

3.6 Gekoppelte Schwingungen, Überlagerung von Schwingungen

3.6.1 Überlagerung von Schwingungen

Alltagserfahrung: Dicht benachbarte Frequenzen verursachen einen an- und abschwellenden Lautstärke-Eindruck (Beispiel Musik-Instrumente, ...)

Grund ist, dass die Überlagerung zu einer neuen (Summen-)Schwingung führt.

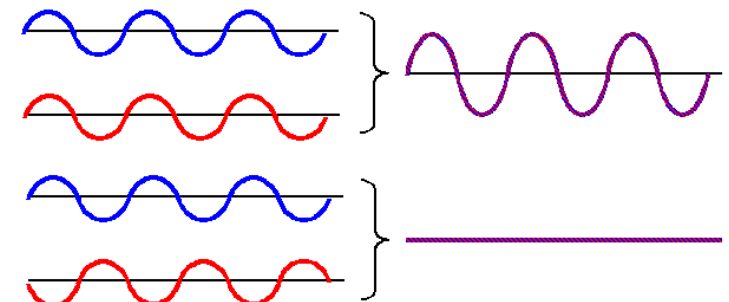
Einzel-Schwingungen: $x_1 = \hat{x}_{01} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_{01})$

$$x_2 = \hat{x}_{02} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

Überlagerung: Summe $x_R = x_1 + x_2$

Je nach Amplituden, Frequenz und Phasenlage erhält man unterschiedliche Verhältnisse.

(Beispiel: $\hat{x}_{01} = \hat{x}_{02}$; $\omega_1 = \omega_2$; $\Delta\varphi = \text{const.}$)



Bildquelle: https://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_6.html

Beliebige Phasendifferenz $\Delta\varphi_0$ bei gleichen Kreisfrequenzen $\omega = \omega_1 = \omega_2$ und gleichen Amplituden $\hat{x}_0 = \hat{x}_{01} = \hat{x}_{02}$ führt zu einer resultierenden Schwingung mit Kreisfrequenz ω und

$$\text{Amplitude} \quad \hat{x}_R = 2\hat{x}_0 \cdot \cos \frac{\Delta\varphi_0}{2}$$

$$\text{Phase} \quad \varphi_{0R} = \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}$$

Bei gleicher Amplitude \hat{x}_0 und Phase $\varphi_0 = 0$, aber leicht unterschiedlichen Kreisfrequenzen $\omega_1 \approx \omega_2$ erhält man:

$$\text{Mit} \quad \omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega_1 \approx 2\omega_2 \quad \text{und} \quad \omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$$

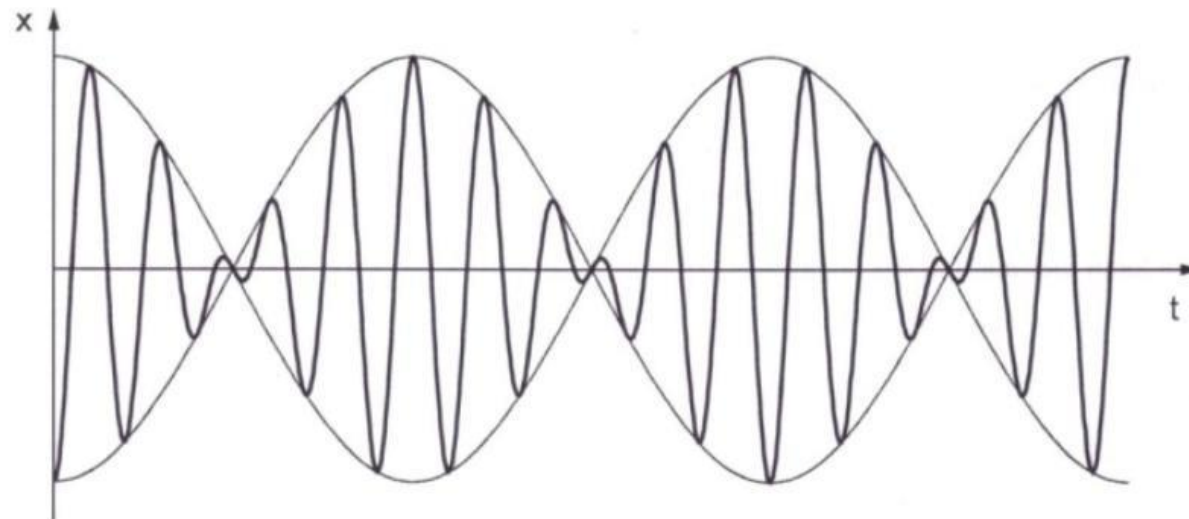
$$x_R = \hat{x}_0 (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) = 2\hat{x}_0 \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cdot \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}$$

$$(\text{Hinweis: Hier wurde verwendet} \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2})$$

Daraus wird dann: $x_R \approx 2\hat{x}_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \sin(\bar{\omega}t)$ $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

Der **Sinus** beschreibt den Verlauf einer Schwingung mit der Mittenfrequenz der beiden Ausgangsfrequenzen. Davor steht die zeitlich veränderliche Amplitude dieser Schwingung.

Diese Funktion („**Schwebung**“) sieht dann folgendermaßen aus:



Bildquelle: <http://www.math-kit.de/2002/demo2/CN-PB-XML-JW/organization/doc/Maschdyn24/Maschdyn24.html>

Zeit von einem Nulldurchgang der Einhüllenden zum nächsten Nulldurchgang:

„Schwebungsdauer“ T_S :
$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

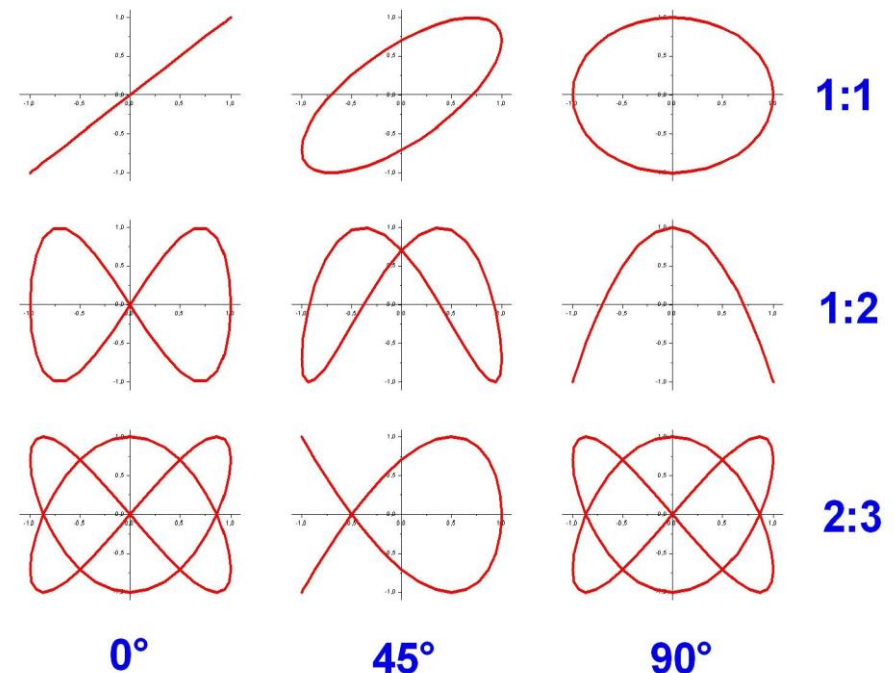
Schwingungsüberlagerung in unterschiedlichen Raumrichtungen

2 Schwingungen senkrecht überlagert.

Je nach Frequenzverhältnis $\omega_x : \omega_y$ und je nach Phasenlage ergeben sich unterschiedliche Figuren:

„Lissajous-Figuren“.

Aussehen wechselt mit Frequenzverhältnis und Phasenlage.



Bildquelle: <http://www.wolfgang-jacobsen.de/deutsch/physik-lehrbuch/auszuge/abb.html>

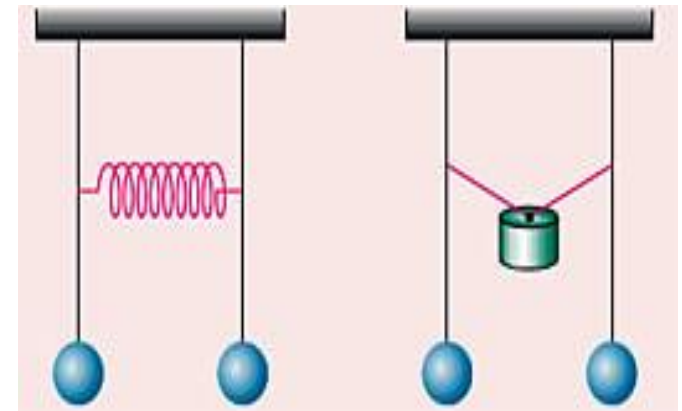
3.6.2. Gekoppelte Schwingungen

Zwei miteinander gekoppelte Schwinger: Gegenseitige Beeinflussung.

Über Kopplung erfolgt **Energie-Austausch**.

Mechanische Kopplung durch:

- a) Elastizität
- b) Reibung
- c) Trägheit



Auslenkung von Pendel 1 führt zu Schwingung.

Allmählicher Transfer von Schwingungs-Energie von Pendel 1 auf Pendel 2.

Geschwindigkeit des Transfers hängt ab von **Kopplungsgrad** κ (*Kappa*).

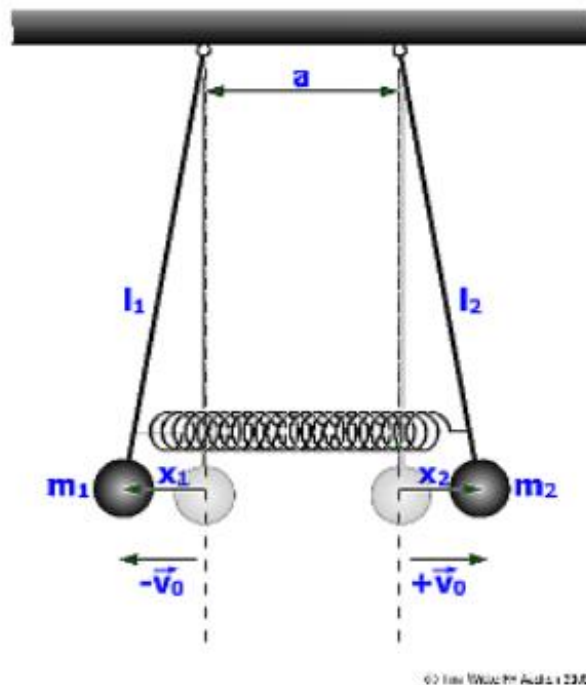
Transfer-Richtung ändert sich erst, wenn Pendel 1 stillsteht (nur bei $f_1=f_2$)

Beide Pendel führen **Schwebung** aus, mit zeitlichem Versatz von $\Delta t = \frac{1}{2} \cdot T_S$

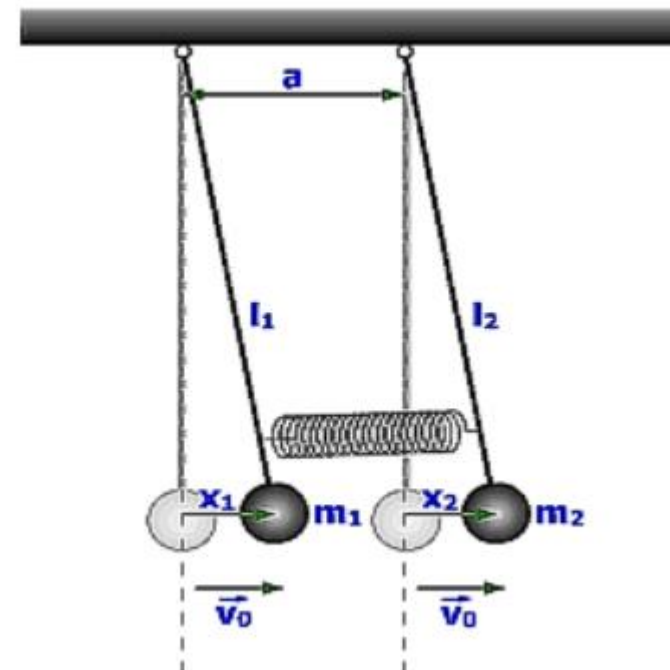
Bildquelle: <https://learnattack.de/schuelerlexikon/physik/gekoppelte-pendel>

Schwebung durch Überlagerung von (hier:2) **Fundamental-Schwingungen**

Beispiel: Gekoppelte Stab-Pendel; identische Pendel, Frequenz f_0



Gegensinnig (gegenphasig)

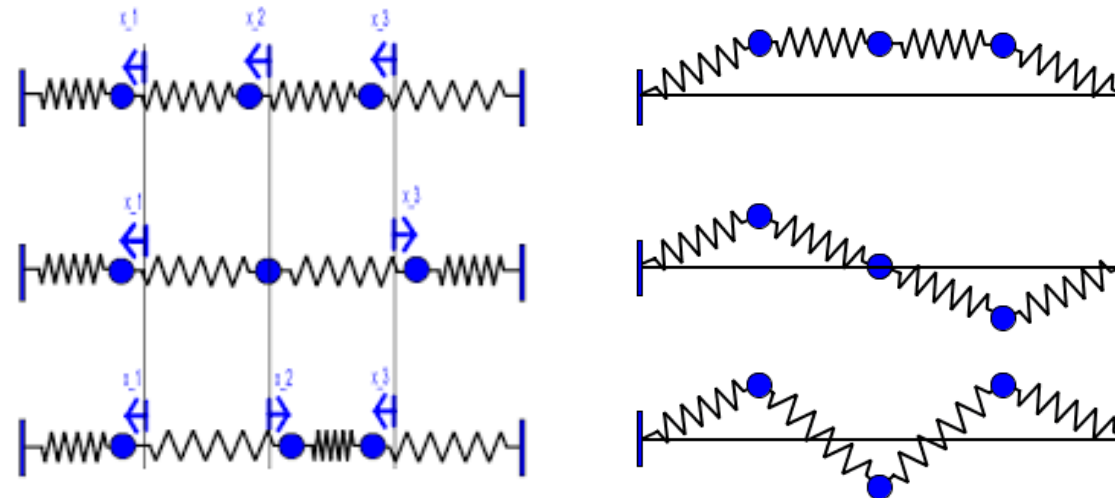


Gleichsinnig (gleichphasig)

Bildquelle: http://www.physik.fh-aachen.de/fileadmin/inhalte/etechnik/pdf/praktikum/2008/gekoppendedel_2008.pdf

Fundamentalschwingungen: Hier findet kein Energieaustausch statt.

- 1.) Gleichsinnige Bewegung: Beide Pendel schwingen mit $f_1 = f_0$
Koppelement ohne Einfluss auf Frequenz.
- 2.) Gegensinnige Bewegung: Beide Pendel schwingen mit $f_2 \neq f_1$
Koppelement bewirkt durch zusätzliche Richtgröße Frequenzänderung.
- 3.) Bei g Freiheitsgraden mit N Massen treten $g \cdot N$ Fundamentalschwingungen auf. Dabei kommt aber vor, dass mehrere die selbe Frequenz haben.



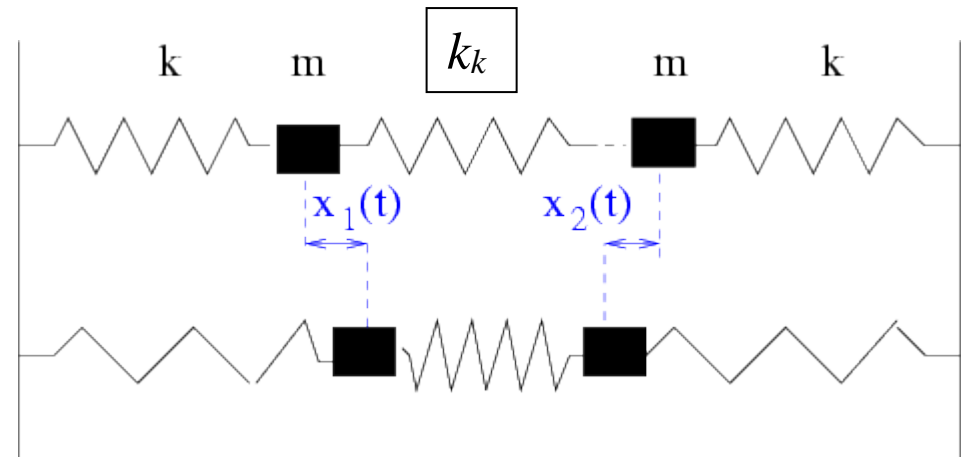
Bildquelle:

http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ph/14/ep/einfuehrung/schwingungen/gekoppelt/gekoppelt.vlu/Page/vsc/de/ph/14/ep/einfuehrung/schwingungen/gekoppelt/gek_freiheitsgrade.vscml.html

Für ein System mit 2 schwingungsfähigen Massen mit einem Freiheitsgrad gilt:

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 - k_k(x_2 - x_1) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 + k_k(x_2 - x_1) = 0$$



Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems liefert für die beiden Fundamentalschwingungen:

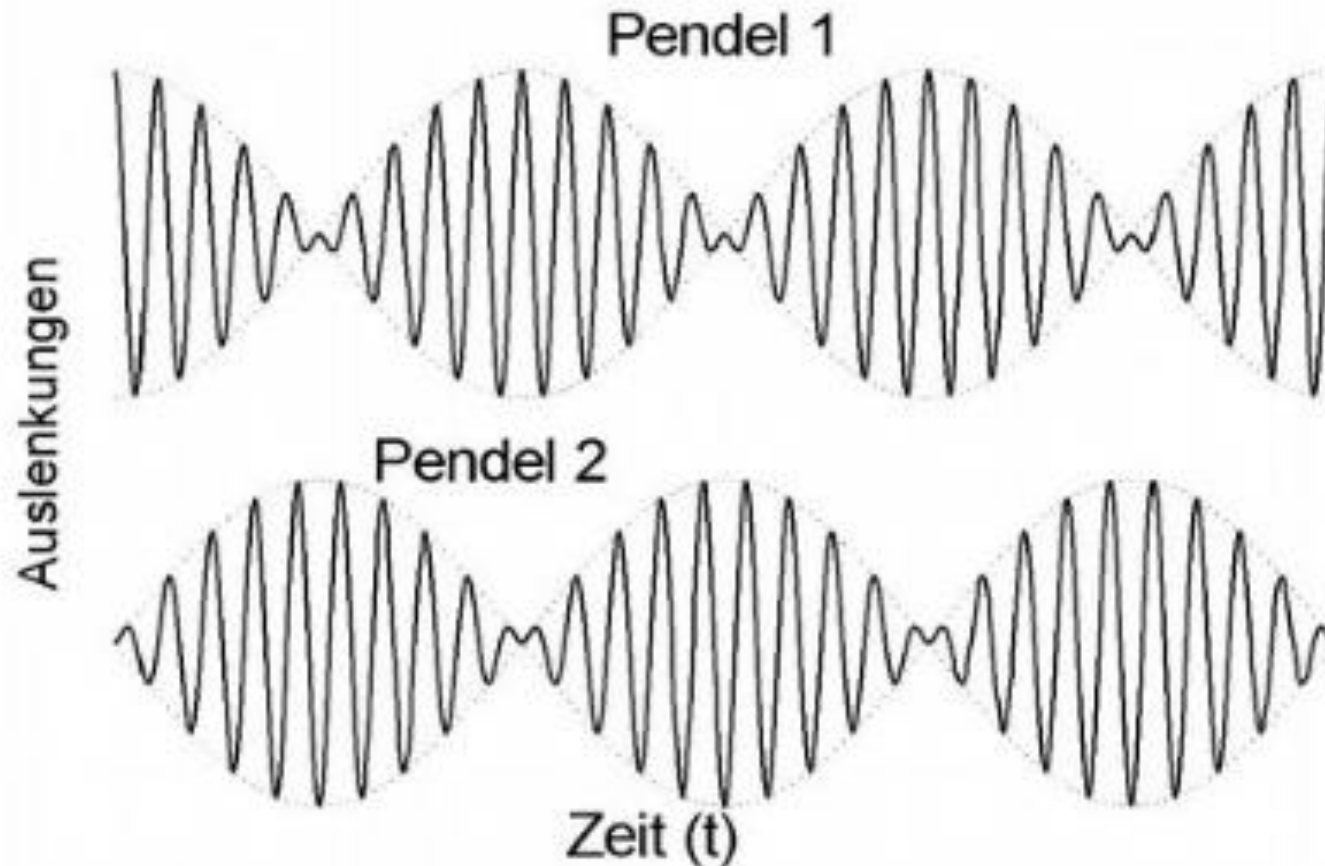
$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k+2k_k}{m}}$$

Kopplungsgrad κ :

$$\kappa = \frac{k_k}{k+k_k} = \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_2^2 + f_1^2}$$

Bildquelle: <https://itp.uni-frankfurt.de/~luedde/Lecture/Mechanik/Intranet/Skript/Kap3/node7.html>

Die Kopplung verursacht also eine Frequenzaufspaltung $f_2 - f_1$ die umso größer ist, je stärker die Kopplung ist.



Bildquelle: https://www.physik.uni-osnabrueck.de/fileadmin/documents/Probestudium_Dateien/Versuchsanleitungen/V01_FederpendelGekoppeltePendel.pdf