Kapitel 6

Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme

6.1 Rechnen mit Matrizen

Definition 6.1.
Matrizen sind rechteckige Zahlenschemata, die man in der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

schreibt, wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Es handelt sich also um eine Anordnung von $m \cdot n$ Zahlen in einer recht-eckigen Tabelle.
Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennt man eine Matrix vom Typ $m \times n$.
Man schreibt auch:

$(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Die a_{ij} heißen *Elemente* der Matrix. Das Element a_{ij} steht in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Man nennt i den *Zeilenindex* und j den *Spaltenindex*.

Beachte: (a_{ij}) ist eine Matrix, a_{ij} ist eine Zahl!

Ist $m = n$, also A eine Matrix vom Typ $n \times n$, so heißt A eine n*-reihige quadratische Matrix.*
Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

eine Spalte
m Zeilen

Im Falle $n = 1$ ist A ein Spaltenvektor im $\mathbb{R}^m$. *Beispiel:* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}^3$

Im Falle $m = 1$ ist A ein Zeilenvektor im $\mathbb{R}^n$. *Beispiel:* $A = (1, 2) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}^2$

Die Zeilen einer Matrix kann man als Zeilenvektoren, die Spalten als Spaltenvektoren interpretieren.

Eine Matrix vom Typ 1×1 ist im Wesentlichen dasselbe wie eine Zahl.

$(5) \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}$

Beispiel 6.2.
Die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & \underbrace{b_m}_{\text{rechte Seite}} \end{array}$$

kann man durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

angeben. Diese Matrix heißt *Koeffizientenmatrix* des LGS.
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

heißt *erweiterte Koeffizientenmatrix* des LGS. Wir sehen, dass Matrizen und lineare Gleichungssysteme miteinander verwandt sind.

Beispiel 6.3.
Eine Firma stellt 3 verschiedene Geräte her, ein Gerät besteht aus verschiedenen Bauteilen B_1, B_2, B_3, B_4 mit unterschiedlicher Anzahl pro Gerät. Die Anzahl Bauteile, aus denen die Geräte bestehen, können in Tabellen, also in Matrizen, übersichtlich dargestellt werden:

	B_1	B_2	B_3	B_4
G_1	3	2	0	1
G_2	2	2	2	3
G_3	0	1	3	3

	G_1	G_2	G_3
B_1	3	2	0
B_2	2	2	1
B_3	0	2	3
B_4	1	3	3

transponiert
Zeilen / Spalten
vertauscht

Definition 6.4 (Gleichheit von Matrizen)**.**
Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ heißen *gleich*, wenn sie denselben Typ, also dieselbe Anzahl von Zeilen und Spalten haben, und wenn gilt:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{für alle} \quad i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., n$$

Aufgabe 6.5. Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ sind folgende Matrizen gleich:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ y & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

unterschiedlicher Typ, immer verschieden

$A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ y & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ✓

$-x = 2 \Leftrightarrow x = -2$
$y = 2$

Gleich, wenn
$x = -2$ und $y = 2$

6.1.1 Der Vektorraum der $m \times n$-Matrizen

Definition 6.6 (Addition von Matrizen)**.**
Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ vom gleichen Typ werden *addiert*, indem die an den gleichen Stellen der beiden Matrizen stehenden Elemente addiert werden, also

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

elementweise

Aufgabe 6.7. Berechnen Sie $A + B$:

1. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

   $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

   $A + B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

2. Für $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{2 \times 2}$ und $B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 3}$

   Typ unterschiedlich

   $A + B$ nicht definiert!

Definition 6.8 (Skalare Multiplikation von Matrizen)**.**
Eine Matrix $A = (a_{ij})$ wird *mit einem Skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *multipliziert*, indem jedes Element a_{ij} mit λ multipliziert wird. Es gilt also

$$\underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda \cdot a_{ij})$$

Man setzt

$$-A := (-1) \cdot A$$

Aufgabe 6.9. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Berechnen Sie folgende Matrizen: $2 \cdot A$, $-\frac{1}{2} \cdot A$, $-A$, $0 \cdot A$

   $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

   $-A = (-1) \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

   $-\frac{1}{2} A = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2{,}5 \end{pmatrix}$

   $0 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$

   Nullmatrix vom Typ 2×3

2. Berechnen Sie $A + (-A)$

   $A + \underbrace{(-A)}_{\text{„Gegenmatrix"}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definition 6.10. Die Matrix

$$(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

heißt *Nullmatrix* vom Typ $m \times n$.

Bemerkung 6.11 (Rechenregeln für Matrizen)**.**
Für die Menge der Matrizen vom Typ $m \times n$ zusammen mit der Addition und der skalaren Mutliplikation gelten die Vektorraumgesetze. Somit ist die Menge der Matrizen vom Typ $m \times n$ ein Vektorraum der Dimenstion $m \cdot n$. Der Vektorraum hat die Dimension nm.

6.1.2 Die transponierte Matrix

Definition 6.12.
Die Matrix A^t, die aus A dadurch hervorgeht, dass alle Zeilen von A der Reihe nach als Spalten von A^t geschrieben werden, heißt die zu A *transponierte* Matrix. Es gilt also:

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\text{Ist } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{so ist} \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.13.
Bestimmen Sie den Typ der Matrix, berechnen Sie $2A$, die transponierte Matrix A^t und $2 \cdot A^t$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$\lambda \cdot A^t = (\lambda A)^t$

$2A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad 2 \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (2A)^t$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^t = A$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = A$ $\qquad$ symmetrische Matrix

Definition 6.14. Eine quadratische Matrix A heißt *symmetrisch*, wenn $A^t = A$.

Bemerkung 6.15 (Rechenregeln für die Transponierte)**.**
Sind $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Matrizen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t =$ A
3. $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t$

6.1.3 Die Matrizenmultiplikation

Beispiel 6.16 (Beispiel - Matrixmultiplikation)**.**
Zur Herstellung der Produkte P_1, P_2, P_3 und P_4 werden drei verschiedene Rohstoffe R_1, R_2, R_3 benötigt. Die zur Herstellung einer Mengeneinheit eines Produktes benötigten Rohstoffmengen seien wie folgt durch die Matrix A gegeben:

i-te Zeile von A $\circ$ j-te Zeile von B transponiert

$= (C_{ij}) = A \cdot B$

	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	2	1	3	4
R_2	3	2	0	1
R_3	0	3	2	4

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$

muss gleich sein!

Aus diesen Produkten sollen nun zwei Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt werden. Die zur Herstellung einer Einheit benötigten Mengen an Zwischenprodukten werden durch folgende Matrix B beschrieben:

	E_1	E_2
P_1	2	4
P_2	1	3
P_3	3	1
P_4	5	6

$B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$

$8+3+3+24 = 38$

Ermitteln Sie die Matrix C, die für jedes Endprodukt die benötigten Mengen an Rohstoffen zeigt!

?

	E_1	E_2
R_1	$\boxed{34}$	$\boxed{38}$
R_2	$\boxed{13}$	⋮
R_3	. . . .	

Wieviel Rohstoff R_1 steckt in E_1?

$E_1 \mathrel{\hat{=}} 2 \cdot P_1 + 1 P_2 + 3 P_3 + 5 P_4$

Anteile R_1: $2 \cdot R_1 \quad 1 R_1 \quad 3 \cdot R_1 \quad 4 R_1$

Definition Matrixprodukt $\rightarrow$ $\boxed{C =: A \cdot B}$

Insgesamt: $2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = \underline{\underline{34}}$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{1. Spalte von B}} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{1. Zeile von A (transponiert)}}$

Anteil R_2 in E_1:

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 6+2+5 = 13$

Definition 6.17 (Matrixmultiplikation)**.**
Sei A eine $m \times r$-Matrix und B eine $r \times n$-Matrix (also Spaltenanzahl von A = Zeilenanzahl von B).
Dann ist das *Produkt* $C = A \cdot B = (c_{ik})$ eine $m \times n$-Matrix mit den Elementen

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot b_{jk} \text{ für } i = 1, ..., m; \; k = 1, ..., n.$$

i-te Zeile von A transponiert

$\begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{rk} \end{pmatrix}$

k-te Spalte von B

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$A\cdot B = \mathbb{R}^{2\times 3}$

Beispiel 6.18 (Falksches Schema).
Die Matrix-Multiplikation kann man mit dem Falkschen Schema recht übersichtlich darstellen.
Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

A \ B		5	7	8
		9	10	11
2	0	10	14	16
6	8	102	122	136

$10 + 0\cdot 9 = 10$

$2\cdot 7 + 0\cdot 10 = 14$

$30 + 72 = 102$

$6\cdot 7 + 8\cdot 10 = 122$

$6\cdot 8 + 8\cdot 11 = 136$

$A\cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 16 \\ 102 & 122 & 136 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

Aufgabe 6.19. Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

Berechnen Sie, falls möglich:

1. AB

$A: \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\quad B: \mathbb{R}^{3\times 1}$

	A \ B		1
			−2
			3
3	4	−1	−8
2	−7	6	34

NR:

$3 - 8 - 3$

$2 + 14 + 18 = 34$

$A\cdot B = \begin{pmatrix} -8 \\ 34 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

2. BA

B \ A	3	4	−1
	2	−7	6
1	$\boxed{⚡}$		
−2			
3			

geht nicht!

$B\cdot \quad A$

$3\times 1 \quad 2\times 3$

⚡

nicht def.

3. $B\cdot A^t$ nicht def.

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$B \quad 3\times \boxed{1}$ ⚡

$A \quad 2\times 3$

$A^t \quad \boxed{3}\times 1$

$(3)\times(1)$ ✓ $(1)\times(3)$ "dyadisches Produkt"

4. $B \cdot B^t$ $\in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$B \backslash B^t$	1	−2	3
1	1	−2	3
−2	−2	4	−6
3	3	−6	9

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

5. $B^t \cdot B$ $\quad \underset{B^t}{(1)\times(3)} \cdot \underset{B}{(3)\times(1)}$ ✓ $\in \mathbb{R}^{1\times 1} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}$

$B^t \backslash B$	$\begin{matrix}1\\-2\\3\end{matrix}$
1 −2 3	14

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{(14)}_{\in \mathbb{R}^{1\times 1}} \mathrel{\hat{=}} \underbrace{14}_{\mathbb{R}}$$

NR: $1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 3\cdot 3 = 14$

$= B \circ B$ als Vektoren

Aufgabe 6.20.

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie:

$A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$A \cdot B$, $B \cdot A$ beide definiert $\in \mathbb{R}^{3\times 3}$

1. AB

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix $\in \mathbb{R}^{3\times 3}$

2. BA

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$\neq$ Nullmatrix, $\neq A\cdot B$

im Allg.: $AB \neq BA$

Bemerkung 6.21.

1. Die Matrizenmultiplikation ist *nicht kommutativ*! !!

   Ist A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times m$-Matrix, so exisieren zwar AB und BA, aber im Allgemeinen ist $AB \neq BA$!

2. Es ist möglich, dass AB die Nullmatrix ist, also $AB = (0)$, obwohl weder A noch B Nullmatrizen sind!

   Es ist weiter möglich, dass $AB = (0)$, aber $BA \neq (0)$.

Satz vom Nullprodukt stimmt bei Matrizen NICHT!

Unterschied zum Produkt von reellen Zahlen!

$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Definition 6.22 (Einheitsmatrix)**.**
Die quadratische Matrix

$E_1 = (1) \hat{=} 1$

$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt n-reihige *Einheitsmatrix*.

Aufgabe 6.23. Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie AE_3 und E_3A.

E_n neutrales Element der Matrix-Multiplikation.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Bemerkung 6.24 (Rechenregeln für die Matrix-Multiplikation)**.**
Seien A, B, C Matrizen passender Größe, E eine Einheitsmatrix passender Größe und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wenn die folgenden Summen und Produkte definiert sind, gilt:

1. Assoziativgesetz: $A(BC) = (AB)C$
2. $AE = EA$, d.h. Einheitsmatrizen sind *neutrale Elemente* der Matrizenmultiplikation.
3. Distributivgesetze:
   - $A(B + C) = AB + AC$
   - $(A + B)C = AC + BC$

i. Allg.

$AB \neq BA$

Ferner gilt:

4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
5. $(AB)^t = B^t A^t$

Reihenfolge wird umgedreht!

$A \in \mathbb{R}^{m \times r}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{r \times n}$

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$B^t \in \mathbb{R}^{n \times r}$ $\quad A^t \in \mathbb{R}^{r \times m}$

$A^t \in \mathbb{R}^{r \times m}$ $\quad B^t \in \mathbb{R}^{n \times r}$

$A^t \cdot B^t$ ↯ im allg. nicht möglich

6.1.4 Verschiedene Sichtweisen auf lineare Gleichungssysteme

Bemerkung 6.25 (Lineare Gleichungssyteme und Matrizen)**.**
Lineare Gleichungssysteme können wir mit Hilfe der Matrizenmuliptlikation darstellen: Gegeben ist das LGS:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \hat{=} \mathbb{R}^{n \times 1}$

Vektor der Unbekannten

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A \text{ Koeffizienten-matrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{rechte Seite } \vec{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}}$$

Bemerkung 6.26.
Ein lineares Gleichungssystem kann man folgendermaßen ansehen:

1. Finde alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, so dass die folgenden *linearen Gleichungen* erfüllt sind:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

2. Finde alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, die die *Matrizengleichung* $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$ erfüllen,

   wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

3. Stelle den Vektor $\vec{b}$ als *Linearkombination* der Spaltenvektoren von A dar:
   Gesucht sind alle Koeffizienten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$x_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n = \vec{b}$$

   wobei $\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, $(1 \leq i \leq n)$ die Spaltenvektoren von A sind.

$$\mathbb{R}^{m \times n} \ni \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{A}$$

$\mathbb{R}^m \hat{=} \mathbb{R}^{m \times 1} \ni \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

Suche $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} x_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

6.1.5 Die inverse Matrix

Was ist das ??

Reelle Zahlen

$a \neq 0$

$a x = b \quad | : a$

$x = \frac{b}{a}$

$a x = b \quad | \cdot \frac{1}{a} = a^{-1}$

$\underbrace{a^{-1} \cdot a}_{1} \cdot x = a^{-1} b$

$\boxed{x = a^{-1} b}$

$a \cdot a^{-1} = 1$

$a^{-1} \cdot a = 1$

Matrizen:

LGS

$A \vec{x} = \vec{b} \quad | \cdot A^{-1}$ von links!

links $\quad$ links

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

$\boxed{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}}$ Lösung des LGS

Definition 6.27.
Sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix und E_n die n-te Einheitsmatrix.
Eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *inverse Matrix zu* A oder *Inverse von* A, wenn

$$AX = E_n \qquad \text{und} \qquad XA = E_n$$

X rechtsinverse zu A $\qquad$ X linksinvers zu A

Schreibweise: $X = A^{-1}$.
Nicht jede quadratische Matrix besitzt eine inverse Matrix. Besitzt A eine Inverse, dann sagen wir: A ist eine *reguläre Matrix* oder A ist *invertierbar*. Andernfalls heißt A *singulär*.

Achtung: $\frac{1}{A}$ schlechte Notation, wird NICHT verwendet (da Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist)

gibt es nicht!

Bemerkung 6.28.

1. Jede reguläre Matrix besitzt genau eine Inverse.
2. Wir haben gefordert: $AX = E$ **und** $XA = E$.
   Es gilt sogar:
   - Ist X eine quadratische Matrix mit $AX = E$ (man sagt: X ist eine Rechtsinverse von A), so ist automatisch auch $XA = E$.
   - Ist X eine quadratische Matrix mit $XA = E$ (man sagt: X ist eine Linksinverse von A), so ist automatisch auch $AX = E$.

X ist Rechtsinverse und Linksinverse

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$!

Reihenfolge vertauschen !!!

Bemerkung 6.29 (Rechenregeln für die inverse Matrix)**.**
Seien A, B reguläre $n \times n$-Matrizen. Dann existieren alle folgenden Matrizen und es gilt:

$(AB)^t = B^t \cdot A^t$ (*)

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ A invertierbar $\Rightarrow$ A^t invertierbar
3. $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$! A, B invertierbar $\Rightarrow$ $A \cdot B$ invertierbar
4. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ für $\lambda \neq 0$. $\lambda \in \mathbb{R}$ Zahl

Socken-Schuhe Regel

(2) A invertierbar $\Rightarrow$ es gibt inverse Matrix A^{-1} mit

$A \cdot A^{-1} = E \quad | \, ^t$

$(A^{-1})^t \cdot A^t \overset{(*)}{=} (A \cdot A^{-1})^t = E^t = E \Rightarrow \underbrace{(A^{-1})^t}_{\text{Linksinverse von } A^t} \cdot A^t = E$

$\Rightarrow$ Inverse von A^t, d.h. $(A^t)^{-1}$

Die inverse Matrix einer 2×2-Matrix

In diesem Fall gibt es eine einfache Formel zur Berechnung der Inversen:

Bemerkung 6.30. Für eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

1. Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn
$$\det A = |A| = ad - bc \neq 0$$
2. Die inverse Matrix ist dann gegeben durch
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$|A|$
Determinante von A
kein Betrag, kann negativ sein !

Aufgabe 6.31.
Berechnen Sie die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ und verifizieren Sie das Ergebnis durch Matrix-Multiplikation.

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -7 - (-4) = \underline{\underline{-3}}$

$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 & -1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/3 & -1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/3 & 0 \\ 0 & 3/3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$

$\Rightarrow A^{-1}$ Rechtsinverse zu A

$\Rightarrow A^{-1}$ Inverse von A

(6.29)(3):

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, invertierbar

Beh: $A\cdot B$ invertierbar

$$(A\cdot B)\cdot \underbrace{(B^{-1}\cdot A^{-1})} = A\cdot(\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{E})\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = E$$

$\Rightarrow$ $B^{-1}\cdot A^{-1}$ ist die/eine Rechtsinverse von $A\cdot B$

d.h. $B^{-1}\cdot A^{-1}$ ist die/eine Inverse von AB,

also $B^{-1} A^{-1} = (A\cdot B)^{-1}$

$A\vec{x} = \vec{b}$

$A\vec{x} = \vec{c}$

Aufgabe 6.32 (Simultanes Lösen von linearen Gleichungssystemem).
Zwei Gleichungssysteme mitderselben Koeffizientenmatrix, aber unterschiedlicher rechter Seite, kann man simultan mit dem Gauß-Algorithmus lösen:
Löse die LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A\vec{x} = \vec{c}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|l} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 2 & \mid\cdot\frac{4}{3} \ \mid\cdot\frac{-2}{3} \\ 4 & -1 & -2 & -1 & 2 & \leftarrow \\ -2 & 4 & -1 & 3 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|l} -3 & 2 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 5/3 & -2/3 & 1/3 & 14/3 & \mid\cdot 3 \\ 0 & 8/3 & -5/3 & 7/3 & -7/3 & \mid\cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|l} -3 & 2 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 14 & \mid\cdot\frac{-8}{5} \\ 0 & 8 & -5 & 7 & -7 & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|l} -3 & 2 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 14 & \\ 0 & 0 & -9/5 & 27/5 & -147/5 & \mid\cdot\frac{-5}{9} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|l} -3 & 2 & 1 & 1 & 2 & \leftarrow \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 14 & \leftarrow \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 49/3 & \mid\cdot 2 \ \mid\cdot -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|l} -3 & 2 & 0 & 4 & -43/3 & \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 140/3 & \mid : 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 49/3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|l} -3 & 2 & 0 & 4 & -43/3 & \leftarrow \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 28/3 & \mid -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 49/3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc|l} -3 & 0 & 0 & 6 & -33 & \mid : -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 28/3 & \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 49/3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 28/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 49/3 \end{array}$$

Lösung

$A\vec{x} = \vec{b}$

$x_3 = -3 \quad x_2 = -1 \quad x_1 = -2$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

$A\vec{x} = \vec{c}$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 28/3 \\ 49/3 \end{pmatrix} \right\}$

Links steht Einheitsmatrix

⇝ auf der rechten Seite steht der Lösungsvektor!

$14 \cdot 8 = 112$, $+35$, $= 147$

$147 : 3 = 49$

$\frac{147}{9} = \frac{49}{3}$

$\frac{98}{3} + \frac{42}{3} = \frac{140}{3}$

$56 + 43$

Bemerkung 6.33.
Die Berechnung der inversen Matrix läuft auf das Lösen von linearen Gleichungssystemen hinaus: Gegeben ist eine quadratische Matrix A, zu der wir die rechtsinverse Matrix X suchen.

$E = [\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n]$

Spaltenvektoren von E sind die Standard-einheitsvektoren

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ -

Gesucht: $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $A \cdot X = E$

$X = [\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n]$ mit Spaltenvektoren $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$
$i = 1, \dots, n$

$A \cdot [\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n] = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n]$

beinhaltet n Lineare Gleichungssysteme:

$A \cdot \vec{x}_1 = \vec{e}_1$ mit derselben Koeffizientenmatrix A

$\vdots$ die man simultan lösen muss.

$A \cdot \vec{x}_n = \vec{e}_n$

Der Gauß-Jordan-Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix

Bemerkung 6.34.
Um die inverse Matrix zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu bestimmen, geht man folgendermaßen vor:

1. Man bildet eiine $n \times 2n$-Matrix, indem man rechts neben die Matrix A die Einheitsmatrix E_n schreibt.

2. Durch elementare Zeilenumformungen transformiert man diese Matrix, sofern mglich, in eine $n \times 2n$-Matrix, in der links die Einheitsmatrix E_n

3. Die $n \times n$-Matrix, die nun auf der rechten Seite steht, ist A^{-1}.

Aufgabe 6.35.

Entscheiden Sie, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

1. Schritt: Man schreibt die Matrix A auf die linke Seite und rechts daneben die Einheitsmatrix E.

$$\begin{array}{ccc|ccc l}
x_1 & x_2 & x_3 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \\
2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \uparrow \cdot \frac{-5}{2} \\
0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow \\
\multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\qquad\qquad}_{A}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{E_3}} &
\end{array}$$

2. Schritt/ Teil I (Gauß-Algorithmus)
Man bringt A durch elementare Zeilenumformungen gemäss Gauß-Algorithmus auf Zeilen-Stufen-Form, gleichzeitig führt man dieselben Umformungen auf der rechten Seite durch.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -5/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot + \frac{1}{4} \\ \\ \end{array}$$

Zeilen-Stufen-Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & -5/2 & 1/4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot -4 \end{array}$$

Enthält die Diagonale in der Zeilen-Stufen-Form Nullen (eine oder mehrere), ist die Matrix nicht invertierbar.
2. Schritt (Jordan-Verfahren) Durch geeignete Multiplikation werden die Diagonalelemente der linken Matrix zu 1 gemacht und dann die Elemente oberhalb der Diagonalen mit elementaren Zeilenumformungen zu 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ |\cdot 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 11 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 11 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 16 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_3} \qquad \underbrace{\begin{matrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{matrix}}_{X = A^{-1}}$$

3. Schritt:
Auf der linken Seite steht die Einheitsmatrix, auf der rechten die Inverse zu A.
Probe:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_3}$$

Aufgabe 6.36.

Entscheide Sie, ob die Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |-2 \;|\cdot -1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot \frac{-1}{7} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

Man kann nicht erreichen, dass auf der Diagonale lauter 1er stehen !

Es gibt eine Nullzeile (links)

$\Rightarrow$ A nicht invertierbar

(In der Zeilen-Stufen-Form steht eine 0 in der Diagonale)

oder mehrere

6.1.6 Matrizengleichungen

Die inverse Matrix von A ist Lösung der Matrizengleichungen $AX = E$ (Rechtsinverse) bzw. $XA = E$ (Linksinverse).

In $\mathbb{R}$

$a x = b \quad | \cdot a^{-1} = \frac{1}{a}$

$x = \frac{b}{a} \qquad : a$

$: A$, $\frac{1}{A}$ gibt es nicht !

Matrizen

$A \vec{x} = \vec{b} \quad | \cdot A^{-1}$ von links

$A^{-1}(A \cdot \vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$

$\vec{x} = \underbrace{(A^{-1} A)}_{E} \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ Assoziativität

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ A^{-1}\vec{b} \}$

Aufgabe 6.37.

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung (vgl. 6.35) mithilfe der inversen Matrix:

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}} \end{array}}_{A} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad | \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 18$

$x_2 = -11$

$x_3 = 24$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 24 \end{pmatrix} \right\}$

Bem: $A X A^{-1}$
Weiterrechnen geht nicht (jedenfalls nicht mit reinen Matrix-Operationen)

$3 \cdot X = 3 \cdot E \cdot X$

Aufgabe 6.38.
Die Matrizen A, B, C seien quadratische Matrizen derselben Größe, E die Einheitsmatrix. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung X für folgende *Matrizengleichungen*. Die auftretenden Matrizen dürfen Sie, falls erforderlich, als invertierbar annehmen.

$A - \underset{\text{Zahl}}{3} E$ geht nicht! (Matrix)

in $\mathbb{R}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

1. $AX + 2B = 3(X + C)$

$$AX + 2B = 3X + 3C \qquad | -3X - 2B$$
$$AX - 3X = 3C - 2B \qquad E \text{ nötig!}$$
$$(A - 3E) \cdot X = 3C - 2B \qquad | \cdot (A - 3E)^{-1} \text{ von links}$$
$$X = (A - 3E)^{-1}(3C - 2B)$$

! links !

X muss von rechts ausgeklammert werden! NICHT vertauschen!

$$ax + 2b = 3(x + c)$$
$$ax + 2b = 3x + 3c \qquad | -3x - 2b$$
$$ax - 3x = 3c - 2b$$
$$x \cdot (a - 3) = 3c - 2b \qquad | : (a-3)$$
$$x = \frac{3c - 2b}{a - 3} \qquad a \neq 3$$

2. $(AX^t)^t - XB + 3X = E$

$\boxed{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$

$\boxed{(A^t)^t = A}$

$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$ $\quad (\lambda \in \mathbb{R})$

X bleibt links!

$$(X^t)^t \cdot A^t - XB + 3X = E$$
$$X \cdot A^t - X \cdot B + 3 \cdot X = E$$
$$X \cdot A^t - XB + X \cdot 3E = E$$
$$X(A^t - B + 3E) = E \qquad | (A^t - B + 3E)^{-1} \text{ von rechts}$$
$$X = E \cdot (A^t - B + 3E)^{-1}$$
$$X = (A^t - B + 3E)^{-1}$$

$AX + XB$ keine Regel zum Ausklammern!

3. $B(AX)^t = BA - 2E$

$$B X^t \cdot A^t = BA - 2E \qquad | B^{-1} \text{ (von links)}$$
$$X^t \cdot A^t = B^{-1} \cdot (BA - 2E)$$
$$X^t \cdot A^t = A - B^{-1} \cdot 2E = A - 2 \cdot B^{-1} \qquad | \cdot (A^t)^{-1} \text{ (von rechts)}$$
$$X^t = (A - 2B^{-1}) \cdot (A^t)^{-1} \qquad |^t$$
$$X = \left[(A - 2B^{-1}) \cdot (A^t)^{-1} \right]^t$$
$$= \left((A^t)^{-1} \right)^t \cdot (A - 2B^{-1})^t$$
$$= \left((A^{-1})^t \right)^t \cdot \left(A^t - 2(B^{-1})^t \right) = A^{-1} \cdot \left(A^t - 2(B^{-1})^t \right)$$
$$X = \underbrace{A^{-1} \cdot A^t}_{} - 2 A^{-1} \cdot (B^{-1})^t$$

kann nicht mehr vereinfacht werden!

$(X^t)^t = X$

vereinfachen

$\boxed{(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}}$

$(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

Aufgabe 6.39.
Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Lösung X der Matrizengleichung $XA - C = XB - X$.

Allgemein lösen:

$X = 1 \cdot X = EX = XE$

$XA - C = XB - X \quad | -XB + X + C$

$XA - XB + XE = C$

$X(A - B + E) = C \quad | \cdot (A - B + E)^{-1}$ rechts

X bleibt links !

$X = C \cdot (A - B + E)^{-1}$

Einsetzen:

$A - B + E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\det(A - B + E) = -1$

$(A - B + E)^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = X}$

6.2 Vektorräume und Lineare Unabhängigkeit

6.2.1 Vektorräume

Zu Beginn der Vorlesung haben wir geometrische Vektoren in der Ebene oder im Raum definiert, dann haben wir den $\mathbb{R}^n$, also die n-dimensionalen Koordinatenvektoren, für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Für alle diese Mengen wurden Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation definiert. Für alle Arten von Vektoren gelten dieselben Rechengesetze.

$\lambda \cdot \vec{v}$

Außer auf den betrachteten Mengen kann man auch auf ganz anderen Mengen Addition, Gegenvektor, Subtraktion und skalare Multiplikation definieren, so dass dieselben Gesetze gelten:

Definition 6.40 (Reeller Vektorraum)**.** Gegeben ist eine Menge V.

Auf der Menge V sei eine Addition (+) definiert, d.h. eine Operation, die allen Paaren $(v, w) \in V \times V$ ein Element $v + w \in V$ zuordnet.
Auf der Menge V sei außerdem eine skalare Multiplikation (·) definiert, d.h. eine Operation, die allen Paaren $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V$ ein Element $\lambda \cdot v \in V$ zuordnet.
Die Operationen sollen folgende Rechengesetze erfüllen (Vektorraum-Gesetze):
(I) Gesetze für die Addition:

$(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe

- Assoziativgesetz: $(u + v) + w = u + (v + w)$ für alle $u, v, w \in V$.
- Kommutativgesetz: $u + v = v + u$ für alle $u, v \in V$.

"Nullvektor O"

- Existenz eines neutralen Elements (Nullelement der Addition):
  Es gibt genau ein $O \in V$, so dass $v + O = v$ für alle $v \in V$.

$u - v := u + (-v)$

- Existenz eines inversen Elements:
  Zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein $u \in V$, so dass $v + u = O$. Dieses Element wird mit $-v$ bezeichnet. Es heißt inverses Element zu v oder Gegenvektor von v.

(II) Gesetze für die skalare Multiplikation:

- 1. Distributivgesetz: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$
- 2. Distributivgesetz: $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in V$
- Assoziativgesetz: $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in V$
- Unitarität: $1 \cdot v = v$ für alle $v \in V$.

Dann heißt $(V, +, \cdot)$ ein *reeller Vektorraum*.

Beispiele für reelle Vektorräume:

1. Pfeilvektoren (geometrische) Vektoren mit Pfeiladdition und skalarer Multiplikation
2. Koordinatenvektoren, also der $\mathbb{R}^n$, mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation
3. Die Menge der $m \times n$-Matrizen, also der $\mathbb{R}^{m\times n}$, mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation
4. Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit der Addition und skalarer Multiplikation (mit reellen Zahlen)
5. Die Polynome vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar sind ein $n+1$-dimensionaler Vektorraum.

   $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
   $a_i \in \mathbb{R}$

6. Die Menge aller reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($I \to \mathbb{R}$) mit Addition und Multiplikation mit einem Skalar ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum.

   $\mathcal{C}[a,b]$
   stetige Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$

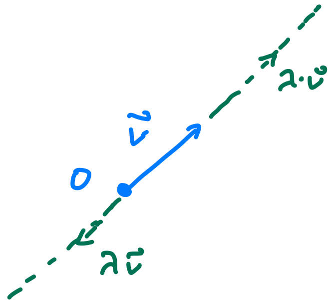
7. Wir werden im Laufe der Vorlesung noch weitere Vektorräume kennenlernen. Was das Gute daran ist: die Sätze, die man für Vektorräume aus den Rechengesetzen hergeleitet hat, kann man für alle Vektorräume anwenden!

Definition 6.41.
Gegeben ist ein Vektorraum $(V, +, \cdot)$. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt *Untervektorraum von V*, wenn gilt:

1. $O \in U$, d.h. das neutrale Element der Addtion ist ein Element von U.

   Insbesondere: $U \neq \emptyset$

2. Sind $v, w \in U$, so liegt auch $v + w \in U$, d.h. die Summe von Elementen in U liegt wieder in U.
3. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in U$, so ist $\lambda \cdot v \in U$; d.h. skalare Vielfache von Vektoren in U liegen wieder in U.



Beispiel 6.42.
Für jeden Vektor $v \in V$ ist die Menge

$$U := \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset V$$

ein Untervektorraum von V.

z.z. ① $0 \in U$, denn $\underbrace{0}_{0 \in \mathbb{R}} \cdot \vec v = \underbrace{0}_{\text{Nullvektor in } V}$

② Seien $u_1, u_2 \in U$ z.z. $u_1 + u_2 \in U$

d.h. es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass $u_1 = \lambda_1 \cdot v$ und $u_2 = \lambda_2 \cdot v$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v \in U$ ✓

③ Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u \in U$ z.z. $\lambda \cdot u \in U$

$u \in U \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}$ so dass $u = \mu \cdot v$

$\Rightarrow \lambda \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot v) = \underbrace{(\lambda \cdot \mu)}_{\in \mathbb{R}} \cdot v \in U$ ✓

Beispiel 6.43.

1. Die Teilmenge von V, die nur aus dem Nullvektor besteht, ist ein Untervektorraum von V, der sogenannte *Nullraum*. $\{0\}$

2. V ist ein Untervektorraum von V.

3. Jede Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$, die durch den Koordinatenursprung geht, also den Nullvektor enthält, ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.

   Dies sind die einzigen Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ außer den *trivialen* Untervektorräumen $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ und $\mathbb{R}^2$. $\{\vec 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$

   Eine Gerade, die nicht durch den Ursprung geht, ist kein Untervektorraum wegen Bedingung (i) in ($\cancel{5.20}$). (6.41) da $0 \in U$

Ebenen $\{\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ falls $u_1 \nparallel u_2$

4. Jede Gerade im Raum $\mathbb{R}^3$, die durch den Koordinatenursprung geht, ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

   Jede Ebene im Raum $\mathbb{R}^3$, die durch den Koordinatenursprung geht, ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

   Dies sind die einzigen Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ außer den trivialen. $\mathbb{R}^3$, $\{0\}$

6.2.2 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir haben bereits in Kapitel 3 definiert:

Definition 6.44 (Linearkombination)**.**
Gegeben seien Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Eine Summe der Form

$v_1, \dots, v_n$ „Familie von Vektoren"

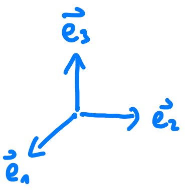
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ heißt *Linearkombination* von $v_1, \dots, v_n$. Die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nennt man *Koeffizienten* der Linearkombination.

$\mathbb{R}^2$

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung 6.45.
Im $\mathbb{R}^n$ ist jeder Vektor eine Linearkombination der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Die Koeffizienten sind hier *eindeutig bestimmt*. Es sind die Koordinaten des Vektors.
Diese beiden Eigenschaften zusammengenommen bedeuten: Die Vektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ definieren ein *Koordinatensystem* (eine *Basis*) des $\mathbb{R}^3$.



Im $\mathbb{R}^3$

$$\underset{\in \mathbb{R}^3}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + a_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + a_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3}$$

Ist $\lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = a_1 \\ \lambda_2 = a_2 \\ \lambda_3 = a_3 \end{array}$

Diese Eigenschaft verallgemeinert man auf beliebige (endliche) Familien von Vektoren:

Definition 6.46 (*Basis* eines Vektorraums)**.**
Sei $(V, +, \cdot)$ ein reeller Vektorraum.
Eine Familie von Vektoren $b_1, \dots, b_n \in V$ heißt *Basis* von V, wenn jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Weise als Linearkombination der $b_1, \dots, b_n$ geschrieben werden kann, d.h. es gibt eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$$

Die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heißen *Koordinaten* von v bezüglich der Basis $b_1, \dots, b_n$.
Alle Basen eines Vektorraums V haben dieselbe Anzahl von Elementen. Diese Anzahl heißt *Dimension des Vektorraums V*. dim (V)
Schreibweise: dim (V)

Eine Basis $b_1, \dots, b_n \in V$ von V hat also die folgenden beiden Eigenschaften:

① Jeder Vektor $v \in V$ ist eine Linearkombination der $b_1, \dots, b_n$
d.h. es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so dass
$$v = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \dots + \lambda_n \cdot b_n$$
Man sagt: $b_1, \dots, b_n$ ist ein Erzeugendensystem von V

② Für jeden Vektor v sind diese $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt, d.h. sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ und $v = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$
$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$
Man sagt: $b_1, \dots, b_n$ sind linear unabhängig

Definition 6.47.
Die Familie der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in V$ heißt *linear unabhängig*, wenn gilt: Ist

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, so sind $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Eine Familie von Vektoren, die nicht linear unabhängig ist, heißt *linear abhängig*.

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$

$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$

$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig bedeutet:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\lambda}} = \vec{0}$$

LGS

hat nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \vec{0}$

$\vec{\lambda} = \vec{0}$

Für $V = \mathbb{R}^n$ kann man das in die Sprache der Linearen Gleichungssysteme übersetzen:

Lineare Unabhängigkeit kann man mit Linearen Gleichungssystemen ausdrücken.

Bemerkung 6.48.
Die Familie der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ist linear unabhängig, wenn das LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

mit der Koeffizientenmatrix $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, deren Spaltenvektoren die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sind, nur die sogenannte *triviale Lösung* $\vec{x} = \vec{0}$ besitzt.

Bemerkung 6.49.
Zwei Vektoren v_1, v_2 eines Vektorraums sind genau dann linear abhängig, wenn einer der Vektoren ein Vielfaches des anderen ist. Im $\mathbb{R}^n$ bedeutet das: Die Vektoren sind parallel (kollinear).
Drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen (komplanar) sind.

Bemerkung 6.50.

1. Kollineare Vektoren (also parallele Vektoren) sind immer linear abhängig.
2. Drei (oder mehr) in einer Ebene des $\mathbb{R}^n$ liegende Vektoren (also drei oder mehr komplanare Vektoren) sind immer linear abhängig.
3. Vier Vektoren im 3-dimensionalen Raum sind immer linear abhängig.
4. Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear unahängige Vektoren, so ist auch jede Teilfamilie dieser Vektoren linear unabhängig.
5. Ist einer der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ der Nullvektor, dann ist sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig.
6. Sind zwei der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ gleich, dann ist die Familie der Vektoren linear abhängig.

Bemerkung 6.51.

1. *Basisergänzungssatz*

   Sind die Vektoren $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig (also $r \leq n$), so findet man Elemente $b_{r+1}, \ldots, b_n$, so dass $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

   d.h. jede linear unabhängige Familie von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ kann man zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$ ergänzen.

2. *Basisauswahlsatz*

   Sei $b_1, \ldots, b_k$ eine Familie von Elementen aus $\mathbb{R}^n$, so dass sich sich jedes Element aus $\mathbb{R}^n$ als Linearkombination der $b_1, \ldots, b_k$ schreiben lässt. (Man sagt dann: $b_1, \ldots, b_k$ ist ein *Erzeugendensystem* von $\mathbb{R}^n$.)

   Dann gilt: Es ist $k \geq n$ und es gibt eine Teilfamilie $b_{i_1}, \ldots b_{i_n}$, die eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist.

   d.h. aus jedem Erzeugendensystem vom $\mathbb{R}^n$ kann man eine Basis des $\mathbb{R}^n$ auswählen.

Eine Folgerung ist:

- Sind die n Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, bilden sie bereits eine Basis des $\mathbb{R}^n$.
- Erzeugen die n Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ den $\mathbb{R}^n$, so sind sie linear unabhängig und somit eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

6.3 Determinanten

kein Betrag, kann negativ werden!

6.3.1 Determinanten von 2×2-Matrizen

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$

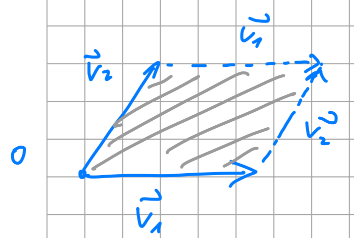
Bemerkung 6.52. *Geometrische Bedeutung der 2×2-Determinante*

Die Spalten der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sind Vektoren im $\mathbb{R}^2$, man nennt sie *Spaltenvektoren* von A.

Betrag

Der Betrag der Determinante von A, also $|\det A|$, ist die *Fläche des Parallelogramms*, das von den Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

Spaltenvektoren von A $\qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$



Bette $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ in den $\mathbb{R}^3$ ein

$$\text{Fläche} = \left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{ad - bc}_{= \det A} \end{pmatrix} \right|$$

$= |ad - bc|$

$= |\det A|$ ✓

Flächeninhalt des Parallelogramms: $|\det A|$

$$ad - bc = ad - bc$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \det A^t$$

Bemerkung 6.53.
Sei A eine 2×2-Matrix. Dann gilt:

- $\det A = \det A^t$.
- Genau dann ist $\det A = 0$, wenn die Spaltenvektoren von A linear abhängig (kollinear) sind.
- Genau dann ist $\det A = 0$, wenn die Zeilenvektoren von A linear abhängig (kollinear) sind.
- Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$.

Dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

6.3.2 Determinanten von 3×3-Matrizen

Im 3-dimensionalen Raum haben wir das Spatprodukt von 3 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ definiert.

Definition 6.54.

Gegeben ist die 3×3-Matrix $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{array}$ mit den Spaltenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Die Determinante von A ist definiert durch das Spatprodukt:

$$\det A := [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

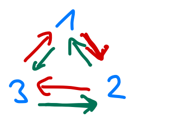
Der Betrag der Determinante von A, also $|\det A|$, ist Volumen des Spates, das von den Spaltenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannt wird.

Die Determinante einer 3×3-Matrix kann mit der *Regel von Sarrus* berechnet werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

zyklisch vertauscht

$$= a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$



antizyklisch vertauscht

Aus den Eigenschaften des Spatprodukts können wir sofort folgern:

Bemerkung 6.55.
Für eine 3×3-Matrix A gilt:

1. $\det A = \det A^t$.
2. Genau dann ist $\det A = 0$, wenn die Spaltenvektoren von A linear abhängig (komplanar) sind.
3. Genau dann ist $\det A = 0$, wenn die Zeilenvektoren von A linear abhängig (komplanar) sind.
4. Vertauscht man zwei Zeilen (oder zwei Spalten), ändert sich der Vorzeichen der Determinante.

6.3.3 Determinante von $n \times n$-Matrizen

Bevor wir weitere Eigenschaften ermitteln, wollen wir die Determinante auf $n \times n$-Matrizen verallgemeinern. Die Regel von Sarrus eignet sich hierfür nicht. Unmittelbar aus der Definition des Spatprodukts über Skalar- und Vektorprodukt haben wir folgende Formel ermittelt:

$$\det \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

1. Spalte

Entwicklung nach der 1. Spalte

$$= a_1 \cdot (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= \underbrace{a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2}_{\text{zyklisch vertauscht}} \underbrace{- a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1}_{\text{antizyklischen}}$$

Diese Formel führt die Berechnung der 3×3-Determinante zurück auf die Berechnung von 2×2-Determinanten.
Man nennt diese Formel *Entwicklung nach der ersten Spalte*.
Ebenso kann man nach einer beliebigen anderen Spalte oder Zeile entwickeln. Die Vorzeichen müssen dabei geeignet gewählt werden. Die Entwicklungsmethode kann liefert einen sinnvolle Verallgemeinerung der Determinante auf $n \times n$-Matrizen.

Wir definieren die Determinante einer beliebig großen quadratischen Matrix über den Laplace'schen Entwicklungssatz, der die Berechnung n-reihiger Determinanten auf die Berechnung von $(n-1)$-reihigen Determinanten zurückführt.

Definition 6.56.
Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix. Mit A_{ij} bezeichnen wir die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Aufgabe 6.57.

Bestimmen Sie A_{12} und A_{33} für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rekursive Berechnung der $n\times n$ − Determinante

Definition 6.58. *(Laplace'scher Entwicklungssatz)*
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Die Determinante von A ist die Zahl, die mit einer der folgenden Methoden aus A berechnet wird (alle Varianten liefern dasselbe Ergebnis):

1. Entwicklung nach der i-ten Zeile ($i = 1, \dots, n$)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \underbrace{\det A_{ij}}$$

Determinante von Untermatrizen der Größe $(n-1)\times(n-1)$

2. Entwicklung nach der j-ten Spalte ($j = 1, \dots, n$)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \underbrace{\det A_{ij}}$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus dem $n \times n$-Schachbrettmuster:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Regel von Sarrus gilt nur für $n = 3$! !

Beispiel 6.59.
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.
Berechne die Determinante durch Entwicklung nach der 1. Spalte und durch Entwicklung nach der 2. Zeile.

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -18 + 20 - 2 \cdot (12 + 5) + 3(8+3)$$

$$= 2 - 34 + 33 = \underline{\underline{1}}$$

$$\det A = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (12+5) - 3 \cdot (6-3) - 4 \cdot (-5-6)$$

$$= -34 - 9 + 44 = \underline{\underline{1}}$$

Aufgabe 6.60.

Berechnen Sie die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4×4

Geschickterweise wählt man für die Entwicklung eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen 0en.

z.B. Entwicklung nach 3. Spalte:

$$\det A = +1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-12} - 0 \cdot * + 0 \cdot * - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}_{4}$$

$$= -12 - 4 = \underline{\underline{-16}}$$

N.R.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{3\text{ Zeile}}{\overset{\text{Entw.}}{=}} +1 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}_{-4} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{8} = -12$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 2 - 4 + 6 = 4$$

Bemerkung 6.61 (Rechenregeln für Determinanten)**.**
Für die Determinante einer Matrix A gilt:

1. $\det A = \det A^t$, d.h. durch Transponieren wird der Wert der Determinante nicht verändert.
2. Die Determinante einer ~~obere~~ Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.

obere

z.B

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 17 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{nach 1. Spalte}}{\overset{\text{Entwickl.}}{=}} +4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 17 & 8 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{nach 1. Spalte}}{\overset{\text{Entwickeln}}{=}}$$

obere Dreiecksmatrix

$$+4 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{1.\text{Spalte}}{=} 4 \cdot (-2) \cdot (+4) \cdot (-1) = 32$$

3. Multipliziert man eine Zeile (oder eine Spalte) mit einer reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, dann wird die Determinante mit λ multipliziert.

Bsp.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda \cdot a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \lambda \cdot a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \lambda a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \Big[\underbrace{a_{13} \cdot \big|\ \ \big| - a_{23} \big|\ \ \big| + a_{33} \big|\ \ \big|}_{\det A \text{ durch Entwicklung nach 3. Spalte}} \Big] = \lambda \det(A)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$= (4+3)-(2+6)$

$= 7-8 = -1$

4. Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einen gemeinsamen Faktor, dann können wir ihn vor die Determinante ziehen. ② ③

$$\begin{vmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 33 & 44 & 66 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 33 & 44 & 66 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 20 \cdot 11 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 20 \cdot 11 \quad 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1320 \cdot (-1) = -1320$$

5. Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn wir zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte) addieren.

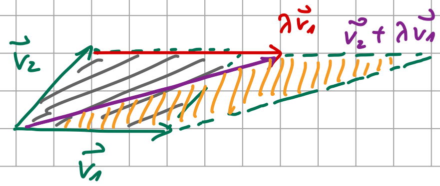
Plausibilisieren an einer 2x2-Matrix $\quad \det(\underbrace{[\vec{v}_1, \vec{v}_2]})$

Spaltenvektoren von A

$= \pm$ Parallelogrammfläche

Grundlinie × Höhe

beides bleibt gleich!



$\det([\vec{v}_1, \lambda \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2])$

6. Vertauscht man zwei Zeilen oder zwei Spalten einer Matrix, so ändert sich das Vorzeichen ihrer Determinante

Wegen dieser Eigenschaften kann man die Determinante einer Matrix berechnen, indem man sie mit Hilfe von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen (ähnlich dem Gauß-Algorithmus) auf Diagonalgestalt bringt.

obere Dreiecksmatrix | Zeilen-Stufen-Form

Aufgabe 6.62.

Berechnen Sie die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ mit Hilfe elementarer Umformungen.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 12 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} \cdot (-1) \quad :2$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 12 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot (-4) & \mid \cdot (-1) \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \\ & \end{matrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & -16 & -9 & -2 \\ 0 & -10 & 0 & -1 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -16 & -9 & -2 \\ -10 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 1 \\ \leftarrow \end{matrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -16 & -9 & -2 \\ -10 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} \quad (:2,\ :3)$$

$$= (-2) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -3 & -2 \\ -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -12 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -3 & 22 \\ -5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \leftarrow$$

$\mid \cdot (-8) \rightarrow$ Entwickeln

$$= (-12)\cdot(-1)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 22 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 12\cdot(8+110) = 12\cdot 118 = \underline{\underline{1416}}$$

Bemerkung 6.63.
Für eine $n \times n$-Matrix A und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det A}$$

!

$\lambda \cdot A$:
Jeder Eintrag wird mit λ multipliziert

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Satz 6.64 (Produktsatz für Determinanten).
Für quadratische $n \times n$-Matrizen A, B gilt:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(BA)}$$

im Allg. $AB \neq BA$

Satz 6.65. *Determinante und Invertierbarkeit von Matrizen*
Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$,
In diesem Fall gilt:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Wenn man weiß, dass A invertierbar ist, folgt das aus (6.64) $E = A \cdot A^{-1}$

$$\Rightarrow 1 = \det E = \underbrace{\det(A)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\det(A^{-1})}_{\in \mathbb{R}} \quad | : \det A$$

d.h.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

zu zeigen bleibt: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar

Folgt aus dem Gauß-Jordan-Verfahren: Genau wenn A invertierbar ist, erreicht man mit dem Verfahren eine obere Dreiecksmatrix, bei der bei der Diagonale lauter Elemente

$\neq 0$ stehen !

Aufgabe 6.66.

Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar ist.

A nicht invertierbar !

$\Uparrow$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -0 & +0 & -0 & +3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad 1 \cdot -2 \quad = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Satz 6.67. *Determinante und Lineare Abhängigkeit*

1. Genau dann ist $\det A = 0$, wenn die Spaltenvektoren von A linear abhängig sind.
2. Genau dann ist $\det A = 0$, wenn die Zeilenvektoren von A linear abhängig sind.
3. Insbesondere ist in folgenden Fällen $\det A = 0$:
   (a) alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind 0
   (b) zwei Zeilen (oder Spalten) stimmen überein
   (c) eine Zeile (oder Spalte) ist ein Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte)

Aufgabe 6.68.

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind diese Vektoren linear unabhängig?

für $t \neq 17$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ -3 & 5 & t \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \quad 3 \quad 1 \cdot (-2) \quad = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -24+t \\ 0 & 2 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & t-24 \\ 2 & 14 \end{vmatrix}$$

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

$$= -14 - 2(t-24) = 34 - 2t = 0$$

$\iff t = 17$

l. abhängig

Aufgabe 6.69.

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad 1 \cdot -2 \quad = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & +0 & -1 \\ 4 & -0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4 + 4 = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig

Aufgabe 6.70.

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass diese Vektoren linear unabhängig sind, und stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

$$\begin{array}{ccc|cl}
\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & & \\
1 & -3 & 1 & +10 & |\cdot 2 \quad |\cdot(-3) \\
-2 & 4 & 2 & -4 & \leftarrow \\
3 & 2 & -3 & -10 & \qquad \leftarrow \\
\hline
1 & -3 & 1 & 10 & \\
0 & -2 & 4 & 16 & |:2 \\
0 & 11 & -6 & -40 & \\
\hline
1 & -3 & 1 & 10 & \\
0 & -1 & 2 & 8 & |\cdot 11 \\
0 & 11 & -6 & -40 & \leftarrow \\
\hline
1 & -3 & 1 & 10 & \\
0 & -1 & 2 & 8 & |:-1 \\
0 & 0 & 16 & 48 & |:16 \\
\hline
1 & -3 & 1 & 10 & \qquad \leftarrow \\
0 & 1 & -2 & -8 & \leftarrow \\
0 & 0 & 1 & 3 & |\cdot 2 \quad |\cdot -1 \\
\hline
1 & -3 & 0 & 7 & \leftarrow \\
0 & 1 & 0 & -2 & |\cdot 3 \\
0 & 0 & 1 & 3 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 0 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & 3 &
\end{array}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabh, da hier eine obere Dreiecksmatrix entstanden ist mit Diagonalelemente $\neq 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -2$

$\lambda_3 = 3$

$$\Rightarrow \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

6.4 Lösungsraum von Linearen Gleichungssystemen

6.4.1 Cramersche Regel für quadratische LGS

Die Cramersche Regel liefert eine Lösungsformel für eindeutig lösbare quadratische Gleichungssysteme.

Bemerkung 6.71.
Ein lineares Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit quadratischer Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn A regulär ist, also wenn $\det A \neq 0$.

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad | \cdot A^{-1}$$

$$\vec{x} = \underbrace{A^{-1}A}_{E}\,\vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b} \qquad \mathbb{L} = \{A^{-1}\vec{b}\}$$

Satz 6.72 (Cramersche Regel).
Wir betrachen das LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$\det A \neq 0$

mit quadratischer Koeffizientenmatrix A und $\det A \neq 0$.
Sei A_i die Matrix, die aus A entsteht, wenn die i-te Spalte mit dem Vektor $\vec{b}$ ersetzt wird.
Dann kann man die eindeutig bestimmte Lösung des LGS folgendermaßen berechnen:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

Aufgabe 6.73.
Berechne die Lösung des LGS

rechte Seite

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Cramerschen Regel.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = -2 + 1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = -1 + 1 + 1 = 1 \qquad x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{1}{-2} = -1/2$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 3 \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = -\frac{3}{2}$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = -1 - 3 = -4 \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = 2$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

6.4.2 Der Lösungsraum eines Linearen Gleichungssystems

Wir betrachten nun ein lineares Gleichungssystem mit n Unbestimmten und m Gleichungen, also in Matrix-Schreibweise:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Homogene lineare Gleichungssysteme

Definition 6.74.
Ein LGS, dessen rechte Seite der Nullvektor ist, heißt *homogenenes lineares Gleichungssystem*:

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Wir wollen mit Hilfe der Matrix A Eigenschaften des Lösungsraum angeben.

Definition 6.75.
Bringt man A durch elementare Zeilenumformungen in Zeilen-Stufen-Form, so nennt man die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der auf Zeilen-Stufen-Form den *Rang von A*.
Schreibweise: Rang A
Man kann zeigen, dass der Rang von A unabhängig davon ist, welche elementaren Zeilenumformungen genau gemacht wurden.

Aufgabe 6.76.

1. Bestimmen Sie den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & 7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & 7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \quad |\cdot(-2) \;\; |\cdot(-3) \;\; |\cdot 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad |\cdot(-1) \;\; |\cdot -\tfrac{1}{5} \;\; |\cdot 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq 0 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{Null-Zeilen} \end{matrix}$$

Es gibt in der Zeilen-Stufen-Form 2 von Null verschiedene Zeile

Rang (A) = 2

2. Wie viele frei wählbare Parameter enthält die Lösung des homogenen linearen Gleichungssytems $A\vec{x} = \vec{0}$?

$A \mid \vec{0}$

Nach den Umformungen erhält man das LGS (2. Zeile durch 5 teilen)

die unteren 3 Zeile sind redundant

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(I)	1	−4	2	0	1	0
(II)	0	1	−1	−1	1	0

$x_3 = t \quad x_4 = s \quad x_5 = r$

5 Variablen, 2 Gleichungen
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \| $
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \text{rang}(A)$

Es gibt 3 freie Parameter $3 = 5 - 2$

$x_3 = t, \quad x_4 = s, \quad x_5 = r$

aus (II) $x_2 - t - s + r = 0 \Rightarrow x_2 = t + s - r$

in (I) $x_1 - 4(t+s-r) + 2t + r = 0 \Rightarrow x_1 = 2t + 4s - 5r$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2t+4s-5r \\ t+s-r \\ t \\ s \\ r \end{pmatrix} \middle| r,s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \middle| r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig, $\mathbb{L}$ ist ein 3-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$

Jede relevante Gleichung in der Zeilenstufen-Form nimmt einen Freiheitsgrad!

Bemerkung 6.77. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1. Die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$ enthält $n - \text{Rang}\, A$ frei wählbare Variablen.
2. Ist $m < n$, dann hat $A\vec{x} = \vec{0}$ mit Sicherheit von Null verschiedene Lösungen.
3. Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\text{Rang}\, A = n$ gilt. In diesem Fall: $\mathbb{L} = \{\vec{0}\}$

$\vec{0}$ ist immer eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$

Bemerkung 6.78.
Der Lösungsraum eines homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ ist ein *Untervektorraum* des $\mathbb{R}^n$.

z.z. zeige: (1) $\vec{0} \in \mathbb{L}$ ✓

(2) sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L}$ d.h. $A\vec{x} = \vec{0}$ und $A \cdot \vec{y} = \vec{0}$

$\Rightarrow A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{L}$

(3) Ist $\vec{x} \in \mathbb{L}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $A\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda (A\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow A \cdot (\lambda \vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \lambda \vec{x} \in \mathbb{L}$

Bemerkung 6.79.
Wir können somit von der *Dimension des Lösungsraums* sprechen: Die Dimension des Lösungsraums ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren im Lösungsraum.
Es gilt: Die Dimension des Lösungsraum ist die Anzahl frei wählbarer Variablen in der allgemeinen Lösung des homogenen LGS, d.h.

$$\text{Dimension des Lösungsraums} = n - \text{Rang}\, A.$$

Anzahl Variablen

Anzahl relevanter Gleichungen

$A\vec{x} = \vec{0} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\vec{0} \in \mathbb{L}$

Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$

dimension: $n - \text{rang}(A)$

Inhomogene lineare Gleichungssysteme

Zum inhomogenen LGS

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

betrachten wir

1. das zugehörige homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$
2. die erweiterte Koeffizientenmatrix $A|\vec{b}$

Mit deren Hilfe wollen wir dan Lösungsraum das inhomogenen LGS beschreiben.

Beispiel 6.80.
Es werden verschiedenen Lineare Gleichungssysteme mit derselben Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

und unterschiedlicher rechter Seite

$$\vec{b}_1 = \vec{0}, \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Die LGS $A\vec{x} = \vec{0}$, $\cancel{A\vec{x} =} \vec{0}$, $A\vec{x} = \vec{b}_2$, $A\vec{x} = \vec{b}_3$ kann man simulatan lösen, indem man eine große Matrix auf Zeilenstufenform bringt.
Simulatane erweiterte Koeffizientenmatrix der drei LGS:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

1. Bringe die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilen-Stufen-Form

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & b_2 & b_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad |\cdot(-2) \quad |\cdot(-5)$$

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & 0 & 0 & 7 & 6 \end{array} \quad |\cdot(-1)$$

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad |:(-3)$$

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

A in Zeilen-Stufen-Form

Zeilen-Stufen-Form
(Jordan-Schema)
In Stufen steht 1 am Anfang,
danach immer 0

2. Wir betrachten das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$

Was ist der Rang von A und was ist der Lösungsraum des LGS?

$\text{Rang}(A) = 2$ $\qquad \dim(\mathbb{L}) = \underbrace{5}_{\text{Variablen}} - 2 = \underline{\underline{3}}$

3 freie Parameter

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_3 = r$

$x_4 = s$

$x_5 = t$

aus (II) $\quad x_2 = 2x_3 - 2x_4 = 2r - 2s$

aus (I) $\quad x_1 = 2x_3 - 3x_4 - x_5$
$= 2r - 3s - t$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2r-3s-t \\ 2r-2s \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \;\middle|\; r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Basis des Lösungsraumes

3. Wir betrachten nun LGS $A\vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5} \text{ und } \vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Was ist der Rang von A, der Rang von $A|\vec{b}_2$ und der Lösungsraum des LGS?

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Vorsicht:
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 0$ bedeutet: $x_5 = 0$

(III) $\quad 0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_5 = 1$

$0 = 1$ ↯

$\mathbb{L} = \emptyset$ $\qquad \text{rang}(A|\vec{b}_2) = 3 > \text{rang}(A)$

bedeutet: In der ZSF gibt es Nullzeilen bei A, wo rechts etwas $\neq 0$ steht

$\Longleftrightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

4. Wir betrachten die beiden LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5} \text{ und } \vec{b_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Was ist der Rang von A, der Rang von $A|\vec{b}_3$ und der Lösungsraum des LGS?

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \vec{b_3} \\ \hline \mathrm{I} & 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ \mathrm{II} & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ \mathrm{III} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_3 = r$

$x_4 = s$

$x_5 = t$

(III): $0 = 0$ redundant

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|\vec{b_3})$

(II) $x_2 = -2 + 2x_3 - 2x_4 = -2 + 2r - 2s$

(I) $x_1 = 1 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 1 + 2r - 3s - t$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2r - 3s - t \\ -2 + 2r - 2s \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \; r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Verschiebungsvektor}} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v_2}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_3}} \middle| \; r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Verschiebungsvektor

"Stützvektor" des Linearen Raums

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$: Basisvektoren der homogenen Lösung!

Bemerkung 6.81.
Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, dann gilt für die allgemeine Lösung des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$:

1. *Lösbarkeit:* Das inhomogene System $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn Rang $A|\vec{b}$ = Rang A. d.h. $\mathbb{L} \neq \emptyset$

2. *Anzahl der freien Variablen:* Entweder besitzt das System $A\vec{x} = \vec{b}$ gar keine Lösung, oder andernfalls besitzt die allgemeine Lösung $n -$ Rang A frei wählbare Variablen, also genauso viele freie Variablen wie das zugehörige homogene System.

$\mathbb{L} \neq \emptyset$

3. *Struktur der allgemeinen Lösung:* Ist das System $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar und $\vec{x}_0$ eine spezielle Lösung dieses LGS, dann kann man jede Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ in der Form

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}$$

schreiben, wobei $\vec{u}$ eine Lösung des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$ ist.

$\vec{x}_0$ löst $A\vec{x} = \vec{b}$ „Stützvektor"

$\mathbb{L}_{hom}$ sei der Lösungsraum des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow \mathbb{L}_{inhom} = \vec{x}_0 + \mathbb{L}_{hom}$

6.4.3 Zusammenfassung

Bemerkung 6.82.
Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

$\det A = \det A^t$

Matrix

- $\boxed{\det A \neq 0}$
- A ist invertierbar (regulär)

Lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}^n$

- Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- Die Spaltenvektoren von A bilden eine Basis (ein Koordinatensystem) von $\mathbb{R}^n$.
- Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
- Die Zeilenvektoren von A bilden eine Basis (ein Koordinatensystem) von $\mathbb{R}^n$.

Lineare Gleichungssysteme

$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

- Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
- Für jede rechte Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist das LSG $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar.
- Für jede rechte Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ hat das LSG $A\vec{x} = \vec{b}$ die eindeutige Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Matrix

- Bringt man die Matrix A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilen-Stufen-Form, so stehen auf der Diagonale lauter von 0 verschiedene Elemente.
- Die Matrix A kann man durch elementare Zeilenumformungen (Gauß-Jordan-Verfahren) auf die Einheitsmatrix transformieren.
- Rang $A = n$, also A hat vollen (maximalen) Rang.

Behauptung: $\underbrace{\mathbb{L}_{\text{inhom.}}}_{\text{von } A\vec{x} = \vec{b}} = \underbrace{\vec{x}_0}_{\substack{\downarrow \\ \text{Voraussetzung: } A\vec{x}_0 = \vec{b}}} + \underbrace{\mathbb{L}_{\text{hom}}}_{\text{von } A\vec{x} = \vec{0}}$

2 Dinge zu zeigen:

① $\mathbb{L}_{\text{inhom}} \subset \vec{x}_0 + \mathbb{L}_{\text{hom}}$

d.h. jede Lösung $\vec{v}$ von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist von der Form $\underbrace{\vec{x}_0}_{\text{Stützvektor}} + \vec{u}$ mit $A\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \in \mathbb{L}_{\text{hom}}$

Es gilt: $\left.\begin{array}{l} A\vec{v} = \vec{b} \\ A\vec{x}_0 = \vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow A\vec{v} - A\vec{x}_0 = \vec{0}$

$$A\vec{v} - A\vec{x}_0 = A(\vec{v} - \vec{x}_0) = 0$$

$\Leftrightarrow \vec{v} - \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_{\text{hom}}$

Setze $\vec{u} := \vec{v} - \vec{x}_0$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{x}_0 + \vec{u}$ was wir zeigen wollten

② $\vec{x}_0 + \mathbb{L}_{\text{hom}} \subset \mathbb{L}_{\text{inhom.}}$

Sei $\vec{u} \in \mathbb{L}_{\text{hom}}$ d.h. $A\vec{u} = \vec{0}$

$\Rightarrow A \cdot (\vec{x}_0 + \vec{u}) = \underbrace{A\vec{x}_0}_{\vec{b}} + \underbrace{A\vec{u}}_{\vec{0}} = \vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{x}_0 + \vec{u} \in \mathbb{L}_{\text{inhom}}$

6.5 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Aufgabe 6.83. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

$a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 3 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Untersuchen Sie die Lösbarkeit der LGS und bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a .

LGS ist eindeutig lösbar $\Longleftrightarrow$ Koeffizientenmatrix ist invertierbar, d.h. ihre Determinante ist $\neq 0$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & a \end{array} = (9 + a - 2a) - (-3 + a^2 + 6)$$

$$= 9 - a + 3 - a^2 - 6$$

$$= -a^2 - a + 6 = -(a^2 + \underbrace{a - 6}_{3\cdot(-2)}) = -(a+3)(a-2)$$

$\det A = 0 \Longleftrightarrow a = -3, \; a = 2$

LGS ist eindeutig lösbar $\Longleftrightarrow a \notin \{-3, 2\}$

Lösungsmenge, wenn $a \notin \underline{\{-3, 2\}}$

Aufpassen dass nicht durch 0 geteilt wird (Parameter)

$$\begin{array}{ccc|c|l} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\ 2 & 3 & a & 3 & \leftarrow \\ 1 & a & 3 & 2 & \leftarrow \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2+a & 1 & \cdot -(a-1) \\ 0 & a-1 & 4 & 1 & \leftarrow \\ \hline \end{array}$$

NR.

$4 - (a+2)(a-1)$

$= 4 - (a^2 + a - 2)$

$= -a^2 - a + 6$

$= -(a+3)(a-2)$

$$\begin{array}{l|ccc|c} \mathrm{I} & 1 & 1 & -1 & 1 \\ \mathrm{II} & 0 & 1 & a+2 & 1 \\ \mathrm{III} & 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \\ \hline \end{array}$$

$-(a-1)+1 = -a+2$

Dies ist die Determinante der Koeffizienten-matrix

$\neq 0$

aus (III) $\quad \underbrace{-(a+3)(a-2)}_{\neq 0} \cdot x_3 = -(a-2)$

$$x_3 = \frac{1}{a+3}$$

in (II) $\quad x_2 + (a+2) \cdot \frac{1}{a+3} = 1$

$$x_2 = 1 - \frac{a+2}{a+3} = \frac{a+3}{a+3} - \frac{a+2}{a+3} = \frac{1}{a+3}$$

in (I) $\quad x_1 + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+3} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a+3} \\ \frac{1}{a+3} \end{pmatrix} \right\}$$

Lösungsmenge für festen Parameter $a \neq -3, 2$

Enthält genau ein Element ?

$a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \end{array}\right)$$

Check !

Da wir beim Berechnen der ZSF nicht gebraucht haben, dass $a \neq -3, 2$ ist, können wir hier weitermachen

$a = -3$ einsetzen.

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

aus III: $\quad 0 = 5$ ↯

$\mathbb{L} = \emptyset \quad$ keine Lösung

$a = 2$

Check:
kann verwendet werden

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \end{array}\right)$$

III ist redundant

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \mid \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

1 freier Parameter

$\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(A|\vec{b})$

Machen es mit Gauß-Jordan:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$x_3 = r$ freier Parameter

aus II $\quad x_2 = 1 - 4r$

aus I $\quad x_1 = 5r$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5r \\ 1-4r \\ r \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Gerade im } \mathbb{R}^3} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\}$$

unendl. viele Lösungen für $a=2$

Zusammenfassung

$a \neq -3, 2 \qquad (*) \; \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a+3} \\ \frac{1}{a+3} \end{pmatrix} \right\}$ ein Punkt

$a = -3 \qquad \mathbb{L} = \emptyset$

$a = 2 \qquad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\}$

für $a=2$ in $(*)$ ergibt sich der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Ist das eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ für $a=2$?

1. Möglichkeit : Verifizieren durch Einsetzen

2. Möglichkeit : Liegt der Vektor in der Lösungsmenge,

d.h. gibt es $r \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

liefert 3 Gleichungen:

$\text{I} \quad 5r = 1 \quad \Rightarrow r = \frac{1}{5}$

$\text{II} \quad 1 - 4r = 1/5 \quad 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ ✓

$\text{III} \quad r = 1/5 \quad 1/5 = 1/5$ ✓

Für $r = \frac{1}{5}$ ergibt sich der gesuchte Vektor, also liegt er im Lösungsraum.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das LGS eine Lösung mit $x_3 = \frac{1}{4}$?

$a \neq -3, 2$ $\quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a+3} \\ \frac{1}{a+3} \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ Ein Element

$$x_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{a+3} \iff a+3=4 \iff \underline{a=1}$$

$a=-3$ $\quad$ Nein, da $\mathbb{L} = \emptyset$

$\underline{a=2}$ $\quad$ Parametrisierte Lösung $\quad x_3 = r$

Für $r = \frac{1}{4}$ hat das LGS die Lösung: $\begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ ✓

Also: Lösungen mit $x_3 = 1/4$ gibt es für $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

und $a = 2$

$$\begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$