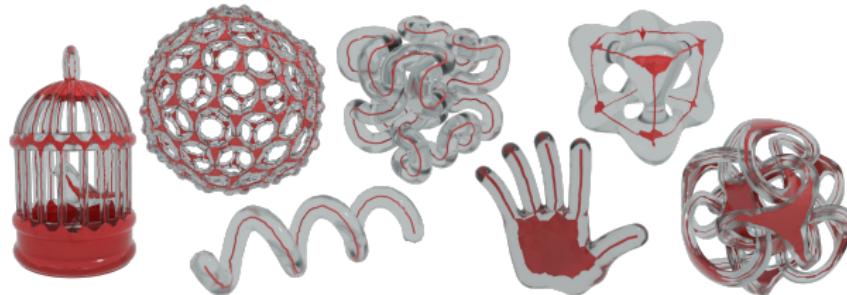


Apprentissage de la topologie de nuages de points

Mattéo Clémot
Encadrante : Julie Digne

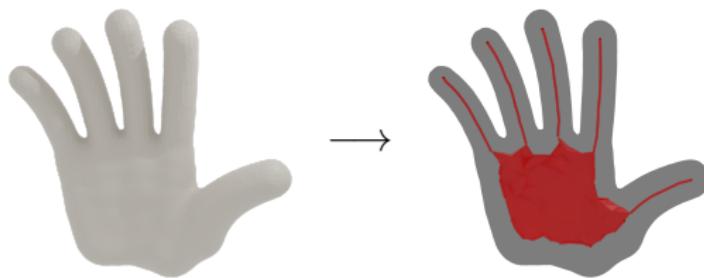
Février - juillet 2022

LIRIS, Équipe Origami



Objectif

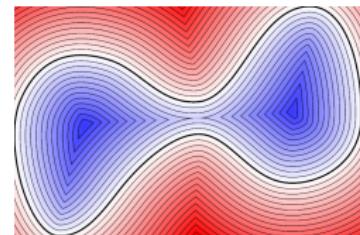
- **entrée** : nuage de points avec des normales, sur une surface S
- **objectif** : calculer un *squelette* de cette surface S : structure simplifiée décrivant la géométrie et la topologie



Axe médian et fonction de distance signée

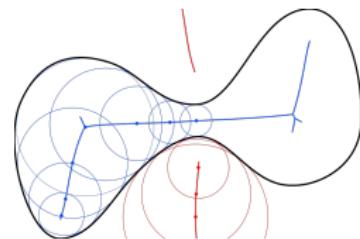
Définition : SDF

$$u_{\Omega}(x) = \begin{cases} -d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \\ d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \overline{\Omega}^C \end{cases}$$



Définition : axe médian

Axe médian $\mathcal{M}(\partial\Omega)$ de $\partial\Omega$: ensemble des points de \mathbb{R}^d tels que la distance $d(x, \partial\Omega)$ est atteinte au moins deux fois. Également : lieu des centres des sphères qui sont tangents en au moins deux points à la surface.



Propriétés

Lemme

u_Ω est presque partout différentiable, et là où elle l'est,

$$\|\nabla u_\Omega\| = 1 \text{ (équation eikonale)}$$

Lemme

L'axe médian $\mathcal{M}(\partial\Omega)$ de $\partial\Omega$ correspond aux points où la SDF u_Ω n'est pas différentiable.

Approche pour estimer l'axe médian :

- ① Apprentissage de la fonction de distance signée
- ② Extraction de points squelettaux
- ③ Construction du squelette

Optimisation de la SDF

- MLP à fonction d'activation périodique (sinus) ; 8 couches cachées de 128 neurones
- Fonctions de coût :

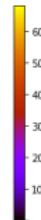
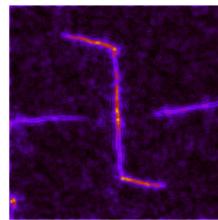
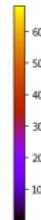
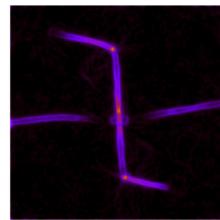
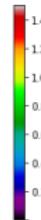
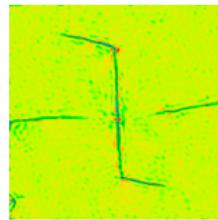
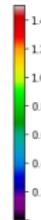
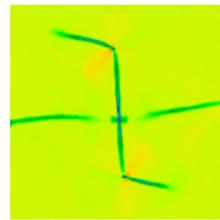
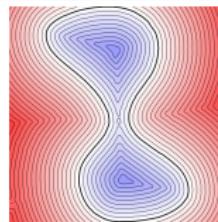
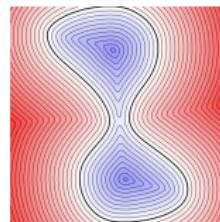
$$\mathcal{L}_{\text{surface}} = \int_{\partial\Omega} |\Phi(\mathbf{x})| + |1 - \langle \nabla\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle| d\mathbf{x}$$

$$\mathcal{L}_{\text{eikonal}} = \int_{\mathbb{R}^3} ||\nabla\Phi(\mathbf{x})|| - 1| d\mathbf{x}$$

$$\mathcal{L}_{\text{points}} = \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} |\Phi(\mathbf{p}) - d(\mathbf{p})| + |1 - \langle \nabla\Phi(\mathbf{p}), \nabla d(\mathbf{p}) \rangle|$$

$$\mathcal{L}_{\text{TV}} = \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \|\nabla\Phi\|(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}$$

Terme de variation totale de la norme du gradient



Avec \mathcal{L}_{TV}

Sans \mathcal{L}_{TV}

Théorie des solutions de viscosité

Théorème

u_Ω , la fonction de distance signée à $\partial\Omega$ est l'unique solution de viscosité à l'équation

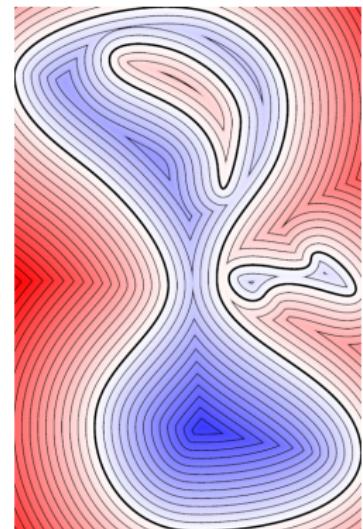
$$\begin{cases} \|\nabla u\| = 1 \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Théorème

La famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ des solutions à

$$\varepsilon \Delta u_\varepsilon + F(\cdot, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = 0$$

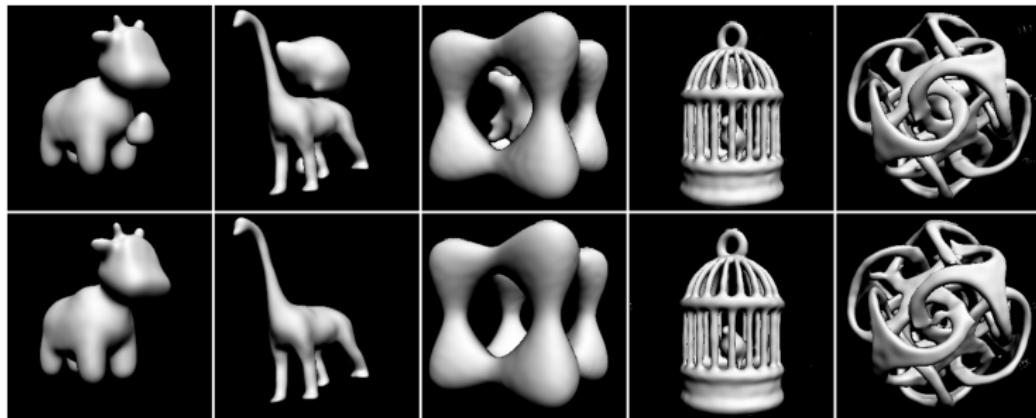
converge vers une solution de viscosité de $F(\cdot, u, \nabla u) = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.



Optimisation sans points d'apprentissage

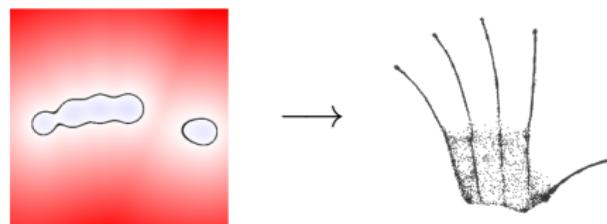
- Nouvelle fonction de coût (en plus de $\mathcal{L}_{\text{surface}}$) :

$$\mathcal{L}_{\text{VV}} = \int_{\mathbb{R}^3} |\varepsilon \Delta \Phi + \|\nabla \Phi(\mathbf{x})\| - 1| d\mathbf{x}$$



Extraction des points squelettaux

- ① Échantillonage de points sur la surface (méthode de Newton sur des points aléatoires)
- ② Demi-droites partant de ces points, orienté selon le gradient de la SDF
- ③ *Line search* des points où le gradient est de plus petite norme

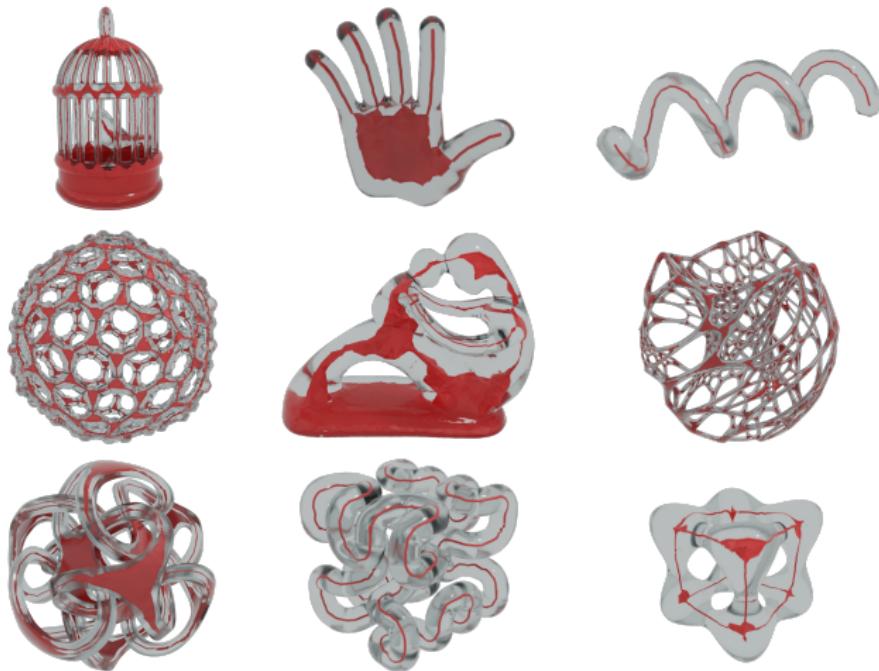


Construction du squelette

- ➊ Dégrossissage : suppression de tous les points dans une boule autour d'un point
- ➋ α -complexe (filtration du complexe de Delaunay)

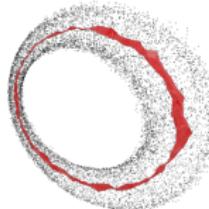
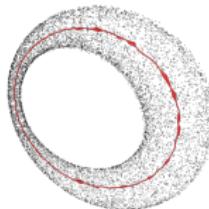
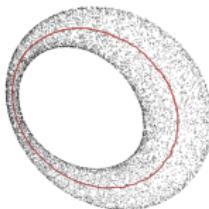
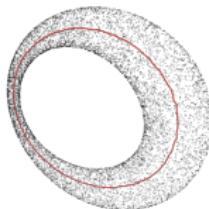


Exemples

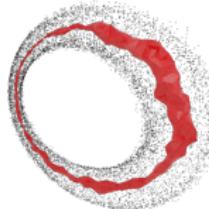
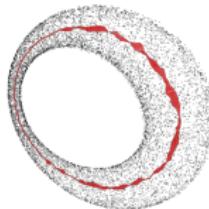
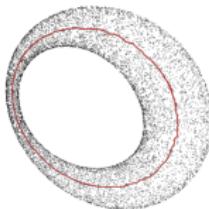
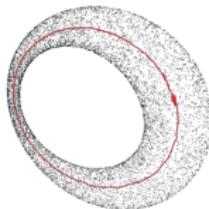


Résistance au bruit

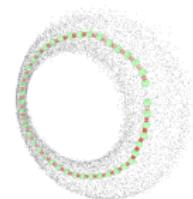
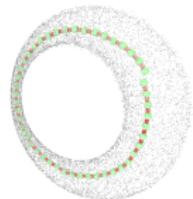
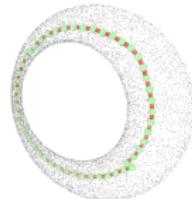
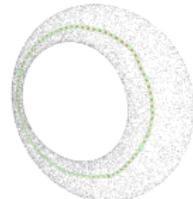
Avec \mathcal{L}_{TV}



Sans \mathcal{L}_{TV}



L1 Medial Skeleton



$\sigma = 0$

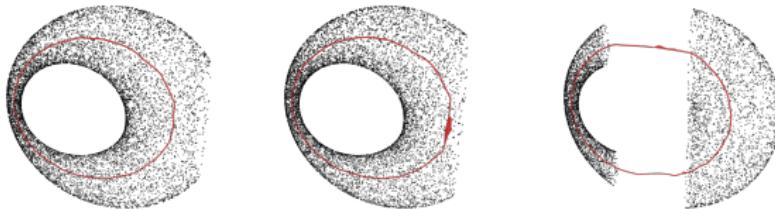
$\sigma = 0.003$

$\sigma = 0.01$

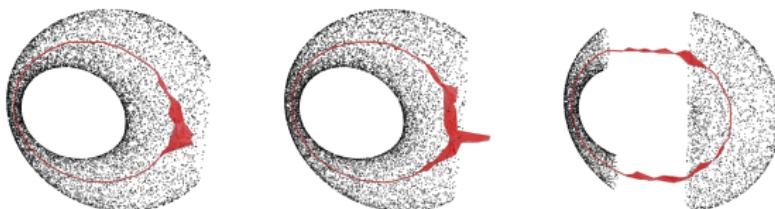
$\sigma = 0.03$

Résistance aux données manquantes

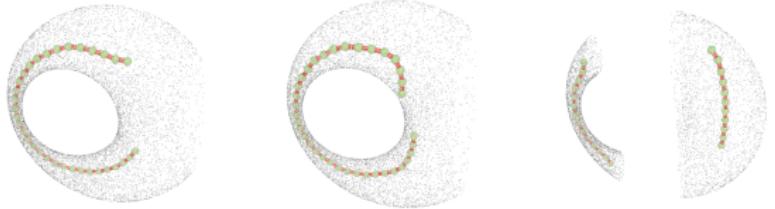
Avec \mathcal{L}_{TV}



Sans \mathcal{L}_{TV}



L1 Medial Skeleton



Projection sur une surface

- MLP $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ pour estimer

$$\Pi(\mathbf{p}) \simeq \arg \min_{\mathbf{q} \in S} d(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

- Fonctions de coût

$$\mathcal{L}_{\text{surface}}^{\Pi} = \int_S \|\Pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| d\mathbf{x}$$

$$\mathcal{L}_{\text{idempotence}}^{\Pi} = \int_{\mathbb{R}^3} \|\Pi(\Pi(\mathbf{x})) - \Pi(\mathbf{x})\| d\mathbf{x}$$

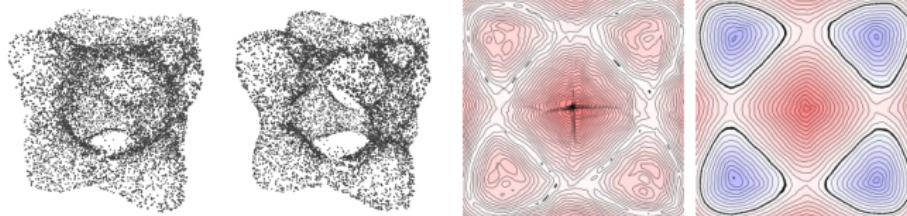
$$\mathcal{L}_{\text{segment}}^{\Pi} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^1 \|\Pi(t\mathbf{x} + (1-t)\Pi(\mathbf{x})) - \Pi(\mathbf{x})\| dt d\mathbf{x}$$

$$\mathcal{L}_{\text{eikonal}}^{\Pi} = \int_{\mathbb{R}^3} \|\|\nabla \|\Pi - \text{Id}\|(\mathbf{x})\| - 1\| d\mathbf{x}$$

Projection + SDF

- Pour exploiter les normales : $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ pour estimer $(\Pi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}))$
- Fonction de coût de cohérence entre Φ et l'UDF issue de Π :
$$\|\Pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| = |\Phi(\mathbf{x})|$$

$$\mathcal{L}_{\text{SDF}}^{\Pi} = \int_{\mathbb{R}^3} ||\Phi(\mathbf{x})| - \|\Pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\||d\mathbf{x}$$



Topologie d'un nuage de point

Théorème de Gauss-Bonnet

$$\int_{\partial\Omega} K_G dS = 2\pi\chi(\partial\Omega)$$

- calcul local de la courbure de Gauss :

$$K_G = - \frac{\begin{vmatrix} H(\Phi) & \nabla\Phi^T \\ \nabla\Phi & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla\Phi\|^4}$$

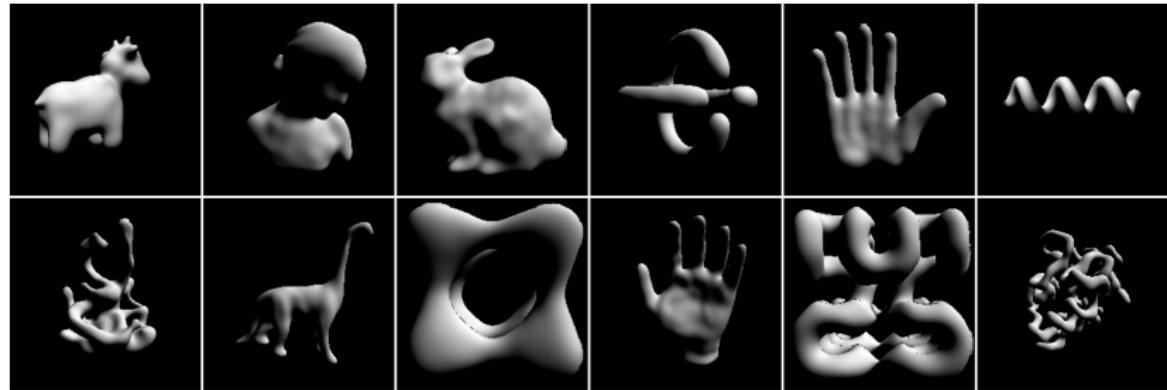
- estimation de la surface de $\partial\Omega$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \text{Vol}(\partial\Omega^{\oplus\varepsilon})$$

avec une estimation du volume $\text{Vol}(\partial\Omega^{\oplus\varepsilon})$ par Monte-Carlo.

Espace de formes

- Code latent \mathbf{z}_i concaténé avec \mathbf{x} pour que $\Phi_\theta(\mathbf{z}_i, \mathbf{x})$ approxime la SDF de la i -ème forme.
- Approche auto-décodeur : optimisation simultanée des paramètres θ et des codes latents $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^N$.



Perspectives

- Amélioration de l'extraction de squelette (simplification, topologie contrainte...)
- Amélioration de l'apprentissage de projection
- Application de l'apprentissage d'espaces de formes au calcul de squelette