Kapitel 7

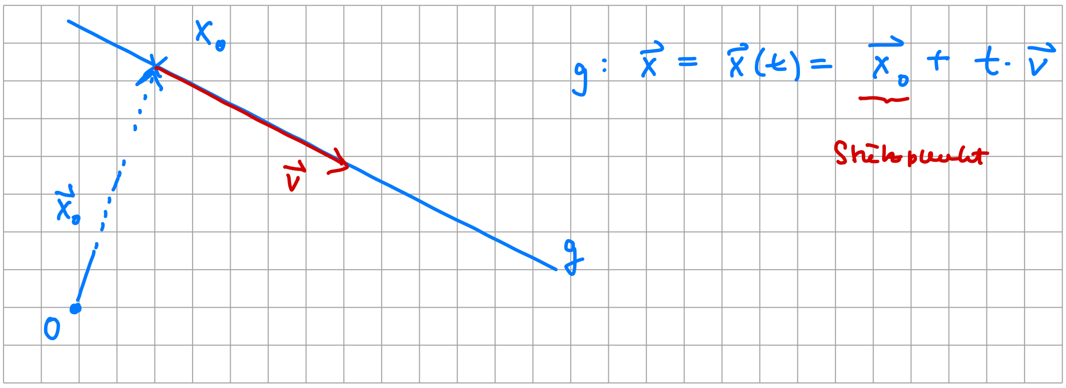
Analytische Geometrie

7.1 Geraden und Ebenen

Definition 7.1.
Eine Gerade g im $\mathbb{R}^n$ ist festgelegt durch einen Punkt X_0 mit Ortsvektor $\vec{x}_0$ und einen Richtungsvektor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Mit diesen Angaben kann man die Gerade g parametrisiert in folgender Form angeben:

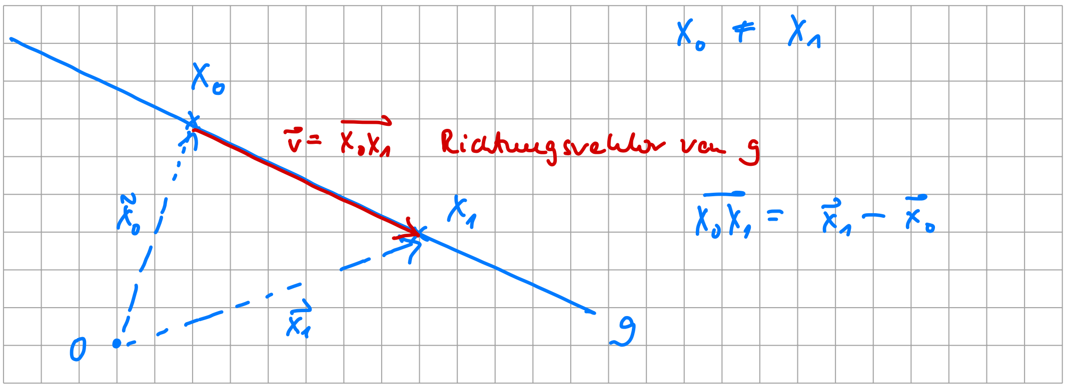
$$g: \quad \vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\,\vec{v}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Diese Darstellung heißt auch *Punkt-Richtungs-Form* oder *Parameterform* der Gerade.



Bemerkung 7.2.
Eine Gerade g ist durch zwei verschiedene Punkte X_0 und X_1 eindeutig bestimmt. Die Punkte liefern die Parameter-Darstellung der Gerade in der *Zwei-Punkte-Form*:

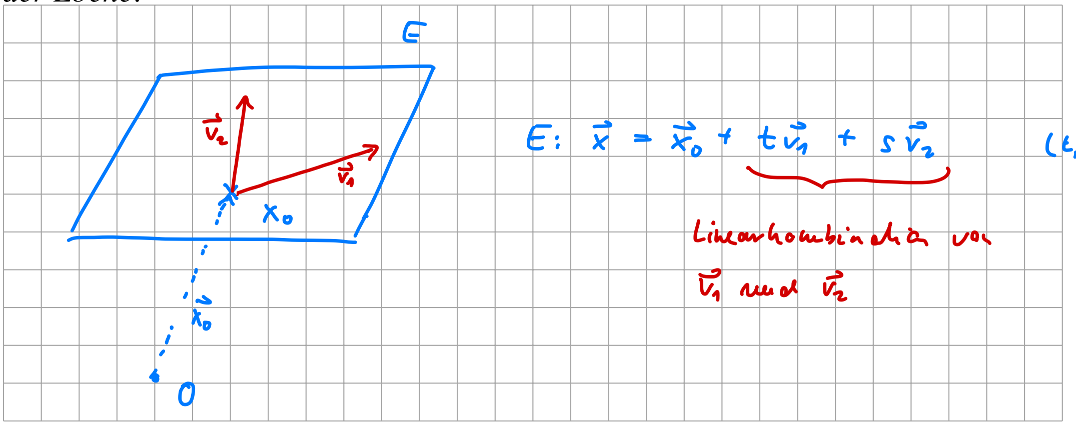
$$g: \vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \qquad t \in \mathbb{R}$$



Definition 7.3.
Eine Ebene E im $\mathbb{R}^n$ ist eindeutig festgelegt durch einen Punkt X_0 mit Ortsvektor $\vec{x}_0$ und *zwei Richtungsvektoren* $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, die nicht parallel sind.
Man kann sie mit diesen Angaben wie folgt darstellen: d.h. $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig

$$E: \quad \vec{x} = \vec{x}(t,s) = \vec{x}_0 + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2, \qquad t,s \in \mathbb{R}$$

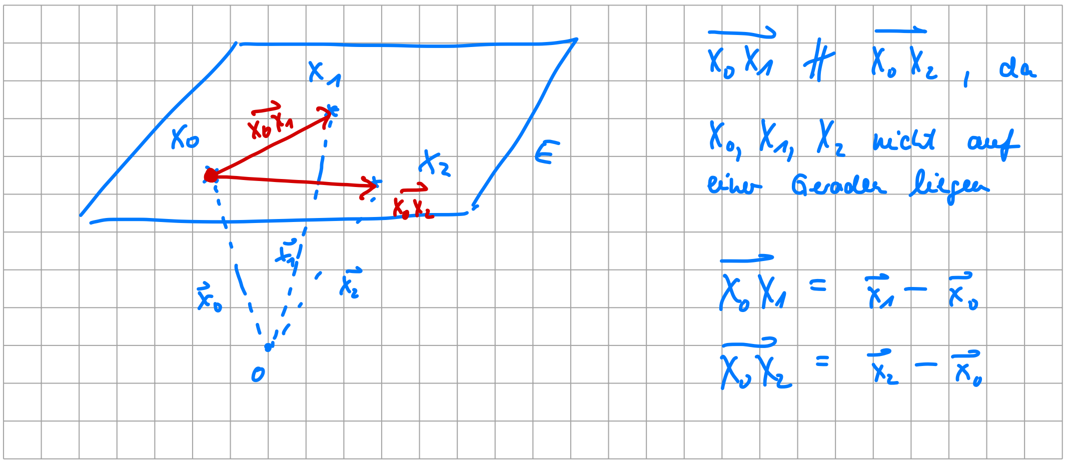
Diese Darstellung heißt auch *Punkt-Richtungs-Form der Ebene* oder *Parameterform der Ebene*.



Definition 7.4.
Eine Ebene ist durch 3 Punkte X_0, X_1, X_2, die nicht alle auf einer Geraden liegen, festgelegt.
Man kann sie mit diesen Angaben wie folgt darstellen:

$$E: \quad \vec{x} = \vec{x}(t,s) = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + s(\vec{x}_2 - \vec{x}_0), \qquad t,s \in \mathbb{R}$$

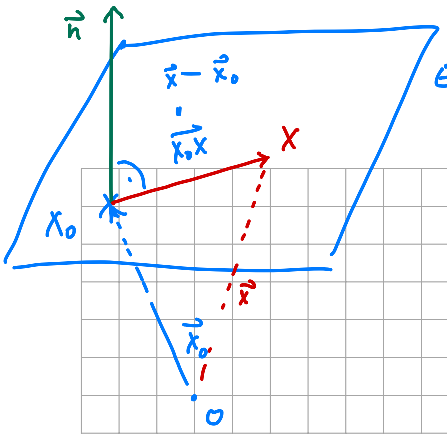
Diese Darstellung heißt *Drei-Punkte-Form der Ebene*.



Definition 7.5.
Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist durch einen Punkt X_0 und einen Vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, der auf der Ebene senkrecht steht, festgelegt.
Man kann die Ebene mit diesen Angaben wie folgt darstellen:

$$E: \quad (\vec{x} - \vec{x}_0) \circ \vec{n} = 0$$

Diese Darstellung heißt *Normalenform* oder *parameterfreie Darstellung* der Ebene.



$\vec n \perp E$

d.h. $X \in E \iff$

$\vec n \perp (\vec x - \vec x_0)$

$\iff \vec n \circ (\vec x - \vec x_0) = 0$

$\iff (\vec x - \vec x_0) \circ \vec n = 0$

$\iff \vec x \circ \vec n - \vec x_0 \circ \vec n = 0$

$X_0 = (x_0, y_0, z_0) \qquad X = (x, y, z) \qquad \vec n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ \neq \vec 0$

Schreibt man $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ und die Punkte der Ebene $X = (x, y, z)$ in Koordinaten, ergibt sich:

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{\in \mathbb{R}} =: d \in \mathbb{R}$

$\in \mathbb{R}$, festgelegt durch $\vec n$ und X_0

Ebene E ist die Lösungsmenge dieser linearen Gleichung mit Unbekannten x, y, z.

Bemerkung 7.6.
Die Lösungsmenge der Gleichung

$$ax + by + cz = d$$

liefert sofort einen Normalenvektor

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 sind, ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Diese Form der Darstellung einer Ebene heißt *Gleichungsform* oder *Koordinatenform* der Ebene.
Die Ebene geht genau dann durch den Ursprung, wenn $d = 0$. (d.h. Gleichung ist homogen)
Der Vektor $\vec n := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene (d.h. er steht senkrecht auf der Ebene).

Aufgabe 7.7.
Geben Sie einen Vektor $\neq \vec 0$ an, der auf der Ebene, die durch die Gleichung

$$3x - 2y + 4z = -1$$

gegeben ist, senkrecht steht. Geben Sie die Ebene in Normalenform an.

$|\vec n| = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$

$\vec n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \perp E$

Punkt in der Ebene:

z.B. $x = y = 0 \implies 4z = -1, \quad z = -\frac{1}{4}$

d.h. $(0, 0, -\frac{1}{4}) \in E$, X_0

Normalenform:

$\vec x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\vec n \circ (\vec x - \vec x_0) = 0$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix} \right] = 0$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + 1/4 \end{pmatrix} = 0$

$\pm \frac{\vec{n}}{\sqrt{29}} = \pm \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ normiert

$3x - 2y + 4z + 1 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}$

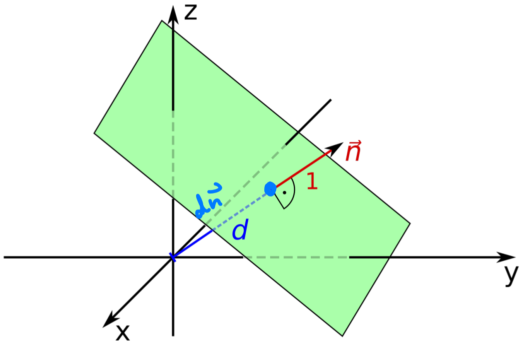
$\frac{3}{\sqrt{29}}x - \frac{2}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z + \frac{1}{\sqrt{29}} = 0$

Hesse-Normalform

Bemerkung 7.8.
Ein normierter Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene heißt *Einheitsnormalenvektor* der Ebene. Die Normalenform

$$\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{n} \circ \vec{x} = d \quad \text{mit} \quad d = \vec{n} \circ \vec{x}_0$$

heißt dann auch *Hesse-Normalform* oder *Hessesche Normalenform* der Ebene.
Da es zu jeder Ebene zwei Einheitsnormalenvektoren gibt, ist die Hesse-Normalform noch nicht eindeutig. Liegt der Ursprung nicht in der Ebene (ist also $d \neq 0$), wird die Darstellung eindeutig, wenn man zusätzlich $d > 0$ fordert. Dann ist d der (minimale) Abstand der Ebene vom Ursprung.



$\vec{n} \circ \underbrace{d\vec{n}}_{\Rightarrow\ \in E} = d \cdot \underbrace{(\vec{n} \circ \vec{n})}_{\substack{= 1, \text{ da } \vec{n} \text{ normiert} \\ = |\vec{n}|^2}} = d$

$|d\vec{n}| = |d|$

Aufgabe 7.9.
Eine Ebene E ist durch drei Punkte $P(1, -2, 4)$, $Q(-3, 4, 1)$ und $R(2, 1, 7)$ gegeben.

1. Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene. $\hat{=}$ 3-Punkte-Form

$E: \vec{x} = \vec{x}(t, s)$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \vec{p} + t\,(\vec{q} - \vec{p}) + s \cdot (\vec{r} - \vec{p})$

P Stützpunkt

$\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{PR} = \vec{r} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Geben Sie die Ebene in Normalenform und in Koordinatenform an und bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene.

Gesucht $\vec{n} \neq \vec{0}$, mit $\vec{n} \perp E$ Normalenvektor ①

d.h. $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Punkt in der Ebene ②
z.B. P

Lösung: Vektorprodukt

$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} -4 \\ 6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$

Wähle

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp E$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Normalenform: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ $\qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-4 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform $\quad 3x - 3 + y + 2 - 2z + 8 = 0$

$$3x + y - 2z = -7 \qquad \Big| : \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Hesse-Normalenform $\quad |\vec{n}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$

Normierter Normalenvektor: $\vec{n}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\frac{3}{\sqrt{14}} x + \frac{1}{\sqrt{14}} y - \frac{2}{\sqrt{14}} z = -\frac{7}{\sqrt{14}} < 0 \qquad |\cdot(-1)$$

> 0 rechts

Die Hesse-Normalenform

$$-\frac{3}{\sqrt{14}} x - \frac{1}{\sqrt{14}} y + \frac{2}{\sqrt{14}} z = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7 \cdot \sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

mit zugehörigem Normalenvektor $\vec{n}_0 = -\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{n}_0} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-4 \end{pmatrix}}_{\vec{x} - \vec{p}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

Aufgabe 7.10.
Gegeben ist die Ebene $E : -2x+2y-z+4 = 0$. Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene.

Variante 1 $\quad$ Finde 3 verschiedene Punkte auf der Ebene

z.B. Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen

mit x-Achse $\quad y = z = 0 \quad -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad X_0 = (2, 0, 0) \in E$

mit y-Achse $\quad x = z = 0 \quad 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \quad X_1 = (0, -2, 0)$

mit z-Achse $\quad x = y = 0 \quad -z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 4 \quad X_2 = (0, 0, 4)$

3-Punkte-Form:

$E: \quad \vec{x}(t,s) = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + s\cdot(\vec{x}_2 - \vec{x}_0)$

$$\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$$

Alternativ (als Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

$$\vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \qquad t,s\in\mathbb{R}$$

<u>Variante 2</u>

$$-2x + 2y - z = -4$$

LGS mit einer Gleichung

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ -2 & 2 & -1 & -4 \end{array}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilen-Stufen-Form

$t = y, \; s = z$

→ 2 freie Parameter $t = y, \; s = z$

$$-2x + 2t - s = -4$$

$$-2x = -4 - 2t + s \quad |\cdot(-2)$$

$$x = 2 + t - \tfrac{1}{2}s$$

$$E = \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix}2+t-1/2\,s\\t\\s\end{pmatrix} \,\middle|\, t,s\in\mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{Parameterform der Ebene}} \,\middle|\, t\in\mathbb{R} \right\}$$

7.2 Schnittmengen von Geraden und Ebenen

Schnitt von zwei Geraden

Bemerkung 7.11.
Zwei Geraden g_1 und g_2 im $\mathbb{R}^3$ können folgende Lage zueinander haben:

(a) sie sind gleich

(b) sie sind parallel ohne gemeinsame Punkte

(c) sie schneiden sich in genau einem Punkt

(d) sie sind *windschief*, d.h. sind weder parallel noch haben sie gemeinsame Punkte.

$X_1 \quad X_2$

Entscheidungsbaum für die Geraden $g_1 : \vec{x} = \vec{x}_1 + t\vec{v}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{x}_2 + t\vec{v}_2$, $(t \in \mathbb{R})$:

$\vec v_1 \parallel \vec v_2$?

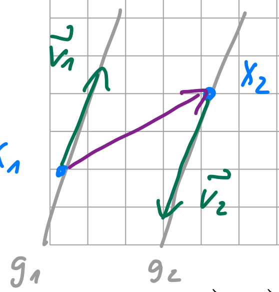
Ja | Nein

$\Rightarrow$ a) oder b) liegt vor | $\Rightarrow$ c) oder d) liegt vor

In beiden Fällen kann man untersuchen, ob die beiden Geraden gemeinsame Punkte haben.

Hier kann man es auch so unterscheiden

$g_1 = g_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{X_1X_2} \parallel \vec v_1 \; (\parallel \vec v_2)$



$\vec v_1 \parallel \vec v_2$

$\overrightarrow{X_1X_2} = \vec x_2 - \vec x_1$

Ermittle die Schnittpunkte!

$\vec x_1 + t \cdot \vec v_1 = \vec x_2 + s \cdot \vec v_2$

Achtung! andere Parameter

$\mathbb{L} = \emptyset \Leftrightarrow g_1, g_2$ windschief

1. Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ parallel (kollinear), kann (a) oder (b) vorliegen.

   Der Fall (a), also Gleichheit, liegt genau dann vor, wenn auch $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ parallel zu $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ ist.

2. Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ nicht parallel, kann (c) oder (d) vorliegen. Man muss dann prüfen, ob die Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen.

   Der Fall (c), also eindeutiger Schnittpunkt, liegt genau dann vor, wenn es $t, s \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{x}_1 + t\vec{v}_1 = \vec{x}_2 + s\vec{v}_2$.

unterschiedliche Parameter!

Aufgabe 7.12.
Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\vec x_1} + t \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\vec v_1} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$$g_2 : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec x_2} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec v_2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Welche Lage haben g_1 und g_2 zueinander? Bestimmen Sie die Schnittmenge von g_1 und g_2.

$\vec v_1 \nparallel \vec v_2$ (sind keine Vielfachen voneinander)

$\Rightarrow$ g_1, g_2 haben genau einen Schnittpunkt oder sie sind windschief.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Koordinatenweise Betrachtung liefert ein LGS in s, t

(I) $1+t = 1+s \iff t-s=0$

(II) $-2t = 1+s \iff -2t-s=1$

(III) $1+t = 2-2s \iff t+2s=1$

aus (I): $t=s$

in (II): $-3s=1 \Rightarrow s=-\frac{1}{3} \Rightarrow t=-\frac{1}{3}$

Achtung: Auch (III) muss erfüllt sein!

Einsetzen in III: $t+2s = -\frac{1}{3}-\frac{2}{3} = -1 \neq 1$ ↯

$\Rightarrow$ g_1, g_2 sind windschief!

Schnitt einer Gerade mit einer Ebene

Bemerkung 7.13.
Eine Gerade g und eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ können folgende Lage zueinander haben:

(a) die Gerade liegt in der Ebene

(b) die Gerade ist parallel zur Ebene, d.h. Gerade und Ebene haben keine Schnittpunkte

(c) Die Gerade schneidet die Ebene in genau einem Punkt.

Aufgabe 7.14.
Bestimmen Sie die Schnittmenge

der Ebene $E: 5x+2y+4z-6=0$ mit der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

"Gerade in Ebene einsetzen" $\vec{x} = \begin{pmatrix}t\\2-2t\\-2+t\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}$

$5t + 2(2-2t) + 4\cdot(-2+t) - 6 = 0$

$5t + 4 - 4t - 8 + 4t - 6 = 5t - 10 = 0$

$\iff \underline{\underline{t=2}}$

SP: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ Probe: $5\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 4\cdot 0 - 6 = 0$

SP $S(2,-2,0)$

Aufgabe 7.15.
Bestimmen Sie die Schnittmenge

der Ebene $E : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \quad (t,s \in \mathbb{R})$

mit der Geraden $g : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + \underbrace{r}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

! Andere Parameter

Koordinatenweise liefert das ein LGS in t, s, r

$$\begin{array}{lrcl|rcl}
(\mathrm{I}) & 1 - t &=& r & r + t &=& 1 \\
(\mathrm{II}) & 2t &=& 2 - 2r \;\; |:2 & \cancel{r + t} &\cancel{=}& \cancel{1} \\
(\mathrm{III}) & 1 - s &=& -2 + r & s + r &=& 3
\end{array}$$

redundant

2 Gleichungen, 3 Unbestimmte

$\Rightarrow$ Unendl. viele Lösungen oder gar keine

Man sieht: Gibt man $r \in \mathbb{R}$ beliebig vor, erhält man

$t = 1 - r$
$s = 3 - r$

eindeutige Werte für t, s

$\Rightarrow$ es gibt einen freien Parameter, also unendliche viele Lösungen

$\Rightarrow$ $E \cap g$ ist eine unendliche Menge

$\Rightarrow$ $g \subset E$, $\quad E \cap g = g$

Schnitt von zwei Ebenen

Bemerkung 7.16.
Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ können folgende Lage zueinander haben:

(a) beide Ebenen sind gleich

(b) die Ebenen sind parallel und haben keinen Schnittpunkt

(c) die beiden Ebenen schneiden sich in einer Gerade.

Aufgabe 7.17.
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebenen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} E_1: & x & - & 2y & + & 4z & = & -2 \\ E_2: & 2x & - & 3y & + & z & = & 5 \end{array}$$

a, b nicht möglich:

$\vec{n}_1$ Normalenvektor von $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_2$ " " $E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor der Schnittgeraden: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wären $E_1 = E_2$ oder $E_1 \parallel E_2$ müsste $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ sein. $\lightning$

Schnittgerade mit LGS bestimmen

$$\begin{array}{ccc|cl} x & y & z & & \\ 1 & -2 & 4 & -2 & (\cdot -2) \\ 2 & -3 & 1 & 5 & \leftarrow \\ \hline 1 & -2 & 4 & -2 & \\ 0 & 1 & \underbrace{-7}_{} & 9 & \end{array}$$

(I) und (II) bezeichnen die beiden letzten Zeilen.

$z = t$ freier Parameter

aus (II) $\quad y - 7t = 9 \quad \Rightarrow \quad y = 9 + 7t$

in (I) $\quad x - 2(9+7t) + 4t = -2$

$x - 18 - 14t + 4t = -2$

$x = 16 + 10t$

$E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 16 + 10t \\ 9 + 7t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

Schnittgerade: $\quad g = \vec{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{muss in } E_1 \text{ liegen und } E_2} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{muss Richtungsvektor beider Ebenen sein}} \quad (t \in \mathbb{R})$

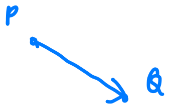
$\vec{n}_1 \circ \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 - 14 + 4 = 0 \checkmark$

$\vec{n}_2 \circ \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$

7.3 Abstandsberechnungen

$P, Q \in \mathbb{R}^n$

$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$



$d(P,Q) := |\vec{q} - \vec{p}|$

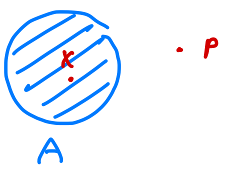
Abstand von P zu Q

$P \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$

A abgeschlossen (Rand von A gehört zu A)

$d(A,P) :=$

$\min \{ d(X,P) \mid X \in A \}$

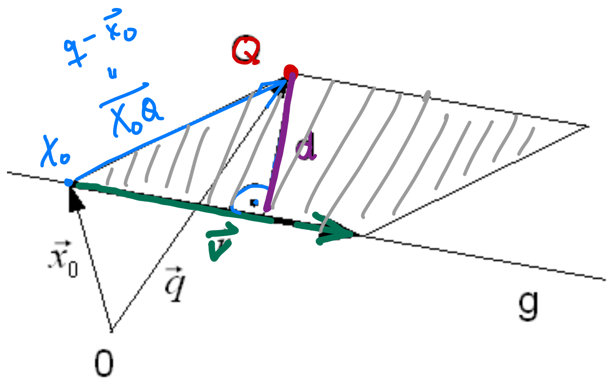


Abstand von P zu A

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Bemerkung 7.18.
Den Abstand $d(Q,g)$ eines Punktes Q (mit Ortsvektor $\vec{q}$) von der Geraden $g : \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v}$ kann man berechnen durch

$$d = d(Q,g) = \frac{|\vec{v} \times (\vec{q} - \vec{x}_0)|}{|\vec{v}|}$$



Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{v}$ und $\vec{q} - \vec{x}_0$ aufgespannt wird, ist:

① mit Vektorprodukt $\quad |\vec{v} \times (\vec{q} - \vec{x}_0)|$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

② Elementargeometrie $\quad |\vec{v}| \cdot d$

Grundlinie · Höhe

Auflösen nach d

Aufgabe 7.19.
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $Q(3,2,1)$ von der Geraden

$$g : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_0} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \times (\vec{q} - \vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{matrix}$

Zähler: $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \sqrt{1+1+9} = 2\sqrt{11}$

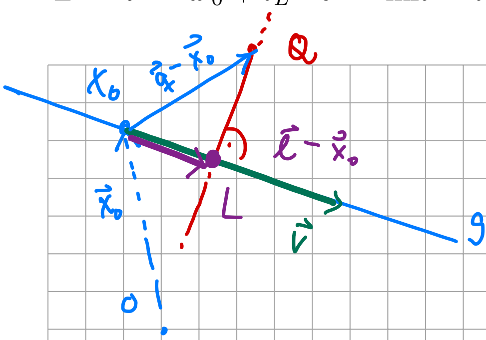
$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2}$$

Nenner

$$d = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{2}} = \sqrt{22}$$

Bemerkung 7.20.
Eine alternative Vorgehensweise ist, den Fußpunkt L des Lotes von Q auf der Geraden $g : \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v}$ zu bestimmen.

$$L = \vec{\ell} = \vec{x}_0 + t_L \cdot \vec{v} \quad \text{mit} \quad t_L = \frac{(\vec{q} - \vec{x}_0) \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \quad \text{und} \quad d(Q, g) = |\vec{q} - \vec{\ell}|$$



$$pr_{\vec{a}}\, \vec{v} = \frac{\vec{v} \circ \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Kapitel 3

$\vec{\ell} - \vec{x}_0$ ist die Orthogonalprojektion von $(\vec{q} - x_0)$ auf $\vec{v}$

$$\vec{\ell} - \vec{x}_0 = pr_{\vec{v}} (\vec{q} - \vec{x}_0) = \frac{\vec{v} \circ (\vec{q} - \vec{x}_0)}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\ell} = \vec{x}_0 + \underbrace{\frac{\vec{v} \circ (\vec{q} - \vec{x}_0)}{|\vec{v}|^2}}_{t_L \in \mathbb{R}} \cdot \vec{v}$$

$$d(Q, g) = |\vec{q} - \vec{\ell}|$$

Im Beispiel (7.19)

$$\vec{v} \circ (\vec{q} - \vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2$$

$$|\vec{v}|^2 = 2$$

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{-2}{2}}_{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d(Q, g) = |\vec{\ell} - \vec{q}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}$$

Abstand windschiefer Geraden

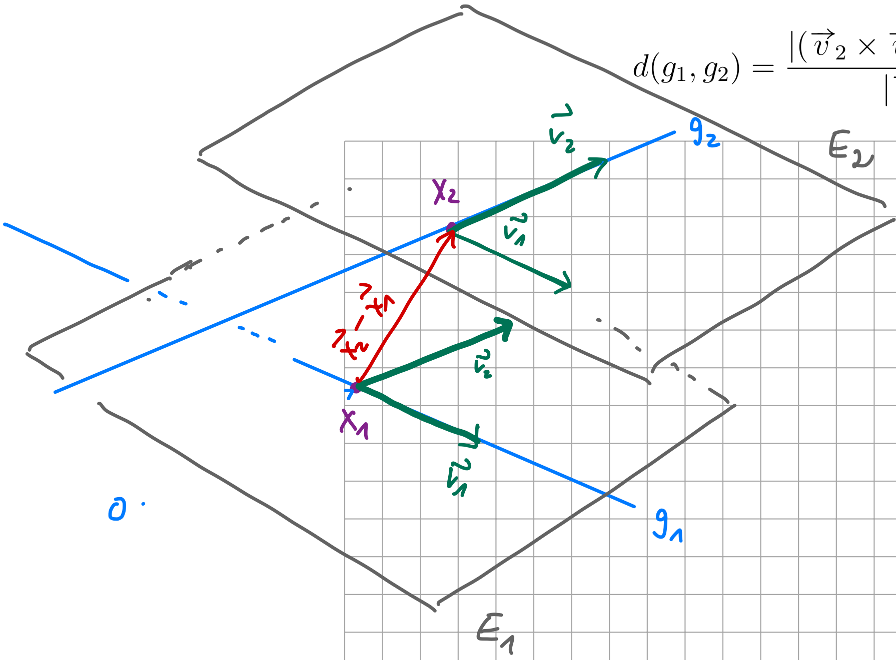
Bemerkung 7.21.
Den Abstand $d(g_1, g_2)$ der windschiefen Geraden im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} g_1 : \quad \vec{x} &= \vec{x}_1 + t\vec{v}_1 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ g_2 : \quad \vec{x} &= \vec{x}_2 + t\vec{v}_2 \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

kann mit mit folgender Formel berechnen:

$$d(g_1, g_2) = \frac{|(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) \circ (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)|}{|\vec{v}_2 \times \vec{v}_1|}$$

Spatprodukt



g_1, g_2 windschief

$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$

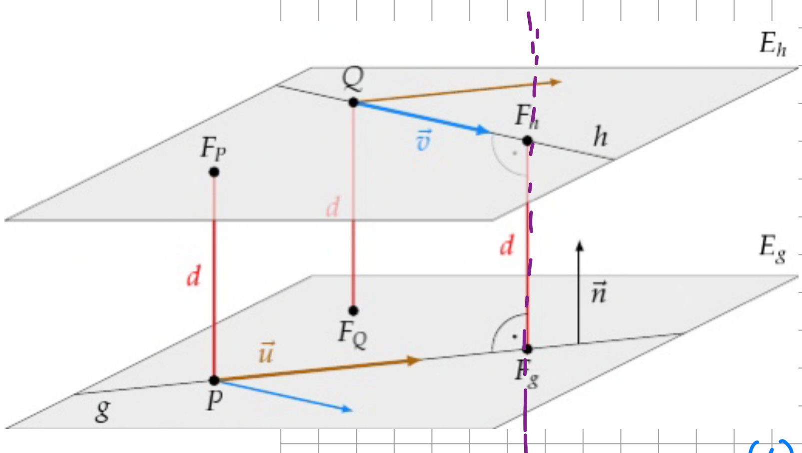
$g_1 \cap g_2 = \emptyset$

E_1: Ebene, die definiert ist durch X_1 und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

E_2: Ebene, die definiert ist durch X_2 und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$E_1 \parallel E_2 \qquad E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$d(g_1, g_2) = d(E_1, E_2) =: d$



Volumen des Spates, das von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ erzeugt wird

(1) $= \underbrace{|[v_1, v_2, \vec{x}_2 - \vec{x}_1]|}_{\text{Spatprodukt}} = |(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \circ (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)|$

(2) $= \underbrace{\text{Grundfläche}}_{\substack{\text{Parallelogramm, das} \\ \text{von } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ erzeugt wird} \\ |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}} \cdot \underbrace{\text{Höhe}}_{d}$

Nach d auflösen liefert

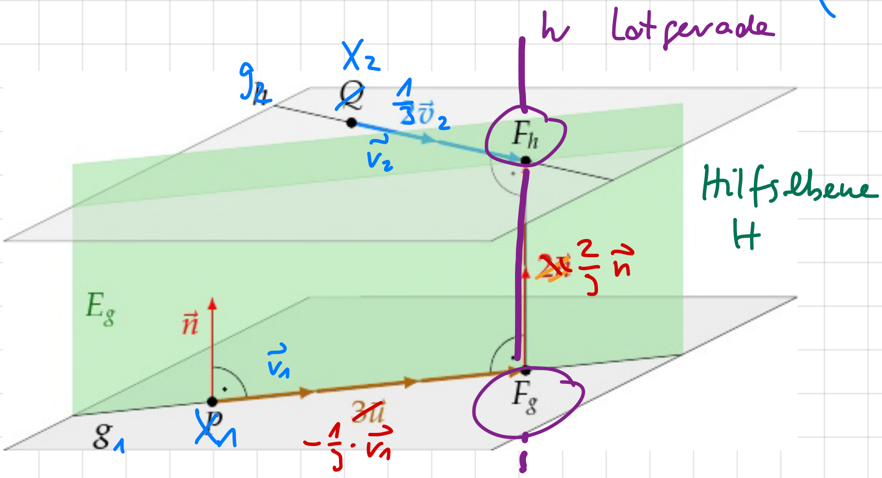
$$d = \frac{|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \circ (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

Auffinden der Lotgerade h zu g_1 und g_2

Richtungsvektor der Lotgeraden: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jetzt ist nur Richtung wichtig

Nehmen $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



mathematik-oberstufe.de

definiert durch:

Stützpunkt von g_1, X_1

$\vec{v}_1$ Richtungsvektor von g_1

und $\vec{n}$

$H \perp g_1$, $H \perp g_2$

Einen Stützpunkt auf der Gerade h erhält man, indem man H mit g_2 schneidet $\rightsquigarrow$ F_h

$$H: \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_1} + \underset{-1/3}{t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + \underset{2/3}{s} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{n}} = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X_2} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}^{g_2}$$

$\triangleright$ 0

(I) $1 + t + s = 1 + r$

(II) $-2t + s = 1 + r$

(III) $1 + t + s = 2 - 2r$

aus I, III:

$1 + r = 2 - 2r$

$3r = 1$

$r = 1/3$

aus I, II $\quad 1 + t + s = -2t + s$

$3t = -1 \Rightarrow t = -1/3$

in I $\quad 1 - \frac{1}{3} + s = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow s = 2/3$

SP: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ $\quad F_h\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$h: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad \text{Lotgerade}$$

<u>Fußpunkt der Lotgerade h auf der Geraden g_1:</u>

$$\vec{x}_1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \qquad F_g\left(2/3,\ 2/3,\ 2/3\right)$$

$$d(g_1, g_2) = \left| \vec{f}_h - \vec{f}_g \right| = \left| \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}}}$$

Aufgabe 7.22.
Berechnen Sie den Abstand der Geraden g_1 und g_2 aus Aufgabe (7.12).

…e 7.12.
…n sind die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{x}_1} + t\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$$g_2 : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{x}_2} + t\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Lage haben g_1 und g_2 zueinander? Bestimmen Sie die Schnittme…

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}1 & & 1\\-2 & & 1\end{matrix}$$

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = 3\cdot\sqrt{3}$$

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\circ(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = -6$$

$$d = \frac{|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\circ(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} = \frac{|-6|}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} > 0$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Bemerkung 7.23. Eine Ebene E sei in Normalenform gegeben, also $E : ax + by + cz + \cancel{d}^{\,s} = 0$ mit dem Normalenvektor $\vec{n} = (a, b, c)$. $ax + by + cz + s = 0$
Dann berechnet sich der Abstand eines Punktes $Q(q_1, q_2, q_3)$ von der Ebene durch Einsetzen der Koordinaten von Q in die Ebenengleichung und Teilen durch den Betrag von $\vec{n}$:

$$d(Q, E) = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot |a\,q_1 + b\,q_2 + c\,q_3 + \cancel{d}^{\,+s}|$$

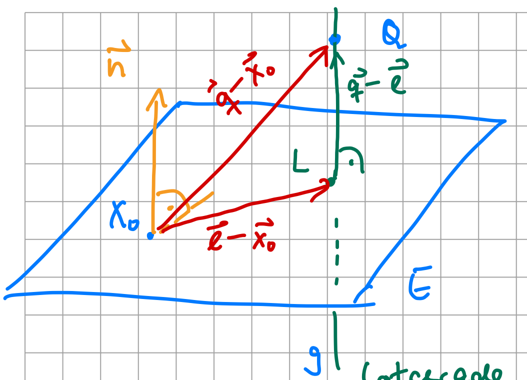
Voraussetzung:
$|\vec{n}| = 1$

$\vec{n}\circ(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$

$\vec{n}\circ\vec{x} = \underbrace{\vec{n}\circ\vec{x}_0}_{\geq 0}$

Hesse-Normalenform

$\vec{n}\circ\vec{n} = |\vec{n}|^2 = 1$



Lotgerade von Q auf E

L: Fußpunkt des Lotes

Gesucht: $d := d(Q, E)$

Lotgerade: $Q \in g$

Richtungsvektor: $\vec{n}$

$g: \vec{x} = \vec{q} + t\cdot\vec{n} \quad (t\in\mathbb{R})$

Ein Weg:

Schneide g mit E liefert L

$d = |\vec{q} - \vec{\ell}|$

Eine Formel erhält man mit der Hesse-Normalform

$$\vec{n}\circ(\vec{q} - \vec{x}_0) = \vec{n}\circ(\vec{q} - \vec{\ell} + \vec{\ell} - \vec{x}_0)$$

Bedeutet: $\vec{q}$ in die Hesseform einsetzen

$$= \vec{n}(\vec{q}-\vec{\ell}) + \underbrace{\vec{n}\circ(\vec{\ell}-\vec{x}_0)}_{=0,\ \text{da}\ \ell\in E,\ \vec{n}\perp\vec{\ell}-\vec{x}_0} = \vec{n}\circ(\vec{q}-\vec{\ell})$$

$$\vec{q}-\vec{\ell} \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{q}-\vec{\ell} = t\cdot\vec{n}$$

mit einem $t\in\mathbb{R}$

$$\vec{n}\circ(\vec{q}-\vec{\ell}) = \vec{n}\circ(t\vec{n}) = t(\vec{n}\circ\vec{n}) = t$$

$$d = |\vec{q}-\vec{\ell}| = |t\vec{n}| = |t|\cdot\underbrace{|\vec{n}|}_{1} = |t|$$

$$\Rightarrow \quad d = |\vec{n}\circ(\vec{q}-\vec{x}_0)|$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= |\vec{n}\circ\vec{q} - \vec{n}\cdot\vec{x}_0| = |a q_1 + b q_2 + c q_3 - \vec{n}\vec{x}_0|$$

Koordinatenform der Ebene ist

$$a x + b y + c z \underbrace{- \vec{n}\vec{x}_0}_{s = -\vec{n}\vec{x}_0} = 0$$

$$= |a q_1 + b q_2 + c q_3 + s|$$

$$= d$$

Aufgabe 7.24.
Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(1,-2,4)$ von der Ebene $E: -2x+2y-z+4=0$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}|^2 = 4+4+1 = 9$$

$$|\vec{n}| = 3$$

$$E: \quad -2x + 2y - z + 4 = 0$$

Alles links!

$$P = (1,-2,4)$$

$$d(P,E) = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{normieren!}} \cdot |-2\cdot 1 + 2\cdot(-2) - 4 + 4| = \frac{1}{3}\cdot \underbrace{|-6|}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 6 = \underline{\underline{2}}$$

Betrag wichtig!

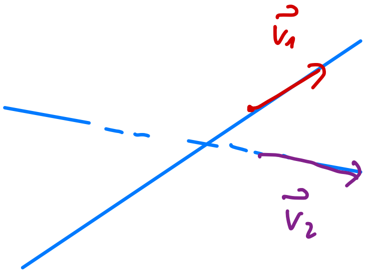
Definition 7.25 (Hesse-Normalform)**.**
Die Hesse-Normalform einer Ebene ist die eindeutig bestimmte Normalenform

$$\vec{n}\circ\vec{x} = d$$

bei der $\vec{n}$ normiert ist, d.h. $|\vec{n}| = 1$ und $d \geq 0$ gilt. (eindeutig, wenn $d > 0$)

7.4 Winkelberechnungen

Winkel zwischen zwei Geraden



Bemerkung 7.26.
Der Winkel $\phi = \angle(g_1, g_2)$ zwischen zwei Geraden

$$\begin{aligned} g_1: \quad \vec{x} &= \vec{x}_1 + t\vec{v}_1 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ g_2: \quad \vec{x} &= \vec{x}_2 + t\vec{v}_2 \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

ist der spitze Winkel zwischen deren Richtungsvektoren. Es gilt also:

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \circ |\vec{v}_2|}$$

$$\cos\phi = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$$

$$\measuredangle(g_1, g_2) = \begin{cases} \measuredangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) & \text{falls } \measuredangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \leq 90^\circ \\ \measuredangle(-\vec{v}_1, \vec{v}_2) & \text{"} \quad \text{"} \quad > 90^\circ \end{cases}$$

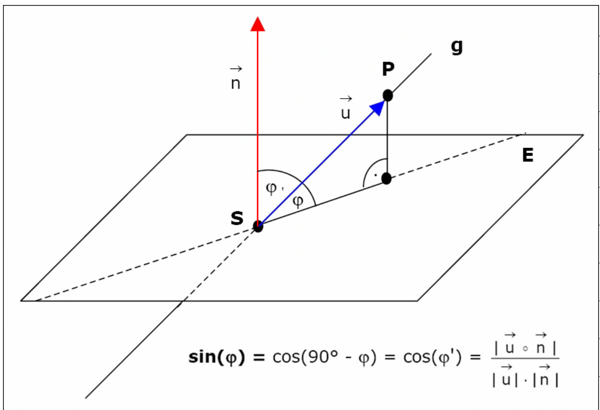
Winkel zwischen Gerade und Ebene

Bemerkung 7.27.
Der Winkel (Neigungswinkel) $\phi = \angle(g, E)$ zwischen der Geraden $g: \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v}$ und der Ebene $E: n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$ ist der Winkel zwischen der Geraden und der Orthogonalprojektion der Gerade auf die Ebene.
Um diesen Winkel zu bestimmen, berechnet man den Winkel zwischen der Geraden und einem Normalenvektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ zur Ebene. Es gilt:

$g: \vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}$

$$\sin\phi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

$\vec{u} = \vec{v}$ Richtungsvektor der Gerade

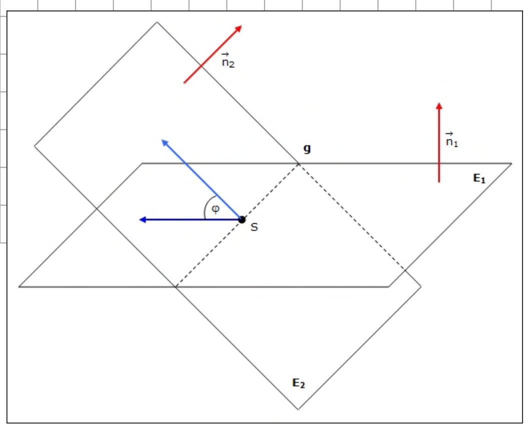


$$\cos\varphi' = \frac{|\vec{v} \circ \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} \in [0^\circ, 90^\circ]$$

$$\| \quad \sin\varphi$$

mayer-ffm.de

Winkel zwischen 2 Ebenen



Winkel zwischen zwei Ebenen

Bemerkung 7.28.
Der Winkel ϕ zwischen zwei Ebenen

$$\begin{array}{llllllll} E_1: & a_1x & + & a_2y & + & a_3z & - & d_1 & =0 \\ E_2: & b_1x & + & b_2y & + & b_3z & - & d_2 & =0 \end{array}$$

ist der spitze Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$von E_1 und E_2, also

$\vec{n}_1$ $\vec{n}_2$

$$\cos\phi = \frac{\left|\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}\right|}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

Aufgabe 7.29.
Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen $E_1 : x - 2y + 4z + 2 = 0$ und $E_2 : 2x - 3y + z - 5 = 0$.

spitz!

$$\varphi = \sphericalangle(E_1, E_2) \;\hat{=}\; \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \qquad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$|\vec{n}_1|^2 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$|\vec{n}_2|^2 = 4 + 9 + 1 = 14$$

$$\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = 12$$

$$= \frac{12}{\sqrt{21}\,\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{3 \cdot 7^2 \cdot 2}}$$

$$= \frac{12}{7 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}} \cdot \sqrt{6}}{7 \cdot \cancel{6}} = \frac{2}{7}\sqrt{6} = \cos\varphi \overset{TR}{\approx} 0{,}6998$$

$$\varphi \approx 45{,}6^\circ$$

T.R ($\cos^{-1}$)

Achtung: Bogenmaß / Gradmaß anpassen!