2 Mechanik fester Körper

2.0 Formelsammlung

Zu 2.1 Kinematik (Lehre von der Bewegung)

Geradlinige Bewegung

Gleichförmig, Beschleunigung $a = 0$

$s = s_0 + v \cdot t$ — s: Weg, s_0: Weg bei $t = 0$, t: Zeit, v: Momentangeschwindigkeit

$\bar{v} = \Delta s / \Delta t = v$ — $\bar{v}$: durchschnittliche Geschwindigkeit, Δs : Wegdifferenz, Δt : Zeitdifferenz

Gleichmäßig beschleunigt, Beschleunigung $a = \text{const}$

$v = a \cdot t$ — a: Momentanbeschleunigung, $-a$: Momentanverzögerung

$a = \Delta v / \Delta t = \bar{a}$ — Δv : Geschwindigkeitsdifferenz, Δt : Zeitdifferenz, $\bar{a}$: durchschnittliche Beschleunigung, $-\bar{a}$: durchschnittliche Verzögerung

$v = v_0 + a \cdot t$ — v_0 : Geschwindigkeit bei $t = 0$

$s = v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$

Ungleichmäßig beschleunigt, Beschleunigung $a \neq 0$ und $a \neq \text{const}$

$v = ds / dt = \dot{s}$

$a = dv / dt = \dot{v} = \ddot{s}$

Zusammengesetzte Bewegung, Geschwindigkeitsvektoren

Prinzip der ungestörten Superposition, d.h. es werden z.B. die verschiedenen geradlinigen Geschwindigkeiten eines Körpers im Raum vektoriell addiert.

Kreisbewegung

Gleichförmig, Winkelbeschleunigung $\alpha = 0$

$\omega = \dfrac{\varphi}{t} = \dfrac{2\pi}{T} = n \cdot 2\pi$ — ω: Winkelgeschwindigkeit, φ: Drehwinkel, T: Umdrehungszeit, n: Drehzahl

$v = \omega \cdot r$ — v: Umfangsgeschwindigkeit, r: Radius

$a_r = v^2 / r = \omega^2 \cdot r$ — a_r: Radialbeschleunigung

Gleichmäßig beschleunigt, Winkelbeschleunigung $\alpha = \text{const}$

$\alpha = \Delta\omega / \Delta t$ — $\Delta\omega$: Winkelschwindigkeitsdifferenz, Δt: Zeitdifferenz,

$a_t = \alpha \cdot r$ — a_t: Tangentialbeschleunigung, r: Radius

$\omega = \alpha \cdot t$

$n = \alpha \cdot t / (2\pi)$ — n: Drehzahl

$\varphi = \alpha \cdot t^2 / 2$

$a_r = \omega^2 \cdot r = \alpha^2 \cdot t^2 \cdot r$ — a_r: Radialbeschleunigung

Analoge Größen zwischen der geradlinigen und der kreisförmigen Bewegung

$s \mathrel{\hat{=}} \varphi \quad \Rightarrow \quad s = \varphi \cdot r$

$v \mathrel{\hat{=}} \omega \quad \Rightarrow \quad v = \omega \cdot r$

$a_t \mathrel{\hat{=}} \alpha \quad \Rightarrow \quad a_t = \alpha \cdot r$

Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung mit Anfangsdrehbewegung

$\omega = \omega_0 + a_t \cdot t$ — ω_0: Winkelgeschwindigkeit bei $t = 0$

$n = n_0 + \frac{1}{2\pi}\alpha \cdot t$ — n_0: Drehzahl bei $t = 0$

$\varphi = \omega_0 \cdot t + \alpha_t \cdot t^2 / 2$

$N = n_0 \cdot t + \frac{1}{4\pi}\alpha_t \cdot t^2$ — N: Anzahl der Umdrehungen

Zu 2.2 Dynamik (Lehre von den Kräften)

Masse und Kraft

Grundgleichung der Dynamik

$F = m \cdot a$ — F: Kraft, m: Masse, a: Beschleunigung

Gewichtskraft F_G

$F_G = m \cdot g$ — g: Erdbeschleunigung, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

Kräftegleichgewicht liegt vor, wenn gilt

$\sum_i F_i = 0$ — F_i: Einzelkräfte, i = 1, 2, 3, ……

Federkraft

$F = D \cdot s$ — D: Federkonstante, s: Federweg

Trägheitskraft

$F_{Tr} = -m \cdot a$ — F_{Tr}: Trägheitskraft

Kräfteansatz nach d'Alembert:

$\sum_i F_i + F_{Tr} = 0$

Zentripetalkraft (Radialkraft)

$F_{Zp} = m \cdot v^2 / 2 = m \cdot \omega^2 \cdot r$ — F_{Zp}: Zentripetalkraft, v: Umfangsgeschwindigkeit, ω: Winkelgeschwindigkeit, r: Radius

Zentrifugalkraft (Fliehkraft)

$F_{Zf} = -F_{Zp}$ — F_{Zf} : Zentrifugalkraft

Corioliskraft

$F_C = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega \cdot$ — F_C : Corioliskraft, m: Masse, v: Radialgeschwindigkeit (Komponente senkrecht zur Drehachse), ω: Winkelgeschwindigkeit

Zu 2.3 Arbeit, Energie, Leistung

Arbeit, Energie

Beschleunigungsarbeit W_B

$W_B = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ — m: Masse, v: Geschwindigkeit

Hubarbeit W_H

$W_H = m \cdot g \cdot h$ — g: Erdbeschleunigung, h: Hubhöhe

Verformungsarbeit einer Feder W_V

$W_V = \frac{1}{2} D \cdot s^2$ — D: Federkonstante, s: Verformungsweg

Reibungsarbeit W_R

$W_R = F_R \cdot s$ — F_R: Freibungskraft, s: Reibungsweg

Beschleunigungsarbeit wird in kinetische Energie W_{KIN} umgesetzt: $W_B = W_{KIN}$;
Hubarbeit, Verformungsarbeit werden in potentielle Energie (Lageenergie) W_{POT} umgesetzt: $W_H = W_{POT,H}$ und $W_V = W_{POT,V}$.

Energieerhaltung (nur mechanische Arbeiten)

$W_{POT} + W_{KIN} = W_{GES} = \text{const}$ — W_{GES}: Gesamtenergie

Die Reibungsarbeit wird in Wärmeenergie Q umgesetzt und geht dem System als mechanische Arbeit verloren: $W_R = Q$.

Leistung

$\overline{P} = \Delta W / \Delta t$ — $\overline{P}$: durchschnittliche Leistung, ΔW: Differenz der Arbeiten, Δt: Zeitdifferenz

$P = dW / dt = F \cdot v$ — P: Momentanleistung, F: konstant wirkende Kraft, v: Geschwindigkeit, $v = \text{const}$

Zu 2.4 Impuls

Impulsänderung

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ — $\vec{p}$: Impulsvektor, m: Masse, $\vec{v}$: Geschwindigkeitsvektor

$\Delta p = m \cdot \Delta v$ — Δp: Impulsänderung (Betrag), Δv: Geschwindigkeitsänderung (Betrag)

Impulserhaltung

$\sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{GES} = \text{const}$ — $\vec{p}_i$: Einzelimpulse, $\vec{p}_{GES}$: Gesamtimpuls

Kraftstoß

$F = \Delta p / \Delta t$ — F: Kraft, Δt: Zeitdifferenz

$F \cdot \Delta t = \Delta p$ — $F \cdot \Delta t$: Kraftstoß

Schwerpunkt

Massenmittelpunkt eines Systems von Massenpunkten:

$R_S = \sum_i (m_i \cdot R_i) / \sum_i m_i$ — R_S: Schwerpunktskoordinate, m_i: i-te Einzelmasse, R_i: Koordinate der i-ten Masse

---

Zu 2.5 Dynamik der Rotation

Energie, Massenträgheitsmoment

Die Rotationsenergie W_{ROT} gehört zur kinetischen Energie (Bewegungsenergie).

$W_{ROT} = \Theta \cdot \omega^2 / 2$ — W_{ROT} : Rotationsenergie, Θ : Massenträgheitsmoment, ω: Winkelgeschwindigkeit

Drehmoment

$M = \Theta \cdot \alpha$ — M: Drehmoment (Betrag), α: Winkelbeschleunigung

Drehimpulserhaltung

$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$ — $\vec{L}$: Drehimpulsvektor, $\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeitsvektor

$\sum_i \vec{L}_i = \vec{L}_{GES} = \text{const}$ — $\vec{L}_i$: Einzeldrehimpulse, $\vec{L}_{GES}$: Gesamtdrehimpuls

---

4 Gravitation

4.0 Formelsammlung

Zu 4.1 Klassische Gravitationstheorie

Gravitationsgesetz (Betrag)

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F: Gravitationskraft, γ: Gravitationskonstante, m_1, m_2: zwei Massenpunkte, die sich gegenseitig anziehen, r: Abstand der beiden Massen

Potentielle Energie

Potentielle Energie im Schwerefeld der Erde

$$W_{POT} = \gamma \cdot m_E \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r} \right)$$

W_{POT}: potentielle Energie der Masse m, m_E: Erdmasse, r_E: Erdradius, r: Abstand zwischen den Massenmittelpunkten m_E und m

Satellitenbahnen

Drittes Keplersches Gesetz

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot m_S} = \text{const}$$

T: Umlaufzeit der Planeten, a: große Halbachse der Umlaufellipsen, m_S: Masse der Sonne

Drittes Keplersche Gesetz angewandt auf Erdsatellitenbahnen

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{\gamma \cdot m_E} = \text{const}$$

T: Umlaufzeit der Erdsatelliten, r: Abstand Satellit zum Erdmittelpunkt, m_E: Erdmasse

.

Zu 6.1 Schwingungen

Freie ungedämpfte Schwingungen

Frequenz f:

$f = 1 / T$ f: Frequenz, T: Schwingungsdauer

Weg-Zeit-Gesetz einer harmonischen Schwingung:

$u = \hat{u}\sin(2\pi ft + \varphi_0)$ oder $u = \hat{u}\cos(2\pi ft + \varphi_0)$ u: Auslenkung, $\hat{u}$: Amplitude, f: Frequenz, t: Zeit, φ_0: Anfangsphase (oft $\varphi_0 = 0$)

Phase φ:

$\varphi = 2\pi ft + \varphi_0$ φ: Phase, f: Frequenz, t: Zeit, φ_0: Anfangsphase (oft $\varphi_0 = 0$)

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz einer harmonischen Schwingung:

$v = du / dt$ v: Geschwindigkeit, u: Auslenkung, t: Zeit

$v = 2\pi f\hat{u}\cos(2\pi ft)$ $\hat{u}$: Amplitude, f: Frequenz

Beschleunigungs-Zeit-Gesetz einer harmonischen Schwingung:

$a = dv / dt$ a: Beschleunigung, v: Geschwindigkeit, t: Zeit

$a = -4\pi^2 f^2 \hat{u}\sin(2\pi ft)$ $\hat{u}$: Amplitude, f: Frequenz

Federschwingung:

$F = mg = -cy$ F: Kraft, m: Masse, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, c: Federkonstante

$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{c / m}$ $T = 2\pi\sqrt{m / c}$ f: Frequenz, T: Schwingungsdauer

Schwingung eines idealen (mathematischen) Pendels:

$T = 2\pi\sqrt{l / g}$ T: Schwingungsdauer, l: Pendellänge, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{g / l}$ f: Frequenz

Pendelschwingung eines physikalischen Pendels:

$T = 2\pi\sqrt{J / mgl}$ T: Schwingungsdauer, m: Masse, l: Abstand Schwerpunkt-Drehachse, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, J: Massenträgheitsmoment,

$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{mgl / J}$ f: Frequenz

Drehschwingung:

$T = 2\pi\sqrt{J / D}$ T: Schwingungsdauer, J: Massenträgheitsmoment,

$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{D / J}$ D: Richtmoment, f: Frequenz

Massenträgheitsmoment J:

$J = mr^2$ *Massenpunkt*: m: Masse, r: Abstand von der Drehachse

$J = ml^2 / 12$ *dünner Stab, Drehachse d. Schwerpkt.*: m: Masse, l: Stablänge

$J = mr^2 / 2$ *Vollzylinder, Drehachse = Symmetrieachse*: m: Masse, r: Radius

$J = J_s + mr_s^2$ *S. v. Steiner*: J_s: Trägheitsm. f. Schwerp., r_s: Drehach.-Schwerpkt.

.

Freie gedämpfte Schwingungen

Abklingskonstante δ und logarithmisches Dekrement Λ:

$y_{n+1} / y_n = e^{-\delta T}$ $\quad \delta = \beta / (2m)$ $\quad$ y_n, y_{n+1}: n-te und n+1-te Auslenkung, T: Periodendauer, β: Reibungskoeffizient, m: Masse

$\Lambda = \delta T$

Frequenz f der freien gedämpften Schwingung:

$f = \sqrt{f_0{}^2 - \delta^2 / 4\pi^2}$ $\quad$ f_0: Frequenz der ungedämpften Schwingung

Weg-Zeit-Gesetz der freien gedämpften Schwingung:

$y = \hat{y} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$ $\quad \omega = 2\pi f$ $\quad$ y: Auslenkung, $\hat{y}$: Amplitude, φ_0: Anfangsphase t: Zeit, ω: Kreisfrequenz, f: Frequenz

Erzwungene Schwingungen

Resonanzfrequenz:

$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ $\quad$ ω_{res}: Resonanzkreisfrequenz, δ: Abklingkonstante, ω_0: Kreisfrequenz der freien Schwingung

Verhältnis der Amplituden:

$\hat{y} / \hat{x} = \omega_0^2 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (2\delta^2)^2}$ $\quad$ $\hat{x}$, $\hat{y}$: Amplitude der Anregung und Schwingung

Überlagerung von Schwingungen

Gleiche Frequenz:

$y_1 = \hat{y}_1(\sin \omega t + \varphi_1)$ und $y_2 = \hat{y}_2(\sin \omega t + \varphi_2)$. Die Überlagerung ergibt $\hat{y} = y_1 + y_2$:

$\hat{y} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + 2\hat{y}_1\hat{y}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \hat{y}_2{}^2}$

Schwebungsfrequenz:

$f_s = (f_2 - f_1) / 2$

Logarithmisches Dekrement

$\frac{\hat{Y}_i}{\hat{Y}_{i+1}} = q$ $\quad$ $\hat{Y}_i$, $\hat{Y}_{i+1}$: aufeinanderfolgende Amplituden
q: Amplitudenverhältnis

$e^{\delta T_d} = \frac{\hat{Y}_i}{\hat{Y}_{i+1}} = q$ $\quad$ δ: Abklingkoeffizient
T_d: Schwingungsdauer, gedämpft

$e^{n\delta T_d} = \frac{\hat{Y}_i}{\hat{Y}_{i+n}} = q^n$ $\quad$ n: Zahl der erfolgten Schwingungen

$\Lambda = \delta T_d = \ln\left(\frac{\hat{Y}_i}{\hat{Y}_{i+1}}\right) = \ln(q)$ $\quad$ Λ: logarithmisches Dekrement

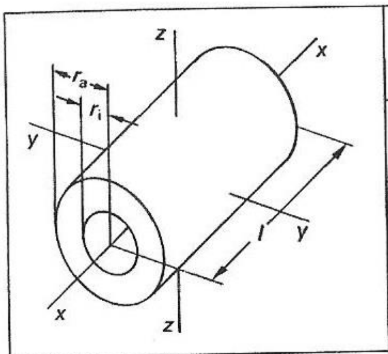
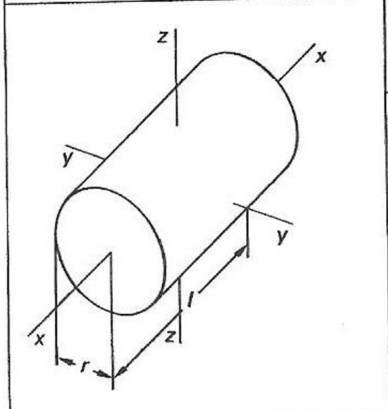
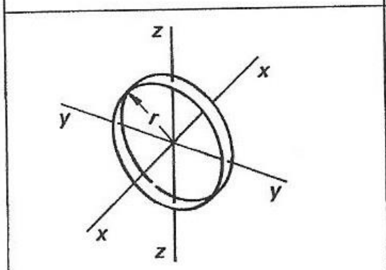
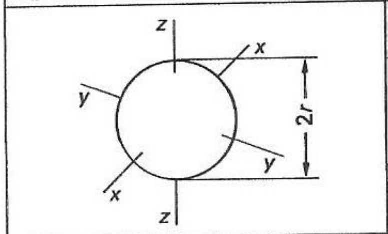
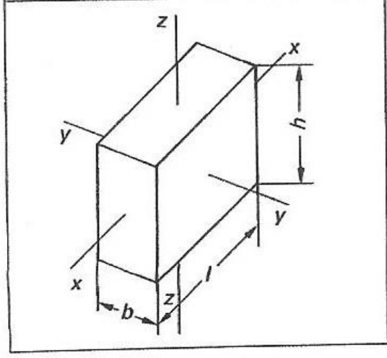
	Hohlzylinder	$J_x = \frac{1}{2} m (r_a^2 + r_i^2)$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m (r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} l^2)$
	dünnwandiger Hohlzylinder	$J_x = m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m (2 r^2 + \frac{1}{3} l^2)$
	Vollzylinder	$J_x = \frac{1}{2} m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$
	dünne Scheibe ($l \ll r$)	$J_x = \frac{1}{2} m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{4} m r^2$
	dünner Stab ($l \gg r$) unabhängig von der Form des Querschnitts	$J_x = \frac{1}{2} m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{12} m l^2$
	dünner Ring	$J_x = m r^2$ $J_y = J_z = \frac{1}{2} m r^2$
	Kugel, massiv	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m r^2$
	dünne Kugelschale	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} m r^2$
	Quader	$J_x = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$ $J_y = \frac{1}{12} m (l^2 + h^2)$ $J_z = \frac{1}{12} m (l^2 + b^2)$

Bild 2-60. Massenträgheitsmomente einiger Körper.

Bezeichnung Massenträgheitsmoment $J = \Theta$ *(beide Formelzeichen werden äquivalent verwendet)*