**Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого**

Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Прикладная математика»

# Отчет по дисциплине «Вычислительные комплексы» по лабораторной работе №2 «Сечение тела вращения»

Выполнил студент группы 3630102/60201
Чепулис М.А.
Преподаватель: Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2019

# Оглавление

# *Постановка задачи*

Построить фигуру вращения (тор), как дискретный набор точек в трёхмерном пространстве [2]

Построить сечение фигуры плоскостью x = H

Т.к. одно из сечений хорошо описывается лемнискатой Бернулли, то нужно построить лемнискату и сравнить её с соответствующим сечением

Варьируя параметры лемнискаты и тора минимизировать расстояние (Фреше) между ними

# *Теория*

## Сечение тела вращения

Сечение задаётся в плоскости X0Z. Само тело получается путем вращения всех точек сечения по окружности вокруг от Z [2]

Так как сечение тела представляет в виде дискретного набора точек, причем каждая из них движется по окружности, то нужно для каждой точки найти пересечение её окружности и плоскостих = H

Для этого нужно решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = H \\ z = z' \end{cases}$$

Решением данной системы будет: $(H, \pm\sqrt{(R^2 - H^2)},\ z')$

Если подкоренное выражение меньше нуля, то пересечения нет

## Лемниската Бернулли

Параметрическое уравнение лемнискаты Бернулли: [2]

$$\begin{cases} y = c\dfrac{t + t^3}{1 + t^4} \\ x = c\dfrac{t - t^3}{1 + t^4}, \text{где } t = tg(\varphi), c - \text{переметр} \\ z = z' \end{cases}$$

# *Реализация*

Все задания были выполнены на языке программирования Python в среде разработки PyCharm [1]

Работа с числами и массивами данных осуществлялась при помощи библиотеки Python – NumPy

Графики строились функциями библиотеки Python – matplotlib

Трехмерные графики строились при помощи библиотеки Python - mpl_toolkits.mplot3d

Модель тела вращения – пары (z, r), где z – координата z, r – радиус вращения точки вокруг оси Z

# *Результаты*

## Построение сечений

Рассматривается тор со следующими характеристиками:

R = 20 – радиус вращения

r = 10 –радиус образующей

рассматриваемы плоскости сечения x = H:

H = {0, 5, 10, 15, 20, 30}

на графиках оси Y и Z могут иметь различный масштаб

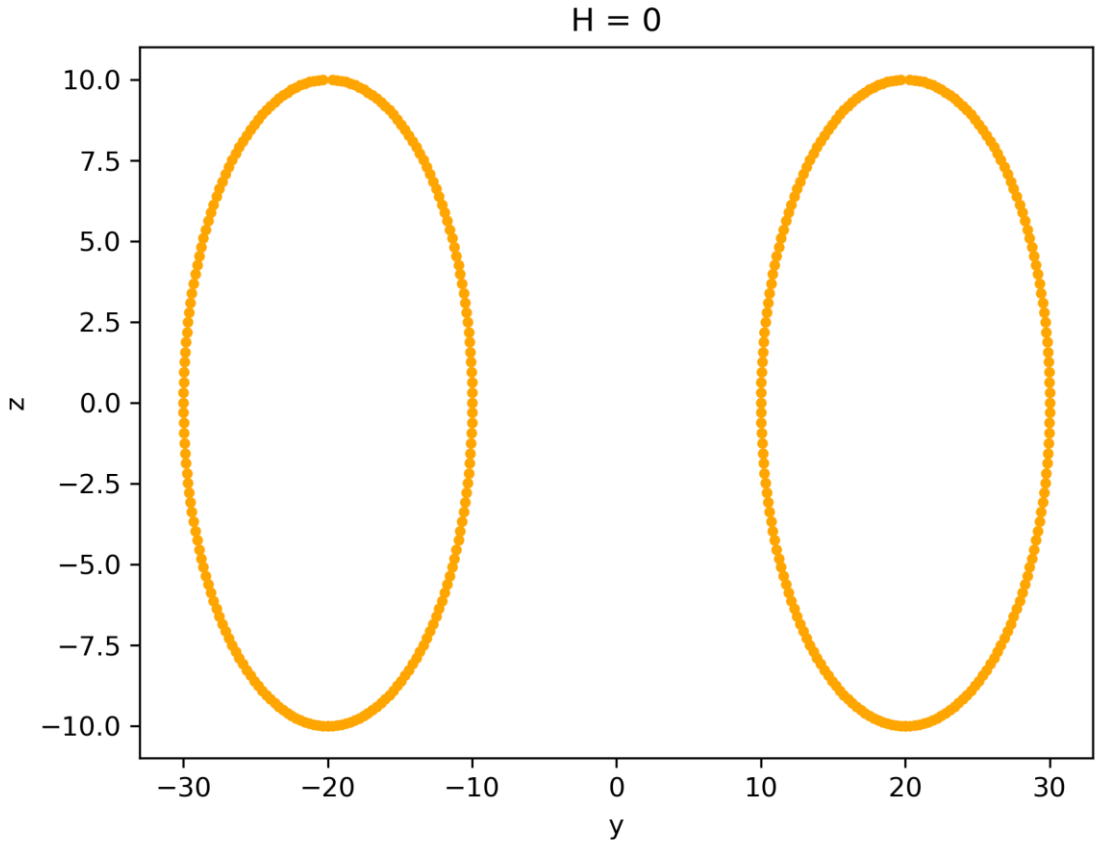



*Figure 1 сечение тора плоскость x = 0*

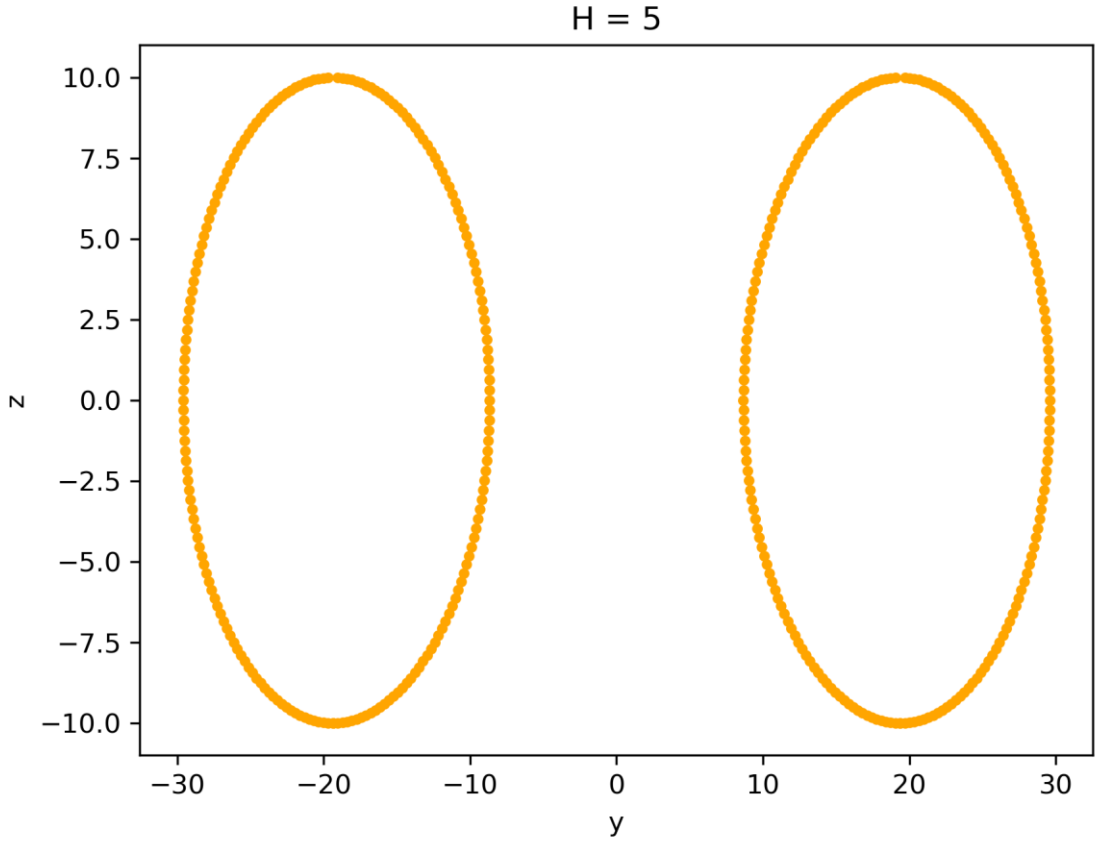



*Figure 2 сечение тора плоскость x = 5*

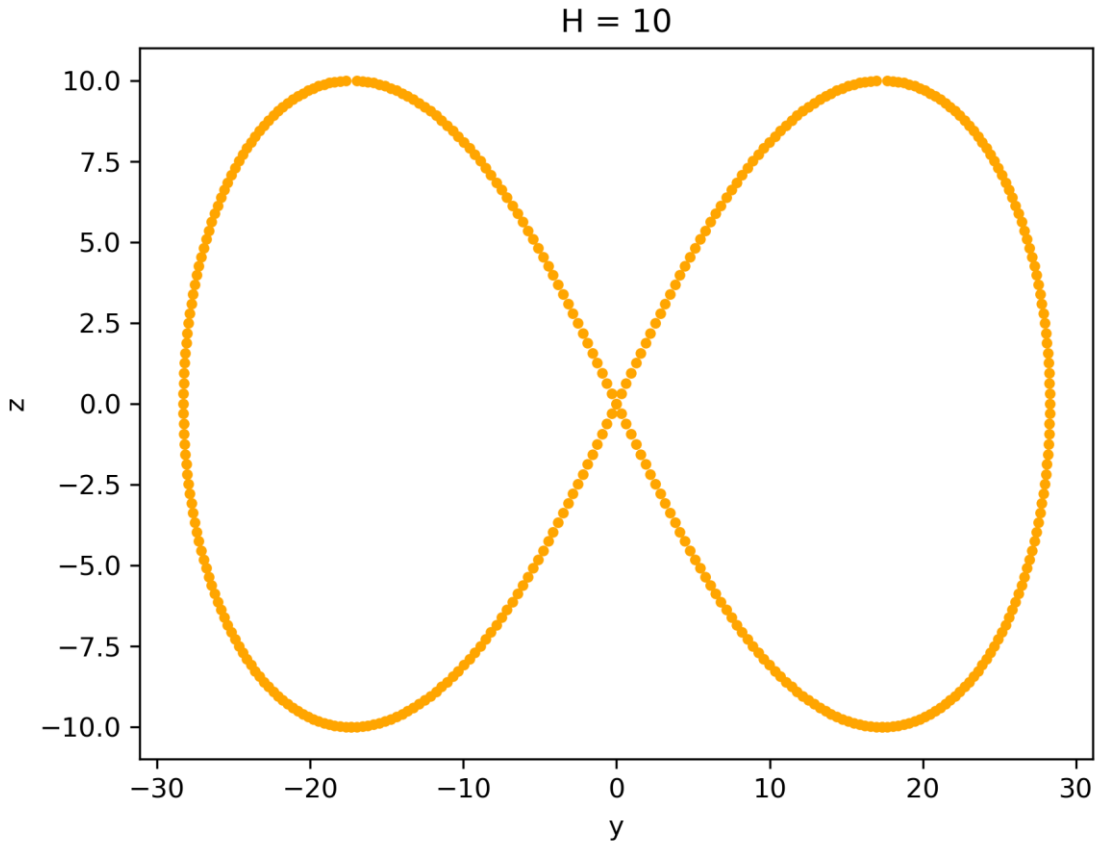



*Figure 3 сечение тора плоскость x = 10*

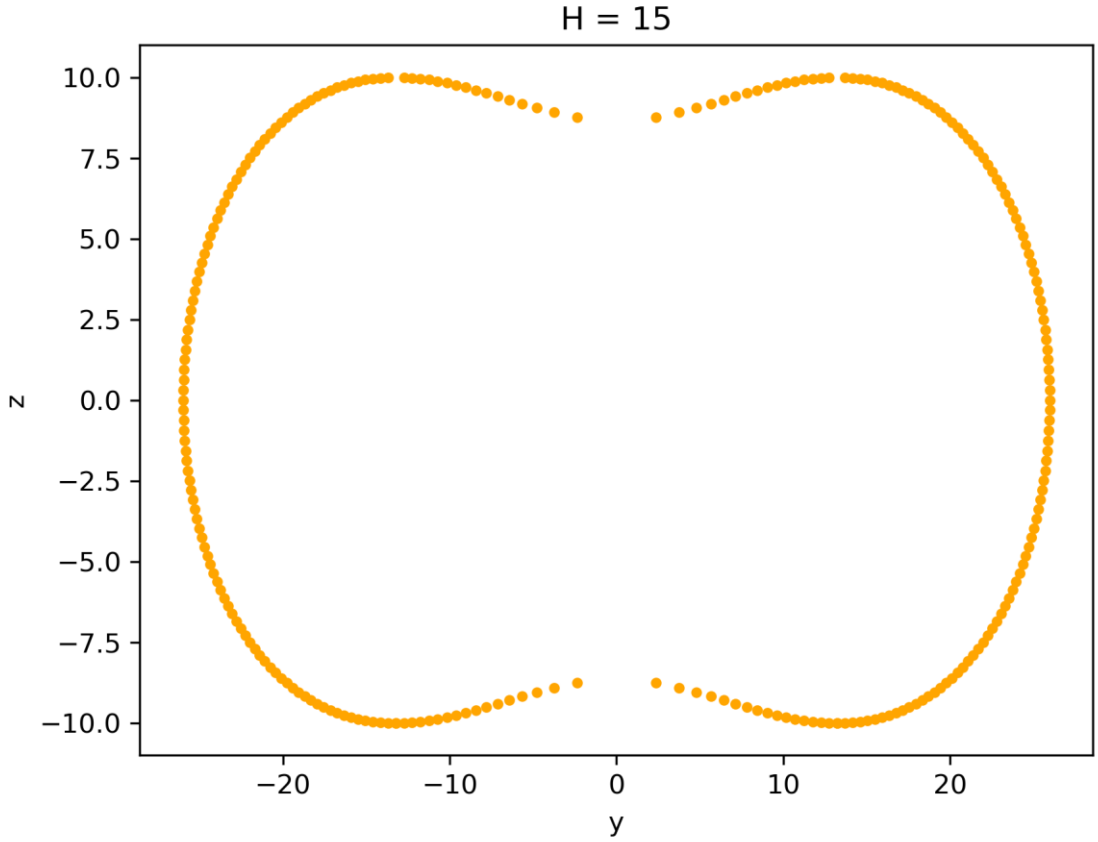



*Figure 4 сечение тора плоскость x = 15*

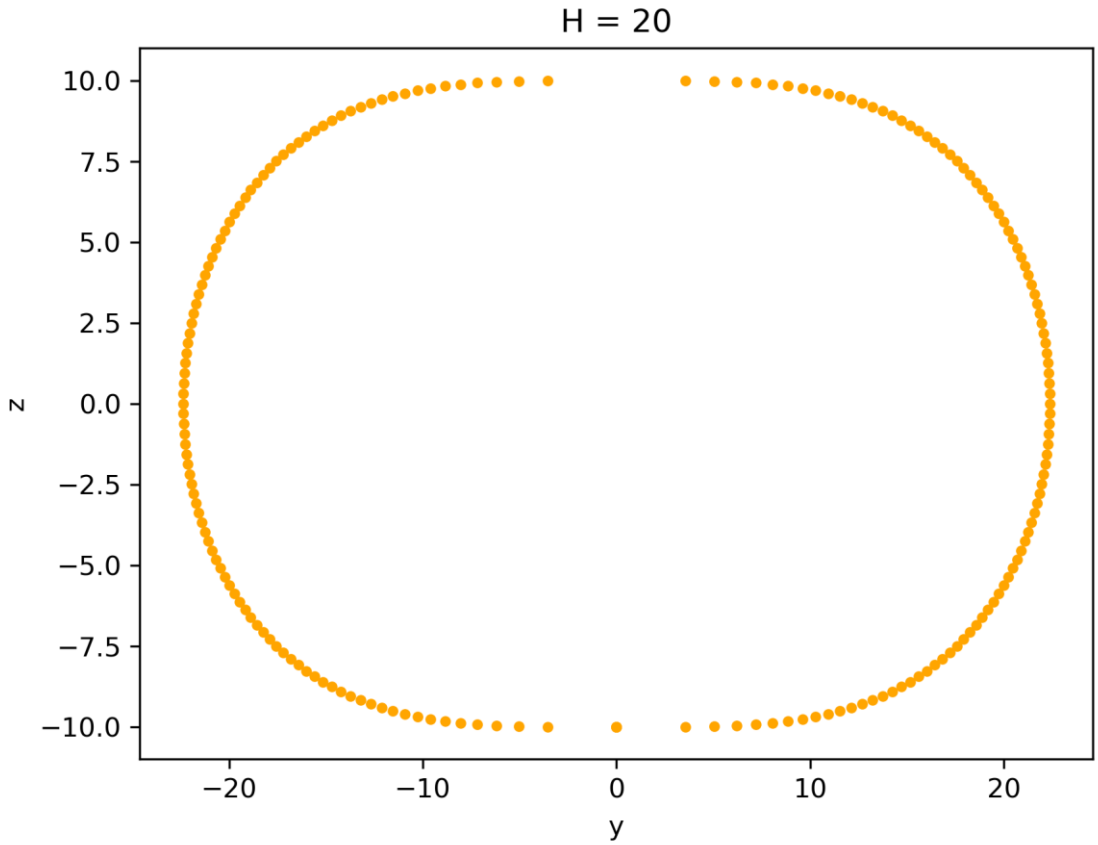



*Figure 5 сечение тора плоскость x = 20*

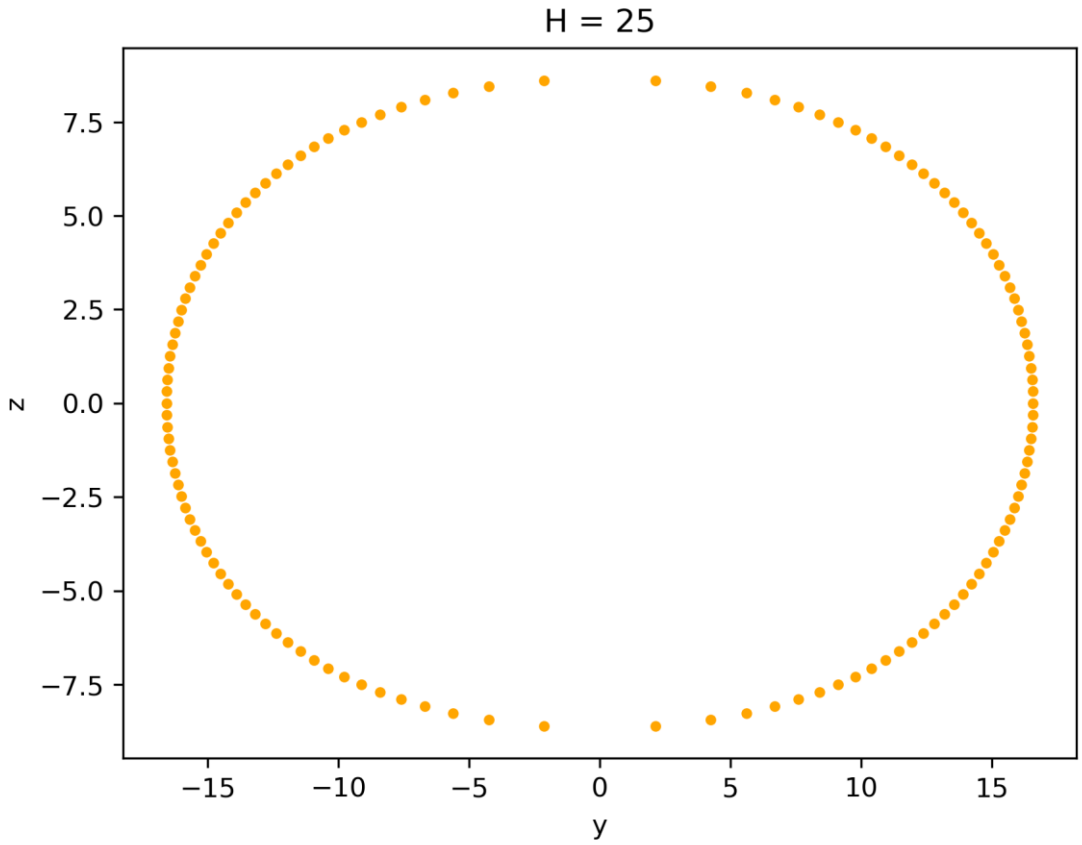



*Figure 6 сечение тора плоскость x = 25*

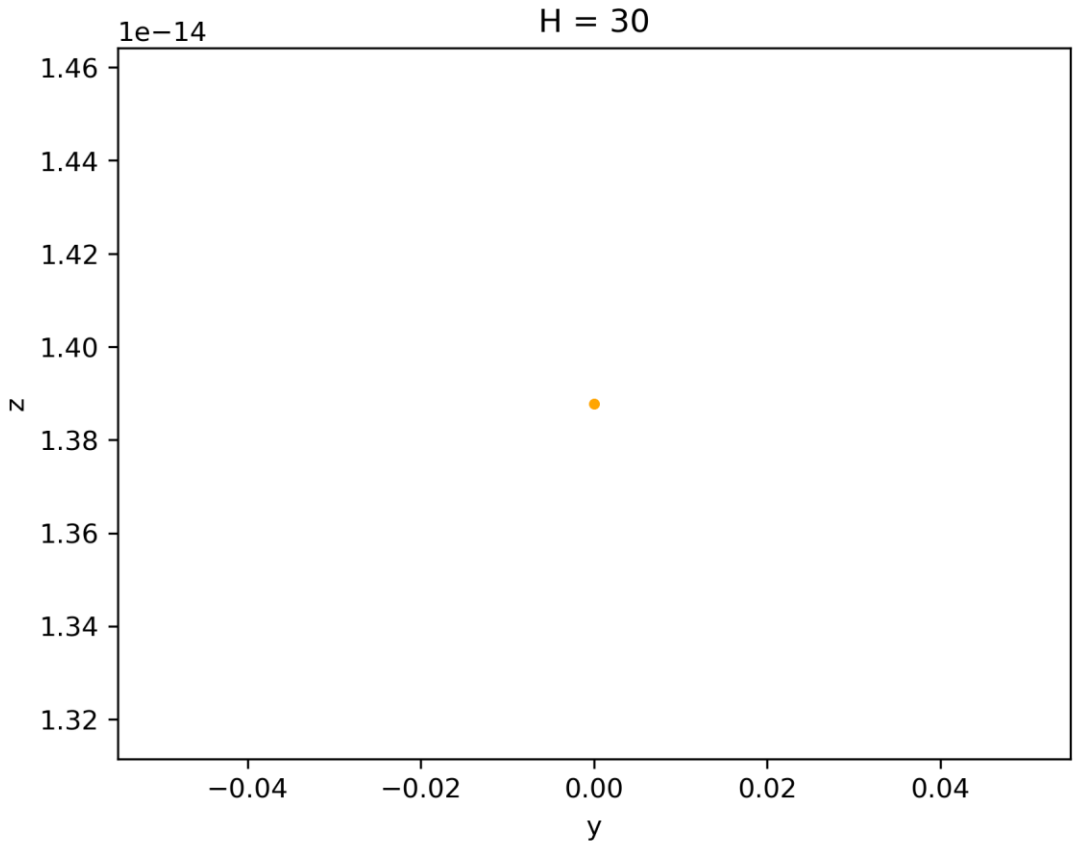



*Figure 7 сечение тора плоскость x = 30*

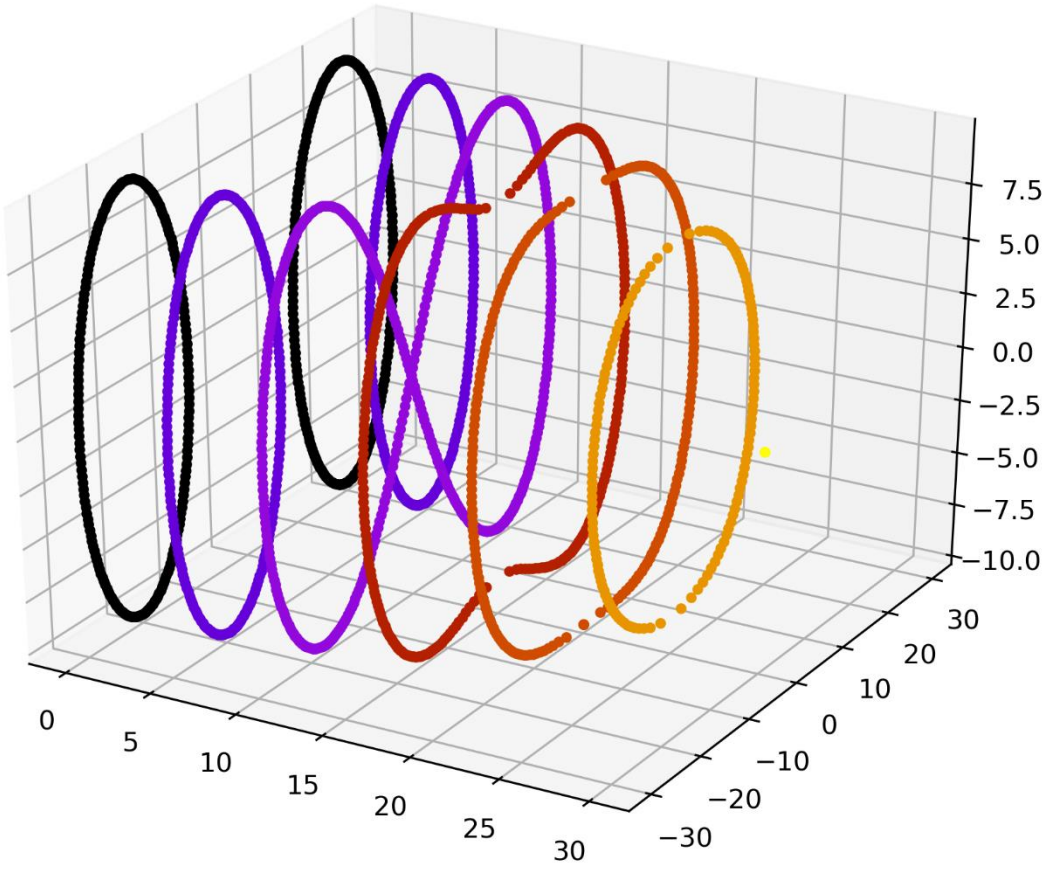



*Figure 7 все сечения на одном графике*

## Сравнение сечений с леминискатой Бернулли

Рассматривается тор со следующими характеристиками:

R = 20 – радиус вращения

r = 5 –радиус образующей

Параметр лемнискаты c = 20

Сечение плоскостью x = R - r (= 15) похоже на лемнискату Бернулли.

Для их сравнения воспользуемся расстоянием Фреше

Расстояние Фреше = 5.3732

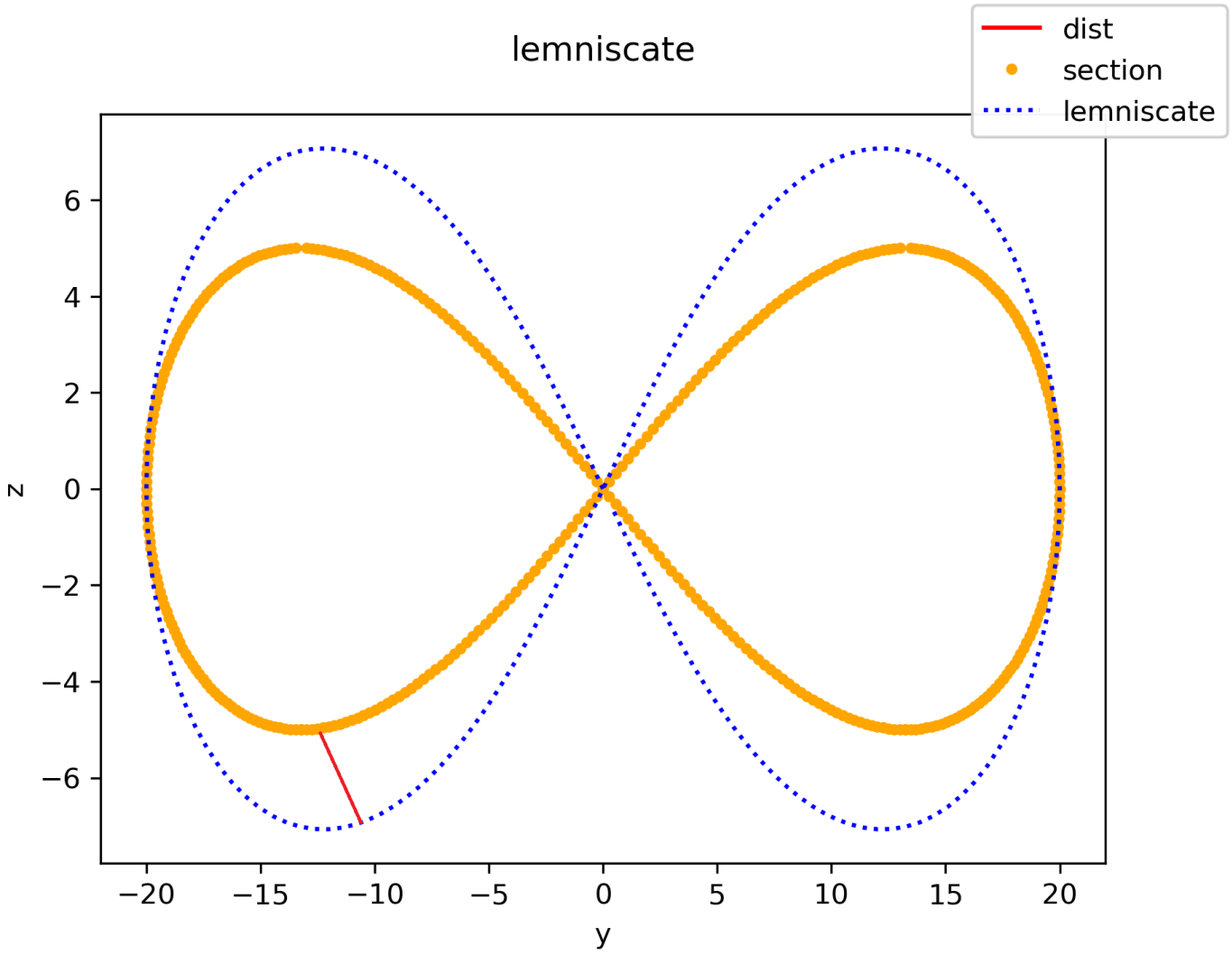



*Figure 8 расстояние Фреше между лемнискатой и сечением тора x = 15*

Путем подбора параметров тора и лемнискаты добьёмся их практического совпадения:

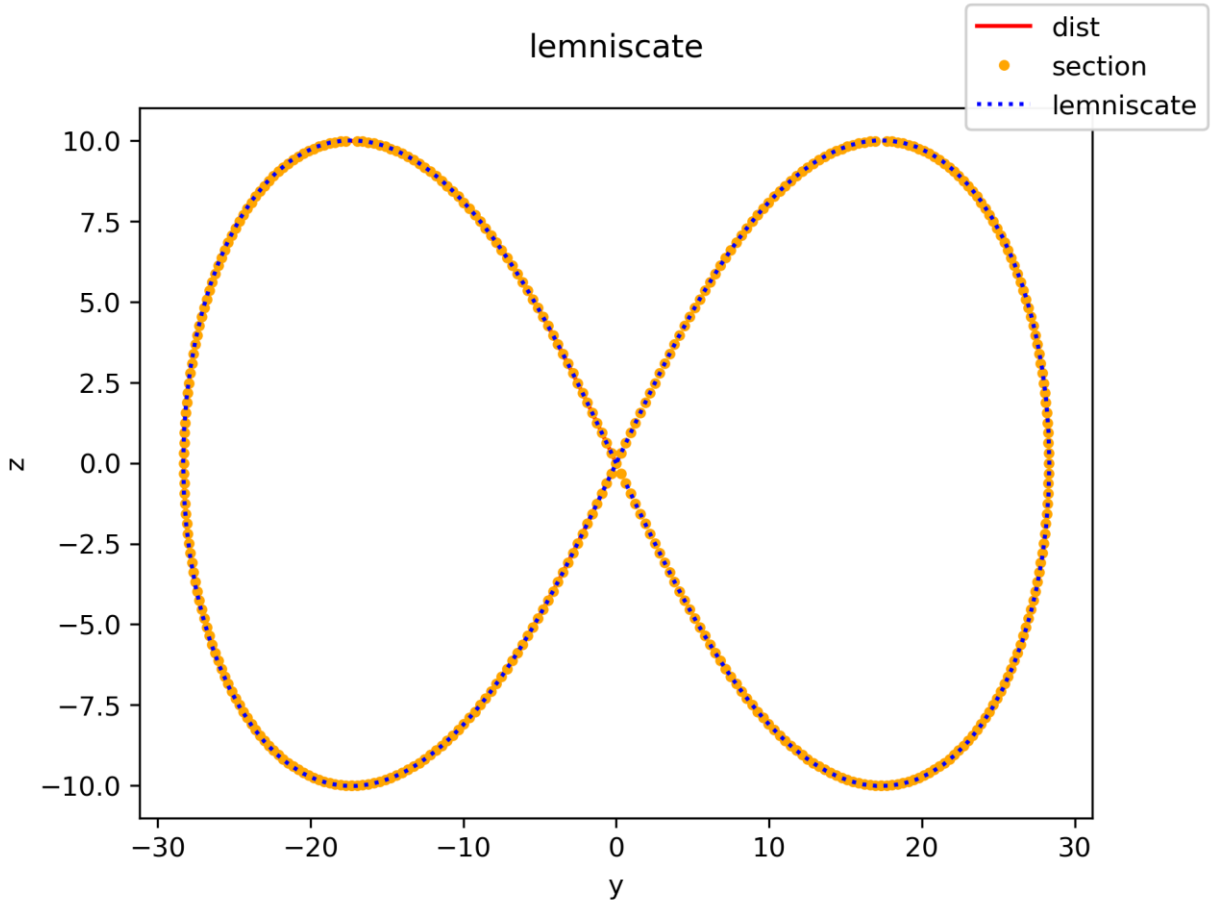
R = 20 – радиус вращения

r = 10 –радиус образующей

сечение плоскость x = 10

Параметр лемнискаты c = 28

Расстояние Фреше = 0.2381




## *Обсуждение*

По результатам видно, что общем случае сечение плоскость x=R-r действительно похоже на лемнискату Бернулли, но не совпадает с ним.

Можно подобрать параметры тора и лемнискаты так, чтобы сечение практически совпадало с лемнискатой (расстояние Фреше мало, но не равняется нулю из-за дискретизации фигур)

Для совпадения радиус образующей тора (r) должен быть в 2 раза меньше его радиуса вращения (R)

Параметр лемнискаты – параметр масштаба (не влияет на её форму), следовательно, от него не зависит необходимое соотношение между r и R

## *Литература*


[1] Документация библиотеку Python numpy [Электронный ресурс]
Режим доступа: http://www.numpy.org/ (дата обращения сентябрь 2019)

[2] Пособие к Лабораторным работам [электронный ресурс, облачное хранилище]
Режим доступа: https://cloud.mail.ru/public/4ra6/5wwqBzMBC/LabPractics.pdf (дата обращения сентябрь 2019)

## *Приложение*

Код программы на Python

### Lab_1.py

```
import pylab
import frechet
import matplotlib.pyplot as plt
# noinspection PyInterpreter
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np


class TorPoint:
    def __init__(self, z_, r1_, r2_):
        self.z = z_
        self.r1 = r1_
        self.r2 = r2_


class Point:
    def __init__(self, x_, y_, z_):
        self.x = x_
        self.y = y_
        self.z = z_


class Tor:
    def __init__(self, z_, r_rotate, r_circle):
        self.z = z_
        self.R = r_rotate
        self.r = r_circle
        self.points = []

    def generate_points(self, num_points):
        self.points = []
        n = num_points
        step = np.pi / n
        fi = -np.pi / 2.0

        for i in range(0, n):
            z = self.r * np.sin(fi)
            dr = self.r * np.cos(fi)
            point = TorPoint(z, self.R - dr, self.R + dr)
            self.points.append(point)
            fi += step

    def get_tor_points(self):
        return self.points


def points_on_plane(tor_point, x_plane):
    z = tor_point.z
    r1 = tor_point.r1
    r2 = tor_point.r2

    point1 = Point(x_plane, np.sqrt(r1**2 - x_plane**2), z)
    point2 = Point(x_plane, np.sqrt(r2**2 - x_plane**2), z)

    point3 = Point(x_plane, -np.sqrt(r1 ** 2 - x_plane ** 2), z)
    point4 = Point(x_plane, -np.sqrt(r2 ** 2 - x_plane ** 2), z)
    return point1, point2, point3, point4


def get_y_array(points):
```

```
    data = []
    for point in points:
        data.append(point.y)
    return data


def get_z_array(points):
    data = []
    for point in points:
        data.append(point.z)
    return data


def get_intersection_tor_plane(tor, x_plane):
    tor_points = tor.get_tor_points()

    result = []
    left1 = []
    left2 = []
    left3 = []
    left4 = []

    left_jump_2_3_flag = False
    left_jump_1_4_flag = False
    right_jump_2_3_flag = False
    right_jump_1_4_flag = False

    right1 = []
    right2 = []
    right3 = []
    right4 = []
    for point in tor_points:
        tmp = points_on_plane(point, x_plane)

        if not np.isnan(tmp[0].y):
            if not right_jump_1_4_flag:
                right1.append(tmp[0])
            else:
                right4.append(tmp[0])
        else:
            right_jump_1_4_flag = True

        if not np.isnan(tmp[1].y):
            if not right_jump_2_3_flag:
                right2.append(tmp[1])
            else:
                right3.append(tmp[1])
        else:
            right_jump_2_3_flag = True

        if not np.isnan(tmp[2].y):
            if not left_jump_1_4_flag:
                left1.append(tmp[2])
            else:
                left4.append(tmp[2])
        else:
            left_jump_1_4_flag = True

        if not np.isnan(tmp[3].y):
            if not left_jump_2_3_flag:
                left2.append(tmp[3])
            else:
                left3.append(tmp[3])
        else:
            left_jump_2_3_flag = True
```

```
    right1.reverse()
    right4.reverse()
    left1.reverse()
    left4.reverse()

    left = left2 + left3 + left4 + left1
    right = right2 + right3 + right4 + right1
    right.reverse()

    return left, right


def print_points(points):
    print()
    for point in points:
        print(point.x, point.y, point.z)


def plot_3D(plane_cut, name, filename):

    data = []

    fig = pylab.figure()
    axes = Axes3D(fig)

    i = 0
    number = len(plane_cut)
    cmap =plt.get_cmap('gnuplot')
    colors = [cmap(i) for i in np.linspace(0, 1, number)]
    for points_arr in plane_cut:
        for points in points_arr:
            x = []
            y = []
            z = []
            x1 = []
            y1 = []
            z1 = []
            for elem in points:
                x.append([elem.x])
                y.append([elem.y])
                z.append([elem.z])
                x1.append(elem.x)
                y1.append(elem.y)
                z1.append(elem.z)

            x = np.matrix(x)
            y = np.matrix(y)
            z = np.matrix(z)
            axes.plot(x1, y1, z1, ".", color=colors[i])
            #axes.plot_wireframe(x, y, z, color=colors[i], linewidth=5, linestyle='-')

        i += 1

    fig.savefig(filename, dpi=300, format='png', bbox_inches='tight')
    fig.show()
    plt.close(fig)


def draw_cut(points_arr, name, filename):
    plt.axis('scaled')
    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, sharey=True)
    ax.set_xlabel("y")
    ax.set_ylabel("z")
    ax.set_title(name)
```

```
    for points in points_arr:
        x = []
        y = []
        z = []
        for elem in points:
            x.append(elem.x)
            y.append(elem.y)
            z.append(elem.z)
        ax.plot(y, z, ".", color="orange")
    box = ax.get_position()
    ax.set_position([box.x0, box.y0, box.width, box.height])
    #fig.legend()
    fig.savefig(filename, dpi=300, format='png', bbox_inches='tight')

    fig.show()
    plt.close(fig)


def plane_research(tor, planes):
    data = []
    for plane in planes:
        left, right = get_intersection_tor_plane(tor, plane)
        draw_cut([left, right], "H = %i" % plane, "Tor_section(H = %i).png" % plane)
        data.append([left, right])

    plot_3D(data, "H = %i" % len(planes), "Tor_cuts(H = %i).png" % len(planes))


def lemniscate(c):
    result = []
    n = 360
    fi = 0
    step = 2 * np.pi / n
    left = []
    right = []
    for i in range(0, n//4):
        t = np.tan(fi)
        x = c * (t + t ** 3) / (1 + t ** 4)
        y = c * (t - t ** 3) / (1 + t ** 4)
        right.append([x, y])
        fi += step

    for i in range(n//4, n // 2):
        t = np.tan(fi)
        x = c * (t + t ** 3) / (1 + t ** 4)
        y = c * (t - t ** 3) / (1 + t ** 4)
        left.append([x, y])
        fi += step


    '''
    names = ["left", "right"]
    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, sharey=True)
    data = [left, right]
    i = 0
    for points in data:
        x = []
        y = []
        for elem in points:
            x.append(elem[0])
            y.append(elem[1])
        ax.plot(x, y, label=names[i])
        i+=1
    fig.legend()
```

```
    fig.show()
    '''
    return left, right


def draw_line_on_plot(line, ax, color):
    data = [line]
    for i in range(0, len(data)):
        x = []
        y = []
        for elem in data[i]:
            x.append(elem[0])
            y.append(elem[1])
        ax.plot(x, y, ":", label="lemniscate", color=color)


def process_lemniscate(tor, plane, c):
    name = "lemniscate"
    filename = "lemniscate.png"


    left, right = get_intersection_tor_plane(tor, plane)
    points_arr = [left, right]
    l, r = lemniscate(c)


    plt.axis('scaled')
    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, sharey=True)
    ax.set_xlabel("y")
    ax.set_ylabel("z")
    ax.set_title(name + "\n")

    data = []
    data_arr = []
    draw_flag = True
    for points in points_arr:
        x = []
        y = []
        z = []
        tmp = []
        for elem in points:
            x.append(elem.x)
            y.append(elem.y)
            z.append(elem.z)
            data.append([elem.y, elem.z])
            tmp.append([elem.y, elem.z])
        data_arr.append(tmp)
        if(draw_flag):
            ax.plot(y, z, "-", color="red", label="dist")
            ax.plot(y, z, ".", color="orange", label="section")
            draw_flag = False
        else:
            ax.plot(y, z, ".", color="orange")

    draw_line_on_plot(l + r, ax, "b")

    temp_lemn = [r, l]
    temp_data = [data_arr[0], data_arr[1]]
    dist1, ind1 = frechet.d_Frechet(temp_lemn[0], temp_data[1])
    dist2, ind2 = frechet.d_Frechet(temp_lemn[0], temp_data[1])
    '''
    if dist1 > dist2 + 100:
        if ind1[0] > -1 and ind1[1] > -1:
            ax.plot([temp_lemn[0][ind1[0]][0], temp_data[0][ind1[1]][0]],
[temp_lemn[0][ind1[0]][1], temp_data[0][ind1[1]][1]], label="dist")
```

```
        print("frechet distance = ", dist1)
    else:
        if ind2[0] > -1 and ind2[1] > -1:
            ax.plot([temp_lemn[1][ind2[0]][0], temp_data[1][ind2[1]][0]],
[temp_lemn[1][ind2[0]][1], temp_data[1][ind2[1]][1]], label="dist")
        print("frechet distance = ", dist1)
    '''
    # box = ax.get_position()
    # ax.set_position([box.x0, box.y0, box.width * 0.9, box.height])
    leg = fig.legend()
    fig.legend()
    fig.savefig(filename, dpi=300, format='png', bbox_inches='tight')

    fig.show()
    plt.close(fig)


def main():
    R = 20
    r1 = 10
    numpoints = 360

    tor = Tor(0, R, r1)
    tor.generate_points(100)
    #H = np.array([i for i in range(0, R + r1)])
    #plane_research(tor, H)
    H = [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30]
    plane_research(tor, H)
    process_lemniscate(tor, R - r1, R + r1 - r1 / 6)

    print("plane = ", R - r1, "c = ", 28)


if __name__ == "__main__":
    main()
```

**frechet.py**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


class DiscrFrechet:
    def __init__(self, P, Q):
        self.P = P
        self.Q = Q

        self.p = len(P)
        self.q = len(Q)

        self.ca = []
        self.ind_matrix = []
        for i in range(0, self.p):
            self.ca.append([])
            self.ind_matrix.append([])
            for j in range(0, self.q):
                self.ca[i].append(-1)
                self.ind_matrix[i].append([-1, -1])



        self.res_ind = [-1, -1]

    def c(self, i, j):
```

```
        if self.ca[i][j] > -1:
            return self.ca[i][j]
        elif i == 0 and j == 0:
            self.ca[i][j] = self.d(self.P[0], self.Q[0])
        elif i > 0 and j == 0:
            self.ca[i][j] = np.max([self.c(i - 1, 0), self.d(self.P[i], self.Q[0])])
        elif i == 0 and j > 0:
            self.ca[i][j] = np.max([self.c(0, j - 1), self.d(self.P[0], self.Q[j])])
        elif i > 0 and j > 0:
            self.ca[i][j] = np.max([np.min([self.c(i - 1, j), self.c(i, j - 1),
self.c(i-1, j-1)]), self.d(self.P[i], self.Q[j])])
        else:
            self.ca[i][j] = np.Inf
        return self.ca[i][j]

    def c_with_ind(self, i, j):
        if self.ca[i][j] > -1:
            return self.ca[i][j]
        elif i == 0 and j == 0:
            self.ca[i][j] = self.d(self.P[0], self.Q[0])
            self.ind_matrix[i][j] = [0, 0]
        elif i > 0 and j == 0:
            # self.ca[i][j] = np.max([self.c(i - 1, 0), self.d(self.P[i], self.Q[0])])
            arr = [self.c_with_ind(i - 1, 0), self.d(self.P[i], self.Q[0])]
            arr_ind = [[i - 1, 0], [i, 0]]
            ind = np.argmax(arr)
            self.ca[i][j] = arr[ind]
            self.ind_matrix[i][j] = arr_ind[ind]
        elif i == 0 and j > 0:
            # self.ca[i][j] = np.max([self.c(0, j - 1), self.d(self.P[0], self.Q[j])])
            arr = [self.c_with_ind(0, j - 1), self.d(self.P[0], self.Q[j])]
            arr_ind = [[0, j - 1], [0, j]]
            ind = np.argmax(arr)
            self.ca[i][j] = arr[ind]
            self.ind matrix[i][j] = arr ind[ind]
        elif i > 0 and j > 0:
            # self.ca[i][j] = np.max([np.min([self.c(i - 1, j), self.c(i, j - 1),
self.c(i-1, j-1)]), self.d(self.P[i], self.Q[j])])
            min_arr = [self.c_with_ind(i - 1, j), self.c_with_ind(i, j - 1),
self.c_with_ind(i - 1, j - 1)]
            min_arr_ind = [[i - 1, j], [i, j - 1], [i - 1, j - 1]]
            min_ind = np.argmin(min_arr)
            max_arr = [min_arr[min_ind], self.d(self.P[i], self.Q[j])]
            max_arr_ind = [min_arr_ind[min_ind], [i, j]]
            ind = np.argmax(max_arr)
            self.ca[i][j] = max_arr[ind]
            self.ind_matrix[i][j] = max_arr_ind[ind]
        else:
            self.ca[i][j] = np.Inf
        return self.ca[i][j]

    def d(self, x, y):
        sum = 0
        for i in range(0, len(x)):
            sum += (x[i] - y[i]) * (x[i] - y[i])
        return np.sqrt(sum)

    #def d(self, x, y):
    #    return abs(x - y)

    def get_ind(self, index):
        curr_index = self.ind_matrix[index[0]][index[1]]
        if index == curr_index:
            return index
        else:
```

```
            return self.get_ind(curr_index)

    def frechet(self):
        res = self.c_with_ind(self.p - 1, self.q - 1)
        res_ind = self.get_ind(self.ind_matrix[self.p - 1][self.q - 1])

        return res, res_ind
        #return self.c(self.p - 1, self.q - 1), self.res_ind



def d_Frechet (P, Q):
    solver = DiscrFrechet(P, Q)

    return solver.frechet()


count = 0


def draw(P, Q, points, circle=False):
    data = [P, Q]
    names = ["P", "Q"]

    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, sharey=True)
    ax.set_xlabel("x")
    ax.set_ylabel("y")
    ax.set_title("Frechet distance\n")
    for i in range(0, len(data)):
        x = []
        y = []
        for elem in data[i]:
            x.append(elem[0])
            y.append(elem[1])
        if(circle):
            x.append(data[elem[0]])
            y.append(data[elem[1]])
        ax.plot(x, y, label=names[i])

    ax.plot([P[points[0], 0], Q[points[1], 0]], [P[points[0], 1], Q[points[1], 1]],
label="dist")

    box = ax.get_position()
    ax.set_position([box.x0, box.y0, box.width * 0.9, box.height])

    fig.legend()
    global count

    fig.savefig("Frechet_dist%s.png" % count, dpi=300, format='png',
bbox_inches='tight')
    count = count + 1

    fig.show()
    plt.close(fig)


def process(P, Q, unic_s):
    data = [P, Q]

    names = ["P", "Q"]

    dist, d_index = d_Frechet(P, Q)

    tmp_P = P.copy()
    tmp_Q = Q.copy()
```

```
    while tmp_P.__contains__(P[d_index[0]]):
        tmp_P.remove(P[d_index[0]])

    while tmp_Q.__contains__(Q[d_index[1]]):
        tmp_Q.remove(Q[d_index[1]])
    tmp_dist, tmp_d_index = d_Frechet(tmp_P, tmp_Q)

    fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, sharey=True)
    ax.set_xlabel("x")
    ax.set_ylabel("y")
    ax.set_title("Frechet distance\n")
    for i in range(0, len(data)):
        x = []
        y = []
        for elem in data[i]:
            x.append(elem[0])
            y.append(elem[1])
        ax.plot(x, y, label=names[i])
    if d_index[0] > -1 and d_index[1] > -1:
        ax.plot([P[d_index[0]][0], Q[d_index[1]][0]], [P[d_index[0]][1],
Q[d_index[1]][1]], label="dist")
    if tmp_d_index[0] > -1 and tmp_d_index[1] > -1:
        ax.plot([tmp_P[tmp_d_index[0]][0], tmp_Q[tmp_d_index[1]][0]],
[tmp_P[tmp_d_index[0]][1], tmp_Q[tmp_d_index[1]][1]], label="dist_2")

    box = ax.get_position()
    ax.set_position([box.x0, box.y0, box.width * 0.9, box.height])

    fig.legend()
    fig.savefig("Frechet_dist%s.png" % unic_s, dpi=300, format='png',
bbox_inches='tight')

    fig.show()
    plt.close(fig)

    print(dist, d_index)
    print(tmp_dist, tmp_d_index)


"""
if __name__ == "__main__":
    print("start")
    A1 = [[0, 0], [4, 2], [6, 5], [12, 6], [15, 7], [15, 10], [18, 13]]
    B1 = [[1, 1], [2, 5], [7, 7], [8, 12], [13, 14], [15, 16]]
    process(A1, B1, "1")

    A2 = [[2, 2], [3, 4], [2, 7], [5, 6], [9, 8], [8, 5], [10, 1], [6, 3], [2, 2]]
    B2 = [[12, 1], [10, 3], [6, 6], [9, 7], [10, 9], [12, 6], [15, 5], [13, 3], [12,
1]]
    process(A2, B2, "2")

    print("end")

"""
```