Kapitel 3

Vektorrechnung

In Naturwissenschaft und Technik unterscheidet man zwischen *skalaren Größen* und *vektoriellen Größen*:

Ein *Skalar* ist ein Größe, die sich eindeutig durch Angabe einer Maßzahl und einer Maßeinheit beschreiben lässt.
Beispiele: Masse, Temperatur, Arbeit, Zeit

Eine *vektorielle Größe* benötigt zur vollständigen Beschreibung noch die Angabe der Richtung, in der sie wirkt.
Beispiele: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Drehmoment

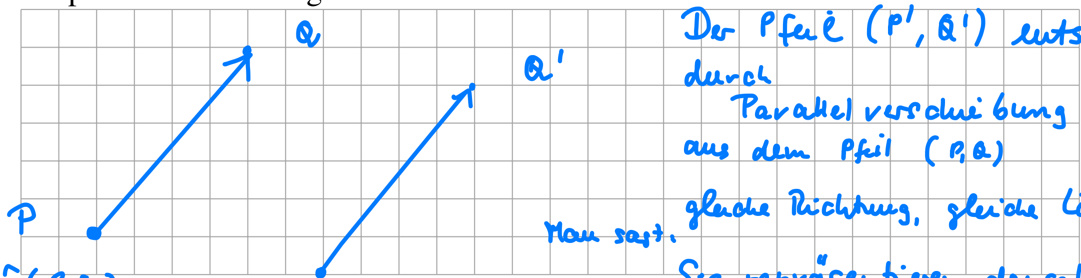
3.1 Vektoren und Vektorraumoperationen

3.1.1 Geometrische Vektoren - Pfeilklassen

Geometrische Vektoren werden durch Pfeile (in der Ebene oder im Raum) dargestellt. Ein Pfeil wird durch seinen Anfangs- und Endpunkt festgelegt. Er wird also durch ein geordnetes Punktepaar (P, Q) beschrieben.
Graphische Darstellung:

Idee: Man identifiziert die beiden Pfeile. d.h. sie sind äquivalent

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$



$\hat{=} (P, Q)$ $\quad$ $P' \hat{=} (P', Q')$

Der Pfeil (P', Q') entsteht durch Parallelverschiebung aus dem Pfeil (P, Q)
gleiche Richtung, gleiche Länge
Man sagt: Sie repräsentieren denselben Vektor. (darstellen)

Definition 3.1.
Zwei Pfeile heißen *äquivalent*, wenn sie durch Verschiebung ineinander übergehen. Ein *Vektor* ist eine Klasse von aquivalenten Pfeilen. Ein Pfeil in dieser Klasse heißt *Repräsentant* des Vektors.

Schreibweise: $\quad \vec{a}, \vec{b}$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{F}, \vec{M}, \ldots$$

Den Vektor, der durch den Pfeil von P nach Q repräsentiert wird, schreiben wir $\overrightarrow{PQ}$. $\quad \overrightarrow{PQ}$

Definition 3.2.
Der *Betrag* (oder: die *Länge*, die *Norm*) eines Vektors $\vec{a}$ ist die Maßzahl der Länge des Pfeils, der den Vektor repräsentiert.
Schreibweise: $|\vec{a}|$

$|\vec{a}|$ $\quad$ $\|\vec{a}\|$

Der Betrag eines Vektors ist niemals negativ: $|\vec{a}| \geq 0$

Definition 3.3.
Der Vektor, der durch das Punktepaar (P, P) beschrieben wird, heißt *Nullvektor*.
Schreibweise: $\vec{0}$.

$\vec{0} = \overrightarrow{PP}$

hat keine Richtung, hat alle Richtungen

Die Richtung des Nullvektors ist unbestimmt.
Der Nullvektor ist der einzige Vektor, der den Betrag 0 hat:

$$\underbrace{|\vec{a}| = 0}_{\in \mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\vec{a} = \vec{0}}_{\text{Vektor}}$$

Die Pfeile, die die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ repräsentieren, sind parallel

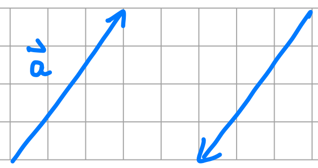
Definition 3.4. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen

Anmerkung: In manchen Büchern wird unter parallel nur gleichsinnig parallel verstanden

- *parallel* oder *kollinear*, wenn die Pfeile, die sie repräsentieren, parallel sind.
  Schreibweise: $\vec{a} || \vec{b}$ $\qquad$ $\vec{v} \parallel \vec{w}$ $\quad$ $\vec{w} \parallel \vec{u}$ $\quad$ $\vec{v} \parallel \vec{u}$
- *gleichsinnig parallel*, wenn sie parallel und gleich orientiert sind.
  Schreibweise: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\qquad$ $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w}$
- *gegensinnig parallel* oder *antiparallel*, wenn sie parallel und entgegengesetzt orientiert sind.
  Schreibweise: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $\qquad$ $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{u}$ $\quad$ $\vec{w} \uparrow\downarrow \vec{u}$

$\vec{0} \parallel \vec{v}$
$\vec{0} \parallel \vec{u}$

Definition 3.5.
Ist $\vec{a}$ ein Vektor, so heißt derjenige Vektor, der denselben Betrag wie $\vec{a}$ aber entgegengesetzte Richtung hat, der *Gegenvektor* oder *inverse Vektor* von $\vec{a}$.
Schreibweise: $-\vec{a}$.

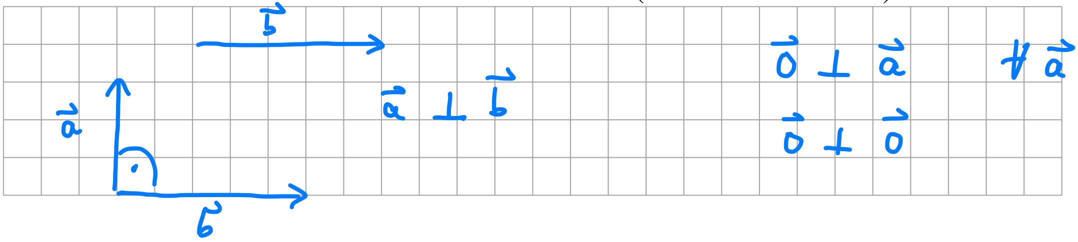


Schreibweise: $-\vec{a}$

Beispiel 3.6.
Zugkraft - Rückstellkraft einer elastischen Feder.
Newton: Actio = Reactio.

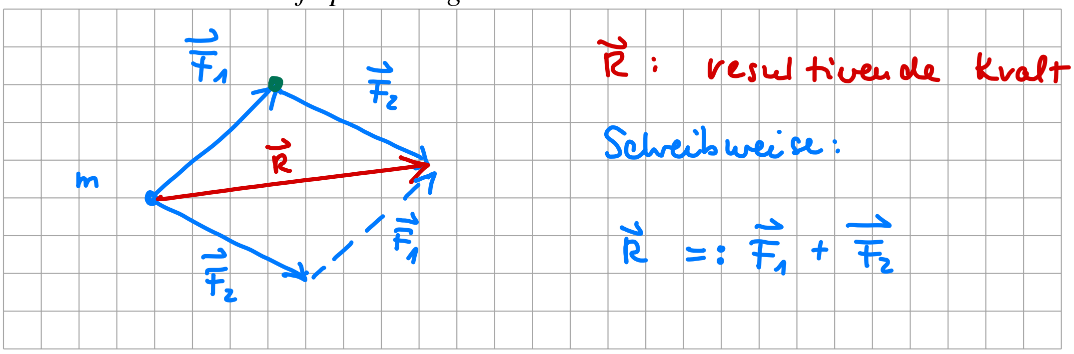
Kraft und Gegenkraft:
gleich groß (gleicher Betrag), aber entgegengesetzt gerichtet

Definition 3.7.
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen *orthogonal* oder *senkrecht* zueinander, wenn die Pfeile, die sie repräsentieren, aufeinander senkrecht stehen.
Schreibweise: $\vec{a} \perp \vec{b}$.
Der Nullvektor steht senkrecht zu allen Vektoren (auch zu sich selbst).

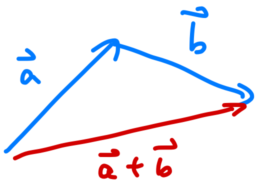


Addition und Subtraktion von Vektoren

Beispiel aus der Mechanik: Zwei am gleichen Massenpunkt angreifende Kräfte können zu einer resultierenden Kraft mit gleicher Wirkung zusammengefasst werden - man betrachtet das *Kräfteparallelogramm*:



Definition 3.8.
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden folgendermaßen *addiert:*



1. Parallelverschiebung von $\vec{b}$, bis der Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.

2. Der Pfeil vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ repräsentiert den Summenvektor
$$\vec{a} + \vec{b}$$

Bemerkung 3.9 (Rechenregeln für Vektoren)**.**

1. *Assoziativgesetz:* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

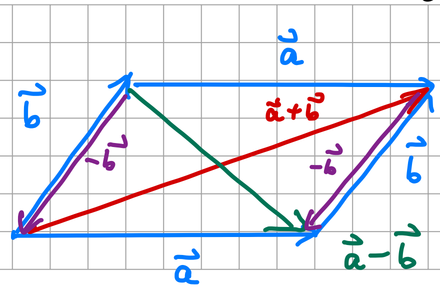
2. *Kommutativgesetz:* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

3. *Neutrales Element:* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4. *Inverses Element:* $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Definition 3.10.
Die *Differenz* von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die Summe von $\vec{a}$ und dem Gegenvektor von $\vec{b}$:
$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + \underbrace{(-\vec{b})}_{\text{Gegenvektor von } \vec{b}}$$

Bemerkung 3.11 (Parallelogrammregel)**.**
Summe und Differenz von zwei Vektoren sind gerichtete Diagonalen im Parallelogramm, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird.



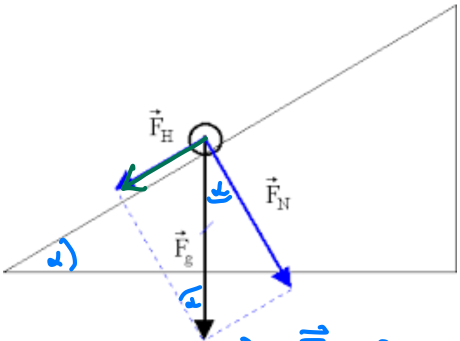
$\vec a, \vec b$ spannen ein Parallelogramm auf

Beispiel 3.12 (Zerlegung eines Vektors in Komponenten)**.**
Gleitet ein Körper reibungsfrei über eine schiefe Ebene hinab, so wirkt auf ihn die Gewichtskraft $\vec{F}_g$, die sich aus einer Komponente, die parallel zum Hang wirkt (*Hangabtriebskraft* $\vec{F}_H$) und einer Komponente, die senkrecht zur Neigung der Ebene wirkt (*Normalkraft* $\vec{F}_N$).

Mit Reibung:

Reibkraft ~ Normalkraft

(Festkörperreibung)



$\vec G = \vec F_g$ Gewichtskraft

Die Gewichtskraft $\vec{F}_g$ ist bekannt, wenn die Masse m des Körpers bekannt ist: der Betrag ist $|\vec{F}_g| = m \cdot g$, wobei $g \approx 9,81$ [m/s^2] die Erdbeschleunigung ist, und die Richtung von $\vec{F}_g$ zeigt zum Erdmittelpunkt.

$\cos\alpha = \frac{|\vec F_N|}{|\vec F_g|}$ d.h. $|\vec F_N| = |\vec F_g| \cdot \cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{|\vec F_H|}{|\vec F_g|}$ $\qquad |\vec F_H| = |\vec F_g| \cdot \sin\alpha$

Multiplikation von Vektoren mit Skalaren

In physikalischen Gesetzen taucht die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren auf, z.B.

Newtonsche Bewegungsgleichung: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. $\qquad$ m: Skalar

Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Hooksches Federgesetz: $\vec{F} = -k \cdot \vec{s}$.

$\underbrace{\vec F}_{\text{Vektor}} = \overset{\text{Skalar}}{\tilde{m}} \cdot \underbrace{\vec a}_{\text{Vektoren}}$

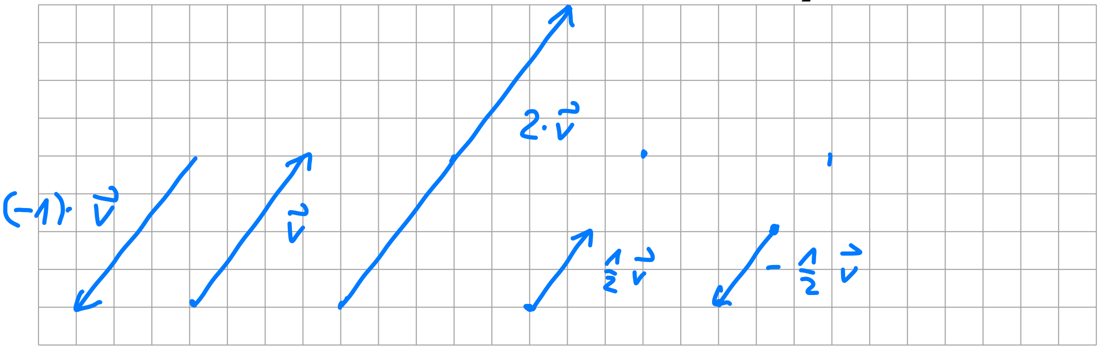
$\vec F \upuparrows \vec a$

$|\vec F| = m \cdot |\vec a|$

$|\vec F| \sim |\vec a|$

m: Proportionalitätsfaktor

Beispiel 3.13. Multiplikation eines Vektors mit 2, -1 und $-\frac{1}{2}$.



(≠ Skalarprodukt !)

Definition 3.14. Skalare Multiplikation

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar und $\vec{a}$ ein Vektor.
Unter dem Produkt von $\vec{a}$ mit λ versteht man dem Vektor $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Betrag:
  $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, d.h. der Betrag von $\vec{b}$ ist das $|\lambda|$-fache des Betrags von $\vec{a}$
- Richtung:
  Ist $\lambda > 0$, so sind $\vec{b}$ und $\vec{a}$ gleichsinnig parallel.
  Ist $\lambda < 0$, so sind $\vec{b}$ und $\vec{a}$ entgegengesetzt parallel.
  Ist $\lambda = 0$, so ist $\vec{b}$ der Nullvektor.

Bemerkung 3.15 (Rechenregeln für die Multiplikation mit Skalaren)**.**
Für $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{a}$ (Assoziativgesetz)
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (1. Distributivgesetz)
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (2. Distributivgesetz)
4. $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$
5. $(-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a})$
6. $\lambda\vec{a} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \lambda = 0$ oder $\vec{a} = \vec{0}$

Aufgabe 3.16.
Lösen Sie folgende Vektorgleichung nach $\vec{x}$ auf:

$$5\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2} - (2\vec{a} + 6\vec{b}) = 4\left(\vec{x} - \frac{\vec{b}}{2}\right) + \vec{a}$$

$5\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{a} - 6\vec{b} = 4\vec{x} - 2\vec{b} + \vec{a} \quad | -4\vec{x}$

$\vec{x} - \frac{3}{2}\vec{a} - 6\vec{b} = -2\vec{b} + \vec{a} \quad | +\frac{3}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$

$\vec{x} = \frac{5}{2}\vec{a} + 4\vec{b}$

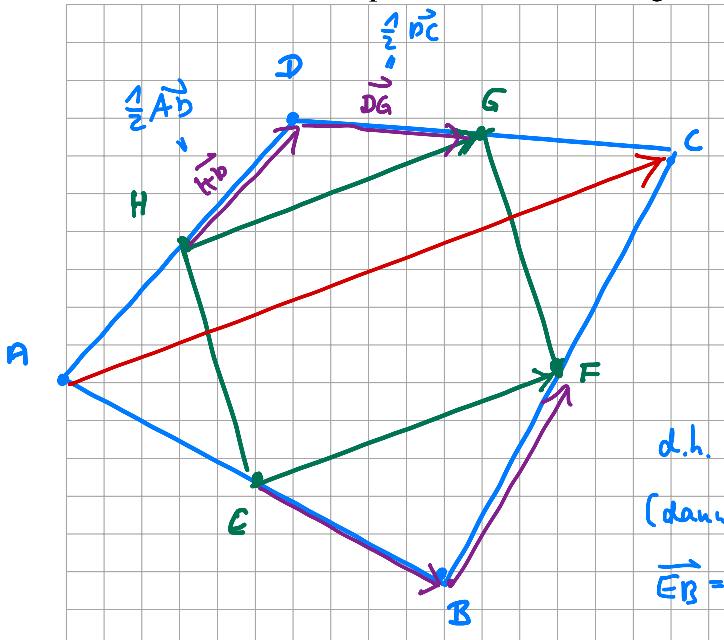
$\pi = 3{,}14\ldots$

Aufgabe 3.17.
Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:
$3\vec{a} + 3(\vec{b} - 2\vec{c}) + \pi\vec{a} - (2\vec{a} + 7\vec{b}) - \frac{1}{3}(12\vec{b} - 18\vec{c}) + (1-\pi)\vec{a}$

$= 3\vec{a} + 3\vec{b} - 6\vec{c} + \cancel{\pi\cdot\vec{a}} - 2\vec{a} - 7\vec{b} - 4\vec{b} + 6\vec{c} + \vec{a} - \cancel{\pi\vec{a}}$

$= 2\vec{a} - 8\vec{b}$

Aufgabe 3.18.
Zeigen Sie mit Hilfe von Vektoren: Die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms.



Behauptung:

EFGH ist ein Parallelogramm

d.h. gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang

d.h. $\boxed{\vec{EF} = \vec{HG}}$ zu zeigen

(dann automatisch auch $\vec{EH} = \vec{FG}$)

$\vec{EB} = \frac{1}{2}\cdot\vec{AB}$ $\quad$ $\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{BC}$

Es gilt:

$\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$

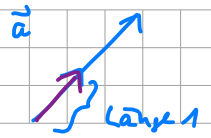
$\vec{HG} = \vec{HD} + \vec{DG} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{HG}$ $\quad \Rightarrow$ Behauptung.

Aufgabe 3.19.
Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ ein Vektor. Geben Sie mit Hilfe des Betrags von $\vec{a}$ einen Vektor an

1. der dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ und den Betrag 1 hat.

Normieren eines Vektors



$0 \neq |\vec{a}| =$ Länge von $\vec{a}$ $\quad$ $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ hat Betrag 1

2. der die zu $\vec{a}$ entgegengesetzte Richtung und den Betrag 3 hat.

$-\vec{a}$ entgegengesetzt, $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ hat Betrag 1

$-3\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ gesuchter Vektor

Definition 3.20.
Vektoren, die den Betrag 1 haben, heißen *Einheitsvektoren*.
Somit ist ein Vektor $\vec{a}$ genau dann ein Einheitsvektor, wenn $|\vec{a}| = 1$.

Bemerkung 3.21 (Normierung von Vektoren)**.**
Zu jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gibt es einen Einheitsvektor, der dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ hat:

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Sprechweise: a oben 0.
Der Vektor $\vec{a}^0$ heißt der *zu* $\vec{a}$ *gehörige normierte Vektor*.

Bemerkung 3.22.
Nicht jede vektorielle Größe in der Physik entspricht der Definition (2.1).
In den Anwendungen unterscheidet man zwischen folgenden Vektorenarten:

1. *Freie Vektoren* dürfen beliebig parallel verschoben werden.

   Beispiel: Geschwindigkeit, Drehmoment eines Kräftepaares

2. *Linienflüchtige Vektoren* sind längs einer Wirkungslinie beliebig verschiebbar.

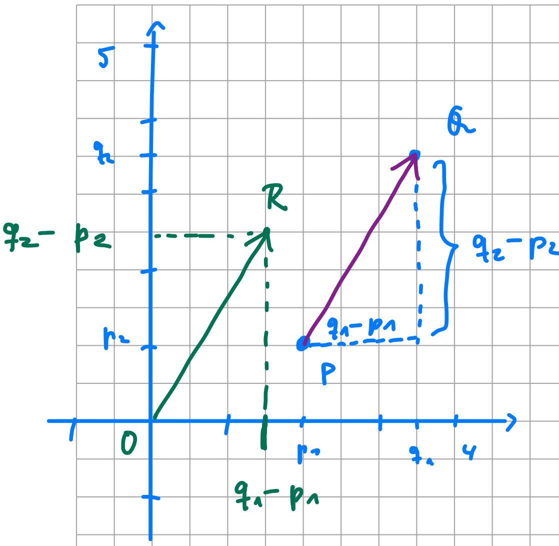
   Beispiel: Kräfte, die an einem starren Körper angreifen.

3. *Gebundene Vektoren* werden von einem festen Punkt aus abgetragen.

   Beispiel: *Ortsvektoren*, die im Urspung eines Koordinatensystems angreifen; Kräfte am deformierbaren Körper.

3.1.2 Vektoren im $\mathbb{R}^n$ (Koordinatendarstellung)

Wir betrachten ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene mit Ursprung O:



P, Q Punkte im $\mathbb{R}^2$

Koordinaten $P(p_1, p_2)$

$Q(q_1, q_2)$

Pfeil von P nach Q repräsentiert den Vektor $\overrightarrow{PQ}$

Verschieben den Pfeil so, dass der Anfangspunkt in O liegt

Spitze im Punkt R

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$ selbe Vektoren

Koordinaten von R sind $(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$

Spitze – Fusspunkt

Definition: Koordinate von $\overrightarrow{PQ}$ seien $\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$ „Spitze minus Fuß"

Ebene

Jeder Punkt im Koordinatensystem ist durch ein Paar reeller Zahlen charakterisiert, seine x- und y-Koordinaten. Wir können die Punkte im Koordinatensystem durch die *Produktmenge*

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

angeben.
Andererseits kann man jeden Punkt $P(x, y)$ in der Ebene durch seinen *Ortsvektor* $\overrightarrow{OP}$ charakterisieren. Die Elemente des $\mathbb{R}^2$ kann man als Punkte oder als Ortsvektoren verstehen, man verbindet damit jeweils eine andere anschauliche Vorstellung. Die jeweilige Anwendung entscheidet, ob man ein Zahlenpaar als Punkt oder als Vekor interpretiert.

Fasst man ein geordnetes Zahlenpaar (x, y) als Vektor auf, schreibt man oft $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

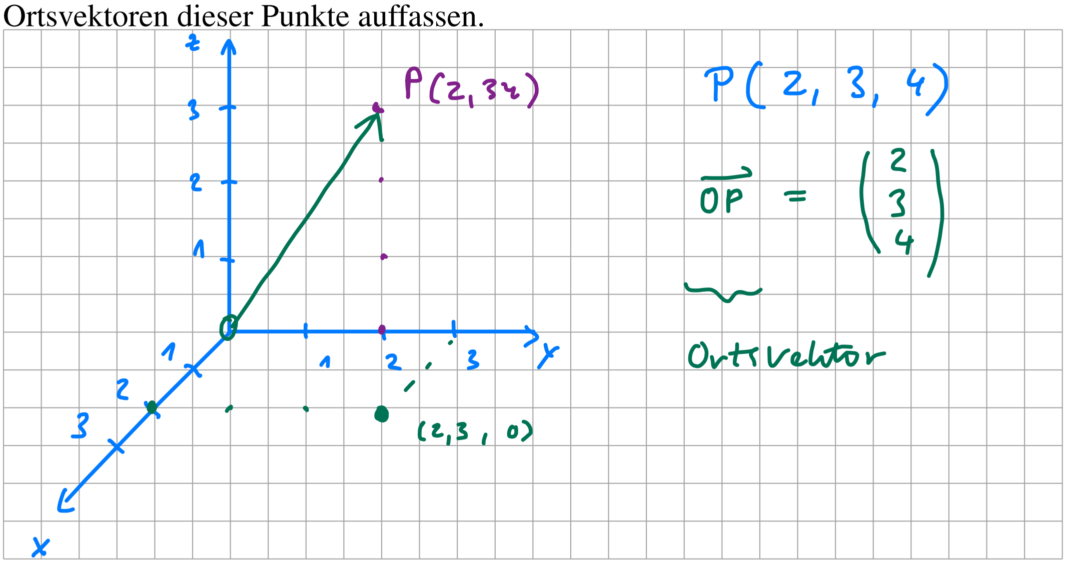
Wird ein Vektor $\vec{v}$ durch einen Pfeil zwischen zwei Punkten $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ in der Ebene repäsentiert, also $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, so ist die Koordinatendarstellung $\vec{v} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$. Spitze - Fuß

Die Zahlenpaare oder *Tupel* (a_1, a_2) und (b_1, b_2) stellen genau dann denselben Vektor dar, wenn die Koordinaten gleich sind, also wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$.

Dieselbe Argumentation kann man auch im Raum verwenden.

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

Die Zahlentripel des $\mathbb{R}^3$ kann man als Punkte im dreidimensionalen Raum oder als Ortsvektoren dieser Punkte auffassen.



Definition 3.23.
Verallgemeinert man weiter, kommt man zu *n-Tupeln* von reellen Zahlen:

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Wir können die Tupel als Punkte im n-dimensionalen Raum oder als Vektoren im n-dimensionalen Raum auffassen.
Die $x_1, \ldots, x_n$ heißen *Koordinaten* des Punktes oder Vektors, x_i ist die i-te Koordinate.
Einen Vektor kann man als Zeilenvektor oder als Spaltenvektor schreiben.

Bemerkung 3.24.
Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind gleich, wenn alle Koordinaten gleich sind.

Bemerkung 3.25.
Der *Nullvektor* im $\mathbb{R}^n$ ist der Vektor, dessen Koordinaten alle 0 sind:

$$\vec{0} = (0, \ldots, 0) = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n \text{ Koordinate}$$

Vektoraddition und Multiplikation mit Skalaren

Die Addition und Subtraktion von Vektoren in Koordinatendarstellung sowie die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ erfolgen koordinatenweise:

Bemerkung 3.26 (Rechenoperationen für Vektoren in Koordinatendarstellung)**.**

1. Addition und Subtraktion von Vektoren: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix}$$
2. Multiplikation mit einem Skalar: $$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$
3. Gegenvektor: $$-\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.27. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Berechne $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.

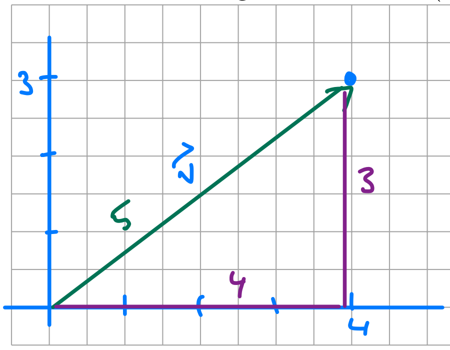
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 0 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1 + 3\cdot 1 \\ 2\cdot(-2) - 0 + 3\cdot 0 \\ 2\cdot 3 + 1 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Bestimme einen Vektor $\vec{x}$, so dass $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$. $\quad | -\vec{a}$

$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Betrag (Länge, Norm) eines Vektors

Aufgabe 3.28.
Berechne die Länge des Vektors $(4, 3) \in \mathbb{R}^2$.



$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$

Pythagoras

Bemerkung 3.29.
Den *Betrag* eines Vektors $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ berechnet man durch

$$|\vec{a}| = |(a_1, a_2, \ldots, a_n)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Aufgabe 3.30.

1. Berechne den Betrag des Vektors $\vec{a} = (1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$.

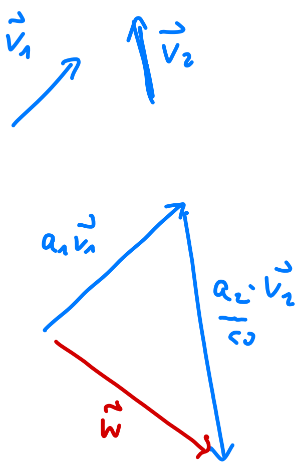
$|(1, -1, 1, -1)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$

2. Bestimme einen Vektor vom Betrag 1 (Einheitsvektor), der dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ hat.

$|\vec{a}| = 2$

$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} \cdot (1, -1, 1, -1)$

$= (0{,}5 \,|\, -0{,}5 \,|\, 0{,}5 \,|\, -0{,}5)$



Definition 3.31.
Ein Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Linearkombination* der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$, wenn es reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ gibt, so dass

$$\vec{w} = a_1 \vec{v}_1 + \cdots + a_k \vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k} a_{\cancel{k}\,i} \vec{v}_{\cancel{k}\,i} \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{v}_i$$

Die $a_1, \ldots, a_k$ heißen *Koeffizienten* der Linearkombination.

Aufgabe 3.32.

Kann man den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben? Falls ja, bestimmen Sie die passenden Koeffizienten.

Frage: Gibt es $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$2 \qquad -1 \qquad +2$

Koordinatenweise muss gelten:

$$\begin{aligned} (I) \quad & 3a_1 + a_2 - 6a_3 = -7 \\ (II) \quad & 2a_2 = -2 \longrightarrow a_2 = -1 \quad (*) \\ (III) \quad & 4a_1 + 2a_2 + a_3 = 8 \end{aligned}$$

Die Fragestellung führt zu einem linearen Gleichungssystem.

Wir könnten den Gauß-Algorithmus verwenden. Hier einfacher!

$(*)$ in I: $3a_1 - 6a_3 = -7+1 = -6 \quad | :3$

$(\times)\quad a_1 - 2a_3 = -2 \quad | \cdot (-4)$

$(*)$ in III: $4a_1 + a_3 = 8+2 = 10 \quad \Leftarrow$

$9a_3 = 18 \Rightarrow a_3 = 2 \overset{(\times)}{\Rightarrow} a_1 = -2+4 = 2$

$\Rightarrow \boxed{2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{w}}$

Antwort ist also: Ja! $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$

Definition 3.33.
Der Vektor $\vec{e_i} = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, 0)$ wobei alle Koordinaten 0 sind außer der i-ten und die i-te Koordinate 1 ist, heißt *i-ter Einheitsvektor* oder *i-ter Koordinatenvektor* oder *i-ter Standardbasisvektor* des $\mathbb{R}^n$. Er ist der Einheitsvektor, der in Richtung der positiven i-ten Koordinatenachse zeigt.

Im $\mathbb{R}^3$

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{e}_i| = 1$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

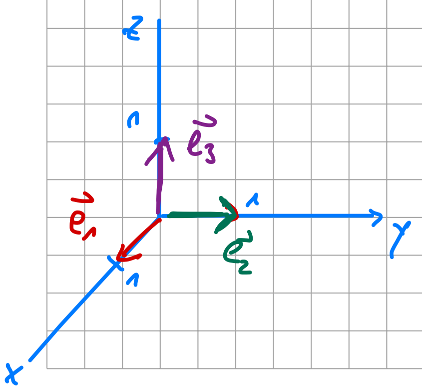
$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung 3.34.
Jeden Vektor im $\mathbb{R}^n$ kann man als *Linearkombination* der Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^n$ schreiben:

Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$

Standard-Einheitsvektoren

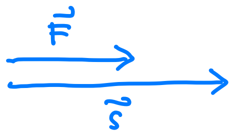


Koeffizienten in der Linearkombination sind die Koordinaten von $\vec{v}$

3.2 Das Skalarprodukt

$\vec{F}$ zeigt in Richtung des Verschiebungsvektors $\vec{s}$

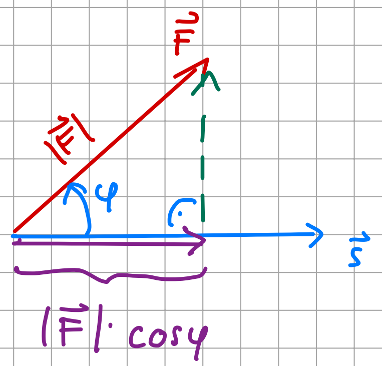
$\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{s}$



Arbeit=Kraft mal Weg
Wirkt eine konstante Kraft F längs eines geraden Weges der Länge s, so verrichtet sie die physikalische Arbeit

$$W = F \cdot s$$

Wirkt die Kraft nicht in Richtung des Weges, so darf man hierbei nur die Komponente der Kraft berücksichtigen, die in Richtung des Weges zeigt.



$\varphi = \measuredangle(\vec{F}, \vec{s})$

Mechanische Arbeit verrichtet nur die Komponente der Kraft $\vec{F}$, die in Richtung $\vec{s}$ zeigt

$$W = \underbrace{|\vec{F}| \cdot \cos\varphi}_{\text{Kraft in Richtung Weg}} \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$$

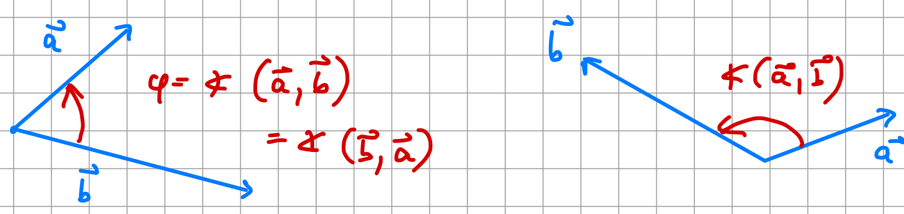
Das bei der Berechnung der Arbeit auftauchende Produkt

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \angle \left(\vec{F}, \vec{s}\right)$$

hat eine so große Bedeutung, dass es mathematisch für beliebige Vektoren definiert wird.

Um das *Skalarprodukt* zwischen Vektoren auf diese Weise geometrisch zu definieren, müssen wir zunächst definieren, was der Winkel zwischen Vektoren sein soll:

Definition 3.35 (Winkel zwischen Vektoren)**.**



Wir definieren den *Winkel zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren* $\vec{a}$, $\vec{b}$ als den Winkel, den die beiden Richtungen der Vektoren einschließen und der zwischen 0° und 180° liegt.
Schreibweise:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$

Die Reihenfolge der Vektoren spielt keine Rolle: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$.

Geometrische Definition (mit Pfeilvektoren)

Definition 3.36.
Das *Skalarprodukt* der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist definiert als

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad \in \mathbb{R} \text{ (Skalar)}$$

Ist $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$, setzt man $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ist eine reelle Zahl (ein Skalar).

Aufgabe 3.37.
Interpretieren Sie den Ausdruck $\vec{a} \cdot \vec{a}$ geometrisch. Wann ist $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$?

$\cos 0 = 1$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \underbrace{\angle(\vec{a}, \vec{a})}_{0^\circ} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} \qquad \vec{a} \circ \vec{a} = 0 \iff |\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$$

Bemerkung 3.38 (Rechenregeln für das Skalarprodukt)**.**
Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Positivität: $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$, falls $\vec{a} \neq \vec{0}$
2. Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3. Assoziativgesetz: $\lambda(\vec{a} \circ \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (\lambda \vec{b})$
4. Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Aufgabe 3.39.
Berechnen Sie $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ $= \underbrace{(\vec{a} + \vec{b})}_{\text{Vektor}} \circ \underbrace{(\vec{a} - \vec{b})}_{\text{Vektor}} \in \mathbb{R}$

$$= \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - \vec{a} \circ \vec{b} + \underbrace{\vec{a} \circ \vec{b}}_{\text{kommutativ}} - |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

Bemerkung 3.40.

1. Berechnung der Länge eines Vektor mit dem Skalarprodukt:
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

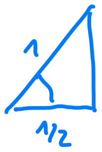
2. Berechnung des Winkels zwischen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ mit dem Skalarprodukt:

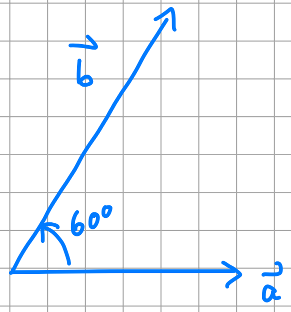
$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \Longleftrightarrow \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

TR: $\left.\begin{array}{l} \text{arccos} \\ \cos^{-1} \end{array}\right\}$ Umkehrfunktion von cos

$\neq \frac{1}{\cos} = \sec$

Aufgabe 3.41.
Der Vektor $\vec{a}$ habe den Betrag 3 und der Vektor $\vec{b}$ habe den Betrag 4. Der Winkel zwischen den Vektoren betrage $60°$. Berechne $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Welchen Betrag hat der Vektor $\vec{c} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$ und wie groß ist $\angle(\vec{a}, \vec{c})$?





$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60° = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{6}}$$

$$|\vec{c}|^2 = |3\vec{b} - 2\vec{a}|^2 = (3\vec{b} - 2\vec{a}) \circ (3\vec{b} - 2\vec{a})$$

$$= 9\,\vec{b} \circ \vec{b} - 6\,\vec{b} \circ \vec{a} - 6\,\vec{a} \circ \vec{b} + 4\,\vec{a} \circ \vec{a}$$

$$= 9\,|\vec{b}|^2 - 12\,\vec{a} \circ \vec{b} + 4\,|\vec{a}|^2$$

$$= 9 \cdot 16 - 12 \cdot 6 + 4 \cdot 9 = 108$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{108} = \sqrt{9 \cdot 12} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3} = \underline{\underline{6\sqrt{3}}}$$

$\cos 90° = 0$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \underline{\underline{90°}}$$

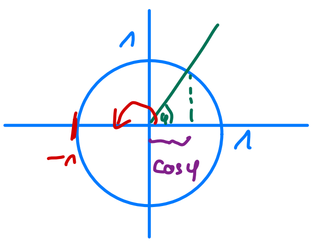
NR $\vec{a} \circ \vec{c} = \vec{a} \circ (3\vec{b} - 2\vec{a}) = 3\,\vec{a} \circ \vec{b} - 2\,\underbrace{\vec{a} \circ \vec{a}}_{|\vec{a}|^2} = 18 - 2 \cdot 9 = \underline{0}$

Aufgabe 3.42. Was bedeutet es für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$,

1. wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$? $\Longleftrightarrow$ $\vec{a} \perp \vec{b}$
2. wenn $\vec{a} \circ \vec{b} > 0$? $\Longleftrightarrow$ $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ spitzer Winkel
3. wenn $\vec{a} \circ \vec{b} < 0$? $\Longleftrightarrow$ $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ stumpf oder $\underbrace{\text{gestreckt}}_{180°}$

$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$

$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$



$$\vec{a} \circ \vec{b} = \overbrace{|\vec{a}|}^{\geq 0} \cdot \overbrace{|\vec{b}|}^{\geq 0} \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{|\vec{a}| = 0}_{\vec{a} = \vec{0}} \text{ oder } \underbrace{|\vec{b}| = 0}_{\vec{b} = \vec{0}} \text{ oder } \underbrace{\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0}_{\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{d.h. } \vec{a}, \vec{b} \text{ orthogonal}$$

$\vec{a} \circ \vec{b} > 0 \iff \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) > 0 \iff 0° < \angle(\vec{a}, \vec{b}) < 90°$

$\vec{a} \circ \vec{b} < 0 \iff \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) < 0 \iff 90° < \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180°$

stumpf oder gestreckt

W= F · s

W= $\vec{F} \circ \vec{s}$

Bemerkung 3.43 (Orthogonaliät und Skalarprodukt).

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

Bemerkung 3.44 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).
Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gilt:

Cauchy (kooschi)

$$\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$$

$$|\vec{a} \circ \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{|\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})|}_{\leq 1} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$W = |\vec{F} \circ \vec{s}| \leq |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ kollinear

Bemerkung 3.45 (Kollineare Vektoren).
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \neq 0$ sind genau dann kollinear (parallel), wenn es ein $\lambda \neq 0$ gibt, so dass

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$

Bemerkung 3.46.
Was bedeutet es für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$,

1. wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$? gleichsinnig parallel $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
2. wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$? gegensinnig parallel $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \text{ oder } \vec{b} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 1}_{\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

Aufgabe 3.47.
Vergleichen Sie $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ und $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

$$\underbrace{\underbrace{(\vec{a} \circ \vec{b})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \vec{c}}_{\text{Skalare Multiplikation}} \overset{\text{im Allg.}}{\neq} \underbrace{\vec{a} \cdot \underbrace{(\vec{b} \circ \vec{c})}_{\in \mathbb{R}}}_{\text{Skalare Multiplikation}}$$

Skalarprodukt

Skalarprodukt

Vielfaches von $\vec{c}$?

Vielfaches von $\vec{a}$

In *kartesischen Koordinaten* berechnet sich das Skalarprodukt sehr leicht, ohne dass man den Winkel zwischen den Vektoren kennt.

Bemerkung 3.48. Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \overset{??}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

Warum liefert diese Formel für geometrische Vektoren den selben Wert wie die Definition über Pfeile?

Wir betrachten nur den $\mathbb{R}^2$ (ebene Vektoren) — Im $\mathbb{R}^4$ geht es genauso.

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = 0$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$

Linearkombinationen der Standardbasisvektoren!

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \circ (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2)$$

$$= a_1 b_1 \cdot \underbrace{\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1}_{1} + a_1 b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2}_{0} + a_2 b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \circ \vec{e}_1}_{0} + a_2 b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2}_{1}$$

Mit geometrisch Def. des Skalarprodukts:

$\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1$

$\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 = |\vec{e}_2|^2 = 1$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

(Koordinaten-Definition des Skalarprodukt)

Aufgabe 3.49. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Berechne $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = -4 \quad \in \mathbb{R}$$

2. Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-4}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{4}{\sqrt{30}} < 0$$

stumpfer Winkel

$|\vec{a}|^2 = 1 + 1 + 4 + 9 = 15$

$|\vec{b}|^2 = 1 + 1 = 2$

T.R. $\quad \varphi \approx 137^\circ$

$(\cos^{-1}$, $\arccos)$ $\quad$ 2nd

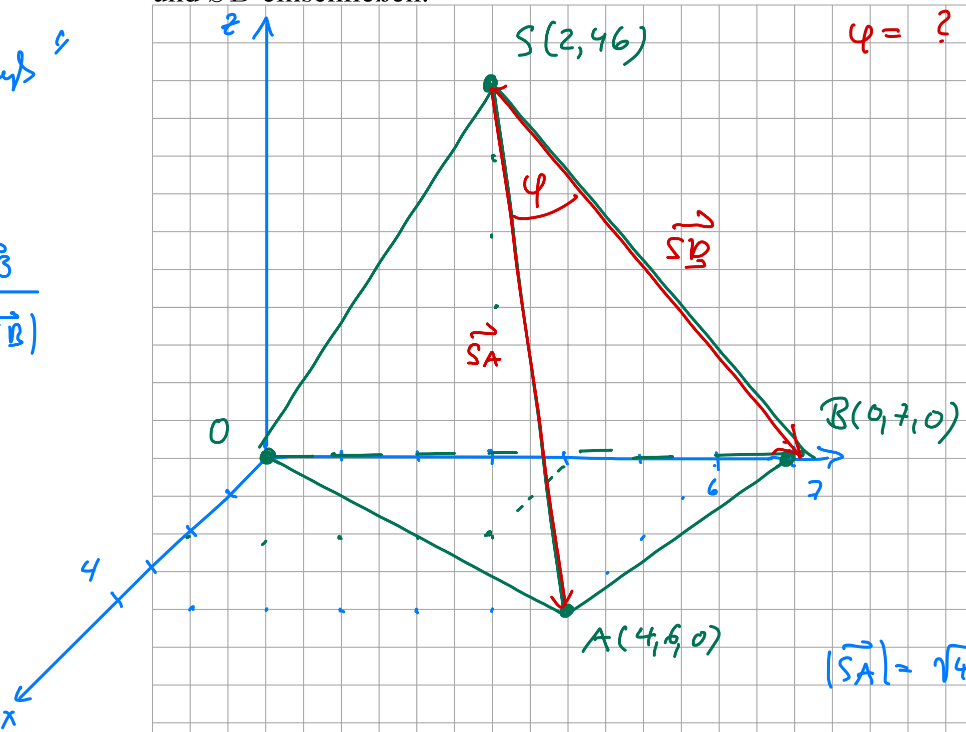
$\neq \sec$! $\quad$ Umkehrfunktion von cos

Tetraeder = Dreieckspyramide

Aufgabe 3.50. Durch die Punkte $O = (0,0,0)$, $S = (2,4,6)$, $A = (4,6,0)$, $B = (0,7,0)$ ist eine Pyramide im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Berechne den Winkel, den die Seiten $\overrightarrow{SA}$ und $\overrightarrow{SB}$ einschließen.

„Spike-Fuß"

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{SA} \circ \vec{SB}}{|\vec{SA}| \cdot |\vec{SB}|}$



$\varphi = ? = \sphericalangle(\vec{SA}, \vec{SB})$

$\vec{SA} = \begin{pmatrix}4\\6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}$

$\vec{SB} = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix}$

$|\vec{SA}|^2 = 4+4+36 = 44$

$|\vec{SB}|^2 = 4+9+36 = 49$

$|\vec{SA}| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ $\quad |\vec{SB}| = 7$

$\vec{SA} \circ \vec{SB} = 2\cdot(-2) + 2\cdot 3 + (-6)\cdot(-6) = 38$

$\cos\varphi = \dfrac{38}{2\cdot\sqrt{11}\cdot 7} = \dfrac{19}{7\sqrt{11}} \cdot \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \dfrac{19\sqrt{11}}{77} > 0$

cos 2nd
$\cos^{-1}$
arccos

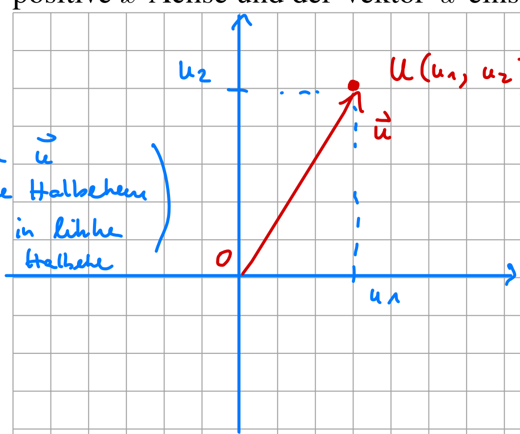
T.R. $\varphi \approx 35^\circ$

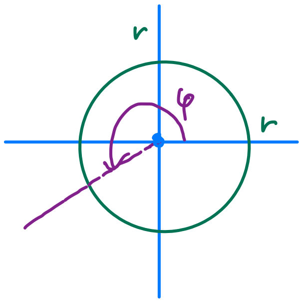
im $\mathbb{R}^2$

Bemerkung 3.51 (Ebene Vektoren und Polarkoordinaten).
Ein Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ist durch seinen Betrag $r = |\vec{u}|$ und den Winkel ϕ, den die positive x-Achse und der Vektor $\vec{u}$ einschließen, eindeutig bestimmt.

$\tan\varphi = \dfrac{u_2}{u_1}$

($\varphi = \arctan\dfrac{u_2}{u_1}$, wenn $\vec{u}$ rechte Halbebene
$= \arctan\dfrac{u_2}{u_1} + 180^\circ$, $\vec{u}$ in linke Halbebene)





$\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$

$|\vec{u}|$ = Abstand vom Ursprung $= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} =: r$

r bekannt ⇒ man weiß, dass $\vec{u}$ auf einem Kreis mit Radius r um O liegt.

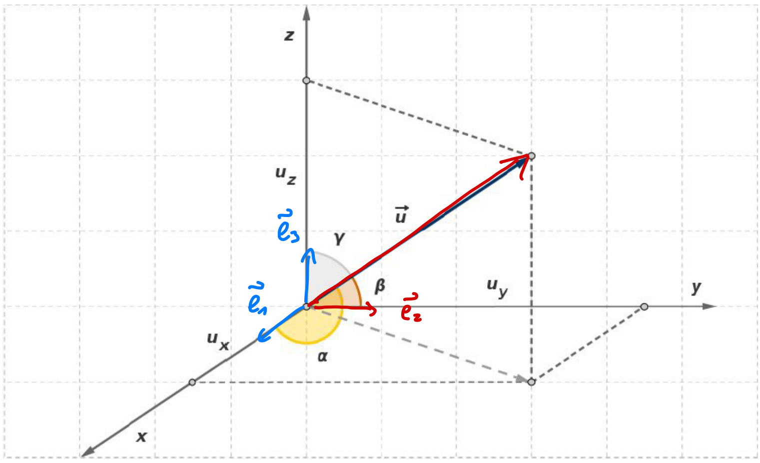
φ: Winkel zur positiven x-Achse. Ist φ bekannt, weiß man, dass $\vec{u}$ auf dem 2. Schenkel des Winkels liegt (1. Schenkel ist pos. x-Achse) (Ausgangspunkt: O)

(r, φ) definieren $\vec{u}$ eindeutig ⇒ $\vec{u} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi\end{pmatrix}$

Polarkoordinaten

im $\mathbb{R}^3$

Bemerkung 3.52 (Richtungswinkel für Vektoren im $\mathbb{R}^3$)**.**
Ist $\vec{u}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^3$, dann heißen die Winkel zwischen $\vec{u}$ und den Einheitsvektoren in Richtung der positiven Koordinatenachsen, also $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ und $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, die *Richtungswinkel* zu $\vec{u}$:



Berechnung der Richtungswinkel:

$|\vec{e}_1| = 1$

$\vec{e}_1 \circ \vec{u} =$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = u_1$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = u_2$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{e}_1 \circ \vec{u}}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{u}|} = \dfrac{u_1}{|\vec{u}|}$

$\cos\beta = \dfrac{\vec{e}_2 \circ \vec{u}}{|\vec{e}_2| \cdot |\vec{u}|} = \dfrac{u_2}{|\vec{u}|}$

$\cos\gamma = \dfrac{\vec{e}_3 \circ \vec{u}}{|\vec{e}_3| \cdot |\vec{u}|} = \dfrac{u_3}{|\vec{u}|}$

Mit $r = |\vec{u}|$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} u_1 &= r \cdot \cos\alpha \\ u_2 &= r \cdot \cos\beta \\ u_3 &= r \cdot \cos\gamma \end{aligned}}$

Ein Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ ist durch seinen Betrag $r := |\vec{u}|$ und seine Richtungswinkel α, β, γ eindeutig bestimmt. Für die Richtungswinkel gilt folgende Beziehung:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= r \cdot \cos\alpha \\ u_2 &= r \cdot \cos\beta \\ u_3 &= r \cdot \cos\gamma \end{aligned}}$ $\Rightarrow$

$|\vec{u}|^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\cos^2\beta + r^2\cos^2\gamma$

$\cancel{r^2} = \cancel{r^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\alpha, \beta, \gamma \in [0°, 180°]$

Aufgabe 3.53. Berechne die Richtungswinkel des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

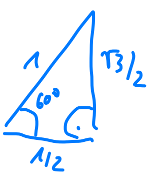
$|\vec{u}|^2 = 1+1+2 = 4$

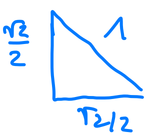
$|\vec{u}| = 2$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

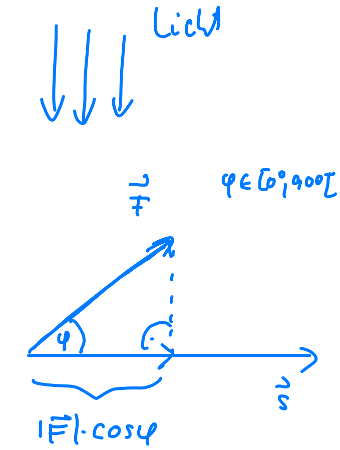
$\cos\beta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60°$

$\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = 45°$





Licht



$\vec F \circ \vec s = |\vec F| \cdot |\vec s| \cdot \cos\varphi$

Orthogonalprojektion

In manchen Anwendungen (z.B. Berechnung der Arbeit) ist es nötig, einen Vektor $\vec{a}$ in zwei Komponenten aufzuspalten:

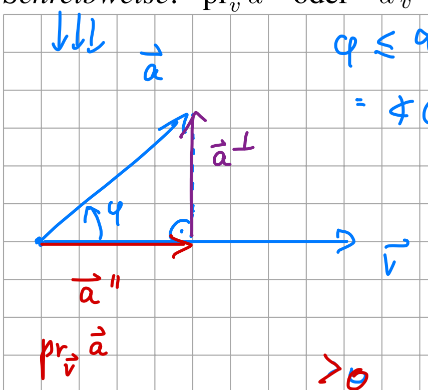
1. einen Anteil, der parallel zu einem vorgegebenen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist,
2. einen Anteil, der senkrecht zu diesem Vektor $\vec{v}$ ist.

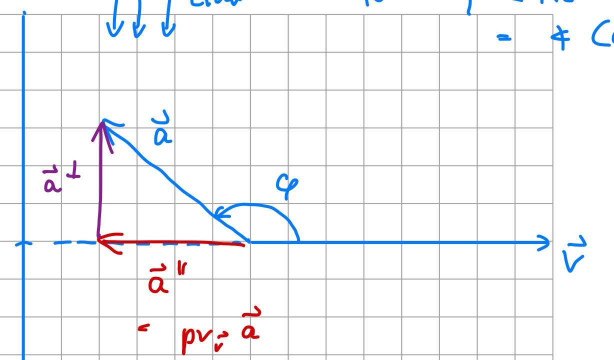
Der zu $\vec{v}$ parallele Anteil heißt *orthogonale Projektion von* $\vec{a}$ *auf* $\vec{v}$.
Schreibweise: $\mathrm{pr}_v \vec{a}$ oder $\vec{a}_v$

$\vec a^{\,\parallel}$: Schatten

Licht $\quad 90° < \varphi \leq 180° = \sphericalangle(\vec a, \vec v)$

$\varphi \leq 90° = \sphericalangle(\vec a, \vec v)$





$|\vec a^{\,\parallel}| = |\vec a| \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{>0}$

(Einheitsvektor) Richtungsvektor vom Betrag 1 in Richtung $\vec v$ = Richtung von $\vec a^{\,\parallel}$

$\dfrac{\vec v}{|\vec v|}$

$\Rightarrow \quad \vec a^{\,\parallel} = |\vec a| \cdot \cos\varphi \cdot \dfrac{\vec v}{|\vec v|}$

$\cos\varphi = \dfrac{\vec a \circ \vec v}{|\vec a|\,|\vec v|}$

$\Rightarrow \quad \vec a^{\,\parallel} = \cancel{|\vec a|} \cdot \dfrac{\vec a \circ \vec v}{\cancel{|\vec a|} \cdot |\vec v|} \cdot \dfrac{\vec v}{|\vec v|}$

$\boxed{\vec a^{\,\parallel} = \dfrac{\vec a \circ \vec v}{|\vec v|^2} \cdot \vec v}$

$|\vec a^{\,\parallel}| = |\vec a| \cdot |\underbrace{\cos\varphi}_{<0}|$

$= -|\vec a| \cdot \cos\varphi > 0$

Richtungsvektor (Einheitsvektor) in Richtung $\vec a^{\,\parallel}$:

$-\dfrac{\vec v}{|\vec v|}$

$\vec a^{\,\parallel} = (-)|\vec a| \cdot \cos\varphi \cdot \dfrac{(-)\vec v}{|\vec v|}$ $\quad - \cdot - = +$

$= \dfrac{\vec a \circ \vec v}{|\vec v|^2} \cdot \vec v$

$\boxed{\vec a^{\,\parallel} = \dfrac{\vec a \circ \vec v}{|\vec v|^2} \cdot \vec v}$

Formel für $\vec a^{\,\parallel} = \mathrm{pr}_{\vec v}\, \vec a$

$\vec a^{\perp} = \vec a - \vec a^{\,\parallel} = \vec a - \dfrac{\vec a \circ \vec v}{|\vec v|^2} \cdot \vec v$

Bemerkung 3.54. Sind $\vec{a}$ und $\vec{v} \neq \vec{0}$ Vektoren, so gilt:
Die orthogonale Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{v}$ berechnet sich durch

$$\vec{a}^{\parallel} = \mathrm{pr}_v \vec{a} = \frac{(\vec{a} \circ \vec{v})}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

auf $\vec{v}$ wird projeziert!

Die zu $\vec{v}$ senkrechte Komponente von $\vec{a}$ ist

$$\vec{a}^{\perp} = \vec{a} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

Fehler-korrektur (zum Video) ! !

Vorsicht: $\underbrace{\mathrm{pr}_{\vec{v}}\, \vec{a}}_{\text{parallel zu } \vec{v}} \neq \underbrace{\mathrm{pr}_{\vec{a}}\, \vec{v}}_{\text{parallel zu } \vec{a}}$!

Projektion auf $\vec{v}$ Proj. auf $\vec{a}$

Aufgabe 3.55.

Berechne die Orthogonalprojektion von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

darauf wird projeziert

Zerlege den Vektor $\vec{a}$ in eine Komponente, die parallel zu $\vec{v}$ ist und eine, die senkrecht auf $\vec{v}$ steht.

$$\vec{a}^{\parallel} = \mathrm{pr}_{\vec{v}}\, \vec{a} = \frac{\vec{a} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v} = \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \parallel \vec{v} \;!$$

$$|\vec{v}|^2 = 4 + 9 + 1 = 14 \qquad \vec{a} \circ \vec{v} = -2 + 3 + 2 = 3$$

$$\vec{a}^{\perp} = \vec{a} - \vec{a}^{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 28 \end{pmatrix} - \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{5}{14} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Probe: $\vec{a}^{\parallel} + \vec{a}^{\perp} = \frac{3}{14} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{14} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}$ ✓

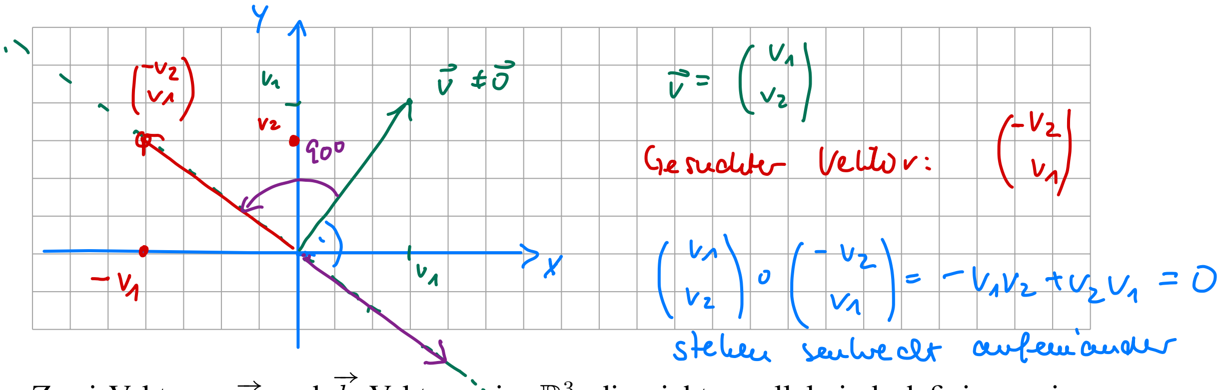
$\vec{a}^{\perp} \perp \vec{v}$? $\quad \vec{a}^{\perp} \circ \vec{v} = \frac{5}{14} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

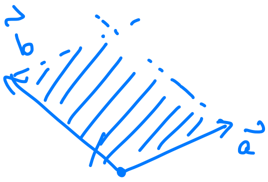
$$= \frac{5}{14} \cdot (-8 + 3 + 5) = 0$$

3.3 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^2$ stellt man fest:
Zu einem Vektor im $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ gibt es genau einen Vektor im $\mathbb{R}^2$, der

1. senkrecht auf $\vec{v}$ steht, $\quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$
2. denselben Betrag wie $\vec{v}$ hat und
3. aus $\vec{v}$ durch Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn entsteht





Parallelogramm fläche $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$, die nicht parallel sind, definieren eine Ebene durch den Ursprung. Die Menge der Vektoren, die auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht stehen, bilden eine Gerade durch den Ursprung, die auf dieser Ebene senkrecht steht. Mit dem Vektorprodukt wählen wir *einen* Vektor auf dieser Gerade aus, indem wir dessen Orientierung und dessen Länge vorgeben.

Definition 3.56.
Seien $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$, die nicht parallel sind.
Das *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist derjenige Vektor

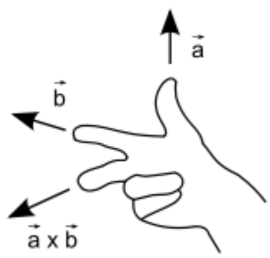
$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Geometrische Definition

der durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor im $\mathbb{R}^3$
2. **Orthogonalität:** Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ist steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$,
3. **Rechte-Hand-Regel:**

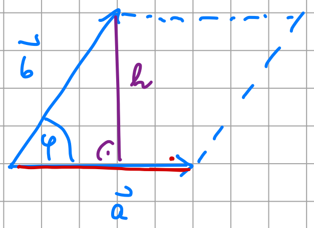
   Wenn $\vec{a}$ in Richtung des Daumens der rechten Hand zeigt und $\vec{b}$ in Richtung des Zeigefingers, so zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Richung des Mittelfingers. Wir sagen: $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein *Rechtssystem*.



4. Der **Betrag von** $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich der Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, d.h.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$\sin \varphi = \frac{h}{|\vec{b}|}$



Parallelogrammfläche

$= \underbrace{\text{Grundlinie}} \cdot \underbrace{\text{Höhe}}$

$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\sin \varphi}_{>0}$

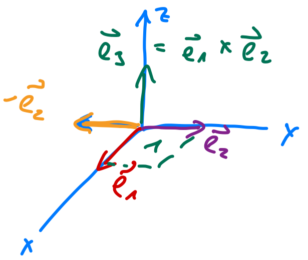
$\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0°, 180°]$
$\neq 0°, 180°$

Sonderfälle:
Ist einer der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ der Nullvektor oder sind die Vektoren parallel, so setzt man $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Bemerkung 3.57 (Rechenregeln für das Vektorprodukt)**.**
Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Antikommutativität)
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivität)
- Es gibt kein neutrales Element beim Kreuzprodukt, da kein Vektor (außer dem Nullvektor) auf sich selbst senkrecht stehen kann.

Wäre $\vec{e}$ ein neutrales Element, dann wäre $\vec{a} \times \vec{e} = \vec{a}$ $\forall\ \vec{a} \in \mathbb{R}^3$



- Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ: auf Klammersetzung achten!

Gegenbeispiel: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ Standard-Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$

$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 = \underbrace{\vec{0}} \times \vec{e}_2 = \vec{0}$ $\neq$ $\underbrace{\vec{e}_1 \parallel \vec{e}_1}$

$\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel.

Aufgabe 3.58.
Seien $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren. Zeige: $\underbrace{\vec{a}}_{\in \mathbb{R}^3}^{\text{Vektor}} \cdot \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\mathbb{R}^3}^{\text{Vektor}} = 0.$ $\in \mathbb{R}$

$\vec{a} \circ (\vec{a} \times \vec{b})$
↑
Skalarprodukt

$= 0$ da $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ nach der Definition des Vektorprodukts!

(natürlich gilt auch: $\vec{b} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$)

Berechnung des Vektorprodukts aus den Koordinaten Koordinaten-Definition

Wir führen die Determinante einer 2x2-Matrix zunächst als Berechnungsformel ein:

Definition 3.59.
Eine 2×2-*Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Die *Determinante einer* 2×2-*Matrix* ist definiert durch:

Nebendiagonale

$$\det A := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

Hauptdiagonale

Achtung: keine Betragsstriche! det A kann < 0 sein

Zum Beispiel ist $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-6) \cdot 2$
$= \underline{\underline{13}}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

Definition 3.60. Das *Vektorprodukt* zwischen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet sich durch:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \end{matrix}$$

Prüfe: $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$?

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -8 + 4 + 4 = 0$ ✓

$\vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$?

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0$ ✓

Aufgabe 3.61. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Berechne $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}}_{= \vec{a} \times \vec{b}} = 6 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hilfszeilen
$$\begin{matrix} 4 & & 1 \\ 2 & & 2 \end{matrix}$$

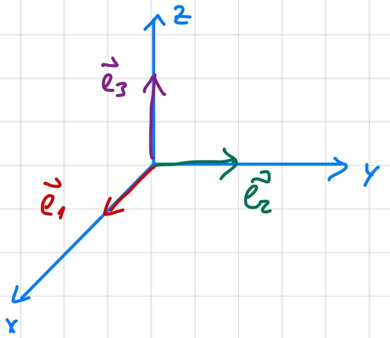
2. Berechne die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Parallelogrammfläche $= |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| 6 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 6 \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$
$= 6 \cdot \sqrt{4 + 4 + 1} = 6 \cdot 3 = \underline{\underline{18}}$

Aufgabe 3.62.
Berechne die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (2, 5, -1)$, $B = (3, 7, 2)$ und $C = (9, 6, 3)$ mit Hilfe des Vektorprodukts.

Leite die Koordinatenformel für das Vektorprodukt aus den Rechenregeln für die geometrische Definition her:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$



$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{\vec{0}} + a_1 b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + a_1 b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2}$$

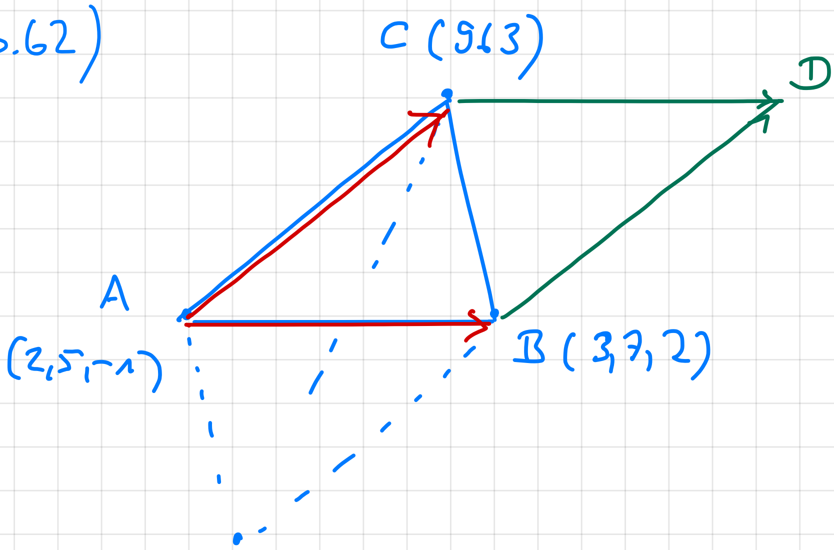
$$+ a_2 b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{-\vec{e}_3} + a_2 b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{\vec{0}} + a_2 b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{b}_3}_{\vec{e}_1}$$

$$+ a_3 b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{\vec{e}_2} + a_3 b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{-\vec{e}_1} + a_3 b_3 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{\vec{0}}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\vec{e}_3$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

(3.62)



Dreieck ABC = Hälfte des Parallelogramms, das von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt wird

$$\text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2} \cdot \text{Parallelogrammfläche}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

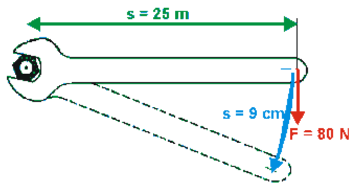
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & & 7 \\ 2 & & 1 \end{matrix}$$

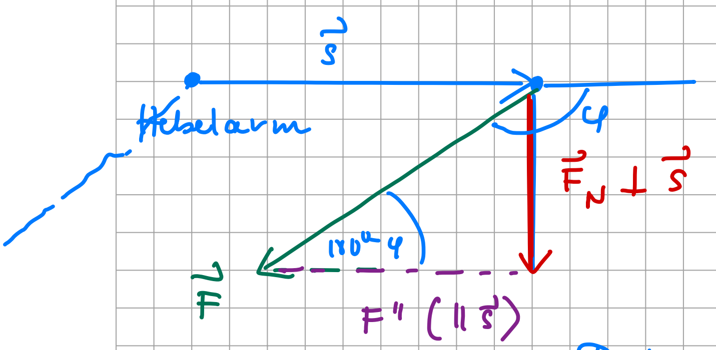
$$\text{Dreiecksfläche} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{25 + 289 + 169} \overset{\text{T.R.}}{\approx} \underline{\underline{11}}$$

Drehmomente

Drehmoment = Kraft mal Hebelarm



Eine Kraft, die direkt auf den Schwerpunkt eines Körpers wirkt, erzeugt eine geradlinige Bewegung. Eine Kraft, deren Angriffspunkt nicht im Schwerpunkt liegt, bewirkt zusätzlich eine Drehung.
Der Hebelarm ist der Vektor, der vom Drehpunkt zum Angriffspunkt der Kraft zeigt.



$$\varphi = \measuredangle(\vec{s}, \vec{F})$$

$$|\vec{F}_N| = |\vec{F}| \cdot \sin(180° - \varphi)$$

$$|\vec{F}_N| = |\vec{F}| \cdot \sin \varphi$$

$$\text{Drehmoment} = |\vec{s}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \varphi = |\vec{s} \times \vec{F}|$$

Nur die Komponente der Kraft $\vec{F}$, die senkrecht zum Hebelarm $\vec{s}$ steht, kann eine Drehbewegung erzeugen. Es gilt:

$$\vec{M} = \vec{s} \times \vec{F}$$

Die Richtung des Drehmoments gibt die Richtung der Rotationsachse an.

3.4 Das Spatprodukt im $\mathbb{R}^3$

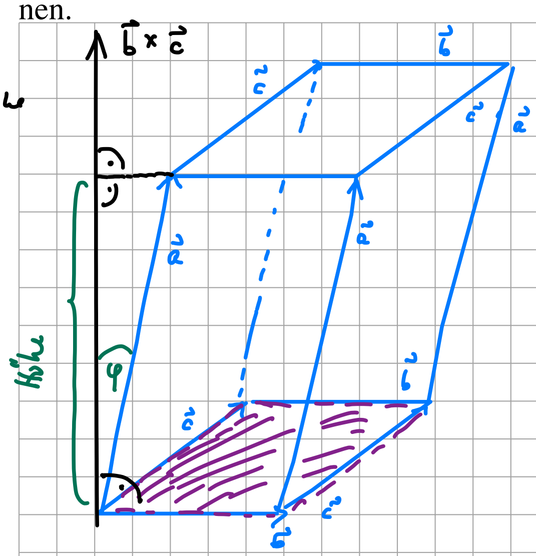
in $\mathbb{R}^3$

Definition 3.63 (Spatprodukt).
Das *Spatprodukt* der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ wird definiert durch:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

Die geometrische Bedeutung des Spatprodukts ergibt sich aus folgender Betrachtung:
Wir betrachten drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Wenn sie nicht in einer Ebene liegen, spannen sie ein *Spat* oder *Parallelepiped* auf.
Mit Hilfe von Skalarprodukt und Vektorprodukt kann man dessen Volumen berechnen.

senkrecht auf Grundfläche also auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$ d.h. Vielfaches von $\vec{b} \times \vec{c}$



Volumen des Spates

$= \underbrace{\text{Grundfläche}}_{\text{Parallelogramm}} \cdot \underbrace{\text{Höhe}}$

$= \underbrace{|\vec{b} \times \vec{c}|}_{\vec{v}} \cdot \underbrace{|\vec{a}|}_{\vec{w}} \cdot \underbrace{|\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})|}_{\sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})}$

$= |(\vec{b} \times \vec{c}) \circ \vec{a}|$

$= |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|$

$= |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$

$\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$

Höhe $= |\vec{a}| \cdot |\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})|$

Volumen des Spaltes $= |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$

Geometrische Definition des Skalarprodukts

$\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})$

Bemerkung 3.64 (Berechnung des Spatprodukts aus den Koordinaten - Regel von Sarrus).

Rechenvorschrift:

Hilfsspalten

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right] & \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \\ \quad \underbrace{}_{\vec a} \quad \underbrace{}_{\vec b} \quad \underbrace{}_{\vec c} & \end{array} = \begin{array}{l} (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) \\ - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1) \end{array}$$

$$\vec{a} \circ [\vec{b} \times \vec{c}] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{matrix} b_1 & & c_1 \\ b_2 & & c_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 \cdot (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 \cdot (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

6 Permutationen von

1	2	3	←	$a_1 b_2 c_3$	$+$ •
1	3	2		$a_1 b_3 c_2$	$-$
2	1	3		$a_2 b_1 c_3$	$-$
2	3	1		$a_2 b_3 c_1$	$+$ •
3	1	2		$a_3 b_1 c_2$	$+$ •
3	2	1		$a_3 b_2 c_1$	$-$

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

$1 \to 3 \to 2 \to 1$

Spatprodukt

Aufgabe 3.65.
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 4, 6)$, $\vec{c} = (2, -3 - 5)$.
Berehne das Volumen des Spats, der von diesen Vektoren aufgespannt wird.

$$[\vec a, \vec b, \vec c] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{array}$$

$$\big(1\cdot 4\cdot(-5) + 1\cdot(-3)\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 6\big) - \big(3\cdot 4\cdot 2 + 6\cdot(-3)\cdot 1 + (-5)\cdot 2\cdot 1\big)$$

$$= (-20 - 9 + 24) - (24 - 18 - 10) = -5 - (-4) = \underline{\underline{-1}}$$

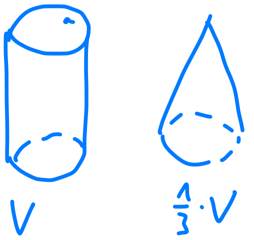
$$V = |[\vec a, \vec b, \vec c]| = |-1| = \underline{\underline{1}} > 0$$

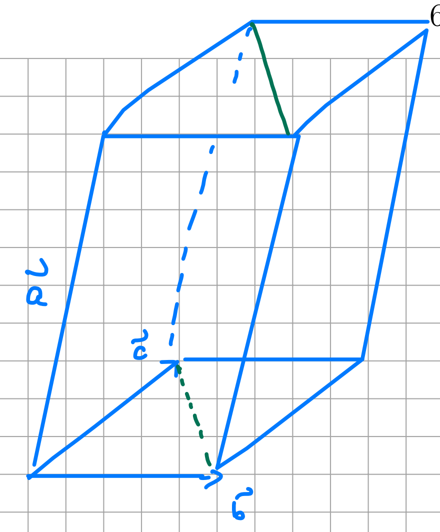
Bemerkung 3.66.
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Mit dem Spatprodukt kann man außer dem Spatvolumen folgende Volumina berechnen:

1. Volumen des Dreiecksprismas, das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird:
$$\frac{1}{2} \cdot |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

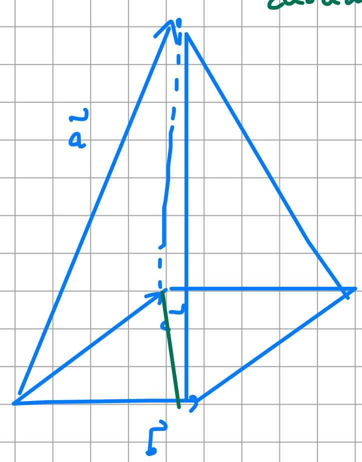
2. Volumen der Viereckspyramide, dessen Grundfläche durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ definiert ist, mit Spitze $\vec{c}$:
$$\frac{1}{3} \cdot |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

3. Volumen der Dreiecksyramide (Tetraeder), die von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird:
$$\frac{1}{6} \cdot |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$





obere Seite zu einem Punkt zusammengezogen



Dreiecksprisma

$V = \frac{1}{2} \cdot$ Spatvolumen

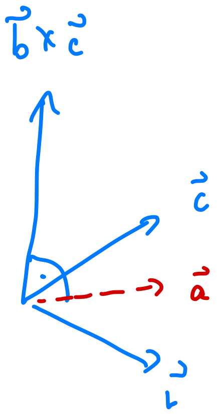
$= \frac{1}{2} \cdot |[\vec a, \vec b, \vec c]|$

Viereckspyramide

$V = \frac{1}{3} \cdot |[\vec a, \vec b, \vec c]|$

Dreieckspyramide = Tetraeder

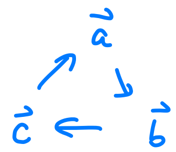
$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot |[\vec a, \vec b, \vec c]|$



Bemerkung 3.67 (Rechenregeln für das Spatprodukt). $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \in \mathbb{R}$

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

- Das Spatprodukt ist eine skalare Größe. $\in \mathbb{R}$
- $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ ist das Volumen des Spates, der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.
- Ist das Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ gilt:
  - Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$ stehen senkrecht aufeinander, d.h. $\vec{a}$ liegt in der Ebene, die von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.
  - Das Volumen des Spates, der von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannt wird, ist 0.
  - Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ liegen in einer Ebene.
    Man sagt: Die Vektoren sind *komplanar*.
- Zyklische Vertauschung (gleiches Vorzeichen)
  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$
  Antizyklische Vertauschung (Vorzeichenwechsel)
  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$



Aufgabe 3.68.

Liegen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 18 \end{pmatrix}$ in einer Ebene?

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -9 \\ -7 & 4 & 18 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ -7 & 4 \end{array}$$

$$= \big(1 \cdot (-1)\, 18 + 2 \cdot (-9) \cdot (-7) + 0\big)$$
$$- \big(0 + 4 \cdot (-9) \cdot 1 + 18 \cdot 4 \cdot 2\big)$$

$$= 18 \cdot (-1 + 7 + 2 - 8) = 18 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

Spatprodukt ist 0

$\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ liegen in einer Ebene
– sind komplanar
– sind linear abhängig