2. Klassische Mechanik

Klassische Mechanik: Mechanische Gesetze im Bereich „niedriger“ Geschwindigkeiten ($v << c$) und makroskopischer Abmessungen (größer als atomare Dimensionen)

Keine relativistischen oder quantenmechanischen Effekte

2.1 Kinematik des Massenpunktes

Kinematik: Beschreibung einer Bewegung in Raum und Zeit ohne Berücksichtigung der Bewegungs-ursachen oder spezieller Eigenschaften des bewegten Körpers (z.B. besondere Form)

Massenpunkt: Idealisierte Beschreibung eines phys. Körpers, dessen Ausdehnung vernachlässigt wird. Beschreibung als punktförmige Masse, die im Schwerpunkt des Körpers konzentriert ist.

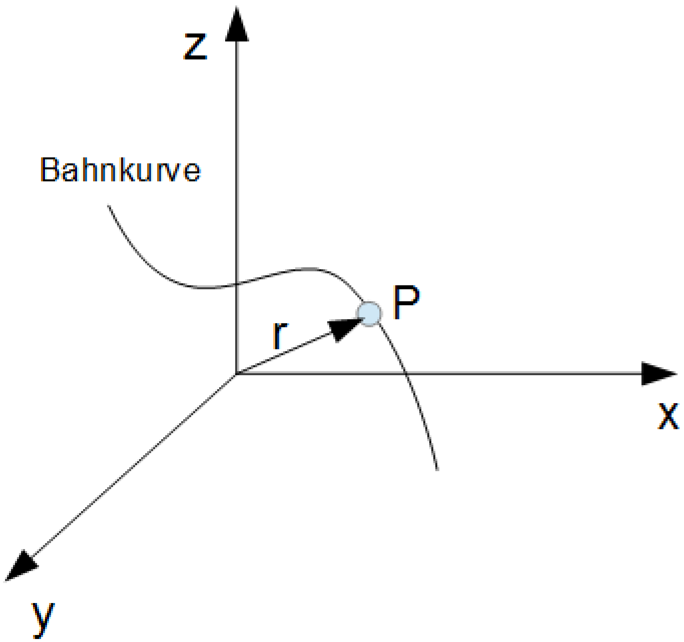
Bahnkurve: Beschreibung der Position eines Punktes P im Raum durch die Angabe seiner 3 Koordinaten als Funktion der Zeit ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) oder als Radiusvektor ($\mathbf{r}(t)$), der von einem Ursprung aus auf P zeigt.

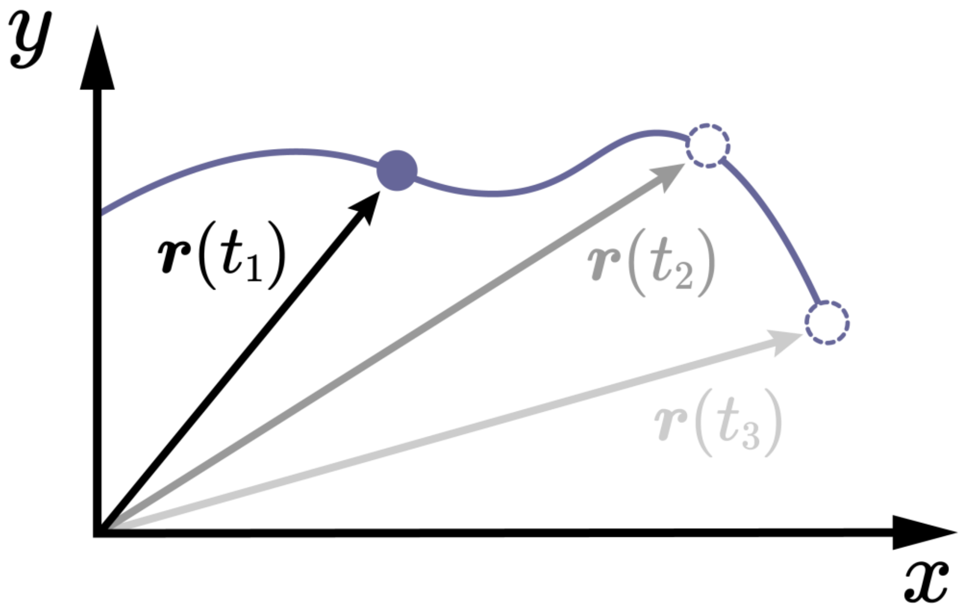
Wird als Ursprung der Koordinaten-Ursprung gewählt, hat $\mathbf{r}(t)$ die Komponenten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

Hinweis: Für spezielle Probleme statt kartesischer Koordinaten auch andere Koordinatensysteme üblich
z.B. Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten (dann Koordinaten-Transformation notwendig)

Beispiel: Fallender Ball; zurückgelegte Strecke pro Zeit. Zug mit $v = konst.$ auf Schiene.

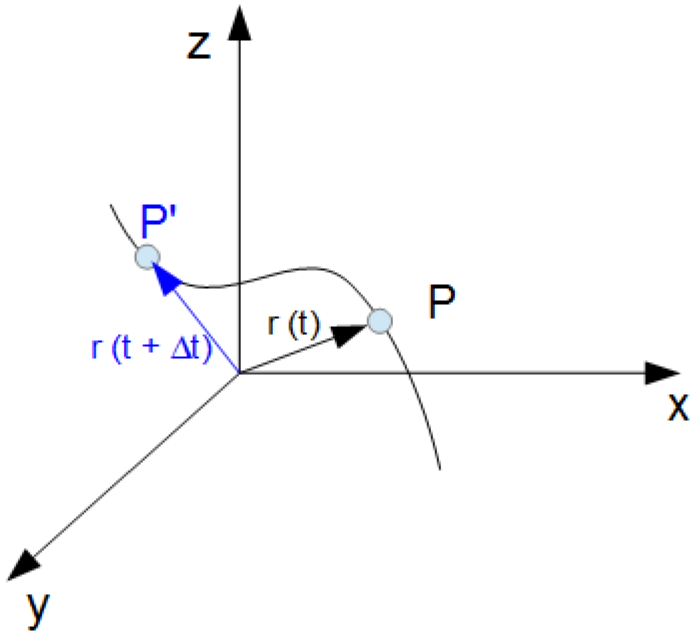
Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$

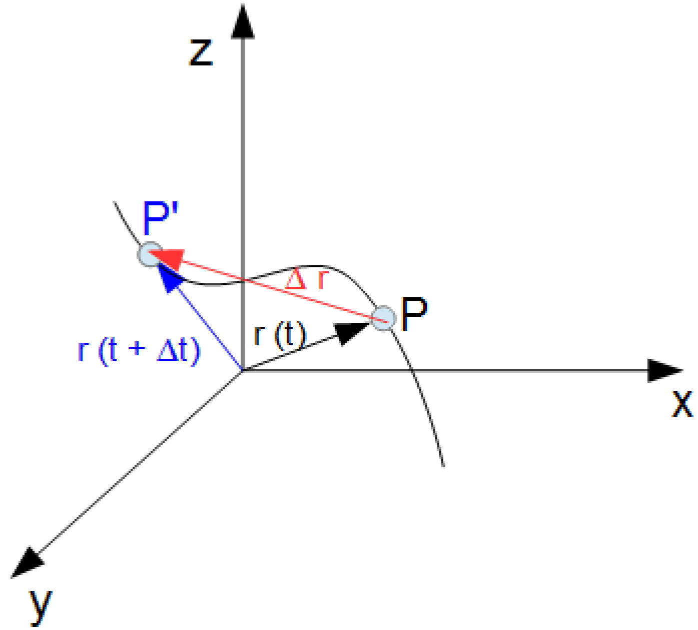




Bildquelle: https://www.ingenieurkurse.de/technische-mechanik-dynamik/kinematik-eines-massenpunktes/allgemeine-bewegung-eines-massenpunktes/lage-des-massenpunktes.html
https://de.universaldenker.org/illustrationen/1008

Bewegung entlang der Bahnkurve: Zeitliche Änderung der Lage





Bewegung: Ortsvektor wandert im Lauf der Zeit Δt um die Wegstrecke Δs bzw. um $\Delta \boldsymbol{r}$ weiter von P nach P‘

Der Quotient $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \bar{\vec{v}}$ heißt „mittlere Geschwindigkeit“

Für $\Delta t \rightarrow 0$ (infinitesimales Zeitintervall dt) wird dann der Weg auf der Bahnkurve zu $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{dr}$

Bildquelle: https://www.ingenieurkurse.de/physik/kinematik-beschreibung-von-bewegungen/allgemeine-bewegung-eines-massenpunktes.html

Daraus erhält man:

Momentangeschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \left(\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \left(\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right) = \dot{\vec{r}} = \frac{\overrightarrow{ds}}{dt} = \dot{\vec{s}}$ Tangente an die Bahnkurve in P

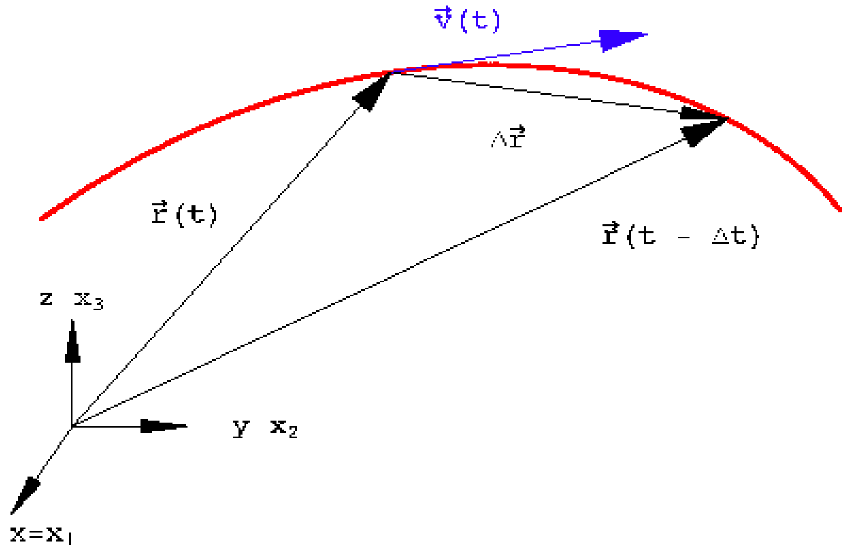
$\vec{v}(t)$ hat die Komponenten: $v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\,;\; v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y}\,;\; v_z(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

$\vec{v}(t)$ hat den Betrag: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Die Momentangeschwindigkeit ist die **zeitliche Änderungsrate** der Position (Ort im Raum)

Die Dimension (die Einheit)

der Geschwindigkeit ist: $[v] = \frac{\mathrm{m}}{s}$



Bildquelle: https://itp.tugraz.at/LV/schnizer/Analytische_Mechanik/node3.html

Auf ähnliche Art kann man die Beschleunigung ermitteln:

Der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$ heißt „mittlere Beschleunigung“

Auch hier verkleinert man das Δt , also $\Delta t \rightarrow 0$ (infinitesimales Zeitintervall dt) und erhält dann:

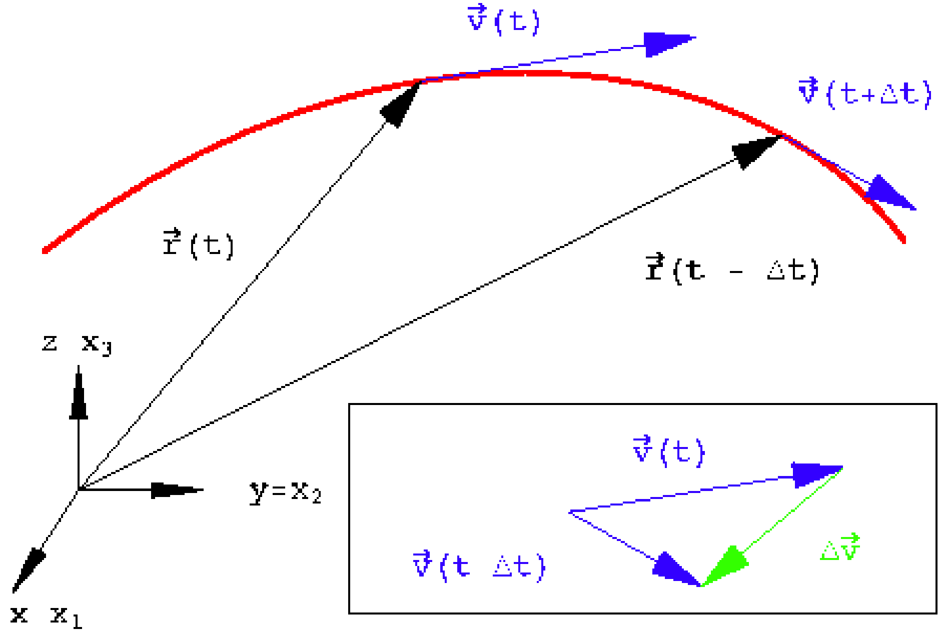
Momentanbeschleunigung: $\vec{a}(t) = \left(\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \rightarrow 0} = \left(\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{ds}}{dt}\right) = \frac{\overrightarrow{d^2 s}}{dt^2} = \ddot{\vec{s}}$

Momentanbeschleunigung ist die zeitliche Änderungsrate der Geschwindigkeit.

Die Einheit der

Beschleunigung ist: $[a] = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$

Hierbei kann sich sowohl der Betrag von v, als auch die Richtung von v ändern!



Bildquelle: https://itp.tugraz.at/LV/schnizer/Analytische_Mechanik/node3.html

Gleichförmige geradlinige Bewegung

Gleichförmig: Bewegung mit
konstanter Geschwindigkeit
(Extremfall v = konst. = 0)

Hierbei ist:

- Zurückgelegter Weg $s = v_0 \cdot t$
- Geschwindigkeit v = konstant = v_0
- Beschleunigung $a = 0$

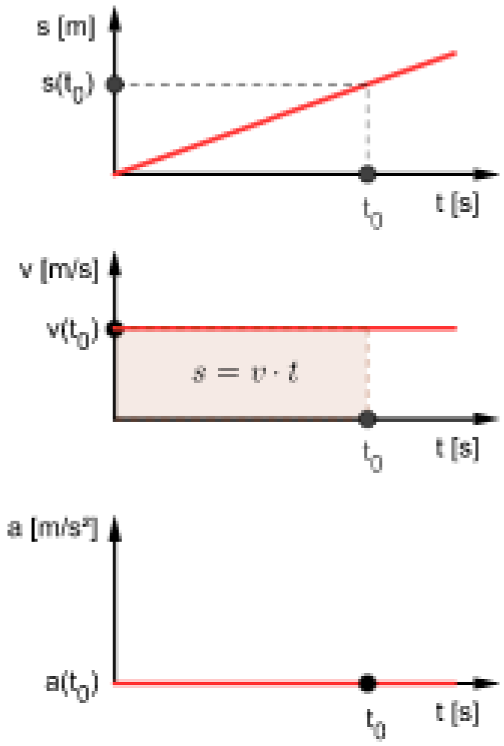
Berechnung aus der Messung von $s(t)$:

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = v_0 \qquad \frac{dv}{dt} = a(t) = 0$$

Berechnung aus der Messung von $a(t)$:

$$v(t) = \int a(t)dt = 0 \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \int v(t)dt = v_0 t + s_0$$



Bildquelle: https://physikbuch.schule/uniform-motion.html

Gleichmäßig beschleunigte (geradlinige) Bewegung

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:
Geschwindigkeit wächst konstant an
oder nimmt konstant ab.

Hierbei ist:

- Zurückgelegter Weg $s = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2$
- Geschwindigkeit $v = a_0 \cdot t$
- Beschleunigung $a = a_0$

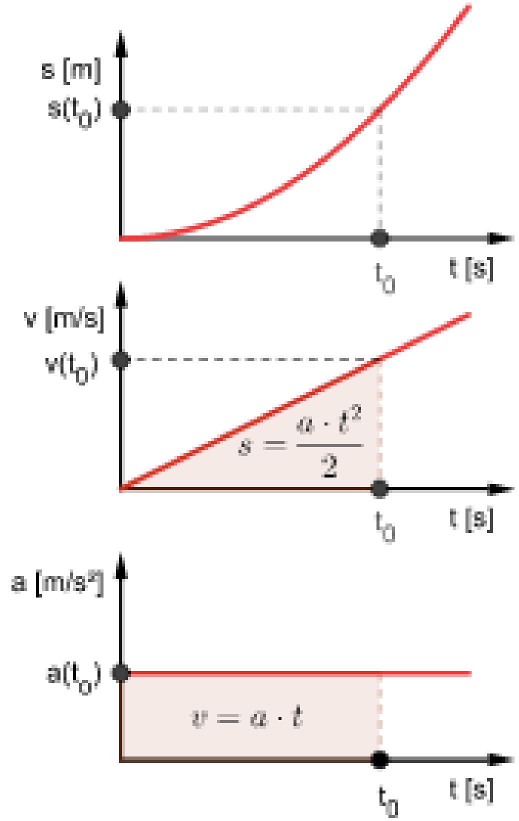
Berechnung aus der Messung von $s(t)$:

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = a_0 \cdot t \qquad \frac{dv}{dt} = a_0$$

Berechnung aus der Messung von $a(t)$:

$$v(t) = \int a(t)dt = a_0 \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \int v(t)dt = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + v_0 t + s_0$$



Bildquelle: https://physikbuch.schule/motion-with-contstant-acceleration.html

Beispiel: **Senkrechter Wurf nach oben**

Ein Stein wird senkrecht nach oben geworfen mit v_0 = 20 m/s. Gesucht sind der höchste Punkt der Bahn, Steigzeit, Höhe und Geschwindigkeit nach der doppelten Steigzeit und die Graphen für $y(t)$, $v(t)$ und $a(t)$.

Wir verwenden die Gleichungen (Koordinate y nach oben positiv, Start bei y=0):

$$a = a_0 = \text{konst.} \qquad v = a_0 \cdot t + v_0 \qquad s(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + v_0 t + s_0$$

Mit $a_0 = -g = -10\ m/s^2$; v_0 = 20 m/s und s_0 = 0 m

Erhält man:

$$a = -g \qquad v(t) = -g \cdot t + v_0 \qquad y(t) = \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2 + v_0 t + 0$$

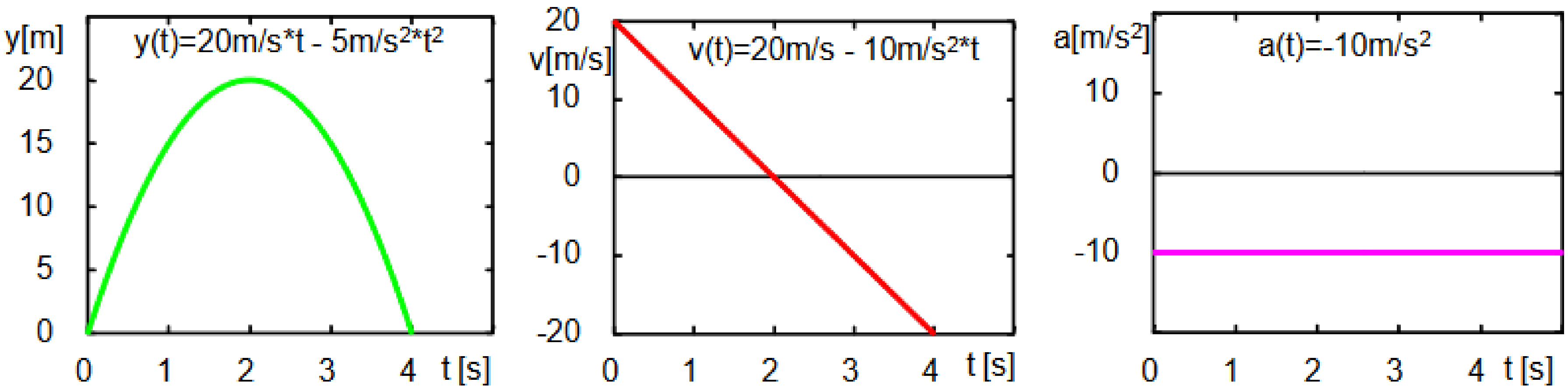
Am höchsten Punkt ist $v(t_S) = 0$; also gilt: $v(t_S) = 0 = -g \cdot t_S + v_0$

Daraus folgt: $t_S = \frac{v_0}{g} = \frac{20}{10}\ s = 2\ s$

und $y(t_s) = \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot {t_s}^2 + v_0 t_s + 0 = \left(-\frac{1}{2} 10 \cdot 4\right) + 20 \cdot 2 = 20\ m$

Da die Flugbahn symmetrisch ist, erhält man für den Zeitpunkt $t = 2t_S$ die Höhe $y(2t_S) = 0$ m und v = -20 m/s

Beispiel: **Senkrechter Wurf nach oben**

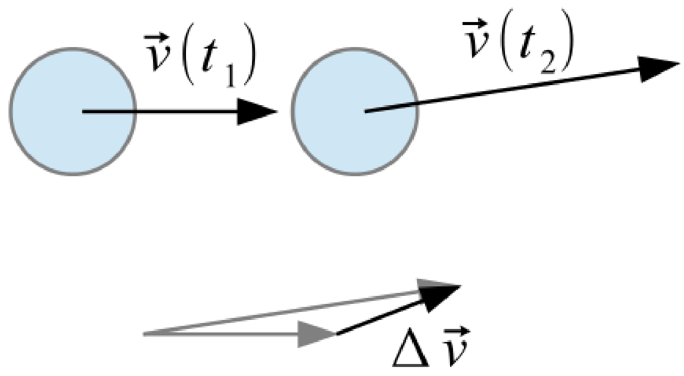


Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung- Zeit Diagramm des lotrechten Wurfes

Bildquelle: http://dodo.fb06.fh-muenchen.de/kersch/vorkurs/6-Kinematik.pdf

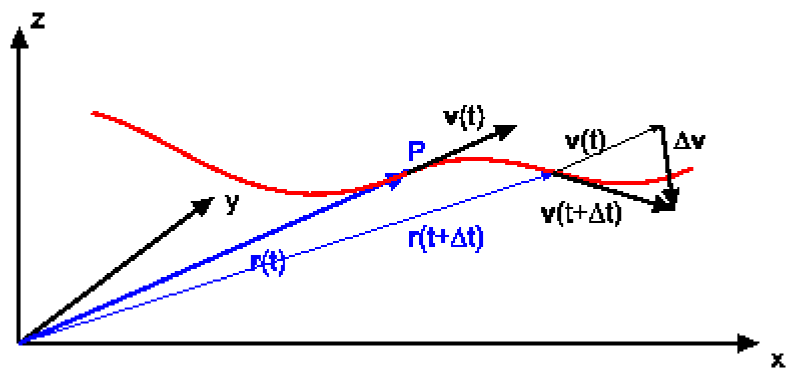
Bewegung auf gekrümmter Bahn, Beschleunigung

Krummlinige Bahn:



- Änderung der Geschwindigkeit längs der Bahn
- Richtungsänderung des Geschwindigkeitsvektors

Bewegungen auf gekrümmten Bahnen sind **immer** beschleunigte Bewegungen, selbst dann, wenn die Geschwindigkeit längs der Bahn konstant ist!



Beschleunigungs-Komponenten:

Tangential: $a_t = \frac{d|v|}{dt}$

Normal / Radial: $a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{|v|^2}{\rho}$

Krümmungsradius der Bahn: ρ („rho“)

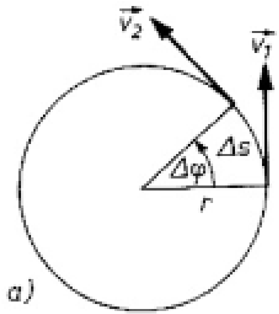
Bildquelle: https://www.wikiwand.com/de/Beschleunigung

http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/krm-2007-2008/node16.html

Spezialfall Kreisbewegung

Gleichförmige Kreisbewegung:

Ein Teilchen bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn



$$\Delta s = r\ \Delta\varphi$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \textbf{(Winkelgeschwindigkeit).}$$

Einheit: $[\omega] = 1\ \text{rad/s}$.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} r = \omega r \qquad \textbf{(Bahngeschwindigkeit).}$$

Aber Richtung der Geschwindigkeit ändert sich!

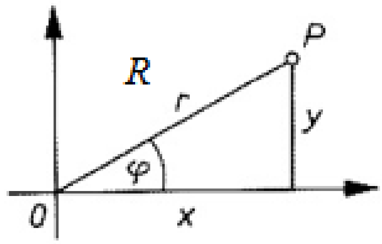
→

Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung!

Mathematische Beschreibung der Kreisbewegung

Polarkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \end{pmatrix}$$



$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = R^2 ,$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos\omega t \end{pmatrix} \qquad \vec{v} \perp \vec{r}$$

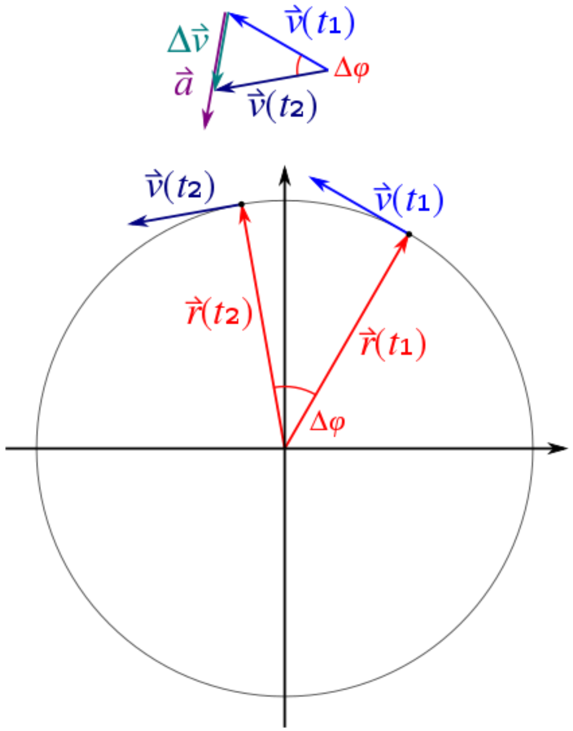
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos\omega t \\ -R\omega^2\sin\omega t \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}$$

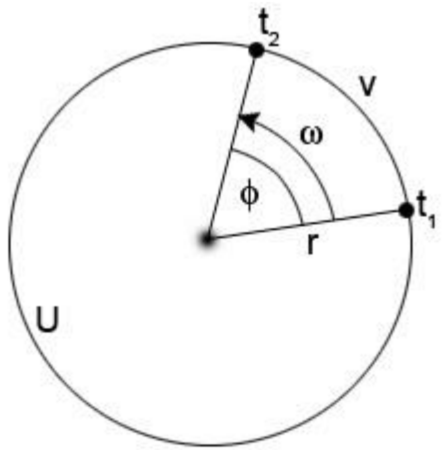
Zentripetal-Beschleunigung

Quelle: http://web.physik.uni-rostock.de/halb/vorlesung/mb_physik_11_1.pdf

Wechselt man bei der Kreisbewegung von der Beschreibung
im karthesischen System auf eine Beschreibung mit
„Winkelgrößen“,
dann gelten die Bewegungsgleichungen weiterhin, wenn man

- Weg s durch Winkel φ
- Geschwindigkeit v durch Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$
- Beschleunigung a durch Winkelbeschleunigung $\alpha = \ddot{\varphi}$ ersetzt.





Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Kreisbewegung_und_beschleunigungsvektor.svg

Darstellung einer Kreisbewegung: Axiale Vektoren

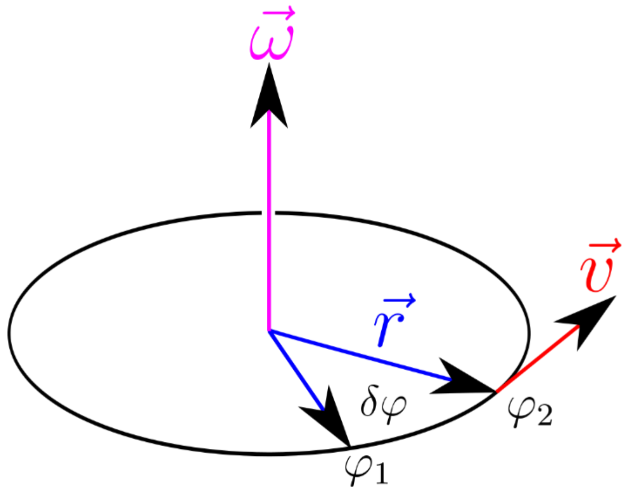
Kreisbewegung: Radius-Vektor steht senkrecht zu Geschwindigkeitsvektor

Zeitliche Änderung des Winkels: „Winkelgeschwindigkeit ω“

$$v = \frac{dr}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega$$

Darstellung als Vektor parallel zur Drehachse

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



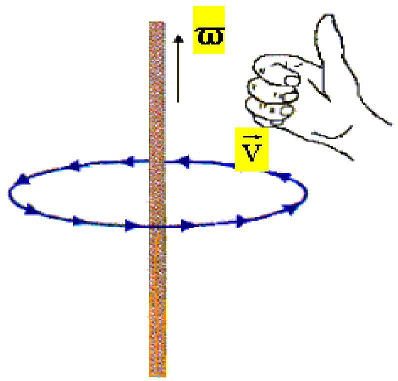
Statt der Winkelgeschwindigkeit gibt man auch oft die Frequenz f (Drehzahl) an.

Zusammenhang mit Umlaufzeit T: $T = \frac{1}{f}$

Zusammenhang mit ω: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

Daher Bezeichnung: „Kreisfrequenz“

Richtungfestlegung: „Rechts-Schraube“

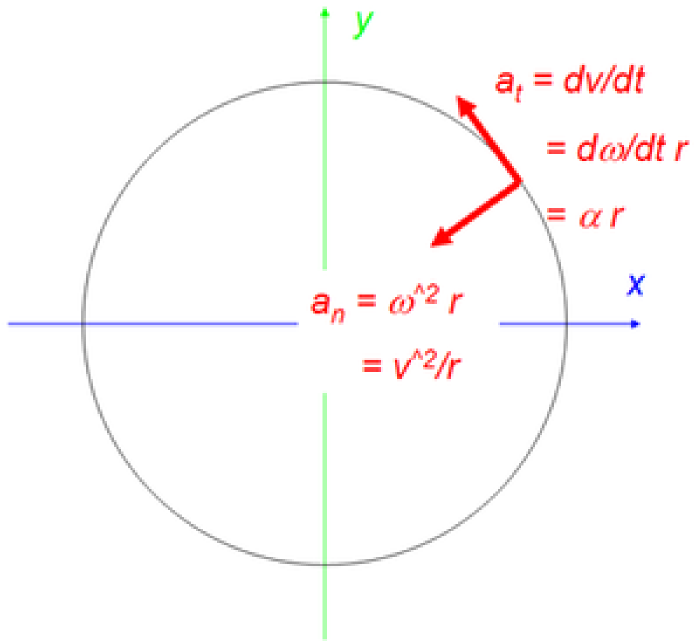


Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Winkelgeschwindigkeit_vektorisiert.svg
http://people.physik.hu-berlin.de/~mitdank/dist/scriptenm/kreisbewegung.htm

Ableitung ergibt Beschleunigung: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$ (1)

„Winkelbeschleunigung“ $\vec{\alpha}_\varphi = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$

Einheit: $[\vec{\alpha}_\varphi] = \frac{1}{s^2}$



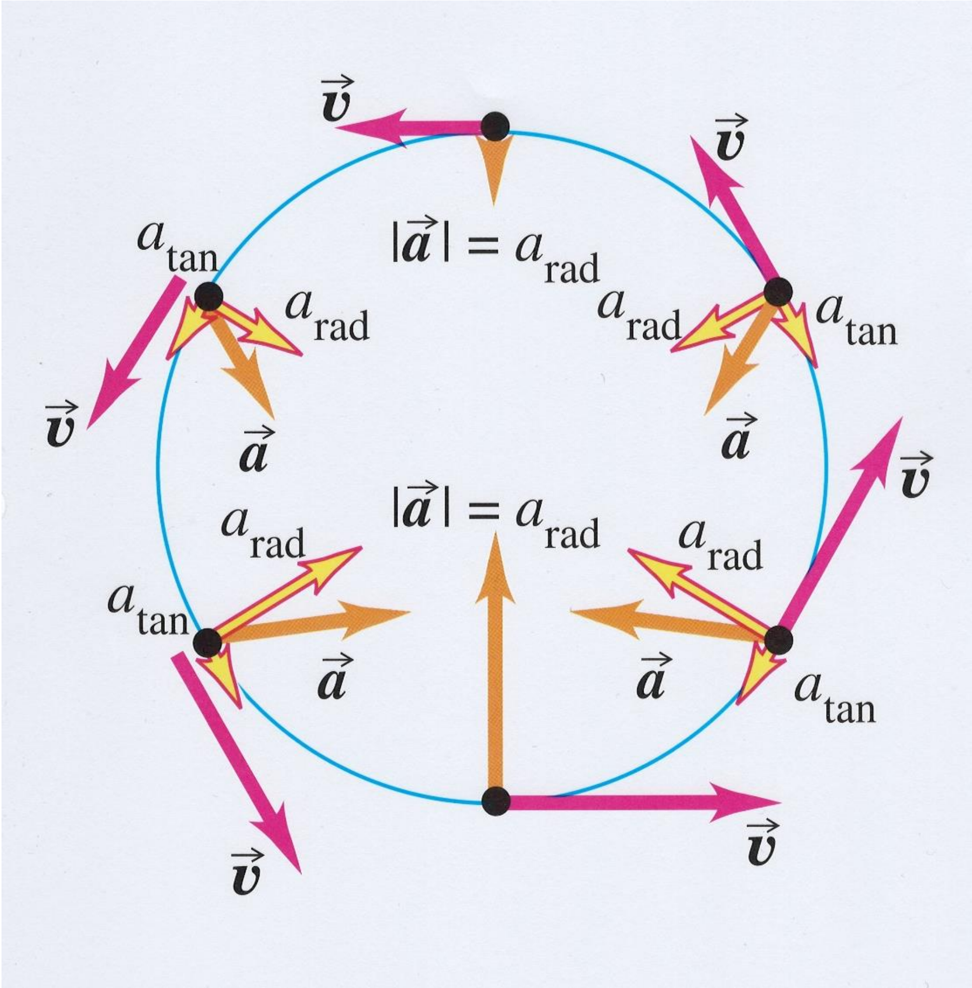
Das linke Kreuzprodukt in (1) ist die
Tangential-Beschleunigung $a_t = \alpha_\varphi \cdot r$

Das rechte Kreuzprodukt in (1) ist die
Zentripetal-Beschleunigung $a_r = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$

Bildquelle: https://systemdesign.ch/wiki/Kreisbewegung

Ungleichmäßige Kreisbewegung: a_{tang} und a_{rad}

- Während des Kreisumlaufs ändert sich die Geschwindigkeit v nach Betrag **und** Richtung.
- Mit steigendem v wächst auch die Radial-Beschleunigung a_{rad}
- Der Vektor $\boldsymbol{a}$ setzt sich dabei aus Tangential- und Radial-Komponente zusammen.
- Nur wenn $\boldsymbol{v}$ = konst. ist, zeigt der Vektor $\boldsymbol{a}$ auf das Kreiszentrum!



- Quelle: Young, Freedman; University Physics

Beschreibung mit „Winkelgrößen" (hier $a_t = konst;$ gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung)

Winkel $\varphi(t) = \frac{s(t)}{r} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a_t \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0}{r} = \frac{1}{2} \cdot \alpha_\varphi \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$ $[\varphi] = rad = 1$

Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

$$\omega(t) = \frac{a_t}{r} t + \frac{v_0}{r} = \alpha_\varphi \cdot t + \omega_0 \qquad [\omega] = \frac{rad}{s} = s^{-1}$$

Winkelbeschleunigung $\alpha_\varphi = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$

$$\alpha_\varphi(t) = \frac{a_t}{r} = (konst) \qquad [\alpha_\varphi] = \frac{rad}{s^2} = s^{-2}$$

Ausserdem gilt:

Anzahl der Umdrehungen: $N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi}$

Drehzahl: $n = \frac{\dot{\varphi}}{2 \cdot \pi} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$

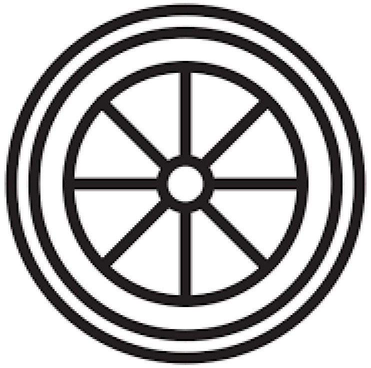
Umlaufzeit: $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{1}{n}$

Beispiel: Beschleunigte Rad-Drehung

Rad mit r = 0,2 m wird in 10 s aus dem Stillstand gleichmäßig auf eine Drehzahl von n = 20 s^{-1} beschleunigt.

a) Winkelbeschleunigung?

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = \alpha \cdot t \;\rightarrow\; \alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20}{10}\, s^{-2} = 12{,}6\, \frac{1}{s^2}$$



b) Bahnbeschleunigung an Punkt auf Radumfang?

$$a_t = \alpha \cdot r = 4 \cdot \pi \cdot 0{,}2\, \frac{m}{s^2} = 2{,}5\, \frac{m}{s^2}$$

c) Erreichte Umfangsgeschwindigkeit?

$$v = \omega \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 0{,}2 \frac{m}{s} = 25{,}1 \frac{m}{s}$$

d) Wieviele Umdrehungen wurden während des Beschleunigens ausgeführt?

$$N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} = \frac{\alpha \cdot t^2}{2 \cdot 2 \cdot \pi} = \frac{12{,}6 \cdot 100}{4 \cdot \pi} = 100$$

e) Radial-Beschleunigung nach 5 s?

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \alpha^2 \cdot t^2 \cdot r = \left(12{,}6\, \frac{1}{s^2}\right)^2 \cdot 25\, s^2 \cdot 0{,}2\, m = 793{,}8\, m/s^2$$

Merken: Für Rotationsbewegungen gilt

- **Bahngröße = Winkelgröße mal Radius**

  $s = \varphi \cdot r \qquad v = \dot{\varphi} \cdot r = \omega \cdot r \qquad a_t = \ddot{\varphi} \cdot r = \alpha_\varphi \cdot r$

- **Gekrümmte Bahn stets mit Radial-/Normal-Beschleunigung**

$$a_N = a_R = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

- **Drehbewegung als Vektorgrößen darstellbar**

$$\vec{\varphi} \qquad \vec{\omega} \qquad \overrightarrow{\alpha_\varphi}$$

- **Winkelgrößen als Vektor in Drehachse;**
  Richtung nach Rechtsschraubenregel

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Korkenzieherregel

2.2 Dynamisches Grundgesetz

Bisher: Bewegungsbeschreibung ohne Frage nach Bewegungs-Ursache

Statik: Kräfte im Gleichgewicht; Kräfte als Grund für Verformung

Jetzt: Kräfte als Ursache für Bewegung

Ein Massenpunkt konstanter Masse m erfährt eine Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$, wenn eine Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ auf ihn wirkt

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ $[m]$ = kg [F] = N = $\frac{kg \cdot m}{s^2}$

Die Vektoren $\vec{\boldsymbol{a}}$ und $\vec{\boldsymbol{F}}$ haben die selbe Richtung.

Nicht geradlinige Bewegung: Zerlegung der Kräfte in Komponenten
Beispiel: Kreisbewegung

$F_t = m \cdot a_t = m \cdot \ddot{s}$ Tangential-Komponente

$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \frac{v^2}{r}$ Normal-Komponente (**Zentripetal-Kraft**)

F_t ändert den Betrag, F_z ändert die Richtung der Bewegung

Isaac Newton (1642 -1726)

Bewegungsgröße: Impuls $\vec{p}$

Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$

Bewegungsänderung = Impulsänderung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Falls $m = const.$ fällt der linke Term weg. Dann ist

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = "Kraft"\ \vec{F}$$

So gesehen kann man Masse m auch als Trägheit gegen Bewegungsänderung verstehen.

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

Newtonsche Axiome (1687)

1. **Trägheitsgesetz, Inertialgesetz**
2. **Aktionsprinzip, Grundgleichung der Mechanik**
3. **Wechselwirkungsprinzip, Actio = Reactio**
4. **Superpositionsprinzip, Kräfte-Überlagerung**

1. Trägheitssatz

„Ein Körper, auf den keine Kraft einwirkt,
bleibt im Zustand der Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.“

$$\vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{v} = 0 \;\; bzw. \;\; \vec{v} = const.$$

2. Grundgleichung der Mechanik

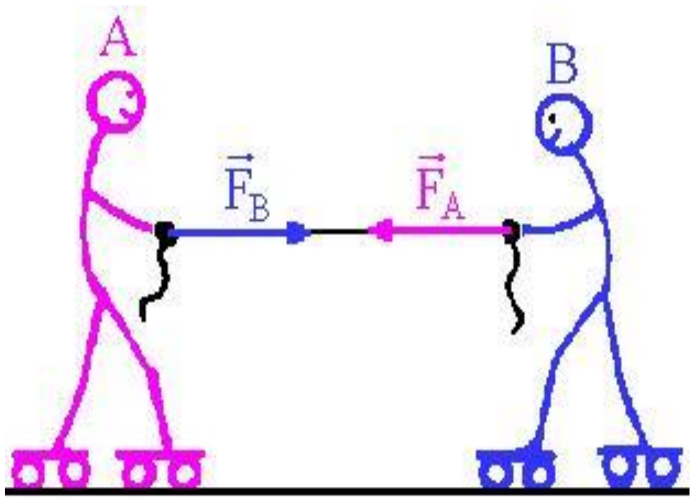
„Kraft = zeitliche Änderungsrate des Impulses“, Grundlage der Bewegungsgleichungen

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} \qquad \text{(sofern } m = const.\text{)}$$

Bildquelle: https://www.sofatutor.com/physik/videos/die-newtonschen-gesetze-einfuehrung

3. Actio=Reactio; Wechselwirkungsgesetz

„Wirkt Körper 1 auf Körper 2 mit der Kraft $\vec{F}_{12}$ ein, dann wirkt umgekehrt Körper 2 auf Körper 1 mit der Kraft $\vec{F}_{21}$ = - $\vec{F}_{12}$ ein.“

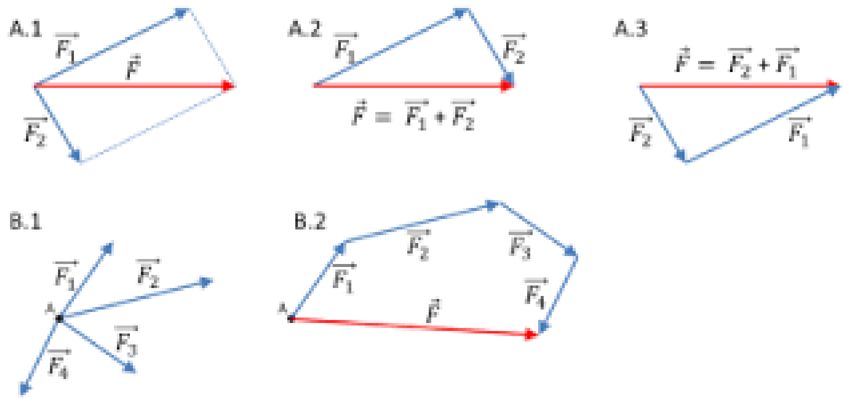


4. Superpositionsprinzip

„Kräfte überlagern sich ungestört“

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{ges}$$

Kräftesumme = Vektorsumme



Bildquelle: https://docplayer.org/58496533-Die-newton-schen-gesetze.html
http://wiki.ifs-tud.de/biomechanik/dynamik/dyn01

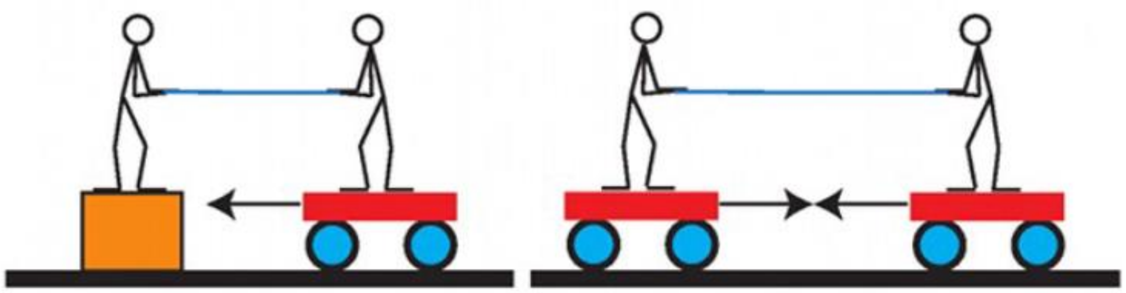
2.2.1 Beispiele für Kräfte

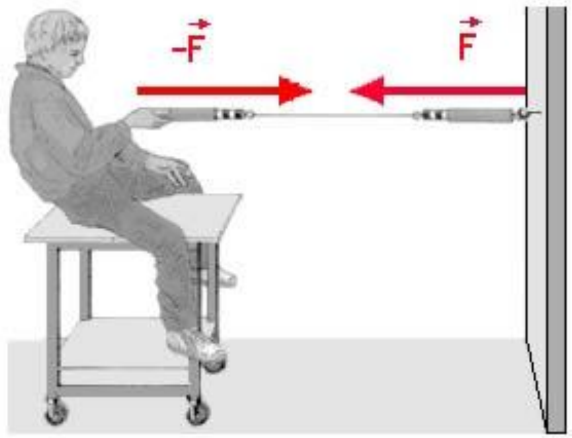
Gewichtskraft (Erdoberfläche)	$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$	g = „Ortsfaktor“ = 9,81 m/s²
Gravitationskraft	$\vec{F}_G = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{e}_r$	γ = Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
Federkraft	$\vec{F}_D = (-)k \cdot \vec{x}$	k,D = Federkonstante
Gleitreibungskraft	$\lvert\vec{F}_G\rvert = \mu_G \cdot F_N$	μ_G = Gleitreibungskoeffizient
Elektrische Feldkraft	$\vec{F}_C = q \cdot \vec{E}$	E = elektrische Feldstärke
Coulomb-Kraft	$\vec{F}_C = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \cdot \vec{e}_r$	ϵ_0 = elektr. Feldkonst.
Lorentz-Kraft	$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$	

2.2.2 Wechselwirkungsgesetz

Beide Personen ziehen
gleich stark am Seil.
Was geschieht?

Kraft im Seil („Seilkraft“)?





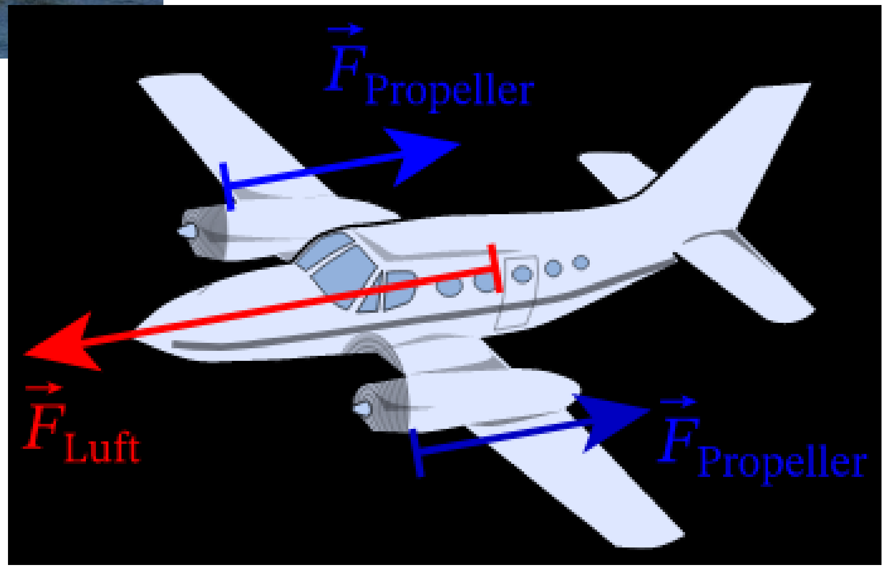
Ähnliche Situation:
Was zeigen die beiden Kraftmesser an?

Seilkraft?

Bildquelle: https://uol.de/f/5/inst/physik/ag/vlex/download/mha_actioreactio.pdf
https://www.leifiphysik.de/mechanik/kraft-und-bewegungsaenderung/aufgabe/beispiele-fuer-wechselwirkungsgesetz

Weitere Beispiele für Wechselwirkungssatz „actio = reactio“

Ruderboot im Wasser



Propellerantrieb in Luft

Bildquelle: https://www.leifiphysik.de/mechanik/kraft-und-bewegungsaenderung/grundwissen/3-newtonsches-gesetz-wechselwirkungsprinzip

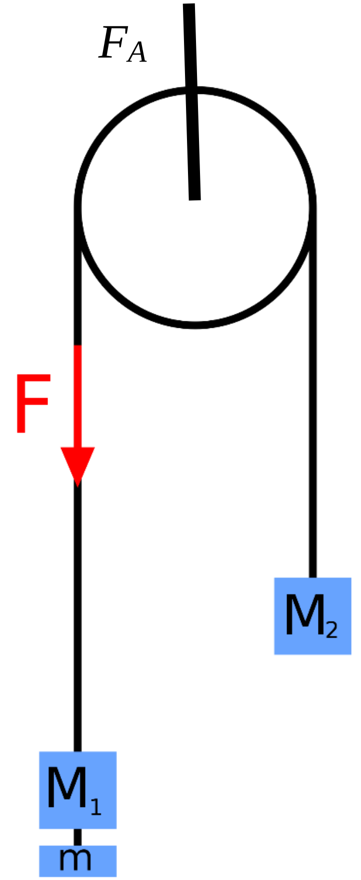
Dynamik kann sich von Statik unterscheiden: Beispiel **Atwoodsche Fall-Maschine**

Ausgangssituation

v_0 = 0; g = 10 m/s²; Rolle und Seil masselos, keine Reibung

Massen: links $M_L = M_1 + m$ = 0,3 kg; rechts $M_R = M_2$ = 0,2 kg

Rolle arretiert: F_A = 5 N



Rolle freigegeben → Beschleunigung: M1 abwärts; M2 aufwärts

Beschleunigende Kraft: $F = \Delta M \cdot g = (M_L - M_R) \cdot g = 1\ N$

Beschleunigte Masse: $M_{ges} = M_L + M_R = 0{,}5\ kg$

Beschleunigung: $a = \frac{F}{M_{ges}} = \frac{\Delta M}{M_{ges}} g$ =2 m/s²

Seilkraft F_S:

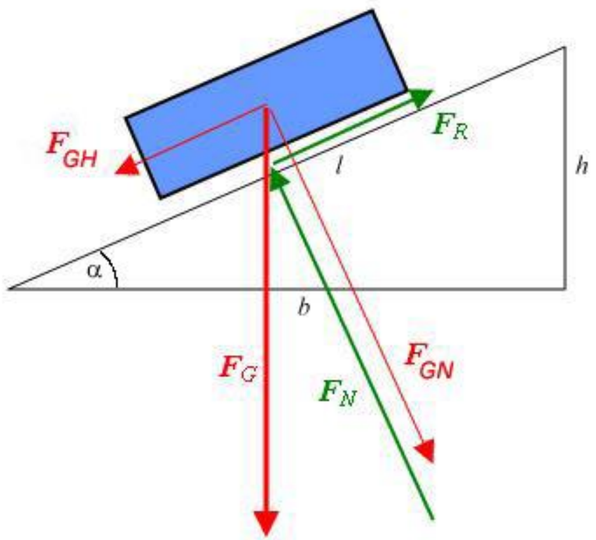
links (nach unten beschleunigt): $F_S = M_L(g - a) = 2{,}4\ N$

rechts (nach oben beschleunigt): $F_S = M_R(g + a) = 2{,}4\ N$

Stützkraft am Aufhängepunkt: $F_A = 2 \cdot F_S = 4{,}8\ N$

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Atwoodsche_Fallmaschine

Beispiel: **Schiefe Ebene mit Reibung**



Start mit v_0 = 0; Neigung $\alpha = 30°$; Reibung μ_G =0,3

Geschwindigkeit und Strecke 3 s nach Start?

Beschleunigende Kraft: $F = F_{GH} - F_R = F_{GH} - \mu_g \cdot F_N$

Hangabtriebskraft: $F_{GH} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

Normalkraft: $F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

Beschleunigung: $a = \frac{F}{m} = g(\sin\alpha - \mu_G \cdot \cos\alpha)$

$a = 2{,}40\, m/s^2$

Geschwindigkeit v nach 3 s: $v = a \cdot t = 7{,}20\, m/s$

Wegstrecke s nach 3 s: $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 10{,}8\, m$

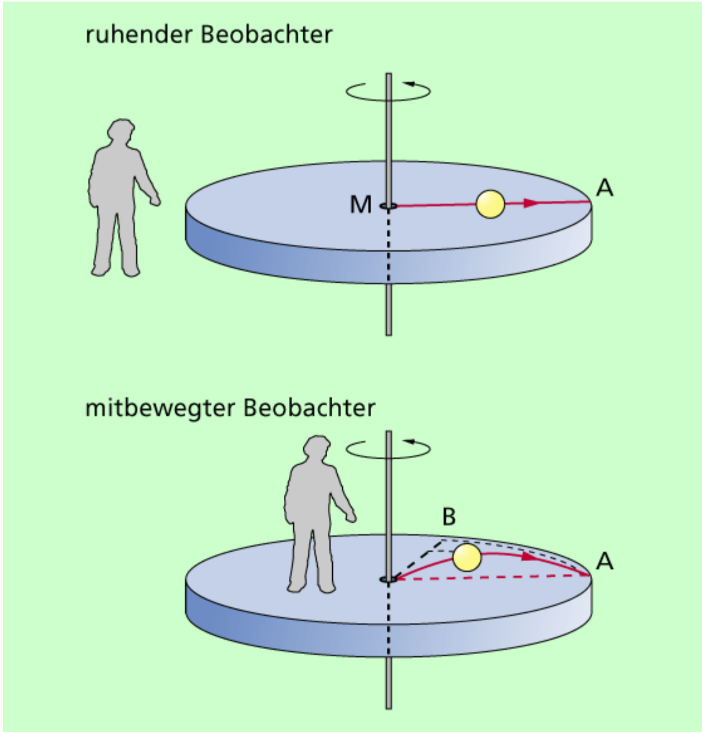
Hinweis: Die Masse des Gegenstandes geht in das Ergebnis nicht mit ein.

Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=32849546

2.2.3 Kräfte im beschleunigten System: Trägheitskräfte

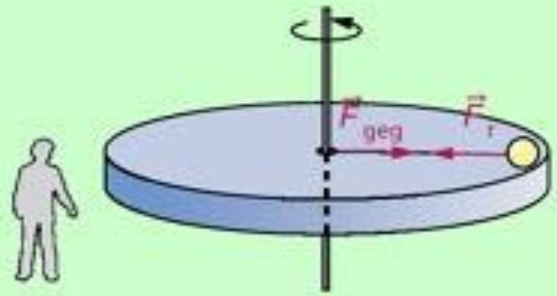
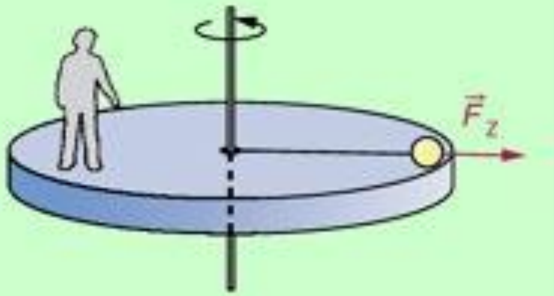
Trägheitskraft: Beschreibung beschleunigter Bewegung im mitbewegten Bezugsystem.

- Trägheitskräfte („Scheinkräfte“), treten in beschleunigt bewegten Systemen auf.
- real messbar für mitbewegte Beobachter*innen.
- wirken stets entgegen der Beschleunigung, sowohl bei Translation wie Rotation.
- Beispiele: Zentrifugal-Kraft, Corioliskraft,



Bildquelle: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/artikel/traegheitskraefte#

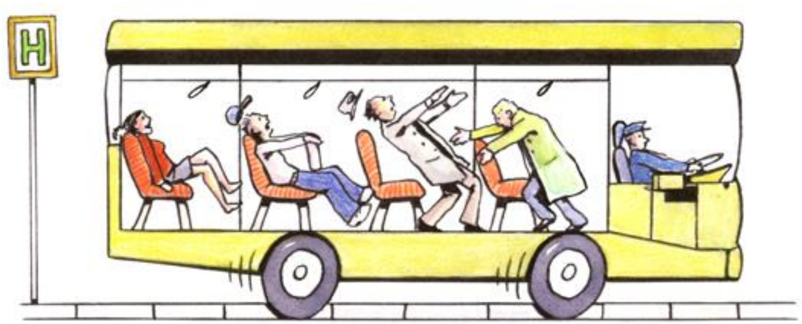
Gegenüberstellung: Ruhende Beobachtende – Mitbewegte Beobachtende

Ruhender Beobachter	**Mitbewegter Beobachter**
Die Beschreibung erfolgt in einem Inertialsystem. 	Die Beschreibung erfolgt in einem beschleunigten Bezugssystem. 
Die Kugel bewegt sich auf einer Kreisbahn.	Die Kugel befindet sich in Ruhe.
Die Kugel wird durch die Radialkraft auf der Kreisbahn gehalten. Als Wechselwirkungskraft wirkt die Gegenkraft zur Radialkraft.	Der Beobachter stellt eine nach außen wirkende **Zentrifugalkraft** fest. Zu dieser Kraft gibt es keine Gegenkraft.
Reißt der Faden, so bewegt sich die Kugel tangential weiter.	Reißt der Faden, so bewegt sich die Kugel radial weiter.

Bildquelle: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/artikel/traegheitskraefte#

Unterschiedlicher Standpunkt = unterschiedliche Betrachtungsweise

Beispiel: Anfahrendes Fahrzeug



Aussenstehende Beobachterin: Fahrzeug und Insaßen werden beschleunigt mit $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Die Gegenkraft wird durch die Fahrgäste aufgebracht durch Festhalten/Abstützen.

Mitfahrende Person: Es wirkt eine Kraft entgegengesetzt der Beschleunigung des Fahrzeugs, also z.B. beim Anfahren nach hinten, beim Bremsen nach vorne.

Man kann dann schreiben: $\vec{F} - m \cdot \vec{a} = 0$.

Der Term $(m \cdot \overrightarrow{a)}$ ist die Kraft, die der beschleunigenden Kraft entgegengesetzt ist.

In beschleunigten Bezugssystemen wirken Trägheitskräfte.
Eine Trägheitskraft wirkt immer entgegengesetzt zur Richtung der Beschleunigung.
Zu einer Trägheitskraft gibt es keine Gegenkraft.

Beispiel: **Anfahrender Aufzug**

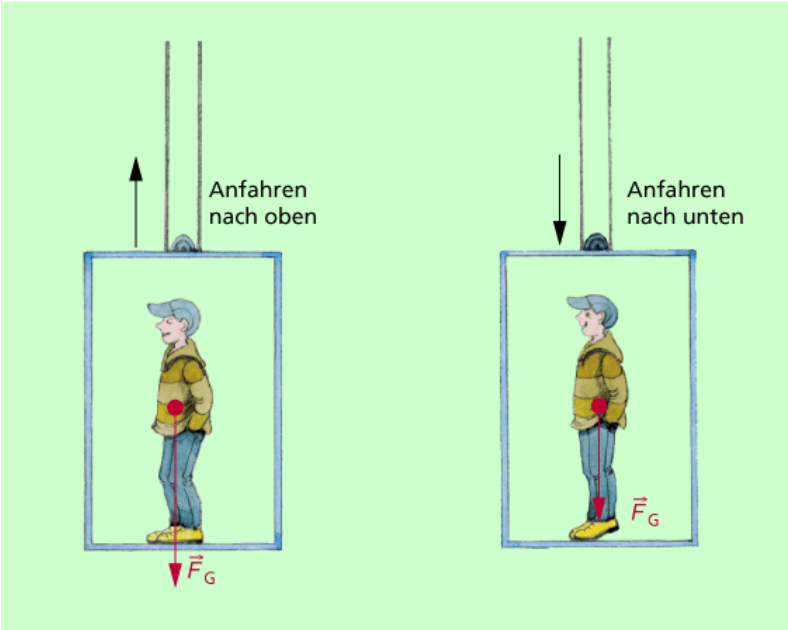
Person im Aufzug auf Waage: Gewichtskraft $\boldsymbol{F_G}$

Anfahren nach oben: F_G steigt um ma

Anfahren nach unten: F_G sinkt um ma

Trägheit bewirkt das der Körper quasi zurück bleibt.

Extremfall: Im freien Fall ist $F_G = 0$.



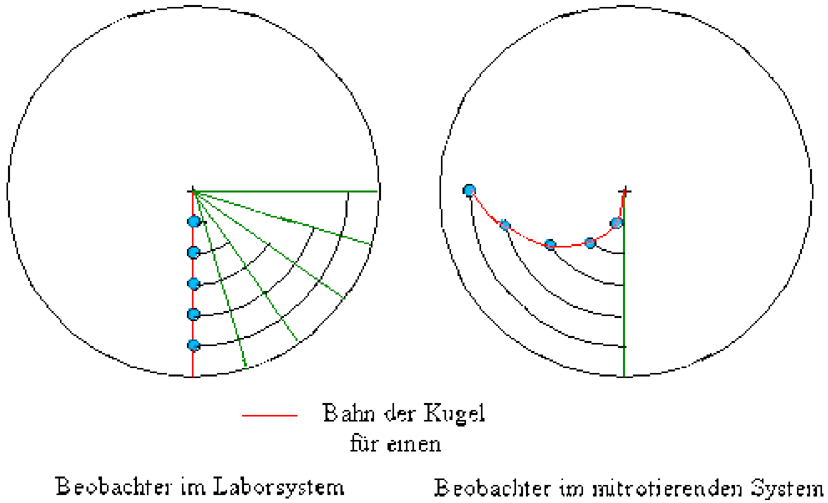
Beipiel: **Kurvenfahrt**

In der Kurve spürt die mitfahrende Person eine Kraft („Fliehkraft"), die Richtung Kurven-Aussenseite drückt. Für diese Kraft („Zentrifugalkraft") gilt: $|\vec{F}_z| = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$

Dynamisches Gleichgewicht durch Schräglage in der Kurve möglich. (z.B. Neigetechnik)

Bildquelle: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/artikel/traegheitskraefte#

Beispiel: **Coriolis-Kraft**



Translationsbewegung über rotierende Fläche

v = Radialgeschwindigkeit der Kugel

Drehung der Scheibe: $s = r \cdot \omega \cdot t$

Weg über Scheibe: $r = v \cdot t$

Eingesetzt: $s = v \cdot \omega \cdot t^2$ vgl.: $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

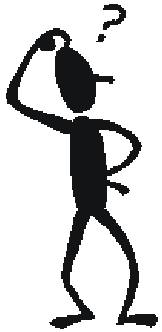
Daraus: $a_c = 2 \cdot v \cdot \omega$ „Coriolis-Beschleunigung“ bzw. Coriolis-Kraft: $F_c = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega$

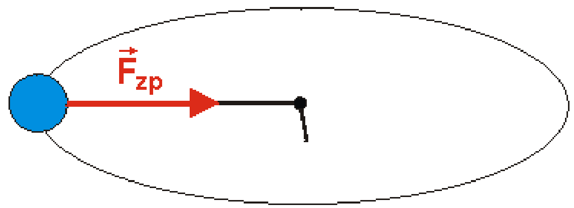
Vektoriell geschrieben: $\vec{F}_C = 2 \cdot m \cdot (\vec{v} \times \vec{\omega})$

Praktische Auswirkungen:
- Zyklonale Windströmungen
- unsymmetrische Flussprofile
- Drehung von Pendel-Ebene (Foucaultsches Pendel)
- Drehrichtung von Hoch- und Tiefdruck-Gebieten

Bildquelle: http://www.dieter-heidorn.de/Physik/VS/Mechanik/K08_Kreisbewegung/K08_Kreisbewegung.html

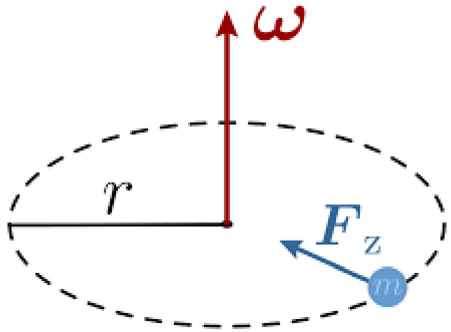
Beispiel: **Drehscheibe**





Ein Körper mit Masse m liegt auf einer rotierenden Scheibe, 40 cm von der Drehachse entfernt. Die Haftreibungszahl μ_H zwischen Körper und Scheibenoberfläche beträgt 0,4.

Bei welcher Drehzahl fliegt der Körper weg?



Haftreibung liefert F_Z: $F_z = F_R$

Grenzfall: $F_{z,max} = F_{R,max} = \mu_H \cdot F_N$

Mit $F_N = F_G = mg$ folgt: $m \cdot \omega^2 \cdot r = \mu_H \cdot m \cdot g$

Kürzen und mit $\omega = 2\pi n$: $4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 = \frac{\mu_H \cdot g}{r}$

Auflösen nach $n = n_{max}$: $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_H \cdot g}{r}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 10\ m}{0{,}4\ m/s^2}} = 0{,}503\ s^{-1}$

Bildquelle: https://de.universaldenker.org/formeln/1086
https://www.leifiphysik.de/mechanik/kreisbewegung/ausblick/zentrifugalkraft

2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2.3.1 Arbeit

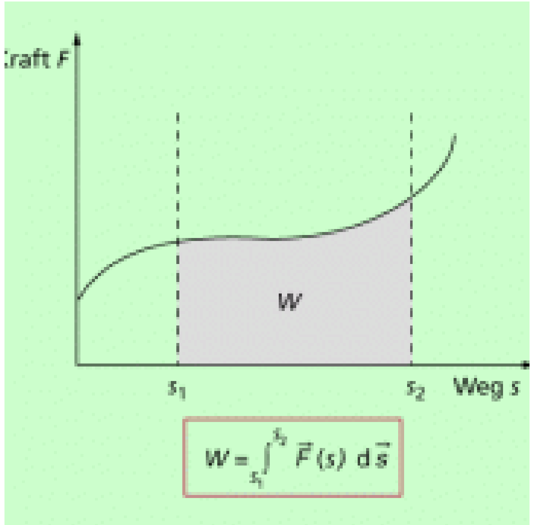
Mit Arbeit wird die „Wirkung“ einer Kraft berechnet, also z.B. eine Verschiebung, eine Beschleunigung oder eine Verformung. Arbeit ist eine „Prozessgröße“.

Def.: **Arbeit** W: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta$ $\quad \theta = Winkel\ zwischen\ \vec{F}\ und\ \vec{s}$

Einheit: $[W] = 1\ N \cdot m = 1\ J = 1 W \cdot s = 1\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

Wenn sich die Kraft F längs des Weges ändert, ist es notwendig, dies zu berücksichtigen. Entweder abschnittsweise mit F_i pro Abschnitt Δs oder mit $\Delta s \rightarrow 0$ als Integral: Arbeit = Fläche unter Kurve $F(s)$

$$W = \left(\sum_{s1}^{s2} F_i \cdot \Delta s\right) = \int_{s1}^{s2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$$



Bildquelle: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/artikel/mechanische-arbeit

Beispiele für **Arbeit:**

1. **Hubarbeit**: Körper (Masse m) gleichförmig reibungsfrei um Höhe h angehoben.

$$W_H = \int_0^h \overrightarrow{F_G} \cdot \overrightarrow{ds} = m \cdot g \cdot h \qquad \text{unabhängig vom Weg; } \vec{F}_G \,||\, \overrightarrow{ds}$$

2. **Reibungsarbeit**: Körper wird gleichförmig gegen Reibungskraft $F_R = \mu F_N$ bewegt.

$$W_R = F_R \cdot s = \mu \cdot F_N \cdot s$$

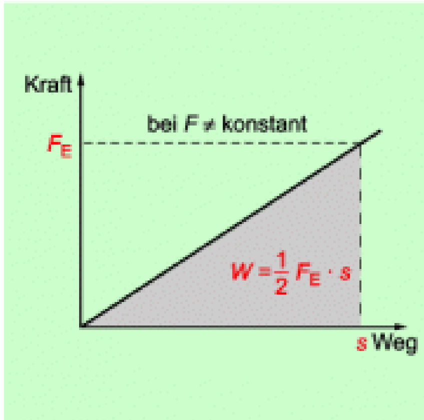
3. **Beschleunigungsarbeit**: Körper wird durch Kaft / Kraftkomponente in Wegrichtung beschleunigt.

$$W_B = \int_{s0}^{s1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = m \int_{s0}^{s1} \overrightarrow{a_t} \cdot \overrightarrow{ds} \qquad \text{mit } \overrightarrow{a_t} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} \ \textit{und}\ \overrightarrow{ds} = \vec{v}dt \text{ folgt}$$

$$W_B = m \int_{t0}^{t} \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m \int_{v0}^{v} \vec{v}\overrightarrow{dv} = \frac{1}{2} m(v^2 - {v_0}^2)$$

4. **Elastische Verformungsarbeit**: Feder (lineare Kennlinie) wird durch Kraft $F = Ds$ gedehnt.

$$W_E = \int_{s0}^{s1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = D \int_{s0}^{s1} \vec{s} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot ({s_1}^2 - {s_0}^2)$$

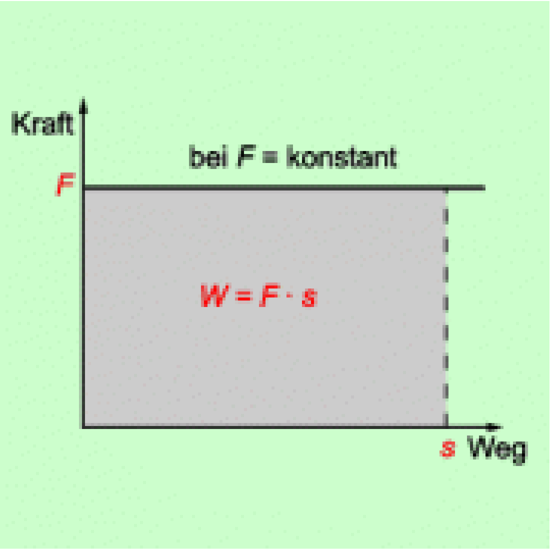


Bildquelle: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik/artikel/mechanische-arbeit

Merken: **1.** Der bekannte Satz **„Arbeit = Kraft mal Weg“** beschreibt einen Sonderfall!

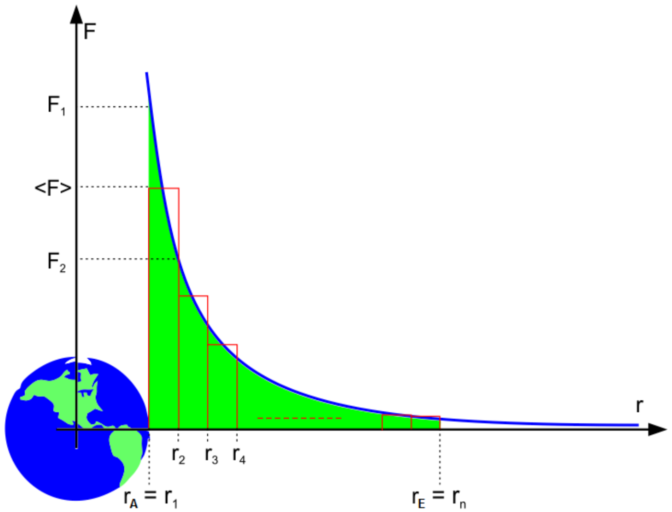
Nur wenn die Kraft konstant ist und Wegrichtung und Kraftrichtung übereinstimmen, gilt dieser Satz.

In allen **anderen Fällen** muss das **Integral** herhalten.



$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$$

2. Arbeit ist eine **skalare Größe**. Sie entspricht der Fläche unter der Kurve $F(s)$ im sogenannten **„Arbeitsdiagramm“**. In der Thermodynamik ist das später (Semester 2) dann z.B. das p-V-Diagramm.



Bildquelle: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik/artikel/mechanische-arbeit
https://www.leifiphysik.de/mechanik/gravitationsgesetz-und-feld/grundwissen/arbeit-im-gravitationsfeld

2.3.2 Energie und Energieerhaltung

Def.: **Energie** W eines Körpers / eines Systems = in ihm gespeicherte Arbeitsfähigkeit.

Skalare Größe, selbe Einheit wie Arbeit: $[W] = 1\ N \cdot m = 1\ J = 1W \cdot s = 1\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

Beispiele: a) Ein Körper mit Masse m wird um die Höhe Δh angehoben.

Die aufgewandte Hubarbeit ist dann in Form von Lage-Energie gespeichert:

$$W_{Lage} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

b) Eine gespannte Feder speichert Arbeitsfähigkeit als elastische Energie:

$$W_{elast} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$$

Lageenergie und elastische (Spannungs)energie stecken in ruhenden Körpern:

Daher heißen diese Energieformen: „**potentielle Energie**“ = W_{pot}

c) Ein bewegter Körper hat Bewegungsenergie, die aus Beschleunigung stammt:

$$W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Energieformen aus Bewegungsvorgängen heißen:

„**Kinetische Energie**“ = $\boldsymbol{W_{kin}}$

Bei mechanischen Vorgängen werden die mechanischen Energieformen W_{pot} und W_{kin} ineinander **umgewandelt**.
Reibungsvorgänge liefern keine mechanische Energieform, sondern **Wärme** (Energieform mit regelloser Bewegung von Molekülen: „Innere Energie“); diese Energieform kann nicht mehr ohne Weiteres wieder in mechanische Formen zurückverwandelt werden.

Bei mechanischen Vorgängen, bei denen die Reibung vernachlässigt werden kann, gilt:

$$\boldsymbol{(W_{pot} + W_{kin})_{Zustand\ 1} = (W_{pot} + W_{kin})_{Zustand\ 2}}$$

Ist die Reibung nicht vernachlässigbar, geht ein Teil der mechanischen Energie in Wärme über. Es gilt dann allgemein:

$$(\boldsymbol{W_{pot}} + \boldsymbol{W_{kin}})_{\boldsymbol{Zustand\ 1}} = (\boldsymbol{W_{pot}} + \boldsymbol{W_{kin}})_{\boldsymbol{Zustand\ 2}} + \boldsymbol{W_R}$$

Diese Beziehung stellt den „**Energiesatz der Mechanik**" dar.
Dabei ist der zeitliche Ablauf beim Übergang von Zustand 1 nach Zustand 2 nicht bekannt und kann auch nicht mit dem Energiesatz bestimmt werden.

Beispiel: Hubarbeit im Gravitationsfeld der Erde (W_{pot} bei großem h)

So lange $g = const.$ gilt: $W_H = m \cdot g \cdot h$ gültig für $h << r_E$

Für großes h gilt: $W_{12} = \int_{r1}^{r2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ wenn $F \,||\, dr$, $m = const.$

dann weiter mit

$$W_{12} = \gamma \cdot m \cdot m_E \int_{r1}^{r2} \frac{1}{r^2} dr = \gamma \cdot m \cdot m_E \left[-\frac{1}{r}\right]_{r1}^{r2} = \gamma \cdot m \cdot m_E \left(\frac{1}{r1} - \frac{1}{r2}\right)$$

Potentielle Energie einer Masse m = 1 kg, die von der Erdoberfläche nach „Unendlich“ gebracht wird:

$$W_{E\infty} = \gamma \cdot m \cdot m_E \left(\frac{1}{rE} - \frac{1}{\infty}\right) = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 1kg \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} kg \cdot \frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6 m}$$

$$W_{E\infty} = 6{,}25 \cdot 10^7 \mathrm{J}$$

Beispiel: Welche Geschwindigkeit braucht man, um einen Körper der Masse m von der Erdoberfläche ins Weltall (nach ∞) zu schießen? (Ohne Luftreibung) („Fluchtgeschwindigkeit“, zweite kosmische Geschwindigkeit)

$$W_{kin,E} = W_{pot,\infty} \quad \rightarrow \quad \frac{m}{2} \cdot v^2 = \gamma \cdot m \cdot m_E \cdot \frac{1}{rE}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot m_E \cdot \frac{1}{rE}} = 11{,}2 \text{ km/s}$$

Beispiel: Geschwindigkeit eines Balls nach Aufprall aus Höhe h_0

$$\left(W_{kin} + W_{pot}\right)_1 = (W_{kin} + W_{pot})_2$$

$$0 + m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

Beispiel: Bewegung mit Reibung; Gegenstand (Masse m, Startgeschwindigkeit v_0) kommt rutschend nach Strecke s zum Stillstand. Reibungs-Koeffizient μ_G

$$\left(W_{kin} + W_{pot}\right)_1 = (W_{kin} + W_{pot})_2 + W_R$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_0}^2 + 0 = 0 + 0 + F_R \cdot s \qquad \text{mit } F_R = \mu_G \cdot m \cdot g$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_0}^2 = \mu_G \cdot m \cdot g \cdot s$$

Anhalteweg (Rutschweg): $s = \frac{1}{2} \cdot {v_0}^2 \cdot \frac{1}{\mu_G \cdot g} = \frac{{v_0}^2}{2 \cdot \mu_G \cdot g}$

2.3.3 Leistung und Wirkungsgrad

Bisher spielte der Faktor Zeit bei der Betrachtung von Arbeit keine Rolle.

Leistung P bezeichnet den Quotienten aus Arbeit ΔW und dafür aufgewandter Zeit Δt.

Def.: **Leistung *P*** $$P = (\frac{\Delta W}{\Delta t})_{\Delta t \to 0} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

Einheit: $$[P] = \frac{[W]}{[t]} = 1\frac{J}{s} = 1W = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

Veraltet: 1 PS = 735,5 W = 0,7355 kW; 1 kW = 1,360 PS

Wirkt die Kraft F in Wegrichtung längs Weg ds, dann gilt mit $dW = Fds$ für den

Momentanwert der Leistung: $$P = \frac{dW}{dt} = F\frac{ds}{dt} = F \cdot v$$ v = Momentangeschw.

Mittlere Leistung: $$\bar{P} = \frac{\text{gesamte verrichtete Arbeit } W_{ges}}{\text{gesamte benötigte Zeit } t_{ges}}$$

Anmerkung: Ist die Leistung während der Zeit t_{ges} konstant, dann ist $P = \bar{P} = \frac{W}{t} = \frac{W_{ges}}{t_{ges}}$

Wirkungsgrad

- Bei mechanischen Vorrichtungen: Teil der umgesetzten Energie W_{ges} geht durch Reibungsvorgänge als Reibungsarbeit W_R „verloren“.
- Umwandlung des Teils W_R in nichtmechanische Energieform Wärme.
- Nutzarbeit W_N : $W_N = W_{ges} - W_R$

- Definition: Wirkungsgrad η (eta):

$$\eta = \frac{W_N}{W_{ges}}$$

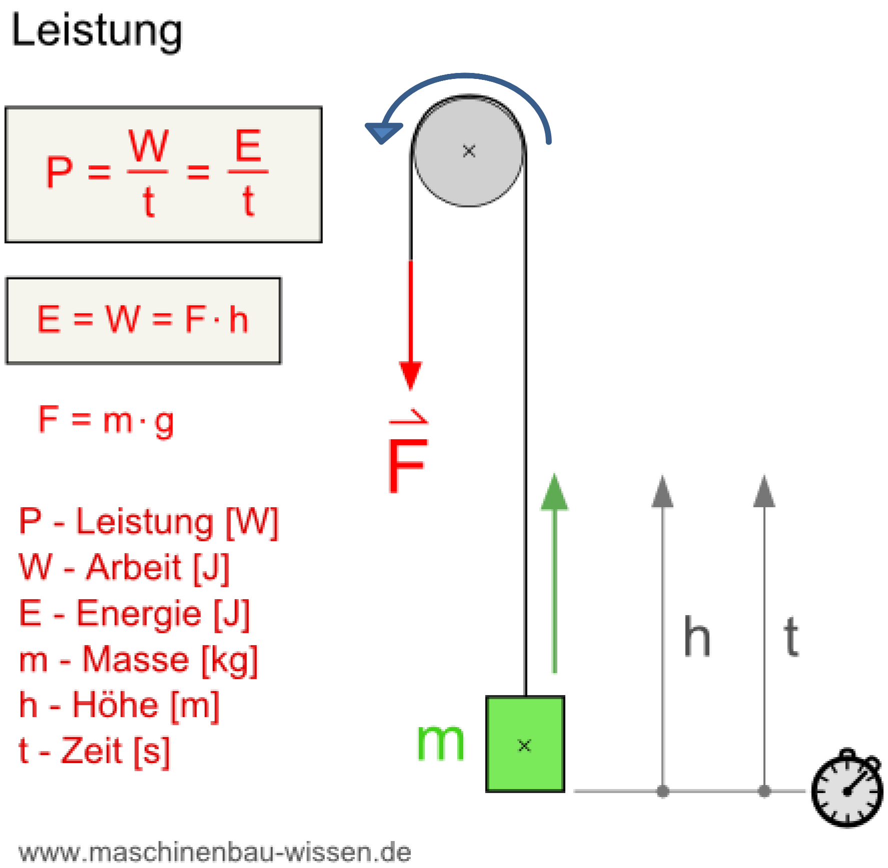
Falls W_N und W_{ges} <u>gleichzeitig</u> umgesetzt werden, kann man Arbeit W durch Leistung P ersetzen:

$$\eta = \frac{P_N}{P_{ges}}$$

Leistungsmessung:

Version 1:

- Mit $F = konst.$ wird m über Umlenk-Rolle um Strecke h in Zeit t hochgezogen.
- Hubarbeit W entspricht $Wpot$.
- Leistung P: $P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = F \cdot v$



Version 2: (Pronyscher Zaum)

- Rolle mit Radius r auf Motorachse
- Motordrehzahl n
- Bremsband auf Rolle aufliegend
- Bremskraft:

$$F_R = F_G - F$$

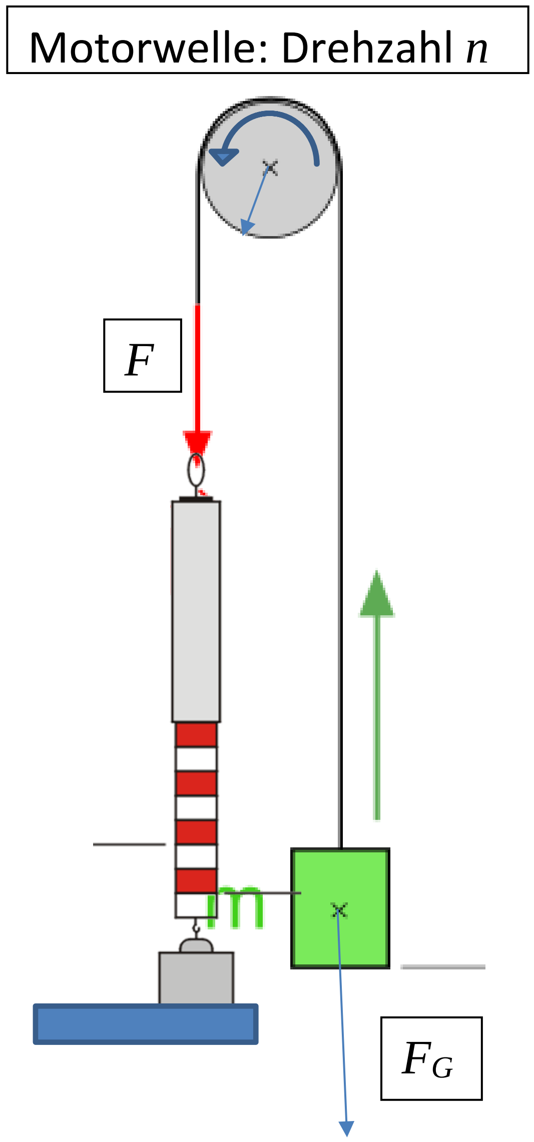
- Umfangsgeschwindigkeit Rolle:

$$v = \omega \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r$$

- Leistung:

$$P = F_R \cdot v = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r \cdot F_R$$

Realisierung: z.B. Wirbelstrombremse



2.4 Impuls, Impulserhaltung und Energieerhaltung

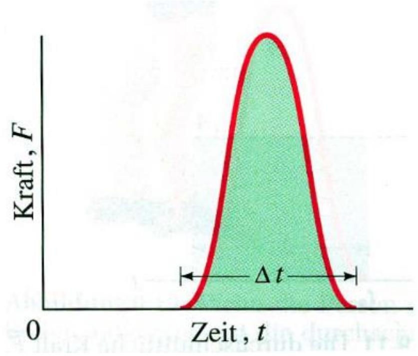
Impuls: Grundgröße der Bewegung (s.Seite 2.21) $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Zeitlich veränderliche Kraft $\vec{F} = \vec{F}(t)$ (Mittelwert F_m)
wirkt während $\Delta t = t - t_0$ auf Masse m ein. Es gilt dann:

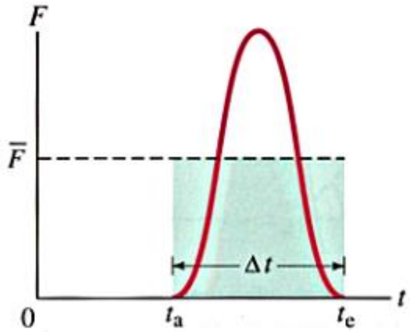
Impulssatz 1.Form: $\int_{t_0}^{t} m \frac{dv}{dt} dt = \int_{v_0}^{v} m \cdot dv = m(v - v_0)$

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F} dt = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{p} - \vec{p}_0$$

Oder $\vec{F}_m \Delta t = \vec{p} - \vec{p}_0$



Kraftstoß = Änderung des Impulses p der Masse m.



Impulssatz (differentiell): $\vec{F} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v})$

Bildquelle: https://www.uni-due.de/imperia/md/content/ofm/physik_3.pdf

Anwendung: Rückstoß-Antrieb

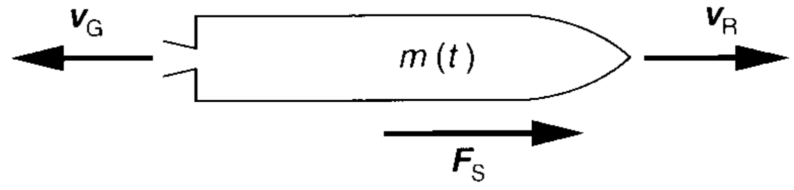


Abb. 2.13 Raketenprinzip

Gasausstoß:

Masseverlust dm je Zeitintervall dt

Ausströmgeschwindigkeit v_G

→ Impulsänderung (nach links) $\Delta p_1 = dm \cdot v_G$ Folge: Rakete schneller um dv_R

→ Impulsänderung (nach rechts) $\Delta p_2 = m(t) \cdot dv_R$

→ Kompensation $\Delta p_1 = -\Delta p_2 \;\rightarrow\; dm \cdot v_G + m \cdot dv_R = 0$ (a)

→ Umsortiert, dividiert durch dt: $F_S = m \cdot \frac{dv_R}{dt} = -\frac{dm}{dt} \cdot v_G$

→ (a) dividiert durch $(m \cdot v_G)$: $\frac{dm}{m} = -\frac{dv_R}{v_G}$

→ Integration von m_0 bis $m(v_R)$ bzw. von 0 bis v_R: Treibstoff-Verbrauch bis v_R

→ $\int_{m_0}^{m} \frac{1}{m} dm = -\frac{1}{v_G} \cdot \int_0^{v_R} dv_R$ $\quad \ln(m) - \ln(m_0) = \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{v_R}{v_G}$

→ Masse zum Zeitpunkt des Erreichens von v_R beträgt:

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{v_R}{v_G} \qquad \rightarrow \qquad m = m_0 \cdot e^{-\frac{v_R}{v_G}}$$

→ m_0 ist die „Startmasse“; m_E ist die Leermasse nach Aufbrauch des Treibstoffs

Damit erhält man:

- Restmasse bei Erreichen von $v_R = v_G$: $m = m_0 \cdot e^{-1} = \frac{m_0}{e}$
- Endgeschwindigkeit v_{RE}: $v_{RE} = v_G \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_E}\right)$

Diese Gleichungen heißen „Ziolkowski-Gleichungen“.
Schlussfolgerung:
Zum Erreichen einer hohen Endgeschwindigkeit braucht man
a) Hohe Gasaustritts-Geschwindigkeit v_G
b) Großes Verhältnis m_0 zu m_E: Mehrstufen-Prinzip, Booster-Antriebe

Bildquelle: U.Leute, Physik, Hanser-Verlag, München, 1995

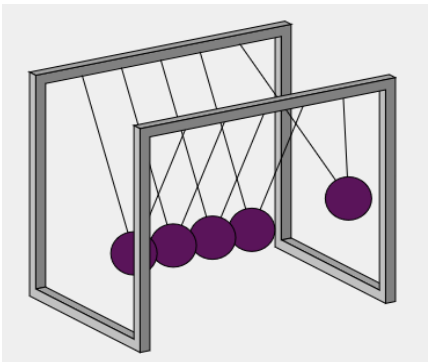
2.4.1 Impulserhaltung

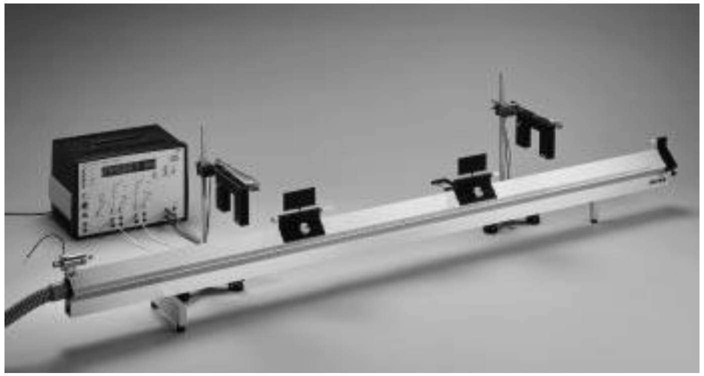
Impuls = Erhaltungsgröße

Wirken in einem System von Massenpunkten nur innere Wechselwirkungs-kräfte („abgeschlossenes System“), dann ist die Vektorsumme aller Einzel-impulse, d.h. der Gesamtimpuls, konstant.

- Wechselwirkungskräfte können auch Reibungskräfte sein.
- Impulsvektoren auch in Komponenten zerlegbar.
- Impulssatz gilt auch für jede Komponente einzeln.

Beispiele: Newtonsche Wiege Luftkissenbahn





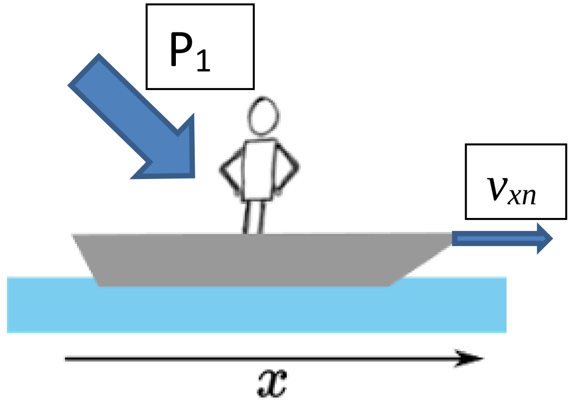
Impulserhaltungssatz (Impulssatz 2. Form)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_{1,n} + m_2\vec{v}_{2,n}$$

Allgemein: $\vec{p} = \vec{p}_n$ oder $\Delta\vec{p} = \vec{p}_n - \vec{p} = 0$

Der Gesamt-Impuls im abgeschlossenen System ist konstant (siehe Versuch)

Beispiel: Sprung ins Boot



Person (Masse m=80 kg) springt mit v_1=3 m/s
unter Winkel $\alpha = 60°$ in stehendes Boot (m=40 kg).
Wie groß ist $v_{x,n}$? (Nur x-Komponente)

Start: $p_{1x} = m_1 v_{1x} = m_1 v_1 \cos\alpha = 120$ kgm/s

$p_{2x} = m_2 v_{2x} = 0$ (Boot) $\qquad p_x = p_{1x} + p_{2x} = m_1 v_1 \cos\alpha$

Ende: $v_{1x,n} = v_{2x,n} = v_{x,n}$ $\qquad p_{x,n} = (m_1 + m_2) v_{x,n}$

p-Erhalt: $p_x = p_{x,n} \quad \rightarrow \quad m_1 v_1 \cos\alpha = (m_1 + m_2) v_{x,n}$

Endgeschwindigkeit in x-Richtung $v_{x,n}$ nach dem „Stoß-Vorgang“:

$$v_{x,n} = \frac{m_1 v_1 \cos\alpha}{(m_1 + m_2)} = 1\,\frac{m}{s}$$

Anmerkung: Hierbei handelt es sich um einen „unelastischen“ Stoß.

Klassifizierung von Stoß-Vorgängen

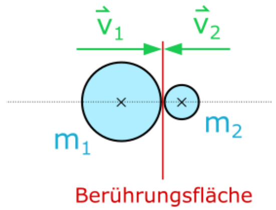
Unterscheidung: a) energetisches Kriterium

b) Stoß-Geometrie

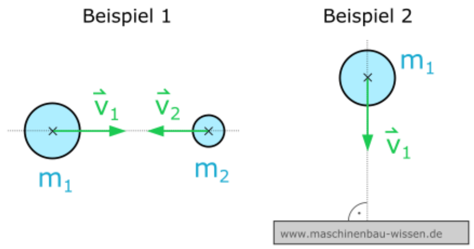
zu a) unterscheidet man:

- (vollkommen) **elastisch**: kein Verlust mechan. Energie $W = W_n; W_R = 0$
  unterschiedliche Geschwindigkeiten nach Stoß: $v_{1n} \neq v_{2n}$
- (vollkommen) **unelastisch**: Verlust von mechan. Energie $W > W_n; W_R \neq 0$
  Geschwindigkeit nach Stoß gleich: $v_{1n} = v_{2n} = v_n$
- **teilelastisch**: $v_{1n} \neq v_{2n}$ und $W > W_n$ (Stoßziffer k; $0 \leq k \leq 1$)

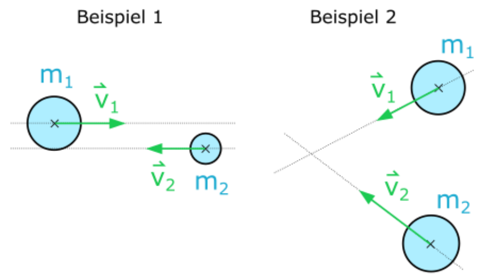
bei b) unterscheidet man folgende Formen:



- **Zentraler** Stoß: Wirkungslinie der Wechselwirkungskraft („Stoßnormale“) geht durch beide Schwerpunkte.



- **Gerader** Stoß: Geschwindigkeits-vektoren parallel zur Stoßnormalen.



- **Schiefer** Stoß: Geschwindigkeits-vektoren schräg zu Stoßnormalen.

Anmerkung: Diese Einteilung bedingt ausgedehnte Körper; führt u.U. zu Rotation nach Stoß-Vorgang.

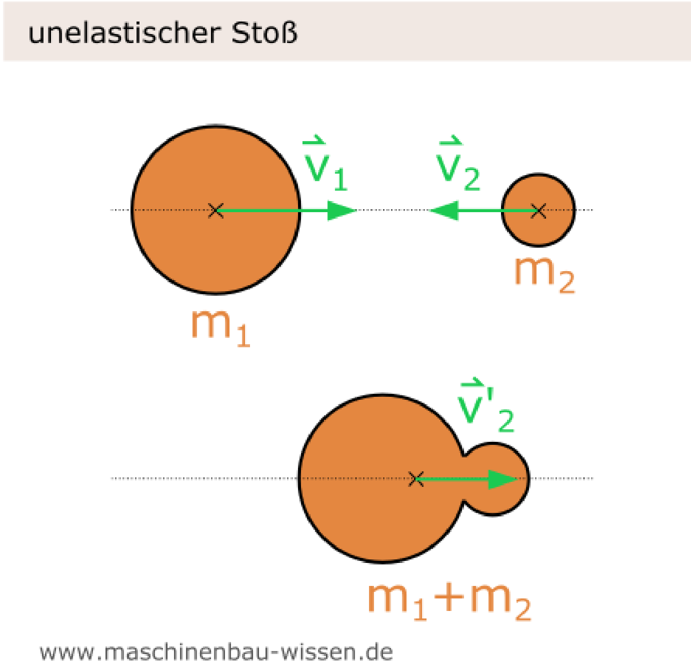
Bildquelle: https://www.maschinenbau-wissen.de/skript3/mechanik/kinetik/339-stoss-arten

Unelastischer Stoß:

Impuls-Erhaltung liefert:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v = (m_1 + m_2)v_2'$$

$$v = v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$



Beim unelastischen Stoß geht durch Verformung ein Teil der Energie als Bewegungsenergie verloren.

Daher tritt ein Energieverlust ΔW auf:

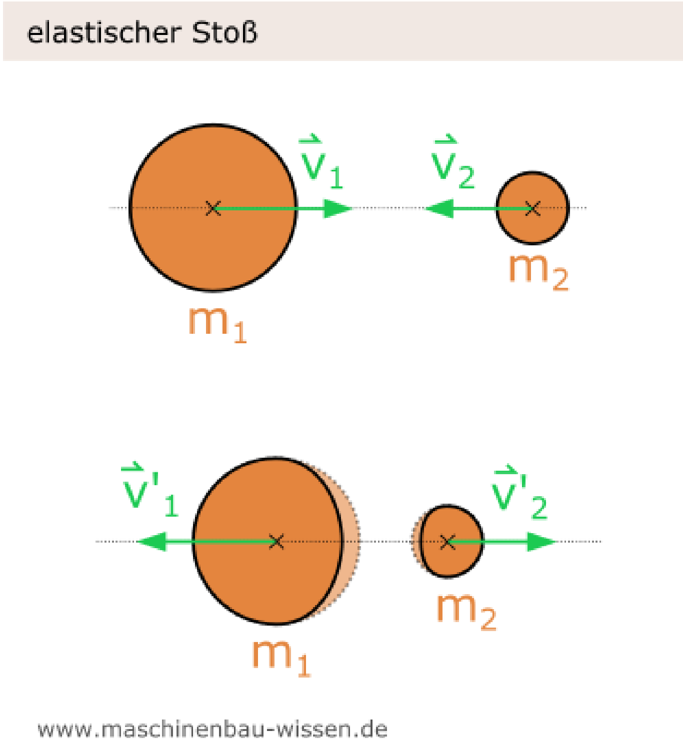
$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 v_2^2 \qquad W_2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2$$

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$$

Anmerkung: Geschwindigkeiten in Gegenrichtung sind negativ.

Bildquelle: https://www.maschinenbau-wissen.de/skript3/mechanik/kinetik/340-unelastischer-stoss

Elastischer Stoß:



Impuls-Erhaltung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

oder: $$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$

Energie-Erhaltung:

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2)$$

oder:

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

daraus:

$$m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$$

Mit dem umgeformten Impulssatz von oben folgt:

$$(v_1 + v_1') = (v_2' + v_2)$$

Umformen nach v_1' und v_2' , einsetzen in den umgeformten Impulssatz und auflösen nach v_1' $bzw.\,v_2'$ liefert dann:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{(m_2 + m_1)}$$

Teilelastischer Stoß:

Elastischer Stoß und Unelastischer Stoß sind idealisierte Sonderfälle!
Bei realen Stoßvorgängen wird nur ein Teil der Energie ΔW durch Verformung und Reibung aufgezehrt.
Von $\Delta W = W_1 - W_2$ wird ein Teil $(W_1 - W_2) \cdot k^2$wieder in W_{kin} zurückverwandelt.

(z.B. Flummi, Tennisball, Stahlkugel,…) ***k*** **heißt** „Stoßparameter“ oder „**Stoßziffer**“

Dann gilt:

$$\Delta W = (W_1 - W_2) - (W_1 - W_2) \cdot k^2 = (W_1 - W_2)(1 - k^2)$$

Mit ΔW von Seite 2-54 folgt dann:

$$\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 \cdot (1 - k^2)$$

Man sieht: k = 1 steht offenbar für den elastischen Fall

k = 0 beschreibt den unelastischen Fall

0 < k < 1 steht für teilelastisch; je kleiner, desto weniger elastisch

Man kann herleiten (machen wir hier nicht 😉), dass die Geschwindigkeitswerte nach dem Stoß dann so berechnet werden können:

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2(v_1 - v_2)k}{(m_1 + m_2)}$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1(v_2 - v_1)k}{(m_1 + m_2)}$$

Stoßziffer k: Angabe für den Grad an Elastizität beim Stoßvorgang.

k wird definiert über das Verhältnis rückgewandelter Energie nach dem Stoß (W_{II}) zu der Energie (W_I), die beim Stoßvorgang in Verformung übergeht:

$$k = \sqrt{\frac{W_{II}}{W_I}}$$

Bestimmung experimentell auch durch einen Rückprall-Versuch möglich:

Mit: h_1 = Fallhöhe

h_2 = Rückprallhöhe

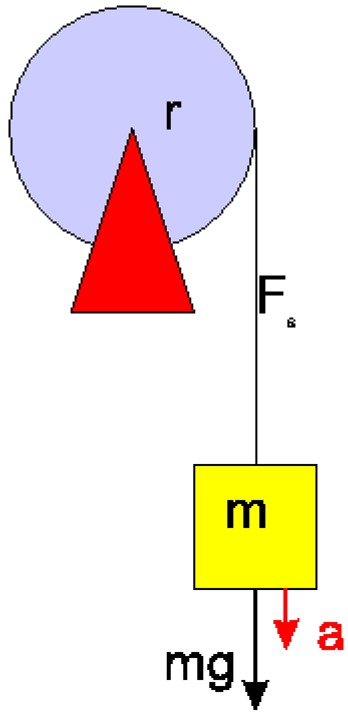
$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Typische Werte:

Stahl	0,8
Kork	0,6
Holz	0,5

Bildquelle: http://mathcentral.uregina.ca/QQ/database/QQ.09.15/h/abi1.html

2.5 Translation und Rotation starrer Körper



Massenpunkt kann auch beschleunigte Drehbewegung ausführen.

Ursache für Bahnbeschleunigung: Tangentialkraft $F_t = m \cdot a_t$

Jeder „Massepunkt" des Körpers erfährt eine solche Beschleunigung

Beschlenigung hängt ab von der Entfernung Drehachse – Massepunkt

☞ Wichtig: **Lage der Drehachse**

☞ Zweckmäßig: Übergang zu „Dreh-Koordinaten"

$\varphi =$ Drehwinkel

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega =$ Winkelgeschwindigkeit

$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \alpha =$ Winkelbeschleunigung

Bildquelle: http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/physing1/node22.html

Starrer Körper: Viele Massepunkte $\boldsymbol{\Delta m_i}$, deren Lage zueinander unverändert bleibt.

Translation: Fortschreitende Bewegung; dabei kann starrer Körper durch einen einzelnen Massepunkt $m = \sum_i \Delta m_i$ mit Lage im „Schwerpunkt" ersetzt werden.

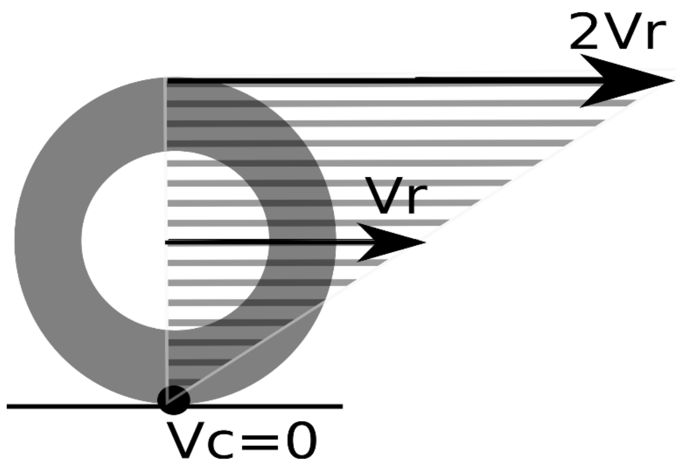
Rotation: Drehbewegung um eine bestimmte Achse; jedes Δm_i des starren Körpers führt eine Kreisbewegung aus mit Radius r_i (Abstand Drehachse – Δm_i)

Rollen = Uberlagerung **Translation + Rotation**

Abrollen auf Mantel: Umfangsgeschwindigkeit v_r

Achs-Geschwindigkeit: Translation mit v_r

Folge: oben $v = 2 \cdot v_r = 2 \cdot r \cdot \omega$
unten $v = 0$
Mantel-Punkt beschreibt Zykloidenbahn



BIldquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Rollen

Rollendes Rad:

Bahngeschwindigkeit am Umfang

hat gleichen Betrag wie Translations-

geschwindigkeit der Radachse.

Andernfalls: Schleifen/Rutschen!

Bewegungsenergie:

Kinetische Energie für Translation (Achse): $W_{kin,tr} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Kinetische Energie für Rotation: je Δm_i $\Delta W_i = \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$

Gesamte Rotations-Energie: $W_{kin,rot} = \sum_i \Delta W_i = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum_i r_i^2 \cdot \Delta m_i$

Gesamt-Energie (Translation + Rotation): $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_i r_i^2 \cdot \Delta m_i \right) \cdot \omega^2$

Bildquelle: Von Zorgit - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4552689

Der in rot geschriebene Klammerausdruck ist eine Größe, die die Massenverteilung erfasst.

Der Wert ($\sum_i r_i^2 \cdot \Delta m_i$) wird als „**Massenträgheitsmoment**" bezeichnet. Diese Größe ersetzt bei Rotation die Masse, da bei der Rotation die Verteilung der Masse bezüglich der Rotations-Achse wichtig ist.

2.6 Massenträgheitsmoment

Der Wert ($\sum_i r_i^2 \cdot \Delta m_i$) heißt „Massenträgheitsmoment" bezüglch einer festgelegten Drehachse, in der Regel einer Achse durch den Schwerpunkt eines Körpers.

Definition: Massenträgheitsmoment $J(=\theta) = (\sum_i r_i^2 \cdot \Delta m_i)_{\Delta m \to 0} = \int_m r^2\, dm$

Einheit des Massenträgheitsmoments $[J] = [\theta] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$

J hängt ab von: a) Verteilung der Masse über den Körper

b) Lage der Drehachse

Rotationsenergie $W_{kin,rot}$ wird somit: $W_{kin,rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$

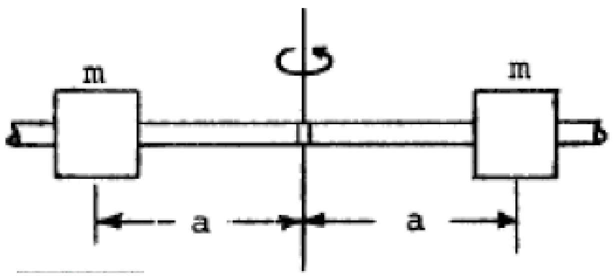
Gesamtenergie Translation+Rotation: $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$

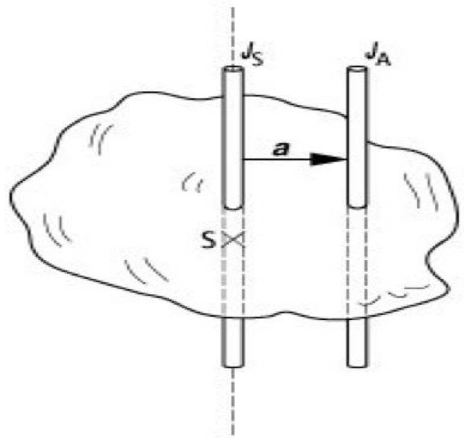
Anmerkung:

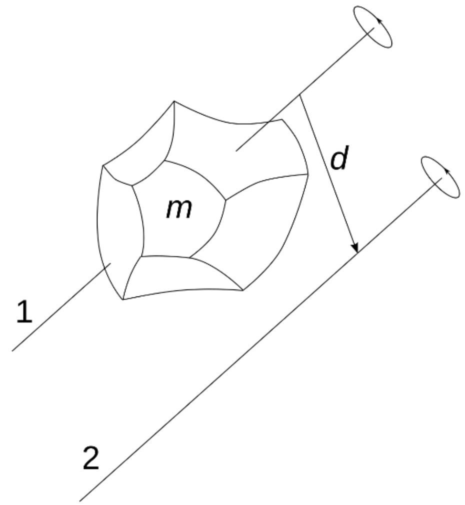
Jede konkrete Achslage durch den Schwerpunkt hat prinzipiell einen eigenen Wert für J.
Im Prinzip gibt es für einen Körper unendlich viele Werte für J.
Geometrie und Symmetrie eines Körpers reduzieren diese Werte.
Man definiert sogenannte „Hauptträgheitsachsen“.

Für Berechnung des Massenträgheitsmoments unbedingt korrekte Achslage beachten!

Was tun, wenn die Rotationsachse keine „Schwerpunktsachse“ ist?

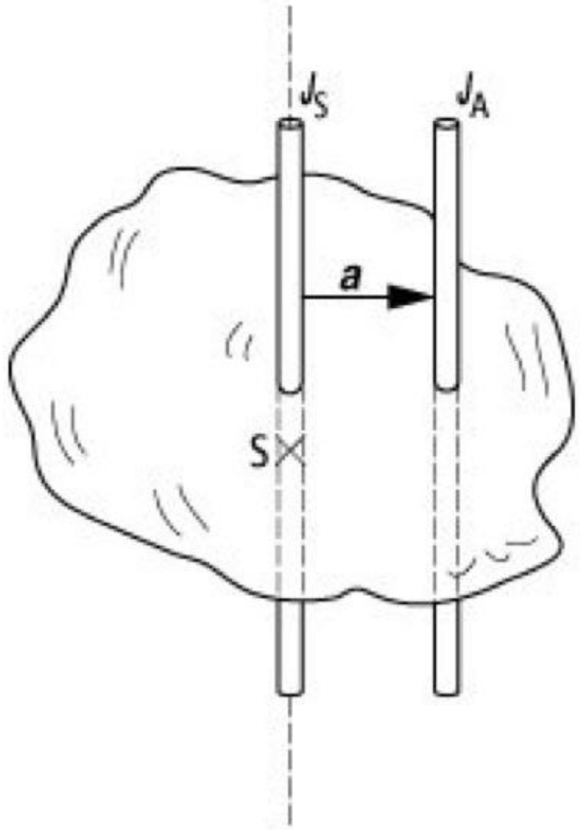






2.6.1 Satz von Steiner

Massenträgheitsmoment J_A bezogen auf eine Rotationsachse, die im Abstand a parallel zu einer Achse liegt, die durch den Schwerpunkt S geht.



J_S = Massenträgheitsmoment der Schwerpunkts-Achse

m = Masse des Körpers

a = Abstand Schwerpunkts-Achse zu Rotations-Achse

MTM bezüglich A:

$$J_A = J_s + m \cdot a^2$$

„Steinerscher Satz“

Wichtig: Die Achse A **muss <u>parallel</u>** zur Achse in S liegen, sonst wird’s falsch!

Bildquelle: https://www.spektrum.de/lexikon/physik/satz-von-steiner/12731

Beispiele zur Berechnung von MTM:

a) Trägheitsmoment eines **Vollzylinders** bezüglich Symmetrieachse (Längsachse)

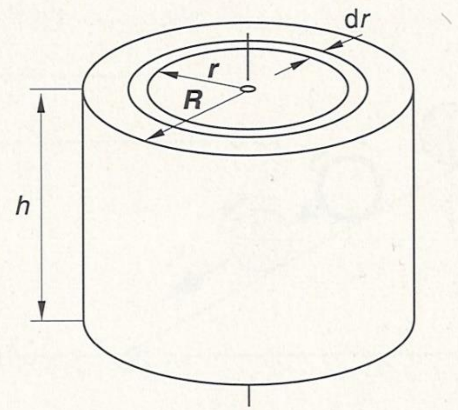


Abb. 3.16 Trägheitsmoment eines Vollzylinders bzgl. seiner Symmetrieachse

Volumenelement: dV = Hohlzylinder, dünnwandig

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr$$

Integration: Summe der Zylinder von 0 bis R:

mit $\rho = Dichte$

$$\int r^2 dm = \int r^2 \cdot \rho dV = \rho \int r^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4}$$

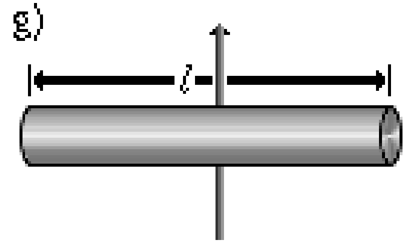
Mit der Gesamtmasse $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$ folgt:

Massenträgheitsmoment Vollzylinder: $J = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$

Bildquelle: U.Leute, Physik, Hanser-Verlag, München, 1995

b) Trägheitsmoment eines **langen, dünnen Stabes**

(„lang, dünn“: $\emptyset \ll l$)

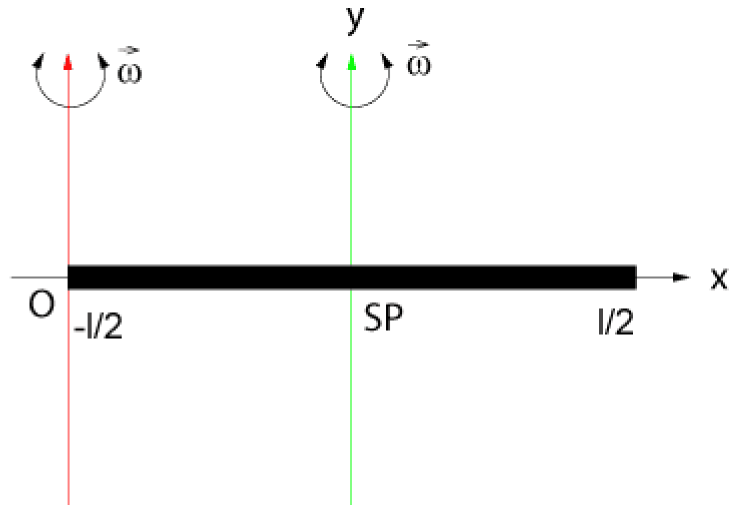


Achse senkrecht zu Stablängsachse durch Schwerpunkt S mit $dm = \rho \cdot A \cdot dx$

$$J_s = 2\int_0^{\frac{M}{2}} x^2\, dm = 2\rho A \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx = 2\rho A \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3$$

Mit $M = \rho \cdot A \cdot l$ folgt:

$$J_S = 2\rho A \frac{l \cdot l^2}{3 \cdot 8} = \frac{1}{12} M l^2$$

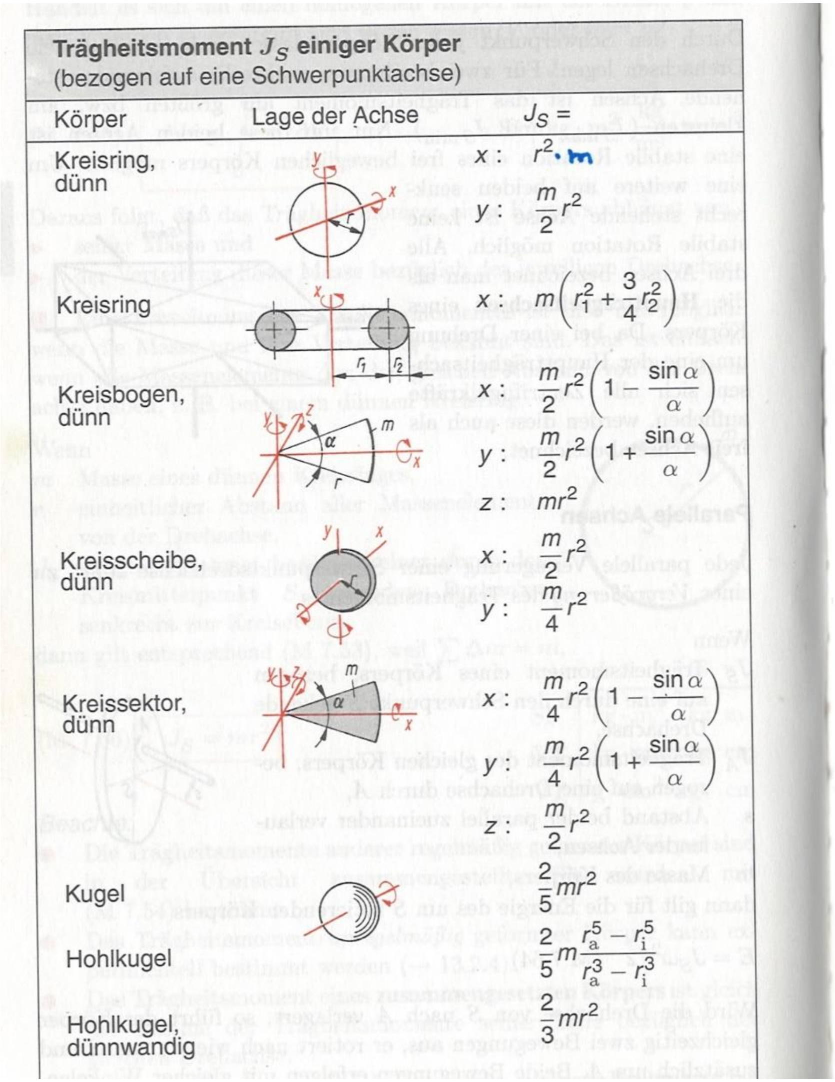


Bei Rotation um Stab-Ende (mit Satz von Steiner):

$$J_P = J_S + Ma^2 = J_S + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = J_S + M\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{4}{12}Ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2$$

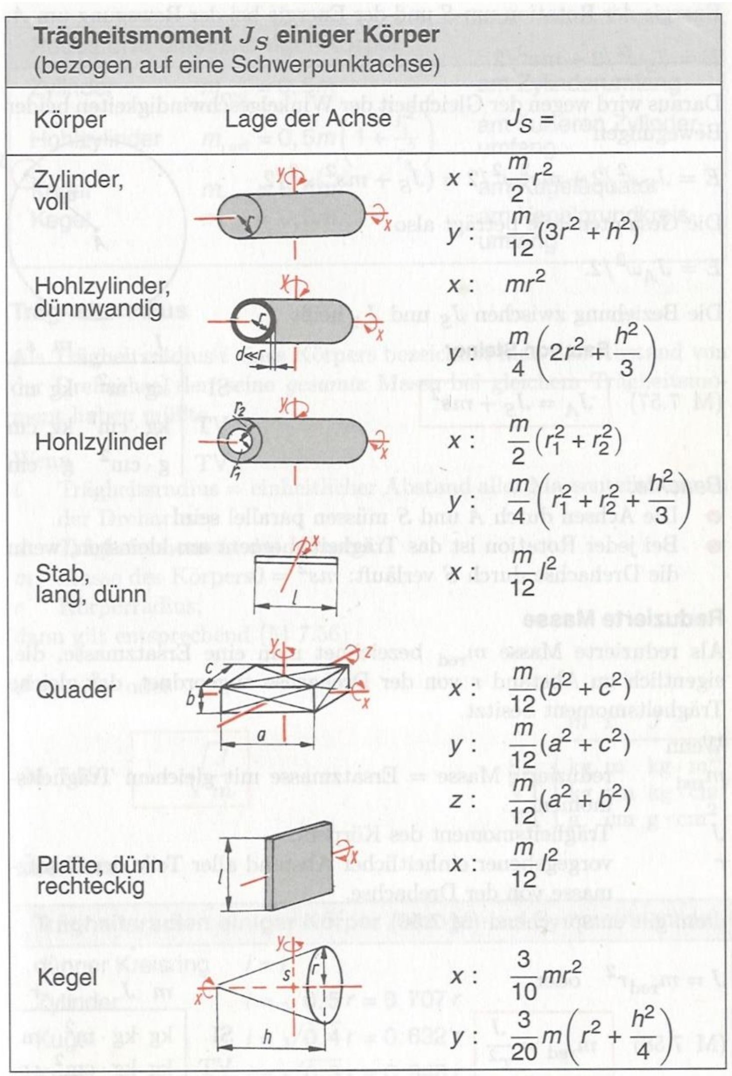
Bildquelle: https://itp.uni-frankfurt.de/~luedde/Lecture/Mechanik/Intranet/Skript/Kap7/node5.html

Liste mit Massenträgheitsmomenten verschiedener Körper



Trägheitsmoment J_S einiger Körper (bezogen auf eine Schwerpunktachse)

Körper	Lage der Achse	$J_S =$
Kreisring, dünn		$x: \; r^2 \cdot m$ $y: \; \frac{m}{2} r^2$
Kreisring		$x: \; m\left(r_1^2 + \frac{3}{4} r_2^2\right)$
Kreisbogen, dünn		$x: \; \frac{m}{2} r^2 \left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$ $y: \; \frac{m}{2} r^2 \left(1 + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$ $z: \; mr^2$
Kreisscheibe, dünn		$x: \; \frac{m}{2} r^2$ $y: \; \frac{m}{4} r^2$
Kreissektor, dünn		$x: \; \frac{m}{4} r^2 \left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$ $y: \; \frac{m}{4} r^2 \left(1 + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$ $z: \; \frac{m}{2} r^2$
Kugel		$\frac{2}{5} mr^2$
Hohlkugel		$\frac{2}{5} m \frac{r_a^5 - r_i^5}{r_a^3 - r_i^3}$
Hohlkugel, dünnwandig		$\frac{2}{3} mr^2$



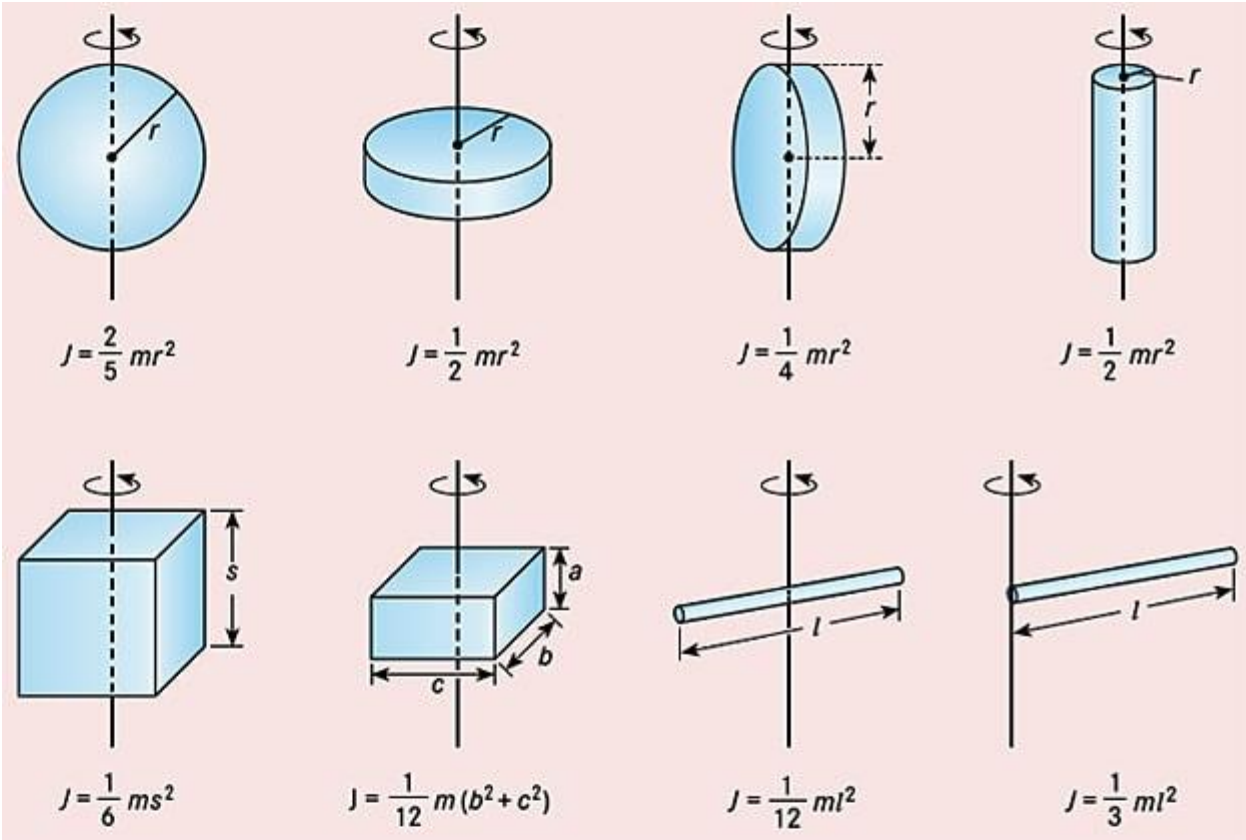
Trägheitsmoment J_S einiger Körper (bezogen auf eine Schwerpunktachse)

Körper	Lage der Achse	$J_S =$
Zylinder, voll		$x: \; \frac{m}{2} r^2$ $y: \; \frac{m}{12}(3r^2 + h^2)$
Hohlzylinder, dünnwandig		$x: \; mr^2$ $y: \; \frac{m}{4}\left(2r^2 + \frac{h^2}{3}\right)$
Hohlzylinder		$x: \; \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$ $y: \; \frac{m}{4}\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{h^2}{3}\right)$
Stab, lang, dünn		$x: \; \frac{m}{12} l^2$
Quader		$x: \; \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ $y: \; \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $z: \; \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
Platte, dünn rechteckig		$x: \; \frac{m}{12} l^2$
Kegel		$x: \; \frac{3}{10} mr^2$ $y: \; \frac{3}{20} m\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right)$

Bildquelle: Kuchling, Taschenbuch der Physik

Einige ausgewählte Formen aus der vorigen Tabelle

Voll-Kugel Scheibe Scheibe Voll-Zylinder



Würfel Quader Stab Stab(Ende)

Bildquelle: https://learnattack.de/schuelerlexikon/physik/traegheitsmoment

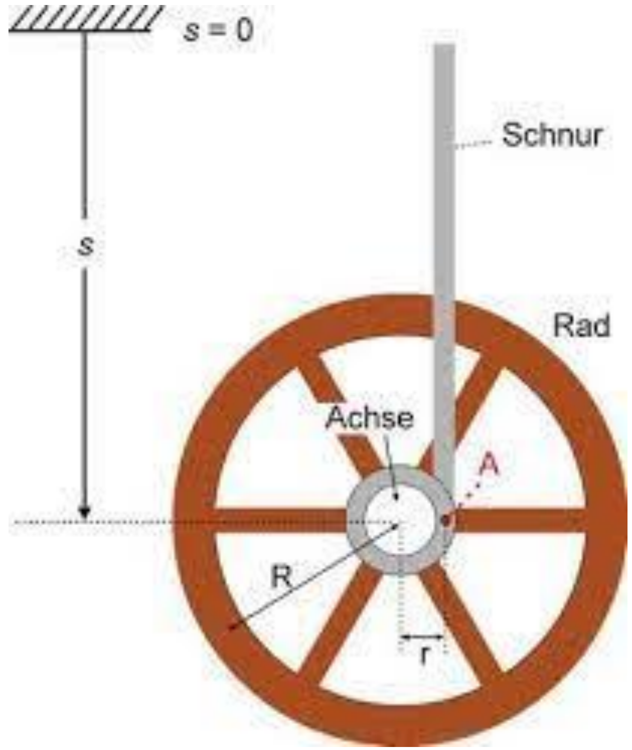
2.6.2 Analogie zwischen Translation und Rotation

Man kann Gleichungen für die Translationsbewegungen umschreiben auf Rotationsbewegungen, indem man die analogen Größen einfach austauscht.

Translation	Gleichung	Einheit	Rotation	Gleichung	Einheit
Weg	s	m	Winkel	φ	rad
Geschwindigkeit	$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$	m/s	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$	$\mathrm{rad/s} = \mathrm{s}^{-1}$
Beschleunigung	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	$\mathrm{m/s^2}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$	$\mathrm{rad/s^2} = \mathrm{s}^{-2}$
Masse	m	kg	Trägheitsmoment	$J = \int r^2 \mathrm{d}m$	$\mathrm{kg \cdot m^2}$
Kraft	$F = ma = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$	$\mathrm{N = kg \cdot m/s^2}$	Drehmoment	$M = J\alpha = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$	$\mathrm{N \cdot m}$
Impuls	$p = mv$	$\mathrm{kg \cdot m/s = N \cdot s}$	Drehimpuls	$L = J\omega$	$\mathrm{kg \cdot m^2/s = N \cdot m/s}$
Arbeit	$W = \int F \mathrm{d}s$	$\mathrm{N \cdot m = J = W \cdot s}$	Arbeit	$W = \int M \mathrm{d}\varphi$	$\mathrm{N \cdot m = J = W \cdot s}$
Kinet. Energie	$E = mv^2/2$	$\mathrm{N \cdot m = J = W \cdot s}$	Kinetische Energie	$E = J\omega^2/2$	$\mathrm{N \cdot m = J = W \cdot s}$
Leistung	$P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t = Fv$	$\mathrm{W = J/s}$	Leistung	$P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t = M\omega$	$\mathrm{W = J/s}$

Bildquelle: J. Rybach, Physik für Bachelors, Hanser-Verlag, München, 2008

2.6.3 Beispiele zum Massenträgheitsmoment



Maxwellsches Rad: MTM J=?

Angaben: Masse m = 0,5 kg
Fallhöhe s = 0,6 m
Radius r = 2,8 mm
Zeit für s: t = 6,9 s

Durchschnittsgeschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{v_0 + \hat{v}}{2}$

Max. Geschwindigkeit ($v_0 = 0$): $\hat{v} = \frac{2s}{t} = \hat{\omega} \cdot r$

Energie-Erhaltung: $mgs = \frac{1}{2} m\hat{v}^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 \quad \rightarrow \quad mgs = \frac{1}{2} m\hat{v}^2 + \frac{1}{2} J \frac{\hat{v}^2}{r^2}$

Auflösen: $J = \frac{2r^2}{\hat{v}^2} mgs - mr^2$

Mit $\hat{v} = \frac{2s}{t}$ $\quad J = \frac{2r^2 mgst^2}{4s^2} - mr^2 = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2s} - 1 \right) = 1{,}52 \cdot 10^{-3}$ kg·m²

Hilfsmittel zur Abschätzung des MTMs: „**Trägheitsradius r_t**“

Annahme, dass die gesamte Masse an einem Ort im Abstand r_t liegt.

Beispiel: Dünnwandiger Ring oder dünnwandiges Rohr mit Radius r_t

MTM in diesem Fall: $J = m \cdot r_t^2$

Wenn man dieses J gleichsetzt mit dem gemessenen J_m und dann nach r_t auflöst, erhält man damit quasi den „mittleren Abstand“ der rotierenden Masse.

Für das obige Beispiel wäre das :

$$J_m = m \cdot r_t^2 \rightarrow \quad r_t = \sqrt{\frac{J_m}{m}}$$

Für das Beispiel: $r_t = \sqrt{\frac{1{,}52 \cdot 10^{-3}}{0{,}5}}\, m$ =5,5 cm

Im Beispiel oben entspricht dies ungefähr dem Radius R in der Skizze.
Achtung, das ist nicht der Aussenradius des Rades!

Bildquelle: https://www.praktikumphysik.uni-hannover.de/fileadmin/praktikumphysik/Versuche/NF/A-Mechanik/A07_NF.pdf

Beispiel: **Rollende Zylinder**

Vollzylinder und Hohlzylinder

Rollen unterschiedlich schnell!

a) Vollzylinder (r_a, m_a)
b) Hohlzylinder (r_b, m_b)

$$r_a = r_b \qquad m_a = m_b$$

- Bei gleichzeitigem Start ist der Vollzylinder(a) immer schneller unten angekommen als der Hohlzylinder(b).
- Grund: Unterschiedliches Massenträgheitsmoment $J_b > J_a$
- Ausgangsenergie W_{pot} für beide Körper gleich
- Bei b) wird ein größerer Anteil von W_{pot} in Rotationsenergie W_{rot} gewandelt.

Bildquelle: https://www.experimente.physik.uni-freiburg.de/Mechanik_der_festen_Koerper/drehbewegungundkreisel/traegheitsmoment/traegheitsmomentbeiderrollbewegung

Rechnung dazu (mit $r_a = r_b = r$):

MTM: a) Vollzylinder $J_{VZ} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$

b) Hohlzylinder $J_{HZ} = m \cdot r^2$

Energie-Erhaltung: $W_{pot} = W_{tr} + W_{rot}$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2}$$

a) Vollzylinder $mgh = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}J_{VZ}\omega_a^2 = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}J_{VZ}\frac{v_a^2}{r^2}$

b) Hohlzylinder $mgh = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}J_{HZ}\omega_b^2 = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}J_{HZ}\frac{v_b^2}{r^2}$

Daraus folgt: a) Vollzylinder $mgh = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\frac{v_a^2}{r^2} \rightarrow v_a = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

c) Hohlzylinder $mgh = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}(mr^2)\frac{v_b^2}{r^2} \rightarrow v_b = \sqrt{gh}$

Also ist klar: $v_a > v_b$ und dies unabhängig von der Masse!

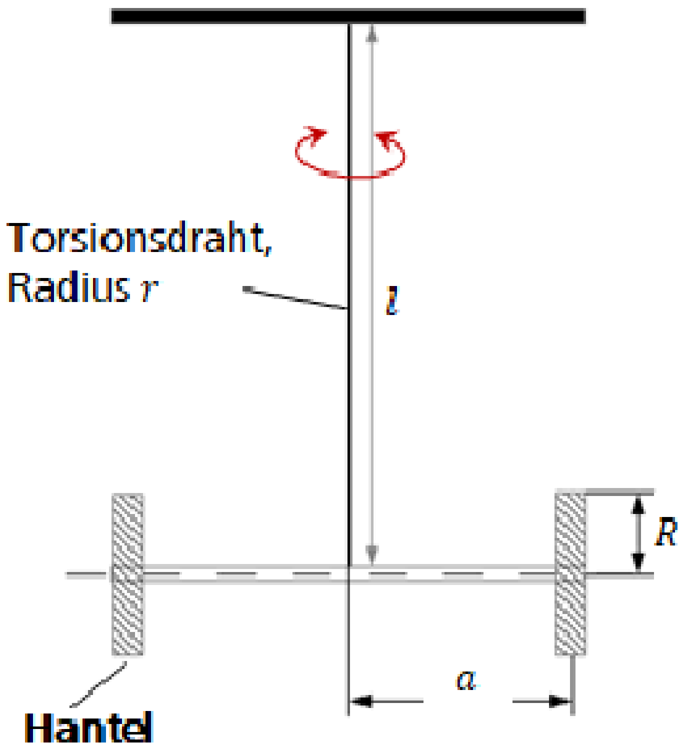
Beispiel: **MTM Hantel** (z.B. Physik-Labor, Versuch 3)

Vorgaben: Masse je Hantelscheibe m = 2 kg

Masse Stange m = 0 kg

Scheiben-Radius R = 8 cm

Scheiben-Abstand a = 15 cm



Grundlagen Abb. 1: Versuchsaufbau

Drehung um vertikale Achse:

MTM der Scheibe (Hochachse!) $J = \frac{1}{4}mR^2$

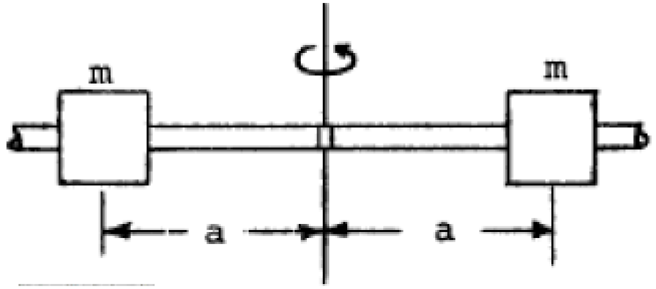
Berechnung des MTM für die gesamte Hantel:

Zwei Möglichkeiten:

a) Näherung: Scheiben = Massenpunkte

b) Exakt: Scheibe = ausgedehnte Masse

Bildquelle: Labor-Anleitung, Physik-Labor THU



Version a) Hantelscheiben = Massenpunkte

Für eine Scheibe: $J = \int r^2 dm = mr^2$

Hier also insgesamt: $J = 2ma^2$

Zahlen eingesetzt: J = 2•2 kg•(0,15 m)² = 0,09 kgm²

Version b) Hantelscheiben = dünne Kreisscheiben; Rotation um versetzte Hochachse

Für eine Scheibe: $J = \frac{1}{4}mR^2$ Achtung: Hier Satz von Steiner notwendig!

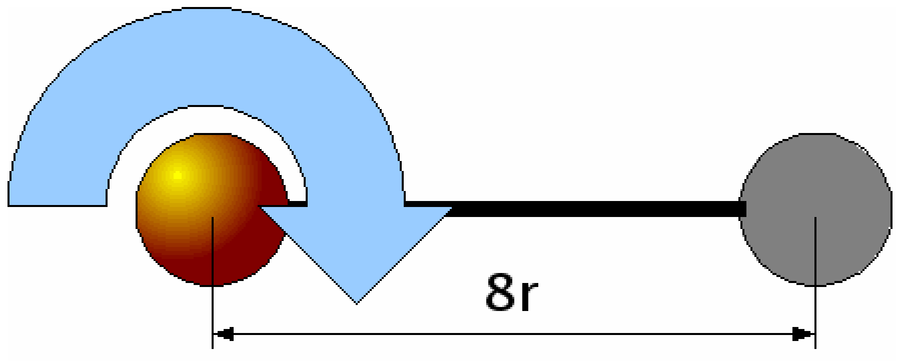
mit Satz von Steiner: $J = \frac{1}{4}mR^2 + ma^2$

Gesamt(2 Scheiben) $J = 2\left(\frac{1}{4}mR^2 + ma^2\right)$

Zahlen eingesetzt: J = 2•(1/4•2 kg•(0,08 m)²+2 kg•(0,15 m)²) = 0,096 kgm²

☞ J ist bei b) größer; Hauptanteil kommt aus dem Steinerschen Satz.

Beispiel: **MTM Hantel, Rotation um Ende**



2 Kugeln (jeweils Masse m, Radius r)

Abstand der Kugeln: 8r

Stab masselos

Linke Kugel: $J = \frac{2}{5}mr^2$

Rechte Kugel: $J = \frac{2}{5}mr^2 + m(8r)^2$

Gesamt-Wert: $J = \frac{2}{5}mr^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(8r)^2 = \frac{4}{5}mr^2 + 64mr^2$

Falls der Stab nicht masselos wäre (Stabmasse M, Stablänge l = 6r)

Zusätzlich: $J_{Stab} = \frac{1}{12}Ml^2 + M(4r)^2 = \frac{1}{12}M(6r)^2 + M(4r)^2 = 19Mr^2$

Der erste Term beschreibt den Stab, der zweite Term ist Steinerscher Satz;

Halbe Länge des Verbindungs-Stabs ist um Radius r kürzer als Abstand zur Drehachse.

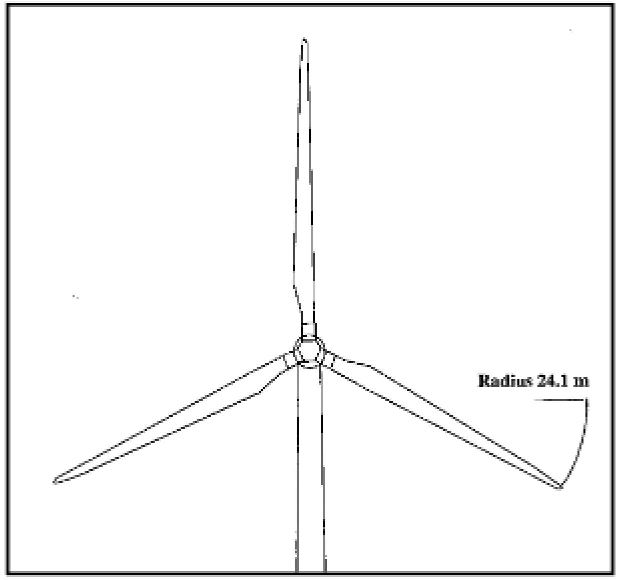
Bildquelle: https://www.physikerboard.de/topic,5801,-steiner%3A-kugel-und-scheibe.html

Beispiel: **MTM Windkraft-Rotor**

Aufgabe 3:

Eine Windkraftanlage hat einen dreiblättrigen Rotor. Die Nabe besitzt eine Masse von 0,8 t, jedes Rotorblatt wiegt 0,5 t. Der Rotor hat einen Durchmesser von 48,2 m, die Nabe hat 1,2 m Durchmesser.

a) Wie groß ist das Massenträgheitsmoment des Rotors? Nehmen Sie dazu an, die Nabe sei ein homogener Vollzylinder, die Rotorblätter lange dünne Stäbe mit homogener Massenverteilung. (5)



Zerlegen der Struktur in 4 Anteile: Nabe + 3 Rotorblätter (nach Anleitung in der Frage):

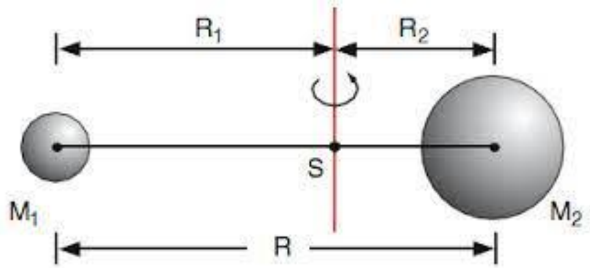
1. Nabe: Vollzylinder: $J_N = \frac{1}{2} m_N r_N^2$ = 144 kgm²
2. Rotorblatt: Stab, Ende: $J_B = \frac{1}{12} m_B l^2 + m_B \left(\frac{l}{2}\right)^2 =$

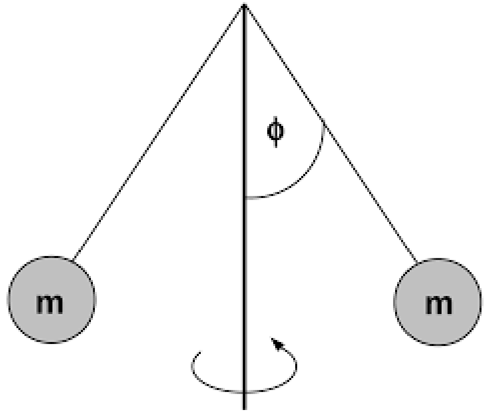
$$= \frac{1}{12}\, 500kg(23{,}5m)^2 + 500kg(11{,}75m)^2 = 92041{,}65\; kgm^2$$

3. Gesamtes Massenträgheitsmoment:

$J_{ges} = J_N + 3 \cdot J_B = \ 144 + 3 \cdot (92041{,}65)\ kgm^2$ = 276.269 kgm² !!

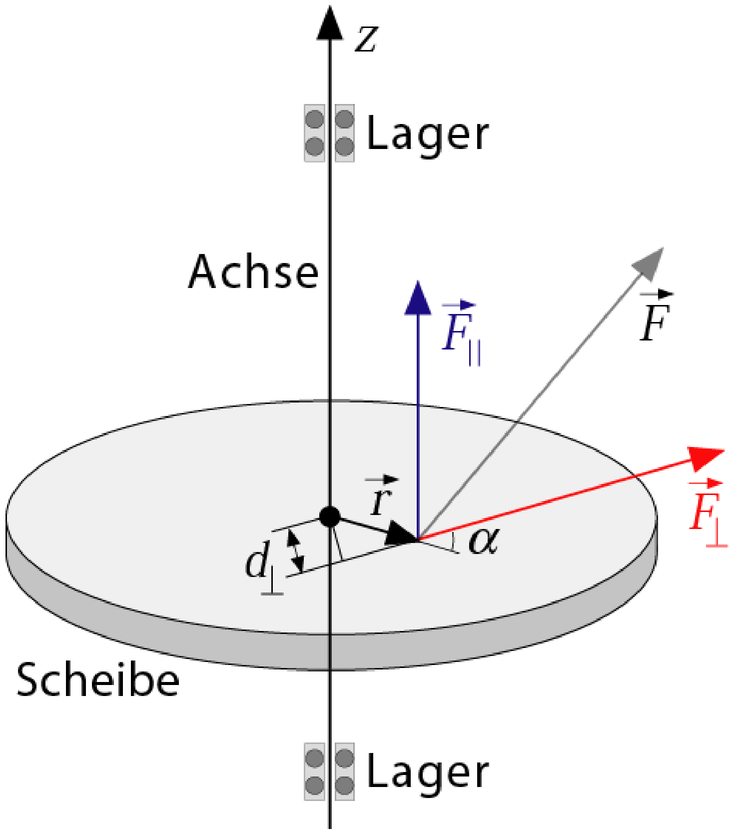
Merke: Bei Systemen, die aus mehreren „Strukturteilen“ bestehen und um eine gemeinsame Achse rotieren, kann man das Gesamt-MTM aus der Summe der rotierenden Einzelteile ermitteln. Zu beachten ist dabei die Achslage (Steiner).





Bildquelle: http://www.physik.uni-regensburg.de/studium/praktika/chem/Versuche/Drehpendel.pdf
https://www.ph.tum.de/academics/bsc/break/2010s/fk_PH0004_04_course.pdf
http://www.dsemmler.de/Lehre/Exphy1Uebung/Loesung11.pdf

2.7 Drehimpuls, Drehimpuls-Erhaltung



Starrer Körper, um eine fest gelagerte Achse drehbar (hier z.B. Scheibe).

In einem Punkt (beschrieben durch Vektor $\vec{r}$) greift eine Kraft $\vec{F}$ an.

Kraftkomponente $\overrightarrow{F_{||}}$ parallel zur Achse gibt keine Drehung.
Kraftkomponente in Richtung $\vec{r}$ (Radialkraft) ergibt ebenfalls keine Drehung.
Die Komponente $\overrightarrow{F_\perp}$ in der Ebene senkrecht zur Drehachse verursacht mit ihrer Komponente senkrecht zu $\vec{r}$ ein

Definition:	**Drehmoment** $\vec{M} = \vec{r} \times \overrightarrow{F_\perp}$	$[M]$ = Nm

Bildquelle: https://docplayer.org/31606573-Drehbewegungen-rotation.html

- Betrag von $\vec{M}$: $|M| = r \cdot F_{\perp} \cdot \sin\alpha$ (1)
- Richtung von $\vec{M}$ ist senkrecht zur Richtung von $\vec{r}$ und $\overrightarrow{F_{\perp}}$, also in Richtung derDrehachse (Rechtsschrauben-Regel)

Durch Drehmoment M erhält der starre Körper eine Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$

Aus dem Stillstand/Ruhelage wird er in der Zeit t gedreht um:

$$\varphi = \frac{1}{2}\ddot{\varphi} \cdot t^2$$

Dabei legt der Angriffspunkt von $\overrightarrow{F_{\perp}}$den Weg s zurück:

$$s = r\varphi = r\frac{1}{2}\ddot{\varphi} \cdot t^2$$

$\overrightarrow{F_{\perp}}$ verrichtet dabei Beschleunigungsarbeit (siehe auch (1)):

$$W_B = F_{\perp}\sin(\alpha) \cdot s = F_{\perp}\sin(\alpha) r\frac{1}{2}\ddot{\varphi} \cdot t^2 = |M|\frac{1}{2}\ddot{\varphi} \cdot t^2$$

Die Beschleunigungsarbeit führt zu Rotationsenergie des Körpers:

$$W_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}J\ddot{\varphi}^2 t^2 \qquad \text{wegen } \dot{\varphi} = \ddot{\varphi}t$$

Wegen Energieerhaltungssatz gilt: $W_B = W_{rot}$

$$\frac{1}{2}M\ddot{\varphi}t^2 = \frac{1}{2}J\ddot{\varphi}^2 t^2$$

Damit erhält man:	$\vec{M} = J\ddot{\vec{\varphi}} = J\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\,\frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$

Dies ist die **Dynamische Grundgleichung für Rotation**

Analog zum Drehmoment kann man auch für den Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ bei Drehung um eine feste Achse die entsprechende Größe finden:

Definition:	**Drehimpuls** $\vec{L} = J \cdot \dot{\vec{\varphi}}$	$[L] = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}}$

Wenn $J = konst.$ ist, dann gilt $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Das bedeutet: **Drehmoment = Drehimpuls-Änderung**

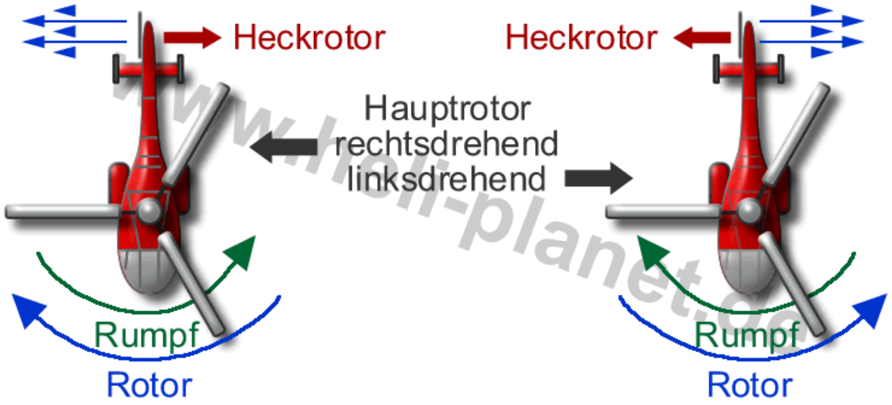
Ohne äußeres Drehmoment, d.h. $\vec{M} = 0$, folgt direkt der

Drehimpulserhaltungssatz: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L} = konst.$

Das bedeutet, dass in einem System, dem von außen kein Drehmoment zugeführt wird, bei einer Änderung des Zustandes (z.B. Änderung von J oder ω) ein entsprechendes Gegendrehmoment auftritt.

Anwendungsbeispiele:

Hubschrauber-Antrieb,
Drehschemel-Versuch,
Pirouetten,…



Bildquelle: https://www.heli-planet.com/aerodynamik.html

Beispiel: **Drehimpulserhaltung Pirouetten-Drehung/Drehschemel-Versuch**

Eislauf-Pirouette:

Start (links) mit abgespreizten Extremitäten;

Drehzahl n_1, MTM J_1

→ Drehimpuls L_1

Drehimpuls = konstant

$L_1 = L_2$

Heranziehen (rechts) der Extremitäten an die Drehachse;

MTM J_2, Drehzahl n_2,

$$L_1 = L_2 \quad \rightarrow \quad J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \quad \rightarrow \quad J_1 2\pi n_1 = J_2 2\pi n_2 \quad \rightarrow \quad n_2 = n_1 \frac{J_1}{J_2}$$

Bildquelle: https://www.leifiphysik.de/mechanik/drehbewegungen/grundwissen/drehimpuls

Drehschemel-Versuch:

Gleicher physikalischer Hintergrund wie beim ersten Beispiel.

Links: Start mit L_1 bei großem J_1

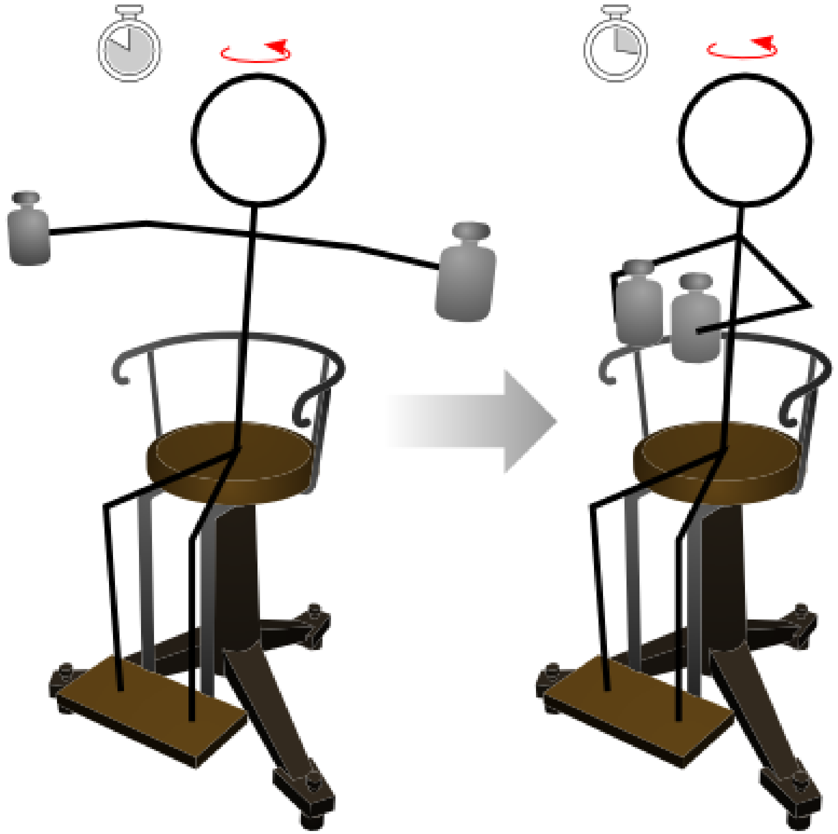
Rechts: $J_2 << J_1$

Folge: Wegen $L_1 = L_2 = konst.$
steigt ω_1 auf ω_2

Winkelgeschwindigkeit erhöht sich:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1$$



J_1, ω_1 J_2, ω_2

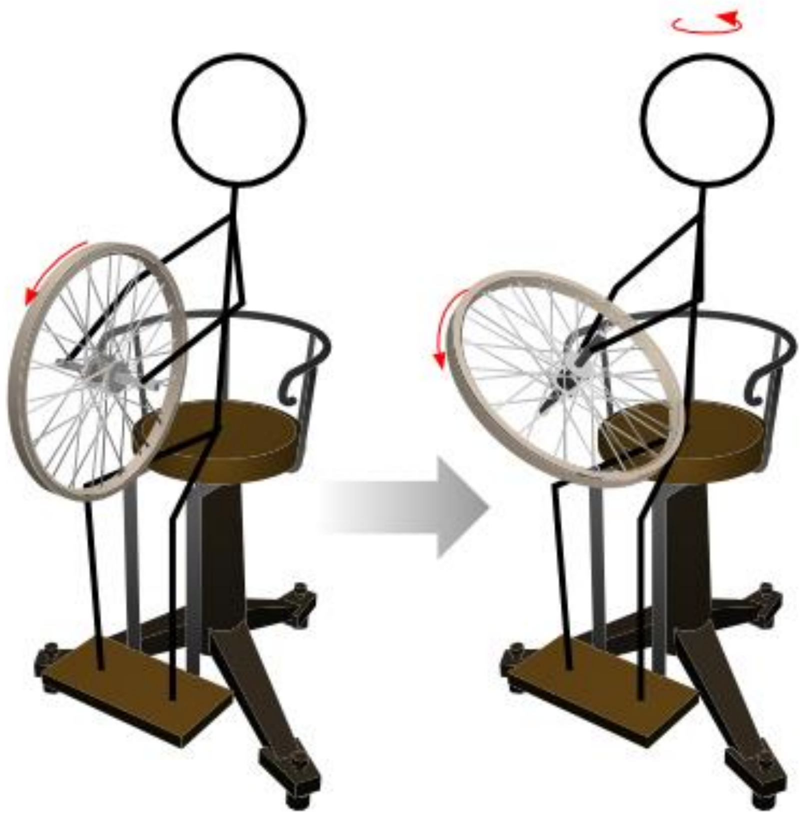
Bildquelle: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/1195

Drehschemel-Versuch, Teil 2:

Mit rotierendem Rad wird Drehimpuls L in das System Drehstuhl importiert.

Solange $\vec{L}$ senkrecht zur Rotationsachse des Drehstuhls liegt: Keine Drehung des Systems!

Wird das Rad um 90° gedreht, Rotation, so dass $\sum \vec{L} = 0$.



Folge:
Je nach Achslage (Drehrichtung) des Rades „Gegendrehung" des Drehstuhls

Bildquelle: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/1195

Noch ein Sport-Beispiel:

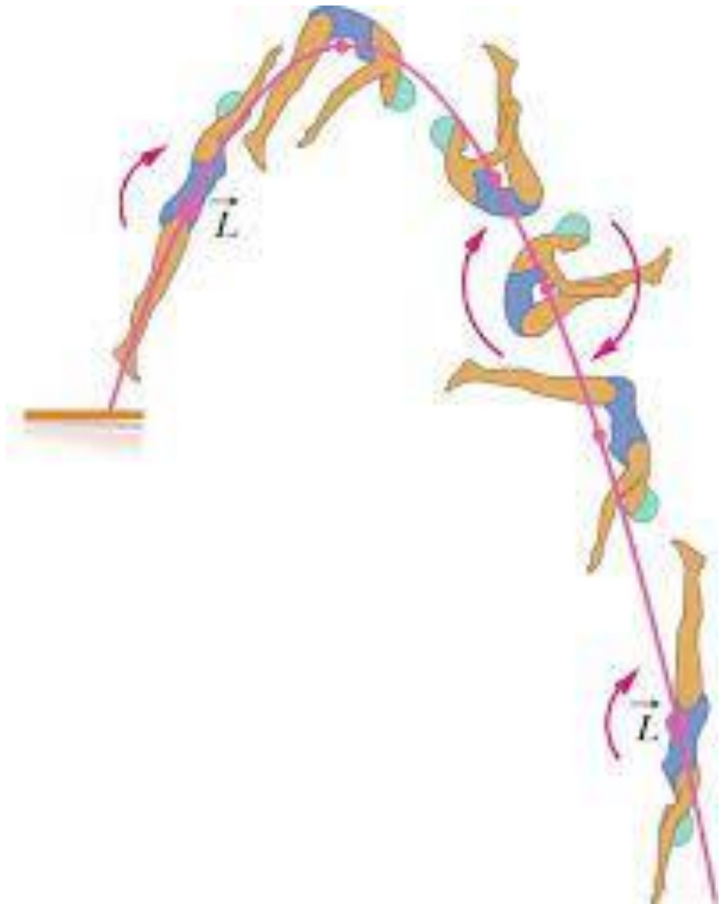
Salto beim Turmspringen

Nach dem Absprung in der Flugphase
bleibt der Drehimpuls $L = konst.$

Durch Veränderung der Körper-Geometrie (Anziehen von Armen und Beinen) wird das Trägheitsmoment J verändert.

Mit der Änderung von J wird die Drehung gesteuert, insbesondere am Ende gestoppt.

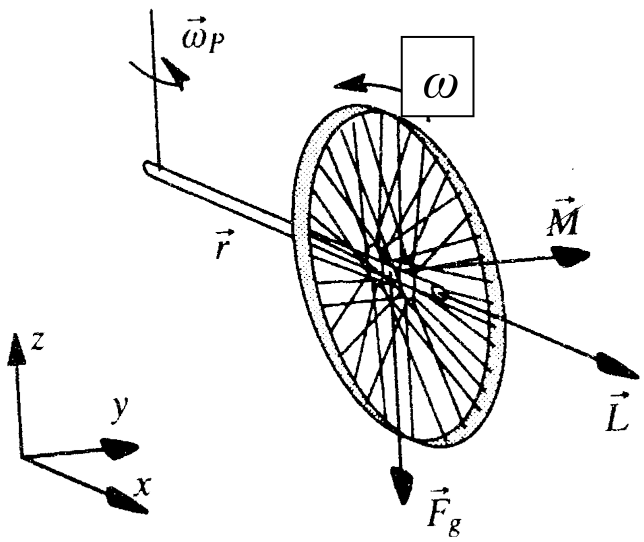
Klassisches Beispiel für
Überlagerung Translation+ Rotation

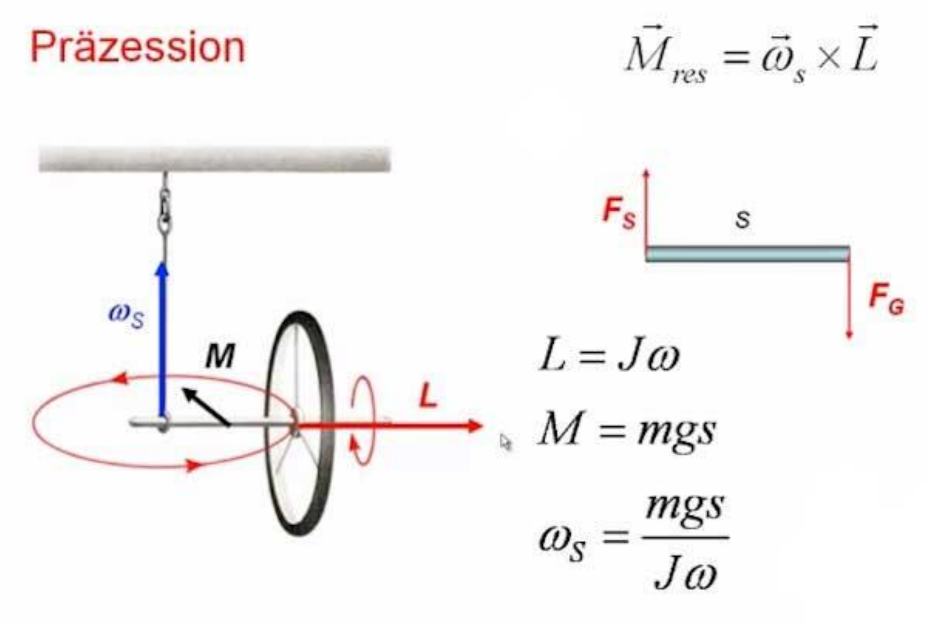


Bildquelle: LMU München, https://nanopdf.com/download/7vorlesung-5_pdf

Präzession einer Fahrrad-F elge:

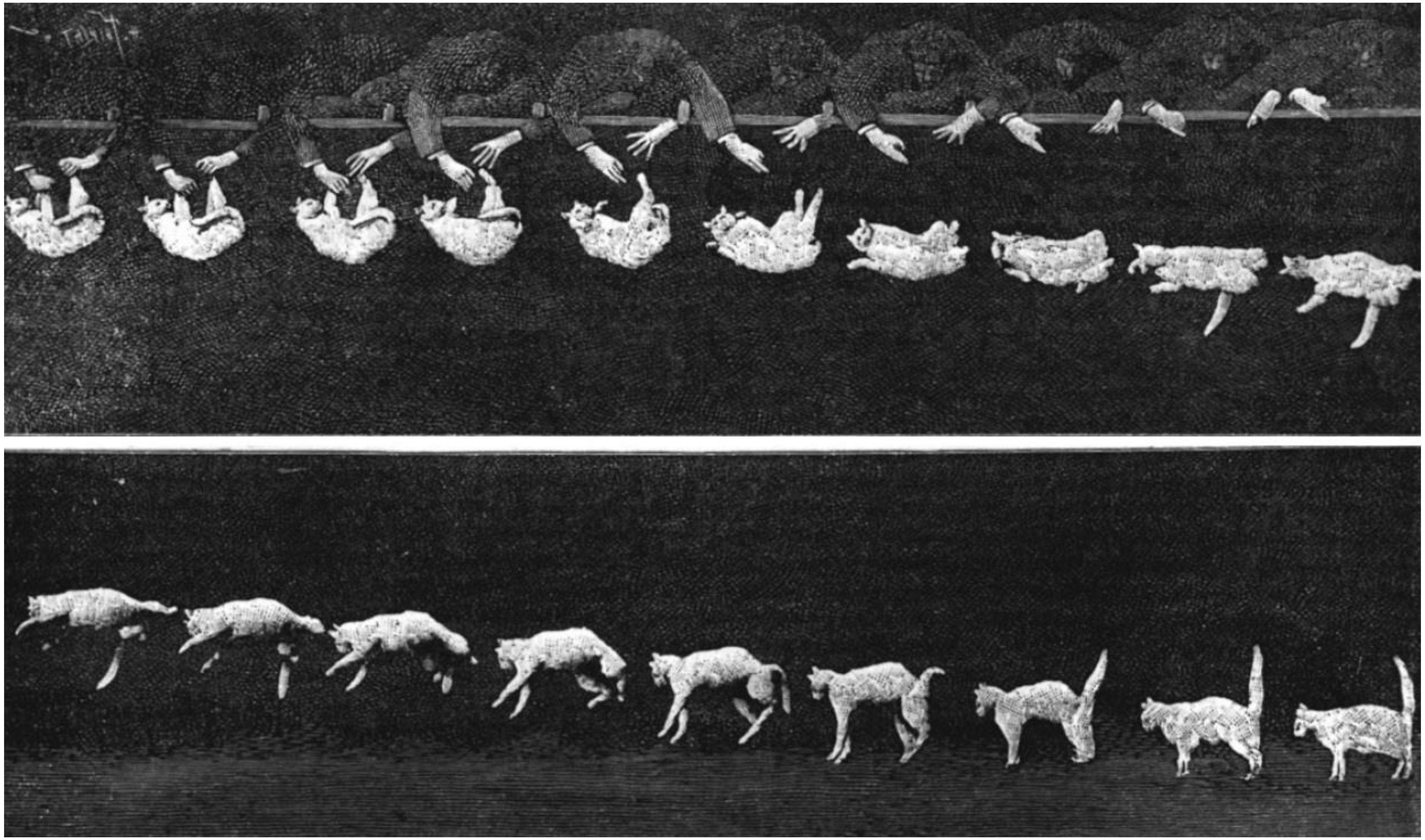
Einseitig aufgehängte rotierende Felge (ω) führt Drehung (ω_P = ω_S) um die Aufhängung aus (Präzession)





Bildquelle: https://netzkonstrukteur.de/praezession-wie-man-scheinbar-die-gravitation-aufhebt/
https://web.physik.rwth-aachen.de/~fluegge/Vorlesung/PhysIpub/Exscript/6Kapitel/VI9Kapitel.html

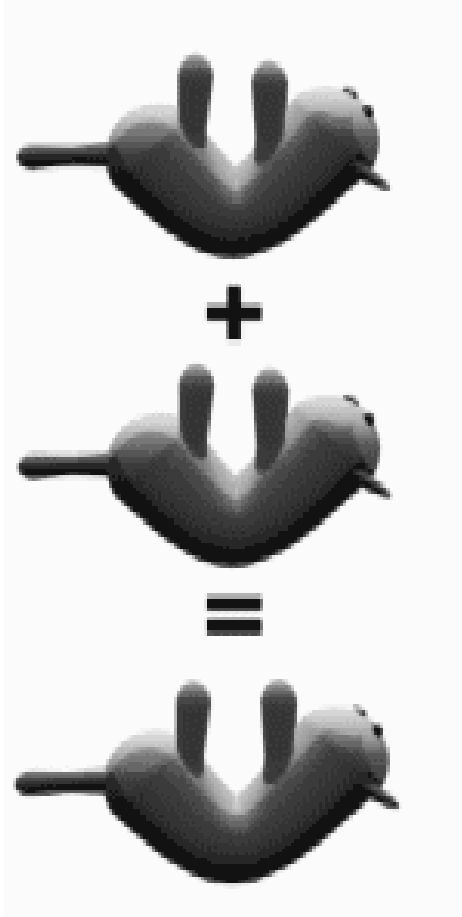
Ein Tierversuch: **Katze im freien Fall**



Zeitlupen-Aufnahme von Étienne-Jules Marey, Paris, 1894

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Stellreflex_der_Katze#/media/Datei:Falling_cat_1894.jpg

Stellreflex bei Katzen



Katzen, die in Rückenlage fallen, landen (fast) immer unbeschadet auf den Beinen.

Grund: „Stellreflex“, entwickelt nach 5 Wochen!

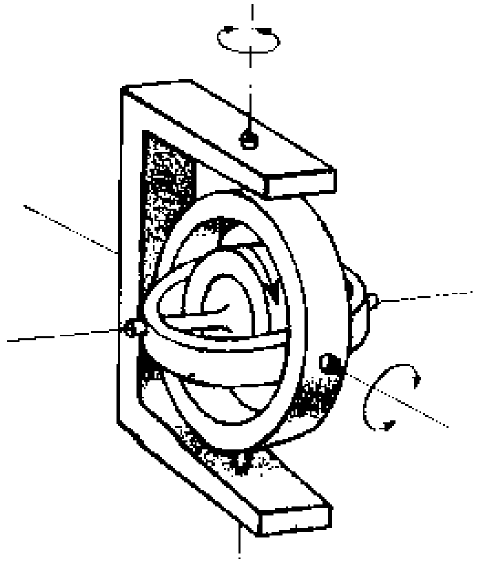
Katze dreht sich dabei mit Vorder- und Hinterteil (Pirouetten-Effekt durch Anziehen der Gliedmaßen) um Knickpunkt in Wirbelsäule.

Drehimpuls-Erhaltung führt dazu, dass Katze mit Körper so dreht (Gegenrichtung!), dass $\sum \vec{L} = 0$ wird.

Schwanz dient nur zu Steuerung/Stabilisierung; auch schwanzlose Katzen haben den Stellreflex.

Weitere Anwendungen der Drehimpuls-Erhaltung:

Gyroskop:



Kardanisch aufgehängter Kreisel;
Art der Aufhängung verhindert Austausch
von Drehimpuls zwischen Umgebung und Kreisel.

Kreisel-Achse lagestabil im Raum

Kreisel-Instrumente (z.B. Luftfahrt):

- Kreisel-Kompass
- Kreisel-Kursanzeiger
- Wendezeiger (Drehratenmesser)
- Kreisel-Lageanzeiger („künstlicher Horizont“)

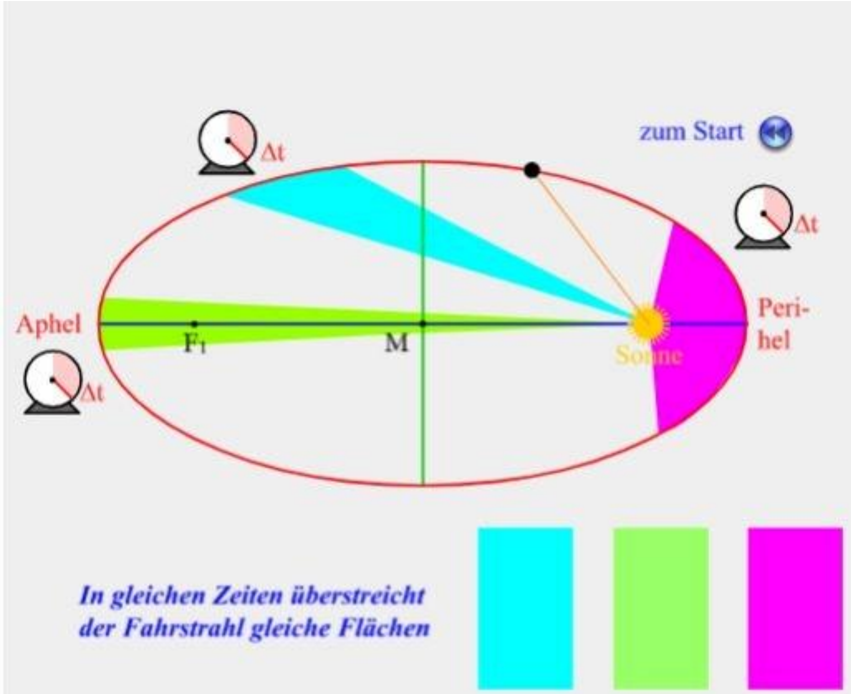
Bildquelle: https://systemdesign.ch/wiki/Kreiselinstrument
https://www.pas.uni-stuttgart.de/forschung/technikgeschichte/

Zweites Kepler-Gesetz (1609)

Folgt direkt aus Drehimpulserhaltungssatz:

Zentralkörper (Sonne) und Planet sind abgeschlossenes System, in dem sich der Drehimpuls nicht ändern darf.

Ist der Körper weit weg vom Drehpunkt,
so hat er geringe Geschwindigkeit,
ist er näher an ihm,
hat er große Geschwindigkeit.



„Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.“

Fahrstrahl:= Verbindungslinie Zentralgestirn-Planet

Bildquelle: https://www.leifiphysik.de/mechanik/drehbewegungen/grundwissen/drehimpuls