Kapitel 2

Einführung in die Differential- und Integralrechnung

2.1 Grundlagen der Differentialrechnung

2.1.1 Steigung einer Kurve

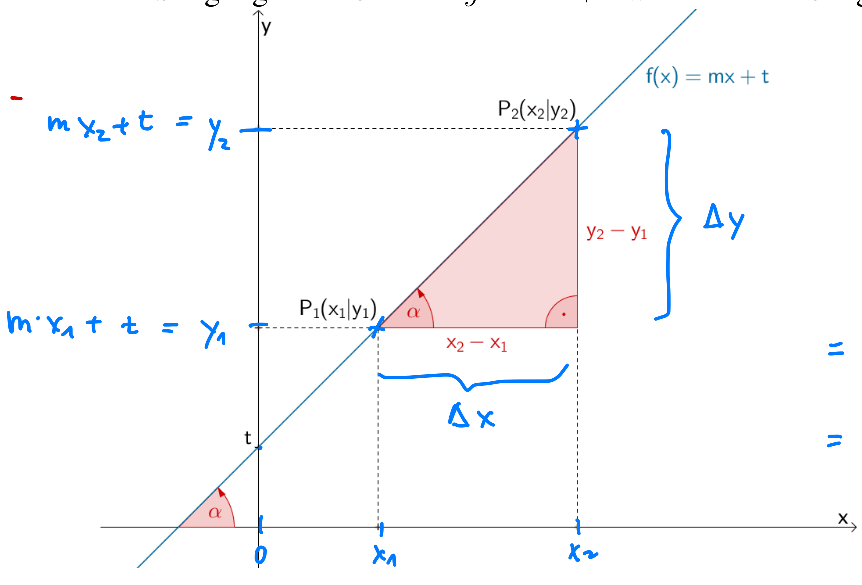
Die Steigung einer Geraden $y = mx + t$ wird über das Steigungsdreick ermittelt:

$= \tan\alpha$

m: Steigung

t: y-Achsenabschnitt d.h. $x = 0$

Die Gerade hat die Konstante Steigung m



https://www.mathelike.de/images/stories/abi_check/analysis/Lineare_Funktion.png

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Differenzenquotient

$$= \frac{(m x_2 + t) - (m x_1 + t)}{x_2 - x_1} = \frac{m x_2 - m x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m\,\cancel{(x_2 - x_1)}}{\cancel{x_2 - x_1}} = m$$

Geradengleichung, wenn die Steigung m und ein beliebiger Punkt $(x_0 | y_0)$ auf der Gerade bekannt sind:

$$\boxed{y = y_0 + m \cdot (x - x_0)}$$

Geradengleichung, wenn man 2 verschiedene Punkte $(x_0 \neq x_1)$ $(x_0 | y_0)$ und $(x_1 | y_1)$ auf der Gerade kennt:

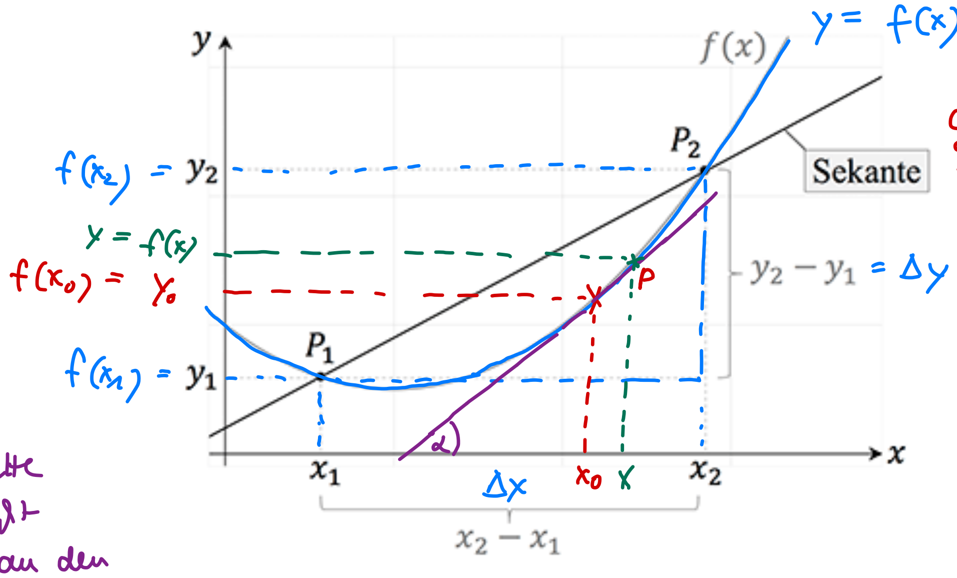
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)$$

abhängige Variable

unabhängige Variable

Welche Steiung hat die Rampe, die im folgenden Bild dargestellt ist und durch die Funktion $y = f(x)$ beschrieben wird, im Bereich $[x_1, x_2]$?



Gerade durch zwei Punkte P_1 + P_2 auf dem Graphen von f

Die violette Gerade läuft durch $P(x_0, y_0)$, sie schmiegt sich an den Graphen von f, hat in der Nähe von P keinen weiteren Schnittpunkt mit dem Graphen von f.

Die violette Grade heißt Tangente an den Graphen von f durch $P(x_0, y_0)$

https://www.studyhelp.de/online-lernen/mathe/sekante-tangente-normale/

Durchschnittliche Steigung zwischen P_1 und P_2, also für $x \in [x_1, x_2]$ ist

$$\overline{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Offenbar hat die Kurve nicht überall dieselbe Steigung. Die Sekantensteigung gibt so etwas wie die mittlere Steigung der Rampe im Intervall $[x_1, x_2]$ an.
Wir fragen uns: Welche Steigung hat die Kurve in einem vorgegebenen Punkt x_0?

Wählt man ein x, das nahe bei x_0, aber $x \neq x_0$ gilt, dann man einen Näherungswert für die Steigung an der Stelle x_0 durch

$$m \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x \neq x_0)$$

d.h. durch die mittlere Steigung im Intervall $[x, x_0]$ bzw. $[x_0, x]$.

Feststellung: Die Näherung ist umso besser, je näher x bei x_0 liegt. $(x \neq x_0\,!)$

Die genaue Steigung an der Stelle x_0 erhält man durch einen Grenzwertprozess

Differenzenquotient

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (\Delta x \to 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} =: \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$$

Differentialquotienten

lim: Limes
x strebt gegen x_0
x geht gegen x_0

Näherungsweise kann die Steigung an der Stelle x_0 mit Hilfe eines Steigungsdreiecks berechnet werden, für das man einen weiteren Punkt x auf der Kurve wählt, der nahe bei x_0 liegt, aber von x_0 verschieden ist:

$$\text{Steigung der Kurve an der Stelle } x_0 \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

wobei x nahe genug bei x_0 liegt.
Um zu wissen, was *nahe genug* ist, muss man die Toleranzen kennen, die für das Problem gelten. Ist die Näherung nicht genau genug, muss man eine bessere Näherung berechnen, indem man einen Hilfspunkt wählt, der noch näher bei x_0 liegt.
Mathematisch umgeht man dieses Problem mit Grenzwertbildung:

$$\text{Steigung der Kurve an der Stelle } x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\Delta x \to 0$

und erhält damit einen genauen Wert für die Steigung an der Stelle x_0.
Diesen Grenzwert nennt man *Ableitung von f an der Stelle x_0*, geschrieben:

Differenzen, endlich große Intervalle $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$$

dx, dy Differentiale, infinitesimal klein

Anmerkung: Der Grenzwert existiert nicht für jede beliebige Funktion und nicht notwendigerweise an jeder Stelle des Defnitionsbereichs, aber in sehr vielen praxisrelevanten Situationen. Die Funktionen, wo es klappt, nennt man *differenzierbar* (an der Stelle x_0).

2.1.2 Geschwindigkeit

(Momentangeschwindigkeit)

Sie fahren von Ulm nach München, das sind ca. 150 km, und benötigen dafür ca. 2 Stunden. Mit welcher Geschwindigkeit sind Sie gefahren?

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist leicht berechnet:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{benötigte Zeit}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{150\,\text{km}}{2\,\text{h}} = 75\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die gefahrene Geschwindigkeit war aber sicher nicht konstant, der Tacho zeigt immer wieder einen anderen Wert an. Wie ermittelt der Tacho die zu einem Zeitpunkt t_0 gefahrene Geschwindigkeit?

Man wählt ein kleines Zeitintervall, in dem t_0 liegt, und berechnet die mittlere Geschwindigkeit in diesem Zeitintervall.

z.B. wähle t nahe bei t_0 $(t \neq t_0)$

$$v(t_0) \approx \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Je näher t bei t_0 liegt, desto genauer ist die Näherung.

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=t_0}$$

Die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 kann man wieder näherungsweise berechnen, indem man misst, welche ~~die~~ Strecke, die im Zeitintervall $[t_0, t]$ (oder in einem Zeitintervall $[t, t_0]$) zurückgelegt wurde, wobei t nahe bei t_0, aber von t_0 verschieden ist. Dann ist

$$\text{Geschwindigkeit zur Zeit } t_0 \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Feststellung: Die Formel ist dieselbe wie im Abschnitt über die Steigung.
Je näher der Zeitpunkt t bei t_0 liegt, desto genauer wird der Wert für die Momentangeschwindigkeit. Mathematisch verwendet man wieder den Grenzwert, um die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 genau zu ermitteln:

$$\text{Geschwindigkeit zur Zeit } t_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Die (Momentan-)Geschwindigkeit zur Zeit t_0 ist also die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ an der Stelle t_0,

$$v(t_0) = \frac{ds}{dt}\Big|_{t_0} = \cancel{\dot{s}(}t_0 \quad \dot{s}(t_0) = s'(t_0)$$

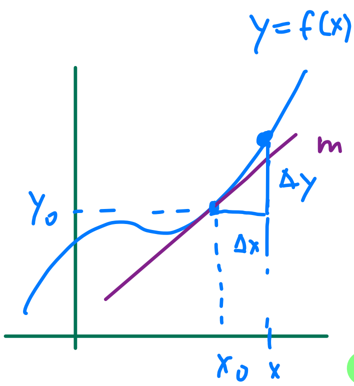
Physiker für Ableitung nach der Zeit t

Momentane Änderungsraten

Ähnlich gelagerte Probleme treten in vielen Anwendungen auf, z.B.

- Berechnung der (momentanen) Beschleunigung aus der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve
  Mittlere Beschleunigung in $[t_0, t_1]$ ist $\frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}$ $\frac{\Delta v}{\Delta t}$
- Berechnung der (momentanen) Leistung aus dem Arbeit-Zeit-Diagramm
- Berechnung der (lokalen) Dichte bei einem Stab aus inhomogenem Material

2.1.3 Definition der Ableitungsfunktion



Definition 2.1.
Gegeben ist eine (differenzierbare) Funktion $y = f(x)$. Die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist als Grenzwert von Differenzenquotienten definiert:

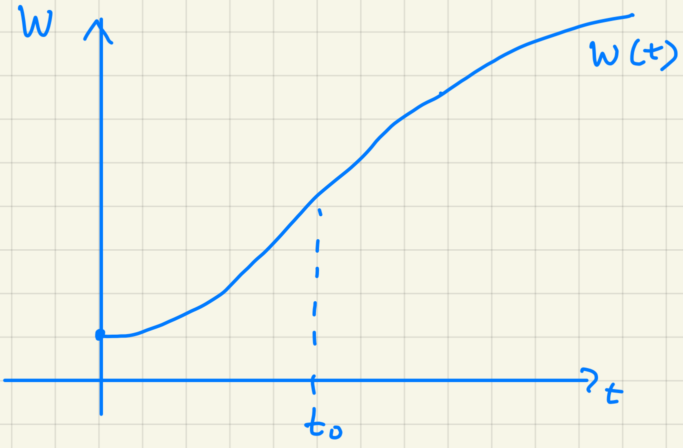
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

Der Grenzwert heißt auch *Differentialquotient*, geschrieben $\frac{dy}{dx}$.
Durch die Zuordnung $x \mapsto f'(x)$ wird eine Funktion definiert, die *erste Ableitung der Funktion f*. Sie ordnet jedem x im Defnitionsbereich die Ableitung von f an der Stelle x, also die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x zu.

Definition 2.2 (Höhere Ableitungen)**.**
Die Ableitungsfunktion einer Funktion kann man (falls differenzierbar) wieder ableiten. Die Funktion $f''(x)$ heißt *zweite Ableitung* von f. Sie ist die erste Ableitung von f'.
Ebenso kann man die dritte Ableitung $f'''(x)$, die vierte Ableitung $f^{(4)}(x)$, usf. definieren.

$f^{IV}(x)$

$$\underset{P}{\text{Leistung}} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$$



Leistung zur Zeit t_0

$$\approx \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\text{verrichtete Arbeit}}{\text{benötigte Zeit}}$$

wobei Δt ein kleines Intervall bedeutet, in dem t_0 liegt

„Durchschnittliche Leistung"

Je kleiner Δt ist, desto genauer ist die Näherung für die momentane Leistung zur Zeit t_0.

$$P(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{W(t) - W(t_0)}{t - t_0} = \dot{W}(t_0)$$

Stab der Länge l

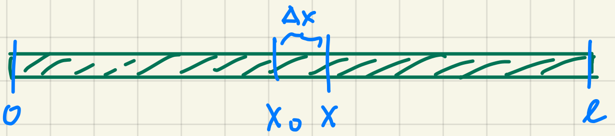
Masse des Stabs: m

Dichte $\rho = \frac{m}{V}$

Streckendichte $\rho = \frac{m}{l}$

(Stab ist eindimensional)

Ist das Material des Stabes nicht homogen, erhält man mit der Formel $\rho = \frac{m}{l}$ die durchschnittliche Streckendichte des Materials.



Was ist die Streckendichte an der Stelle x_0?

Näherungswert bekommt man, indem ein Teilstück der Länge $\Delta x = x - x_0$ abschneidet, in dem x_0 liegt, und die mittlere Streckendichte des Stücks berechnet:

$$\approx \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{\text{Masse des Stücks}}{\text{Länge des Stücks}}$$

$= m'(x)$

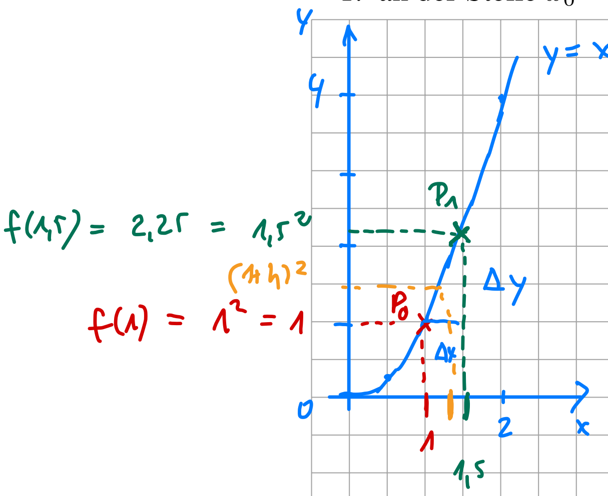
Genaue Dichte an der Stelle x_0: $\rho(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x = x_0}$

An einem Beispiel soll gezeigt werden, wie die Ableitung anhand der Definition berechnet wird:

Aufgabe 2.3.
Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

1. an der Stelle $x_0 = 1$



Näherung für die Tangenten-steigung in $x_0 = 1$ $\approx 2{,}5$

Wähle ein x nahe bei x_0, z.B.

$x = 1{,}5$

Sekantensteigung der Sekante durch P_0, P_1:

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = \underline{\underline{2{,}5}}$$

Allgemein $\underbrace{1+h}$ statt konkret $1{,}5$ $(h = 0{,}5)$

2. an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$.

$P_0(x_0, x_0^2)$ $P_1(x_0+h, (x_0+h)^2)$

$$\text{Sekantensteigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{(x_0+h) - x_0} = \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}\cdot(2x_0+h)}{\cancel{h}} = 2x_0 + h \qquad f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0$$

Bemerkung 2.4 (Gleichung der Tangenten).
Ist $y = f(x)$ eine Funktion, die an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann kann man mit Hilfe der Ableitung die Gleichung der Tangente angeben:

$y = f(x)$ Ableitung ist $f'(x) =$ Steigung der Tangente an der Stelle x_0

Punkt auf der Tangente: $(x_0, f(x_0))$

Steigung ist $m = f'(x_0)$

Tangentengleichung $\boxed{y = \underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f'(x_0)}_{m}\cdot(x - x_0)}$

Beispiel 2.5.
Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von $y = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$.

$f'(x) = 2x$ $f'(2) = 4$ $f(2) = 4$

Tangente: $y = 4 + 4\cdot(x - 2) = 4x - 4$

zu 2.3. (1):

Zweiter Punkt nahe bei $P_0(1,1)$ sei nun allgemein

$x = 1+h$ und $f(x) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$

mit h klein, aber $\neq 0$

Sekantensteigung für $P_0(1,1)$ und $P_1(1+h,\ 1+2h+h^2)$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}$$

$$= 2+h$$

Näherung für Tangentensteigung in $(1,1)$

Tangentensteigung $m = \lim\limits_{h \to 0} (2+h) = 2$

d.h. $f'(1) = 2$

Die Berechnung von Ableitungsfunktionen über die Definition des Differentialquotienten ist recht mühsam. Glücklicherweise gibt es relativ einfache Regeln für deren Berechnung, so dass man meistens nicht auf die Definition zurzurückgreifen muss.

2.2 Ableitungsregeln

2.2.1 Ableitungsfunktionen von elementaren Funktionen

Hier ist (ohne Beweis) ein Überblick über die Ableitungen der elementaren Funktionen:

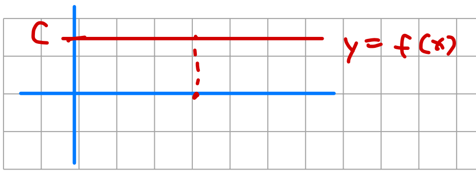
"≡" bedeutet: ist konstant gleich

ist identisch gleich

2.6. Konstante Funktion $\Leftrightarrow f(x) = C \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (für alle)

Die konstante Funktion $f(x) \equiv C \in \mathbb{R}$, hat überall die Steigung 0, also ist

$$f'(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$



$f'(x) \equiv 0$

2.7. Lineare Funktionen

Die lineare Funktion $f(x) = mx + b$, wobei $m, b \in \mathbb{R}$, hat überall die Steigung m, also ist

$$f'(x) = m \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Geraden haben eine konstante Steigung, nämlich m

$f'(x) \equiv m$

2.8. Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion

Die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist

$$f'(x) = (x^r)' = r \cdot x^{r-1}$$

Bsp: $f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2 \cdot x^1 = 2 \cdot x$

$1 = 2 - 1$

$f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

$f(x) = x^4 \qquad f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4 \cdot x^3$

stimmt auch für $r = 1$

$f(x) = x = x^1 \qquad f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 \equiv 1$

Wurzelfkt:

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3}$

negative Exponenten

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5} \qquad f'(x) = -5 \cdot x^{-5-1} = -5 \cdot x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

2.9. Ableitung der trigonometrischen Funktionen

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

2.10. Ableitung der (natürlichen) Exponential- und Logarithmusfunktion

$$(e^x)' = e^x$$

e: Eulersche Zahl $\approx 2{,}71$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

2.2.2 Ableitungsregeln für Summen, Produkte und Quotienten

Mit Hilfe der Ableitungsregeln kann man alle Funktionen differenzieren, die aus den elementaren Funktionen zusammengebaut werden können (sofern sie differenzierbar sind).

2.11. Faktorregel

$y = x^7 = f(x)$

$C \cdot f(x) = C \cdot x^7$

z.B. $y = 5 \cdot x^7$

Ein konstanter Faktor $C \in \mathbb{R}$ bleibt beim Differenzieren erhalten, also

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x) \quad \text{für alle } x \text{, für die } f \text{ differenzierbar ist}$$

1. $y = 10x^7$ 10 Faktor vor x^7

$y' = 10 \cdot 7 \cdot x^6 = 70x^6$

2. $y = -4\sqrt{x} = -4 \cdot x^{1/2}$ -4 konstanter Faktor vor $x^{1/2}$

$y' = -4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $y = 3\cos x = 3 \cdot \cos x$

$y' = 3 \cdot (-\sin x) = -3\sin x$

2.12. Summenregel

Beim Differenzieren einer Summe oder Differenz von Funktionen darf man jede Funktion einzeln differenzieren:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad \text{für alle } x \text{, für die } f \text{ und } g \text{ differenzierbar sind}$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) \quad \text{für alle } x \text{, für die } f \text{ und } g \text{ differenzierbar sind}$$

1. $y = 4x^5 + 7x^3 - 8x + 13$ Polynom

$y' = 4 \cdot 5x^4 + 7 \cdot 3x^2 - 8 = 20x^4 + 21x^2 - 8$

2. $y = \frac{2}{x^2} + 3\sin x \quad = 2 \cdot x^{-2} + 3 \cdot \sin x$

$y' = 2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 3 \cdot \cos x = -\frac{4}{x^3} + 3\cos x$

3. $y = e^x - \pi \cdot \sin x + \ln 2$

π ist Zahl, konstante Faktor

$y' = e^x - \pi \cdot \cos x + 0$

$= e^x - \pi \cdot \cos x$

$\ln 2$ ist eine Zahl, konstante Summand

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

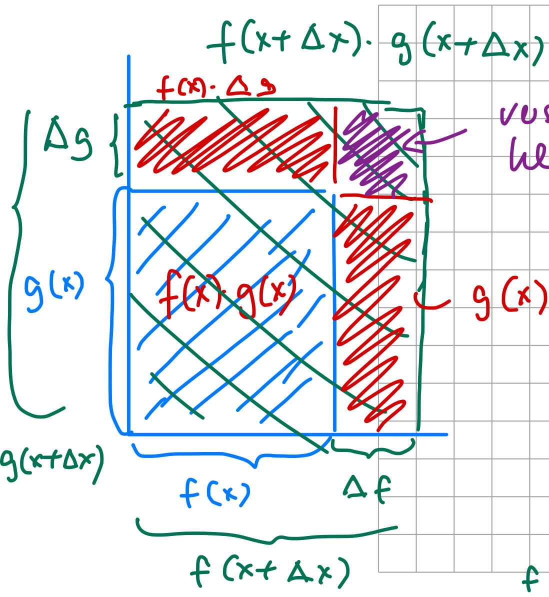
$(\ln 2)' = 0$

konstant

2.13. Produktregel

Die Ableitung eines Produkts von Funktionen erhält man durch

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \text{für alle } x \text{, für die } f \text{ und } g \text{ differenzierbar sind}$$



$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$

$g(x+\Delta x) \approx \underbrace{g(x) + g'(x) \cdot \Delta x}_{\text{Tangentengleichungen in } x}$

$(f \cdot g)(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x)$

$\approx [f(x) + f'(x)\Delta x] \cdot [g(x) + g'(x) \cdot \Delta x]$

$= f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot \Delta x + f'(x) \cdot g(x) \cdot \Delta x$

$+ f'(x) g'(x) \cdot \underbrace{(\Delta x)^2}_{\text{sehr, sehr klein}}$

$\approx (f \cdot g)(x) + \underbrace{[f(x) g'(x) + f'(x) g(x)]}_{(f \cdot g)'(x)} \cdot \Delta x$

1. $y = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g}$

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$

$y = x \cdot e^x$

$y' = \underbrace{(x)'}_{1} \cdot e^x + x \cdot \underbrace{(e^x)'}_{e^x} = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$

2. $y = \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g}$

$\cos^2 x$

$:= (\cos x) \cdot (\cos x)$

$= (\cos x)^2$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$y = \sin x \cdot \cos x$

$y' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'$

$= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \underbrace{\cos^2 x}_{1 - \sin^2 x} - \sin^2 x$

Pythagoras

$= 1 - 2\sin^2 x$

3. $y = \underbrace{\overbrace{x^2 \cdot \sin x}^{f}}_{} \cdot \overbrace{\ln x}^{g}$

$y = (x^2 \cdot \sin x) \cdot \ln x$

$y' = (\overbrace{x^2}^{f} \cdot \overbrace{\sin x}^{g})' \cdot \ln x + (x^2 \cdot \sin x) \cdot (\ln x)'$

$= \left[(x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)'\right] \cdot \ln x + x^{\cancel{2}} \sin x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

$= (2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x) \cdot \ln x + x \cdot \sin x$

$= 2x \ln x \sin x + x^2 \cdot \ln x \cos x + x \cdot \sin x$

Bemerkung 2.14 (Verallgemeinerte Produktregel).

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

$(f \cdot g \cdot h)' = (f \cdot g)' \cdot h + (f \cdot g) \cdot h' = (f'g + fg') \cdot h + fgh'$

$= f'gh + fg'h + fgh'$

2.15. Kettenregel - Nachdifferenzieren

Sind $h(x)$ und $u(x)$ Funktionen mit geeignetem Definitionsbereich, so ist die *Verkettung* von h und u definiert durch

$h \circ u$

"h nach u"

$$(h \circ u)(x) := h\big(u(x)\big)$$

$h\big(u(x)\big)$

gesprochen: h nach u.

Die Ableitung der Verkettung $h \circ u$ von h und u ist

$u(x)$ innere Funktion

h äußere Funktion

$$(h \circ u)'(x) = (h(u(x))' = h'(u(x)) \cdot u'(x)$$

äußere Fkt abgeleitet

innere einsetzen

nachdifferenzieren

Ableitung der inneren Funktion

$(e^{-x^2})'$

$= e^{-x^2} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\text{nachdiff.}}$

1. $y = e^{-x^2} = e^{-x^2}$

$u(x) = -x^2$

$= e^{u(x)}$

äußere Funktion $h(u) = e^u$

$h'(u) = e^u$

$y' = e^{u(x)} \cdot \underbrace{u'(x)}_{\text{nachdiff!}} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x e^{-x^2}$

$\left[(\sin x)^2\right]' =$

$2 \cdot \sin x \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{nachdiff}}$

2. $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$

$u'(x) = \cos x$

$u(x) = \sin x$

$y = (\sin x)^2 = (\sin x)^2$

$h(u) = u^2$

$h'(u) = 2u$

$y' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$= 2 \sin x \cos x$

$$\left[\sin(x^2)\right]'$$
$$= \cos(x^2)\cdot \underbrace{2x}_{\text{nachdiff}}$$

$u'(x) = 2x$
$u(x) = x^2$
$h(u) = \sin(u)$
$h'(u) = \cos(u)$

3. $y = \sin x^2 = \sin(x^2) = \sin(\underbrace{x^2}_{\text{innen}})$

$$y' = \cos(x^2)\cdot \underbrace{2x}_{\text{nachdiff}} = 2x\cdot\cos(x^2)$$

2.16. Quotientenregel

Die Ableitung des Quotienten von Funktionen erhält man folgendermaßen

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g\cdot f' - f\cdot g'}{g^2} = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

für alle x mit $g(x) \neq 0$, für die f und g differenzierbar sind.

Die Quotientenregel folgt aus Produkt- und Kettenregel

$$\frac{f}{g} = f\cdot g^{-1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = (f\cdot g^{-1})' = f'\cdot(g^{-1}) + f\underbrace{(g^{-1})'}_{\text{Kettenregel}} = \frac{f'\cdot g}{g\cdot g} + f\cdot\frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\left[g(x)\right]^{-1}\right)' = -1\cdot g(x)^{-2}\cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{innere Fkt nachdiff.}}$$

1. $y = \dfrac{x^2 - 7x}{x^3 + 1}$ $\begin{matrix}\} f \\ \} g\end{matrix}$

$$y' = \frac{(x^3+1)\cdot(2x-7) - (x^2-7x)\cdot(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

! Fehlerquelle

$$= \frac{(2x^4 - 7x^3 + 2x - 7) - 3x^4 + 21x^3}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4 + 14x^3 + 2x - 7}{(x^3+1)^2}$$

2. $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\begin{matrix}\} f \\ \} g\end{matrix}$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$y' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1\ (\text{Pythagoras})}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x$$

Aufgabe 2.17.

1. Berechne die n-te Ableitung von $f(x) = x^4$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 4\cdot 3\cdot x^2 = 12x^2$
$f'''(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot x = 24x$
$f^{(IV)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$
$f^{(5)}(x) \equiv 0 = f^{(6)}(x) = f^{(7)}(x) = \ldots$

$f^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!$
$f^{(n)}(x) \equiv 0 \quad \forall\, n \geq 5$

$f(x) = x^7$

$f'(x) = 7 \cdot x^6$

$f''(x) = 7 \cdot 6 \cdot x^5$

$f'''(x) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot x^4$

$f^{(4)}(x) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot x^3$

$f^{(5)}(x) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^2$

$f^{(6)}(x) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$

$\boxed{f^{(7)}(x) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \equiv 7!}$ konstante Funktion

$f^{(8)}(x) \equiv 0 \equiv f^{(n)}(x) \quad \forall\, n \geq 8$

f Polynom von Grad n $= a_n x^4 +$ niedrige Grade

$\Longrightarrow \quad f^{(n+1)}(x) \equiv 0 \qquad f^{(k)}(x) \equiv 0 \quad \forall\, k \geq n+1$

$f^{(n)}(x) \equiv n! \cdot \underbrace{a_n}_{\text{Leitkoeff von } f}$

$(e^x)' = e^x$ $\qquad \ln(u^r) = r \cdot \ln u \quad u>0$

zurückführen auf e^x

2. Berechne die n-ten Ableitungen von $f(x) = 2^x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$y = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \cdot \ln(2)} = e^{\underbrace{[\ln(2)]}_{\text{Konstante, Zahl}} \cdot x}$

Ableiten mit der Kettenregel

$y' = e^{x \cdot \ln 2} \cdot \ln 2$

$y' = \ln 2 \cdot 2^x$

$y'' = (\ln 2)^2 \cdot 2^x$

$y''' = (\ln 2)^3 \cdot 2^x$

$y^{(n)} = (\ln 2)^n \cdot 2^x$

Allgemein:

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

$(a>0)$

Mit dem Vorgehen aus dem letzten Beispiel kann man auch Funktionen ableiten, bei denen die unabhängige Variable sowohl in der Basis als auch im Exponenten steht:

x taucht in der Basis und im Exponenten auf

2.18. Logarithmisches Ableiten

Aufgabe 2.19.
Berechnen Sie die Ableitung von

1. $y = x^x$

Trick: $y = e^{\ln(x^x)} = \underbrace{e}_{\text{äußere Fkt}}^{\overbrace{x \cdot \ln x}}$

innere Fkt $u(x) = \overbrace{x \cdot \ln x}^{\text{Produktregel}}$

$(e^u)' = e^u$

Kettenregel:

$y' = \underbrace{e^{x \cdot \ln x}} \cdot \underset{\text{nachdiff}}{(\ln x + 1)}$

$u'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \ln x + 1$

$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$

$= (\ln x + 1) \cdot x^x$

2. $y = (\sin x)^{\cos x}$

$f(x)$

$y = e^{\ln(\sin x)^{\cos x}} = e^{\overbrace{\cos x \cdot \underbrace{\ln(\sin x)}_{\text{Kettenregel}}}^{\text{innere Fkt}}}$

$y' = \underbrace{e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)}}_{f(x)} \cdot \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}_{\text{nachdiff.}} \right]$

$= (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right]$

Weiteres Beispiel, wo Logarithmisches Differenzieren die Arbeit erleichtert:

$$y = \frac{(x^2+2x-1)^4 \cdot \sqrt{2x+1+x^2}}{\sqrt[3]{3x^4-2}}$$

mühsam abzuleiten

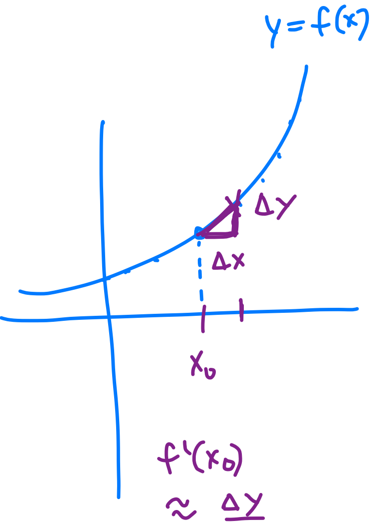
Trick: $$y = e^{\ln \frac{(x^2+2x-1)^4 \cdot \sqrt{2x+1+x^2}}{\sqrt[3]{3x^4-2}}}$$

$$= \underbrace{e^{4\ln(x^2+2x-1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+1) - \frac{1}{3}\ln(3x^4-2)}}_{y}$$

nachdiff: Exponent ▷

$$y' = \frac{(x^2+2x-1)^4 \cdot \sqrt{2x+1+x^2}}{\sqrt[3]{3x^4-2}} \cdot$$

$$\left[4 \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{12x^3}{3x^4-2} \right]$$



2.2.3 Numerische Ableitung

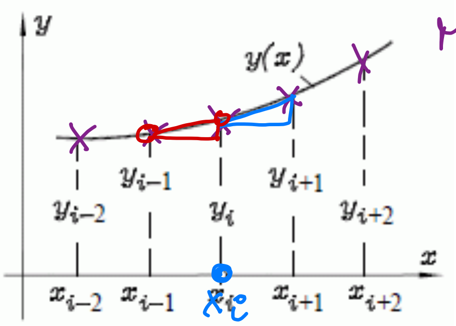
Differenzieren nach den bisher dargestellten Regeln nennt man *analytische Berechnung* der Ableitung. Mit analytischem Ableiten kann man die Ableitung von Funktionen, die als Verknüpfungen von elemenaren Funktionen dargestellt sind, mehr oder weniger leicht per Hand ableiten. In einigen Fällen ist das nicht besonders praktikabel, beispielsweise:

$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$

rechtsseitiger Differenzenquotient

1. die Ableitungsfunktion ist kompliziert und höhere Ableitungen damit noch komplizierter.
2. die Ableitungsfunktion wird in einem algorithmischen Verfahren benötigt und muss vom Computer mehrfach berechnet werden (das benötigt viel Rechenzeit).
3. die Funktion ist nicht analytsich gegeben, sondern durch eine Wertetabelle, die z.B. in einem Versuch ermittelt wurde.

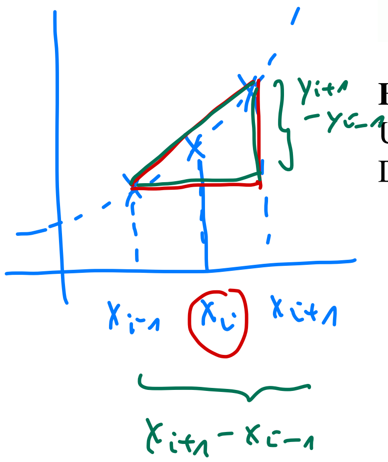
In diesem Fall kann die Ableitung näherungsweise *numerisch* berechnet werden mit Hilfe des Differenzenquotienten.



Messpunkte

Ableitung an der Stelle x_i?

Variante ①: Funktionsvorschrift erraten (Regression) ⇝ ableiten



Bemerkung 2.20.
Um die Ableitung an der Stelle x_i zu approximieren, kann man einen der folgenden Differenzenquotienten verwenden:

1. Rechtsseitiger Differenzenquotient: $f'(x_0) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$
2. Linksseitiger Differenzenquotient: $f'(x_0) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$
3. Zentraler Differenzenquotient: $f'(x_0) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$

Liefert in der Regel die beste Näherung für die Ableitung in x_i

2.3 Riemannsche Summen und bestimmtes Integral

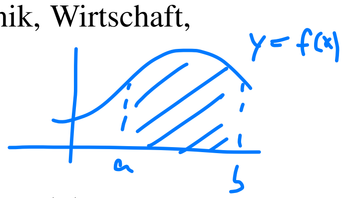
2.3.1 Vorbemerkung

Die Intregralrechnung hat zwei Aspekte, die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben:

bestimmtes Integral

$\int_a^b f(x)\,dx$

1. Berechnung gewisser Größen aus Geometrie, Physik, Mechanik, Wirtschaft, etc. durch



"Riemannsche Summen"

unbestimmtes Integral

$\int f(x)\,dx$

2. Zu einer bekannten Funktion $f(x)$ suchen wir eine Funktion $F(x)$ mit der Ableitung $F'(x) = f(x)$. Eine solche Funktion heißt **Stammfunktion** von f. Wir suchen also nach einer

"Umkehrung des Differenzierens"

Den Zusammenhang zwischen diesen beiden Aspekten liefert der

"Hauptsatz der Differentialrechnung"

und damit gleichzeitig eine bequeme Methode, Riemannsche Summen einigermaßen einfach zu berechnen.

2.3.2 Riemann-Summen

In mathematischen Anwendungen begegnen uns häufig Gesetzmäßigkeiten, in denen Größen durch einfache Produktformeln - also Proportionalität - miteinander zusammenhängen:

1. Fläche eines Rechtecks mit Grundlinie g und Höhe h ist $\boxed{A = g \cdot h.}$
2. Der zurückgelegte Weg s in der Zeit t bei konstanter Geschwindigkeit v ist $\boxed{s = v \cdot t}$
3. Arbeit bei konstanter Kraft F längs geradem Weg der Länge s ist $\boxed{W = F \cdot s}$
4. Arbeit bei konstanter Leistung P über ein Zeitintervall der Länge t ist $\boxed{W = P \cdot t}$ $P \cdot t$.

Diese einfachen Produktformeln sind aber nur in sehr speziellen (modellhaften) Situationen gültig - nämlich wenn eine der Größen konstant ist.

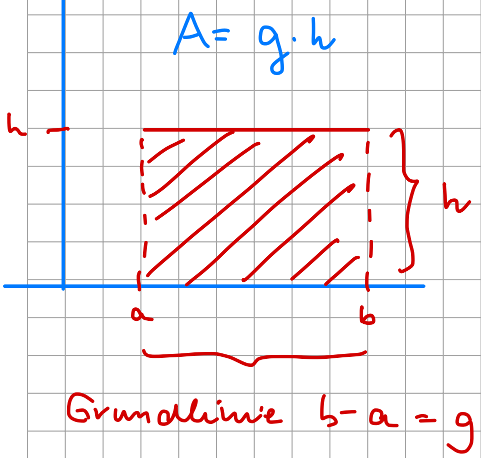
1. Was ist der Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen der x-Achse über dem Intervall $[a, b]$ und dem Graphen einer Funktion $y = f(x) > 0$?
2. Kann man aus der aufgezeichneten nicht-konstanten Geschwindigkeit $v(t) > 0$ eines Autos über ein Zeitintervall $[t_0, t_1]$ ermitteln, welchen Weg das Auto zurückgelegt hat?

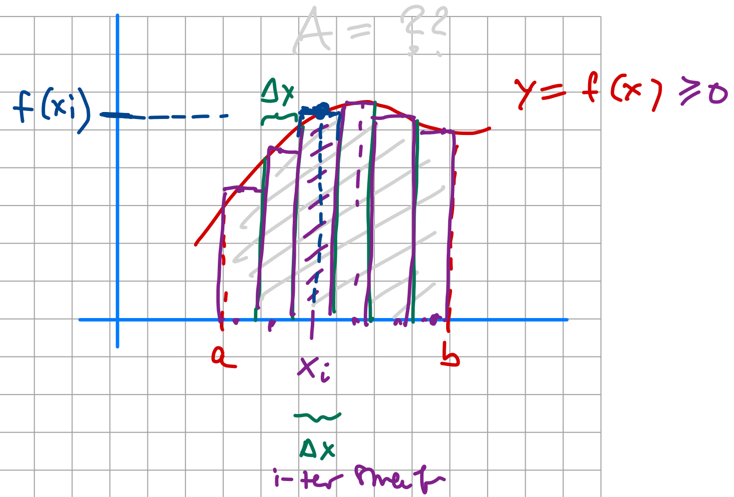
Δs infinitesimal klein $\rightsquigarrow ds$

$$\int_{s_0}^{s_1} \underbrace{F(s)\,ds}_{\text{Infinitesimale Arbeit}} = W$$

3. Ist die Kraft vom Weg abhängig, d.h. F ist eine Funktion $F(s)$ vom zurückgelegten Weg, kann man diese Formel nicht mehr so einfach benutzen. Dies ist beispielsweise bei einer Feder, die gedehnt wird, der Fall - die benötigte Kraft ist entgegengesetzt zur Rückstellkraft der Feder. Wie kann man ermitteln, welche Arbeit verrichtet wurde?

4. Welche Arbeit wird verrichtet, wenn die Leistung über den Zeitverlauf hinweg variiert?





Frage: Welchen Flächeninhalt hat das Flächenstück, das durch den Graphen von f, die Geraden $x=a$ und $x=b$ und der x-Achse begrenzt wird?

Idee: Approximiere (Annähern) die Fläche durch Rechtecksflächen:

Zerlege die Fläche in n Streifen (kleiner) Breite Δx ($\Delta x = \frac{b-a}{n}$)

Wähle in jedem der n Teilintervalle von $[a,b]$ (der Breite Δx) einen x-Wert aus, nenne den x-Wert im i-ten Intervall x_i

Näherungswert für den Flächeninhalt des i-ten Streifens:

$$A_i \approx \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe} = \underbrace{\Delta x \cdot f(x_i)}$$

Gesamtfläche $A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x$

$$\boxed{A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x}$$

„Summe von Rechteckflächen“

Summen dieser Gestalt heißen
Riemann-Summen

Wie kommt man nun exakten Flächeninhalt?

Je schmaler die Streifen, d.h. je größer n ist, desto genauer wird die Näherung (zumindest für die meisten praxis-relevanten Funktionen)

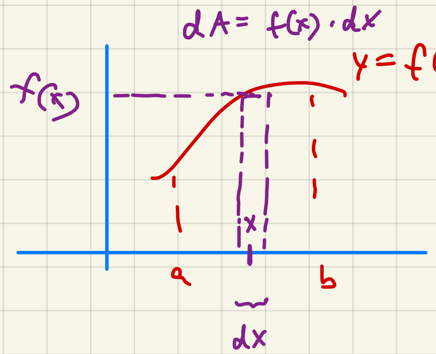
d.h. wenn $n \longrightarrow \infty$ geht (bzw $\Delta x \to 0$) erhält man im Grenzwert das exakte Ergebnis

$$\boxed{A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x}$$

Grenzwert von Riemann-Summen

Abkürzung (Schreibweise)

$$A = \int_a^b f(x)\, \underbrace{dx}_{\text{infinitesimal kleine Breite der Streifen}}$$



$$\underbrace{f(x) \cdot dx}_{\text{Flächeninhalt eines infinitesimalen Rechtecks}}$$

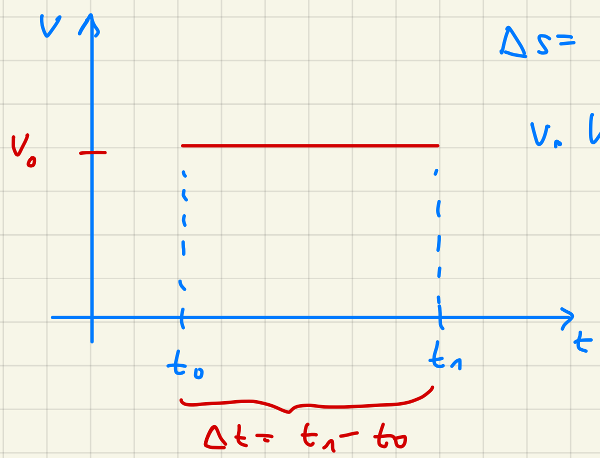
$\int_a^b f(x)\,dx$ heißt bestimmtes Integral mit dem Integranden $f(x)$ und den Integrationsgrenzen $a < b$.

„Integrieren heißt summieren" (mit infinitesimalen Summanden)

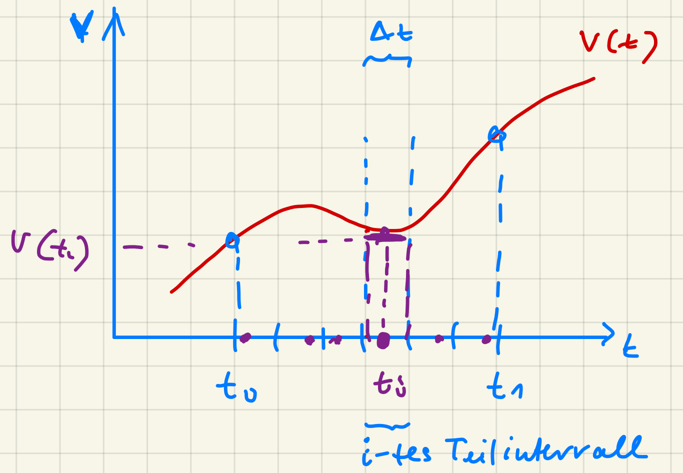
(2) Einfache Formel: $s = v_0 \cdot t$

$\Delta s = v_0 \cdot \Delta t$

v_0 konstant



$v = v(t)$ nicht konstant



Frage: Welche Strecke hat das Fahrzeug im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ zurückgelegt?

Idee: Zerlege das Zeitintervall $[t_0, t_1]$ in n Teilintervalle der Länge $\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{n}$.

Wähle einen Zeitpunkt t_i in jedem der Teilintervalle aus.

Man nimmt an, dass in dem i-ten Intervall durchgehend mit der Geschwindigkeit $v(t_i)$ gefahren wurde (Näherung!)

Strecke, die im i-ten Zeitintervall zurückgelegt wurde

$$s_i \approx v(t_i) \cdot \Delta t$$

Gesamtstrecke $s \approx \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v(t_i) \cdot \Delta t}_{\text{hat die Struktur einer Riemann-Summe}}$ $\quad [A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$

Je kürzer die Teilintervalle, d.h. Δt kleiner oder n größer, desto genauer ist die Näherung.

$$s = \underbrace{\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} v(t_i) \cdot \Delta t}_{\text{Grenzwert von Riemann-Summen}} = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} v(t) \, \overbrace{dt}^{\text{infinitesimal kurze Intervalle}}}_{\text{bestimmtes Integral!}}$$

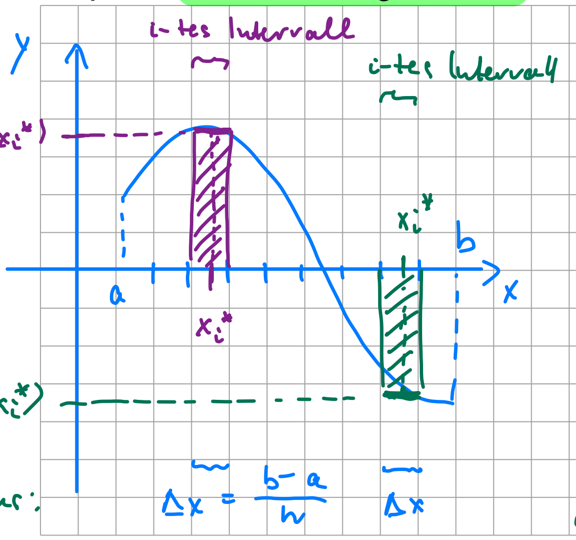
2.3.3 Das bestimmte Integral

Wir abstrahieren das Vorgehen in (2.3.2), um eine allgemeine Riemann-Summe zu bekommen und damit das bestimmte Integral zu definieren.

Definition 2.21 (Bestimmtes Integral).
Sei f eine stückweise stetige Funktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist.

$0 < f(x_i^*)$

$0 > f(x_i^*)$



Flächeninhalt des grünen Rechtecks: $|f(x_i)| \cdot \Delta x$

Falls $f(x_i^*) > 0$, dann ist $\boxed{f(x_i^*) \cdot \Delta x > 0}$ der Flächeninhalt des violetten Rechtecks (Rechteckfläche oberhalb der x-Achse)

Falls $f(x_i^*) < 0$, dann ist $\boxed{f(x_i^*) \cdot \Delta x < 0}$ das Negative des Flächeninhalts des grünen Rechtecks

Wir teilen das Intervall in n Teilintervalle gleicher Länge Δx mit den Endpunkten $x_0, \ldots, x_n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \qquad \text{wobei } x_k = a + k \cdot \Delta x$$

In jedem Teilintervall wählen wir eine Stützstelle $x_k^\star \in [x_{k-1}, x_k]$. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

- Das *bestimmte Integral von f zwischen a und b* ist

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star)\Delta x$$

- $f(x)$ heißt *Integrand*.
- x heißt *Integrationsvariable*.
- a und b heißen *Integrationsgrenzen*, wobei a die untere und b die obere Grenze ist.
- Ein Ausdruck der Form $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star)\Delta x$ heißt *Riemann Summe*.

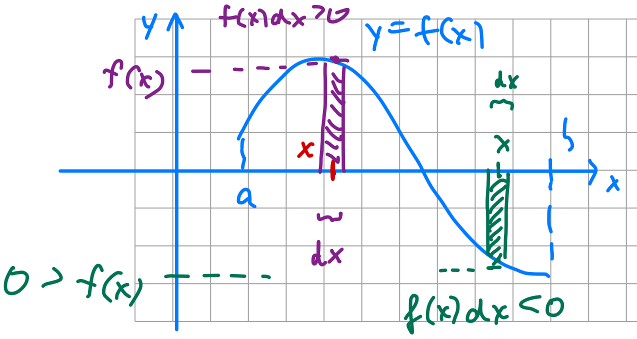
  Vorzeichengewichtete Rechteckfläche

  Jeder Summand $f(x_k^\star)\Delta x$ entspricht der Fläche des Rechtecks mit der Breite Δx und der Länge $|f(x_k^\star)|$, versehen mit dem jeweiligen Vorzeichen von $f(x_i^\star)$.

Bemerkung 2.22.
Das bestimmte Integral ist ein Grenzwert von Riemann-Summen. Wir können es uns mit Hilfe von Differenzialen folgendermaßen vorstellen:

Für jedes $x \in [a,b]$ ist der Integrand $f(x)\,dx$ die infinitesimale Fläche des (infinitesimalen) Rechtecks mit der Breite dx und der Länge $|f(x)|$, versehen mit dem Vorzeichen von $f(x)$.

Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ entsteht durch eine Art Summation über all diese infinitesimalen vorzeichenbehafteten Flächeninhalte.



$dA := f(x)\,dx$ infinitesimal Fläche des infinitesimalen violetten Rechtecks
$f(x) > 0 \Rightarrow dA$ positiv gewichtet

$dA := f(x)\,dx$ das Negative des infinitesimalen grünen Rechteckfläche

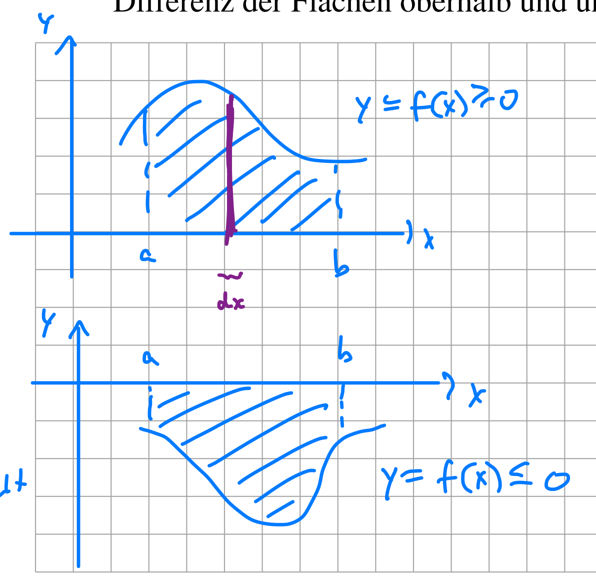
Bemerkung 2.23 (Interpretation des bestimmten Integrals als vorzeichengewichtete Fläche)**.**

1. Ist die Funktion f im Intervall $[a,b]$ positiv, gibt das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse an.

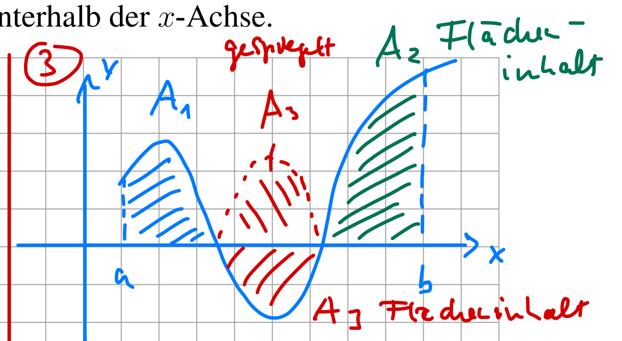
2. Ist die Funktion f im Intervall $[a,b]$ negativ, ist das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ das Negative des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse .

3. Hat f in $[a,b]$ sowohl positive als auch negative Werte, ist das Integral die Differenz der Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse.

(1) blaue Fläche hat den Flächeninhalt $\int_a^b f(x)dx$



(2) $-\int_a^b f(x)\,dx$ ist der Flächeninhalt der blauen Fläche



Gesamt fläche zwischen Graph und x-Achse mit $x \in [a,b]$: $\int_a^b |f(x)|dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_2 - A_3$

2.3.4 Rechenregeln für das bestimmte Integrals

Aus der Interpretion des bestimmten Integrals als Flächen kann man folgende Eigenschaften ableiten:

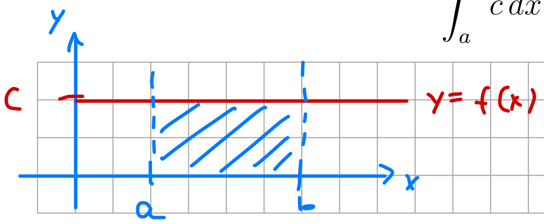
Bemerkung 2.24. Es gilt

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Bemerkung 2.25 (*Integral einer konstanten Funktion*). $f(x) \equiv c$
Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

für Zeichnung Annahme: $c > 0$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

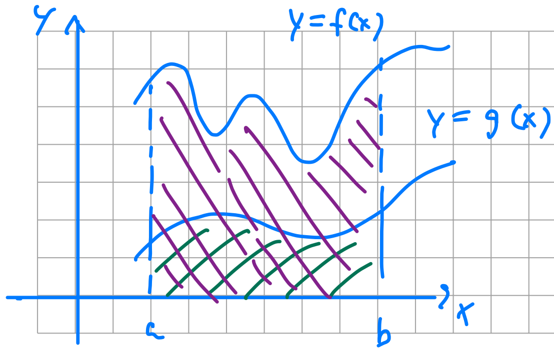


Rechteckfläche ist Grundlinie · Höhe $= (b-a) \cdot c$

Bemerkung 2.26 (Vergleichseigenschaft - *Monotonie des Integrals*).
Ist $f(x) \geq g(x)$ im Intervall $[a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Annahme $g(x) \geq 0$



Grüne Fläche $\int_a^b g(x)\,dx$

$\wedge|$

Violette Fläche $\int_a^b f(x)\,dx$

Bemerkung 2.27 (*Linearität des Integrals*).

- Faktorregel ($c \in \mathbb{R}$)

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

- Insbesondere gilt:

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

- Summenregel

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Achtung: Es gibt keine einfache Formel für Produkt oder Quotient !!

$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = ???$

Bemerkung 2.28. *Vertauschen der Integrationsgrenzen*
Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ wurde bisher nur für $a \leq b$ definiert. Man setzt

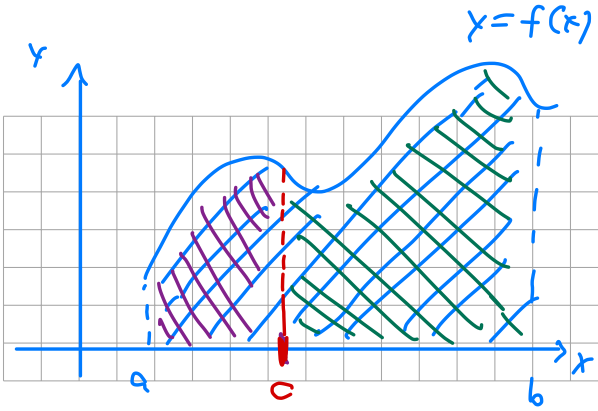
Definition:

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

Integrationsgrenzen vertauschen $\widehat{=}$ Vorzeichenwechsel

Bemerkung 2.29 (*Aufspalten des Integrationsintervalls*).
Für $c \in D_f$ gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

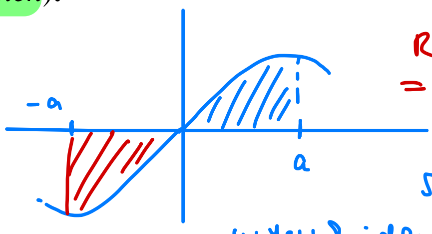


Blaue Fläche = $\int_a^b f(x)\,dx$
||
Violette Fläche = $\int_a^c f(x)\,dx$
+
Grüne Fläche = $\int_c^b f(x)\,dx$

Bemerkung 2.30 (*Symmetrische Funktionen*).

- Ist f punktsymmetrisch, so ist

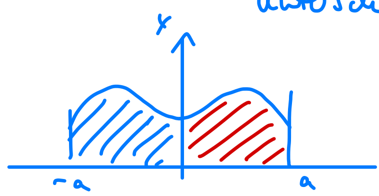
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



Rote Fläche = Blaue Fläche (wegen Symmetrie)
unterschiedliche Vorzeichen!

- Ist f achsensymmetrisch, so ist

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



Rote Fläche = Blaue Fläche
gleiche Vorzeichen

2.4 Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

2.4.1 Stammfunktionen

$F(x)$ Funktion
↓
$F'(x)$ Ableitung

Definition 2.31.
Eine Funktion $F(x)$ heißt *Stammfunktion* der Funktion $f(x)$ auf einem Intervall I, wenn

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in I$$

Beispiel 2.32.

Aus der Weg-Zeit Funktion $s(t)$ erhält man die Geschwindigkeitsfunktion durch Ableiten:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}(t)$$

Frage: Kann man $s(t)$ rekonstruieren, wenn nur die Geschwindigkeitsfunktion bekannt ist?

Aufgabe 2.33. Geben Sie für die folgende Funktionen eine Stammfunktion an:

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

1. $f(x) = x^2$

$(x^3)' = 3x^2$

$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$ Probe: $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

weitere Stammfunktionen: $\frac{1}{3}x^3 + C$ $(C \in \mathbb{R})$

2. $f(x) = x^n$

$n \neq -1$:

$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ Probe: $F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n = x^n$ ✓

klappt, wenn $n+1 \neq 0 \Leftrightarrow n \neq -1$

$n = -1$: $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$F(x) = \ln(x)$ für $x > 0$

$x<0 \quad F(x) = \ln(\underbrace{-x}_{>0}) \quad F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{nach diff}} = \frac{1}{x}$

Allgemein: $F(x) = \ln|x|$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3. $f(x) = \cos x$ $\qquad f(x) = \sin x$

$F(x) = \sin x \ (+C)$ $\qquad F(x) = -\cos x \ (+c)$

Nun stellen sich die Fragen:

- Sind dies alle Stammfunktionen der gegebenen Funktion?

Erkenntnis: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so auch $F(x)+C$ $(C \in \mathbb{R})$

Denn: $[F(x)+C]' = f(x)$

- Wie schaut die Menge aller Stammfunktionen zu einer gegebenen Funktion aus?

Sei F_1 ein Stammfkt von f und F_2 eine weitere Stammfkt von f

d.h. $(F_1)' = f$ und $(F_2)' = f$

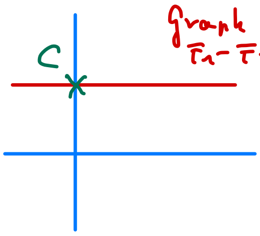
$[F_1(x)]' = f(x)$ und $[F_2(x)]' = f(x)$ $\quad \forall x \in D$

$\Rightarrow [F_1(x) - F_2(x)]' = \underbrace{F_1'(x)} - \underbrace{F_2'(x)}$ (Linearität des Ableitens)

$= f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow$ d.h. die Tangenten an $F_1(x) - F_2(x)$ sind $\forall x \in D$ waagrecht

$\Rightarrow$ Graph von $F_1 - F_2$ ist eine waagrechte Gerade d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $F_1(x) - F_2(x) = C \quad \forall x \in D$



Graph von $F_1 - F_2$

Bemerkung 2.34.
Zwei Stammfunktionen zu einer Funktion $f(x)$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante.
Genauer: Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

- Dann ist auch $F(x)+C$ für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.
- Jede Stammfunktion von $f(x)$ ist von der Form $F(x)+C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.35 (Linearität).
Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ und $r, s \in \mathbb{R}$.
Dann ist $rF(x) + sG(x)$ eine Stammfunktion von $rf(x) + sg(x)$.

$(F+G)' \overset{\text{Summenregel}}{=} F' + G' = f + g \iff F+G$ Stammfkt von $f+g$

Linearität der Ableitung

$(r \cdot F)' \underset{\text{Faktorregel}}{=} r F' = r \cdot f \iff r \cdot F$ Stammfunktion von $r \cdot f$

Achtung: Es gibt keine einfache Regel für Stammfunktion von Produkten oder Quotienten, also von $f(x)\,g(x)$ oder $\frac{f(x)}{g(x)}$

Aufgabe 2.36.

1. Geben Sie alle Stammfunktionen der Funktion $f(x) = 4\sin x + \dfrac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$ an.

Vereinfachen: $f(x) = 4\sin x + \frac{2x^5}{x} - \frac{x^{1/2}}{x^1} = 4\sin x + 2x^4 - x^{-1/2}$

Stammfkt: $F(x) = 4\cdot(-\cos x) + 2\cdot\frac{1}{5}\cdot x^5 - 2\cdot x^{1/2} + C \quad (C\in\mathbb{R})$ $\quad -\frac{1}{2}+1$

$= -4\cos x + \frac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C \quad (C\in\mathbb{R})$

2. Geben Sie eine Stammfunktion F der Funktion $f(x) = e^x + \dfrac{20}{x}$ an mit $F(1) = -2$.

$f(x) = e^x + 20\cdot\frac{1}{x}$

Alle Stammfkt: $F(x) = e^x + 20\cdot\ln|x| + C \quad (C\in\mathbb{R})$

Es muss gelten: $F(1) = -2$ Einsetzen

$-2 = F(1) = e^1 + 20\cdot\overbrace{\ln|1|}^{=0} + C = e + C$

$\Rightarrow C = -2 - e$

Gesuchte Stammfkt: $F(x) = e^x + \ln|x| - 2 - e$

2.4.2 Unbestimmte Integrale

Wir werden sehen: Stammfunktionen sind sehr nützlich bei der Berechnung von bestimmten Integralen. Wir führen deshalb dafür eine weitere Bezeichnung ein.

Definition 2.37 (Unbestimmtes Integral).

- Der Ausdruck $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ bedeutet: F ist eine Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$. keine Integrationsgrenzen
- $\displaystyle\int f(x)\,dx$ heißt *unbestimmtes Integral von* f.
- Das unbestimmte Integral ist eine Familie von Funktionen; es ist nur bis auf eine Konstante bestimmt.
- Wir schreiben oft auch:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (C\in\mathbb{R})$$

C nennt man *Integrationskonstante*.

$$\int (\overbrace{2x-1})^{10}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}\cdot(2x-1)^{11} + C$$ ✓

zurückführen auf: $\int x^{10}\,dx = \frac{1}{11}x^{11} + C \qquad (C\in\mathbb{R})$

Substitution $\qquad u := 2x-1$

Problem: Kettenregel
Nachdifferenzieren

Rücksubst.

$$\int u^{10}\,du = \frac{1}{11}\cdot u^{11} + C \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{11}\cdot(2x-1)^{11} + C \Leftarrow$$

„Raten"

$$\left[\frac{1}{11}\cdot(2x-1)^{11}\right]' = \frac{1}{11}\cdot 11\cdot(2x-1)^{10}\underbrace{\cdot 2}_{\text{nachdiff}}$$

$$= (2x-1)^{10}\;2$$

zu viel

statt $(2x-10)^{10}$

Formaler Weg der Substitution: $\qquad u := 2x-1$

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow \boxed{dx = \frac{1}{2}\,du}$$

$$\int u^{10}\,\underbrace{dx}$$

muss man durch u's ersetzen

$$= \int u^{10}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\int u^{10}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}\cdot u^{11} + C \qquad (C\in\mathbb{R})$$

Rücksubst. $\qquad = \underbrace{\frac{1}{22}\cdot(2x-1)^{11} + C} \qquad (C\in\mathbb{R})$

Hier: Spezialfall Lineare Substitution $\qquad u = \underbrace{2x-1}_{\text{linear}}$

klappt allgemeiner (oft) als Umkehrung der Kettenregel.

$$\int x^2 \cdot \cos(\underbrace{x^3}_{u = x^3})\, dx$$

Alle x durch u ersetzen

Substitution

$u := x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$dx = \frac{1}{3x^2}\, du$

$$= \int \cancel{x^2} \cdot \cos(u) \cdot \frac{1}{3\cancel{x^2}}\, du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int \cos(u)\, du = \frac{1}{3} \sin(u) + C$$

$$\underset{\text{Rücksubst.}}{=} \frac{1}{3} \cdot \sin(x^3) + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Probe: $\left[\frac{1}{3} \sin(x^3)\right]' = \frac{1}{3} \cdot \cos(x^3) \cdot \underbrace{3x^2}_{\text{nachdiff.}}$

$$= x^2 \cdot \cos(x^3) \quad \checkmark$$

Aufgabe:

$$\int \cos(3x + 2)\, dx$$

$$\int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\, dx$$

Stammfunktionen der elementaren Funktionen

Funktion		Stammfunktion	Funktion		Stammfunktion
$\int x^n dx$	=	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\, dx$	=	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\int e^x\, dx$	=	$e^x + C$	$\int a^x\, dx$	=	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$
$\int \sin x\, dx$	=	$-\cos x + C$	$\int \cos x\, dx$	=	$\sin x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx$	=	$\arctan x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$	=	$\arcsin x + C$
$\int \sinh x\, dx$	=	$\cosh x + C$ Cosinus Hyperbolicus	$\int \cosh x\, dx$	=	$\sinh x + C$ Sinus hyperbolicus

$n = -1$

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

Hyperbel-Funktionen

2.5 Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe von Stammfunktionen

Der Haupsatz der Differential- und Integralrechnung, den wir im 2. Semester behandeln, besagt:

Satz 2.38.
Integrieren und Differenzieren sind in gewissem Sinne zueinander inverse Prozesse.

- Mit Hilfe des bestimnten Integrals (Riemann-Summen) zu einer stetigen Funktion $f(x)$ kann man eine Stammfunktionen von $f(x)$ angeben, die sogenannten Integralfunktionen

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

Es gilt also $F_a'(x) = f(x)$.

- Mit Hilfe einer Stammfunktion von $f(x)$, also einer Funktion mit $F'(x) = f(x)$ kann man bestimmte Integrale berechnen:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

.

$[F(x)]_a^b$

τ: Tau

Beispiel $s(t) \Leftrightarrow v(t)$

Sei $s(0) = 0$.

Wir haben gesehen:

$s(t_0) = s(t_0) - s(0)$

$= \int_0^{t_0} \underbrace{v(t)\, dt}_{ds}$

Umbenennungen

$s(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau$

$\dot{s}(t) = v(t)$

Für die Berechnung von bestimmten Integralen ist der zweite Teil des Satzes von großer Bedeutung.

Aufgabe 2.39. Berechnen Sie

1. $\int_0^1 e^x dx$ $= \left[e^x\right]_0^1$

$\int e^x dx = e^x \; (+C)$

$= e^1 - e^0 = e - 1$

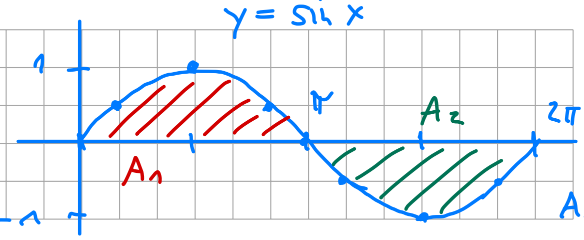
2. Welchen Wert hat das Intergl $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$?

$\sin(30°) = \frac{1}{2}$

Erwartung: 0 $= \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\left[\cos x\right]_0^{2\pi}$

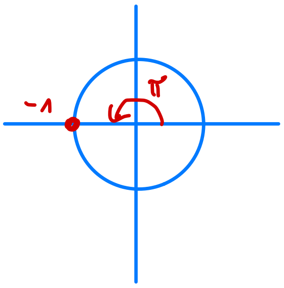
$= -\left[\cos(2\pi) - \cos(0)\right]$

$= -(1 - 1) = 0$



$A_1 = A_2$

3. Wie groß ist die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = \sin x$ und der x-Achse zwischen 0 und π? d.h. A_1



$A_1 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right)$

$= -(-1 - 1) = \underline{\underline{2}}$

4. Wie groß ist die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = \sin x$ und der x-Achse zwischen 0 und 2π? d.h. $A_1 + A_2 =: A$

Da $A_1 = A_2$, ist $A = 4$ ~ $\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sin(x) dx$

$= 4$

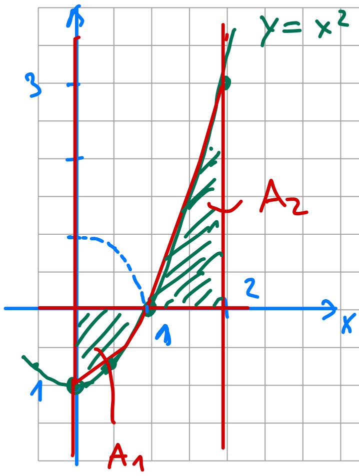
5. Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $y = x^2 - 1$, der y-Achse, der Geraden $x = \cancel{4}\ 2$ und der x-Achse begrenzt wird?

$x \in [0, 2]$

$A = A_1 + A_2$

$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \underline{\underline{2}}$

$= \int_0^2 |x^2 - 1| \, dx$



Achtung: $\int_0^2 (x^2 - 1) dx = A_2 - A_1$

nicht was wir suchen

$A_1 = -\int_0^1 (x^2 - 1)\, dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1$

$= -\left[\frac{1}{3} - 1\right] = \frac{2}{3}$

$A_2 = \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2$

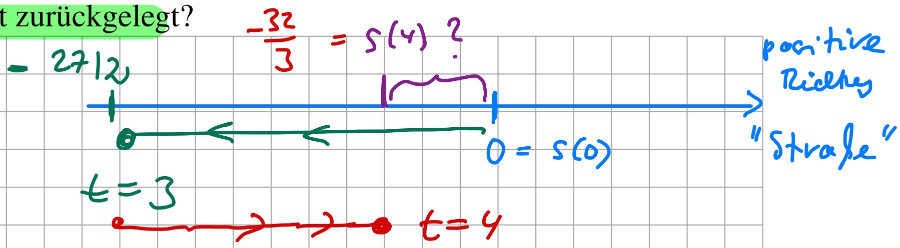
$= \left(\frac{1}{3} \cdot 8 - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$

$= \frac{8}{3} - \frac{6}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$

Aufgabe 2.40.

Ein Teilchen bewegt sich auf einer geraden Linie mit der Geschwindigkeit $v(t) = t^2 - t - 6\,[\mathrm{m/s}]$ in der Zeit von $t = 0$ und $t = 4$ Sekunden. Dabei bedeutet eine postive Geschwindigkeit, dass sich das Teilchen von links nach rechts bewegt, und eine negative Geschwindigkeit, dass sich das Teilchen von rechts nach links bewegt. Wie weit ist das Teilchen bei $t = 4$ vom Startpunkt entfernt? Welche Strecke hat es insgesamt in dieser Zeit zurückgelegt?

$t \in [0, 4]$



Quadratisch ergänzen

$$v(t) = t^2 - t - 6$$
$$= \left[t^2 - t + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right] - \tfrac{1}{4} - 6$$
$$= \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{25}{4}$$

Scheitel: (Minimum)

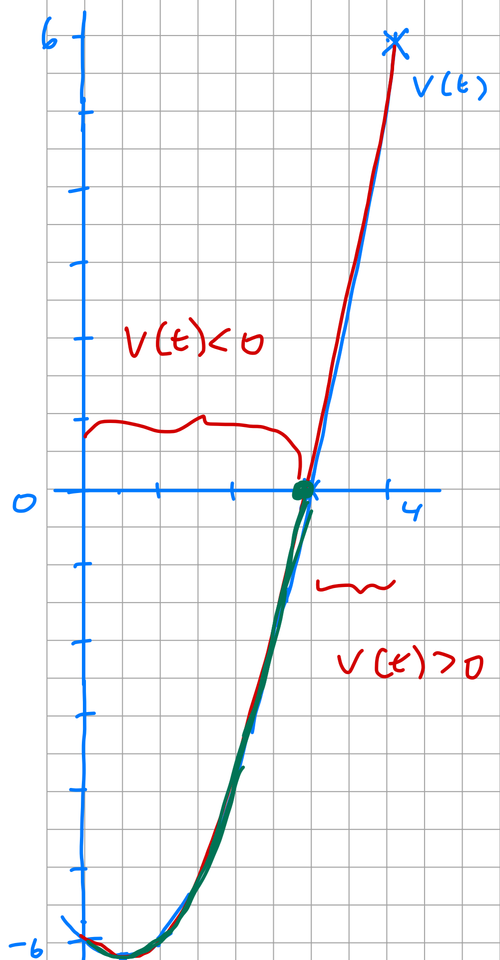
$$\dot v(t) = 2t - 1 = 0$$
$$t = 1/2$$
$$v(1/2) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} - 6 = \tfrac{1-2-24}{4} = -\tfrac{25}{4}$$

Vieta (Mitternachtsformel)

Nullstellen: $t_1 = 3,\ t_2 = -2$

$$t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$$

$-6 = -6 \cdot 1$
$-3 \cdot 2$ ‥ $-3+2 = -1$
$3 \cdot -2$
$1 \cdot -6$



$v(4) = 1 \cdot 6 = 6$

In $[0, 3]$: $v(t) < 0$

Bewegung nach links

In $[3, 4]$: $v(t) > 0$

Bewegung nach rechts

$t = 3$: Umkehrpunkt

Umkehrpunkt

In $[0,3]$: $\quad \underbrace{s(3)}_{} = \int_0^3 v(t)\,dt$

$\underbrace{-s(0)}_{=0}$

Länge des grünen Wegs $=$ Zurückgelegte Weg in $[0,3]$: $|s(3)| =$

$$= \left| \int_0^3 \underbrace{v(t)\,dt}_{<0} \right|$$

In $[3,4]$:

Länge des roten Weg $=$ Zurückgelegte Weg:

$$s(4) - s(3) = \int_3^4 \underbrace{v(t)\,dt}_{>0}$$

Position zur Zeit $t = 4$

$$s(4) = \int_0^4 v(t)\,dt$$

Weg von 0 bis 3: negativ gerechnet

Weg von 3 bis 4: positiv gerechnet

$$= \int_0^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 6t\right]_0^4 = \left(\frac{64}{3} - 8 - 24\right) - 0 = -\frac{32}{3}$$

links vom Start

Entfernung vom Startpunkt: $\frac{32}{3}$

Zurückgelegter Weg:

$$= \left| \int_0^3 v(t)\,dt \right| + \left| \int_3^4 v(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 6t\right]_0^3 \right| + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 6t\right]_3^4$$

$$= \left| \left(9 - \frac{9}{2} - 18\right) \right| + \left[\left(-\frac{32}{3}\right) - \left(9 - \frac{9}{2} - 18\right)\right]$$

$$= \left| -\frac{27}{2} \right| + \left[-\frac{32}{3} + \frac{27}{2} \right]$$

Insgesamt:

$$= \frac{27}{2} + \frac{27}{2} - \frac{32}{3} = 27 - \frac{32}{3} = \underline{\underline{\frac{49}{3}}}$$

= rote + grüne Strecke

<u>Maximale Entfernung von 0</u> bei $t = 3$

$$= \left| \int_0^3 v(t)\, dt \right| = \frac{27}{2}$$