Kapitel 5

Elementare Funktionen

Viele Phänomene der realen Welt können mit Funktionen beschrieben werden, die aus den folgenden Funktionsklassen stammen:

1. Algebraische Funktionen (Polynome, Wurzelfunktionen, gebrochen rationale Funktionen)

2. Trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus, Tangens, etc.) und ihre Umkehrfunktionen arcsin, arccos, arctan

3. Exponential- und Logarithmusfunktionen

Verkettung $f(g(x))$

Die Funkionen, die aus diesen Funktionen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Verkettung gebildet werden können, heißen *elementare Funktionen*.
In diesem Kapitel sind die wichtigen Eigenschaften dieser Funktionsklassen dargestellt.

5.1 Polynome (Ganzrationale Funktionen)

$x^0 = 1$

Definition 5.1.
Eine Funktion f von der Form

$1 + 2x - 3x^2 + \frac{5}{2}x^3$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heißt *Polynom vom Grad n* oder *ganzrationale Funktion vom Grad n*.
Die Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ heißen *Koeffizienten* des Polynoms.
Der Koeffizient a_0 heißt *konstanter Koeffizient*.
Der Koeffizient a_n heißt *Leitkoeffizient*, der Term $a_n x^n$ heißt *Leitterm*.
Außerdem soll auch $f(x) = 0$ ein Polynom sein. Der Grad des Nullpolynoms ist unbestimmt.

Linearkombination von $1, x, x^2, \ldots, x^n$

Definition 5.2.
Ein Polynom der Form $a_n x^n$ heißt *Monom vom Grad n*.

$3x^2$ Monom vom Grad 2

Wir haben bereits Polynome vom Grad 0 (konstante Funktionen), vom Grad 1 (lineare Funktionen) und vom Grad 2 (quadratische Funktionen) angeschaut, außerdem die Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Polynome vom Grad 3 heißen *kubische Polynome*.

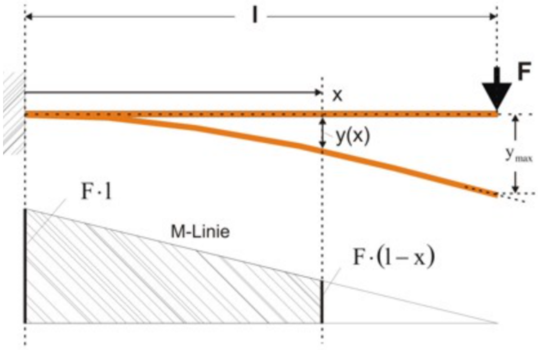
Grad 1

$a_0 + \underbrace{a_1}_{\neq 0} x$

Um Funktionswerte von Polynomen zu berechnen, braucht man nur die Grundrechenarten.
Polynome eigenen sich zur Modellierung vieler Phänomene, z.B. haben viele Bögen die Gestalt einer Parabel.
Bürogebäude Berliner Tor in Hamburg:

https://www.geogebra.org/m/ZapUatZW

Die Biegelinie eines Balkens, der bei $x = 0$ fest eingespannt ist und an der Stelle $x = x_0$ mit einer Kraft F belastet wird, läßt sich mit Hilfe eines Polynoms vom Grad 3 beschreiben.



$$y(x) = \frac{F}{E\cdot I}\cdot\left(l\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$ Biegelinie

5.1.1 Produkt von Polynomen

Bemerkung 5.3 (Koeffizientenvergleich von Polynomen)**.**
Zwei Polynome $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n$ mit $a_n \neq 0$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_m x^m$ mit $b_m \neq 0$ sind gleich, d.h. es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wenn sie denselben Grad haben, also $m = n$ ist, und alle Koeffizienten gleich sind, also $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ gilt.

Aufgabe 5.4.
Berechnen Sie das Produkt $(2x^2 - 3)(-x^3 + x)$

$= 2x^2\cdot(-x^3) + 2x^2\cdot x - 3\cdot(-x^3) - 3x = -2x^5 + 5x^3 - 3x$

Leitterm des Produkts = Leiterme der Faktoren miteinander multipliziert

Bemerkung 5.5.
Multipliziert man zwei von 0 verschiedene Polynome mit den Graden n und m, erhält man ein Polynom vom Grad $n + m$. Der Leitkoeffizient des Produkts ist das Produkt der Leitkoeffizienten der Faktoren.

$(a_n x^n + \underbrace{\dots}_{\text{niedere Grade}}) \cdot (b_m x^m + \dots)$

niedere Grade

$a_n, b_m \neq 0$

$= a_n b_m x^{n+m}$ + niedere Grade

5.1.2 Faktorzerlegung und Nullstellen

$p(x) = 0$

Um die Nullstellen eines Polynoms $p(x)$ zu suchen, muss man die Gleichung $p(x) = 0$ lösen. Für lineare Polynome ist das einfach, für quadratische Polynome hat man die Mitternachtsformel. Für Polynome vom Grad 3 und 4 gibt es ebenfalls Lösungsformeln, die aber schwer handzuhaben sind.

nur im Mathe-Unterricht $\Leftarrow$

Deshalb versucht man bei Polynomen höheren Grades, Nullstellen zu raten. Hat man eine gefunden, kann man durch *Polynomdivision* den Grad des Polynoms verringern, möglichst bis ein quadratisches Polynom vorliegt.

Bemerkung 5.6. Ist $p(x)$ ein Polynom vom Grad n und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle, so ist der Quotient von $p(x)$ und $x - x_0$ ein Polynom vom Grad $n-1$. D.h. es gilt

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = q(x) \iff p(x) = (x - x_0)\,q(x)$$

wobei q ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.
Man sagt auch: Man spaltet den *Linearfaktor* $(x - x_0)$ ab.

faktorisieren des Polynoms

Die Nullstellen eines Polynoms entsprechen den Linearfaktoren, die man abspalten kann: x_0 ist genau dann eine Nullstelle von f, wenn $x - x_0$ ein Linearfaktor von f ist.

Aufgabe 5.7. Gegeben ist das Polynom $p(x) = 1x^3 - 7x^2 + 14x - 8$.

1. Bestimmen Sie die Nullstellen von p.
2. Zerlegen Sie p in Linearfaktoren. falls möglich

$x^2 + 1$ kann man nicht in Linearfaktoren zerlegen (in $\mathbb{R}$), da es keine Nullstellen hat!

$ax^2 + bx + c$

$D = b^2 - 4ac < 0$
$\Rightarrow$ hat keine Linearfaktoren

Schritt 1: Eine Nullstelle muss man raten.
Folgende Bemerkung macht die Suche leichter:
Sind alle Koeffizienten des Polynoms ganze Zahlen und ist der Leitkoeffizient des Polynoms 1, dann sind alle ganzzahligen Nullstellen Teiler des konstanten Koeffizienten. Alle rationalen Nullstellen sind bereits ganze Zahlen. Leitkoeff $1 \cdot x^3$

Ganzzahlige NSt können sein: $\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 4 \quad \pm 8$

$p(1) = 1 - 7 + 14 - 8 = 0$ gefunden!

Schritt 2: Nun dividiert man das Polynom durch den entsprechenden Linearfaktor:

$x_0 = 1$ ist NSt $\iff$ $x - 1$ Linearfaktor von p

Polynomdivision:

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (x - 1) = x^2 - 6x + 8\\
&-(x^3 - x^2)\\
&\quad -6x^2 + 14x\\
&\quad -(-6x^2 + 6x)\\
&\qquad 8x - 8\\
&\qquad -(8x - 8)\\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

N.R.

$\frac{x^3}{x} = x^2$

$x^2 \cdot (x-1) = x^3 - x^2$

$\frac{-6x^2}{x} = -6x$

$-6x \cdot (x-1)$

$\frac{p(x)}{x-1} = x^2 - 6x + 8 \quad | \cdot (x-1)$

$\frac{8x}{x} = \underline{\underline{8}}$

$8 \cdot (x-1)$

<u>Schritt 3:</u> In diesem Fall ist das verbleibende Polynom vom Grad 2. Dessen Nullstellen bestimmen wir mit dem Satz von Vieta oder der Mtiternachtsformel. (Bei höherem Grad müssten wir Schritte 1 und 2 wiederholen, bis ein quadratisches Polynom übrig bleibt).

1 2 4

$p(x) = (x-1) \cdot (\underbrace{x^2 - 6x + 8}_{\text{Mitternachtsformel oder Vietà}}) = (x-1)(x-2)(x-4)$

Nullstellen
1, 2, 4

$1 \cdot 8 \quad -1 \cdot -8$

$2 \cdot 4 \quad -2 \cdot -4 \rightarrow -2 - 4 = -6$

Die Faktorisierung eines Polynoms (Zerlegung in Linearfaktoren) liefert seine Nullstellen und umgekehrt. Manchmal treten Nullstellen dabei mehrfach auf:

Definition 5.8 (Vielfachheit einer Nullstelle).
Kommt der Linearfaktor $(x - x_0)$ in der Linearfaktorzerlegung eines Polynoms p genau r-mal vor, sagt man:
Das Polynom p hat an der Stelle x_0 eine r-*fache Nullstelle* (Nullstelle der *Vielfachheit* r, Nullstelle der *Ordung* r).
Ist $r > 1$, spricht man von *mehrfachen Nullstellen*.

$p(x) = (x-1)^3 \cdot (x+2)^2 \cdot x$

1 dreifache NSt
−2 doppelte NSt
0 einfache NSt

Bemerkung 5.9 (Anzahl Nullstellen von Polynomen).
Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen, wobei man die Nullstellen sogar mit Vielfachheit zählen darf.

Nicht jedes Polynom lässt sich komplett in Linearfaktoren zerlegen: Wir kennen quadratische Polynome ohne reelle Nullstellen, z.B. $p(x) = x^2 + 1$.

Bemerkung 5.10 (Zerlegung in Linearfaktoren).
Ein Polynom vom Grad n lässt sich genau dann komplett in Linearfaktoren zerlegen, wenn es genau n Nullstellen hat, wobei mehrfache Nullstellen mit ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Aufgabe 5.11.
Geben Sie ein Polynom vom Grad 4 an, das die Nullstellen $-2, 0, 1$ und 5 hat.

z. B. $p(x) = (x+2) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-5)$ Grad 4

alle weitere Polynome: $p(x) = c \cdot (x+2) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-5)$

$c \neq 0$ beliebig

Bemerkung 5.12.
Jedes Polynom lässt sich zerlegen in ein Produkt von *Linearfaktoren* und von *quadratischen Faktoren ohne Nullstellen*.
Quadratische Polynome ohne Nullstellen nennt man auch *irreduzible quadratische Polynome*.

5.1.3 Division mit Rest

Mit Polynomdivision kann man ein Polynom auch durch Polynome niedrigeren Grades teilen. Wie bei der Division von natürlichen Zahlen kann bei der Polynomdivision ein Rest auftreten.

Bemerkung 5.13 (Praktische Durchführung der Polynomdivision).
Der Algorithmus ist analog zur Division von natürlichen Zahlen.
Wichtig:
Potenzen beider Polynome absteigend ordnen, fehlende Potenzen mit 0 ergänzen.
Man beginnt mit den höchsten Potenzen auf beiden Seiten.

Aufgabe 5.14. Berechnen Sie

Analog:

$17 : 3 = 5$ Rest 2

$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$

1. $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x + 2)$ $= x^2 - 8x + 27$ Rest -60

$$\begin{array}{l} -(x^3 + 2x^2) \\ \quad -8x^2 + 11x \\ \quad -(-8x^2 - 16x) \\ \qquad 27x - 6 \\ \qquad -(27x + 54) \\ \qquad\quad -60 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x+2} = x^2 - 8x + 27 + \frac{-60}{x+2} \quad | \cdot (x+2)$$

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^2 - 8x + 27) \cdot (x+2) \underbrace{-60}_{= p(-2)}$$

$\boxed{p(-2) = -60}$

2. $(-6x + x^4 - 2x^2) : (2 + x^2)$

$$(x^4 + 0x^3 - 2x^2 - 6x + 0) : (x^2 + 0x + 2) = x^2 - 4$$

$$\begin{array}{l} -(x^4 + 0x^3 + 2x^2) \\ \qquad -4x^2 - 6x + 0 \\ \qquad -(-4x^2 + 0x - 8) \\ \qquad\qquad -6x + 8 \end{array}$$

Rest $-6x + 8$

Division mit Rest

$$\frac{x^4 - 2x^2 - 6x}{x^2 + 2} = x^2 - 4 + \frac{-6x + 8}{x^2 + 2} \quad | (x^2 + 2)$$

$$x^4 - 2x^2 - 6x = (x^2 - 4)(x^2 + 2) \underbrace{-6x + 8}_{\text{Rest}}$$

Zählergrad ↓ n Nennergrad ↓ m

$\overbrace{p(x)}^{} : \overbrace{q(x)}^{}$

Allgemein stellt man fest: NG ↓   ZG ↓

Bemerkung 5.15 (Satz über die Polynomdivision)**.**
Ist $p \neq 0$ ein Polynom vom Grad n und $q \neq 0$ ein Polynom vom Grad $m \leq n$, so gibt es Polynome $h(x)$ und $r(x)$, so dass

ZG $= n \to$
NG $= m \to$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \overbrace{h(x)}^{n-m} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochen}} \Big\} < \text{Nennergrad } m \qquad | \, q(x)$$

wobei h ein Polynom vom Grad $n-m$ ist und r ein Polynom vom Grad echt kleiner als m.
Anders geschrieben:

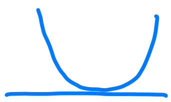
$$\underbrace{p(x)}_{n} = \underbrace{h(x)}_{n-m} \cdot \underbrace{q(x)}_{m} + \underbrace{r(x)}_{< m}$$

$\frac{p(x)}{q(x)}$ gebrochen rational   heißt echt gebrochen, wenn ZG < NN
sonst: unecht gebrochen

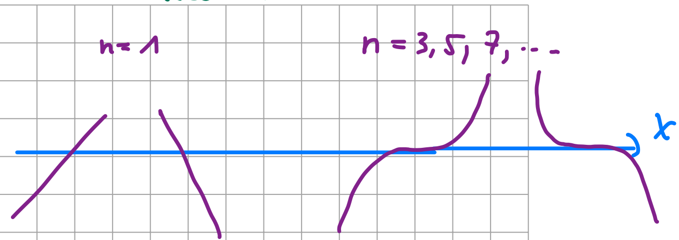
5.1.4 Graphen von Polynomfunktionen

Den Graphen von Polynomfunktionen kann man oft gut skizzieren, wenn man die Intervalle kennt, in denen die Funktion positive Werte annimmt bzw. negative Werte annimmt.

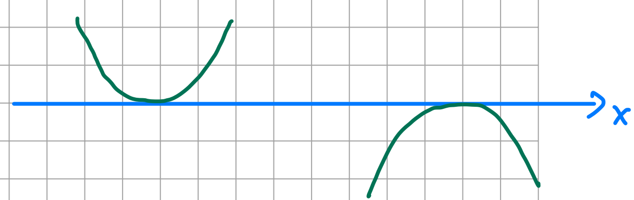
Bemerkung 5.16.
Polynomfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ *stetige* Funktionen. Ein Vorzeichenwechsel kann somit nur an den Nullstellen stattfinden. Es gilt:
Ist die Vielfachheit der Nullstelle x_0 ungerade, wechselt hier der Graph der Funktion an der Stelle x_0 das Vorzeichen. Vorzeichenwechsel
Ist die Vielfachheit der Nullstelle x_0 gerade, berührt der Graph an der Stelle x_0 die x-Achse, schneidet sie aber nicht. kein Vorzeichenwechsel



Ungerade Ordnung
Vorzeichenwechsel



Gerade Ordnung
kein Vorzeichenwechsel

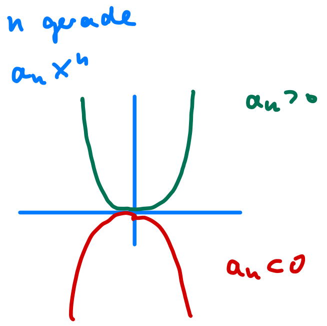


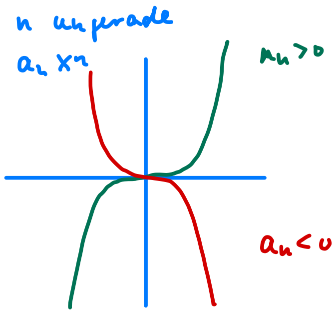
Aussehen des Graphs in der Nähe der Nullstelle

Verhalten für $x \to \pm\infty$

Für große positive oder negative x-Werte verhalten sich alle Polynome ähnlich:

Bemerkung 5.17. $a_n \neq 0$
Das Grenzverhalten einer Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ wird durch den Leitterm $a_n x^n$ bestimmt.





Denn:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

$$= a_n x^n \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right)}$$

$|x|$ groß $\longrightarrow 1$ konvergiert nach 1 für $x \to \pm\infty$

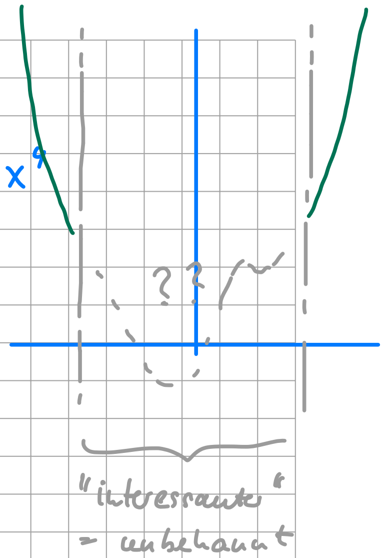
$|x| \to \infty$

$$\approx a_n x^n \text{, wenn } |x| \text{ groß}$$

Vielfaches einer Potenzfunktion mit pos. Exponente

Aufgabe 5.18. Skizzieren Sie den Graphen der Polynomfunktion

$$f(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 28x - 40$$



① Leitterm: x^4

$\Rightarrow$ Für $|x|$ groß $f(x) \approx x^4$

② Nullstellen

-40 Teiler: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8 \,..$

$f(1) \neq 0 \quad f(-1) = 1 - 7 + 6 + 28 - 40 \neq 0$

$f(2) = 16 + 56 + 24 - 56 - 40 = 0$ ✓

$\Rightarrow$ 2 ist NSt

$$(x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 28x - 40) : (x - 2) = x^3 + 9x^2 + 24x + 20$$

$$\begin{array}{l}
x^4 - 2x^3 \\
\hline
\quad 9x^3 + 6x^2 \\
\quad 9x^3 - 18x^2 \\
\hline
\qquad 24x^2 - 28x \\
\qquad 24x^2 - 48x \\
\hline
\qquad\quad 20x - 40 \\
\qquad\quad 20x - 40 \\
\hline
\qquad\quad -\,-
\end{array}$$

$-8 + 36 - 48 + 20 = 0$

nicht mehr

Weiter NSt raten ~~±1~~, ~~±2~~ -2 $= 0$ ✓

$$(x^3+9x^2+24x+20):(x+2) = \underbrace{x^2+7x+10}_{\text{quadratisch}}$$

$$\begin{array}{l} \underline{x^3+2x^2} \\ \quad 7x^2+24x \\ \quad \underline{7x^2+14x} \\ \qquad 10x+20 \\ \qquad \underline{10x+20} \\ \qquad\ -\ - \end{array}$$

$2+5=7 \qquad 10 = 2\cdot 5$

$= (x+2)\cdot(x+5)$

$f(x) = (x-2)\cdot(x+2)(x+2)(x+5)$

$f(x) = (x-2)(x+2)^2(x+5)$

Vorzeichenwechsel

Nullstellen:			
	-5	Ordnung 1	VZW
	-2	Ordnung 2	kein VZW
	$+2$	Ordnung 1	VZW

Vorzeichenschema für $f(x)$ ← Start

x		-5		-2		2		$f(x) \approx x^4$
$f(x)$	$+$	VZW N1	$-$	kein N2	$-$	VZW N1	$+$	

x sehr klein

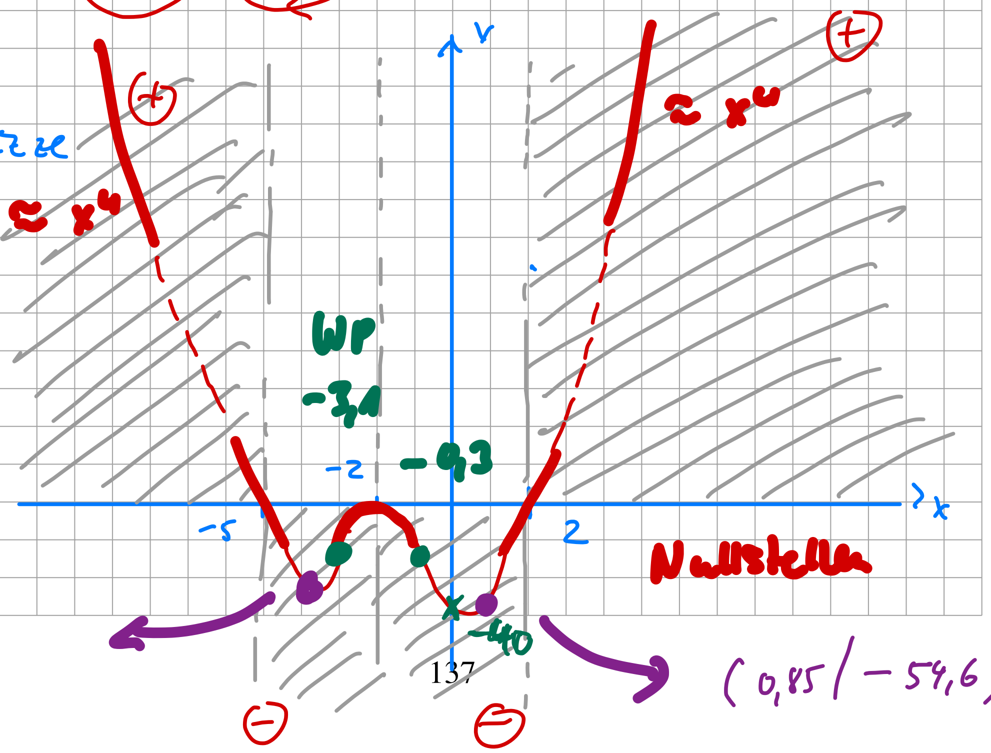
$f(x) \approx x^4$

> 0 Kontrolle

✓

3 Skizze

Schraffiert wird der Bereich, in dem der Graph verlaufen kann.



$(-4{,}1\,/-24)$

$(0{,}85\,/-54{,}6)$

Weitere Info: Achsenschnittpunkt mit y-Achse $f(0) = -40$

Außerdem sieht man am Verlauf des Graphen:

(Fehler im Video!)

Genaue Lage: Ableiten ▷ $f'(x)=0$

Zwischen $]-5,-2[$ muss (mindestens) ein **lokales Minimum** sein

ebenso zwischen $]-2, 2[$

$x_0 = -2$ ist ein **lokales Maximum** $(f(-2)=0)$

wissen wir auch ohne Ableiten

Genaue Lage: $f''(x)=0$

Es gibt zudem mindestens 2 **Wendepunkte**.

(4) Auffinden der lokalen Extremwerte

$$f(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 28x - 40$$

$$f'(x) = 4x^3 + 21x^2 + 12x - 28 = 0$$

Eine Nullstelle kennen wir schon: -2 (lok. Max.) ← einfache

$$(4x^3 + 21x^2 + 12x - 28) : (x+2) = \underbrace{4x^2 + 13x - 14}_{\text{Mitternachtsformel}}$$

$$\begin{array}{l}
4x^3 + 8x^2 \\
\hline
13x^2 + 12x \\
13x^2 + 26x \\
\hline
-14x - 28 \\
-14x - 28 \\
\hline
- \quad -
\end{array}$$

Mitternachtsformel ⇝ Kandidaten für lok. Minima

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 224}}{8}$$

lokale Minima ▷

$x_1 \approx 0{,}85$ $f(x_1) \approx -54{,}6$ (T.R.)

$x_2 \approx -4{,}1$ $f(x_2) \approx -24$

NSt. 1. Ordnung

Zur Sicherheit ein Vorzeichenschema von f'

x		$-4{,}1$		-2		$0{,}85$	
$f'(x)$	$-$	N1 VZW	$+$	N1 VZW	$-$	N1 VZW	$+$
	$\searrow$	lok. Min	$\nearrow$	lok. Max	$\searrow$	lok. Min.	$\nearrow$

Start $\approx 4x^3$ (Leitterm von f') > 0

Kontrolle $f(x) \approx 4x^3 < 0$ ✓

Passt zum Graphen ✓

⑤ Auffinden der Wendepunkte

$$f'(x) = 4x^3 + 21x^2 + 12x - 28$$

$$f''(x) = 12x^2 + 42x + 12 = 6\underbrace{(2x^2 + 7x + 2)}_{\text{Mitternachtsformel}} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 16}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \approx -3{,}1 \\ x_2 \approx -0{,}3 \end{array}\right\}$$

1. Ordnung
wie sind die W.P.
Wissen wir schon!

Zur „Sicherheit" (Kontrolle) Vorzeichenschema von f''

x		$-3{,}1$		$-0{,}3$	
f''	$+$	N1 VZW	$-$	N1 VZW	$+$
	$\cup$	**WP**	$\cap$	**WP**	$\cup$
	links gekrümmt		rechts gekr.		links gekr.

Quadratisch / Parabel nach oben offen

5.2 Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen sind Funktionen, die sich als Quotient von Polynomen schreiben lassen:

Quotient von Polynomen

Definition 5.19. Eine Funktion f von der Form

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

mit $a_m \neq 0$ und $b_n \neq 0$ heißt *gebrochen rationale Funktion*.
Ist $m < n$, also der Zählergrad echt kleiner als der Nennergrad, dann heißt f *echt gebrochen rational*.
Ist $m \geq n$, heißt sie *unecht gebrochen rational*.

Zählergrad < Nennergrad

Bemerkung 5.20.
Aus dem Satz über die Polynomdivision (5.15) folgt, dass sich jede gebrochen rationale Funktion als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion schreiben lässt.

p, q Polynome

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \begin{matrix} \nearrow m \\ \searrow n \end{matrix} = \underbrace{\overbrace{h(x)}^{m-n}}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochen}} \Big\} \text{ Restpolynom } < n$$

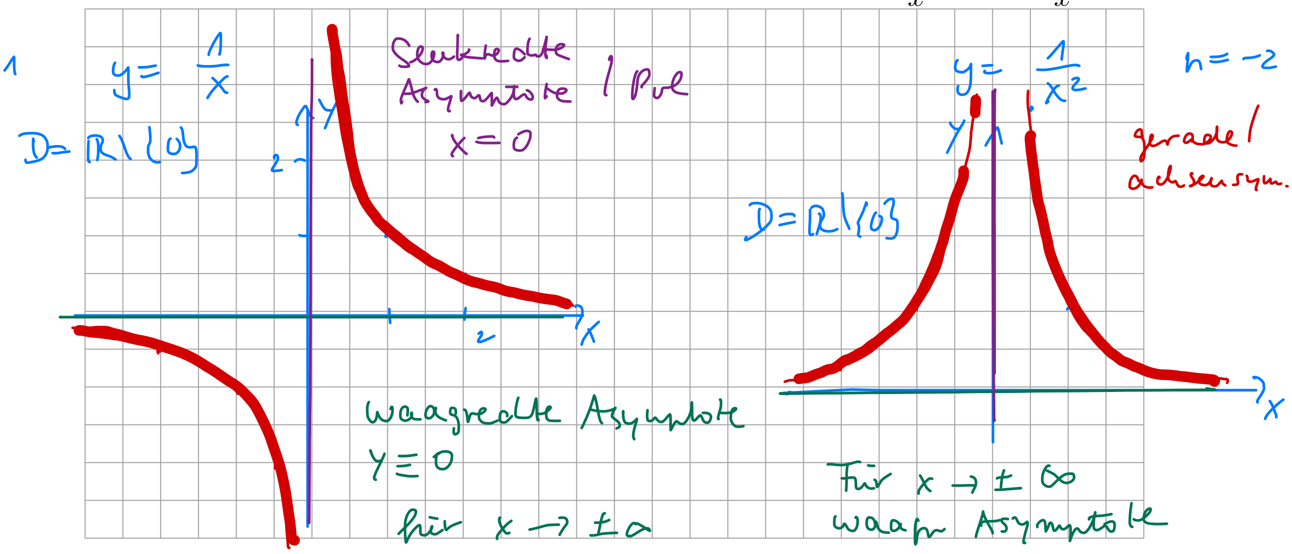
f unecht gebrochen, d.h. $m \geq n$

Beispiel 5.21.
Die Bausteine für gebrochen-rationale Funktionen sind die Potenzfunktionen $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. x^n

Die einfachsten echt gebrochen-rationalen Funktionen sind $y = \dfrac{1}{x}$ und $y = \dfrac{1}{x^2}$:

n = −1

Hyperbel
punktsymm.
ungerade



Senkrechte Asymptote / Pol
x = 0

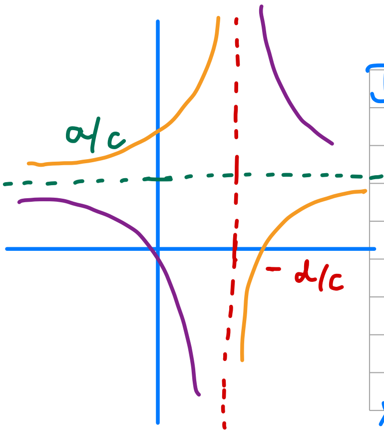
Bemerkung 5.22.
Der Graph von gebrochen rationalen Funktionen der Form

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad c \neq 0$$

$f(x) = \dfrac{\text{Lineares P.}}{\text{Lineares Polynom}}$

entsteht durch Verschieben, Dehnen oder Stauchen und/oder Spiegeln der Hyperbel $y = \dfrac{1}{x}$.

Graph von f: Entweder orange Linie oder violette Linie



Def. lücke: Nenner $= 0$ $\quad cx+d=0 \iff x = -\frac{d}{c}$

Ist ein Pol / senkrechte Asymptote

Waagrechte Asymptote: $y = \frac{a}{c}$

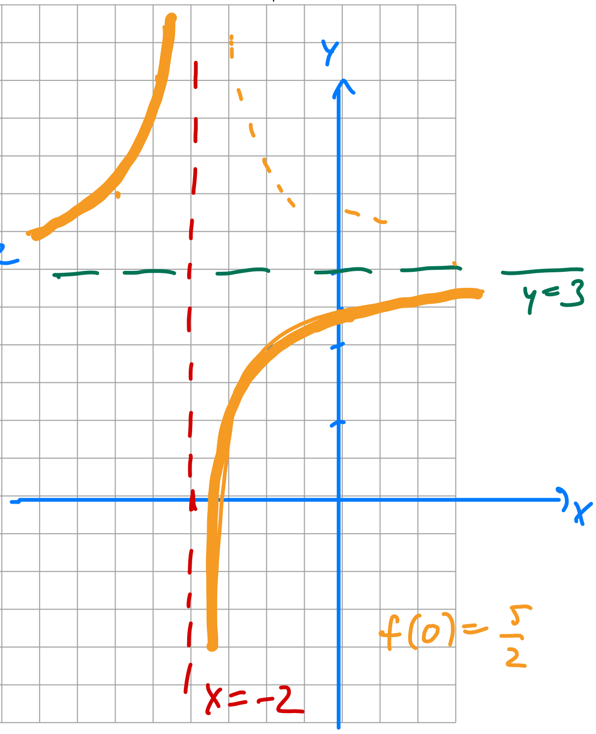
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a + \overbrace{\frac{b}{x}}^{\to 0}}{c + \underbrace{\frac{d}{x}}_{\to 0}} = \frac{a}{c}$$

Beispiel 5.23. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{3x+5}{x+2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$x = -2$ senkrechte Asymptote
Pol

$y = 3$ waagrechte Asymptote



Polynomdivision:

$(3x+5):(x+2) = 3 - \frac{1}{x+2}$
$-(3x+6)$
$\quad -1$

entsteht aus dem Graphen von $\frac{1}{x}$
um 2 nach links verschieben
Spiegeln an der x-Achse
um 3 nach oben verschieben

Bemerkung 5.24.
Um sich ein Bild über das Verhalten einer gebrochen-rationalen Funktion zu machen, ist es nützlich, folgende Fragen zu beantworten:

1. An welchen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ ist der Zähler 0 und wo sind die Nullstellen der Funktion? Wie verhält sich die Funktion in der Nähe der Nullstellen?
2. An welchen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ ist der Nenner 0 und wie verhält sich die Funktion in der Nähe dieser Nenner-Nullstellen, also Definitionslücken von f?
3. Wie verhält sich $f(x)$, wenn $|x|$ groß ist, also für $x \to \pm\infty$?
4. Was ist $f(0)$, also der Schnittpunkt mit der y-Achse?
5. In welchen Bereichen sind die Funktionswerte positiv bzw. negativ?

Weitere Eigenschaften, die studiert werden können sind:

6. Steigung und lokale Extremwerte
7. Krümmung und Wendepunkte
8. Symmetrie

Im folgenden untersuchen wir exemplarisch die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$$

5.2.1 Nullstellen und Definitionslücken

Bemerkung 5.25 (Nullstellen und Defintionslücken von gebrochen rationalen Funktionen)**.**

1. Um die Nullstellen und Definitionslücken einer gebrochen rationalen Funktion zu bestimmen, *faktorisiert* man zunächst Zähler und Nenner, d.h. man schreibt Zähler und Nenner jeweils als Produkt von Linearfaktoren und quadratischen Faktoren ohne Nullstellen.

$f(x)$ $g(x)$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$ | $g(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

Zähler

$1 \quad -4 \cdot 1 \quad 4 \cdot -1$
$-2 \cdot 2$

$x^2 - 3x - 4 = (x-4)\cdot(x+1)$ | $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Nenner

$2x^2 + 4x = 2x\,(x+2)$ | $x^2 - 4 = (x+2)\cdot(x-2)$

$f(x) = \dfrac{(x-4)(x+1)}{2x\cdot(x+2)}$ | $g(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} \neq \dfrac{x-2}{x+2}$

$x=2$ "$\frac{0}{0}$" nicht def. gilt nur, wenn $x \neq 2$!

2. *Maximaler Definitionsbereich:* Die Definitionslücken einer gebrochen rationalen Funktion sind die Nullstellen des Nenners in der Originaldarstellung, also der ungekürzten Form. Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nenners.

Nenner $\neq 0$!

Nenner-NSt
$0, -2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$ | $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Nenner NSt: $2, -2$

3. Die *vollständig gekürzte Darstellung einer gebrochen rationalen Funktion* erhält man, wenn man in der faktorisierten Form alle gemeinsamen Faktoren wegkürzt.

   Für die weitere Untersuchung von f zieht man die vollständig gekürzte Form heran, muss aber am Ende prüfen, ob die gefundenen Punkte (wie Nullstellen) im Definitionsbereich der ungekürzten Form liegen.

Vollständig gekürzt:

$f(x) = \dfrac{(x-4)(x+1)}{2x\cdot(x+2)}$ | $g(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ $\left(D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}\right)$!

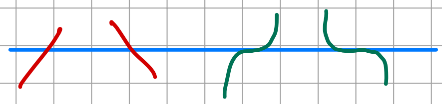
4. Die *Nullstellen* der gebrochen rationalen Funktion sind die Nullstellen des Zählers in der vollständig gekürzten Form, sofern sie im Definitionsbereich der Funktion liegen. Sie entsprechen den Linearfaktoren des Zählers.

   Unter der *Ordnung einer Nullstelle* versteht man die Ordnung der Nullstelle im Zählerpolynom der vollständig gekürzten Darstellung. An einer Nullstelle gibt es

   - einen Vorzeichenwechsel, wenn die Ordnung der Nullstelle ungerade ist
   - keinen Vorzeichenwechsel, wenn die Ordnung der Nullstelle gerade ist.

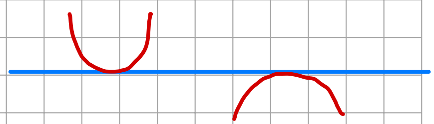
Aussehen des Graphen in der Nähe einer Nullstelle:

Ordnung ungerade $n=1$ $n=3,5,7,\dots$



Vorzeichenwechsel

grade $n=2,4,6,8,\dots$



kein VZW

$f(x)$:
$x=-1$ Ordnung 1
$x=4$ Ordnung 1

$g(x)$ gekürzte Form
$x=2$ Ordnung 1
keine Nullstelle von g, da $2 \notin D_g$

5. Nullstellen des Nenners in der Originaldarstellung, die in der vollständig gekürzten Darstellung nicht mehr vorhanden sind, heißen *hebbare Singularitäten.* „kann man flicken"

   An diesen Stellen kann man die Funktion *stetig ergänzen* durch den Funktionswert der Funktion, die durch die vollständig gekürzte Darstellung gegeben ist.

Definitionslücken heißen auch Singularitäten

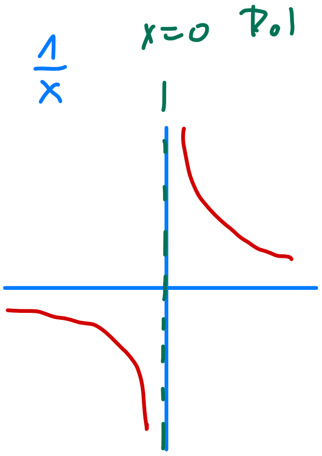
$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} & \text{falls } x \notin \{2,-2\} \\ 0 & \text{falls } x = 2 \end{cases}$$

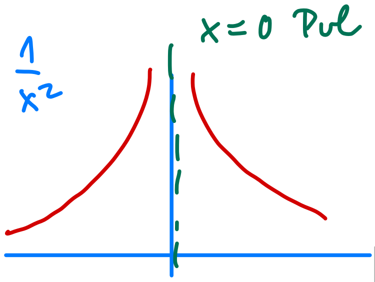
$\frac{x-2}{x+3}$

stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

und es gilt $\tilde{g}(x) = g(x) \quad \forall x \in D_g$

Man merkt nicht so recht, dass g an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert ist.





6. Die Nullstellen des Nenners in der vollständig gekürzten Darstellung heißen *Pole*. In der unmittelbaren Umgebung eines Pols werden die Funktionswerte der Funktion beliebig groß positiv oder negativ. Ist $a \in \mathbb{R}$ ein Pol von f, so gilt:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} |f(x)| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} |f(x)| = \infty$$

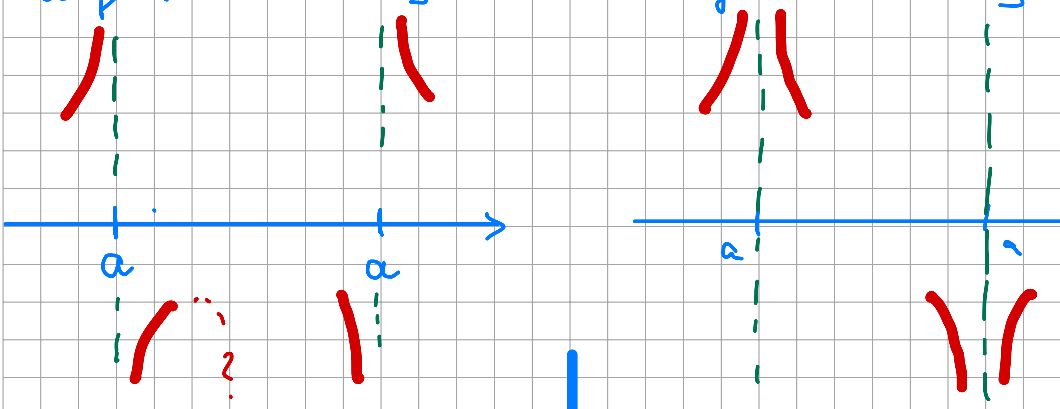
d.h. bei Annährung der x-Werte an die Polstelle a von rechts oder links streben die Funktionswerte nach $+\infty$ oder $-\infty$.

An den Polen hat der Graph der Funktion *vertikale Asymptoten.*

Die *Ordnung des Pols* a ist die Vielfachheit der Nullstelle a im Nenner der vollständig gekürzten Darstellung von f. An einer Polstelle gibt es

- einen Vorzeichenwechsel, wenn die Ordnung des Pols ungerade ist
- keinen Vorzeichenwechsel, wenn die Ordnung des Pols gerade ist.

Aussehen des Graphen in der Nähe eines Pols a



$f(x)$: $x=0$ Pol 1. Ordnung; $x=-2$ Pol 1. Ordnung

$g(x)$: $x=-2$ Pol 1. Ordnung; ($x=2$ Hebbare Singularität)

gekürzte Form anschauen

7. Eine gebrochen rationale Funktion kann nur an den Nullstellen oder Polen das Vorzeichen wechseln.

Gebrochen rationale Funktionen sind in allen $x \in D$ stetig!

2: NSt Ordn 1
−2: Pol ord 1

Vorzeichenschema für f und $\tilde{g}$

N1: −1, 4
P1: 0, −2

x		−2		−1		0		4	
$f(x)$	+		−		+		−		+
		P1 VZW		N1 VZW		P1 VZW		N1 VZW	

x		−2		2	
$g(x)$	+		−		+
		P1 VZW		N1 VZW	

$x>0$ groß

Kontrolle $x<0$ groß
$4\cdot\ominus = \oplus$ ✓

$x \ll 0$
$2\cdot\ominus = \oplus$ ✓

$$f(x) = \frac{(x-4)(x+1)}{2x\cdot(x+2)} = \frac{x^2-3x-4}{2x^2+4x}$$

$$\tilde{g}(x) = \frac{x-2}{x+2} = \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$$

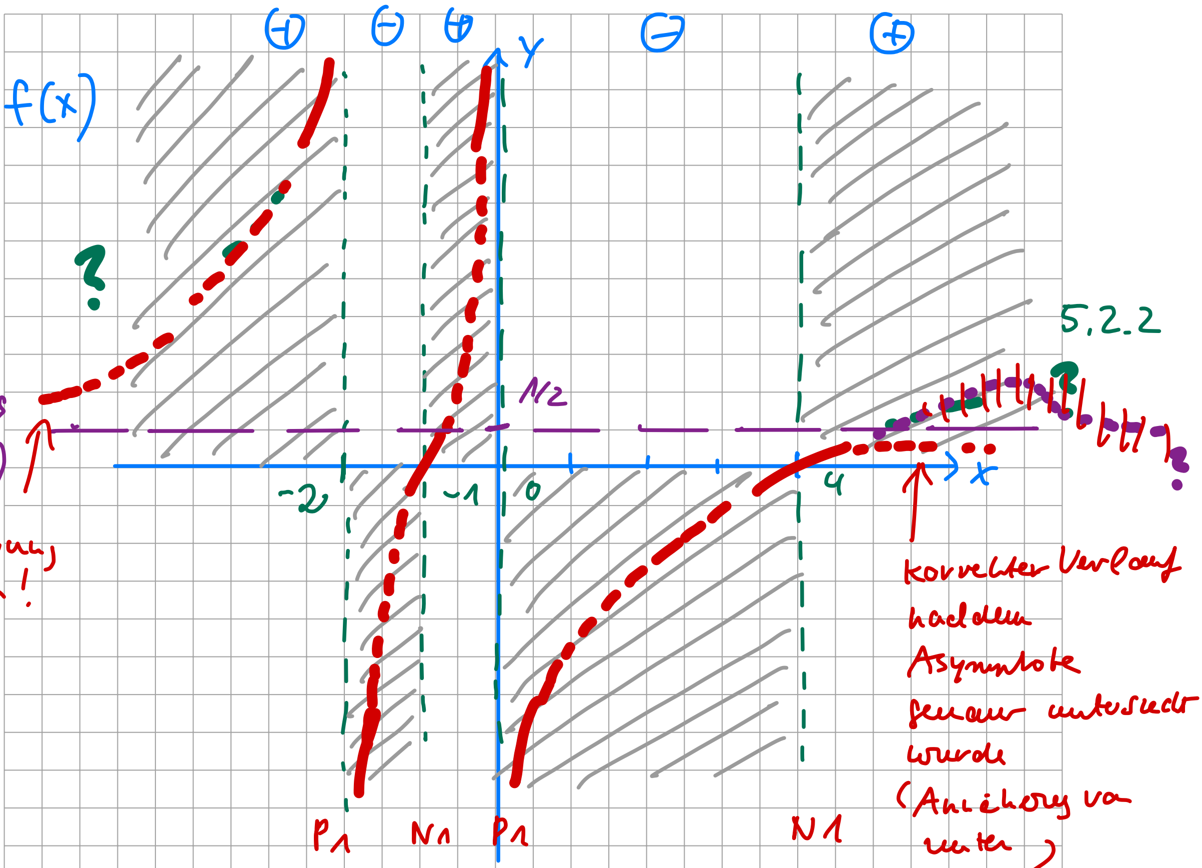
$x \neq 2$

8. Wenn Zähler- und Nennerpolynom in Linearfaktoren zerlegt werden können, kann man den Graphen der Funktion mit den gewonnenen Informationen relativ gut skizzieren. Es fehlt nur noch das Verhalten für $|x| \to \infty$.

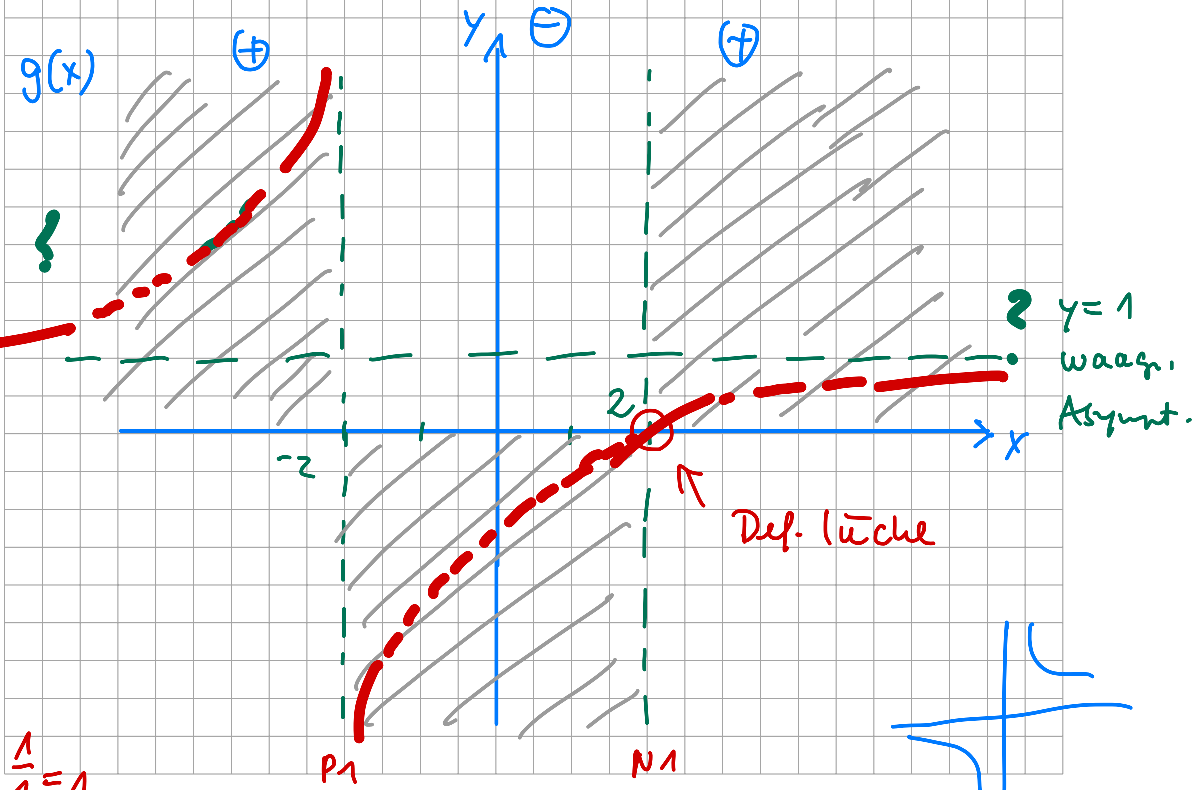
Graph verläuft im grau schraffierten Bereich

aus (5.2.2)

Annäherung von oben!



g: Graph ist Hyperbel?



hebbar

$$\lim_{x \to \pm\infty} \tilde{g}(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1\cdot x - 2}{1\cdot x + 2} = \frac{1}{1} = 1$$

waagr. Asymptote $y = 1$

$(x-2):(x+2) = 1 - \frac{4}{x+2}$
$\underline{x+2}$
-4

−2 nach links
·4 gestreckt in y-Richtung
spiegeln an der x-Achse
+1 nach oben verschieben

5.2.2 Asymtotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$

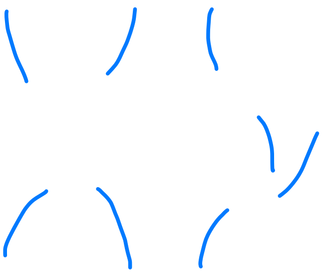
Durch Polynomdivision kann man jede gebrochen-rationale Funktion als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen-rationalen Funktion schreiben:

Ist $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p den Grad m und q den Grad n hat mit $m \geq n$, so erhält man durch Polynomdivision

$$f(x) = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

} Zählergrad
} < Nennergrad n

Polynom p(x)
$a_n x^n + \ldots$
Leitterm
$p(x) \approx a_n x^n$
wenn |x| groß



wobei h ein Polynom vom Grad $m - n$ und $r(x)$ ein Polynom vom Grad $< n$ ist. Das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ wird durch das Polynom $h(x)$ bestimmt, da die Funktionswerte einer echt gebrochen-rationalen Funktion für große $|x|$ nach 0 streben:

Bemerkung 5.26.
Für **echt gebrochen** rationale Funktionen (Zählergrad < Nennergrad) gilt:
Die Funktionwerte $f(x)$ nähern sich der 0 an, wenn man für x immer größere, nach unendlich strebende Werte einsetzt oder wenn man für x immer kleinere, nach minus unendlich strebende Werte einsetzt; denn $h(x)$=0. Somit nähert sich der Graph von f für große $|x|$ der x-Achse an. Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Man sagt: Die x-Achse ist eine *waagrechte Asymptote* von f für $x \to \pm\infty$.

Bsp:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{2x^2+4x-1}{-x^4+3x^2+2}}_{\text{echt gebrochen}} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{-1+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^4}}$$

$\frac{1}{x^{\text{Nennergrad}}}$

$\frac{2}{x^2} \to 0$, $\frac{4}{x^3} \to 0$, $\frac{1}{x^4} \to 0$, $-1 \to -1$, $\frac{3}{x^2} \to 0$, $\frac{2}{x^4} \to 0$

$$= \frac{0}{-1} = \underline{\underline{0}}$$

Bemerkung 5.27.
Für **unecht gebrochene** rationale Funktionen $(m \geq n)$ gilt:
Die Funktionwerte $f(x)$ nähern sich den Funktionswerten des Polynoms $h(x)$ an (siehe Polynomdivision oben), wenn man für x immer größere, nach unendlich strebende Werte einsetzt oder wenn man für x immer kleinere, nach minus unendlich strebende Werte einsetzt:

f(x) − h(x)
echt gebrochen!

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - h(x)) = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - h(x)) = 0$$

Man sagt: Das Polynom $h(x)$ ist eine *(schräge) Asymptote* von f für $x \to \pm\infty$.

grad h = Zählergrad − Nenner (von f)

Spezialfall: Zählergrad = Nennergrad $(=n)$ $a_n, b_n \neq 0$

In diesem Fall ist

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0} = \underbrace{\frac{a_n}{b_n}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\text{echt gebrochen}} \xrightarrow{x \to \pm\infty} 0$$

Bsp

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 1}{-2x^3 + x - 4} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 - \overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{1}{x^3}}^{\to 0}}{-2 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{4}{x^3}}_{\to 0}} = \frac{3}{-2}$$

Die Funktionwerte $f(x)$ nähern sich $\frac{a_n}{b_n}$, wenn man für x immer größere, nach unendlich strebende Werte einsetzt oder wenn man für x immer kleinere, nach minus unendlich strebende Werte einsetzt:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}$$

Man sagt:
Die horizontale Gerade $y = \frac{a_n}{b_n}$ ist eine *waagrechte Asymptote* von f für $x \to \pm\infty$.

Zurück zum "großen" Beispiel

Zählergrad = Nennergrad!

!

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x} \qquad g(x) = \frac{1x^2 - 4x + 4}{1x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Zählergrad = Nennergrad bedeutet immer: Waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$!

$f(x)$: $y = \frac{1}{2}$ waagrechte Asymptote

$g(x)$: $y = 1$ waagrechte Asymptote

$\longrightarrow$ Man kann noch weiter untersuchen, ob die Annäherung von oben oder unten erfolgt (für beide Seiten, also $+\infty$ und $-\infty$)

Weitere Untersuchung: Nähert sich der Graph von f der Asymptote $y = \frac{1}{2}$ für $x \to +\infty$ / $x \to -\infty$ von oben oder unten?

Polynomdivision durchführen:

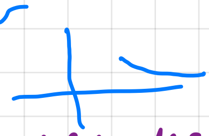
$$(x^2 - 3x - 4) : (2x^2 + 4x) = \frac{1}{2} + \frac{-5x - 4}{2x^2 + 4x}$$

$$\underline{x^2 + 2x}$$

$$-5x - 4$$

$$= \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{5x + 4}{2x^2 + 4x}}_{\to 0 \text{ für } x \to \pm\infty}$$

$x \to \infty$ Rest $\to 0$, von positiven Werten her



d.h. von $\frac{1}{2}$ wird wegen der $\ominus$ bei großen x-Werten ein bisschen was abgezogen

$\to$ Näherung von unten an die Asymptote

$x \to -\infty$ Rest $\to 0$ von negativen Werten her
$\approx \frac{5}{2x} < 0$

d.h. von $\frac{1}{2}$ wird wegen der $\ominus$ bei großen negativen x-Werten immer ein bisschen dazugezählt.

$\to$ Näherung an die Asymptote von oben her.

Grad $h(x)$ = Zählergrad − Nennergrad = 1

Gerade !?

Spezialfall: Zählergrad = Nennergrad + 1
Ist der Zählergrad genau um 1 größer als der Nennergrad, ist die Asymptote $h(x)$ eine lineares, nicht-konstantes Polynome, der Graph also eine nicht-horizontale Gerade.

Beispiel 5.28.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion und bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2}$$

"Zählergrad = Nennergrad + 1"

(1) Zähler/Nenner faktorisieren

Zähler $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$ $\quad -5 \cdot 1$

Nenner $x-2$

$$f(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{x-2}$$

ist vollständig gekürzt (=> keine hebbaren Singularitäten !?)

(2) $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ Nenner-NSt rausnehmen!

Nullstellen von f: (Zähler) $x = 5$, $x = -1$ — beide von der Ordnung 1

Pole: $x = 2$ Pol der Ordnung 1

(3) Vorzeichenschema von f

x		-1		2		5	$\to \infty$
f(x)	$-$		$+$		$-$		$+$
		N1 VZW		P1 VZW		N1 VZW	

Kontrolle $x \to -\infty$
3 negative Faktoren $-$ ✓

(4) Verhalten für $x \to \pm\infty$

Zählergrad = Nennergrad + 1

Asymptote ist eine nicht horizontale Gerade !?

Polynomdivision:

$$(x^2 - 4x - 5) : (x-2) = \underbrace{x - 2}_{\text{Polynom vom Grad 1}} - \underbrace{\frac{9}{x-2}}_{\text{echt gebrochen}}$$

$x^2 - 2x$
$-2x - 5$
$-2x + 4$
-9

$\boxed{y = x - 2}$

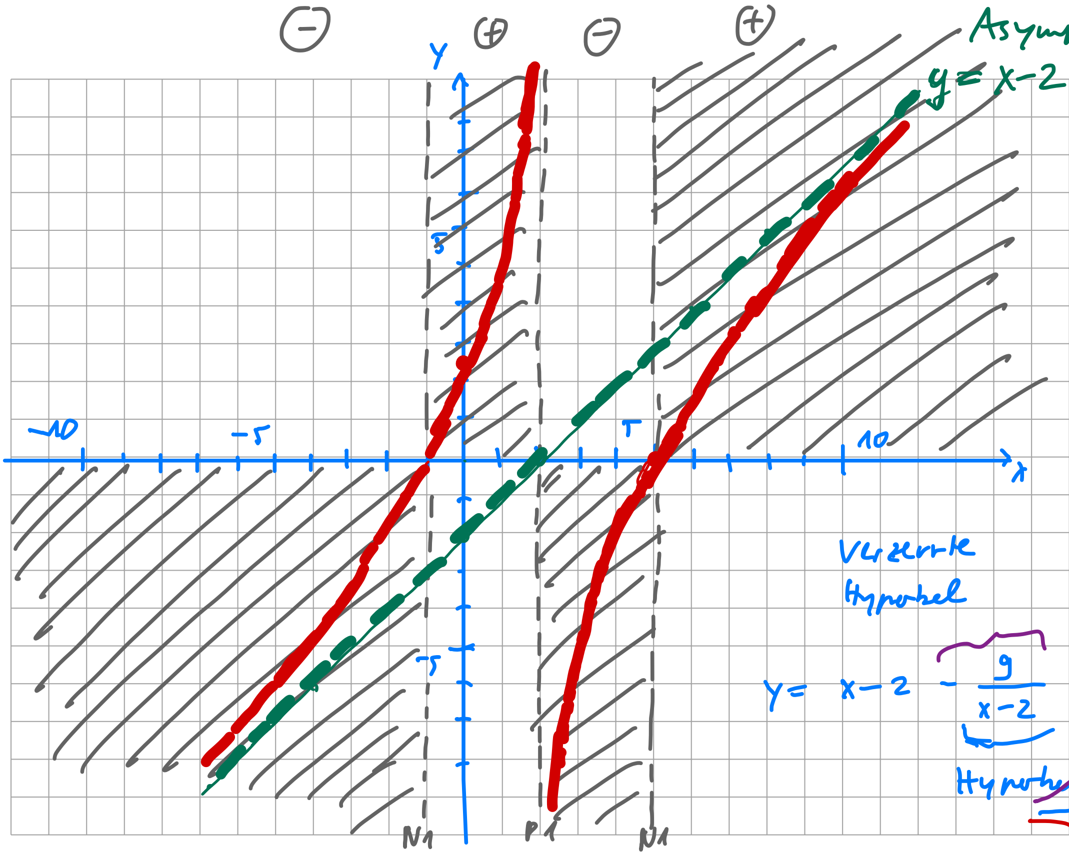
Achsenschnittpunkt

$f(0) = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

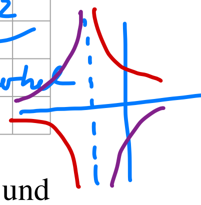
Von welcher Seite nähert sich der Graph der Geraden $y = x - 2$ an?

$x \to +\infty$ wird ein bisschen abgezogen $\to$ von unten

$x \to -\infty$ wird ein bisschen dazugezählt $\to$ von oben



$$y = x - 2 - \underbrace{\overbrace{\frac{9}{x-2}}}_{\text{Hyperbel}}$$



Beispiel 5.29. Skizziere den Graphen der Funktion und bestimme Definitions- und Wertemenge:

$$f(x) = \frac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$$

① Zähler, Nenner faktorisieren

Zähler: $5x + 21 = 5\left(x + \frac{21}{5}\right) = 5(x + 4{,}2)$

Nenner: $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

$$f(x) = \frac{5x + 21}{(x+5)^2}$$ vollständig gekürzt

keine hebbaren Singularitäten

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ (ohne Nenner-Nullstellen)

② Nullstellen $x + 4{,}2 = 0 \iff x = -4{,}2$

Nullstelle der Ordnung 1

Pole $x = -5$ Ordnung 2

③ Vorzeichenschema

x		-5		$-4{,}2$	
$f(x)$	⊖		⊖		⊕
		P2 kein VZW		N1 VZW	

Kontrolle

$x \ll 0$ (groß negativ)

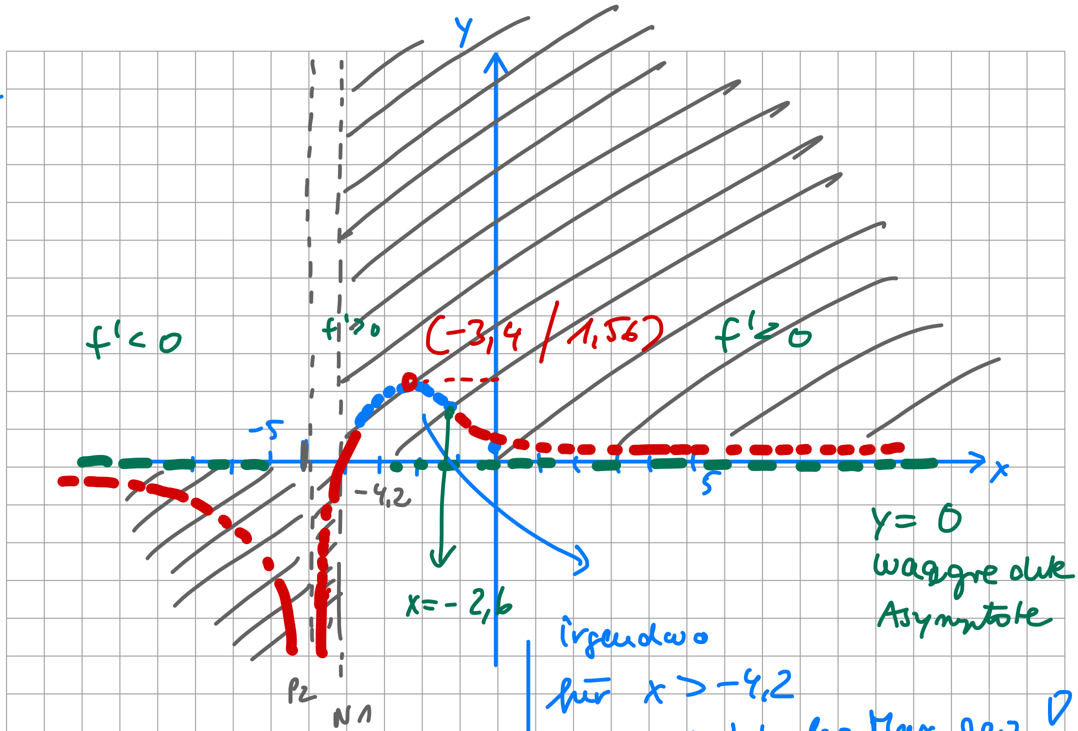
$\Rightarrow$ ⊖ ✓

$\ll$ sehr klein gegenüber rechter Seite

Achsenschnittpunkt

$f(0) = \frac{21}{25}$

$f(-3,4) \approx 1,56$



irgendwo für $x > -4,2$ muss ein lokales Max. sein!

dann kommt noch ein Wendepunkt

muss ein

(4) Verhalten für $x \to \pm\infty$

Zählergrad $= 1$ $<$ Nennergrad $= 2$

echt gebrochen

$\Rightarrow$ x-Achse ist waagrechte Asymptote

(5) Kandidaten für lokale Extremstellen: $f'(x) = 0$

$f(x) = \frac{5x+21}{(x+5)^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$

$$f'(x) = \frac{(x+5)^2 \cdot 5 - (5x+21) \cdot 2 \cdot (x+5) \cdot 1}{(x+5)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x+5)}\left[5(x+5) - 2(5x+21)\right]}{(x+5)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{5x+25-10x-42}{(x+5)^3} = \frac{-5x-17}{(x+5)^3} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $-5x = 17$ $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{x = -3,4}}$

Da wir bereits wissen, dass es ein lok. Max gibt, muss hier ein lokales Max sein!

Steigungsverhalten von f (d.h. Vorzeichenschema für f')

x		-5		$-3{,}4$	
$f'(x)$	$\ominus$	P3 VZW	$\oplus$	N1 VZW	$\ominus$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$x = -3{,}4$ NST Ord. 1

$x = -5$ Pol Ord. 3 von f'

Kontrolle $\frac{\oplus}{\ominus^3} < 0$ ✓

streng monoton fallend in $]-\infty, -5[$ und $[-3{,}4, +\infty[$

streng monoton steigend in $]-5, -3{,}4]$

(6) Wertemenge (aus Graphen) $W = \left]-\infty, f(-3{,}4)\right]$

Bei $-3{,}4$ ist das globale Maximum! $f(-3{,}4) \approx 1{,}56$

Ein globales Minimum gibt es nicht.

(7) Wendepunkt / Krümmung

$$f'(x) = \frac{-5x-17}{(x+5)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x+5)^3 \cdot (-5) - (-5x-17) \cdot 3(x+5)^2}{(x+5)^6}$$

$$= \frac{\cancel{(x+5)^2} \cdot \left[-5(x+5) - 3(-5x-17)\right]}{(x+5)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$= \frac{-5x - 25 + 15x + 51}{(x+5)^4} = \frac{10x+26}{(x+5)^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2{,}6$$

-5 P4

$-2{,}6$ N1

Krümmungsverhalten / Vorzeichenschema für f''

x	$\curvearrowright$	-5	$\curvearrowright$	$-2{,}6$	$\curvearrowleft$
f''	$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$
	kein	P4		N1 VZW	

Rechtskrümmung in $]-\infty, -5[$ und $]-5, -2{,}6]$

Linkskrümmung in $[-2{,}6; +\infty[$

WP bei $x = -2{,}6$

5.2.3 Eine gebrochen rationale Funktion ohne Nullstellen im Nenner

Beispiel 5.30.

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. ⇐ Nenner kann man nicht in Linearfaktoren zerlegen.

$y = x^2 + 1$
Parabel

$f(x)$ Kehrwert
$= \frac{1}{x^2+1}$

Bei $x = 0$
lok. Maximum /
globales Max.

WP: erhält
man mit 2. Abl.

f(x) hat keine Nullstellen

∴ keine Def. Lücken $D_f = \mathbb{R}$

f echt gebrochen rational

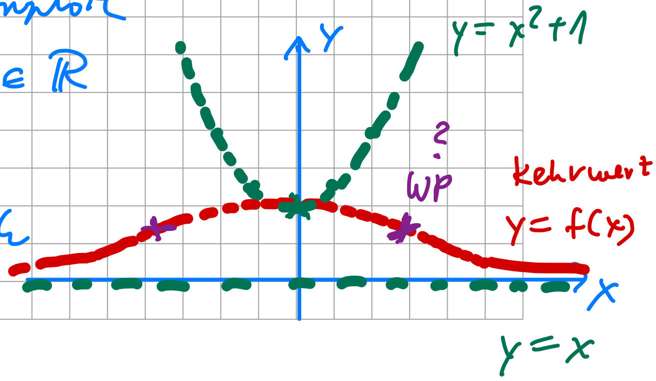
x-Achse waagrechte Asymptote

Vorzeichen: $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Symmetrie: $f(-x) = f(x)$

⇒ Achsensymmetrisch

$f(0) = 1$



5.2.4 Anwendungsbeispiel

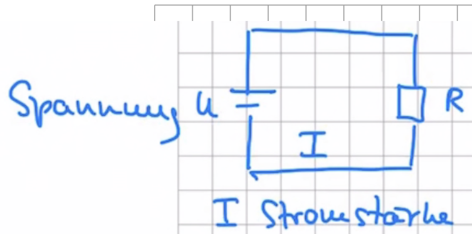
Beispiel 5.31.

Schaltet man zwei elektrische Widerstände R_1 und R_2 parallel, dann ist der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Ein Widerstand von $8\,[\Omega]$ (Ohm) wird mit einem variablen Widerstand $R_2 = x\,[\Omega]$ parallel geschaltet.

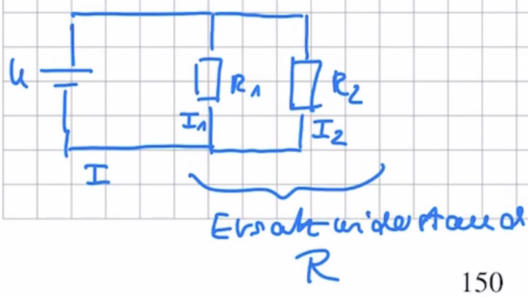
Analysieren Sie die Abhängigkeit des Gesamtwiderstandes R vom variablen Widerstand x.



Ohmscher Widerstand

$U \sim I$

$R = \frac{U}{I}$



$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

$\left(\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

$R = \frac{U}{I}$

Beispiel 5.32. Das Gewicht $G(x)$ [N] eines Astronauten mit der Masse 80 [kg] beträgt in einer Höhe von x [km] über der Erdoberfläche

R = 6370 km
Erdradius

$$G(x) = 800 \cdot \left(\frac{6370}{6370 + x}\right)^2$$

Wieviel wiegt der Astronaut in einer Höhe von 100 km bzw. 500 km? Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

$$G(x) = 800 \cdot \frac{6370^2}{(6370+x)^2}$$

gebrochen rational
echt gebrochen
$ZG = 0 < NG = 2$

$G(0) = 800$ N d.h. $g = 10 \frac{m}{s^2}$
(verwendetes g)

$$G(100) \; [km] = 800 \cdot \frac{6370^2}{6470^2} \underset{TR}{\approx} 775 \; [N]$$

$$G(500) = 800 \cdot \frac{6370^2}{6870^2} \approx 688 \; [N]$$

Gewicht nimmt mit zunehmender Höhe ab.

$$\lim_{x \to \infty} G(x) = 0$$

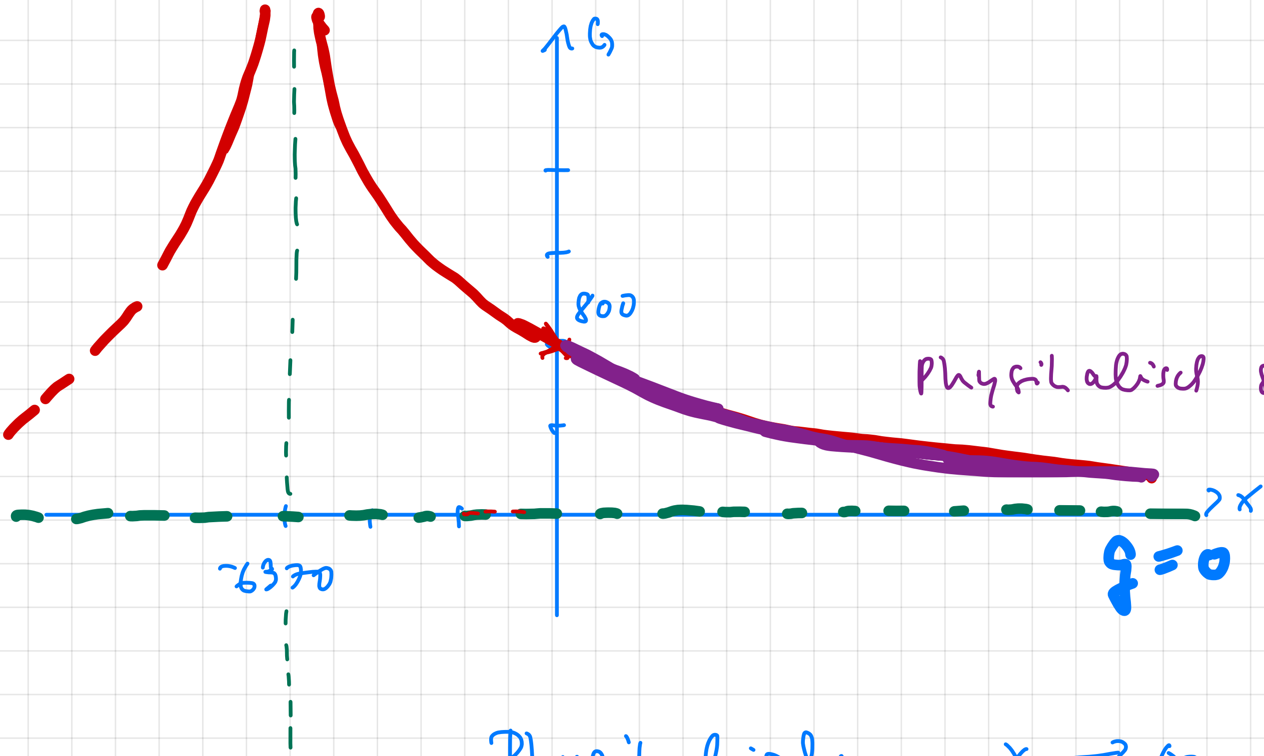
x-Achse waagrechte Asymptote

Mathematisch: $D = \mathbb{R} \setminus \{-6370\}$

$\hat{=}$ Erdmittelpunkt

$x = -6370$ Pol 2. Ordnung

keine Nullstelle, $g(x) > 0 \quad \forall x \in D$



Physikalisch sinnvoll

Physikalisch: $x \to \infty$

"Schwerelosigkeit"

$g(x) \to 0$

Physikalisch sinnvoll

$x \geq 0$

"oberirdisch"

$x < 0$ unter Meeresspiegel

$R = 8\ [\Omega]$ $\qquad x := R_3$ unabhängige Variable

$$R(x) = \frac{8 \cdot x}{8 + x}$$

gebrochen-rationale Fkt
unecht

Polynom-
division

$$= 8 \cdot \frac{x + 8 - 8}{x + 8} = 8 \cdot \left(1 - \frac{8}{x+8}\right) = 8 - \frac{64}{x+8}$$

Mathematisch betrachtet:

$D_R = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$

Pol der Ordnung 1 bei $x = -8$

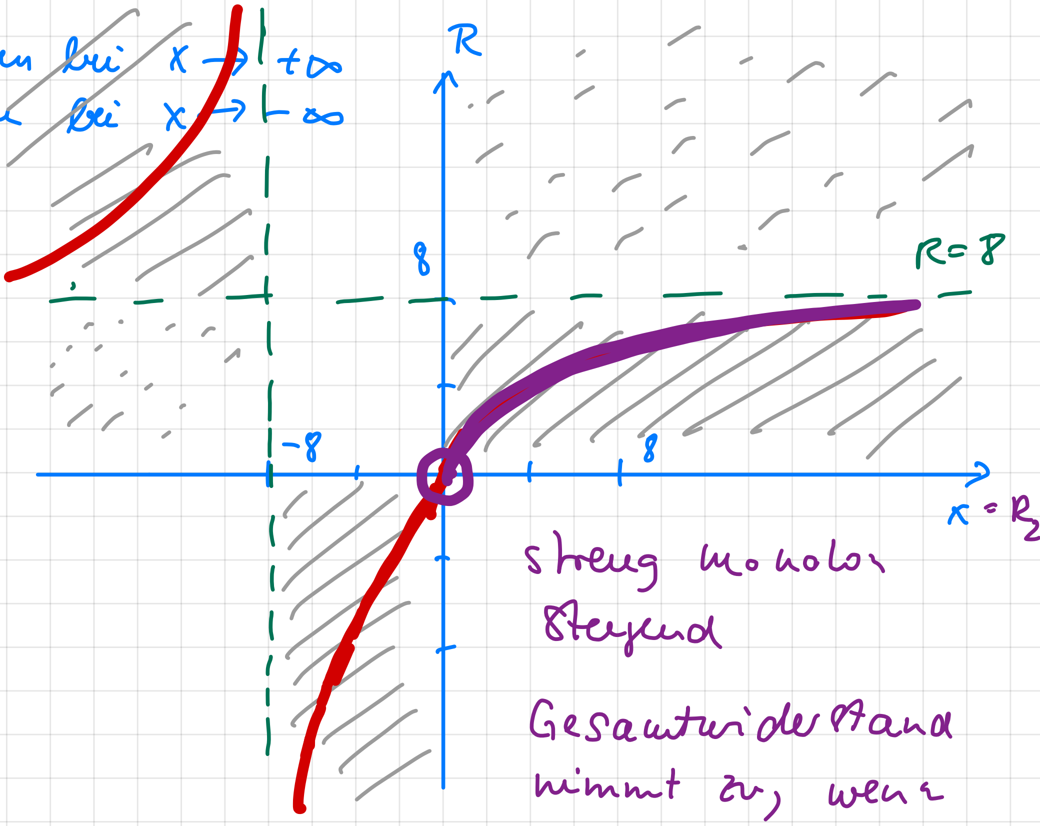
Nullstelle: $\quad x = 0$

Vorzeichenschema:

x		-8		0	
$R(x)$	$+$		$-$		$+$
		P1		N1	

$$\lim_{x \to \pm\infty} R(x) = 8$$

von unten bei $x \to +\infty$
von oben bei $x \to -\infty$



Physikalisch sinnvoll

$x > 0$

streng monoton steigend

Gesamtwiderstand nimmt zu, wenn $x = R_2$ zunimmt

Was ist bei $x = 0$?
$\quad$ (d.h. $R_2 = 0$?)

Kurzschluss !

Gesamtwiderstand ist immer < 8

Wenn $R_2 = x \to \infty$ nähert er sich $8\,\Omega$ an.

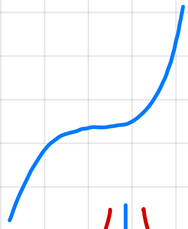
$y = x^n$

$n > 0$

n gerade

$n \geq 3$

n ungerade



$D = \mathbb{R}$

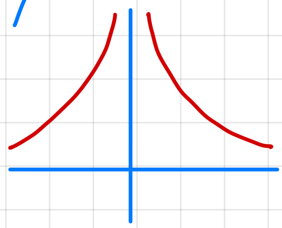
$n < 0$

$\frac{1}{x^{-n}}$

$-n > 0$

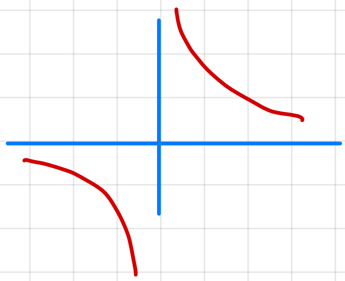
n gerade

$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^4} > 0$



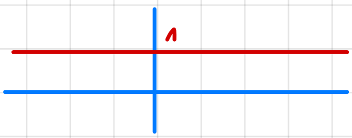
n ungerade

$\frac{1}{x^1}$ $\frac{1}{x^3}$

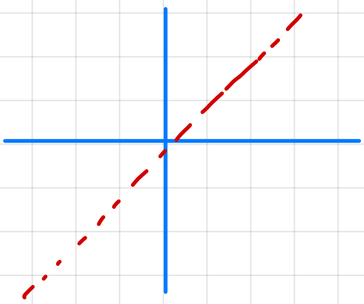


$n = 0$

$y = x^0 \equiv 1$



$n = 1$ $y = x$



5.3 Wurzelfunktionen und allgemeine Potenzfunktionen

Die Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten wurden in (4.9) behandelt.

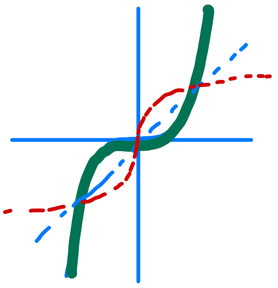
Definition 5.33.
Die Funktionen

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ heißen *Wurzelfunktionen*.
Die Wurzelfunktion $y = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $y = x^n$ (mit geeigneter Einschränkung des Definitionsbereichs.)

- Ist n gerade, so ist $D_f = W_f = \mathbb{R}_0^+$.
- Ist n ungerade, so ist $D_f = W_f = \mathbb{R}$.

n ungerade



umkehrbar auf $\mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^n$

z.B. $\sqrt[3]{-8} = -2$

bei uns erlaubt!

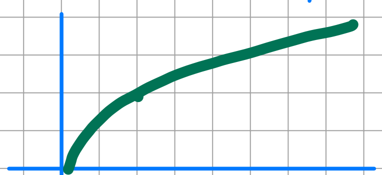
$y = x^n \quad | \sqrt[n]{\ }$

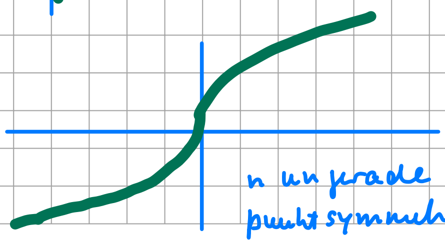
$\sqrt[n]{y} = x$

Umbenennen: $y = \sqrt[n]{x}$

n gerade

$y = \sqrt[n]{x}$

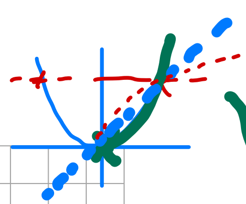




n ungerade

punktsymmetrisch

Achtung:



n gerade

$f(x) = x^n$

nicht umkehrbar

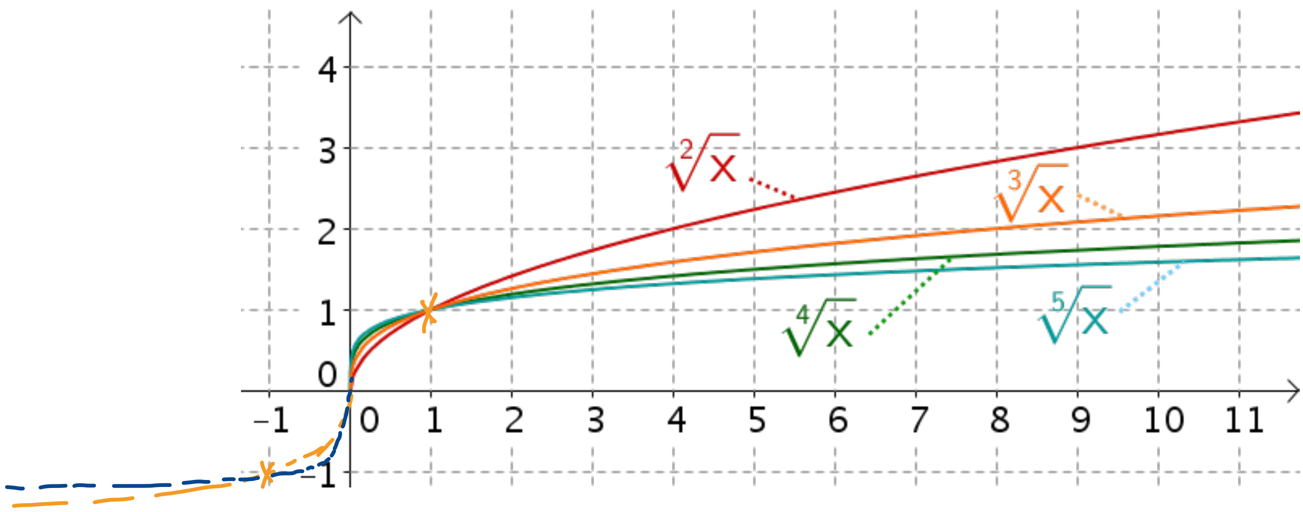
da nicht ein-eindeutig

nicht surjektiv auf $\mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$

Einschränken von Def.- und Zielbereich

$\rightsquigarrow$ umkehrbar

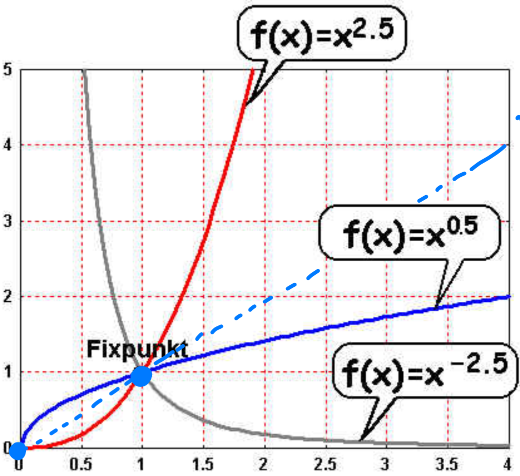


Definition 5.34.
Die Funktionen $f(x) = x^q$ mit $q \in \mathbb{R}$ heißen *allgemeine Potenzfunktionen*.

Grundsätzlich, bis auf wenige Ausnahmen:

$D = \mathbb{R}^{+}_{(0)}$ F falls $q > 0$

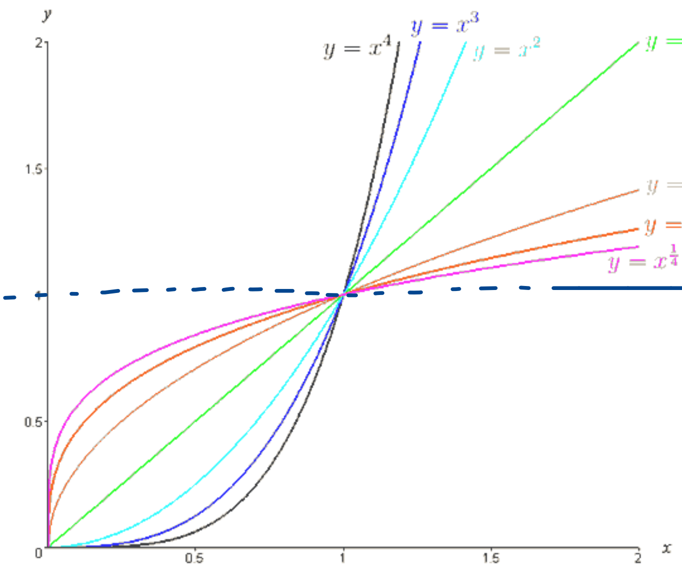
$n = 1$



$y = x$ $(n=1)$

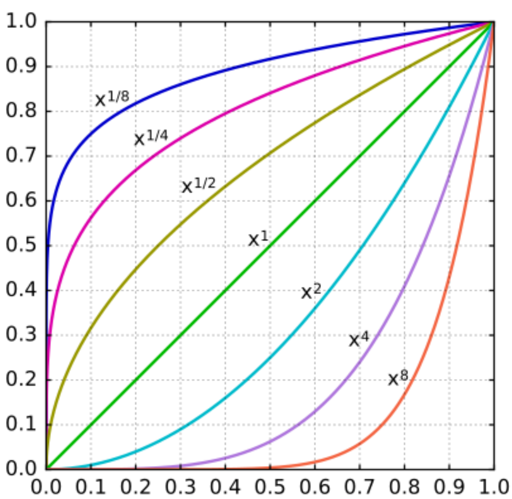
falls in 0 definiert

Potenzfunktionen mit positiven Exponenten

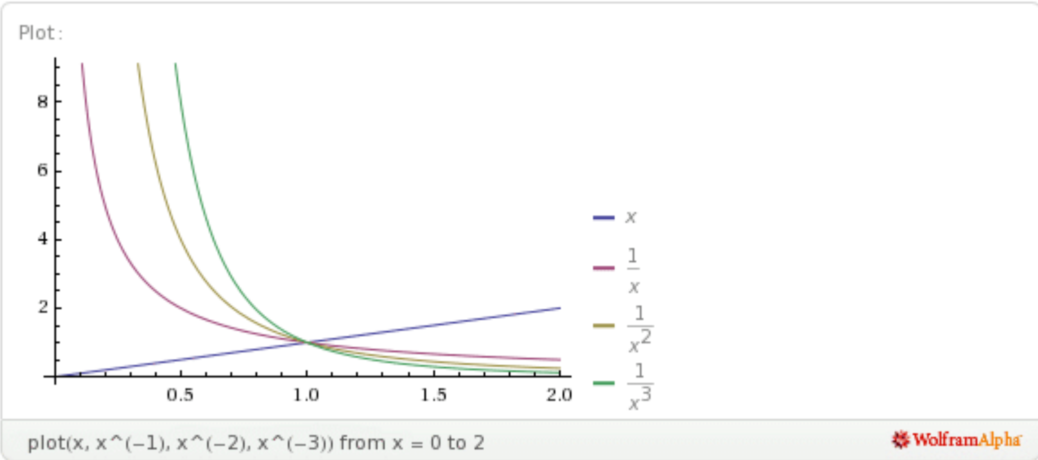


$q = 1$

$x^0 = 1$



Potenzfunktionen mit negativen Exponenten



$D = \mathbb{R}^+$, außer n ganzzahlig

$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x^3}$ ... $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

5.4.1 Exponentialfunktionen

Definition 5.35. Die Funktion f, die gegeben ist durch

$$f(x) = a^x \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1$$

$1^x = 1$

heißt *Exponentialfunktion zur Basis a.*

Potenzfunktion $y = x^q$ $(q \in \mathbb{R})$

unabhängige Variable in der Basis

Exponentialfunktion $y = a^x$ $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

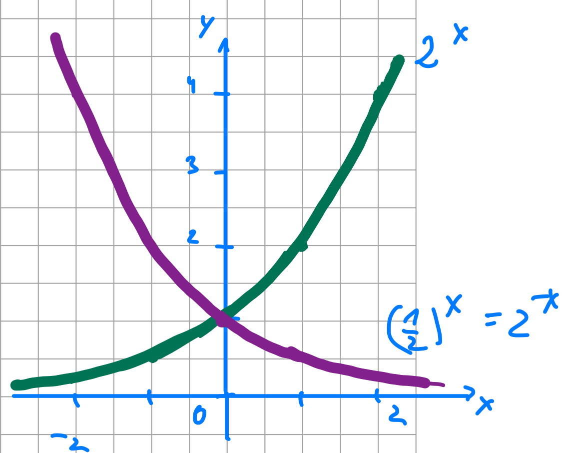
unabh. Variable im Exponent

$y = 2^x$

Spiegeln an y-Achse

Wertetabelle für $a = 2$ / $a = \frac{1}{2}$

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

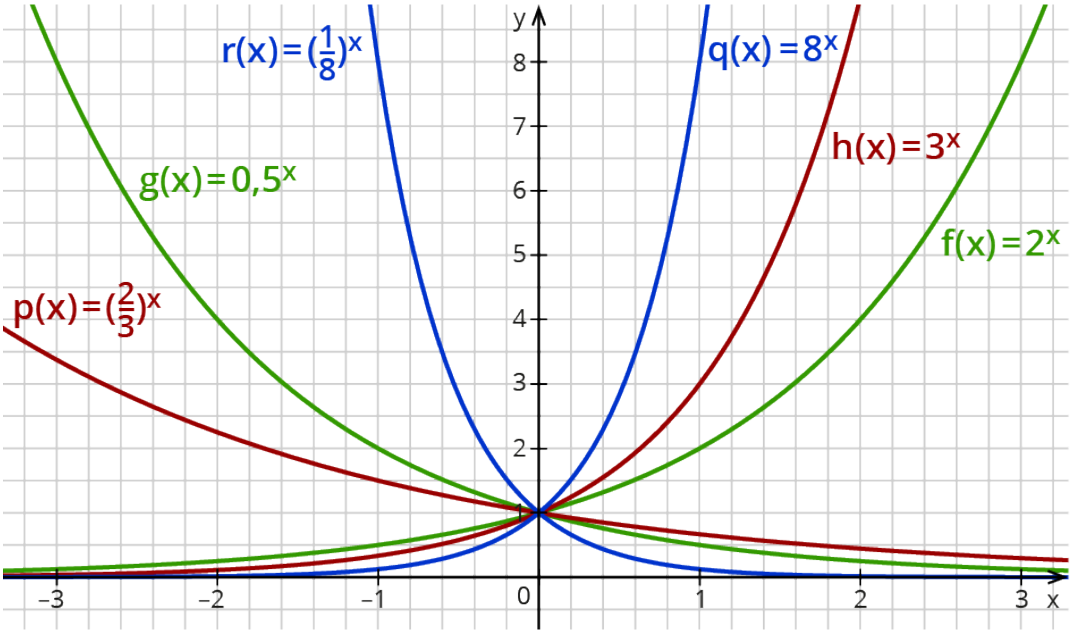


$\lim_{x \to \infty} 2^x = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} (\frac{1}{2})^x = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$ → x-Achse ist waagrechte Asymptote für $x \to -\infty$ (nicht für $x \to +\infty$)

$\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{2})^x = 0$ waagr. Asym. für $x \to +\infty$



$0 < a < 1$
$\Rightarrow$ fallend

$a > 1$
$\Rightarrow$ steigend

Bemerkung 5.36. *Eigenschaften der Exponentialfunktionen*
Die Exponentialfunktion $y = f(x) = a^x$ zur Basis $a > 0$, $a \neq 1$ hat folgende Eigenschaften:

- Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$, da $a > 0$
- Wertemenge $W_f = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$. Die Funktion hat keine Nullstellen!
- Die Funktion ist streng mononton steigend, wenn die Basis $a > 1$ ist.
  Die Funktion ist streng monoton fallend, wenn die Basis $0 < a < 1$ ist.
- Für $a > 1$ ist die x-Achse eine horizontale Asymptote für $x \to -\infty$. Es gilt:
  $$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+ \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$
  Für $0 < a < 1$ ist die x-Achse eine horizontale Asymptote für $x \to \infty$. Es gilt:
  $$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} a^x = 0^+$$
- Schnittpunkt mit der y-Achse ist der Punkt $(0, 1)$

gemeinsamer Punkt aller Exp. Fkt.

Bemerkung 5.37.
Der Graph von $y = (\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ entsteht aus dem Graphen von a^x durch Spiegelung an der y-Achse.

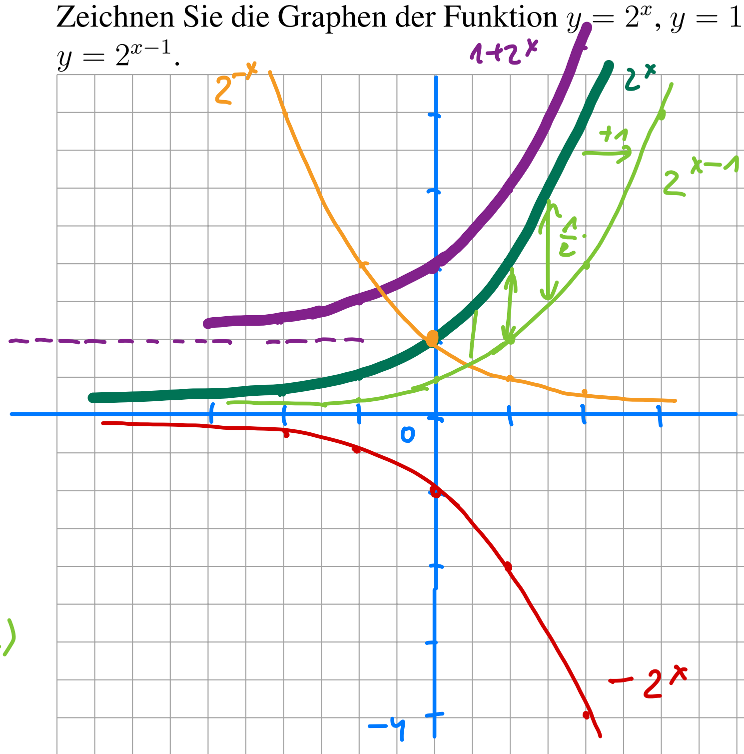
$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

$y = a^x$

$y = a^{-x}$

gespiegelt an der y-Achse

Aufgabe 5.38.
Zeichnen Sie die Graphen der Funktion $y = 2^x$, $y = 1 + 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = -2^x$ und $y = 2^{x-1}$.



$y = 1 + 2^x$
1 nach oben
$y = 1$ waagr. Asymptote für $x \to -\infty$

$y = 2^{-x}$
Spiegeln an y-Achse
$y = 0$ waagr. Asymptote für $x \to +\infty$

$f(x) \rightsquigarrow f(x-1)$

$y = -2^x$
Spiegeln an x-Achse
$y = 0$ waagr. Asymptote für $x \to -\infty$

$y = 2^{x-1}$
um 1 nach rechts

$y = 2^{x-1}$
$= 2^x \cdot 2^{-1} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2^x}$
auf die Hälfte stauchen in y-Richtung

Definition 5.39.
Die Exponentialfunktion mit der Basis e (*Eulersche Zahl*)

$e \approx 2,71$

$$f(x) = e^x$$

$(e^x)' = e^x$

heißt *natürliche Exponentialfunktion* oder kurz e-*Funktion*.

Bemerkung 5.40.
Es gilt:

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

Die Exponentialfunktion mit Basis a entsteht also durch eine Skalierung (Streckung oder Stauchung) in Richtung der x-Achse mit dem Faktor $\ln a$ aus der e-Funktion.

$\ln(u^r) = r \cdot \ln(u)$ $(u > 0)$

$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$

$f(x) = e^x$ $\qquad a^x = f(\underbrace{\ln a \cdot x})$

bewirkt stauchen oder Strecken des Graphen der e-Fkt in x-Richtung

($\hat{=}$ Wechsel der Einheit)

(*) $e^{\alpha t - \alpha t_0} = 2 \quad | \ln$

$\alpha \cdot (t - t_0) = \ln 2$

$\Delta t = \frac{\ln 2}{\alpha}$ Zeit einheiten

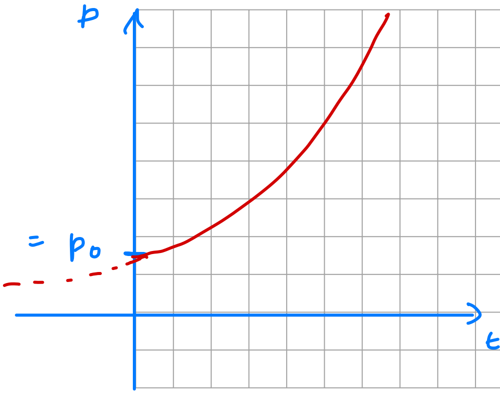
Verdopplungszeit

Bemerkung 5.41.
Die Exponentialfunktion ist hilfreich bei der Beschreibung von *Wachstumsprozessen*, z.B.

$\dot p(t) \overset{\alpha}{\sim} p(t)$

1. Exponentielles Wachstum einer Population p in Abhängigkeit von der Zeit t mit Anfangsbestand p_0 zur Zeit $t = 0$, mit $\alpha > 0$:

$$\boxed{p(t) = p_0 \cdot e^{\alpha t}} \qquad \alpha > 0$$



$\dot p(t) = p_0 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha(t)} = \alpha \cdot p(t)$

Verdopplungszeit

unabhängig vom Startpunkt t_0

$p(t) = 2 \cdot p(t_0)$

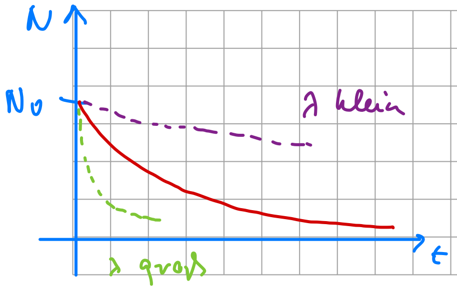
$\cancel{p_0} \cdot e^{\alpha t} = 2 \cdot \cancel{p_0} \cdot e^{\alpha t_0}$ (*) $\quad | : e^{\alpha t_0}$

2. Radioaktiver Zerfall mit Anfangsmenge N_0 und Zerfallskonstante $\lambda > 0$:

Exponentielle Abnahme

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$\dot N(t) \overset{-\lambda}{\sim} N(t)$



Halbwertszeit

unabhängig vom Startzeitpunkt t_0

$N(t) = \frac{1}{2} N(t_0)$

$\cancel{N_0} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \cancel{N_0} e^{-\lambda t_0}$ (*) $\quad | : e^{-\lambda t_0}$

(*) $e^{-\lambda t + \lambda t_0} = \frac{1}{2}$

$\lambda \cdot (t_0 - t) = \ln \frac{1}{2} \quad | \cdot (-1)$

$\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

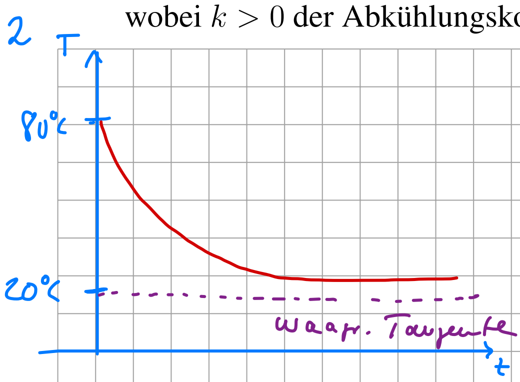
$\lambda \cdot (t - t_0) = + \ln 2$

$\Delta t = \frac{\ln 2}{\lambda}$

3. *Newton'sches Abkühlungsgesetz*. Eine Tasse Kaffee habe eine Ausgangstemperatur von $T_0 = 80°C$ und die Raumtemperatur sei $T_R = 20°C$. Die Kaffee-Temperatur nimmt exponentiell mit der Zeit ab, es gilt:

$$\boxed{T(t) = T_R + (T_0 - T_R) \cdot e^{-kt} = 20 + 60 \cdot e^{-kt}} \qquad k > 0$$

wobei $k > 0$ der Abkühlungskoeffzient ist.

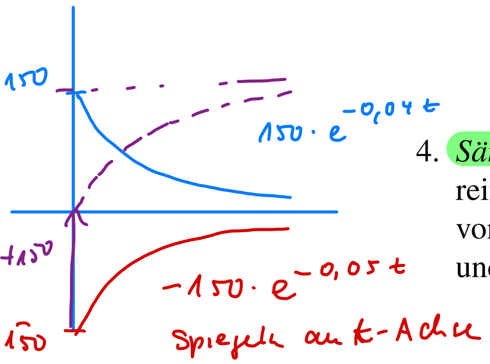


Annahme:

$\dot T(t) \overset{-k}{\sim} \underbrace{T(t) - T_R}_{\Delta T(t)}$

$\underbrace{T(t) - T_R}_{\Delta T(t)} = \underbrace{(T_0 - T_R)}_{(\Delta T)_0} \cdot e^{-kt}$

$\lim_{t \to \infty} \left(20 + 60 \cdot \underbrace{e^{-kt}}_{\to 0}\right) = 20$ [°C]

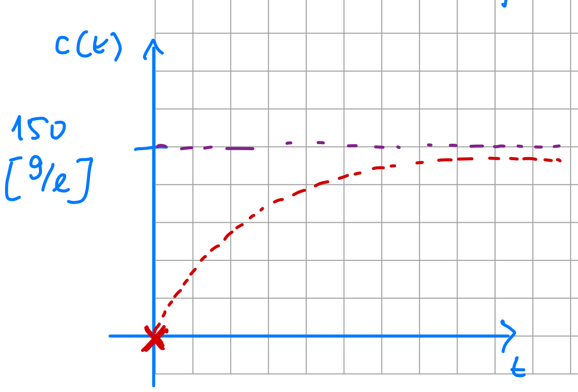


4. *Sättigungsfunktion* In ein 100 Liter-Wasserfass, das zunächst komplett mit reinem Wasser gefüllt ist, wird eine Salzlösung mit einer Salzkonzentration von 150 g Salz pro Liter gepumpt. Das überschüssige Wasser fließt sofort ab, und die Salzkonzentration zur Zeit t wird durch die Funktion

$$c(t) = 150(1 - e^{-0,04t}) \quad = 150 - 150 \cdot e^{-0,04t}$$

angegeben.

Erwarteter Verlauf von $c(t)$



$c(0) = 150(1-1) = 0 \left[\frac{g}{l}\right]$

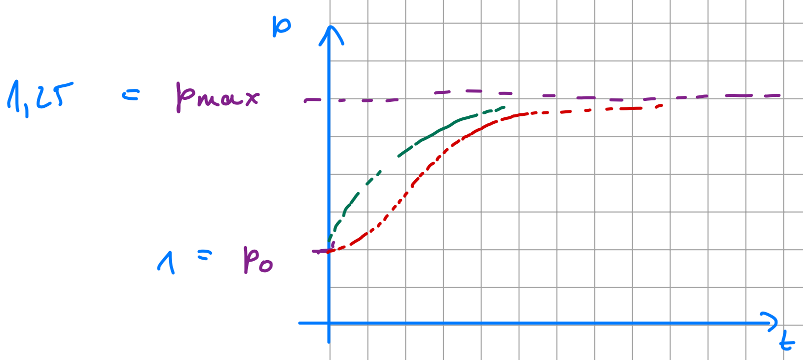
$\lim\limits_{t\to\infty} 150 \cdot (1 - \underbrace{e^{-0,04t}}_{\to 0}) = 150 \left[\frac{g}{l}\right]$

5. *Logistisches Wachstum*

Ein Bakterienkultur, die sich unter beschränkten Ressourcen vermehrt, kann man mit Hilfe einer logistischen Funktion beschreiben, die folgende Form hat

$$p(t) = \frac{1,25}{1 + 0,25\, e^{-0,5\, t}}$$

Erwarteter Populationsverlauf



In Funktionsvorschrift

$t = 0$

$p(t) = \dfrac{1,25}{1,25} = 1 = p_0$

$\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = 1,25$

Die Eulersche Zahl e und Verzinsung

Aufgabe 5.42.
Eine Einlage von $K = 2500$ € wird auf verschiedenen Kontos folgendermaßen verzinst (jeweils mit Zinsgutschrift und Zinseszins):

1. Jährlich mit Zins $r = 5\,\%$
2. Vierteljährlich mit Zins $\frac{r}{4} = 1,25\,\%$
3. Monatlich mit Zins $\frac{r}{12} = \frac{5}{12}\,\%$
4. Zu n Zeitpunkten im Jahr mit Zins $\frac{r}{n} = \frac{5}{n}\,\%$
5. Stetig verzinst

Welches Kapital ist nach $k = 5$ Jahren auf dem jeweiligen Konto?

Die Eulersche Zahl erhält man durch folgenden Grenzwert:

Bemerkung 5.43 (e als Grenzwert)**.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = e$$

Damit können wir das Endkapital nach k Jahren bei stetiger Verzinsung mit Jahreszinssatz r berechnen

$$\lim_{n\to\infty} K\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot k} = \lim_{n\to\infty} K\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}\cdot r\cdot k}$$

$$= K\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{k\cdot r} \qquad x := \frac{n}{r}$$

$$= K\cdot\left[\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}_{=e}\right]^{k\cdot r} = K\cdot e^{r\cdot k}$$

$= $ Kapital $K(k)$ nach k Jahren

In unseren Bsp $K = 2500$, $r = 0{,}05$, $k = 5$

$$K(k) = 2.500\cdot e^{5\cdot 0{,}05} = 3\,210{,}06\ €$$

Formel $$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

kann als Definition für e verwendet werden.

Berechne zunächst $\ln\Big(\overbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}^{e}\Big) = 1$

ln stetig

$\ln u^r = r\cdot\ln u$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \qquad x_0 \quad \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

$t := \frac{1}{x}$

$f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - \ln(1)}{t} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= f'(1) = 1$$

Beispiel 5.44 (Gaußsche Glockenkurve)**.**
Die Gaußsche Glockenkurve wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Skizzieren Sie den Graphen.

$D_{max} = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

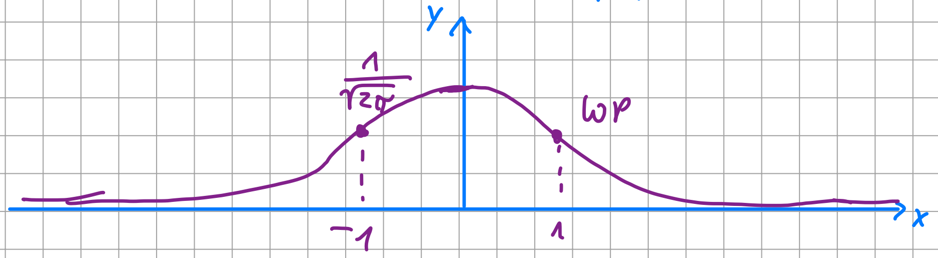
Nullstellen: kein, da e-Fkt keine NSt hat

Symmetrie $\quad f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} = f(x)$

achsensymmetrisch / gerade

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\underbrace{-\underbrace{x^2/2}_{\infty}}_{-\infty}} = 0$$

Achsenschnittpunkt $\quad f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$



Vermutung: lok. / glob. Max. bei $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$

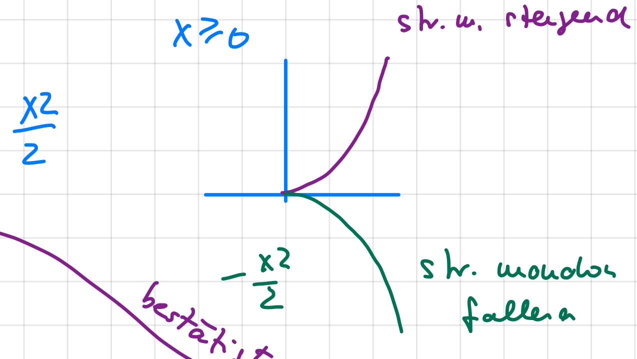
es gibt einen WP für $x > 0$

(und für $x < 0$)

Monotonie und lokale Extremwerte:

Ohne Ableitung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}$$



$\Rightarrow$ streng monoton fallend in $\mathbb{R}_0^+$

bestätigt

aus Symmetriegründen:

str. monoton steigend in $\mathbb{R}_0^-$

$\Rightarrow$ lokales / globales Maximum bei $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot (-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-x^2/2} < 0$$

falls $x > 0$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-x^2/2} + x \cdot (-x) \cdot e^{-x^2/2} \right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-e^{-x^2/2}\right)\left(x^2 - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}\left(x^2 - 1\right)$$

Krümmungsverhalten:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$

x		-1		$+1$	
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
	rechts		links		rechts

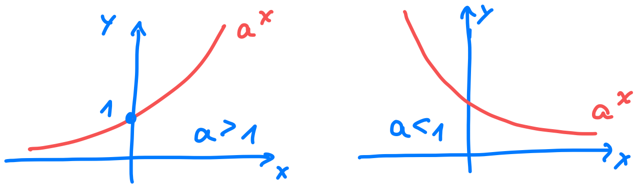
Wendepunkte bei $x = \pm 1$

$$f(1) = f(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2}$$

Bemerkung:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-x^2/2}} \, dx = 1$$

es gibt keine "elementare" Stammfunktion



5.4.2 Logarithmus-Funktionen

Die Exponentialfunktion zur Basis $a > 0, a \neq 1$ ist eineindeutig, die Wertemenge ist $\mathbb{R}^+$. Die Funktion $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist die *Logarithmusfunktion* zur Basis a.

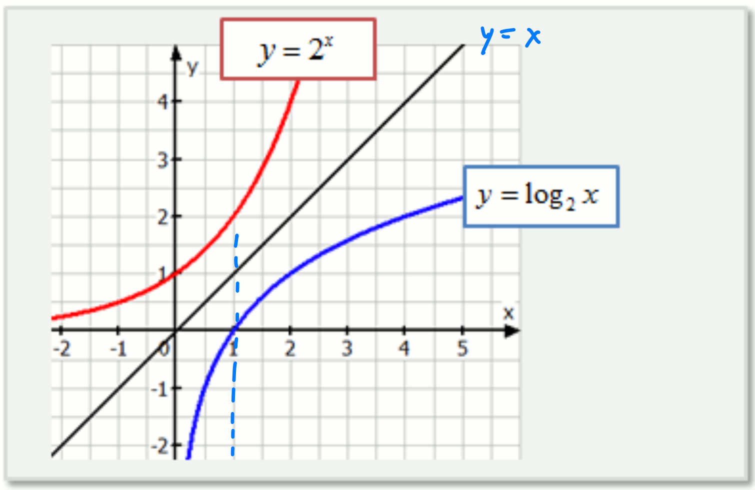
Exp. Fkt.

$f(x) = a^x \qquad a > 0, \; a \neq 1 \qquad D_f = \mathbb{R} \qquad W_f = \mathbb{R}^+$

$f^{-1} : \underset{W_f}{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \underset{D_f}{\mathbb{R}} \qquad D_{\log_a} = \mathbb{R}^+$

$f^{-1}(x) = \log_a x$

Umkehrfunktion Exponential- und Logarithmusfunktion



Definition 5.45.
Die Funktion

$$y = f(x) = \log_a x$$

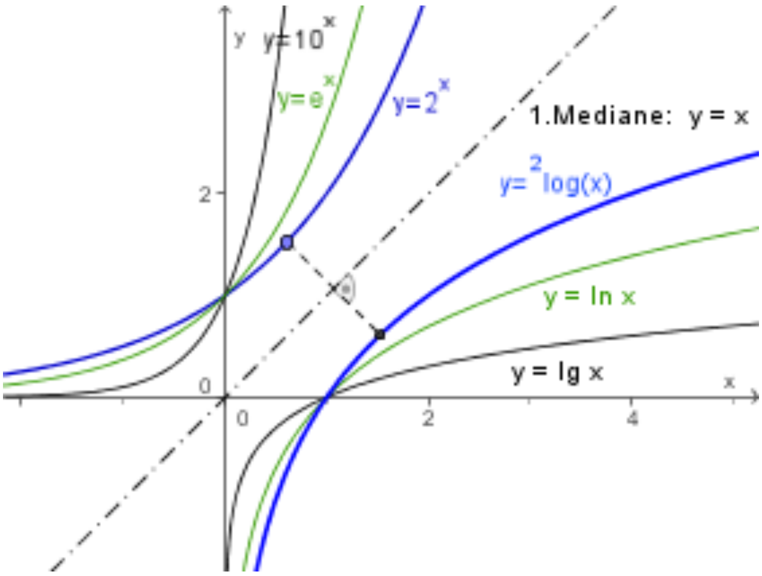
für $a > 0$, $a \neq 1$ heißt *Logarithmusfunktion zur Basis* a.
Der Definitionsbereich von $\log_a$ ist $\mathbb{R}^+$, die Wertemenge ist $\mathbb{R}$. Der Graph von $\log_a$ entsteht aus dem Graph von a^x durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$.

Wir betrachten log-Funktion nur für $\boxed{a > 1}$!

Bemerkung 5.46. *Eigenschaften der Logarithmusfunktion* $\log_a x$ *für* $a > 1$

1. Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}^+$.
2. Für $a > 1$ ist $\log_a x$ streng monoton steigend
3. Nullstellen: $\log_a(1) = 0$
4. $\log_a(x) < 0$ für $0 < x < 1$ und $\log_a(x) > 0$ für $x > 1$.
5. $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$, d.h. die negative y-Achse ist eine senkrechte Asymptote.

a>1 $\hookrightarrow$ 6. $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$



a=2<e Streckung in y-Richtung

a=10>e Stauchung in y-Richtung

1 < a < e   ln a < 1 Streckung

Bemerkung 5.47.
Die Logarithmusfunktion $y = \ln x$, also die Logarithmusfunktion zur Basis e, heißt *natürliche Logarithmusfunktion*.
Alle Logarithmusfunktionen mit beliebiger Basis $a > 1$ entstehen aus der natürlichen Logarithmusfunktion durch Skalierung (Streckung oder Stauchung) in Richtung der y-Achse:

$$\log_a(x) = \frac{1}{\log_e(a)} \cdot \log_e(x) = \underbrace{\frac{1}{\ln a}}_{>0} \cdot \ln x$$

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

$\log_a x \sim \log_b x$

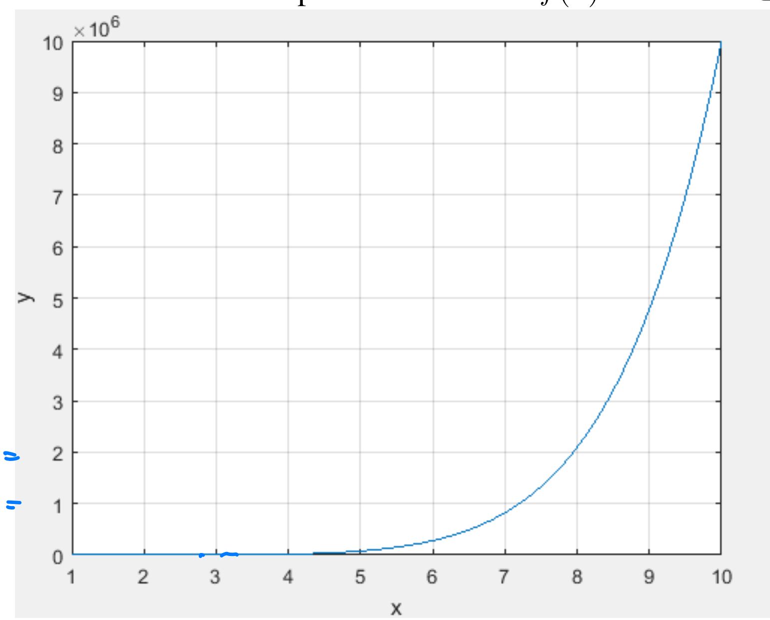
Prop. faktor $\dfrac{1}{\log_b a}$

$a > 1 \Rightarrow \ln a > 0$

$a > e$ $\ln a > 1$ Stauchung

Logarithmische Darstellung

Will man den Graphen von Funktionen zeichnen, deren Funktionswerte sich über mehrere Größenordnungen (Zehnerpotenzen) erstrecken, erhält man bei der Wahl von linear geteilten Koordinatenachsen keinen wirklich brauchbaren Graphen.
Betrache z.B. den Graphen der Funktion $f(x) = x^7$ für $x \in [1, 10]$:



2 Mio =

1. Mio =

$y = x^7$

$x \in [1, 10]$

$y \in [1, 10$ Mio.$]$

$f(2) = ??$

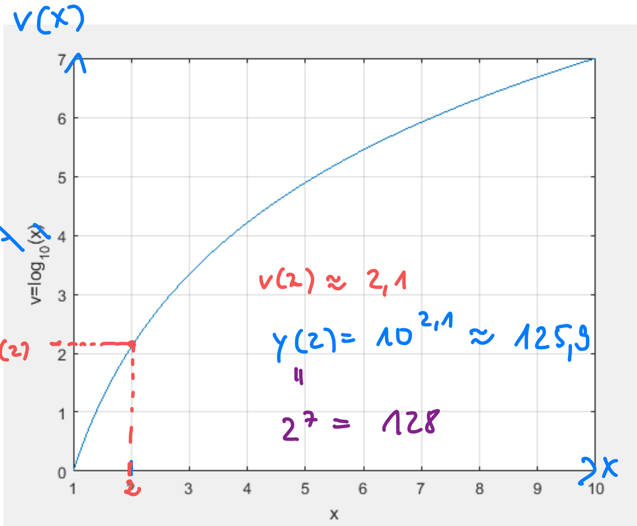
≈ 0

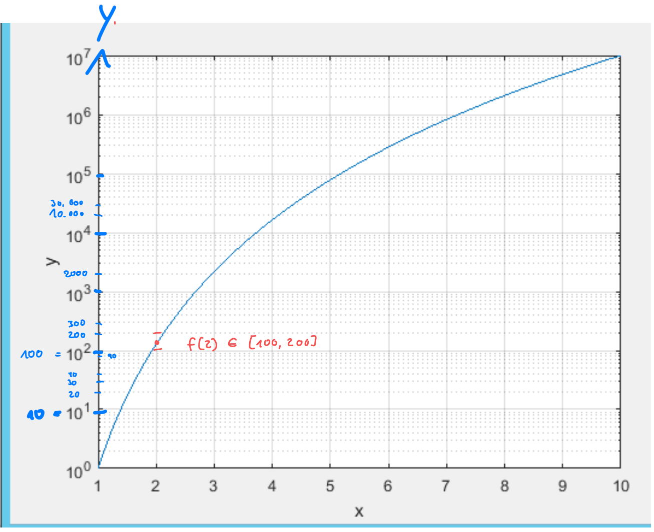
Es ist z.B. schlecht möglich, den Wert von $f(2) = 2^7$ abzulesen.
Um dieses Problem zu umgehen, kann man eine neue Variable $v := \log_{10} y$ einführen. Damit gilt:

$$v = \log_{10} y = \log_{10} f(x) = \log_{10} x^7 = 7 \cdot \log_{10} x$$

$v(x) = \log_{10} y = \log_{10} x^7 = 7 \cdot \log_{10} x$

$\log_{10} y = v(x)$



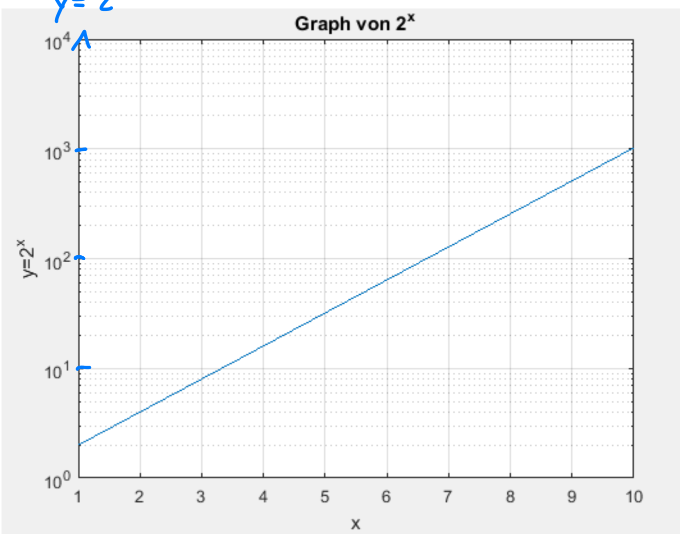


Im linken Bild wurde v gegen x aufgetragen.
Im rechten Bild wurde auf der vertikalen Achse y aufgetragen, aber eine logarithmische Skala verwendet.
Diese Darstellung heißt *einfach-logarithmische Darstellung* oder *halblogarithmische Darstellung*.

Beispiel 5.48.
Trägt man eine Exponentialfunktion, z.B. $y = 2^x$ einfach-logarithmisch auf, erhält man eine Gerade.

$v(x) = \log_{10} y = \log_{10} 2^x = x \cdot \log_{10} 2 \qquad v \sim x$

$y = 2^x$



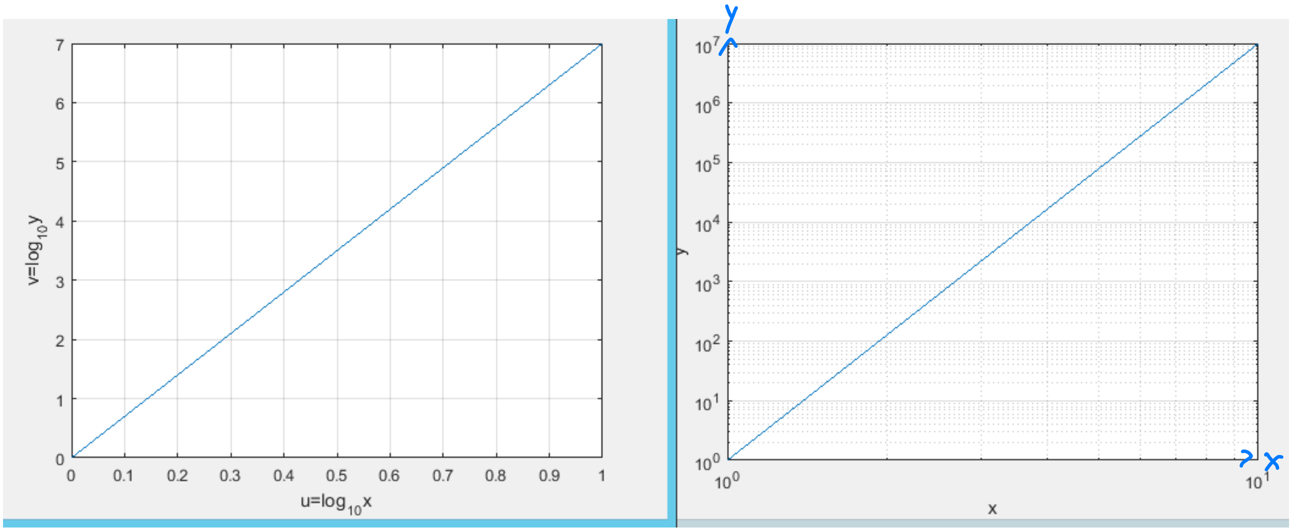
$x \in [1, 10]$

$\underbrace{\log_{10} x}_{u} \in [0, 1]$

Bei der *doppelt logarithmischen Darstellung* werden beide Achsen logarithmisch skaliert. Formal führt man neue Variablen $u = \log_{10} x$ und $v = \log_{10} y$ ein.
Für eine Potenzfunktion, z.B. $y = x^7$ ergibt sich hierbei:

$$\underbrace{\log_{10} y}_{v} = \log_{10} x^7 = 7 \cdot \underbrace{\log_{10} x}_{u} \qquad v(u) = 7 \cdot u$$

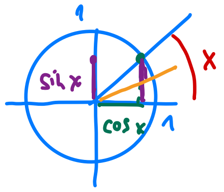
Gerade



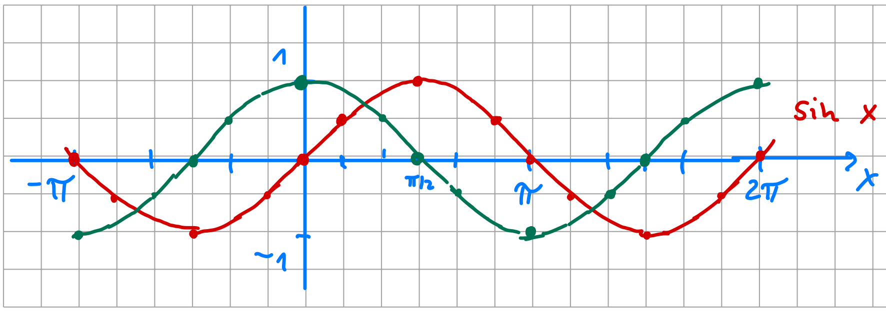
5.5 Trigonometrische Funktionen

5.5.1 Graphen der Trigonometrischen Funktionen

	sin	cos
30°	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$



Sinus und Cosinus



$\sin 0 = 0$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\sin \pi/6 = \frac{1}{2}$

$\cos(\pi) = -1$

$\cos(\pi/3) = 1/2$

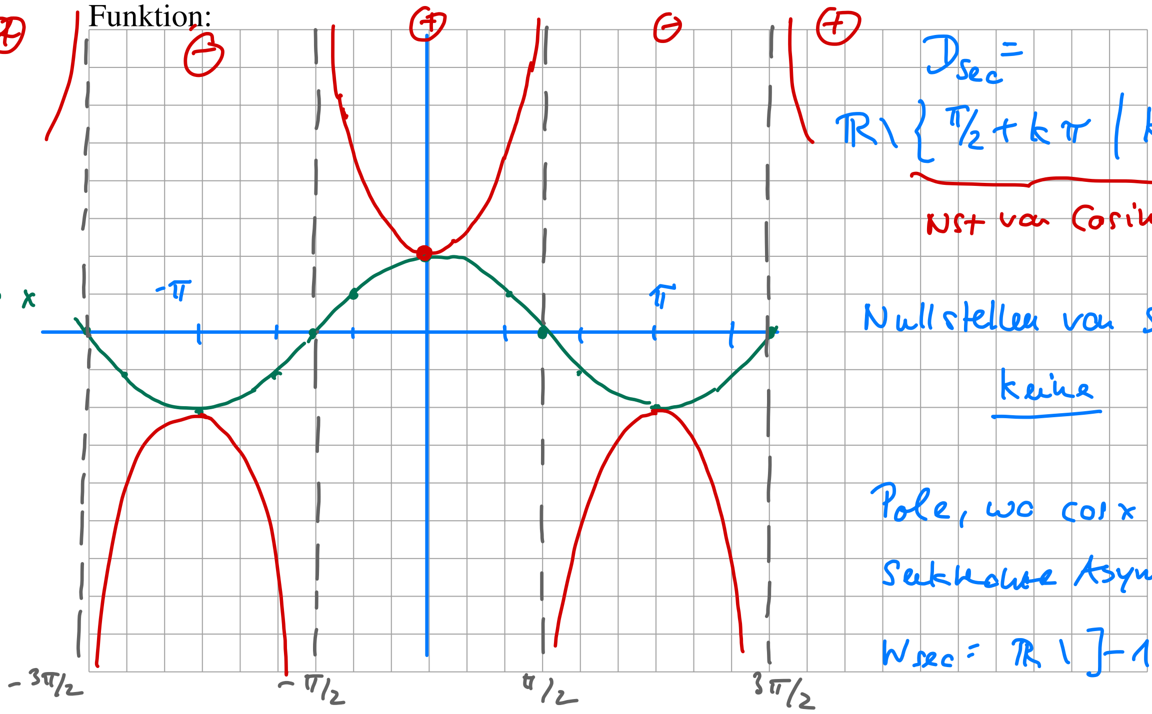
Bemerkung 5.49.
Eigenschaften der **Sinus**-Funktion und der **Cosinus**-Funktion

beschränkt
periodisch

Funktion:	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Definitionsbereich:	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wertemenge:	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
(kleinste) primitive Periode :	2π	2π
Symmetrie:	ungerade	gerade
Nullstellen:	$x = k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

$\frac{1}{\cos x}$ Nenner $\neq 0$

Bemerkung 5.50.
Der Graph der Secans-Funktion $y = \sec x$ entsteht aus dem Graphen der Cosinus-Funktion:



$D_{sec} = \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}}_{\text{NSt von Cosinus}}$

Nullstellen von sec: keine

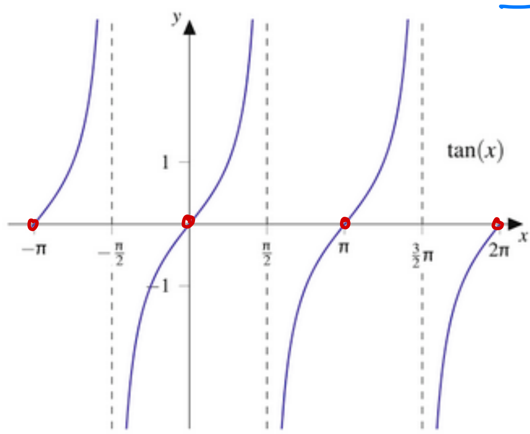
Pole, wo cos x = 0 ist!
Senkrechte Asymptoten

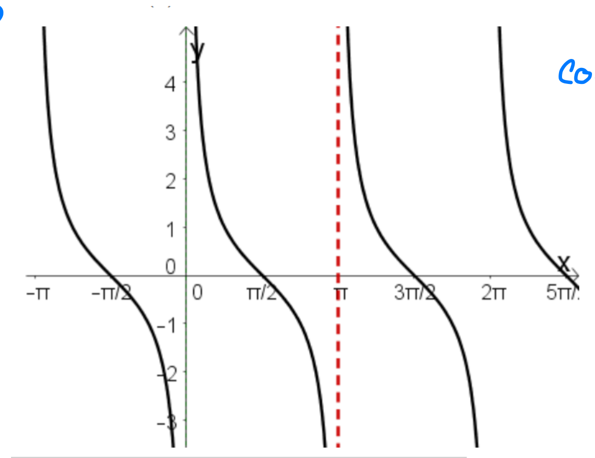
$W_{sec} = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$

Tangens und Cotangens

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Kehrwert →



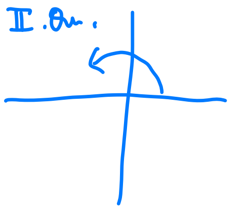


cot x

$\cot x = \mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

Kehrwert

II. Qu.



Bemerkung 5.51.
Eigenschaften der **Tangens**-Funktion und der **Cotangens**-Funktion

Funktion:	$\tan(x)$	$\cot(x)$
Definitionsbereich:	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ NSt. von cos	$x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ NSt von sin
Wertemenge:	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
primitive Periode :	π	π
Symmetrie:	ungerade	ungerade
Nullstellen:	$x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ NSt. von sin	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ NSt von cos x

Symmetrie

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

ungerade

$g(x+\pi/4) = \frac{5}{2}\cdot\cos\left(\frac{2}{3}(x+\pi/4)\right)$

$= \frac{5}{2}\cdot\cos\left(\frac{2}{3}x+\pi/6\right) = f(x)$

(*)

$\cos\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3}x = \pi/3$ $\quad x = \pi/2$

Wohin verschiebt sich der Punkt mit maximaler Auslenkung? $= -\pi/4$

$\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} = 0$? $\quad x = -\frac{\pi}{6}\cdot\frac{3}{2}$

$\omega x + \varphi = 0 \quad x = -\frac{\varphi}{\omega}$

5.5.2 Die allgemeine Cosinus-Funktion

Beispiel 5.52. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

Hilfsfunktion $g(x) = \underbrace{\frac{5}{2}}_{A}\cos\left(\overbrace{\frac{2}{3}}^{\omega}x\right)$

$$f(x) = y = \frac{5}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2}{3}$

Primitive Periode Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{\omega} = 3\pi$

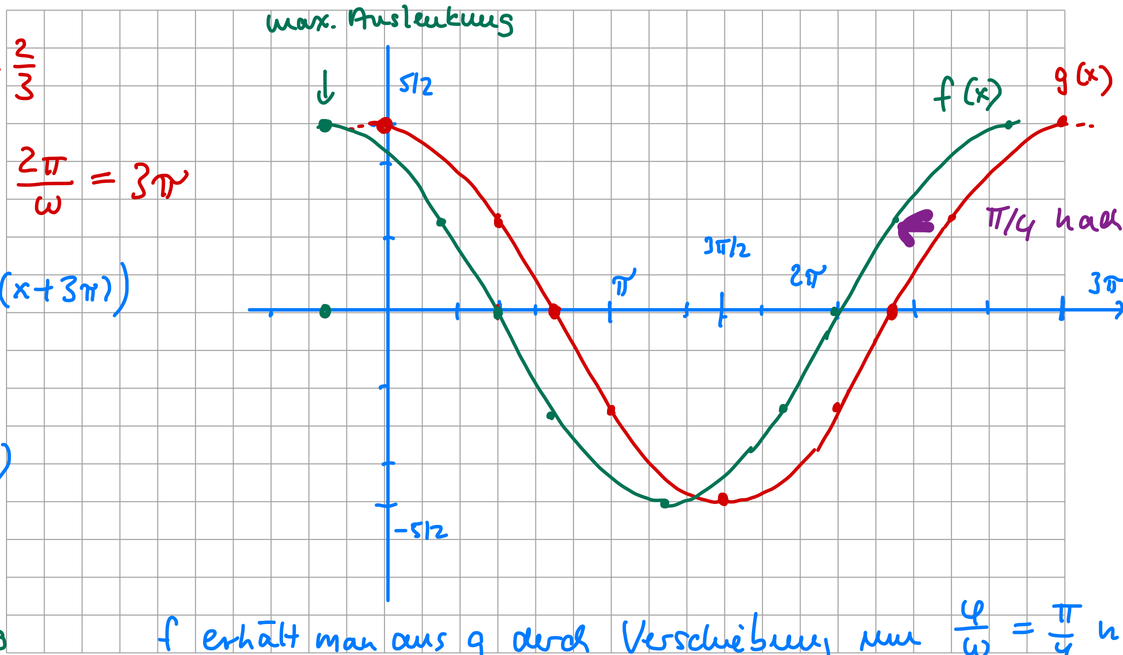
$g(x+3\pi) = \frac{5}{2}\cos\left(\frac{2}{3}(x+3\pi)\right)$

$= \frac{5}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x + 2\pi\right)$

$= \frac{5}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right) = g(x)$

Amplitude: $A = \frac{5}{2}$

$W_g = [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] = W_f$



f erhält man aus g durch Verschiebung um $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{4}$ nach links!

Bemerkung 5.53.
Bei periodischen Vorgängen (Schwingungen) spielen die Funktionen

$$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

mit $A > 0$ eine wichtige Rolle. Die Parameter A, ω, ϕ bekommen hier eigene Bezeichungen:

- A heißt *Amplitude*, > 0
- ω heißt *Kreisfrequenz*
- ϕ heißt *Phasenwinkel*
- $\boxed{\frac{\phi}{\omega}}$ ist die *Zeitverschiebung* oder *Laufzeitdifferenz.*

$\cos(t) = 0$

$t = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}$

$= (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ $\quad (k\in\mathbb{Z})$

Die Funktion heißt *Allgemeine Cosinus-Funktion* und hat folgende Eigenschaften:

- Wertemenge $[-A; A]$.
- Periodisch mit der primitiven Periode (*Schwingungsdauer*) $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$
- Nullstellen: $-\frac{\phi}{\omega} + (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2\omega}$ für $k\in\mathbb{Z}$.
- Plotten über eine Periode im Intervall $\left[-\frac{\phi}{\omega}, -\frac{\phi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}\right]$

$\cos(\omega t) = 0$

$t = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2\omega}$

$\cos(\omega t + \varphi) = 0$

$t = -\frac{\varphi}{\omega} + (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2\omega}$

Bemerkung 5.54.
Mit Sinus- und Cosinus-Funktionen kann man Schwingungen und allgemeine periodische Vorgänge modellieren.

ungedämpft

1. Die Auslenkung einer harmonisch schwingenden Feder in Abhängigkeit von der Zeit ist gegeben durch

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

hydraulische Dämpfung $F_R \sim \dot{x}$

2. Die Auslenkung einer gedämpften harmonischen Schwingung in Abhängigkeit von der Zeit ist gegeben durch

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)$$

$\delta > 0$

nicht periodisch !?

$x_0 \cdot e^{-\delta t} = g(t)$

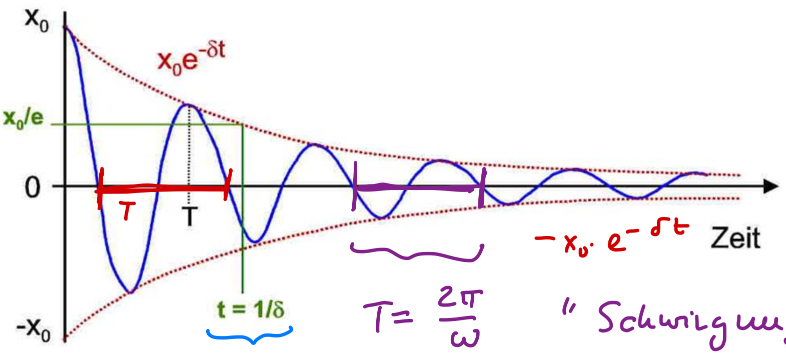
$g(t) = \frac{x_0}{e}$

$\cancel{x_0} \cdot e^{-\delta t} = \frac{\cancel{x_0}}{e}$

$e^{-\delta t} = e^{-1}$

$\delta t = 1$

$t = \frac{1}{\delta}$



$T = \frac{2\pi}{\omega}$ „Schwingungsdauer"

(obwohl $x(t)$ nicht periodisch ist)

von Nulldurchgang zu Nulldurchgang, von derselben Seite kommend

http://slideplayer.org/slide/1304598/

Bemerkung 5.55.
Die allgemeine Kosinus-Funktion kann anstatt mittels Phasenverschiebung als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen deselben Frequenz ohne Phasenverschiebung geschrieben werden:

„Fourier-Analyse" einfacher Fall

$$y = x_0 \cos(\omega t + \phi) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

Umgekehrt ist jede Überlagerung (Summe) von Sinus- und Cosinus-Funktionen mit gleicher Frequenz ω eine Cosinus-Schwingung mit derselben Frequenz.

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Additionstheorem

$x_0 \cdot \cos(\underbrace{\omega t}_{x} + \underbrace{\varphi}_{y}) = x_0 \cdot (\cos(\omega t) \cdot \cos\varphi - \sin(\omega t) \cdot \sin\varphi)$

$= \underbrace{x_0 \cdot \cos\varphi}_{=: a \in \mathbb{R}} \cdot \cos(\omega t) \underbrace{- x_0 \sin\varphi}_{=: b \in \mathbb{R}} \cdot \sin(\omega t)$

Umgekehrt: $a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$

Gesucht: $x_0 \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass

$x_0 = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$

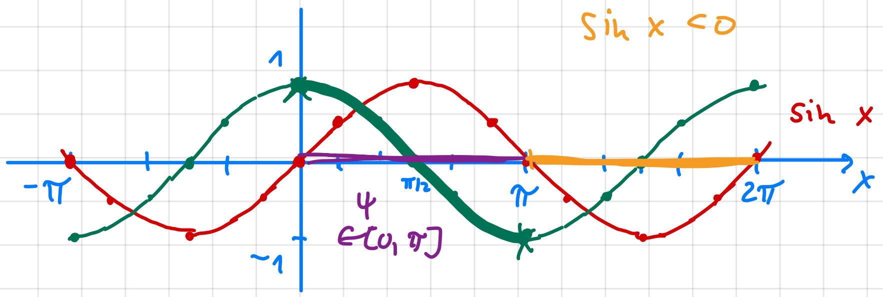
(I) $x_0 \cdot \cos\varphi = a$

(II) $-x_0 \cdot \sin\varphi = b$

$(I)^2 + (II)^2 = x_0^2 \cos^2\varphi + x_0^2 \sin^2\varphi$

$= x_0^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$

$= x_0^2 = a^2 + b^2$



Bestimme φ

(I) $\cos\varphi = \dfrac{a}{x_0}$ | Annahme $x_0 \neq 0$

($x_0 = 0 \Rightarrow \varphi$ unnötig) beliebig

T.R. $\left.\begin{array}{l} \arccos \dfrac{a}{x_0} \\ \cos^{-1} \dfrac{a}{x_0} \end{array}\right\}$ liefert einen Winkel $\varphi \in [0, \pi]$

Achtung $\neq$ secans $= \dfrac{1}{\cos \frac{a}{x_0}}$ ↯

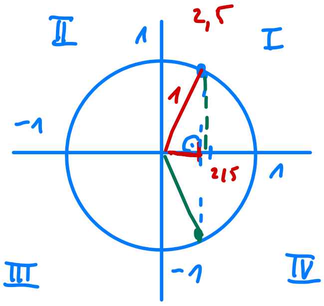
II $\sin\varphi = \dfrac{b}{-x_0} \left\{\begin{array}{ll} > 0 & \text{falls } b < 0 \Longrightarrow \varphi = \varphi \\ = 0 & \text{falls } b = 0 \\ < 0 & \text{falls } b > 0 \Longrightarrow \varphi = 2\pi - \varphi \end{array}\right.$ da $x_0 > 0$

Für $\varphi \in [0, \pi]$ ist $\sin\varphi \geq 0$, d.h. φ ist nicht der richtige Winkel.

Es gilt $\cos(2\pi - \varphi) = \cos(\varphi)$ und $\sin(2\pi - \varphi) < 0$

5.5.3 Goniometrische Gleichungen

Goniometrische Gleichungen sind Gleichungen, die die Unbekannte (nur) als Argument von trigonometrischen Funktionen enthalten.



Aufgabe 5.56.
Sei x ein Winkel mit $\cos x = \frac{2}{5}$.

1. Was sind $\sin x$ und $\tan x$, wenn x im ersten Quadranten liegt? ... im dritten Quadranten?

2. Was sind $\sin x$ und $\tan x$, wenn x im zweiten oder vierten Quadranten liegt?

Pythagoras:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad |:\cos^2 x$
$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

(1) Im 3. Quadranten nicht möglich! Dort ist der Cosinus < 0!

Im 1. Quadranten: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$ Da hier $\sin x > 0$, ist $\sin x = +\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

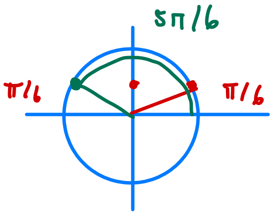
Im 4. Quadranten: $\sin x < 0$, also $\sin x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan x = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

Aufgabe 5.57.
Sei x ein Winkel mit $\tan x = \frac{2}{3}$. Was ist $\cos x$, wenn x im dritten Quadranten liegt?

$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \sec^2 x - 1$

$\sec^2 x = \tan^2 x + 1 = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{13}$

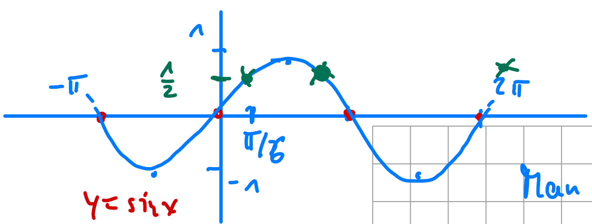
$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$ 3. Quadrant $\cos x < 0$ $\quad \cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$



Aufgabe 5.58.
Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$\sin^{-1}$ T.R. $x = 0{,}5236.$

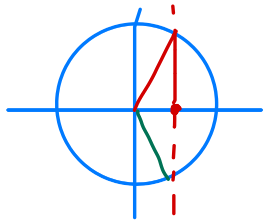


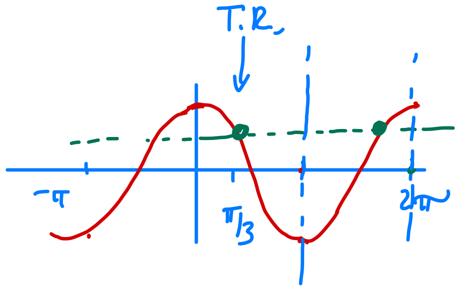
Man muss vor allem die Lösungen in $[0, 2\pi[$ finden.
(dann $2k\pi$ dazuzählen, $k \in \mathbb{Z}$, um alle zu finden)

Wissen: $x = \pi/6$ ist eine Lösung

Weitere Lösung: $\pi - \pi/6 = 5\pi/6 \in [0, 2\pi[$

$\mathbb{L} = \{\pi/6 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/6 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$! nicht übersehen.





Aufgabe 5.59.
Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$$

Quadratische Gleichung in cos x

Substitution: $u := \cos x$

$2u^2 - 7u + 3 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \dfrac{7 \pm 5}{4}$

$u_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $u_2 = 3$

Rücksubstitution: $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $\cos x = 3$ ↯ $|\cos x| \leq 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

Wissen: $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Weitere Lösung in $[0, 2\pi[$ ist $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\mathbb{L} = \{\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Aufgabe 5.60. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$1 + \sin x = 2\cos^2 x \text{ für } x \in [0, 2\pi]$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\Rightarrow$ $1 + \sin x = 2 \cdot (1 - \sin^2 x)$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Substitution: $u := \sin x$

$2u^2 + u - 1 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$

(1) $u_1 = -1$ (2) $u_2 = \frac{1}{2}$

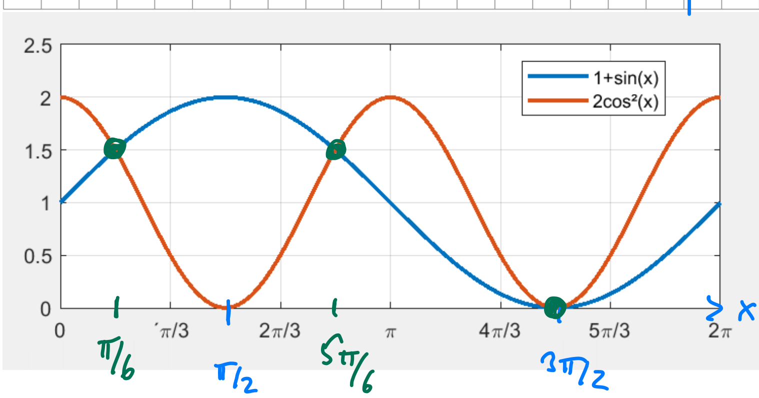
Rücksubst.:

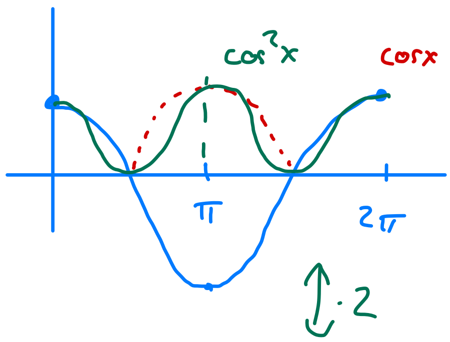
(1) $\sin x = -1$

$x = \frac{3\pi}{2}$

(2) $x = \frac{\pi}{6}$ / $\frac{5\pi}{6}$

$\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$





Aufgabe 5.61. Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\sin x = \sin 2x$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

Doppelwinkelformel $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$\sin x = 2 \sin x \cos x$

$\sin x - 2\sin x \cos x = 0$

$\sin x \, (1 - 2\cos x) = 0$

Produkt ist 0 $\underline{\underline{\Leftrightarrow}}$ ein Faktor ist 0

$\sin x = 0$ oder $1 - 2\cos x = 0$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x = 0, \pi, 2\pi$ $\pi/3, \ \frac{5}{3}\pi$

$\mathbb{L} = \{0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi\}$

Vorsicht ! $| : \sin x$

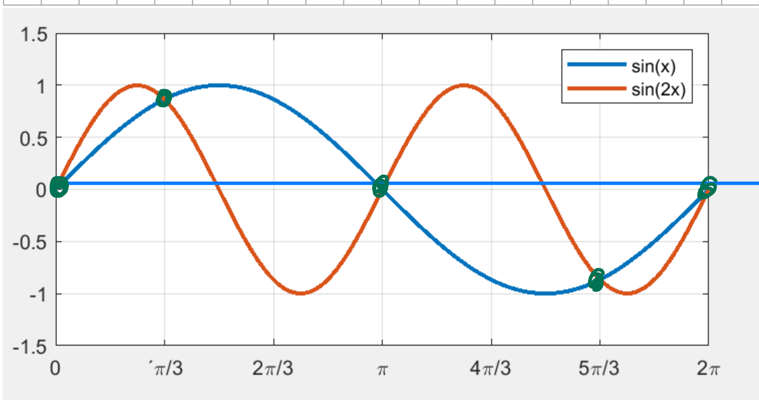
$1 = 2\cos x$ Fallunterscheidung !

$\cos x = \frac{1}{2}$

$\mathbb{L} = \{\pi/3, 5\pi/3\}$

geht nur wenn $\sin x \neq 0$!

$x = 0, \pi, 2\pi$ separat behandeln !



Erwartung: 5 Lösungen in $[0, 2\pi]$

$0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$

Aufgabe 5.62. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $2\cos x - 3\tan x = 0$ für $x \in [0, 2\pi]$.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cos x \neq 0$

d.h. $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$2\cos x - 3\frac{\sin x}{\cos x} = 0$ $| \cdot \cos x$

Achtung: $\cos x \neq 0$ ✓

$2\underbrace{\cos^2 x}_{1 - \sin^2 x} - 3\sin x = 0$

$2 - 2\sin^2 x - 3\sin x = 0$

$-2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

Subst: $u := \sin x$

$-2u^2 - 3u + 2 = 0$

$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{-4}$

$= (3 \pm 5)/(-4)$

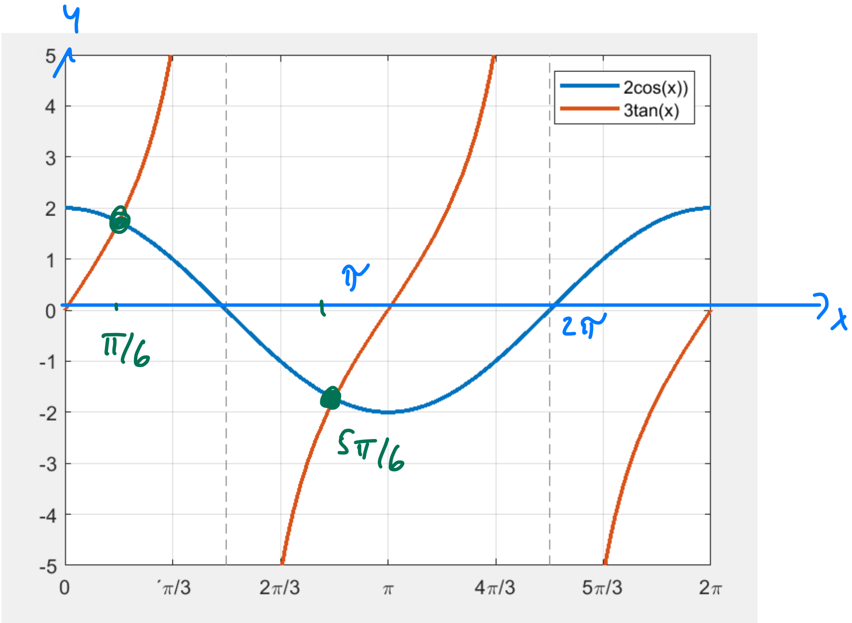
$u_1 = -2$ $u_2 = \frac{1}{2}$

$\sin x \neq -2$ $\underline{\sin x = \frac{1}{2}}$

$x = \pi/6, \ 5\pi/6$

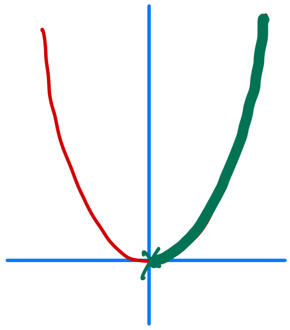
$(\neq \pi/2, 3\pi/2)$

$\mathbb{L} = \{\pi/6, 5\pi/6\}$



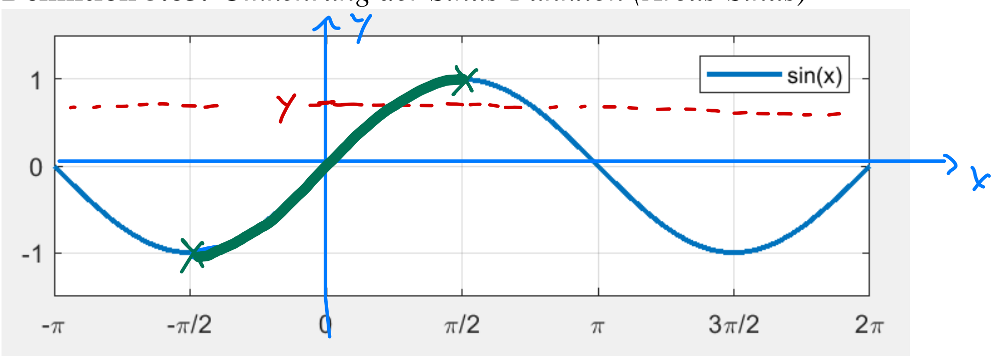
5.6 Die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen

$f(x) = y = x^2$



$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ umkehrbar

Definition 5.63. *Umkehrung der Sinus-Funktion (Arcus-Sinus)*

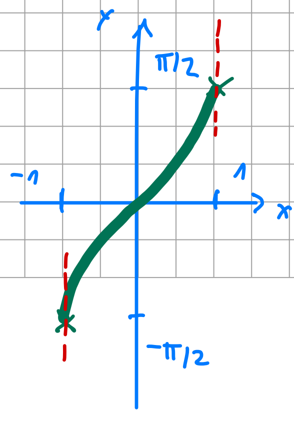


$y = \sin x \qquad y \in [-1, 1] = W_{\sin}$

Für $y \in [-1, 1]$ gibt es unendlich viele $x \in \mathbb{R}$, die Gleichung erfüllen. $\sin(x)$ ist keine injektive (ein-eindeutige) Funktion.

$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$, $x \longmapsto \sin(x)$ } f umkehrbar, injektiv und surjektiv

Graph von f^{-1}, $[-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$



Umkehrfunktion $f^{-1}: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ heißt Arcus sinus $\arcsin(x)$, $\sin^{-1}(x)$

Umkehrfunktion ≠ Kehrwert

Vorsicht!! $\sin^{-1}(x) \neq \frac{1}{\sin x} = \csc x$

Die Sinus-Funktion ist offenbar nicht umkehrbar auf ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.
Wir müssen den Definitionsbereich einschränken, z.B. auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.
Auf diesem Intervall ist $\sin x$ eineindeutig (z.B. weil dort $\sin x$ streng monoton steigend ist).
Die Wertemenge ist $[-1, 1]$.
Die Umkehrfunktion von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ bezeichnen wir mit

$\sin^{-1} x$ ist NICHT der Kehrwert!

$$\sin^{-1} x = \arcsin x$$

Der *Definitionsbereich* von arcsin ist das Intervall $[-1, 1]$.
Die *Wertemenge* von arcsin ist $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

Für $x \in [-1, 1]$ ist $\arcsin x$ ist die Zahl zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, deren Sinus den Wert x hat, d.h.

$y = \arcsin(x)$
d.h.
$x = \sin(y)$
und
$y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\boxed{y = \arcsin x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sin y \quad \text{und} \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]}$$

Es gilt:

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$
$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{für } x \in [-1, 1]$$

$f^{-1}(f(x)) = x$
$f(f^{-1}(x)) = x$

Aufgabe 5.64.
Berechnen Sie $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{6}))$ und $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{2}))$

$y = \arcsin(\sin \frac{\pi}{6})$
$\pi/6 \in [-\pi/2, \pi/2]$
$\Rightarrow \quad y = \pi/6$

$y = \arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \pi/6$
$5\pi/6 \notin [-\pi/2, \pi/2]$
$y = \arcsin(\frac{1}{2}) = \pi/6$

$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

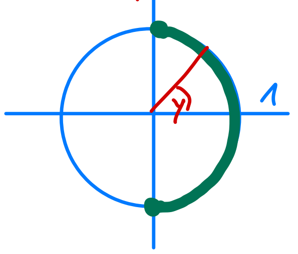
$y = \arcsin(\sin(\frac{3\pi}{2})) = -\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi/2, \pi/2]$
$\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$
$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Bemerkung 5.65.
Die Gleichung $\sin x = a$ hat für $|a| > 1$ keine Lösung und für $|a| \leq 1$ unendlich viele Lösungen.
Falls $|a| \leq 1$, so ist $\arcsin a$ eine Lösung und zwar diejenige, die zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. eine von vielen $\in [-\pi/2, \pi/2]$
Die weiteren Lösungen sind

- $\arcsin a + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ und
- $(\pi - \arcsin a) + 2k\pi = -\arcsin a + \underbrace{(2k+1)\pi}_{\text{ungerade Vielfache von } \pi}$ für $k \in \mathbb{Z}$

eindeutig bestimmter Wert
alles sind Funktionen

$y = \arcsin x$



Winkel y liegt in der rechten Halbebene !
Dort ist cosinus $\cos(y) \geq 0$

Allgemein: $\cos(\arcsin x) \geq 0$!

$$\boxed{\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}}$$

Aufgabe 5.66. Berechnen Sie $\tan(\arcsin \frac{1}{3})$. $= \tan(y) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Sei $y = \arcsin 1/3 \iff \sin(y) = \frac{1}{3}$ und $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{\sin^2 y}{1 - \sin^2 y} = \frac{1/9}{8/9} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \tan y = \pm \frac{1}{\sqrt{8}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Was ist $\cos(y)$? >0 ! $\Rightarrow \tan y > 0$

Aufgabe 5.67.
Sei $y = \arcsin x$. Berechnen Sie $\cos y$. $x \in [-1, 1]$

$y = \arcsin x \iff \underbrace{x = \sin(y)}$ und $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

Pythagoras:

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 \quad (\geq 0)$$

$$\Rightarrow \cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Da $\cos(y) = \cos(\arcsin x) \geq 0$ ist $\cos(y) = \sqrt{1 - x^2}$

Bemerkung 5.68. Die Ableitung von $\arcsin(x)$ kann man aus der Ableitung von $\sin(x)$ mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$f(x) = \sin x$

$f^{-1}(x) = \arcsin x$

$f'(x) = \cos x$

$$[\arcsin(x)]' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad x \in \,]-1, 1[$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x + C}$$

Aufgabe 5.69. Berechnen Sie die Ableitung von

in -1 und 1: senkrechte Tangenten, Ableitung nicht definiert !

1. $y = \arcsin \sqrt{x}$ $\quad u = \sqrt{x}$

Kettenregel $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'} = \frac{1}{2\sqrt{x \cdot (1 - x)}}$$

$x \neq 0$, $x > 0$, $x < 1$

$x \in \,]0, 1[$

2. $y = \arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}$

$(f \cdot g)' = fg' + f'g$

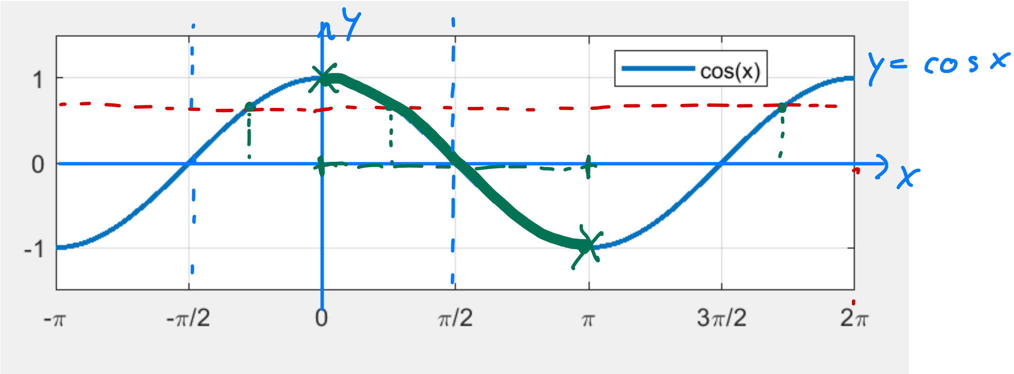
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{1 - x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) + \sqrt{1 - x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1 - x^2 + (1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2 \cdot (1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = 2 \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\, x \sqrt{1-x^2}$$

Definition 5.70. *Umkehrung der Cosinus-Funktion (Arcus-Cosinus)*



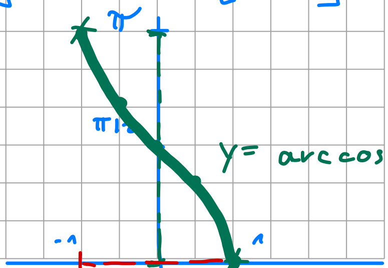
$y = \cos(x)$ cos : $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ umkehrbar

Umkehrfunktion: Arcuscosinus

$\cos^{-1}(x)$: $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \subset \mathbb{R}_0^+$

$\shortparallel$

arccos (x)



Vorsicht

$\cos^{-1}(x) \neq \frac{1}{\cos x}$

arccos(x)   sec x

Umkehrfunktion   Kehrwert

Die Cosinus-Funktion ist offenbar nicht umkehrbar auf ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.
Wir müssen den Definitionsbereich einschränken, z.B. auf das Intervall $[0, \pi]$.
Auf diesem Intervall ist $\cos x$ eineindeutig.
Die Wertemenge ist $[-1, 1]$.

Die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bezeichnen wir mit

$$\cos^{-1} x = \arccos x$$

Der *Definitionsbereich* von arccos ist das Intervall $[-1, 1]$.
Die *Wertemenge* von arccos ist $[0, \pi]$

Für $x \in [-1, 1]$ ist $\arccos x$ die Zahl zwischen 0 und π, deren Cosinus den Wert x hat, d.h.

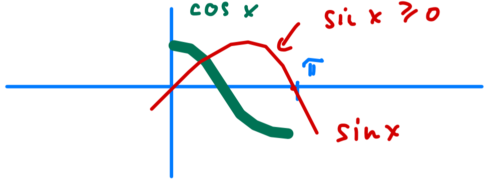
$$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y \quad \text{und} \quad y \in [0, \pi]$$

Es gilt:

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{für } x \in [0, \pi]$$
$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{für } x \in [-1, 1]$$

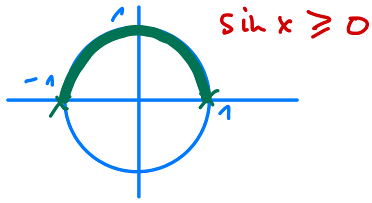
Bemerkung 5.71.
Die Gleichung $\cos x = a$ hat für $|a| > 1$ keine Lösung und für $|a| \le 1$ unendlich viele Lösungen.
Falls $|a| \le 1$, so ist $\arccos a$ eine Lösung und zwar diejenige, die zwischen 0 und π liegt. Die weiteren Lösungen sind

- $\arccos a + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ und
- $-\arccos a + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$



in −1, 1 nicht diffbar

$x \in [-1, 1]$



Bemerkung 5.72. Die Ableitung von $\arccos(x)$ berechnet man wieder mit dem Satz über die Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$f(x) = \cos x$

$f^{-1}(x) = \arccos x$

$f'(x) = -\sin x$

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

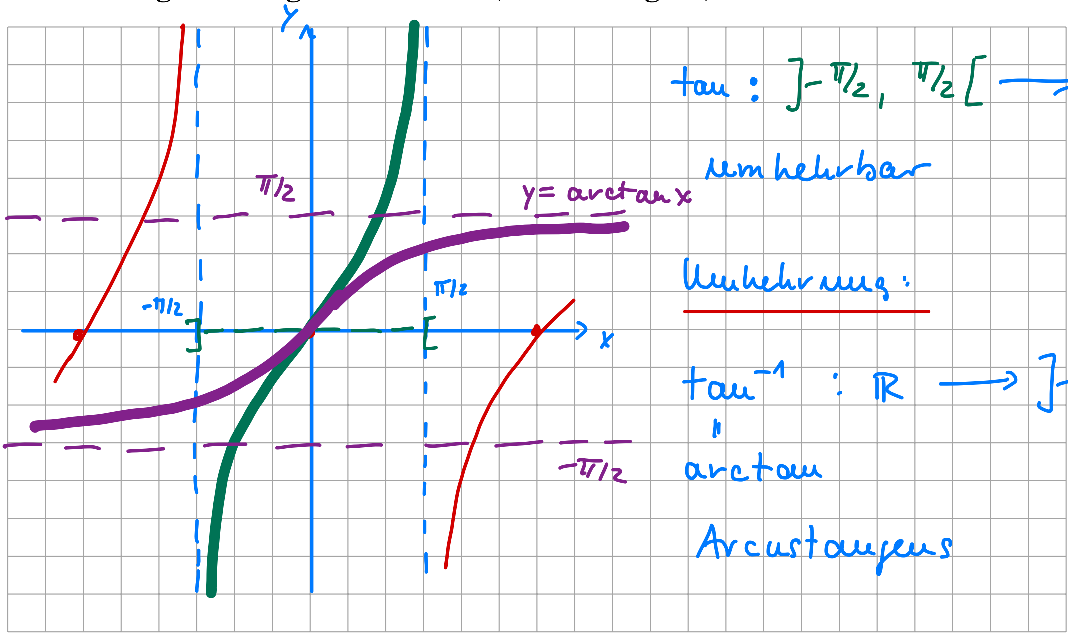
$y = \arccos x$

$\sin^2(y) = 1 - \cos^2(y) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$

$\sin(y) = \pm\sqrt{1-x^2}$

Da $\sin(y) > 0$ für $y = \arccos(x)$, ist $\sin(y) = \sqrt{1-x^2}$

Umkehrung der Tangens-Funktion (Arcus-Tangens)



$\tan : \left]-\pi/2, \pi/2\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar

Umkehrung:

$\tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\pi/2, \pi/2\right[$
‖
arctan
Arcustangens

$f(x) = \tan x$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Achtung:

$\tan^{-1} x \neq \frac{1}{\tan x}$

$\tan^{-1} x = \arctan x$, $\frac{1}{\tan x} = \cot x$

Die Tangens-Funktion ist offenbar nicht umkehrbar auf $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Wir müssen den Definitionsbereich einschränken, z.B. auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $= \left]-\pi/2, \pi/2\right[$
Auf diesem Intervall ist $\tan x$ eineindeutig.
Die Wertemenge ist $\mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktion von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\tan^{-1} x = \arctan x$$

Arcus Tangens

Der *Definitionsbereich* von arctan ist $\mathbb{R}$.
Die *Wertemenge* von arctan ist $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\arctan x$ die Zahl zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, deren Tangens den Wert x hat, d.h.

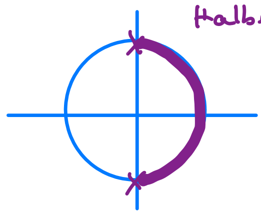
$$y = \arctan x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \tan y \quad \text{und} \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Es gilt:

$$\arctan(\tan x) = x \quad \text{für } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

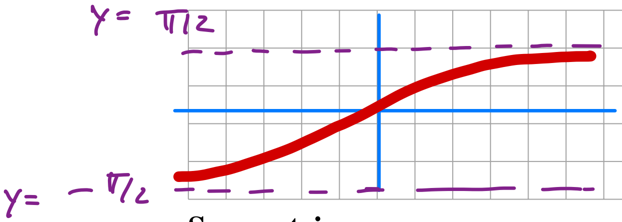
$$\tan(\arctan x) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Winkel in rechte Halbebene



Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$



$y = \pi/2$ waagr. Asymptote für $x \to +\infty$

$y = -\pi/2$ " " für $x \to -\infty$

Symmetrie
arctan ist *punktsymmetrisch zum Ursprung*, also

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

Bemerkung 5.73. Die Ableitung von $y = \arctan(x)$ ist:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$f(x) = \tan x$

$f^{-1}(x) = \underline{\arctan x}$

$f'(x) = \underline{1 + \tan^2 x}$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+[\tan(\arctan x)]^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C}$$

Aufgabe 5.74. Untersuchen Sie den Graph der Funktion $f(x) = (\arctan x)^2$

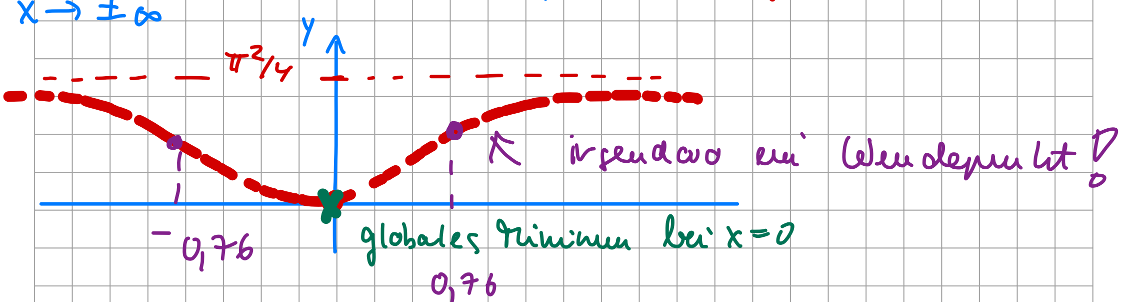
$f(x) = (\underbrace{\arctan x}_{\in\,]-\pi/2,\, \pi/2[})^2 \geq 0$ $\qquad D = \mathbb{R} \qquad W = [0, \frac{\pi^2}{4}[$

Symmetrie: $f(-x) = [\arctan(-x)]^2 = (-\arctan x)^2$
$= (\arctan x)^2 = f(x)$

Achsensymmetrisch

Nullstellen $\quad f(x) = 0 \iff \arctan x = 0 \iff \underline{\underline{x = 0}}$

$\lim_{x\to\pm\infty} (\arctan x)^2 = \pi^2/4$ waagr. Asymptote



Wendepunkt ermitteln

$$f'(x) = 2 \cdot \arctan(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2\arctan x}{1+x^2}$$

$f'(x) > 0$ für alle $x > 0$ $\quad$ $x=0$ lok. Minimum

$f'(x) < 0$ für alle $x < 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{(1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} - \arctan(x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - 2x \cdot \arctan x}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$1 - 2x \arctan x = 0$$

$$x \arctan x = \frac{1}{2}$$

Newton-Verfahren

Analytisch nicht lösbar!

Näherungsweise Lösung in $\mathbb{R}^+$: $x = 0{,}765\ldots$

(Symmetrie) " " in $\mathbb{R}^-$: $x = -0{,}765\ldots$

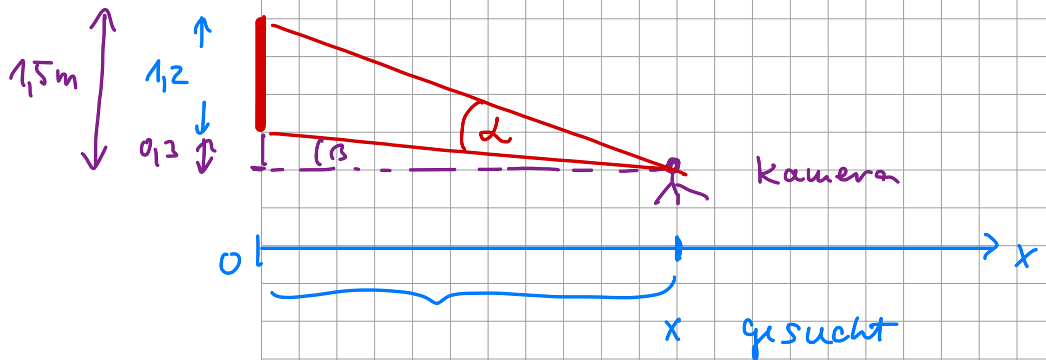
Wendepunkte

Rechtskrümmung in $]-\infty, -0{,}765]$

und $[0{,}765, +\infty[$

Linkskrümmung in $[-0{,}765 ; 0{,}765]$

Aufgabe 5.75.
Ein Fotograf soll ein Gemälde in der Kunstgallerie fotografieren. Das Gemälde ist 120 cm hoch und die Kameralinse befindet sich 30 cm unterhalb der Unterkante des Bildes. Wie weit entfernt von der Wand sollte die Kamera stehen, damit der Winkel, unter dem das Bild in der Linse erscheint, maximal ist?



α zu maximieren

x gesucht, sodass α(x) maximal wird

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{1{,}5}{x} \qquad \tan\beta = \frac{0{,}3}{x}$$

$$\alpha+\beta = \arctan\left(\frac{1{,}5}{x}\right) \qquad \beta = \arctan\left(\frac{0{,}3}{x}\right)$$

$$\boxed{\alpha(x) = \arctan\left(\frac{1{,}5}{x}\right) - \arctan\left(\frac{0{,}3}{x}\right)} \to \text{Max.}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

N.R.
$$\left[\arctan\left(\frac{r}{x}\right)\right]' = \frac{1}{1+\left(\frac{r}{x}\right)^2} \cdot \underbrace{\frac{-r}{x^2}}_{\text{Nachdiff.}}$$

$$= \frac{-r}{x^2+r^2}$$

$$\alpha'(x) = \frac{-1{,}5}{x^2+2{,}25} + \frac{0{,}3}{x^2+0{,}09} = 0 \quad \Big|\cdot(x^2+2{,}25)\cdot(x^2+0{,}09)$$

$$-1{,}5\cdot(x^2+0{,}09) + 0{,}3\cdot(x^2+2{,}25) = 0$$

$$-1{,}5x^2 - 0{,}135 + 0{,}3x^2 + 0{,}675 = 0$$

$$-1{,}2x^2 = 0{,}540$$

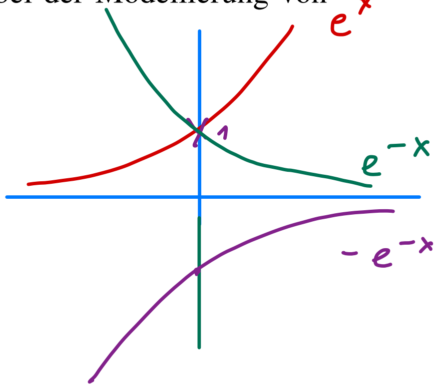
$$x^2 = \frac{0{,}54}{1{,}2} = \frac{5{,}4}{12} = \frac{1{,}8}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \approx \underline{\underline{0{,}67}} \ [\text{m}]$$

größter Winkel bei einer Entfernung von 0,67 m vom Bild.

5.7 Hyperbelfunktionen

Folgende aus e^x und e^{-x} zusammengesetzten Funktionen, die wegen ihrem Bezug zu Hyperbeln Hyperbelfunktionen heißen, tauchen bei der Modellierung von technisch-physikalischen Fragen auf.



Definition 5.76.
Die Funktion *Sinus Hyperbolicus* ist definiert durch

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

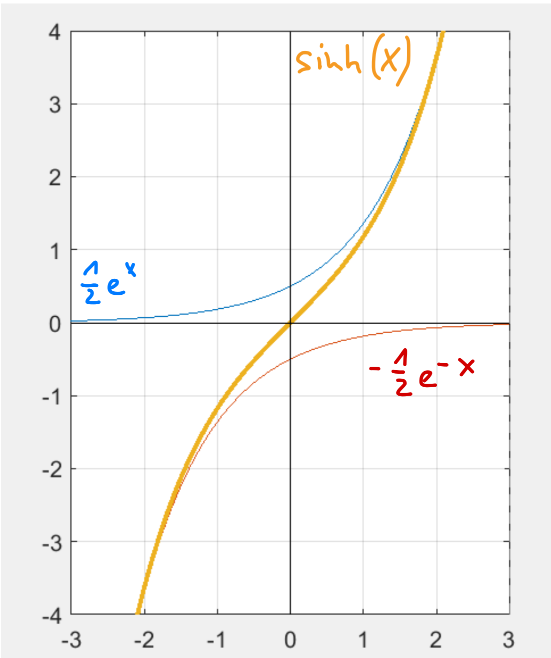
Die Funktion *Cosinus Hyperbolicus* ist definiert durch

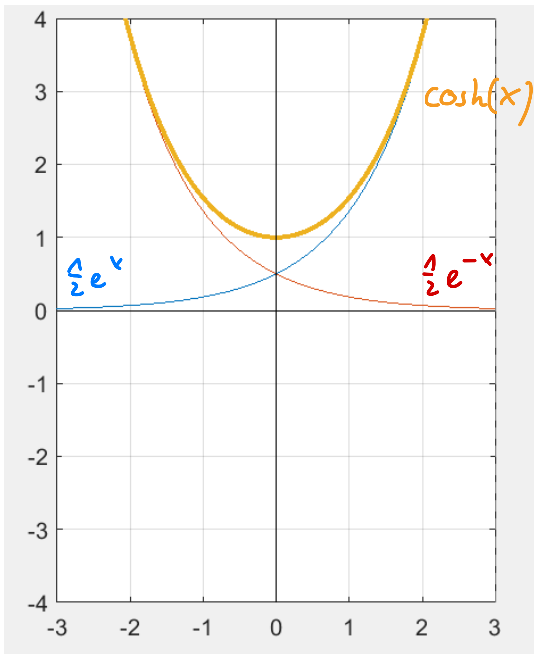
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

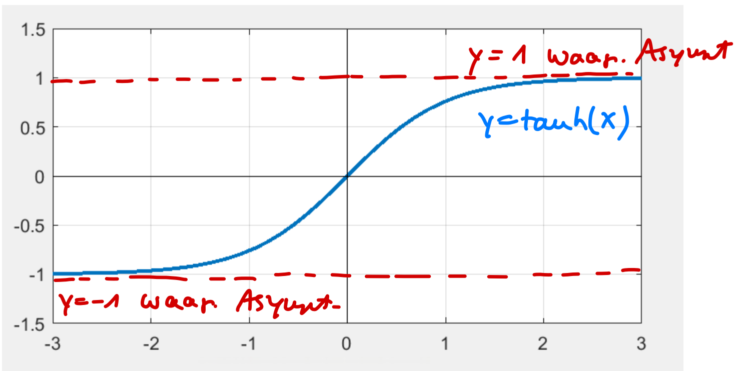
Die Funktion *Tangens Hyperbolicus* ist definiert durch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

punktsymmetrisch







sinh(x) ist punktsymmetrisch

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

$e^x \cdot e^{-x} = e^{x-x} = 1$

$= e^x \cdot \frac{1}{e^x}$

$(e^{-x})^2 = e^{-2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Bemerkung 5.77.
Eigenschaften der Hyperbel-Funktionen:

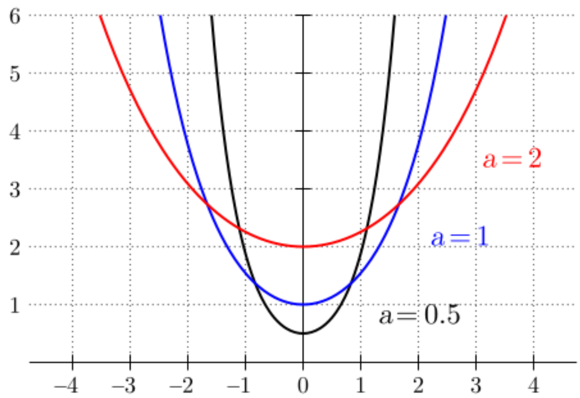
Funktion:	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\tanh(x)$
Definitionsmenge:	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wertemenge:	$\mathbb{R}$	$[1, \infty[$	$]-1, 1[$
Symmetrie:	ungerade	gerade	ungerade
Nullstellen:	$x = 0$	keine	$x = 0$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cosh(2x)$

Bemerkung 5.78.
Mit den Funktionen

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

wird die *Kettenlinie (Katenoide)*, also der Verlauf einer Kette, die an zwei Punkten aufgehängt ist, mit Hilfe des Cosinus Hyperbolicus beschrieben.
(Bilder aus wikipedia)



Hyperbelgleichung
$x^2 - y^2 = 1$

Kreisgleichung
$x^2 + y^2 = 1$

Bemerkung 5.79.
Die Funktionen haben ähnliche Funktionalgleichungen wie die trigonometrischen Funktionen.

Vergleich
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

1. Hyperbel-Gleichung:

   $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2. Additionstheoreme:

   $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(\cancel{x}\, y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$

   $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(\cancel{x}\, y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$

$\sinh(x)\cdot\cosh(y) + \cosh(x)\cdot\sinh(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + \cancel{e^{x-y}} - \cancel{e^{-x+y}} - e^{-x-y} + e^{x+y} - \cancel{e^{x-y}} + \cancel{e^{-x+y}} - e^{-x-y}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right) = \sinh(x+y)$

3. Doppel- und Halbwinkelformel

$$\sinh^2(x) = \frac{-1 + \cosh 2x}{2}$$

$$\cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$

$$\sinh(2x) = 2\,\sinh x\,\cosh x$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}\cdot(1 - \cos(2x))$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cdot(1 + \cos(2x))$

4. Ableitungen:

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

① $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4}\cdot\left((e^x)^2 + 2\cdot e^x e^{-x} + (e^{-x})^2\right) - \frac{1}{4}\cdot\left((e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}\right) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$

④ $(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh(x)$

$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

Bemerkung 5.80 (Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen).
Die Umkehrfunktion der Hyperbelfunktionen heißen **Areafunktionen**.

Achtung

$\frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

$\neq$

$\sinh^{-1} x$

1. Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt **Areasinus hyperbolicus**, abgekürzt arsinh oder $\sinh^{-1}$. Es gilt:

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

2. Die Funktion cosh ist nicht umkehrbar. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs auf $\mathbb{R}_0^+$ wird sie umkehrbar:

   Die Funktion $\cosh : \mathbb{R}_0^+ \to [1, \infty[$ ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt **Areacosinus hyperbolicus**, abgekürzt arcosh oder $\cosh^{-1}$. Es gilt:

$$\cosh^{-1} x = \operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad \text{für } x \in [1, \infty[$$

3. Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ ist umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt **Areatangens hyperbolicus**, geschrieben artanh oder $\tanh^{-1}$ Es gilt:

$$\tanh^{-1} x = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x} \qquad \text{für } x \in]-1, 1[$$

$= W_{\tanh}$

Bemerkung 5.81 (Ableitungen der Areafunktionen).

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{für } x \in [1, \infty[$$

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{für } x \in [-1, 1[$$

Aufgabe 5.82.
Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $y = \sinh x$ und zeichnen Sie deren Graphen.

$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad | \cdot 2$$

Auflösen nach x:

$$e^x - e^{-x} = 2y \qquad | -2y$$

$$e^x - 2y - e^{-x} = 0 \qquad | \cdot e^x \ (\neq 0)$$

$$(e^x)^2 - 2y \cdot e^x - 1 = 0$$

Substitution: $u := e^x$

$$u^2 - 2yu - 1 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{4\cdot(y^2+1)}}{2}$$

$$= \frac{2y \pm 2\cdot\sqrt{y^2+1}}{2} = \frac{\cancel{2}\,(y \pm \sqrt{y^2+1})}{\cancel{2}} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Zwischenüberlegung: $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$

$u_1 = y - \sqrt{y^2+1} < 0 \Rightarrow e^x = u_1$ hat keine Lösung

$u_2 = y + \sqrt{y^2+1} > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$y = -2$

$-2 + \sqrt{4+1} > 0$

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \qquad | \ln$$

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Umbenennen: $\underset{\overset{\shortparallel}{\sinh^{-1}(x) \,=\, \operatorname{arsinh}(x)}}{y} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$y = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \Big| \cdot (e^x + e^{-x}) \qquad y \in]-1, 1[$$

$$y \cdot (e^x + e^{-x}) = e^x - e^{-x}$$

$$y \cdot e^x + y \cdot e^{-x} - e^x + e^{-x} = 0$$

$$(y-1) \cdot e^x + (y+1) \cdot e^{-x} = 0 \qquad \Big| \cdot e^x$$

$$(y-1) \cdot (e^x)^2 + (y+1) = 0 \qquad \Big| -(y+1)$$

$$(y-1) \cdot (e^x)^2 = -(y+1) \qquad \Big| :(y-1) \qquad \text{erlaubt! } \neq 0$$

$$(e^x)^2 = -\frac{y+1}{y-1} = \underbrace{\frac{1+y}{1-y}}_{>0 \ \forall y \in]-1,1[} \qquad 1-y > 0, \quad 1+y > 0$$

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \qquad \Big| \ln$$

$$2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

x, y Vertauschen: $$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\tanh^{-1}(x) = \operatorname{artanh}(x)$$

(5.81) $$[\operatorname{arsinh}(x)]'$$

$$= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f(x) = \sinh(x)$$

$$f^{-1}(x) = \underline{\operatorname{arsinh}(x)}$$

$$f'(x) = \cosh(x)$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$$

$$\cosh(x) = \underset{(-)}{+} \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$$

„$-$" geht nicht, da $\cosh(x) > 0$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh}(x) + C}$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 \cdot (1-x)}{1+x \cdot (1-x)} + \frac{1 \cdot (1+x)}{1-x \cdot (1+x)}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1-x}{1-x^2} + \frac{1+x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1-x+1+x}{1-x^2}$$

$$= \frac{2}{2 \cdot (1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = -\operatorname{artanh}(x) + C}$$