3. Mechanische Schwingungen

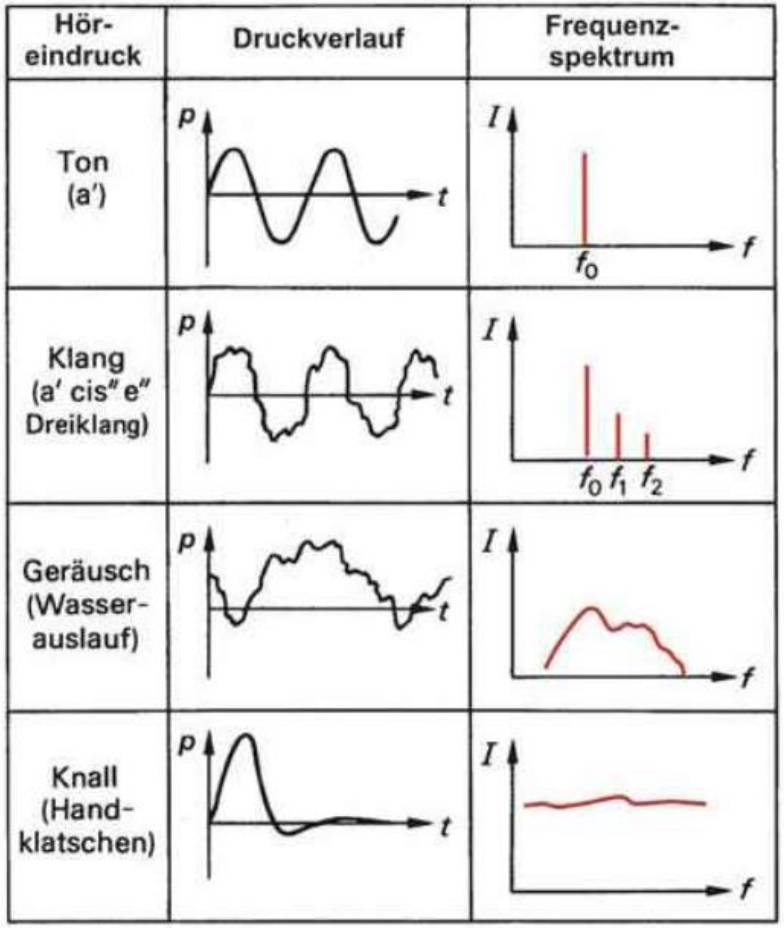
Schwingungen:

Periodisch wiederkehrende Vorgänge.

Schwingungen müssen nicht zwangsläufig „sinusförmig“ sein!

Sonderfälle:

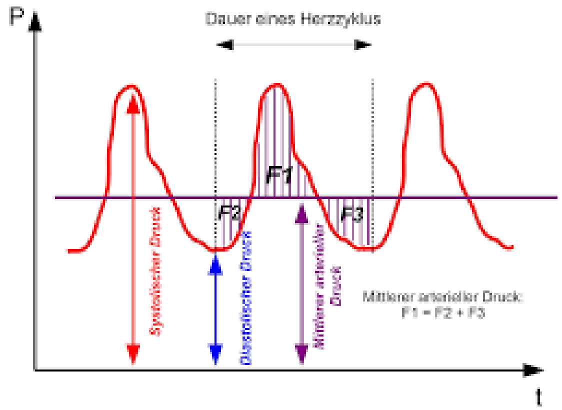
- „Rauschen“ (Störgröße, unspezifische Überlagerung vieler Frequenzen mit unterschiedlicher Amplitude)
- „transiente Schwingung“ (Einmaliges Ereignis, z.b. Knall oder Einschwingvorgang, als „instationäre“ Schwingung identifizierbar.



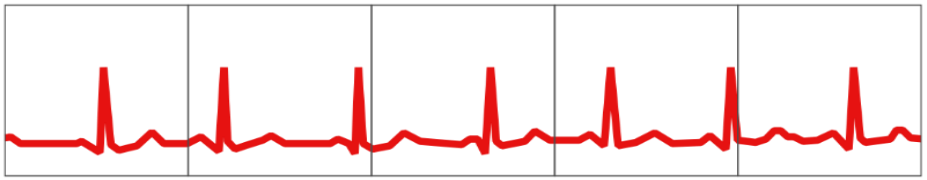
Bildquelle: http://publications.rwth-aachen.de/record/51306/files/Gerhardy_Christof.pdf

Periodische Vorgänge in der Natur sehr zahlreich:

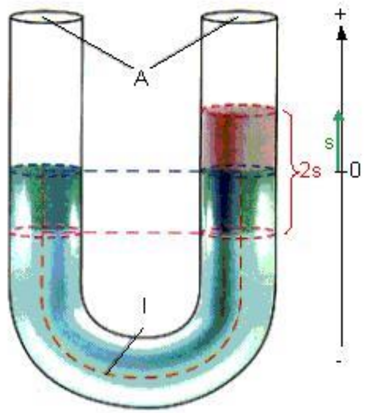
- Umlauf der Erde um die Sonne
- Jahreszeiten
- Tageszeiten
- Herzschlag (EKG, Blutdruck)



EKG-Aufzeichnung

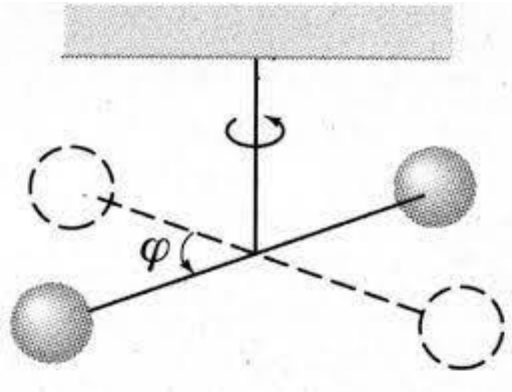


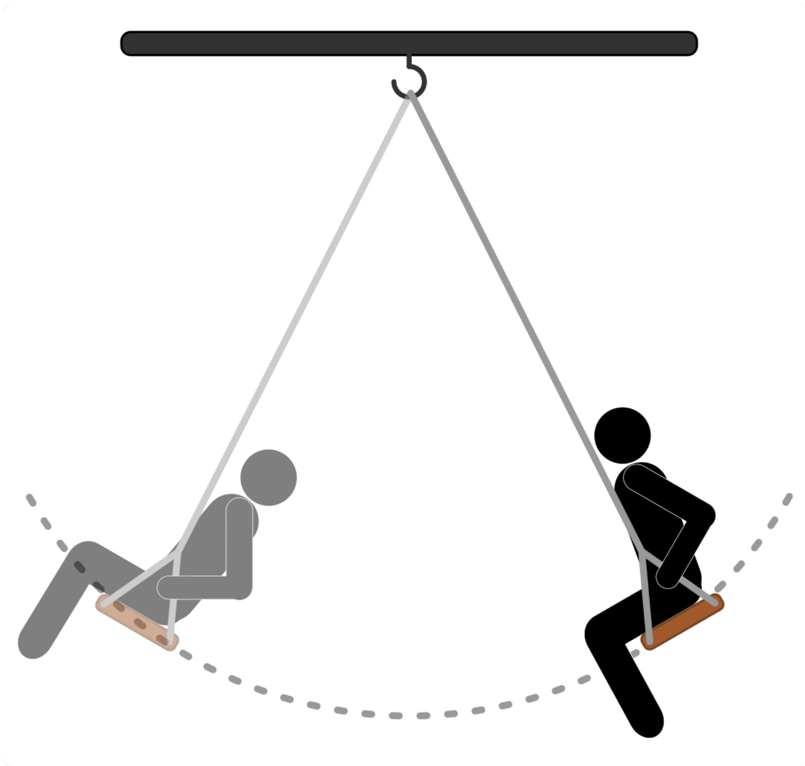
- Schwingendes Blatt (z.B. Blattfeder)
- Schwingende Flüssigkeitssäule



Bildquelle: https://www.physikerboard.de/topic,18449,-fluessigkeitspendel.html
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:EKG-Aufzeichnung.svg
https://epub.uni-regensburg.de/33231/1/Dissertation%20NIBP%20-%20Fiegl%20elektronisch%20Publ.pdf

- Schwingende Luftsäule (z.B. Musikinstrument)
- Kugel in Schale
- Federpendel
- Torsionspendel
- Fadenpendel
- Physikalisches Pendel
  (z.B. Schaukel)





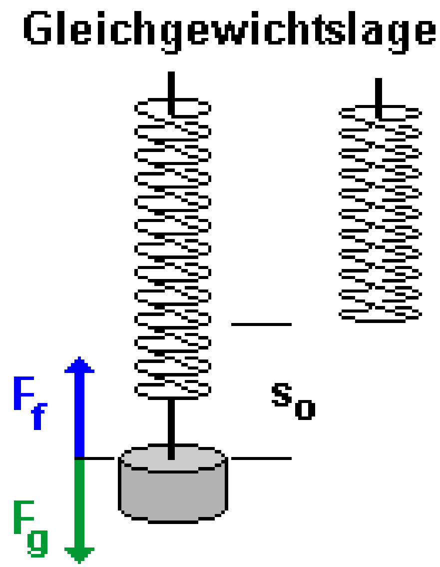
Bildquelle: https://www.grund-wissen.de/physik/mechanik/schwingungen-und-wellen/schwingungen.html
http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~jwagner/WS0910/Uebungen/Uebungsblaetter/Uebung14.pdf

3.1 Freie ungedämpfte Schwingung

Idealisierung: a) Keine Reibungseinflüsse

b) keine äußeren (Zusatz-)Kräfte

Jede reale Schwingung zeigt „**Dämpfung**“ (Energieverlust durch Reibungseinflüsse). Andauernde Schwingung = Energiezufuhr



Beispiel: **Federpendel**

Feder dehnt sich durch angehängte Masse

Ruhelage: Gleichgewicht $F_f = F_g$

Zusätzliche Kraft von aussen

Anfangsauslenkung vergrößert. $F_f > F_g$

Bildquelle: https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/physik/unterrichtsmaterialien/wellen/mechschwing/reagfema.htm

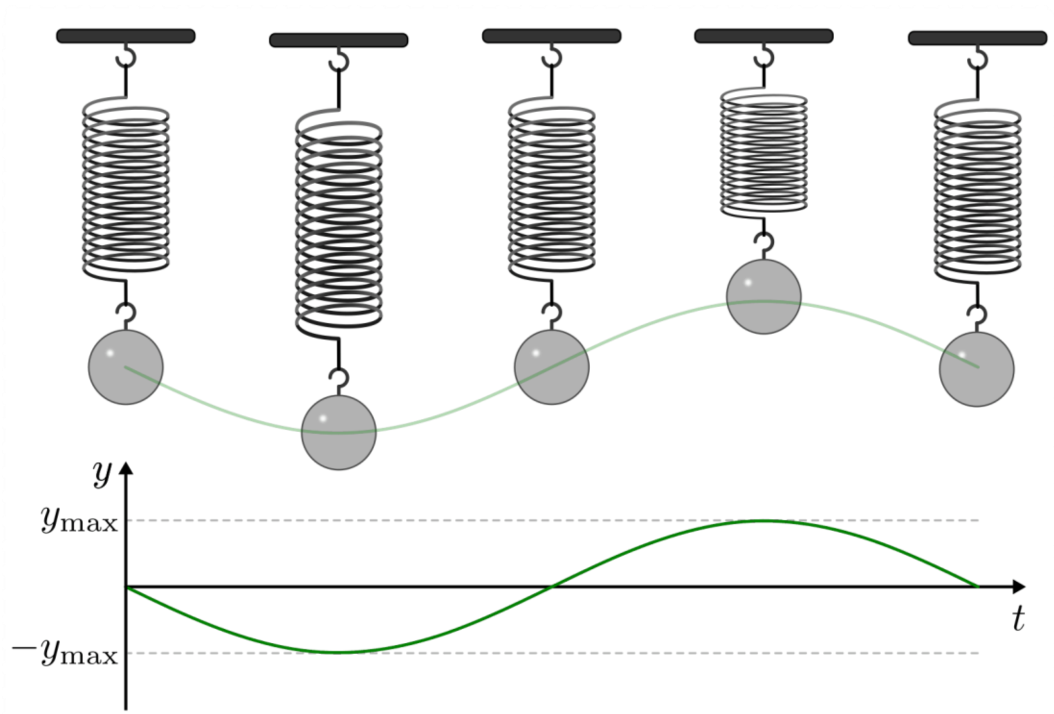
Ungedämpfte Federschwingung:

Kenngrößen:

$y_{max} = \hat{y} = \hat{s} = A_0$: **Amplitude**

$y = y(t) = s(t)$: **Elongation**

(Momentan-Auslenkung)



T : **Schwingungsdauer**

$[T]$ = s

$f = \frac{1}{T}$:**Frequenz**

$[f]$ = 1/s = s^{-1} = Hz

Bildquelle: https://www.grund-wissen.de/physik/mechanik/schwingungen-und-wellen/schwingungen.html

Bewegungsgleichung der schwingenden Masse:

Auf angehängte Masse m wirkt **Rückstellkraft** = Federkraft : $F_f = -k \cdot s$

Hinweis: Rückstellkraft proportional zu Auslenkung = „**lineares Kraftgesetz**“

Außerdem gilt Grundgesetz der Dynamik (2. Newton): $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{s}$

Daraus folgt: $F_f = F \quad \rightarrow \quad -k \cdot s = m \cdot \ddot{s} = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$ (1)

Umgestellt: $0 = m \cdot \ddot{s} + k \cdot s$ (2)

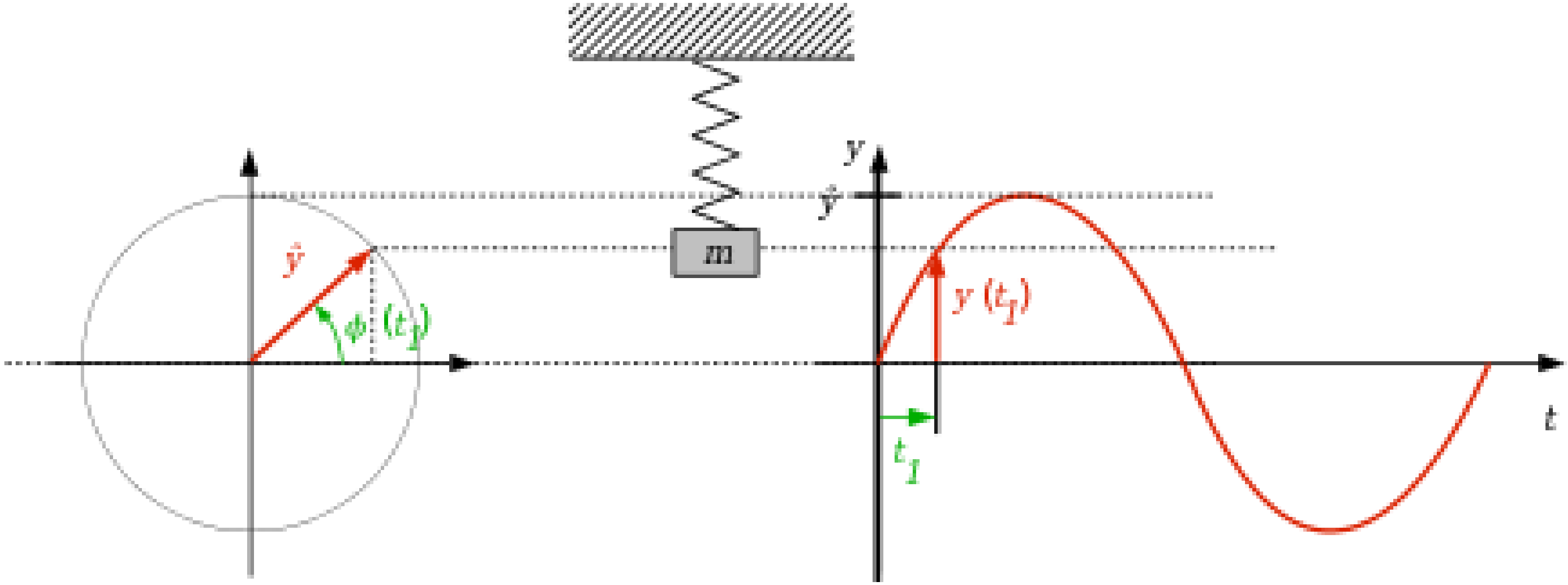
Hinweis: Gleichung (2) heißt „**Schwingungs-Differentialgleichung**“

Aus Gleichung (1) kann man Fragestellung ablesen: $\ddot{s}(t) = \frac{-k}{m}\, s(t)$ (3)

Wir suchen Funktion $s(t)$, die bis auf einen konstanten Vorfaktor identisch ist mit der zweiten Zeitableitung von sich selbst.

Ein geeigneter Ansatz ist daher: $s(t) = s_0 \cdot \sin[\varphi(t) + \varphi_0]$ (4)

Bedeutung von Winkel $\varphi(t)$ und Konstante φ_0:



Elongation entspricht der Projektion einer Kreisbewegung.

Der Winkel φ_0 ist quasi der Startwert, wenn die Sinusfunktion nicht bei 0 startet.

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Zeigermodell

Läuft der Zeiger gleichförmig um (also $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = konst.$), dann gilt für einen Umlauf:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\cdot\pi}{T} \quad oder\ umgeformt\text{:}\ \varphi = \omega \cdot t = \frac{2\pi}{T}t$$

Abkürzung: „**Kreisfrequenz**“ $\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = 2\cdot\pi\cdot f$ $\quad [\omega]$ = 1/s

Mit dem Ansatz (Gleichung (4)) erhalten wir:

$$s(t) = s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{ds}{dt} = \omega s_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$s(t)$und $\ddot{s}(t)$ in Gleichung (3) eingesetzt:

$$-\omega^2 s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{k}{m} s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Nach Kürzen erhält man also:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Der „konstante Vorfaktor“ entspricht also der „Eigenkreisfrequenz“ des Systems.

Daraus Frequenz f und Schwingungsdauer T:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Merke: Eigenkreisfrequenz ω und damit auch Frequenz f und Schwingungsdauer T

sind bei Schwingungen mit linearem Kraftgesetz **unabhängig** von der Amplitude s_0!

3.1.1 Harmonische Schwingung

Sonderform der Schwingung: „**Harmonische Schwingung**“.

Die harmonische Schwingung, manchmal auch als **Sinusschwingung** bezeichnet, verläuft nicht nur periodisch und besitzt eine eindeutige Gleichgewichtslage, sondern erfüllt noch weitere Bedingungen:

Definition: Harmonische Schwingung

Schwingung heißt „**harmonisch**“,
wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt.

a) Bewegung des schwingenden Körpers entspricht der **Projektion einer Kreisbewegung** und kann damit durch eine reine Sinus- oder Cosinusfunktion (je nach Ausgangsbedingung) beschrieben werden.

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{bzw.} \qquad y(t) = y \cdot \cos(\omega t)$$

b) Die rücktreibende Kraft auf den schwingenden Körper ist entgegengesetzt zur Bewegung gerichtet und proportional zur Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage (**lineares Kraftgesetz):**

$$F_{r\ddot{u}ck}(y) = -k \cdot y$$

c) Die periodische Bewegung erfolgt in einem parabolischen Potentialtopf. (Bewegung folgt einem quadratischen Verlauf der potentiellen Energie.)

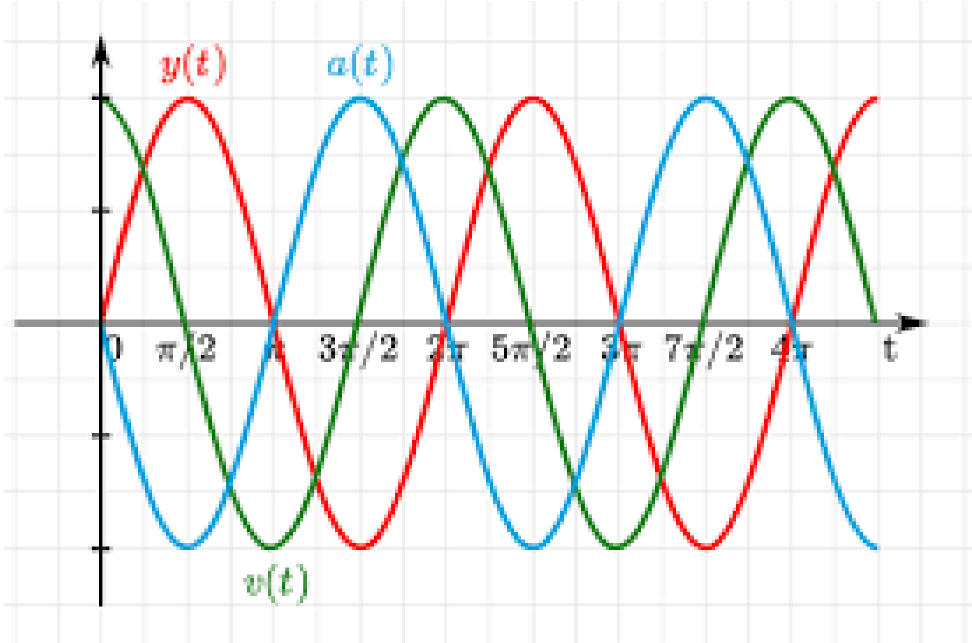
Erfüllt eine Schwingung eine dieser Bedingungen, erfüllt sie stets auch die anderen!

Typische Beispiele: Feder-Masse-Pendel, Fadenpendel (bei kleiner Auslenkung)

Hinweis: Jede beliebige Schwingung kann aus einer Summe von harmonischen Schwingungen zusammengesetzt werden (Stichwort „Fourier-Synthese", s.u.)

Bewegungsgesetze der harmonischen Schwingung

Start mit $\varphi_0 = 0$ bei $t = 0$ aus Ruhelage:



Orts-Zeit-Gesetz

$$y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t)$$

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz

$$v(t) = \hat{y} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = \hat{v} \cdot \cos(\omega t)$$

Beschleunigungs-Zeit-Gesetz

$$a(t) = -\hat{y} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) = -\hat{a} \cdot \sin(\omega t)$$

Bildquelle: https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/grundwissen/harmonische-schwingungen

Hinweis: Für den Fall, dass die Schwingung nicht aus der „Null-Position“ startet,

also ein zusätzlicher „Phasen-Winkel“ $\varphi_0 \neq 0$ berücksichtigt werden muss,

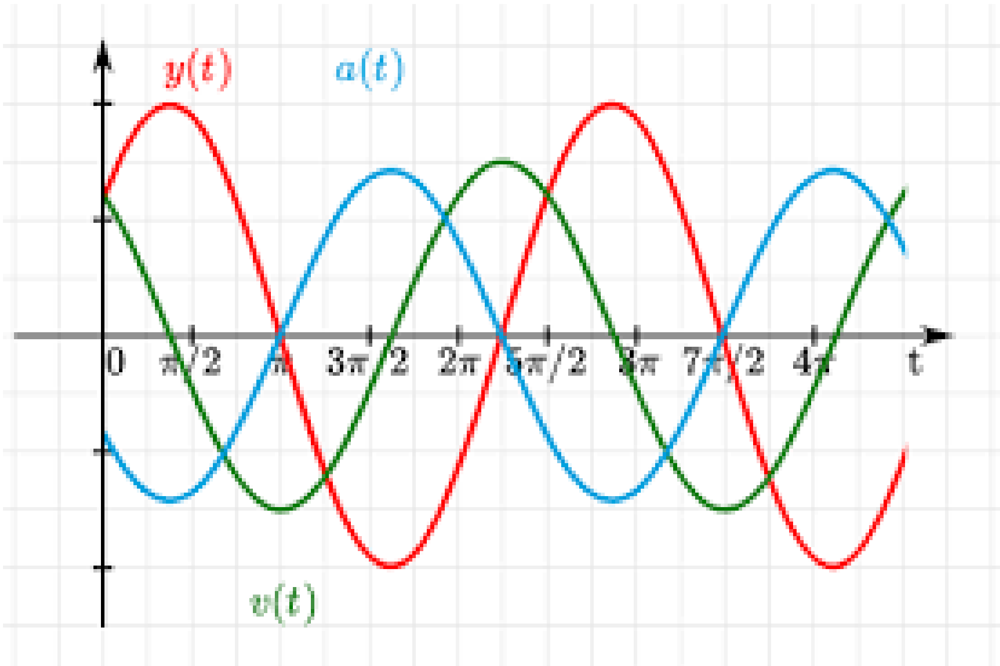
ändert sich das Argument in der Sinus-/Cosinus-Funktion: (hier $\omega_x < \omega$)

$(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega_x t + \varphi_0)$ $\quad v(t) = \hat{y} \cdot \omega_x \cdot \cos(\omega_x t + \varphi_0)$ $\quad a(t)$ = …

Auch eine Cosinus-Funktion

ist auf diese Art darstellbar:

$\cos\varphi = \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})$



Bildquelle: https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/grundwissen/harmonische-schwingungen