Multiple choice questions *(there is one correct answer from the choices only. Wrong answers will not be penalized.)*

A sampled system is stable if all the poles of the closed-loop transfer function lie outside the unit circle of the z-plane ?

- [ ] *True*
- [x] *False*

What is the role of a Zero-Order Hold in a digital closed-loop block diagram ?

- [ ] it guarantees the appropriate choice of the sampling period
- [ ] it avoids the aliasing effect
- [x] it interpolates the discrete-time sequence generated by the digital controller
- [ ] it samples the continuous-time signals

It is recommended to design a digital controller via the approximation of a PID analog controller when the sampling period is

- [ ] slow in comparison with the settling time of the closed-loop system
- [x] fast in comparison with the settling time of the closed-loop system

Exercice 1:

1) $$X(z) = \frac{0,5z}{(z-0,5)(z-0,7)} = \left(\frac{a}{z-0,5} + \frac{b}{z-0,7}\right)z$$

$$= \left(\frac{(z-0,7)a + (z-0,5)b}{(z-0,5)(z-0,7)}\right)z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ -0,7a - 0,5b = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 0,2b = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2,5 \\ b = 2,5 \end{cases}$$

$$\rightarrow X(z) = \frac{2,5z}{z-0,7} - \frac{2,5z}{z-0,5}$$

$\Leftrightarrow X(k) = 2{,}5 \times 0{,}7^k \Gamma(k) - 2{,}5 \times 0{,}5^k \Gamma(k)$

$\Leftrightarrow X(k) = 2{,}5\, \Gamma(k) \left(0{,}7^k - 0{,}5^k\right)$

2) $X(0) = 2{,}5\,(1-1) = 0$

$X(1) = 2{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}5$

$X(2) = 2{,}5\,(0{,}49 - 0{,}25) = 0{,}6$

$X(3) = 2{,}5\,(0{,}343 - 0{,}125) = 0{,}545$

$$\lim_{k\to+\infty} X(k) = \lim_{k\to+\infty} 2{,}5\, \Gamma(k)\left(0{,}7^k - 0{,}5^k\right)$$

$$= 2{,}5\,(0-0)$$

$$= 0$$

<u>Exercice 2:</u>

$$\frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{z - 0{,}4}{z^2 - 0{,}3z + 0{,}02}$$

$\Leftrightarrow \left(1 - 0{,}3z^{-1} + 0{,}02z^{-2}\right) U(z) = \left(z^{-1} - 0{,}4z^{-2}\right) \varepsilon(z)$

$\Leftrightarrow U(k) - 0{,}3\,U(k-1) + 0{,}02\,U(k-2) = \varepsilon(k-1) - 0{,}4\,\varepsilon(k-2)$

Exercice 3 :

Le système est stable si ses pôles sont dans le cercle unité.

$$G_{ZOH}(z) = \frac{z-1}{z^2+0{,}7z+1}$$

$\Delta = -3{,}51$ $\quad \left.\begin{array}{l} z_1 = -0{,}35 - 0{,}95\,i \\ z_2 = -0{,}35 + 0{,}95\,i \end{array}\right\} |z| = 1{,}01$

Le système est donc astable

Exercice 4 :

1) $G_{ZOH}(z) = \dfrac{0{,}5}{z-0{,}8}$

Ordre 1. $\quad K = \lim\limits_{z \to 1} G(z) = \dfrac{0{,}5}{0{,}2} = 2{,}5$

$z_0 = 0{,}8$

2) $Y(z) = U(z)\,\dfrac{0{,}5}{z-0{,}8}$ $\quad$ avec $U(k) = \Gamma(k)$

$\Leftrightarrow U(z) = \dfrac{z}{z-1}$

$$Y(z) = \frac{0{,}5\,z}{(z-1)(z-0{,}8)} = z \times \left(\frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-0{,}8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}5z)}{(z-1)(z-0{,}8)} = z\left(\frac{(z-0{,}8)a + (z-1)b}{(z-1)(z-0{,}8)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 0{,}8b - b = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2{,}5 \\ b = \frac{-0{,}5}{0{,}2} = -2{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{2{,}5z}{z-1} - \frac{2{,}5z}{z-0{,}8}$$

$$\Leftrightarrow Y(k) = 2{,}5\Gamma(k)\left(1-0{,}8^{k}\right)$$

3) La forme d'une fonction de transfert d'ordre 1 est : $\frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}} = \frac{b_1}{z+a_1}$

On a donc $b_1 = 0{,}5$ et $a_1 = -0{,}8$.

Or $a_1 = -e^{-T_0 a} \Leftrightarrow \ln(-a_1) = -T_0 a$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-\ln(-a_1)}{T_0} = 2{,}23.$$

$$b_1 = \frac{b}{a}(1+a_1) \Leftrightarrow b = \frac{b_1 \, a}{1+a_1}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{0,5 \times 2,23}{1-0,8} = 5,575$$

Donc $G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{5,575}{s+2,23}$

Exercice 5:

1) $G(s) = \frac{1}{s^2}$ pas de zéro, pôle double $s_0 = 0$

2) Le système est astable.

3) $G_{ZOH}(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left(\frac{G(s)}{s}\right)$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left(\frac{1}{s^3}\right)$$

$$= \frac{z-1}{z} \times \frac{T_s^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$ avec $T_s = 1s$

$$= \frac{z+1}{2(z-1)^2}$$

4) zéro : -1

pôle double $z_0 = 1$

5) $G(s)$ ne présentait pas de zéro mais $G_{ZOH}(z)$ en présente un, c'est un résultat inattendu.

6) Le système est astable car le pôle double est sur le cercle unité.

7) $G_{ZOH}(z) = \dfrac{z+1}{2(z-1)^2} = \dfrac{z+1}{2(z^2-2z+1)}$

$\Leftrightarrow (2z^2-4z+2)\,Y(z) = (z+1)\,U(z)$

$\Leftrightarrow 2y(k) - 4y(k-1) + 2y(k-2) = u(k-1) + u(k-2)$

Exercice 6 :

1) $C(s) = K_p + K_d\, s$

$\Leftrightarrow U(s) = \mathcal{E}(s) K_p + K_d\, s\, \mathcal{E}(s)$

$\Leftrightarrow u(t) = K_p \mathcal{E}(t) + K_d \dfrac{d\mathcal{E}(t)}{dt}$

2) $C(s) = K_p + K_d s \qquad s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$

$\Leftrightarrow C(z) = K_p + \frac{K_d(z-1)}{z T_s}$

$\Leftrightarrow C(z) = \frac{z(T_s K_p + K_d) - K_d}{z T_s}$

3) $z T_s U(z) = \mathcal{E}(z)\left[z(T_s K_p + K_d) - K_d\right]$

$\Leftrightarrow U(k) T_s = \mathcal{E}(k)(T_s K_p + K_d) - \mathcal{E}(k-1) K_d$

Exercice 7 :

1) $i = i + e \frac{T_s}{T_i} \rightarrow i(k) = i(k-1) + \mathcal{E}(k) \frac{T_s}{T_i}$

2) $\Leftrightarrow i(k) - i(k-1) = \mathcal{E}(k) \frac{T_s}{T_i}$

$\Leftrightarrow (1 - z^{-1}) i(z) = \mathcal{E}(z) \frac{T_s}{T_i}$

$\Leftrightarrow i(z) = \frac{T_s}{(1-z^{-1})} \frac{\mathcal{E}(z)}{T_i}$

$U = K_p(e + i) \Rightarrow U(z) = K_p\left(\mathcal{E}(z) + \frac{T_s}{(1-z^{-1})} \frac{\mathcal{E}(z)}{T_i}\right)$

$C(z) = K_p + \frac{1}{T_i}\left(\frac{T_s}{1 - z^{-1}}\right)$

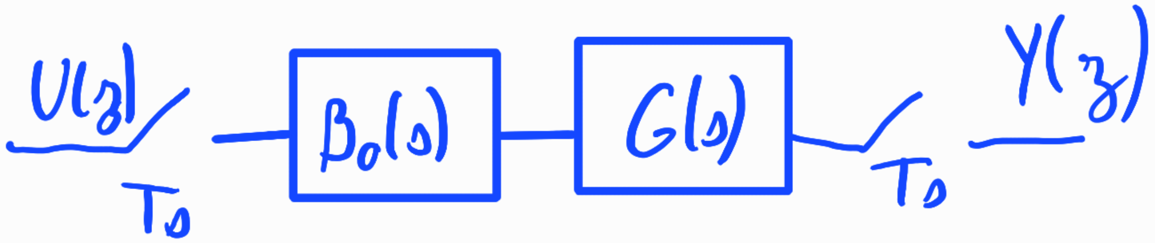
On reconnait la forme d'un correcteur PI.

3) 4) Si on fait le changement de variable

$s = \frac{z-1}{T_s}$ comme dans la méthode de la différence avancée d'Euler, on obtient :

$$C(s) = K_p + \frac{1}{T_i s}$$

Exercice 8 :

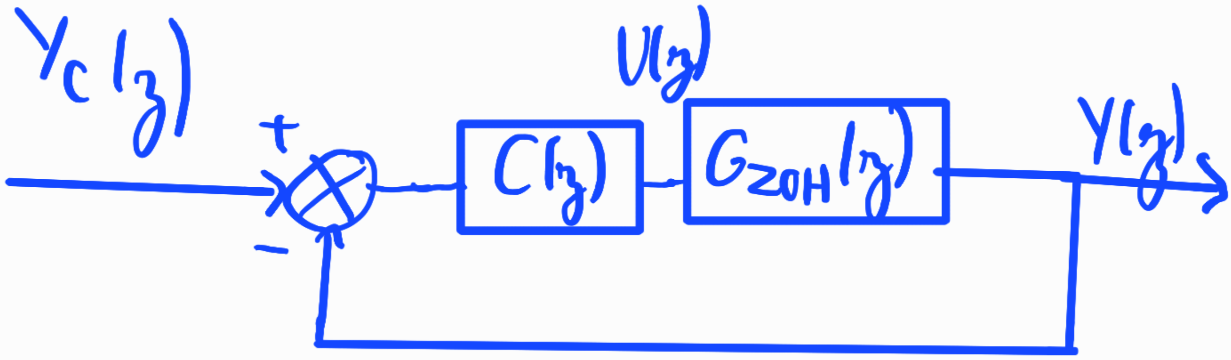
1) 

2) $G_{ZOH}(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$ $\quad G = \frac{b}{s+a} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

avec $\begin{cases} a_1 = -e^{-aT_s} \\ b_1 = \frac{b}{a}(1+a_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -e^{-T_s} \\ b_1 = 1 - e^{-T_s} \end{cases}$

$$G_{ZOH}(z) = \frac{(1-e^{-T_s})z^{-1}}{1 + (-e^{-T_s})z^{-1}} = \frac{1-e^{-T_s}}{z - e^{-T_s}}$$

3)



4) $$F_{CL}(z) = \frac{F_{OL}(z)}{1+F_{OL}(z)} = \frac{C(z)\,G_{ZOH}(z)}{1+C(z)\,G_{ZOH}(z)}$$

5) $$F_{CL}(z)\left(1+C(z)G_{ZOH}(z)\right) = C(z)G_{ZOH}(z)$$

$$\Leftrightarrow F_{CL}(z) = C(z)\left[G_{ZOH}(z) - F_{CL}(z)\,G_{ZOH}(z)\right]$$

$$\Leftrightarrow C(z) = \frac{F_{CL}(z)}{G_{ZOH}(z) - G_{ZOH}(z)F_{CL}(z)}$$

6) On note $F_{CL}(z) = z^{-n}$, on a $G_{ZOH}(z) = \frac{1-e^{-Ts}}{z-e^{-Ts}}$

$$C(z) = \frac{z^{-n}}{\frac{1-e^{-Ts}}{z-e^{-Ts}}\left(1-z^{-n}\right)}$$

$$C(z) = \frac{z^{-n}\left(z-e^{-Ts}\right)}{\left(1-e^{-Ts}\right)\left(1-z^{-n}\right)}$$

G_{ZOH} est d'ordre 1 donc $n = 1$

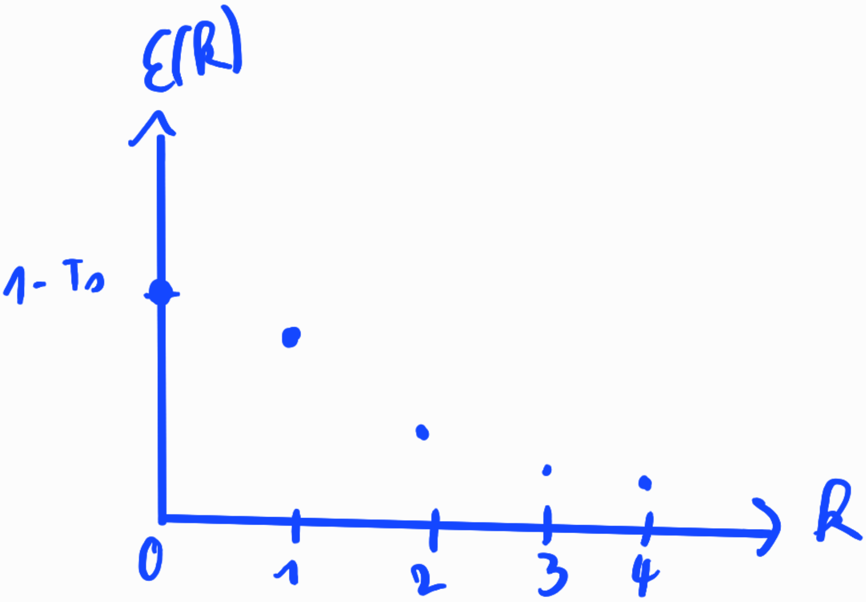
$$C(z) = \frac{z - e^{-T_0}}{(1-e^{-T_0})(z-1)}$$

7) $\frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = C(z)$ avec $U(z) = \frac{z}{z-1}$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(z) = \frac{U(z)}{C(z)} = \frac{z(1-e^{-T_0})(z-1)}{(z-e^{-T_0})(z-1)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(z) = (1-e^{-T_0}) \frac{z}{z-e^{-T_0}}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(k) = (1-e^{-T_0}) e^{-kT_0} \Gamma(k)$$



On ne connait pas T_s, cependant, pour toute valeur de T_s, $e^{-T_s} < 1$ donc le comportement sera similaire : e^{-RT_s} va diminuer avec le temps.