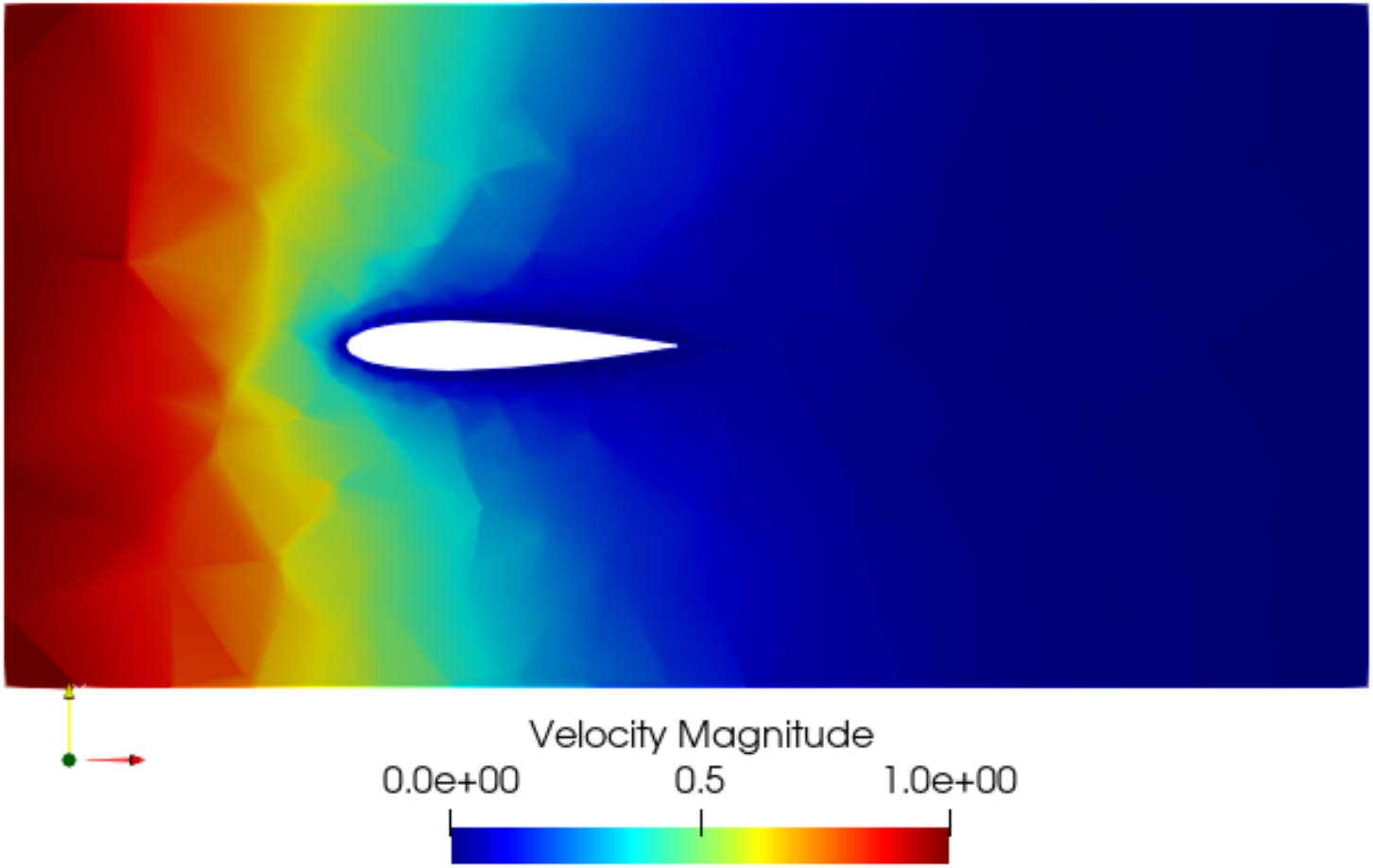
Y las condiciones iniciales

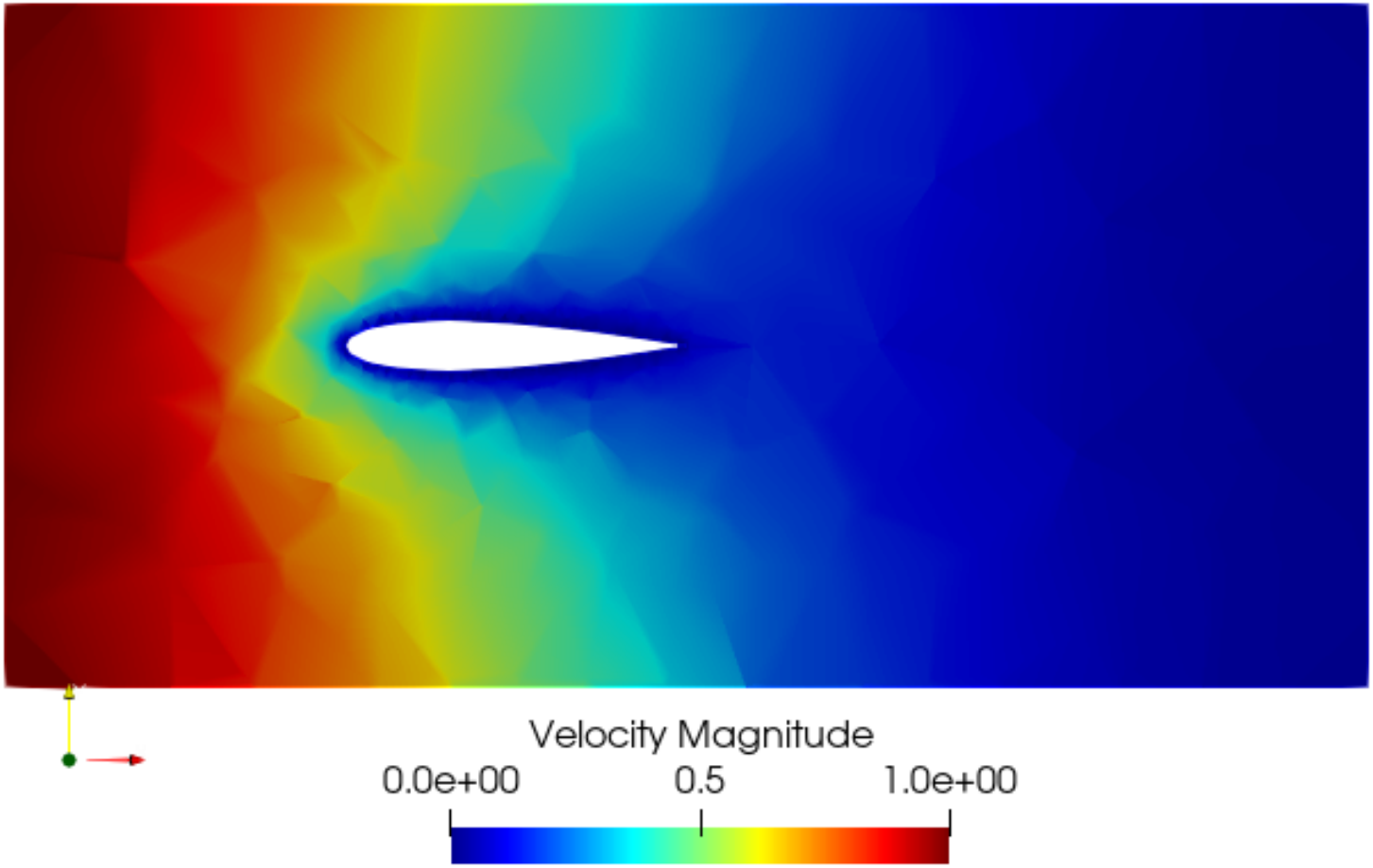
$$u(0) = 0,$$
$$v(0) = 0,$$
$$w(0) = 0$$

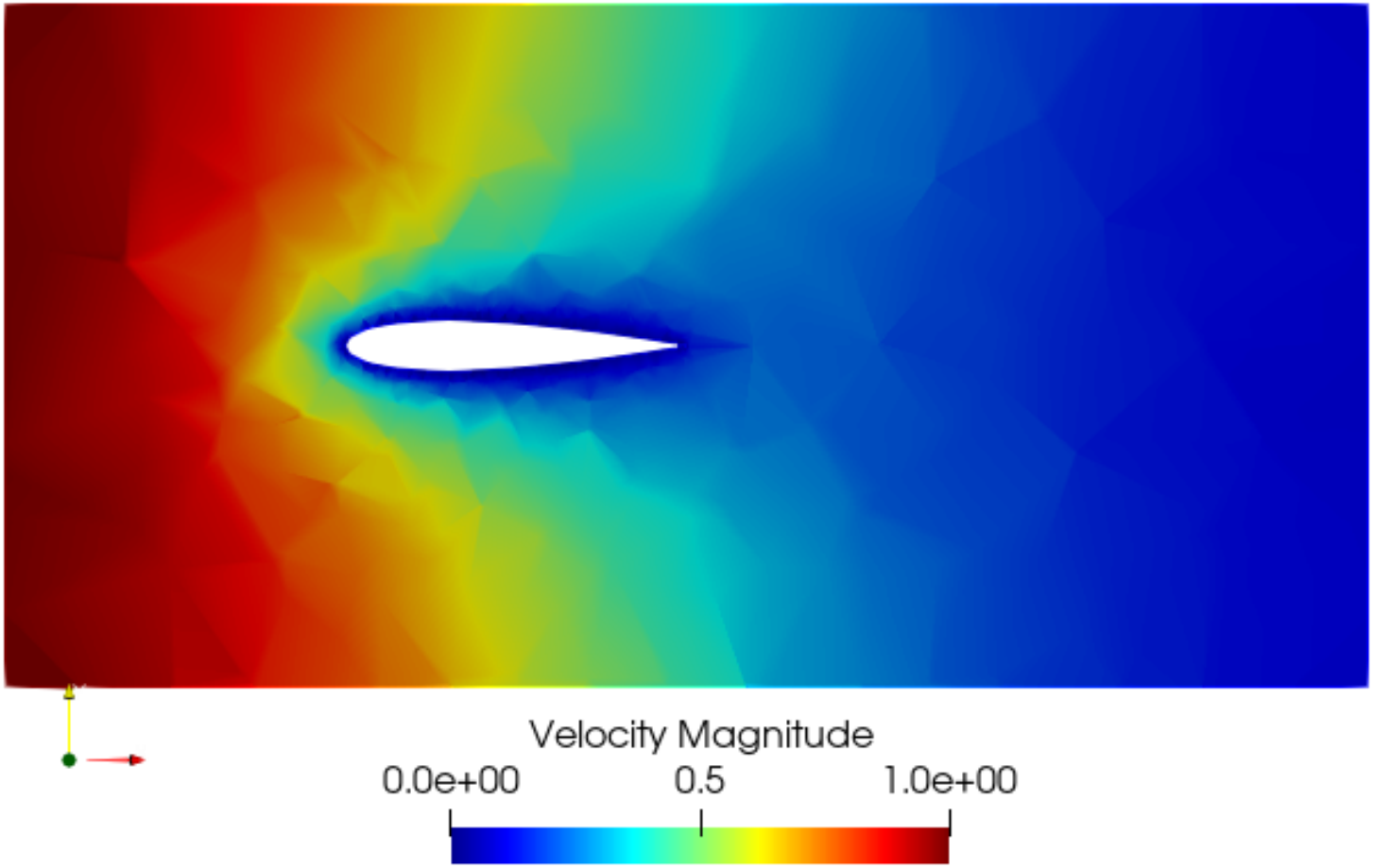


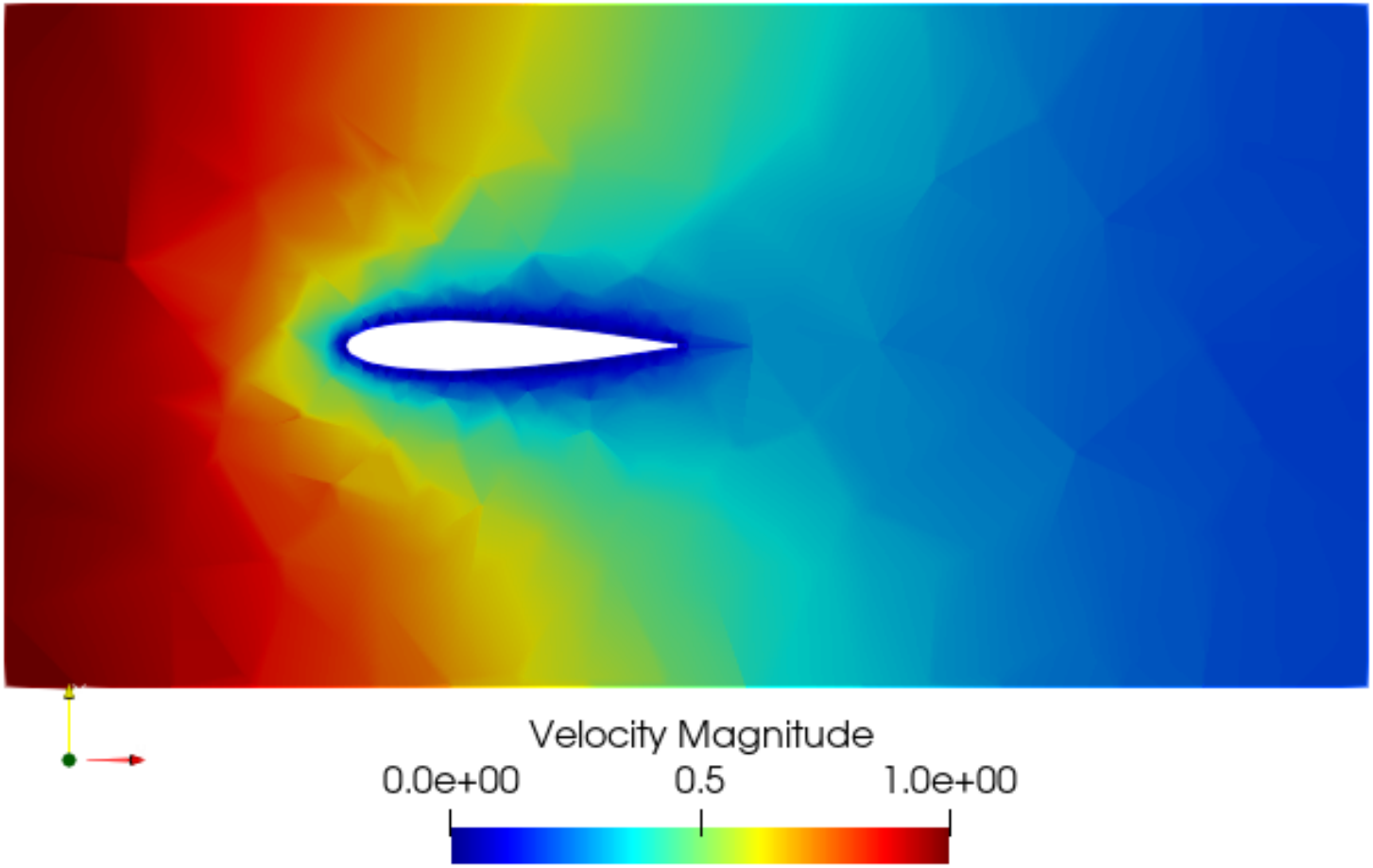
Campo de velocidades. $Re = 1$

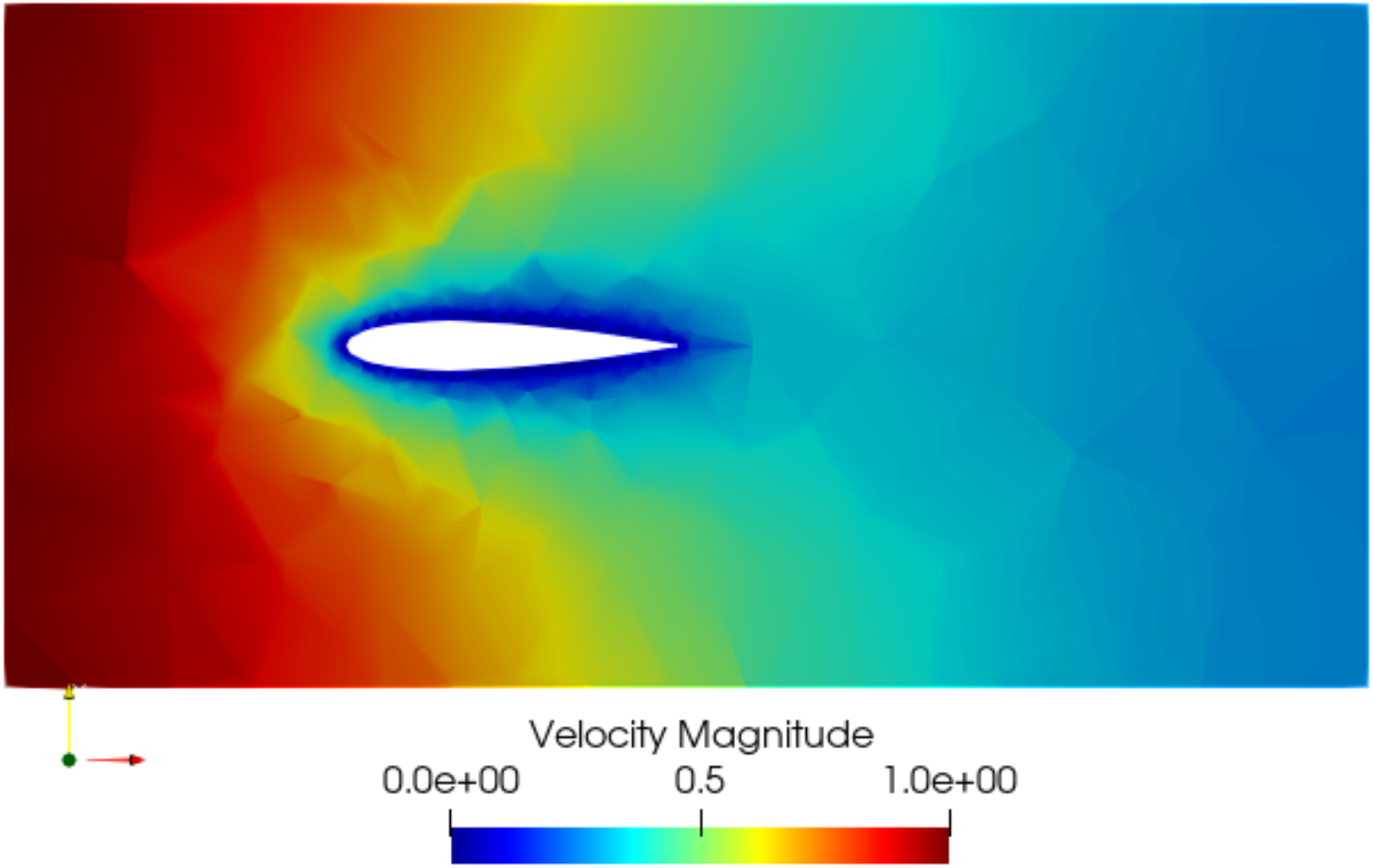

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

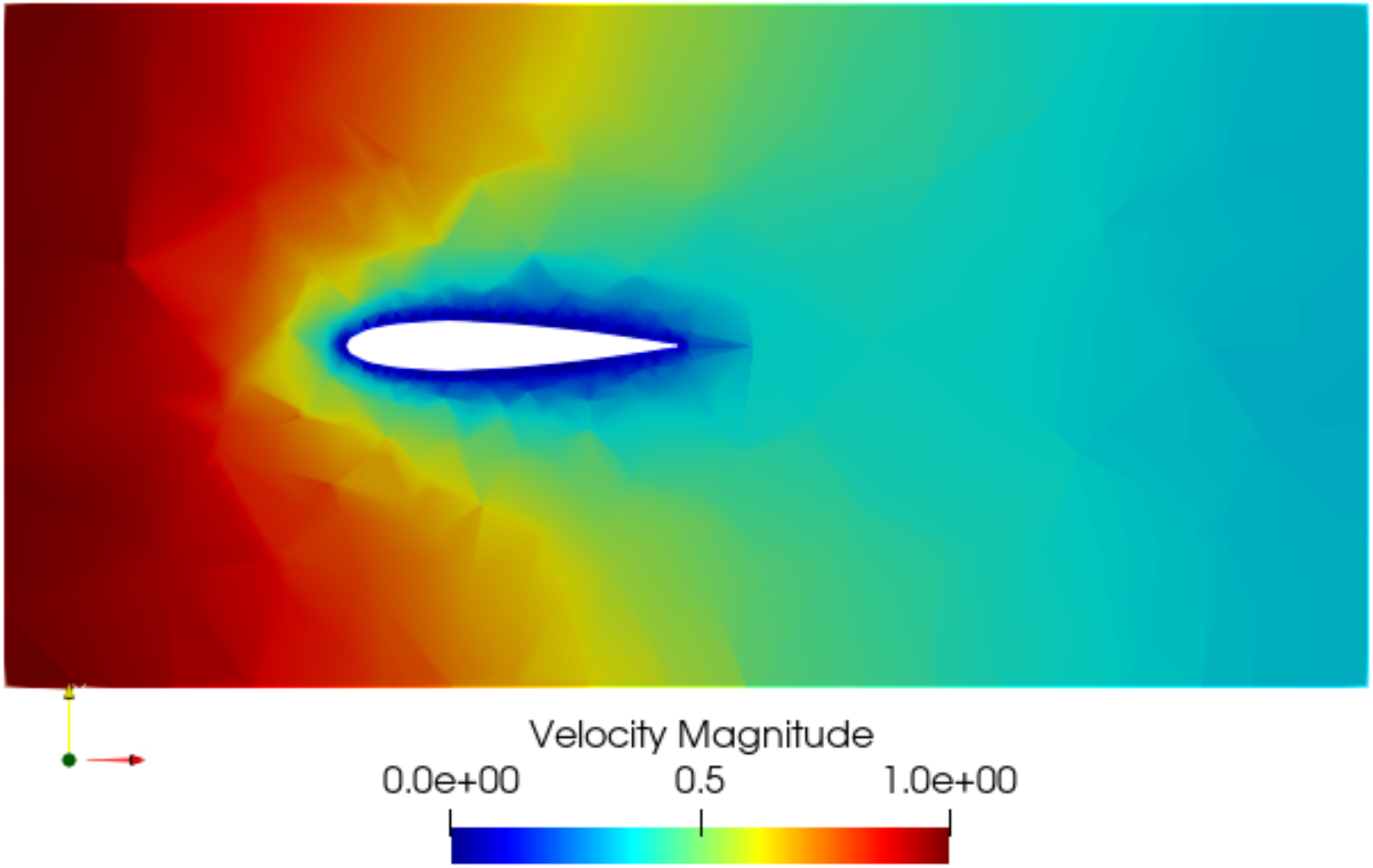

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

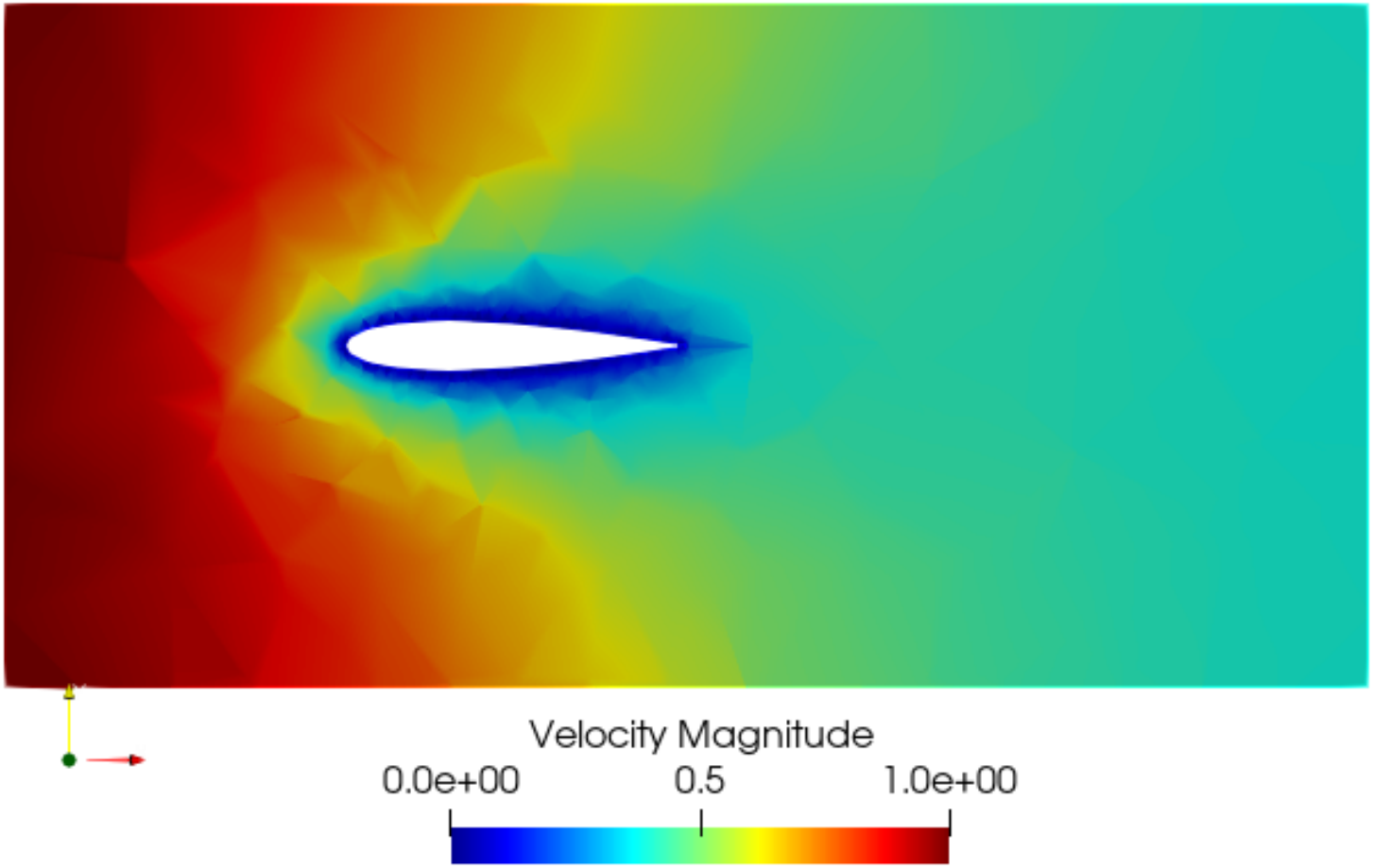

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

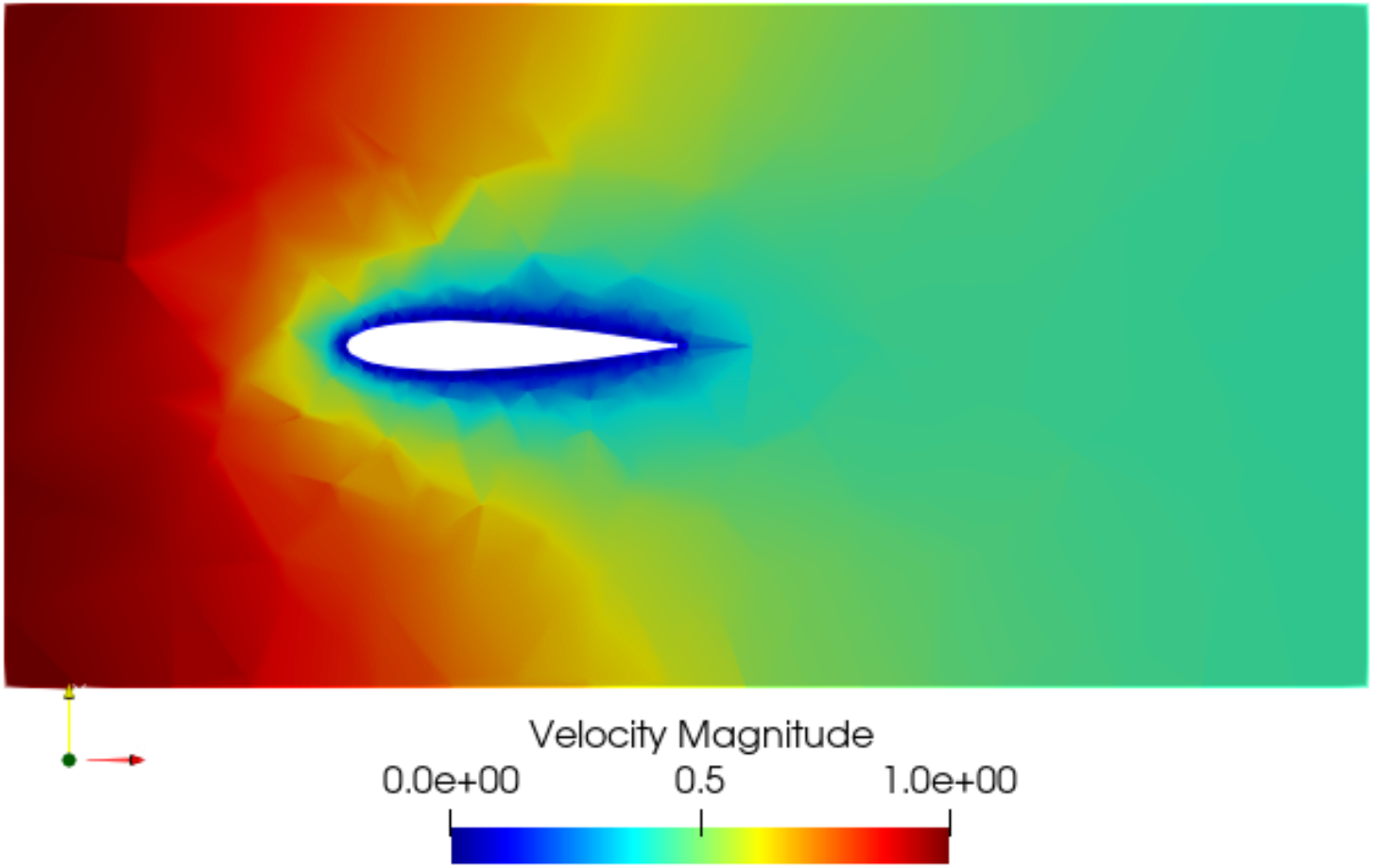

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

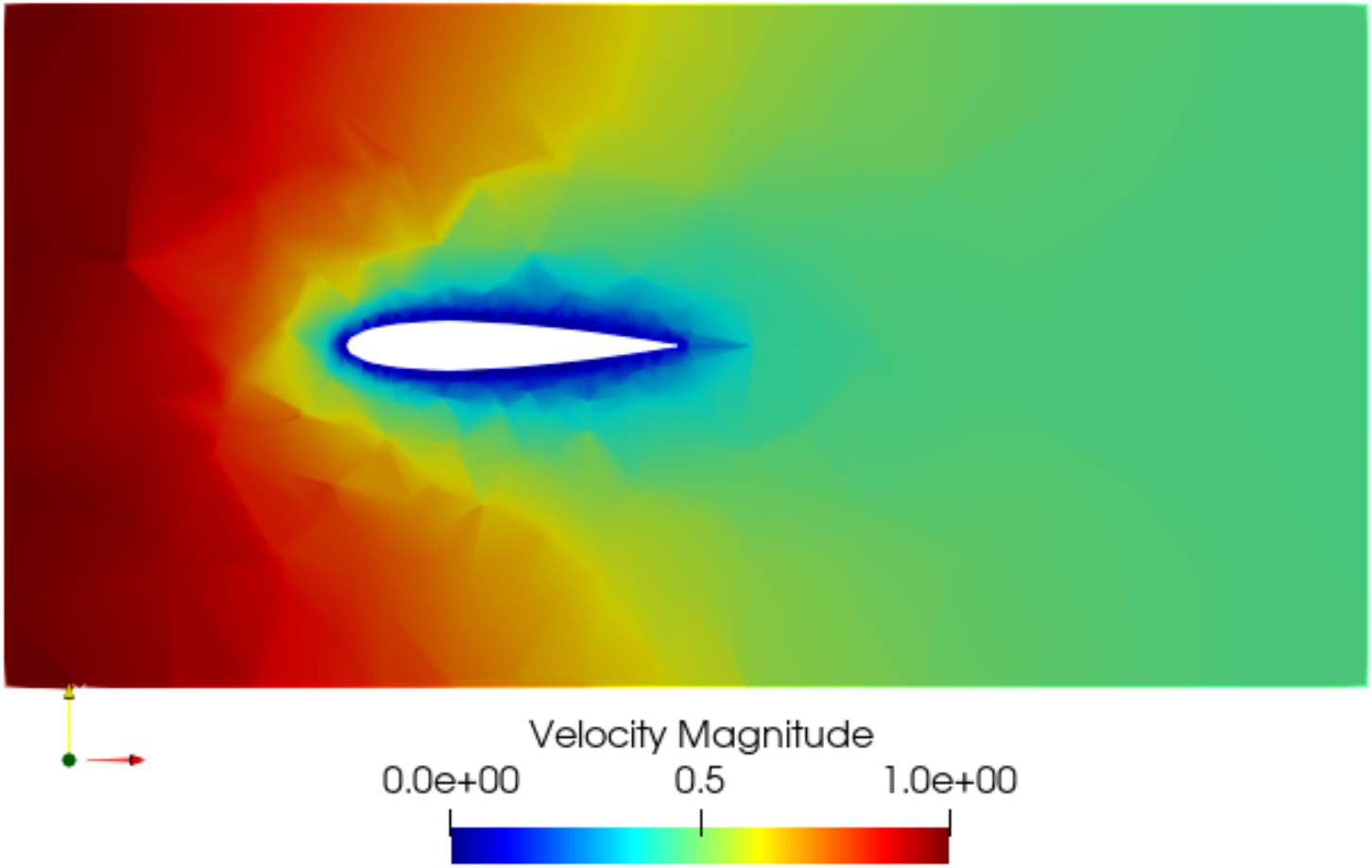

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

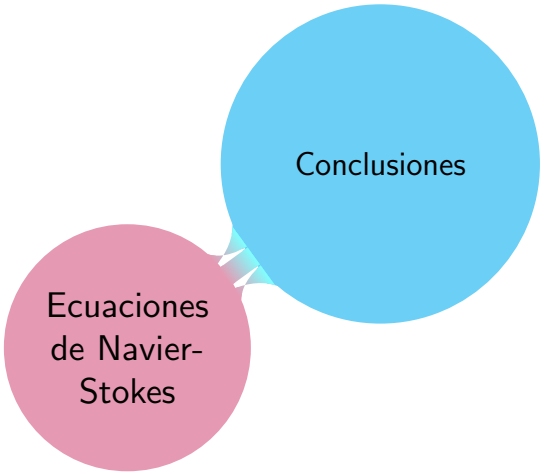

Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00


Velocity Magnitude
0.0e+00
0.5
1.0e+00

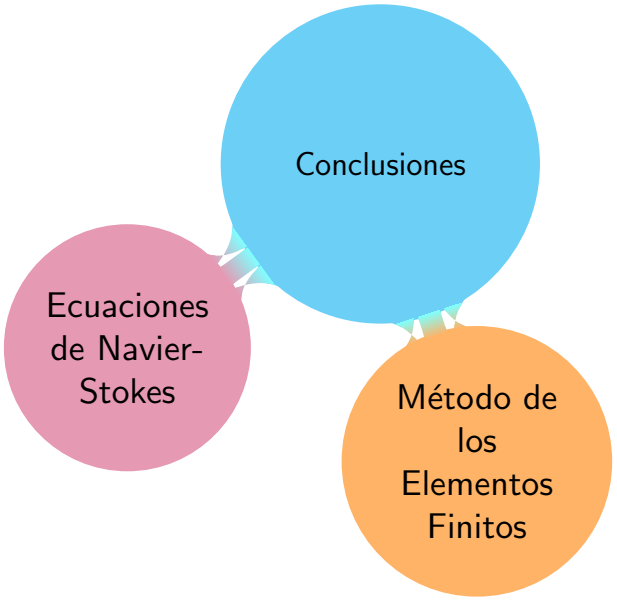
Conclusiones

Conclusiones

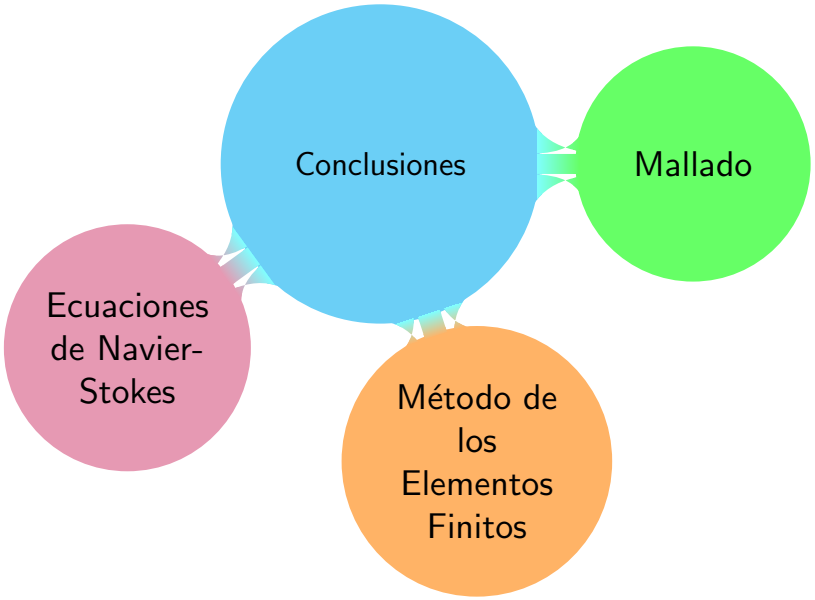
Conclusiones



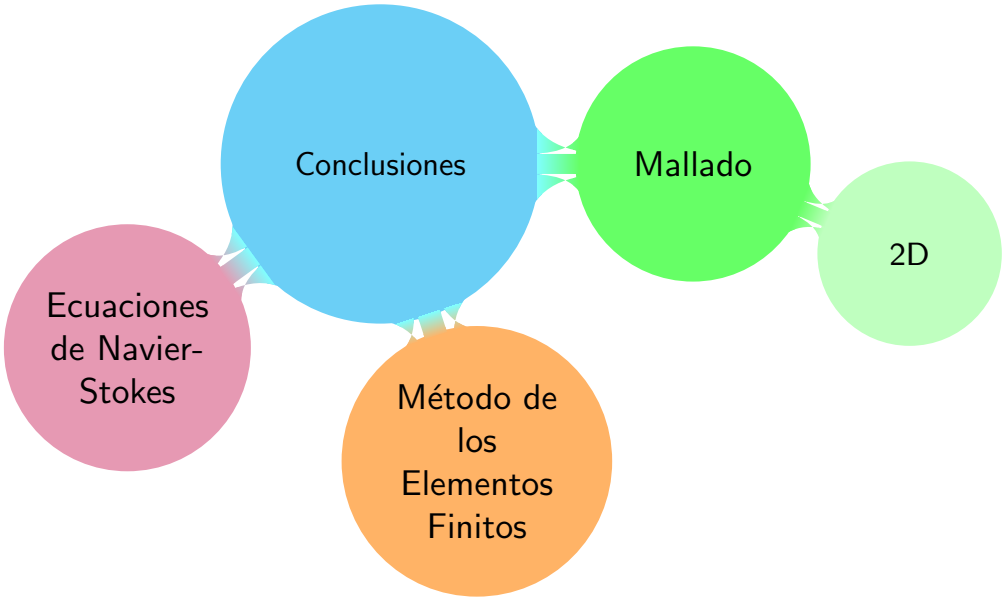
Conclusiones



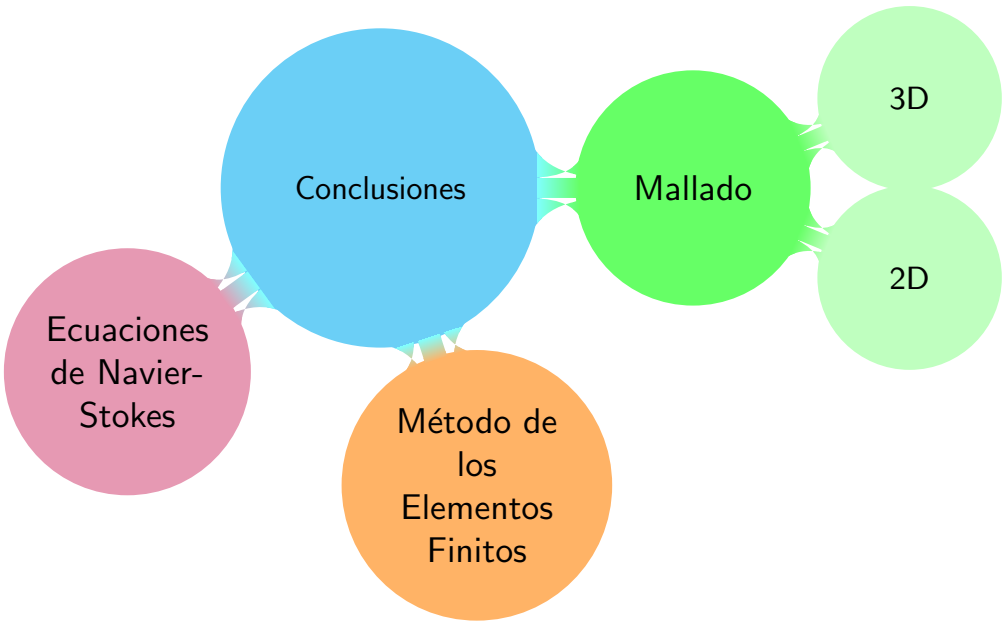
Conclusiones



Conclusiones

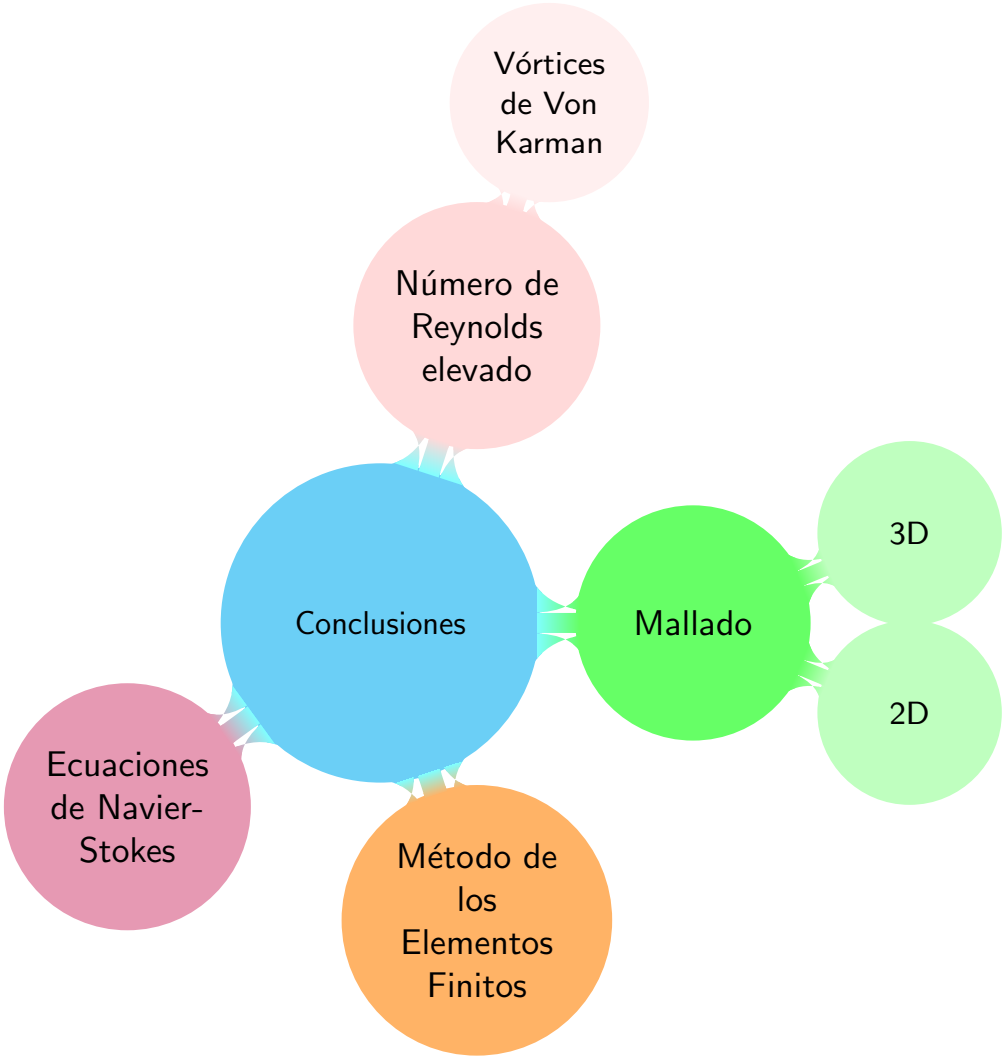


Conclusiones

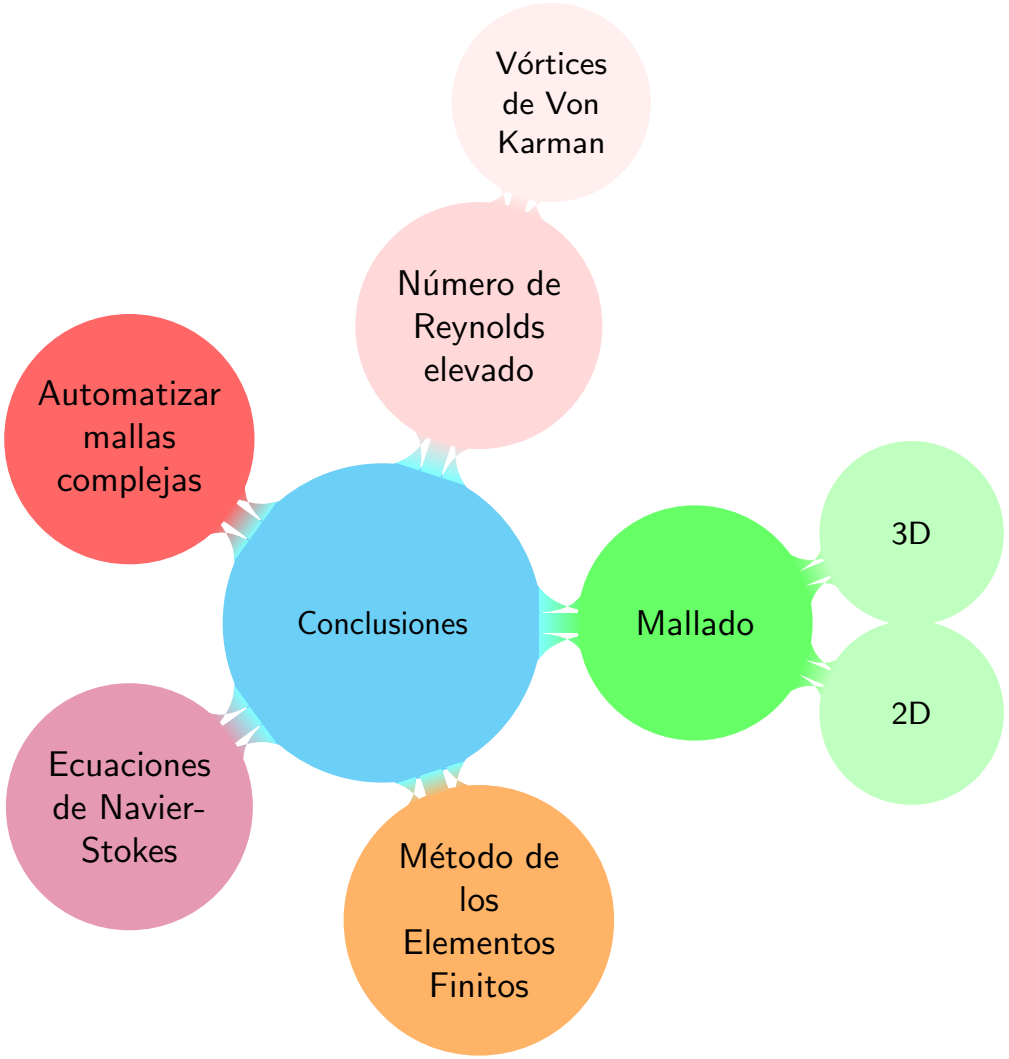


Conclusiones

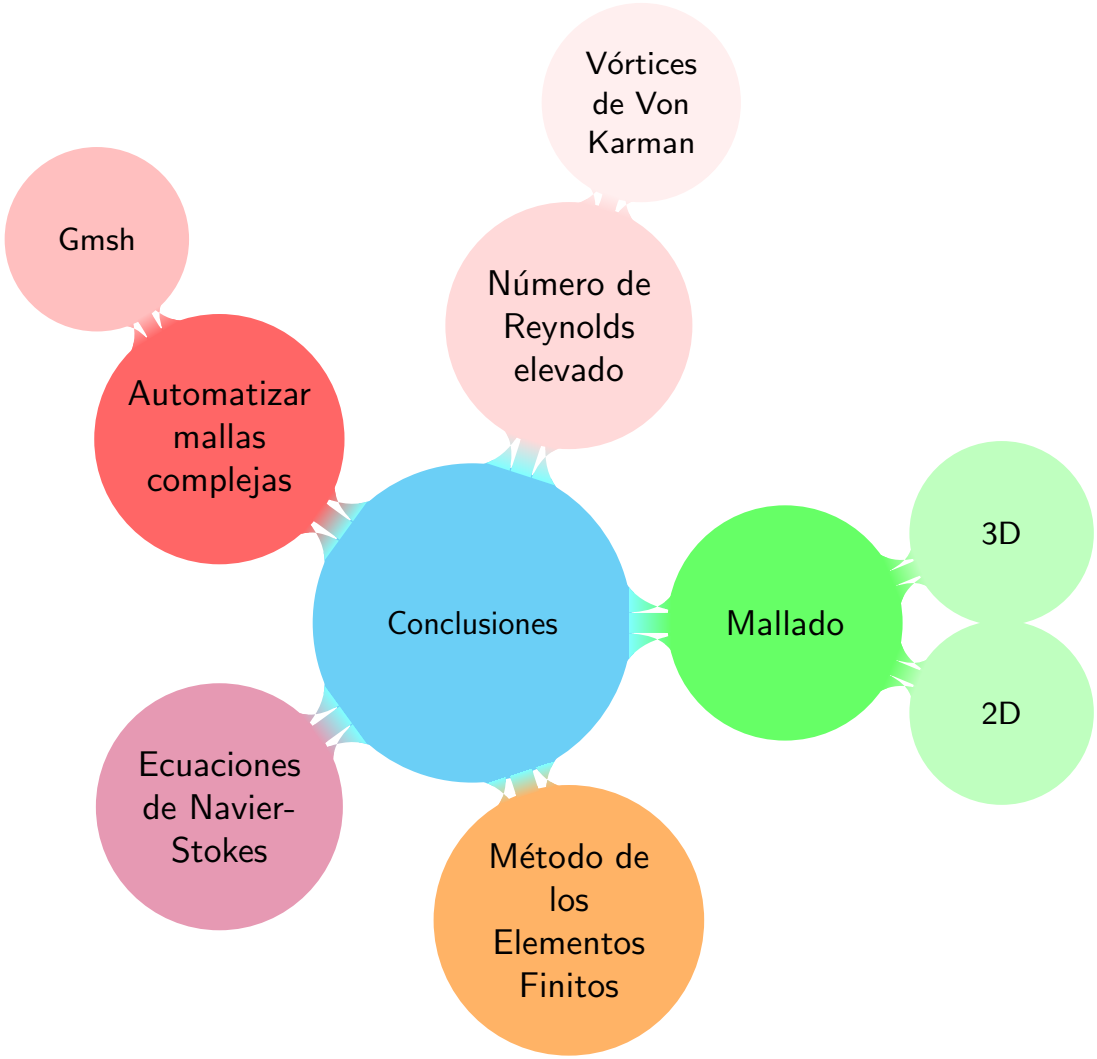
Conclusiones



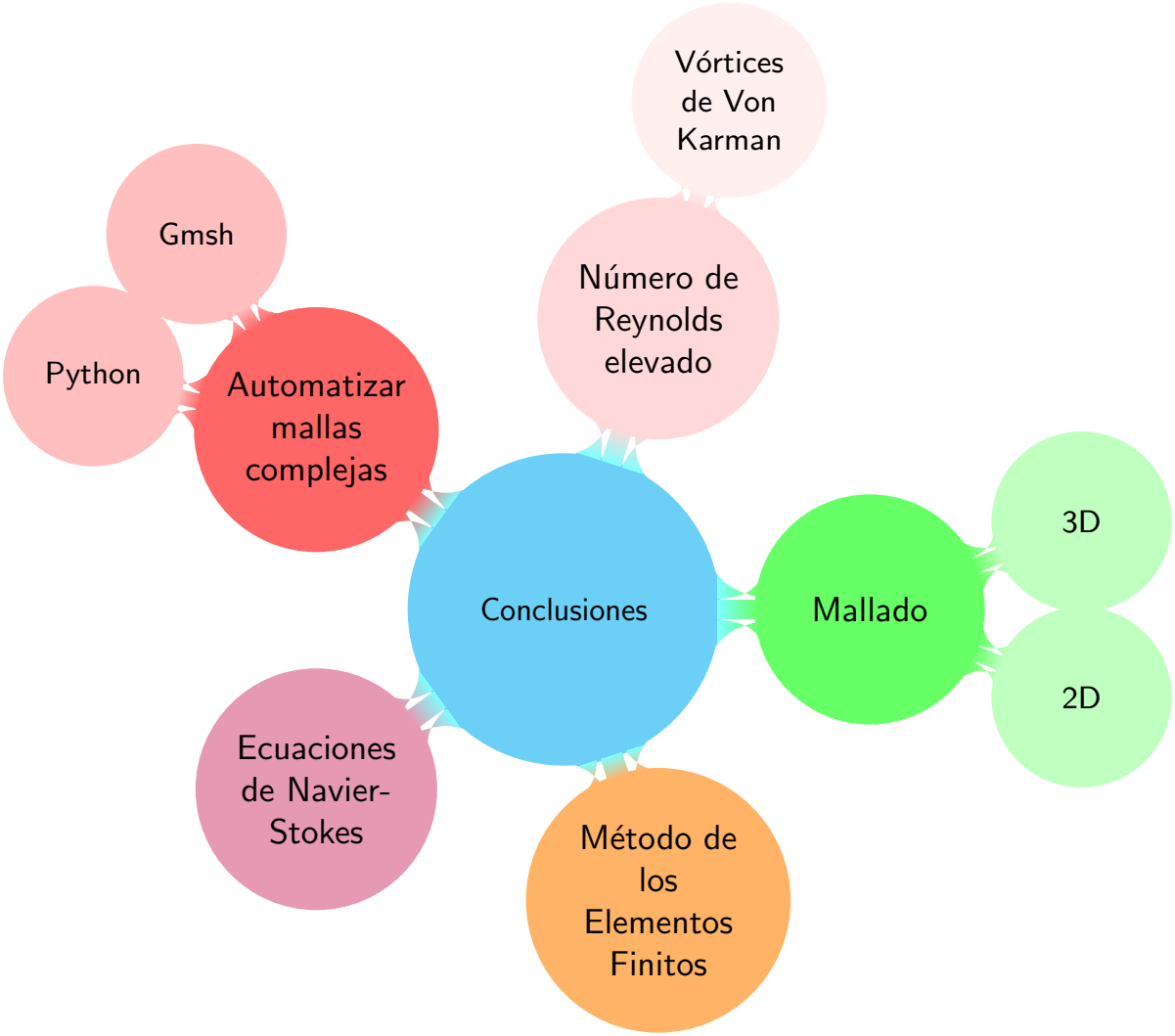
Conclusiones



Conclusiones



Conclusiones

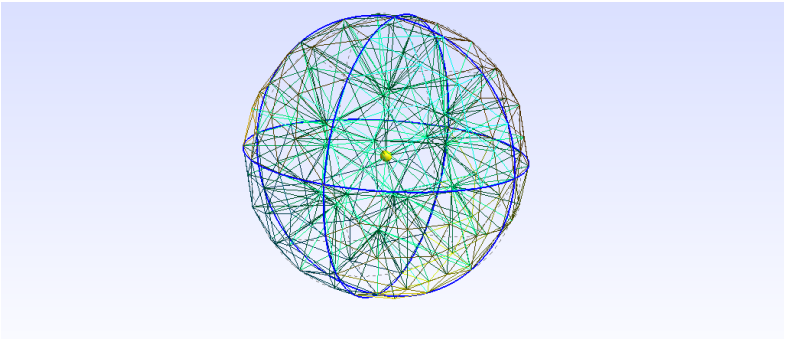


Trabajos futuros

- Mejorar el manejo de las mallas en 3 dimensiones.

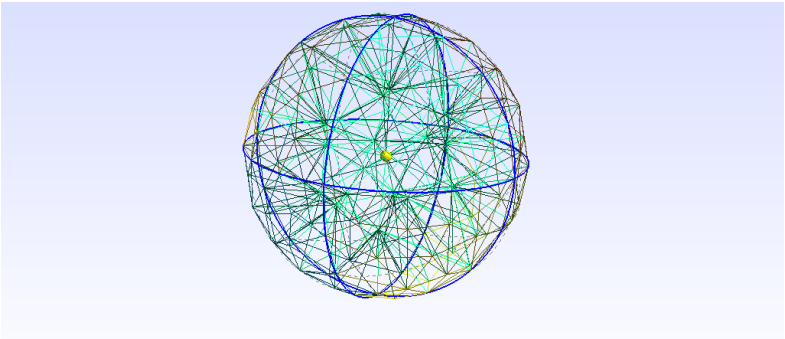
Trabajos futuros

- Mejorar el manejo de las mallas en 3 dimensiones.
- Incluir resolución ecuaciones de Navier-Stokes con un mallado previo al perfil NACA de revolución: esfera.

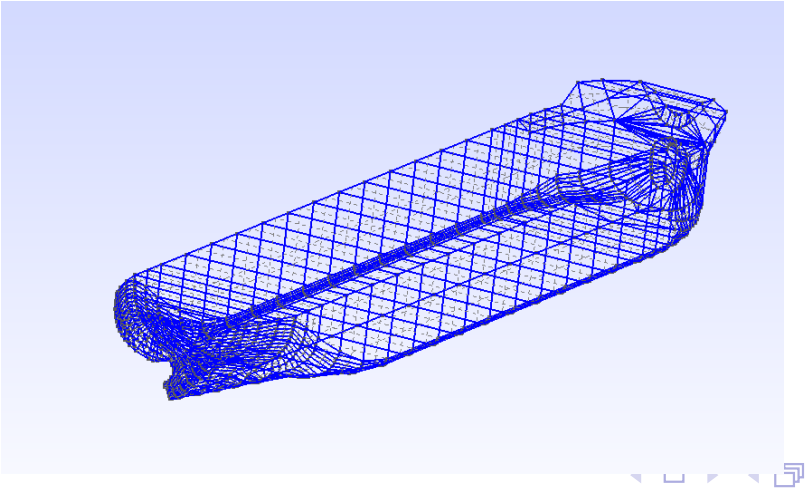


Trabajos futuros

- Mejorar el manejo de las mallas en 3 dimensiones.
- Incluir resolución ecuaciones de Navier-Stokes con un mallado previo al perfil NACA de revolución: esfera.



- Resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio más realista: shuttle tanker.



Bibliografía más relevante

G. Allaire.
Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modelling and numerical simulation.
Oxford University Press, 2007.

Haim Brezis.
Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.
Springer, 2010.

Jerrold E. Chorin, Alexandre J y Marsden.
A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics.
Springer, 2000.

John M. Çengel, Yunus A. y Cimbala.
Mecánica de Fluidos. Fundamentos y aplicaciones.
Mc Graw Hill, 2006.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA DINÁMICA DEL BUQUE

Máster Interuniversitario en Matemáticas

M Carmen Plaza Bermejo

Febrero 2021