

### 3.3 Beispiele für schwingende Systeme

#### 3.3.1 Torsions- und Drehpendel

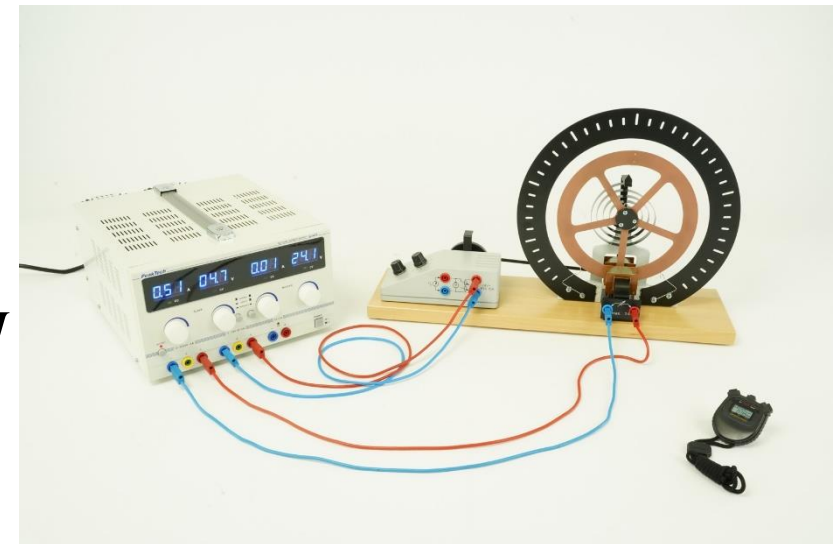
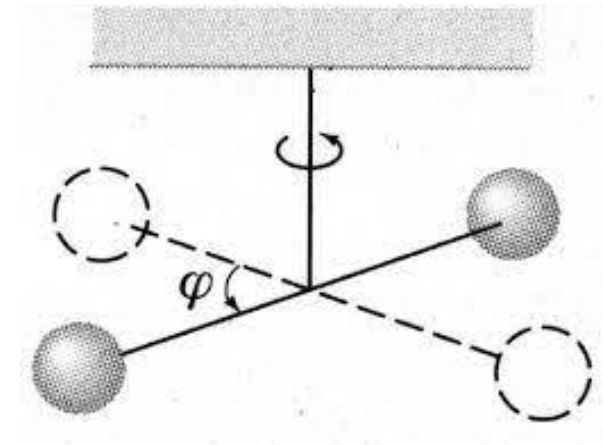
Pendelkörper: Starrer Körper, der Beschleunigte Drehbewegung ausführt.

Lösung: a) DGL aufstellen und lösen

b) Lösung von Federpendel  
umschreiben auf Rotation.

Masse  $m$  → Massenträgheitsmoment  $J$

Richtgröße  $k$  → Winkelrichtgröße  $D^*$



Bildquelle: <http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~jwagner/WS0910/Uebungen/Uebungsblaetter/Uebung14.pdf>

[https://www.phywe.de/versuche-sets/hochschulversuche/erzwungene-schwingungen-pohlsches-pendel\\_10989\\_12022/](https://www.phywe.de/versuche-sets/hochschulversuche/erzwungene-schwingungen-pohlsches-pendel_10989_12022/)

Winkelrichtgröße?

Richtgröße  $k = (\text{Kraft } F \text{ auf Masse } m) / \text{Auslenkung } s$

Winkelrichtgröße  $D^* = (\text{Drehmoment } M \text{ auf MTM } J) / \text{Drehwinkel } \varphi$

Damit folgt dann:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \rightarrow \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D^*}}$$

**Anwendung:** Messung von unbekannten Massenträgheitsmomenten  $J$

durch Messung der Schwingungsdauer.

(s. Versuch 3 im Physik-Labor zu Physik 2)

Wichtig: Rückstellkraft bzw. Rückstellmoment muss linear sein!

### 3.3.2 Fadenpendel, „mathematisches Pendel“

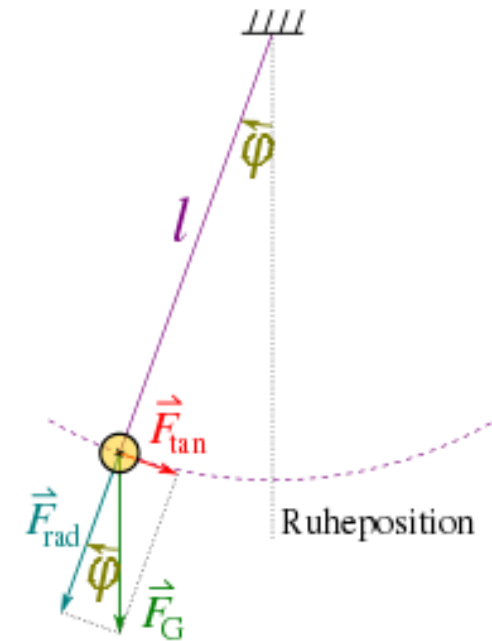
Näherungsannahmen:

- 1.) Fadenmasse  $m_F = 0$  (oder  $m_F \ll m$ )
- 2.) Pendelkörper = Massenpunkt

In  $m$  greift dann  $F_G = m \cdot g$  an.

Komponente von  $F_G$  in Wegrichtung entspricht

der Rückstellkraft:  $F_{tan} = mg \sin \varphi = mg \sin \frac{s}{l}$



Vorsicht: Kein lineares Kraftgesetz, also keine harmonische Schwingung!

Aber für  $s = \hat{s} \ll l$  gilt näherungsweise:  $\sin \varphi = \sin \frac{s}{l} \sim \frac{s}{l}$

Bildquelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches\\_Pendel](https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Pendel)

Also folgt für die Rückstellkraft:  $F_{tan} = \frac{m \cdot g}{l} \cdot s = k \cdot s$  mit  $k = \frac{m \cdot g}{l} = \text{konst.}$

Damit erhält man für **kleine** Amplituden näherungsweise eine harmonische

Schwingung mit: 
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ist unabhängig von

a) der Pendelmasse  $m$ !

b) der Amplitude  $\hat{s}$ , solange die Einschränkung  $\hat{s} \ll l$  erfüllt ist

Bei großer Amplitude verändert sich die Schwingungsdauer, weil dann

die Abhängigkeit gilt:  $F_{tan} \sim \sin \varphi$

### 3.3.3 Physikalisches (physisches) Pendel

Pendelkörper: Außerhalb des Schwerpunkts aufgehängter starrer Körper.

Im Schwerpunkt S greift  $F_G$  an.

Rückstellkraft (analog zu 3.3.2.):

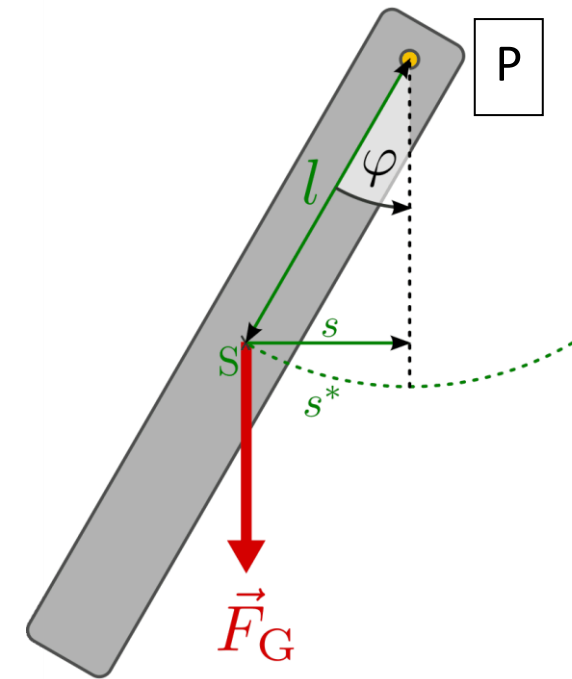
$$F_{tan} = m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

Dies ergibt Rückstellmoment  $M$ :

$$M = l \cdot F_{tan} = l \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

Für kleine Amplituden, also wenn  $s^* \ll l$ , gilt dann wieder:  $\sin \varphi \sim \varphi$

$$\text{Daher näherungsweise: } M = m \cdot g \cdot l \cdot \varphi \quad \rightarrow \quad D^* = \frac{M}{\varphi} = m \cdot g \cdot l$$



Bildquelle: <https://www.grund-wissen.de/physik/mechanik/schwingungen-und-wellen/harmonische-schwingungen.html>

Mit  $J_P$  = Massenträgheitsmoment (MTM) bezogen auf Achse in P erhält man für die Schwingungsdauer bei kleiner Amplitude:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D^*}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_P}{mgl}}$$

$J_P$  mit Hilfe des Steinerschen Satzes aus  $J_S$ :  $J_P = J_S + ml^2$

Definition: „**Reduzierte Pendellänge**  $l'$  eines phys. Pendels“ ist die Pendellänge eines mathematischen Pendels mit der identischen Schwingungsdauer.

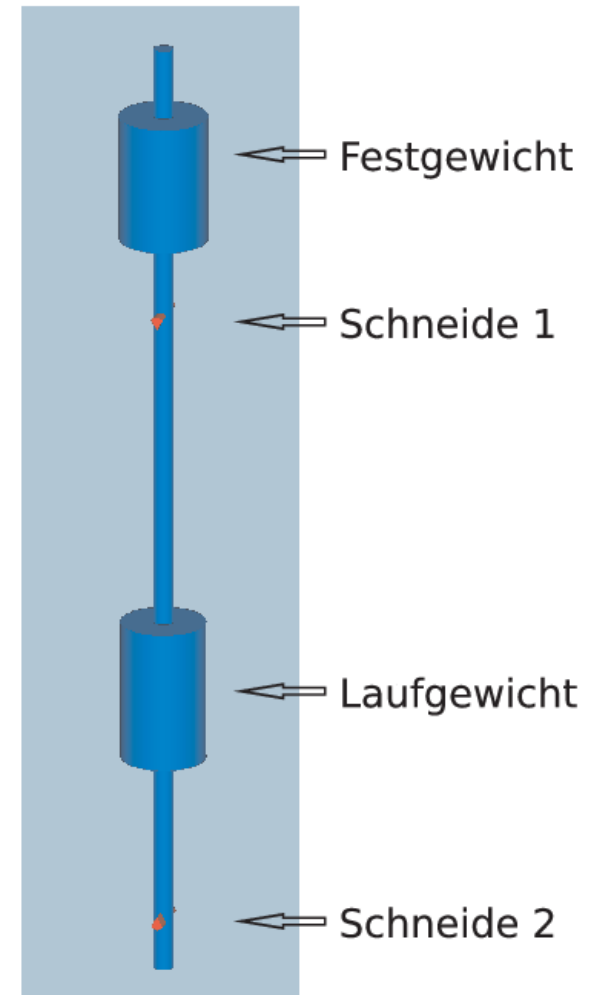
$$T_{math} = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} = T_{phys} = 2\pi \sqrt{\frac{J_P}{mgl}} \rightarrow l' = \frac{J_P}{ml}$$

☞ Häufig steht statt  $l$  die Variable  $a$  = Abstand Aufhängepunkt-Schwerpunkt

Definition: „**Schwingungsmittelpunkt A**“ =  
der Punkt, der beim phys. Pendel in der  
Ruhelage um die Länge  $l'$  unterhalb des  
Aufhängepunktes liegt.

Eigenschaften von A:

- 1.) Anstoßen oder Bremsen eines Pendels  
in A ergibt geringste Lagerbelastung im  
Aufhängepunkt P  
(keine seitlichen Lagerkräfte)
- 2.) Phys. Pendel schwingt bei Aufhängung  
in A mit gleichem T wie bei Aufhängung  
in P. („Reversionspendel“)



Bildquelle: <http://people.physik.hu-berlin.de/~schaefer/Grundpraktikum/M9-Reversionspendel/index.html>

**Beispiel:** Langer dünner Stab mit Länge  $L$   $J_S = \frac{1}{12} mL^2$

Schwingung um P (Stabende)  $J_P = J_S + \frac{1}{4} mL^2 = \frac{1}{3} mL^2$

Schwingungsdauer um P:  $T_P = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{3mg\frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g}}$

Schwingung um A (Aufhängepunkt um  $l'$  unterhalb von P):

Berechnung von  $l'$  (red. Pendellänge):  $l' = \frac{J_P}{m\frac{L}{2}} = \frac{1}{3} mL^2 \cdot \frac{2}{mL} = \frac{2}{3} L$

Abstand von S zu A (Schwerpunktsabstand):  $l' - \frac{1}{2} L = \frac{2}{3} L - \frac{1}{2} L = \frac{L}{6}$

Schwingung um A (MTM):  $J_A = J_S + m \left[ \frac{L}{6} \right]^2 = \left[ \frac{1}{12} + \frac{1}{36} \right] mL^2 = \frac{1}{9} mL^2$

Schwingungsdauer um A:  $T_A = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{9 \cdot mg\frac{L}{6}}} = 2\pi \sqrt{\frac{6}{9} \frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g}} = T_P$

### 3.3.4. Flüssigkeitspendel (U-Rohr)

Rohrquerschnitt  $A$ , Dichte  $\rho$ , Säulen-Länge  $l$

Gleichgewicht: Beide Enden gleich hoch.

„Verschiebung“ um  $y$ : Überstand  $\Delta h = 2y$

Resultierende rücktreibende Gewichtskraft:

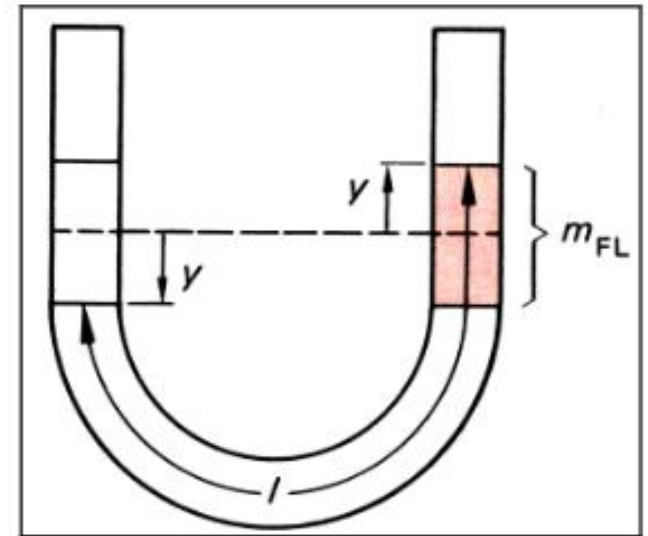
$$\Delta m \cdot g = m_{FL} \cdot g = 2yA\rho \cdot g$$

Gesamte schwingende Masse:  $m = l \cdot A \cdot \rho$

Bewegungsgleichung:  $F = m \cdot \ddot{y} \rightarrow 2 \cdot y \cdot A \cdot \rho \cdot g = l \cdot A \cdot \rho \cdot \ddot{y}$

Umgestellt ergibt sich:  $\ddot{y} = 2 \cdot y \cdot g \cdot l^{-1} = 2 \cdot \frac{g}{l} \cdot y = \omega_0^2 \cdot y$

Kreisfrequenz:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}}$  bzw. Schwingungsdauer:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}}$



Bildquelle: [https://qnap.e3.physik.tu-dortmund.de/suter/Vorlesung/Physik\\_B3\\_SS03/4.3\\_Systeme.pdf](https://qnap.e3.physik.tu-dortmund.de/suter/Vorlesung/Physik_B3_SS03/4.3_Systeme.pdf)