Kapitel 4

Funktionen und ihre Eigenschaften

4.1 Der Funktionsbegriff

Funktionen dienen dazu, Zusammenhänge zwischen Größen zu beschreiben, z.B. den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit, die Stromstärke in einem Stromkreis in Abhängigkeit von der angelegten Spannung, die Auslenkung einer Feder in Abhängigkeit von der angehängten Masse, jeder rellen Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet.

Definition 4.1.
Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die *jedem* Element x aus einer Menge D *genau ein* Element y aus einer Menge Z zuordnet.
Schreibweisen und Bezeichnungen:

$$f: D \longrightarrow Z$$

$$\underbrace{x \in D}_{\text{unabhängige Variable}} \longmapsto \underbrace{y \in Z}_{\text{abhängige Variable}}$$

Nachdem x gewählt wurde, ist y eindeutig festgelegt.

$x \longmapsto y$

„x wird abgebildet auf y"

„y ist das Bild von x"

„$y = f(x)$"

Bezeichnungen:

- D: *Definitionsbereich* (menge) von f — Z: *Zielbereich* (menge) von f
- x: *unabhängige* Variable, *Argument* — y: *abhängige* Variable, *Funkti*onswert ~~*onswert*~~

Die *Wertemenge* $W_f \subset Z$ einer Funktion $f : D \to Z$ ist die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in D$:

$$W_f = \{f(x) \mid x \in D_f\} \subset Z$$

4.1.1 Reelle Funktionen in einer Variablen

$D, Z \subset \mathbb{R}$

Bemerkung 4.2.
Uns interessieren in diesem Semester vor allem *reelle* Funktionen in einer Variablen, also Funktionen, deren Definitionsbereich und ~~Werte~~ Ziel bereich Teilmengen der reellen Zahlen sind.
Reelle Funktionen werden oft durch eine Funktionsgleichung beschrieben:

$$y = f(x) = 4x - 2$$

Die Bezeichnung der Variablen kann beliebig gewählt werden. Die Vorschrift

$$z = f(u) = 4u - 2$$

stellt dieselbe Funktion dar!
Der Definitionsbereich einer reellen Funktion wird oft nicht explizit angegeben (obwohl zu jeder Funktion unbedingt ihr Definitionsbereich gehört!). Der Definitionsbereich D_f der Funkton f ist dann die Menge aller reellen Zahlen x, für die der Ausdruck $f(x)$ Sinn macht. Diese Menge heißt *maximaler Definitionsbereich* von f.

Bemerkung 4.3.
Beachte bei der Bestimmung des maximalen Definitionsbereiches:

Nenner $\neq 0$
Unter der Wurzel: ≥ 0
Im Logarithmus: > 0

- Der Nenner eines Bruches darf nicht 0 werden.
- Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ werden.
- Der Ausdruck innerhalb eines Logarithmus muss positiv sein.

Aufgabe 4.4. Bestimme den maximalen Definitionsbereich:

1. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 36}$ } Nenner

Nenner $\neq 0$

$x^2 - 36 = 0$
$x^2 = 36 \quad | \sqrt{}$
$x = \pm 6$!

$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{6, -6\}$

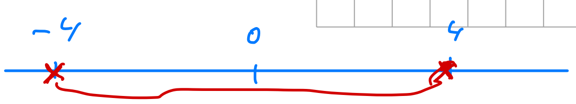
$2 < 3 \quad | \cdot (-1)$
$-2 > -3$

2. $s(x) = \sqrt{16 - x^2}$

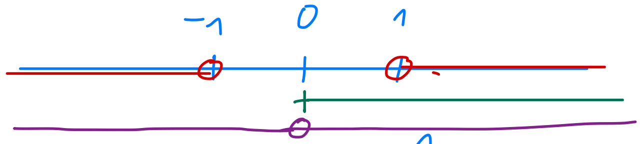
Unter der Wurzel ≥ 0

$16 - x^2 \geq 0 \quad | -16$
$-x^2 \geq -16 \quad | : (-1)$
$x^2 \leq 16$!
$|x| \leq 4$

$D_{max} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$
$= [-4, 4]$



3. $y = \dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x}}$



Alle 3 Kriterien müssen erfüllt sein!
→ Schnittmenge

Im Logarithmus	> 0	$x^2 - 1 > 0$ $x^2 > 1$ $\lvert x \rvert > 1$
Unter der Wurzel	≥ 0	$x \geq 0$
Im Nenner:	$\neq 0$	$\sqrt{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$D_{max} =]1, +\infty[$

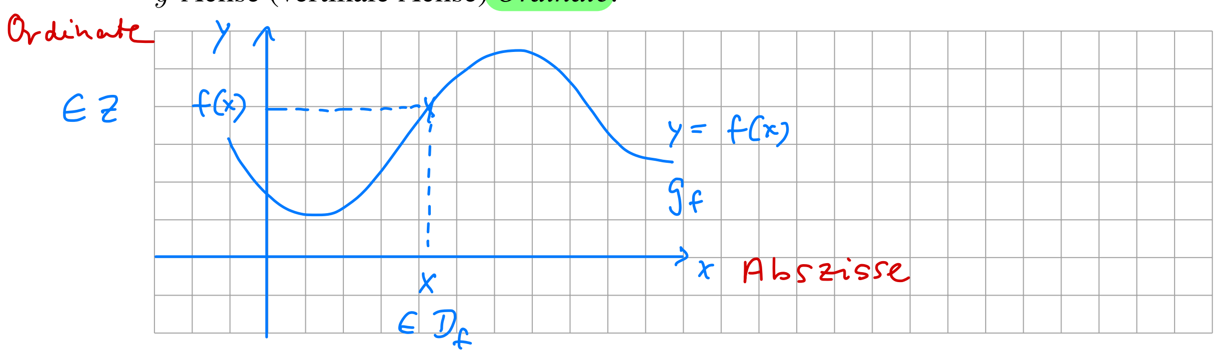
4.1.2 Der Graph einer reellen Funktion (Schaubild)

Eine eine reelle Funktion $y = f(x)$ kann man in einem kartesischen Koordinatensystem durch ihren Graphen darstellen:

Definition 4.5.
Der *Graph* von f ist die Menge der Punkte $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$, wobei $x \in D_f$:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in D_f,\ y = f(x)\}$$

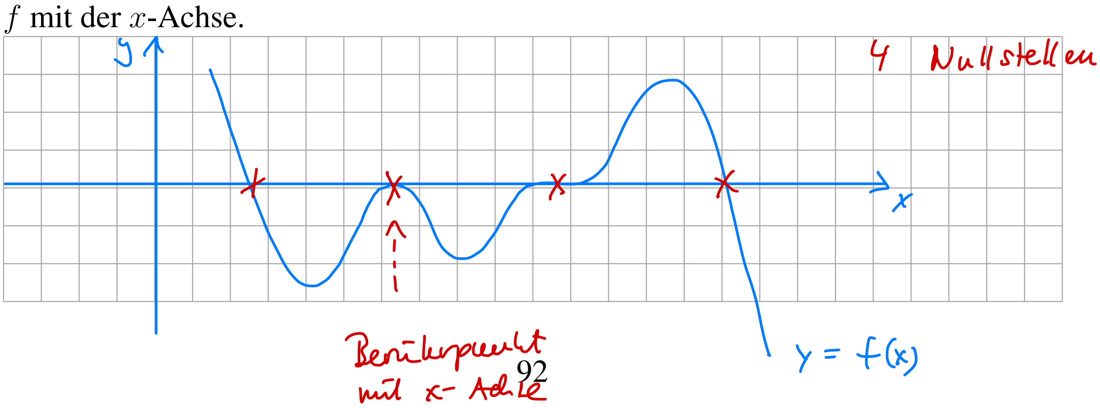
Die x-Achse (horizontale Achse) des Koordinatensystems heißt auch *Abszisse*, die y-Achse (vertikale Achse) *Ordinate*.



4.1.3 Nullstellen von Funktionen

Definition 4.6.
Die Funktion $y = f(x)$ hat in $x_0 \in D_f$ eine *Nullstelle* , wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Um die Nullstellen einer Funktion zu berechnen, muss man die Gleichung $f(x) = 0$ lösen.
Die Nullstellen von f sind die Schnittpunkte oder Berührpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.



4.2 Lineare Funktionen

Definition 4.7.
Eine *lineare Funktion* ist eine Funktion der Form

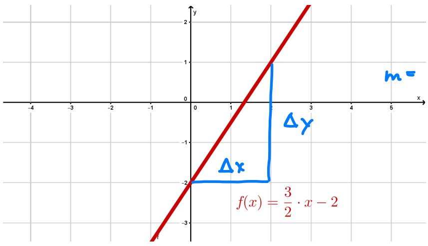
$$y = f(x) = mx + b \quad \text{mit} \quad m, b \in \mathbb{R}$$

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade mit Steigung m und Achsenabschnitt b.
Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ und der Wertebereich, falls $m \neq 0$, ist $\mathbb{R}$.

$m = 0 \quad f(x) = b$
$\forall x \in \mathbb{R}$
konstant
$f(x) \equiv b$

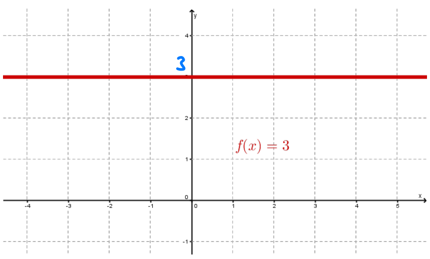
Beispiel 4.8.

1. $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$

2. Ist $m = 0$, so ist der Funktionswert für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich b, z.B. $f(x) = 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine solche Funktion heißt auch *konstante* Funktion. Die Wertemenge ist $W_f = \{2\}$.
   Man schreibt auch $f(x) \equiv 3$ (*Sprechweise:* $f(x)$ ist identisch 3 oder konstant gleich 3).



3. Ist $b = 0$, hat die Funktionsgleichung die Gestalt $y = mx$. Die Gerade geht dann durch den Ursprung des Koordinatensystems.

   $y \sim x$

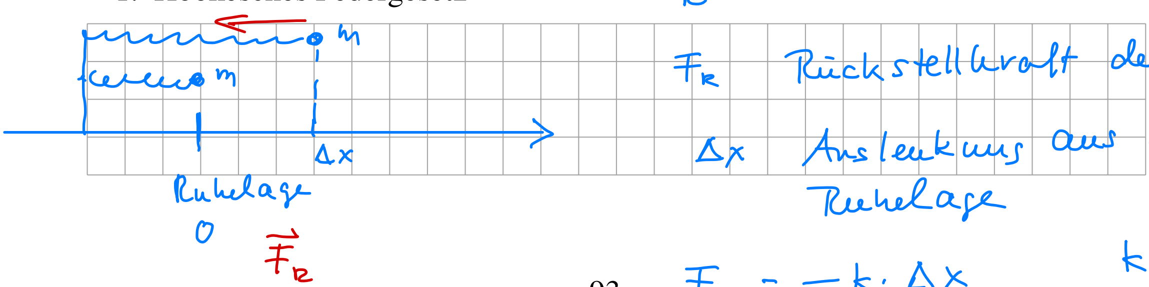
   In diesem Fall sagt man, dass y und x *zueinander proportional* sind, und schreibt: $y \sim x$

   m heißt *Proportionalitätskonstante*.

Beispiel 4.9. Viele physikalische Zusammenhänge kann man näherungsweise durch lineare Funktionen beschreiben.

1. Hookesches Federgesetz

$F_R \sim \Delta x$



F_R Rückstellkraft der Feder

Δx Auslenkung aus der Ruhelage

$F_R = -k \cdot \Delta x \qquad k > 0$ Hookesche Federkonstante

$\alpha > 0$

α heißt Längenausdehnungskoeffizient (Materialkonstante)

2. Längendehnung bei Erwärmung:

l_0: Länge des Stabes bei Temperatur T_0

Δl: Längenänderung bei Temperaturerhöhung um ΔT

ΔT klein, so gilt: $\Delta l \sim \Delta T \cdot l_0$

d.h. $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$

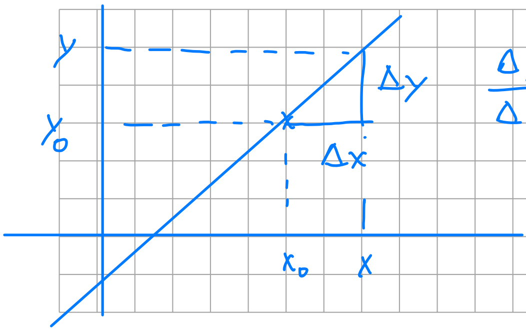
$l(T_0 + \Delta T) = l(T_0) + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$

l_0

Δl

Bemerkung 4.10 (Aufstellen von Geradengleichungen).

1. Gleichung einer Geraden, die durch einen Punkt (x_0, y_0) und die Steigung m gegeben ist:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \Leftrightarrow \frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$\boxed{y = y_0 + m \cdot (x - x_0)}$$

2. Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1)

$x_0 \neq x_1$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

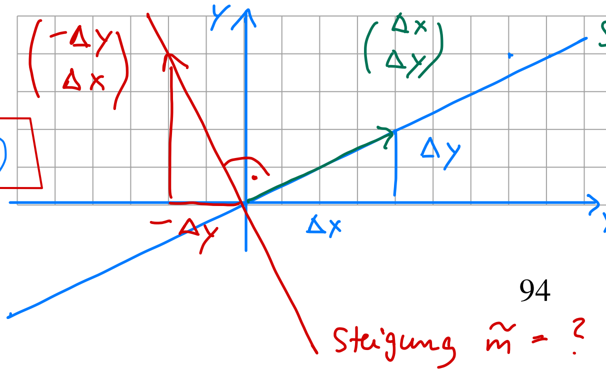
3. Gleichung der Geraden durch den Punkt (x_0, y_0), die parallel zur Geaden $y = mx + b$ ist.

Parallel bedeutet: Die beiden Geraden haben dieselbe Steigung m

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0)$$

4. Gleichung der Geraden durch den Punkt (x_0, y_0), die auf der Geraden $y = mx + b$ senkrecht steht.

$$\boxed{y = y_0 - \frac{1}{m}(x - x_0)}$$



Steigung $= m$, parallel zur Geraden $y = mx + b$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Steigung $\tilde{m} = ? = \frac{\Delta x}{-\Delta y} = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{m}$

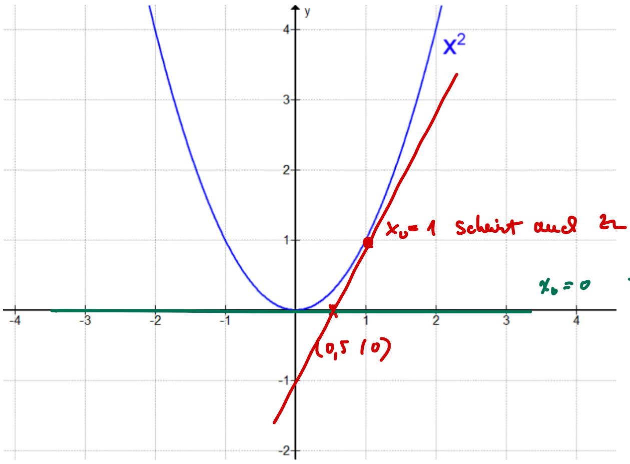
5. Die Gleichung der Tangente an den Graphen der differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 \in D$ ist:

Steigung der Tangente an der Stelle x_0 ist

$m = f'(x_0)$ $\qquad y_0 = f(x_0)$

Tangente: $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$

Definition 4.11.
Der Graph der Funktion $y = x^2$ heißt *Normalparabel*.



$x_0 = 1$ scheint auch zu passen

$x_0 = 0$ tut's

an der Stelle x_0

Aufgabe 4.12.
Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ geht die Gleichung der Tangente an der Stelle x_0 an den Graphen der Funktion $y = x^2$ durch den Punkt $(0,5/0)$?

$y' = 2x$

Tangentengleichung an der Stelle x_0 gesucht

$f(x_0) = x_0^2$

$f'(x_0) = 2x_0$

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y = x_0^2 + 2x_0 (x - x_0) = x_0^2 + 2x_0 \cdot x - 2x_0^2$

$\underbrace{y}_{0} = -x_0^2 + 2x_0 \cdot \underbrace{x}_{0{,}5}$

Auf dieser Tangente soll der Punkt $(\underbrace{0{,}5}_{x} / \underbrace{0}_{y})$ liegen

$\Rightarrow \quad 0 = -x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot 0{,}5 = -x_0^2 + x_0$

Es muss gelten $\quad -x_0^2 + x_0 = 0$

$x_0(-x_0 + 1) = 0 \iff x_0 = 0$ oder $\underbrace{-x_0 + 1 = 0}$

$\iff x_0 = 1$

2 Lösungen: An der $x_0 = 0$ und an der Stelle $x_0 = 1$ geht die Tangente an die Normalparabel durch $(0{,}5 / 0)$

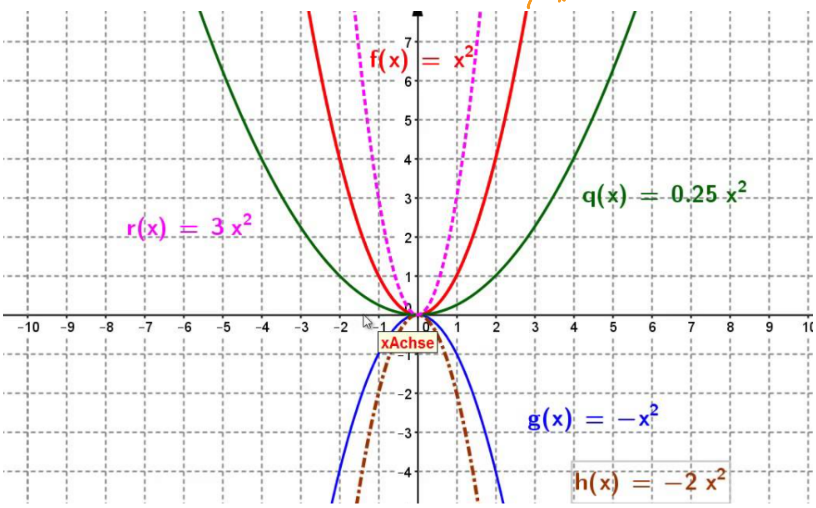
4.3 Quadratische Funktionen

Beispiel 4.13.
Eine Funktion mit einer Funktionsvorschrift der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

heißt *quadratische Funktion*.
Der Graph einer quadratischen Funktion heißt *Parabel*.
Man erhält den Graph einer quadratischen Funktion durch Strecken, Stauchen, Verschieben und/oder Spiegeln der Normalparabel.

Parabeln der Form $y = ax^2$



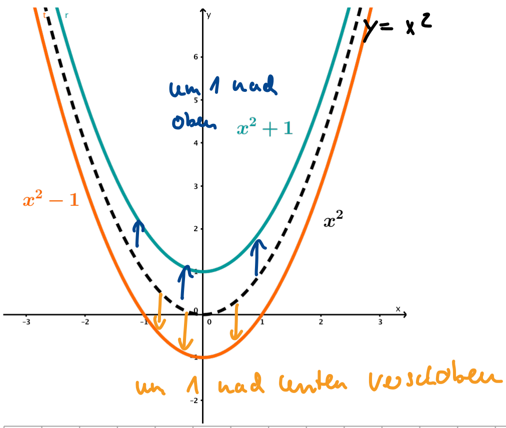
$a > 0$

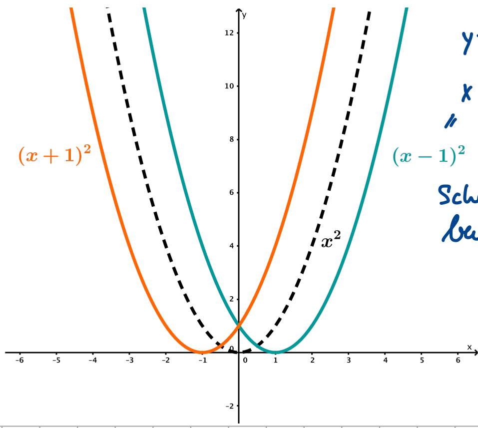
Der Koeffizient a von x^2 heißt *Öffnungsparameter*.
Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet; für $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet.
Für $|a| > 1$ ist die Parabel enger als die Normalparabel; für $0 < |a| < 1$ ist sie weiter geöffnet als die Normalparabel.

Parabeln in x- und y-Richtung verschieben:

$y = f(x)$

$y = x^2$





$y = f(x-1)$

$x^2 - 2x + 1$

Scheitel bei $x = 1$

Vorsicht !

$y = f(x-1)$ nach rechts verschoben!

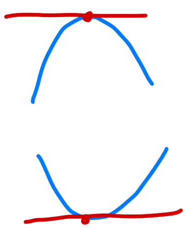
$y = f(x+1)$ nach links verschoben!

b und c aus 4.13 sind verschieden von b, c aus 4.14 !

Bemerkung 4.14 (Scheitelform einer Parabel)**.**
Durch *quadratisches Ergänzen* kann man jedes quadratische Polynom in folgende Form bringen:

$$f(x) = a(x-b)^2 + c$$

Der Punkt (b, c) heißt *Scheitel der Parabel*. Im Scheitel hat die Funktion ihr *globales Minimum*, falls $a > 0$, bzw. ihr *globales Maximum*, falls $a < 0$.



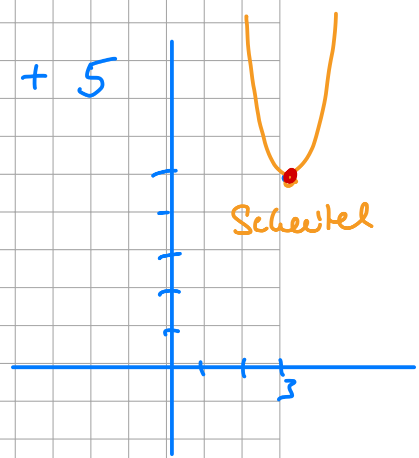
Beispiel 4.15. $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

Scheitel ermitteln

① Mit Differentialrechnung: Im Scheitel hat die Parabel eine waagrechte Tangente, d.h. $f'(x)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4x - 12 = 0 \iff x = 3 \\ f(3) = 18 - 36 + 23 = 5 \end{array}\right\} \text{Scheitel } (3,5)$$

Scheitelform: $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$



② Ohne Ableiten

Quadratisch ergänzen:

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 23$$
$$= 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 23$$
$$= 2\cdot(\underbrace{x^2 - 6x + 9}) - 18 + 23 = 2(x-3)^2 + 5$$

$(x-b)^2$
$= x^2 - 2b + b^2$
$-2b = -6$
$\Rightarrow b = 3$

-6: Doppeltes Produkt

Bemerkung 4.16.
Das Ermitteln der Nullstellen der quadratischen Funktion

$$y = ax^2 + bx + c$$

mit $a \neq 0$ entspricht dem Lösen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

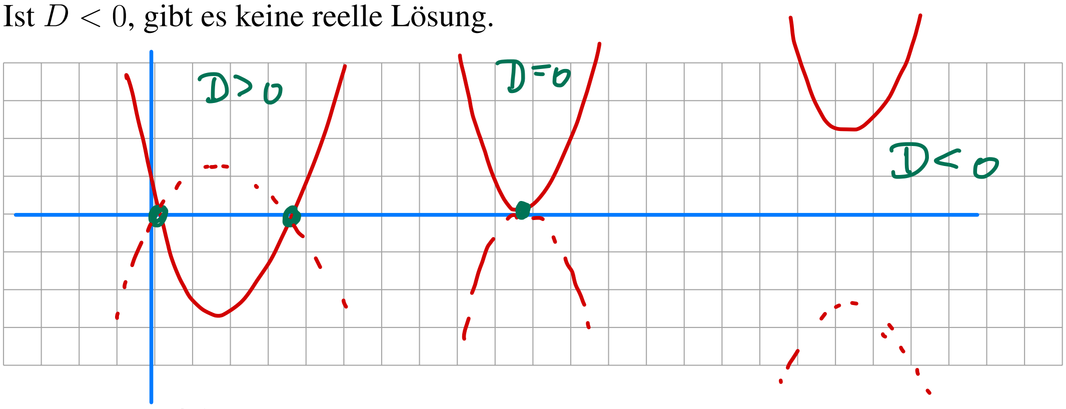
Die Lösungen erhält man mit der *Mitternachtsformel*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eine quadratische Gleichung hat 0, 1 oder 2 reelle Lösungen, abhängig von der *Diskriminante*

$$D = b^2 - 4ac$$

Ist $D > 0$, gibt es 2 verschiedene reelle Lösungen.
Ist $D = 0$, gibt es genau eine reelle Lösung, eine sogenannte *doppelte Nullstelle*.
Ist $D < 0$, gibt es keine reelle Lösung.



Bemerkung 4.17 (Satz von *Vieta*).
Gegeben ist eine quadratische Funktion der Form $f(x) = x^2 + px + q$.
Hat $f(x)$ zwei reelle Nullstellen, kann man f in Linearfaktoren zerlegen:

$$f(x) = x^2 + px + q = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. (Die Nullstellen von f sind dann $-a$ und $-b$.)
Wie findet man a und b?
Es muss gelten:

(I) $a \cdot b = q$
(II) $a + b = p$

Wenn p und q ganzzahlig sind und auch a und b ganzzahlig sind, müssen a und b Teiler von q sein. Mit Hilfe von (I) und (II) kann man sie oft leicht durch etwas Probieren bestimmen.

$x^2 + 5x + \underbrace{6}_{} = 0 \quad = (x+2)(x+3)$

$1 \cdot 6$
$2 \cdot 3 \} \; 2+3=5$
$-1 \cdot -6$
$-2 \cdot -3$

NSt $-2, -3$

$x^2 + x - 6 = 0 \quad = (x-2)(x+3)$

$1 \cdot -6$
$2 \cdot -3$
$-1 \cdot 6$
$-2 \cdot 3 \} \; -2+3=1$ ✓

NSt $2, -3$

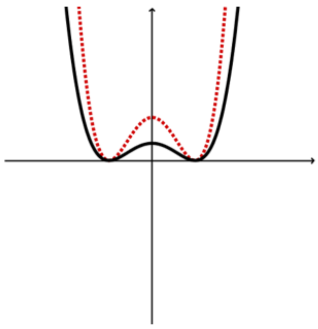
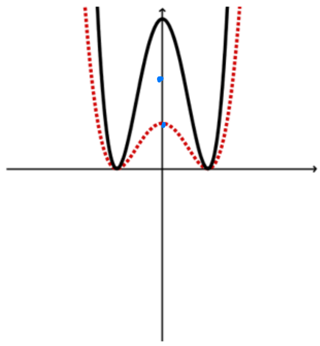
4.4 Strecken, Stauchen, Verschieben von Funktionen

Strecken, Stauchen und Verschiebung von Funktionen sind Spezialfälle von Verkettungen.
Gegeben ist der Graph einer Funktion $y = f(x)$. Im Folgenden ist der Graph von f jeweils rot gezeichnet, der Graph der veränderten Funktion schwarz.

Quelle: https://de.serlo.org/mathe/funktionen/funktionsbegriff/funktionen-graphen/funktionsgraphen-stauchen-strecken

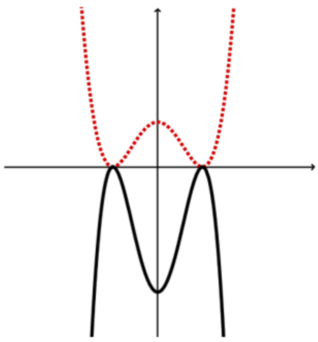
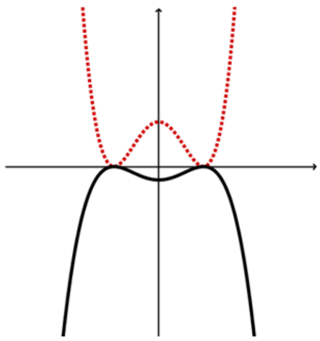
Soll in y-Richtung gestreckt (gestaucht) werden, wird der ganze Funktionsterm mit dem Faktor a multipliziert:

$$g(x) = a \cdot f(x)$$

Streckfaktor	$a = \frac{1}{2}$	$a = \cancel{2}\ 3$
Funktionsterm der veränderten Funktion	$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$	$g(x) = \cancel{2}3\, f(x)$
Geometrische Veränderung	Stauchung	Streckung in y-Richtung
Graphen	y = f(x) 	

Stauchen in y-Richtung

Falls a **negativ** ist, so wird der Graph zusätzlich noch an der x-Achse gespiegelt.

Streckfaktor	$a = -\cancel{2}3$	$a = -\frac{1}{2}$
Funktionsterm der veränderten Funktion	$g(x) = -\cancel{2}_{3} \cdot f(x)$	$g(x) = -\frac{1}{2} \cdot f(x)$
Geometrische Veränderung	Spiegelung an der x-Achse Streckung	Spiegelung an der x-Achse Stauchung
Graphen		

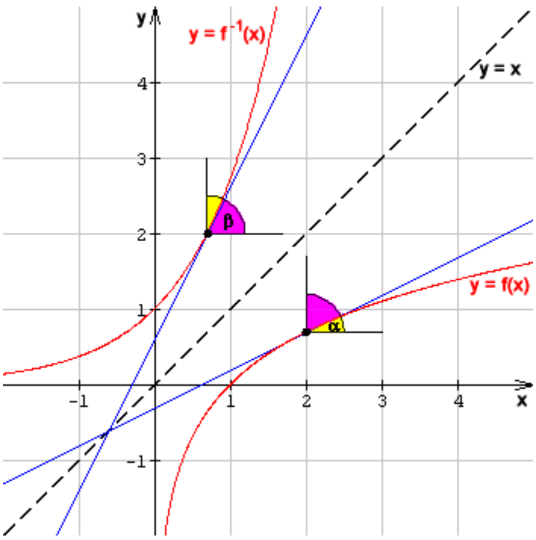
Bemerkung 4.78. *Graph der Umkehrfunktion*
Den Graphen von f^{-1} erhält man aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden von 1. und 3. Quadranten (d.h. Vertauschen von x und y).

Die Ableitung der Umkehrfunktion

Kennt man die Ableitung der (umkehrbaren) Funktion $y = f(x)$, kann man auch die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen:

Bemerkung 4.79. Die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} von $f(x)$ ist

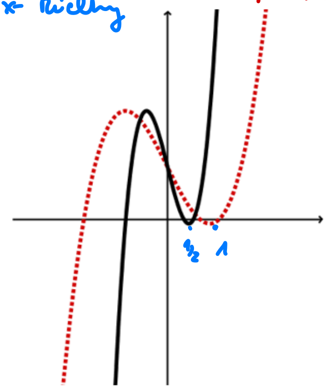
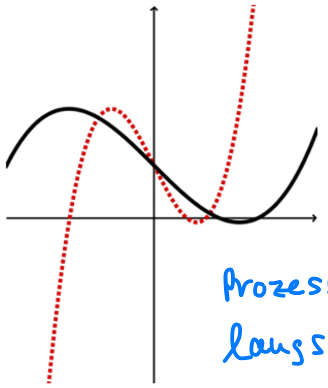
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



http://de.academic.ru/pictures/dewiki/85/Umkehrregel.png

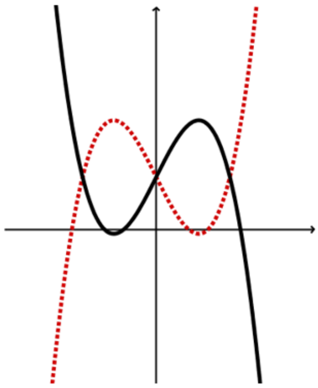
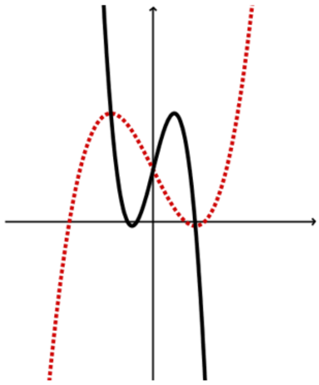
Soll in x-Richtung gestreckt (gestaucht) werden, wird die Variable x durch den Faktor a dividiert.

> $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$

Streckfaktor	$a = \frac{1}{2}$	$a = 2$
Funktionsterm der veränderten Funktion	$g(x) = f(2 \cdot x)$	$g(x) = f(\frac{1}{2} \cdot x)$
Geometrische Veränderung	Stauchung in x-Richtung	Streckung
Graphen	$y = f(x)$ 	

Falls $x = t$ die Zeit ist, heißt $g(t) = f(2t)$, dass der Prozess f doppelt so schnell abläuft wie der Prozess g.

Prozess läuft langsamer ab!

Streckfaktor	$a = -1$	$a - \frac{1}{2}$
Funktionsterm der veränderten Funktion	$g(x) = f(-x)$	$g(x) = f(-2 \cdot x)$
Geometrische Veränderung	Spiegelung an der y-Achse	Spiegelung an der y-Achse Stauchung
Graphen		

Verschieben:

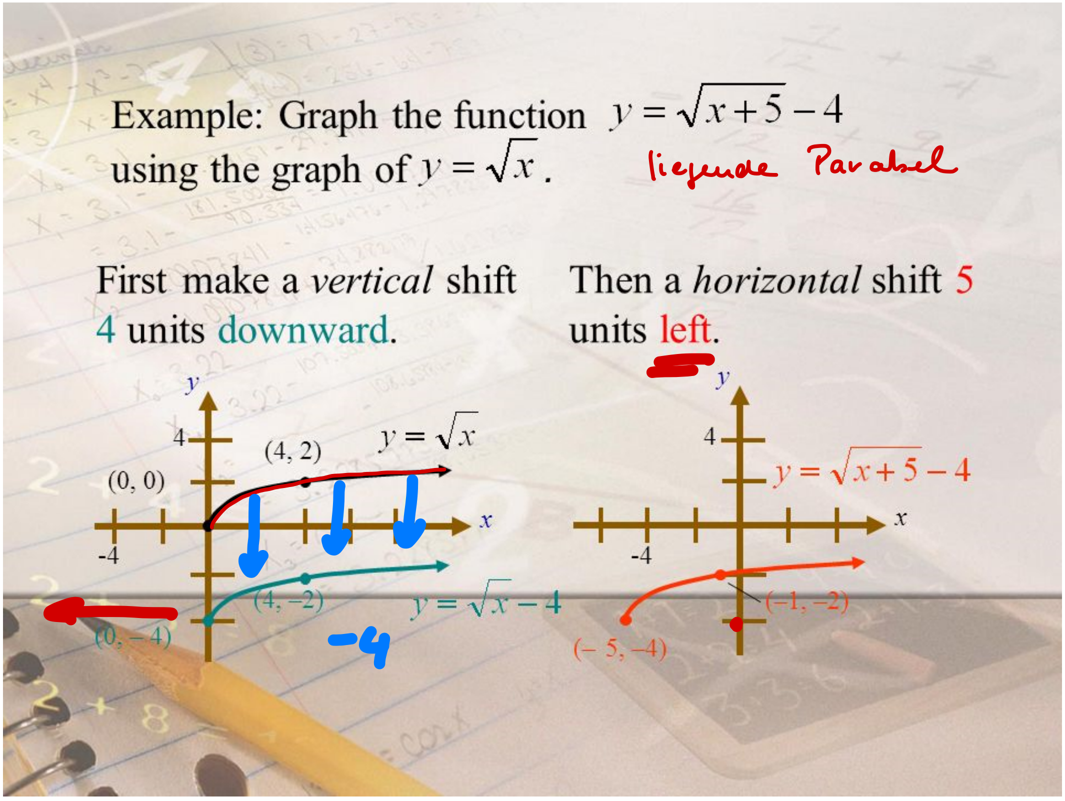
Der Graph einer Funktion kann verschoben werden, indem die zugehörige Funktionsvorschrift ein wenig verändert wird.

- Um einen Funktionsgraph **in y-Richtung** zu verschieben, muss man eine Zahl a zum Funktionsterm addieren oder subtrahieren.
- Eine Verschiebung in **x-Richtung** erreicht man, indem man x durch $x + a$ oder $x - a$ ersetzt.

$a > 0$ nach links rechts ▷ 0

Allgemeine Vorgehenweise

Verschiebung um einen positiven Wert a nach...	**Vorgehen**	**neuer Funktionsterm**
oben	Addition von a	$f(x) + a$
unten	Subtraktion von a	$f(x) - a$
rechts	x durch $x - a$ ersetzen	$f(x - a)$
links	x durch $x + a$ ersetzen	$f(x + a)$



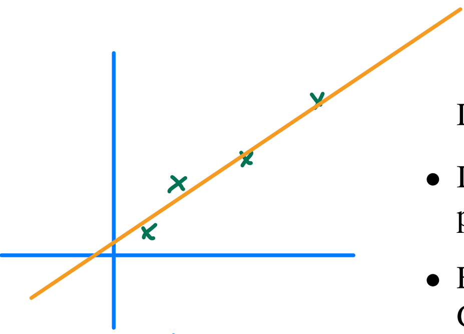
4.5 Implizite Darstellung von Funktionen

Funktionen können unterschiedlich dargestellt sein:

- Am einfachsten ist es, wenn die Funktion durch eine nach der abhängigen Variablen y aufgelöste Funktionsgleichung gegeben ist, z.B.

$$y = f(x) = x^2 - 2$$

  Diese Darstellung nennt man *explizite Darstellung*.



Ausgleichsgerade

- In der Praxis werden funktionale Zusammenhänge oft durch Messreihen experimentell ermittelt und in *Wertetabellen* dargestellt.

- Ein Zusammenhang zwischen zwei Variablen x und y kann auch durch eine Gleichung gegeben sein, die nicht nach y oder x aufgelöst ist. Eine solche Darstellung nennt man *implizite Darstellung*.

  Achtung: In diesem Fall ist es nicht sicher, dass y eine Funktion von x ist.

Beispiel 4.18. Zeichne die Punktmenge

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

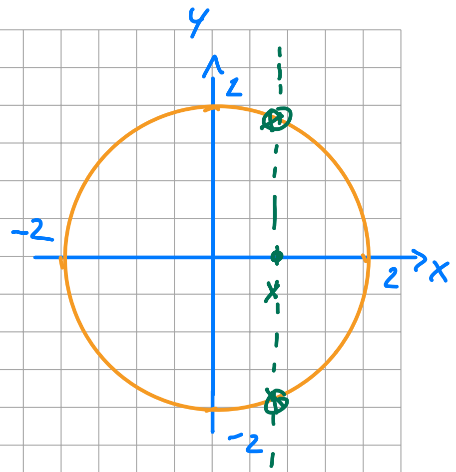
$x^2 + y^2 = 2^2$

Kreis mit Radius 2 um 0

$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = 2 \iff$

Abstand von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist 2

$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Durch diese Gleichung ist keine eindeutige Zuordnung $x \mapsto y$ gegeben. Auflösen der Gleichung nach y ergibt:

y ist keine Funktion von x !

x ist keine Funktion von y !

Eindeutigkeit der Zuordnung ist nicht gegeben !

$x^2 + y^2 = 4 \quad | - x^2$

$y^2 = 4 - x^2 \quad | \sqrt{}$

$y = \pm \sqrt{4 - x^2}$

Zu $x \in \,]-2, 2[$ gibt es zwei zugehörige y-Werte !

Bemerkung 4.19 (Allgemeine Kreis-Gleichung)**.**
Der Kreis mit Radius R um den Mittelpunkt $M = (x_0, y_0)$ im $\mathbb{R}^2$ ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

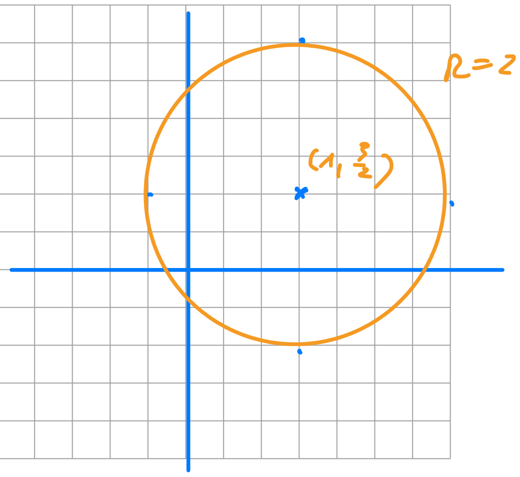
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ liegt auf Kreis mit Radius R um $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$\iff \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right| = R$

$\iff \left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right| = R$

$\iff \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$

$\iff (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

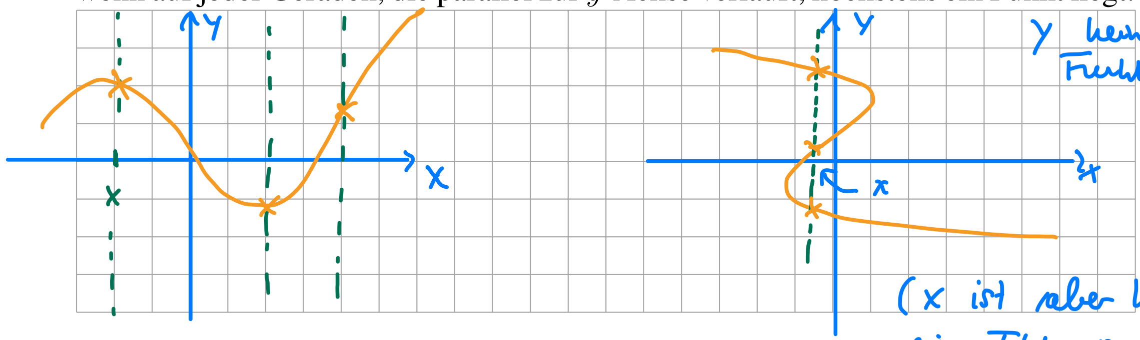


Der Parallelentest für den Graph von Funktionen

Bemerkung 4.20 (Parallelentest)**.**
Eine Punktmenge im $\mathbb{R}^2$ ist genau dann der Graph einer reellen Funktion $y = f(x)$, wenn auf jeder Geraden, die parallel zur y-Achse verläuft, höchstens ein Punkt liegt.

y ist eine Fkt von x

x ist keine Fkt von y



y keine Funktion von x

(x ist aber hier eine Fkt von y)

4.6 Stückweise definierte Funktionen und Stetigkeit

Nicht immer kann man eine Funktion durch eine einzige Funktionsgleichung beschreiben.

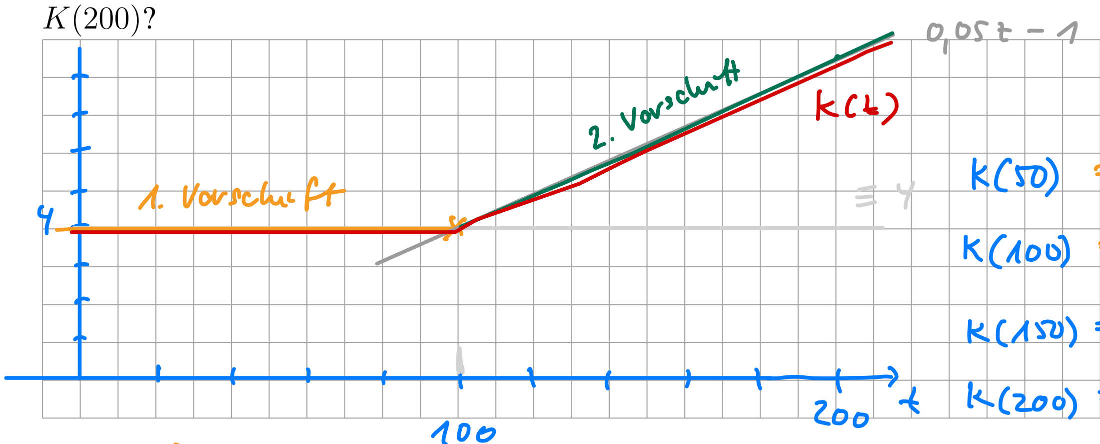
Definition 4.21.
Eine *stückweise (oder abschnittweise) definierte Funktion* ist eine Funktion, bei der der Definitionsbereich aus endlich vielen Teilintervallen besteht, auf denen es jeweils eine eigene Funktionsvorschrift gibt. Die Grenzen der Teilintervalle heißen *Nahtstellen*.

Beispiel 4.22.
Ein Mobilfunkbetreiber bietet folgenden Tarif an: Der Grundpreis pro Monat ist 4 EUR. Darin enthalten sind 100 Freiminuten. Jede weitere Minute kostet 0,05 EUR. Die monatlichen Kosten K in Abhängigkeit von der Gesamtdauer t der Telefongespäche in Minuten betragen:

$$K(t) = \begin{cases} 4 & 0 \le t \le 100 \quad (1) \\ 4 + (t-100)\cdot 0{,}05 = 0{,}05t - 1 & t > 100 \quad (2) \end{cases}$$

t[Min]
K[€]

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $K(t)$. Was ist $K(50)$, $K(100)$, $K(150)$, $K(200)$?



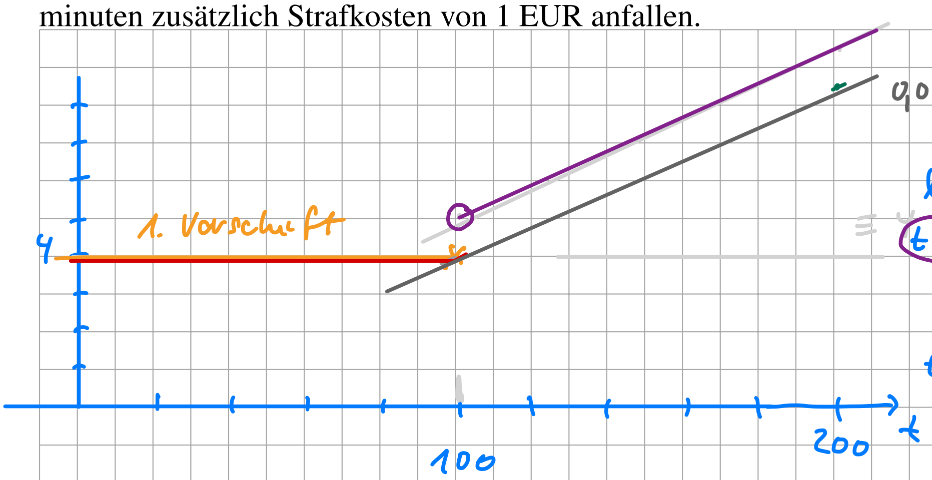
K(50) = 4
K(100) = 4
K(150) = 6,50
K(200) = 9

Einsetzen von 100 in 2. Vorschrift:

$0{,}05 \cdot 100 - 1 = 4 = \underbrace{K(100) = 4}_{\text{Erste Vorschrift = Funktionsvorschrift}}$

Bei $t = 100$ Sprungstelle im Graphen
"Unstetigkeits-stelle"

Beispiel 4.23.
Der Mobilfunktarif wird nun so abgeändert, dass beim Überschreiten der 100 Freiminuten zusätzlich Strafkosten von 1 EUR anfallen.



$\lim\limits_{t>100} K(t) = 5$

$\lim\limits_{t<100} K(t) = 4$

$K(100) = 4$

$K(100) = 4$

2. Vorschrift: $K(t) = 0{,}05t$ $(t > 100)$

100 einsetzen: $0{,}05 \cdot 100 = 5 \neq 4$

Bemerkung 4.24.
Eine Funktion f heißt *stetig* an der Stelle $x_0 \in D$, wenn **beide** der folgenden Aussagen gelten:

Beim Grenzwert ermitteln werden nur $x > x_0$ verwendet

1. $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (*rechtsseitiger Grenzwert, rechtsseitige Stetigkeit*)

   d.h. setzt man für x eine beliebige Folge von Zahlen ein, die alle $> x_0$ sind und sich beliebig nahe an x_0 annähern, so nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Funktionswert an der Stelle x_0 beliebig nah an.

nur $x < x_0$

2. $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (*linksseitiger Grenzwert, linksseitiger Stetigkeit*)

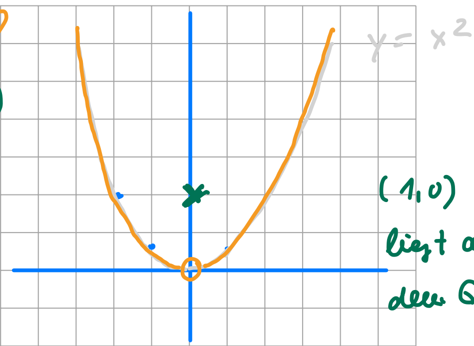
   d.h. setzt man für x eine beliebige Folge von Zahlen ein, die alle $< x_0$ sind und sich beliebig nahe an x_0 annähern, so nähert sich die Folge der Funktionswerte dem Funktionswert an der Stelle x_0 an beliebig nah an.

Ansonsten heißt sie *unstetig* an der Stelle x_0.

Anschaulich: Die Funktion $y = f(x)$ ist stetig an der Stelle x_0, wenn der Graph an der Stelle x_0 keine Sprungstelle (Loch) hat.
Die Funktion $y = f(x)$ heißt *stetig*, wenn sie an allen Stellen $x_0 \in D_f$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 0 \quad (1) \\ 1 & \text{für } x = 0 \quad (2) \end{cases}$$

f ist stetig für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und unstetig an der Stelle $x_0 = 0$



(1,0) liegt auf dem Graphen

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x > 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$

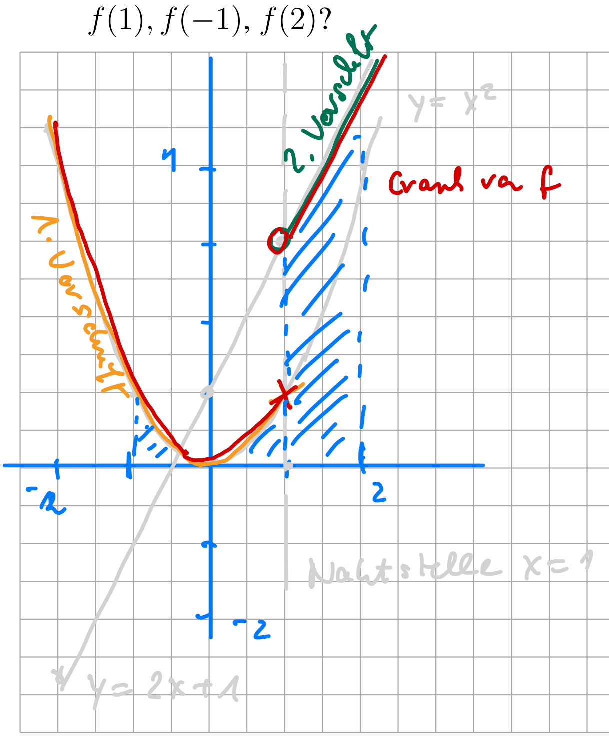
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x < 0} f(x) = 0 \neq$

Beispiel 4.25. Gegeben ist die Funktion

Nahtstelle: $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \quad (1) \\ 2x+1 & \text{für } x > 1 \quad (2) \end{cases}$$

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Wo sind die Nahtstellen? Was ist $f(1), f(-1), f(2)$?



$f(1) = 1^2 = 1$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

2. An welchen Stellen ist f stetig? unstetig?

f ist stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Bei $x = 1$ ist eine Sprungstelle im Graphen von f, dort ist f unstetig.

$f(1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x + 1 = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$

Nicht alle 3 Werte gleich $\Rightarrow$ f unstetig an Stelle $x = 1$

3. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$$

$\int x^2\, dx = \frac{1}{3} x^3 + C$

$\int (2x+1)\, dx = x^2 + x + C$

$= \int_{-1}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{2} f(x)\, dx$

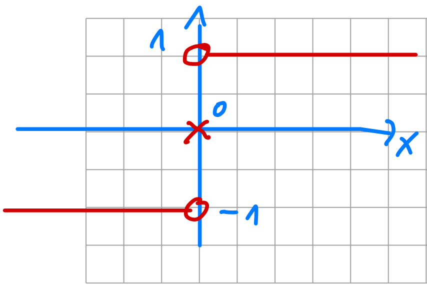
$= \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{-1}^{1} + \left[x^2 + x\right]_{1}^{2}$

$= \frac{1}{3} \cdot (1 + 1) + (4 + 2) - (1 + 1) = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{für } x > 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Beispiel 4.26. Die *Signum-Funktion* ordnet jeder reellen Zahl ihr Vorzeichen zu:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{x}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$



sgn(x) stetig für alle $x \neq 0$,
unstetig bei $x = 0$.

$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \neq \operatorname{sgn}(0) =$ $\qquad \lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq$

Beispiel 4.27.
Für die Coulomb-Reibung $\vec{F}_R$ (Festkörper-Reibung) gilt $\qquad |\vec{F}_R| \sim |\vec{N}|$

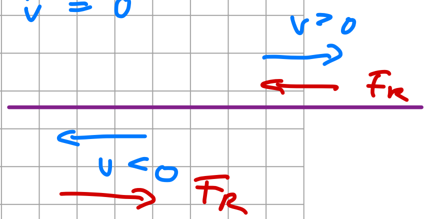
$$|\vec{F}_R| = \mu \cdot N$$

wobei N der Betrag der Normalkraft und μ der Reibkoeffizient ist. Der Betrag $|F_R|$ hängt also nicht von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Körpers ab. Die Richtung ist entgegengesetzt parallel zu $\vec{v}$:

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$: normierter Vektor in Richtung $\vec{v}$ (falls $\vec{v} \neq \vec{0}$)

$$\vec{F}_R = \begin{cases} -\mu \cdot N \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} & \text{falls } |\vec{v}| \neq 0 \\ \vec{0} & \text{falls } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

bei Bewegung auf gerader Linie

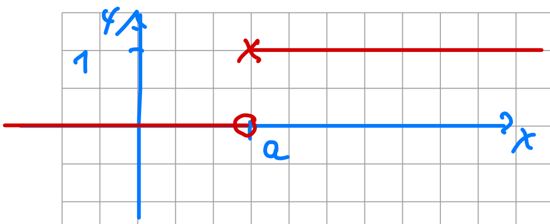


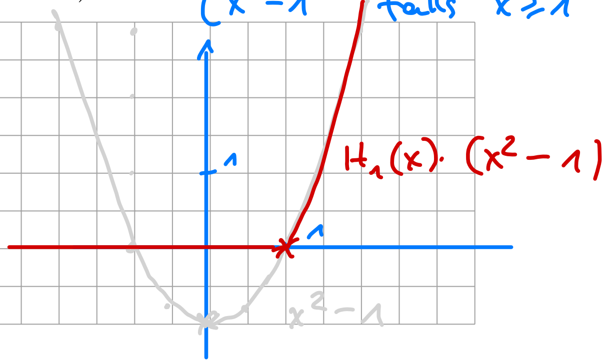
$$F_R = \begin{cases} -\mu \cdot N & \text{falls } v > 0 \\ 0 & \text{falls } v = 0 \\ +\mu \cdot N & \text{falls } v < 0 \end{cases} = -\operatorname{sgn}(v) \cdot \mu \cdot N$$

Beispiel 4.28.
Mit der *Heaviside-Funktion* zu $a \in \mathbb{R}$

$$H_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ 1 & \text{für } x \geq a \end{cases}$$

kann man Einschalt-Vorgänge modellieren, wobei $H_a(x) = 0$ ausgeschaltet und $H_a(x) = 1$ eingeschaltet bedeutet.
Zeichnen Sie den Graphen von $y = H_1(x) \cdot (x^2 - 1)$. $= \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$





Hydraulische Reibung

$$|\vec{F}_R| \sim |\vec{v}|$$

$$|\vec{F}_R| = \beta \cdot |\vec{v}|$$

$\beta > 0$ Reibkonstante

$$\vec{F}_R = -\beta \cdot \vec{v}$$

Bewegung auf gerader Linie $\quad F_R = -\beta \cdot v$

Luftwiderstand (Reibung in Gasen)

$$|\vec{F}_R| \sim |\vec{v}|^2$$

$$|\vec{F}_R| = \gamma \cdot |\vec{v}|^2$$

$\gamma > 0$ Proportionalitäts-konstante

$$\vec{F}_R = -\gamma \cdot |\vec{v}|^{\cancel{2}} \cdot \frac{\vec{v}}{\cancel{|\vec{v}|}} \quad \text{falls } \vec{v} \neq \vec{0}$$

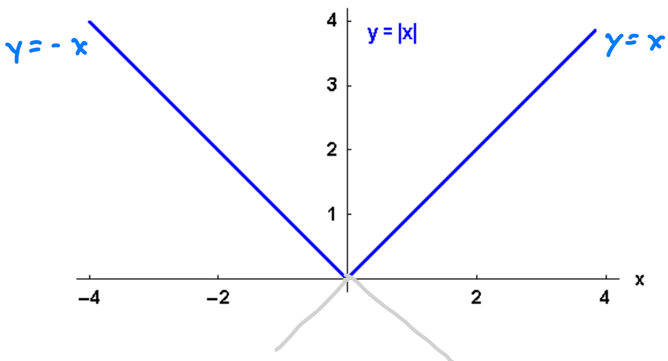
$$\vec{F}_R = -\gamma \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v} \quad \text{gilt auch für } \vec{v} = \vec{0}$$

Bewegung auf gerader Linie:

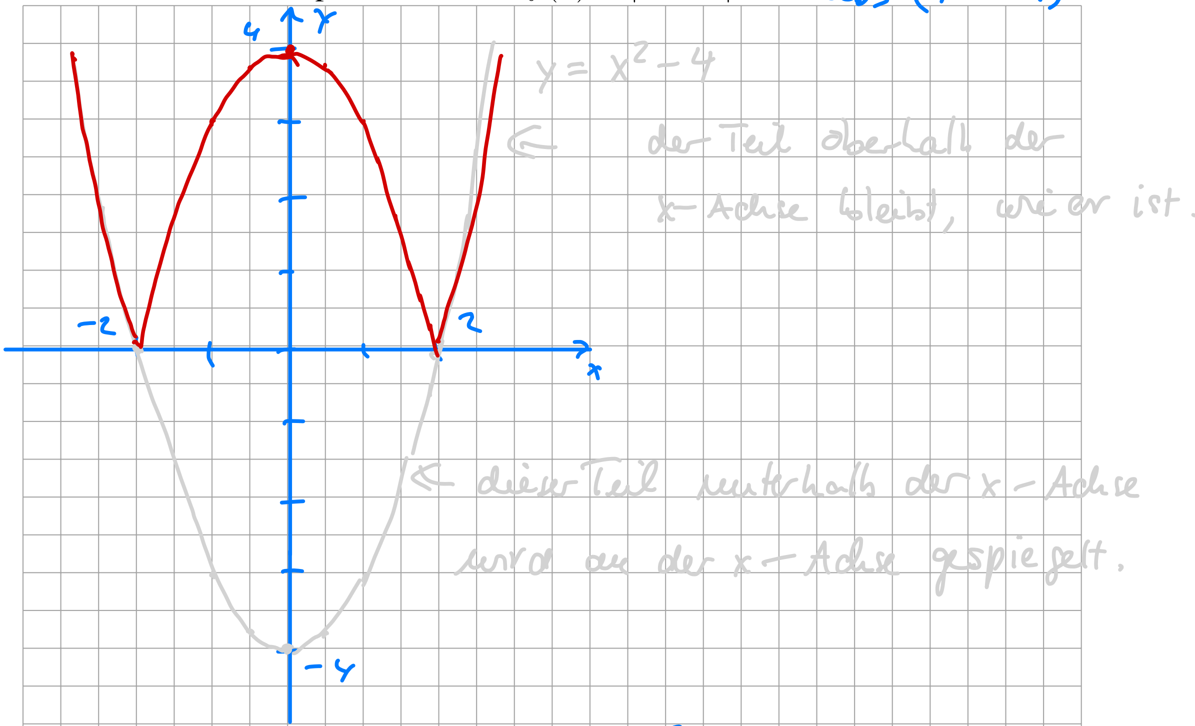
$$F_R = -\operatorname{sgn}(v) \cdot \gamma \cdot |\vec{v}|^2 = -\operatorname{sgn}(v) \cdot \gamma \cdot v^2$$

Beispiel 4.29.
Die *Betragsfunktion* ordnet jeder rellen Zahl ihren Betrag zu: $\operatorname{abs}(x) := |x|$.
Den Betragsfunktion kann man ohne Verwendung der Betragsstriche als stückweise definierte Funktion schreiben:

$$|x| = \operatorname{abs}(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



Aufgabe 4.30.
Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f(x) = |x^2 - 4|$. $= \operatorname{abs}(x^2 - 4)$

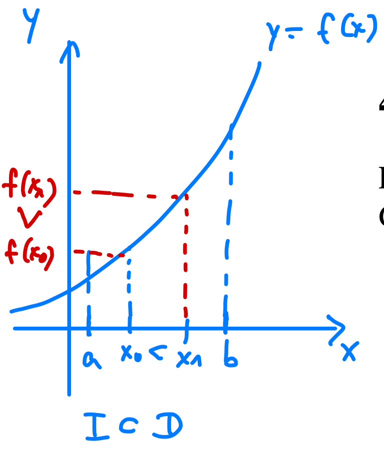


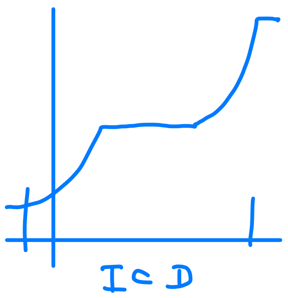
$x^2 - 4 \geq 0$
$x^2 \geq 4 \quad | \sqrt{\ }$
$|x| \geq 2$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{falls } x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4) & \text{falls } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

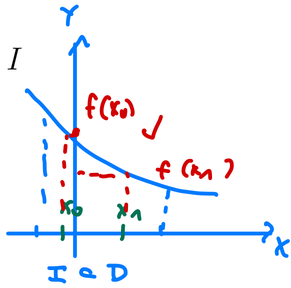
$$= \begin{cases} x^2 - 4 & \text{falls } x \geq 2 \text{ oder } x \leq -2 \\ 4 - x^2 & \text{falls } -2 < |x| < 2 \end{cases}$$





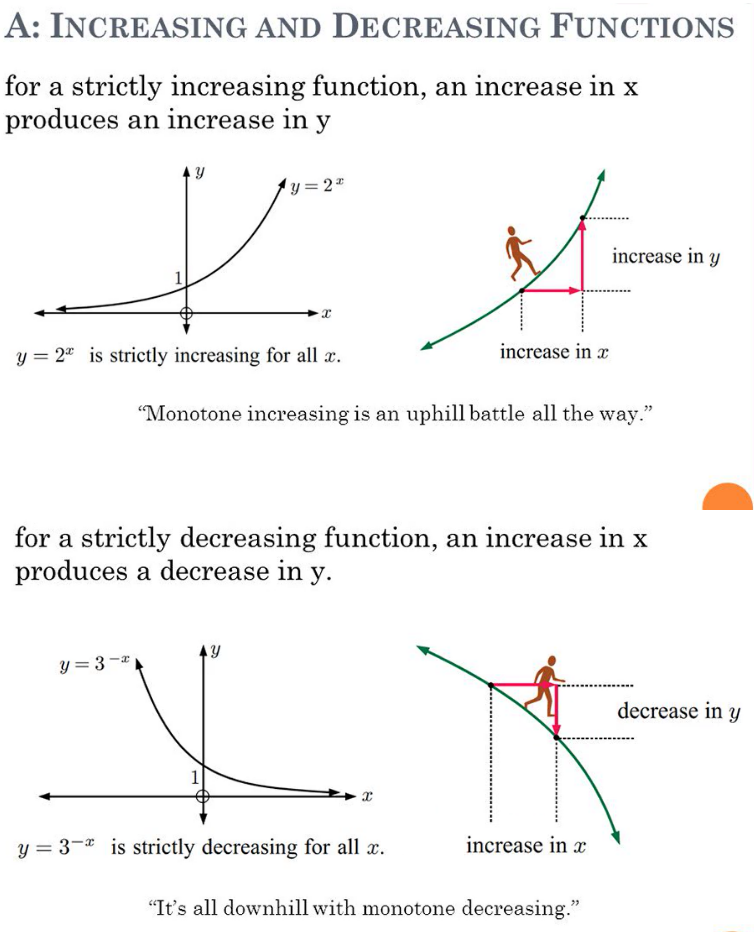
4.7 Monotonie (Steigungsverhalten)

Definition 4.31. Gegeben ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und ein **Intervall** $I \subset D$.
Gilt für alle $x_0, x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$



- $f(x_0) < f(x_1)$, so heißt f *streng monoton steigend (wachsend)* in I
- $f(x_0) \leq f(x_1)$, so heißt f *monoton steigend (wachsend)* in I
- $f(x_0) > f(x_1)$, so heißt f *streng monoton fallend* in I
- $f(x_0) \geq f(x_1)$, so heißt f *monoton fallend* in I

In einem Intervall streng monoton steigende (bzw. fallende) Funktionen sind dort immer auch monoton steigend (bzw. fallend).



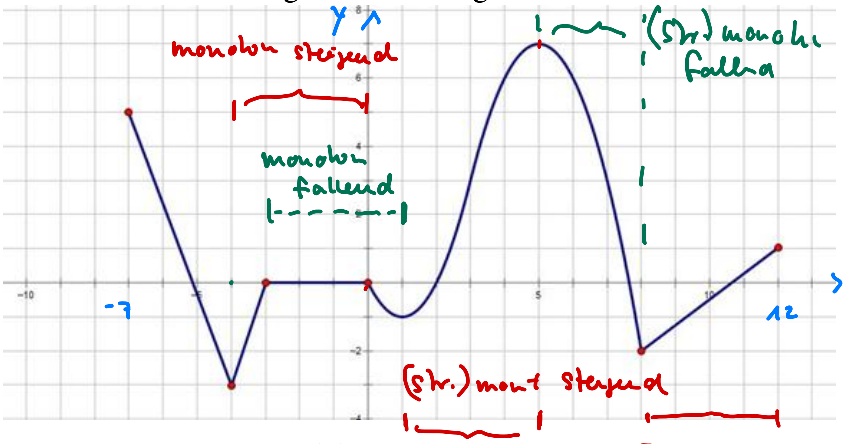
$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$

http://slideplayer.com/slide/5294361/

Bemerkung 4.32 (Erkennen von Monotonie am Graphen)**.**
Bewegt man sich auf dem Graphen einer im Intervall I streng monoton steigenden (bzw. fallenden) Funktion nach rechts, steigen (bzw. fallen) die Funktionswerte.
Jede **Sekante** zu 2 Punkten auf dem Graphen einer im Intervall I streng monoton steigenden (fallenden) Funktion ist eine steigende (fallende) Gerade. Das bedeutet: Macht man einen Schritt (endlicher positiver Länge) auf dem Graphen innerhalb von I von links nach rechts, so steigt man nach oben (unten).
Bei monotonen, aber nicht streng monotonen Funktionen kann es waagrechte Abschnitte geben.

Aufgabe 4.33. Geben Sie größtmögliche Intervalle an, in denen die folgenden Funktionen monoton/ streng monoton steigend bzw. fallend sind.



$D = [-7, 12]$

https://braingenie.ck12.org/skills/105853/practice

(str.) monoton steigend

(str.) monoton fallend

(str.) monoton fallend

(str.) monoton steigend

$[-7, -4]$	(str.) m. fallend
$[-4, 0]$	monoton steigend
$[-4, -3]$	str. m. steigend

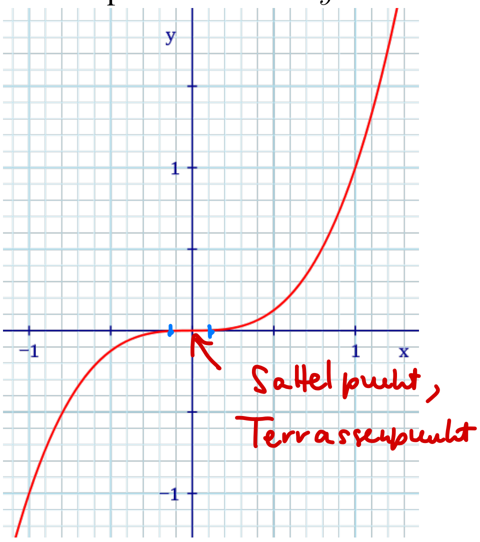
Beispiel 4.34.
Der Graph der Funktion $y = x^3$ ist die *kubische (Normal-)Parabel.*

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$

$\Rightarrow$ waagr. Tangente in $x_0 = 0$



Die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend in $I = \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$

Jeder endlich große Schritt (nicht unendlich klein) nach rechts führt (zumindest ein kleines bisschen) nach oben, obwohl in $x_0 = 0$ eine waagrechte Tangente vorliegt!

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/X_Cubed.svg/470px-X_Cubed.svg.png

Formaler Beweis:

Sei $x_0 < x_1 \quad |^3 \qquad x_0, x_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underbrace{x_0^3}_{= f(x_0)} < \underbrace{x_1^3}_{= f(x_1)}$

Es gibt keine waagrechten Sekanten! Alle Sekanten sind Geraden mit positiver Steigung!

Monotonie und 1. Ableitung

Die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion f an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Mit der ersten Ableitung $f'(x_0)$ können wir also Aussagen über das *Steigungsverhalten* des Graphen einer Funktion in einer Umgebung von x_0 machen:

Satz 4.35.
Wenn die erste Ableitung einer differenzierbaren Funktion f **für alle x-Werte in einem Intervall I** $f'(x) > 0$

Hinreichende Bedingung, aber nicht notwendig. Es kann einzelne Punkte mit $f'(x) = 0$ geben.

- *positiv* ist, dann ist die Funktion auf ganz I *streng monoton wachsend*:
  $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f(x)$ streng monoton wachsend in I
- *negativ* ist, dann ist die Funktion auf ganz I *streng monoton fallend in I*
  $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f(x)$ streng monoton fallend in I

Aufgabe 4.36.
Untersuchen Sie mit der ersten Ableitung, in welchen Intervallen die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

streng monoton steigend (bzw. fallend) ist.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$
$$= 6(x-2)(x+1)$$

$-2 \cdot 1$
$(2 \cdot -1)$

Nullstellen von f': $x = 2$, $x = -1$ ← Hier hat der Graph von f waagrechte Tangenten.

$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8$

$f(0) = 1$

$f(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$

Vorzeichenschema für $f'(x)$:

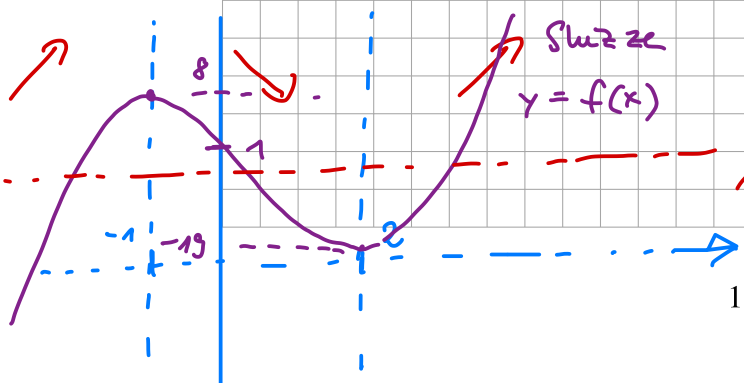
x	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
6	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Faktoren

$f(x)$ ist streng monoton steigend in den Intervallen $]-\infty, -1]$ und $[2, +\infty[$

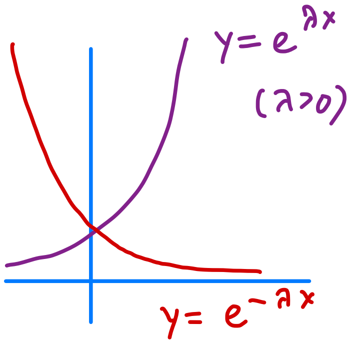
$f(x)$ ist streng monoton fallend im Intervalle $[-1, 2]$

Skizze $y = f(x)$



Niveau bestimmt durch Berechnung von Funktionswerten

Lage der x-Achse allein unbekannt ← aufgrund von $f'(x)$



(Graph von $e^{\lambda x}$ an der y-Achse gespiegelt)

Beispiel 4.37.
Der radioaktive Zerfall gehorcht der Funktionsgleichung

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$ innere Fkt / Kettenregel

wobei t die Zeit, $N(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge radioaktiven Materials, N_0 die Ausgangsmenge zur Zeit $t = 0$ und $\lambda > 0$ die Zerfallskonstante ist. Die Menge an radioaktivem Material nimmt streng monoton ab:

„Beweis" durch Ableiten:

$$\dot{N}(t) = (N'(t)) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = -\underbrace{\lambda N_0 \cdot e^{-\lambda t}}_{>0} < 0$$

für $t \in \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty[$

$\Rightarrow$ $N(t)$ ist streng monoton fallend in $[0, \infty[$

nähert sich der horizontalen Achse an

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\lambda t} = 0$$

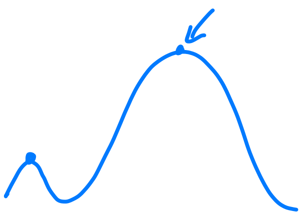
4.8 Extrempunkte - lokale Minima und Maxima

Eine wichtige Anwendung der Differentialrechnung sind Optimierungs- und Extremwertprobleme:

- Wie muss man eine Dose mit vorgegebenem Inhalt (Volumen) bauen, damit die Produktionskosten möglichst gering werden.
- Wie muss man Maschinen belegen, um die vorhandenen Aufträge möglichst schnell ausführen zu können?

Gesucht sind Extremstellen einer Funktion, also Stellen an denen die Funktion Maximal- oder Minimalwerte annimmt.

Definition 4.38. Sei f eine Funktion und $x_0 \in D_f$ im Definitionsbereich von f.



- f hat ein *globales Maximum* an der Stelle x_0, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D_f$.
- f hat ein *globales Minimum* an der Stelle x_0, wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D_f$.

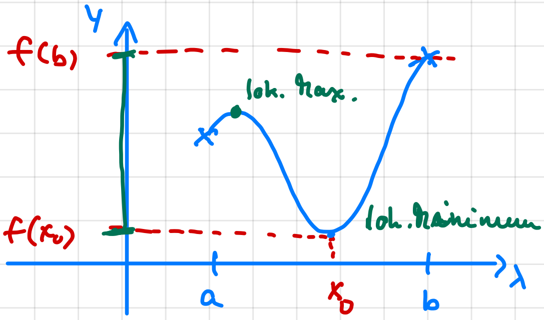
Das bedeutet, dass $f(x_0)$ der größte bzw. kleinste Funktionswert ist, den die Funktion annimmt.

Bemerkung 4.39.
Ist f eine *stetige* Funktion auf einem *abgeschlossenen Intervall* I ($= [a, b]$), dann besitzt f ein globales Maximum und ein globales Minimum in I.

$f(I) := \{ y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ für ein } x \in I \}$

$=$ Wertemenge von f, falls $D_f = I$.

Ist f stetig, ist $f(I)$ ein abgeschlossenes Intervall, falls I ein abgeschlossenes Intervall ist.



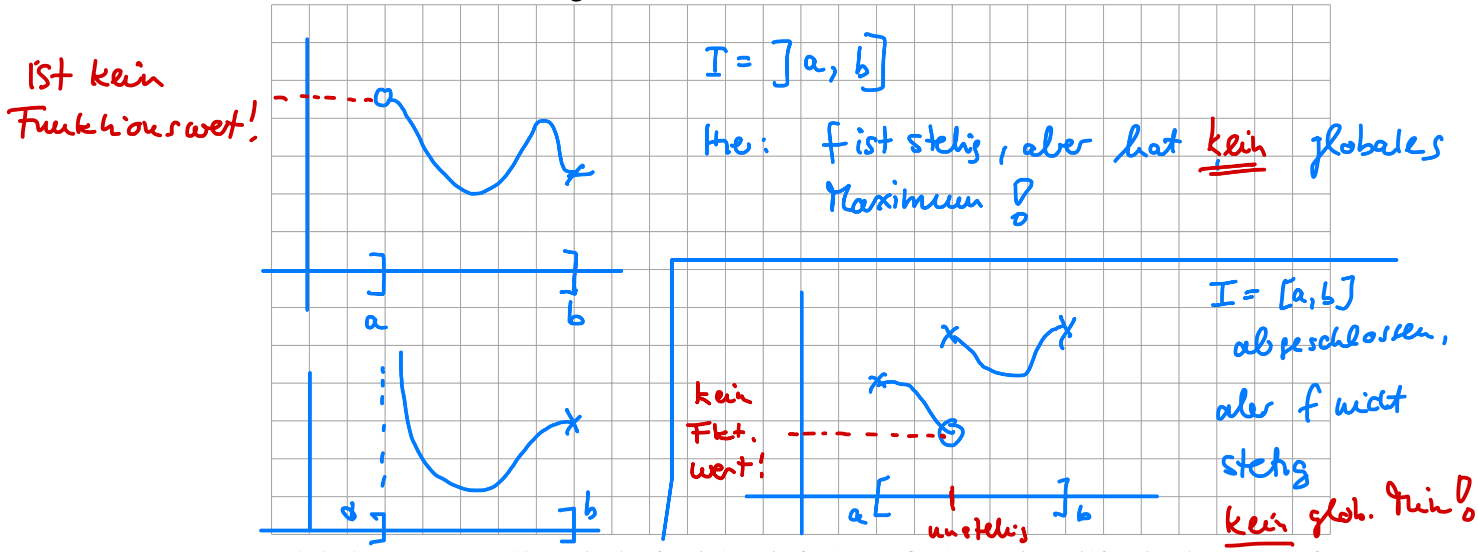
$D_f = [a,b] = I$

x_0 globales Minimum

b globales Maximum

Hier: $f(I) = [f(x_0), f(b)]$

Ist f nicht stetig oder das Intervall nicht abgeschlossen, muss es kein globales Maximum oder Minimum geben.



Globale Extremstellen sind oft nicht einfach zu finden. Ein Hilfsmittel zum Aufspüren sind sogenannte lokale Extremstellen.

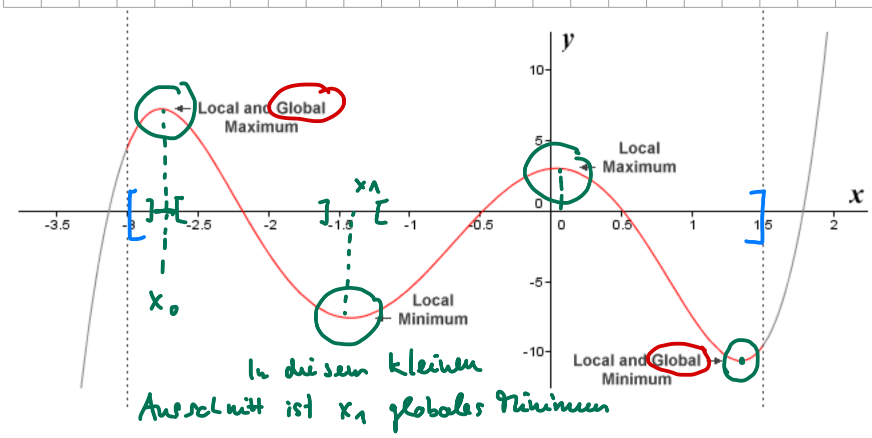
Definition 4.40.
Sei f eine Funktion und $x_0 \in D_f$ im Definitionsbereich von f.

- f hat ein *lokales (relatives) Maximum* an der Stelle x_0, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x in einer Umgebung von x_0
- f hat ein *lokales (relatives) Minimum* an der Stelle x_0, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle x in einer Umgebung von x_0

wobei *in einer Umgebung von x_0* bedeutet: für alle x in einem offenen Intervall $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, das x_0 enthält.

Achtung: Nach dieser Definition kann ein relatives Extremum nicht am Rand des Defintionsbereichs liegen.

$D = [a, b]$, $x_0 = a$. Dann ist $f(x)$ gar nicht in einer Umgebung von x_0 definiert! Nach der formalen Def von lok. Extremum kann x_0 keines sein!

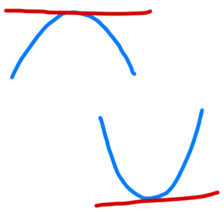


$D_f = [-3, 1.5]$

https://www.technologyuk.net/mathematics/differential-calculus/special-points-in-differential-calculus.shtml

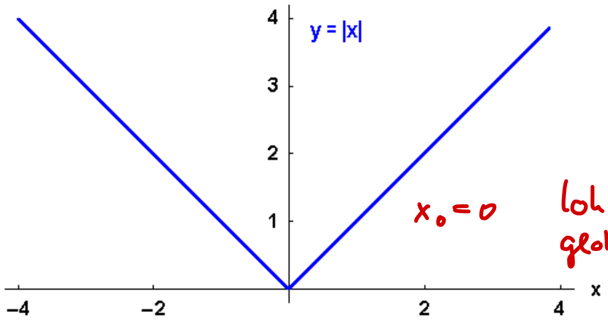
Bemerkung 4.41.
Ist f eine stetige Funktion, die auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ definiert ist, und $x_0 \in [a, b]$ ein globales Extremum von f, so ist x_0 entweder ein lokales Extremum oder ein Randpunkt von $[a, b]$.

Wie findet man lokale Extremwerte?



Bemerkung 4.42.
Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum und existiert dort die Ableitung, dann ist $f'(x_0) = 0$. Mit anderen Worten:
Eine *notwendige Bedingung* für das Vorliegen eines lokalen Extremums an der differenzierbaren Stelle x_0 ist $f'(x_0) = 0$, d.h. der Graph von f hat eine *waagrechte Tangente* in x_0.

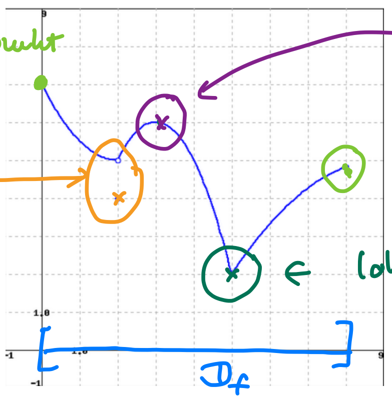
Beispiel 4.43.
Achtung: Die Funktion $f(x) = |x|$ besitzt an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum. Die Funktion hat an der Stelle x_0 aber keine waagrechte Tangente; die Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ ist nicht definiert.



$x_0 = 0$

lokales Minimum
globales Minimum

globales Max.
Randpunkt



lokales Maximum, stationärer Punkt (waagrechte Tangente)

Unstetigkeitsstelle (unkontrollierbar)

Randpunkt

lokales / globales Min.

Ableitung nicht definiert!

D_f

Kandidaten für lokale Extremstellen

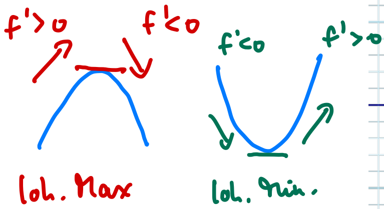
Definition 4.44.
Ein *kritischer Punkt* der Funktion $y = f(x)$ ist eine Stelle x_0 im Inneren des Definitionsbereichs (also nicht am Rand), für die eine der beiden Bedingungen erfüllt ist: f stetig vorausgesetzt!

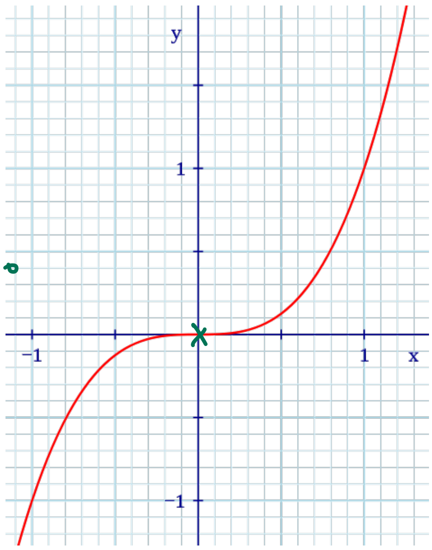
1. die Ableitung von an der Stelle x_0 ist nicht definiert.
2. $f'(x_0) = 0$, d.h. der Graph von f hat in x_0 eine waagrechte Tangente. In diesem Fall heißt x_0 auch *stationärer Punkt*.

Eine *notwendige Bedingung* dafür, dass die stetige Funktion f ein lokales Extremum an der Stelle x_0 hat, ist, dass x_0 ein kritischer Punkt von f ist.
Wir betrachten im Folgenden nur differenzierbare Funktionen; kritische Punkte und somit Kandidaten für lokale Extremstellen sind also die stationären Punkte, d.h. $f'(x_0) = 0$.

Wir betrachten im folgenden nur differenzierbare Funktionen.

Bemerkung 4.45.
Die Funktion $y = x^3$ zeigt: Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist bei differenzierbaren Funktion für das Vorliegen eines Extremums an der Stelle x_0 notwendig, aber sie ist *nicht hinreichend*!
Ob an einer Stelle mit waagrechter Tangente ein lokales Extremum vorliegt und falls ja, ob es ein Maximum oder Minimum ist, muss auf anderem Wege geprüft werden.

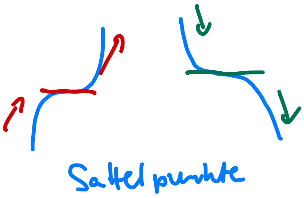




$x_0 = 0$ waagrechte Tangente
stationärer Punkt
kritischer Punkt

Offensichtlich: Kein lokales Extremum!

Ist ein sogenannter
Sattelpunkt
Terrassenpunkt



Bemerkung 4.46.
Um die *lokalen Extremwerte* zu finden, bestimmt man zunächst die kritischen Punkte (Notwendige Bedingung). Man erhält normalerweise eine überschaubare Anzahl von kritischen Punkten.
Dann untersucht man, ob dort ein lokales Extremum oder ein Terrassenpunkt vorliegt.

Die *globalen Extremwerte* einer stetigen Funktion sind entweder lokale Extremwerte oder liegen am Rand des Definitionsbereichs. Um globale Extremwerte zu bestimmen, reicht es, den Funktionswert an den kritischen Punkten zu berechnen und das Verhalten am Rand des Definitionsbereichs zu untersuchen.

Bemerkung 4.47 (Test auf lokales Maximum oder Minimum mit der Ersten Ableitung).
Sei x_0 ein kritischer Punkt von f.

1. Wenn f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt, liegt an der Stelle x_0 ein lokales Extremum vor, und zwar:

   - Wenn f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von + nach - wechselt, so ist x_0 ein lokales Maximum.

- Wenn f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von - nach + wechselt, so ist x_0 ein lokales Minimum.

2. Wenn f' das Vorzeichen an der Stelle x_0 nicht wechselt, so liegt ein Terrassenpunkt und somit kein lokales Extremum vor.

Dieses Kriterium funktioniert auch, wenn $f'(x_0)$ nicht definiert ist.

Aufgabe 4.48.
Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremwerte der Funktion $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ auf dem Intervall $[-1, 2]$.

$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ $\qquad D_f = [-1, 2]$ abgeschlossenes Intervall

f ist stetig

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$ $\qquad$ (differenzierbar)

Kritische Punkte = Stationäre Punkte

$f'(x) = 0 \iff 12x^2(x-1) = 0$

$\iff \underbrace{x = 0}_{\text{doppelte Nullstelle}}$ oder $\underbrace{x = 1}_{\text{einfache Nullstelle}}$

kritische Punkte $\in D_f$

Kandidaten für lokale Extrema: $x = 0$, $x = 1$

Vorzeichenschema für f'

x		0	1	
12	$+$	$+$		$+$
x^2	$+$	$+$		$+$
$x-1$	$-$	$-$		$+$
$f'(x)$	$-$	$-$		$+$

↘ — ↘ — ↗

Damit gilt:

$x = 0$ Sattelpunkte (f' ändert das Vorzeichen NICHT)

$x = 1$ lokales Minimum (f' ändert das Vorzeichen von $-$ und $+$)

Globale Extremwerte können an folgenden Stellen sein:

Randpunkte $\left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array} \right.$ $\qquad f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 = 7$

$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 = 16$ } glob. Max

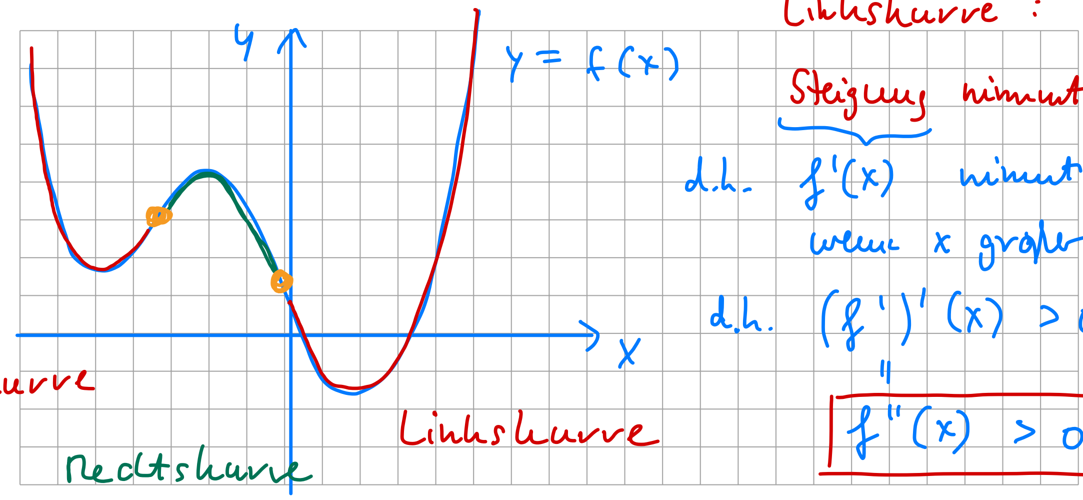
lok. Extremum { 1 $\qquad f(1) = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -1$ } glob. Min.

$f'(x) > 0$ in Intervall I $\Rightarrow$ f str. monoton steigend
$f'(x) < 0$ " " fallend

Fahrtrichtung $\longrightarrow$

4.9 Krümmung und Wendepunkte

Wendepunkt: Wechsel in der Krümmungsrichtung

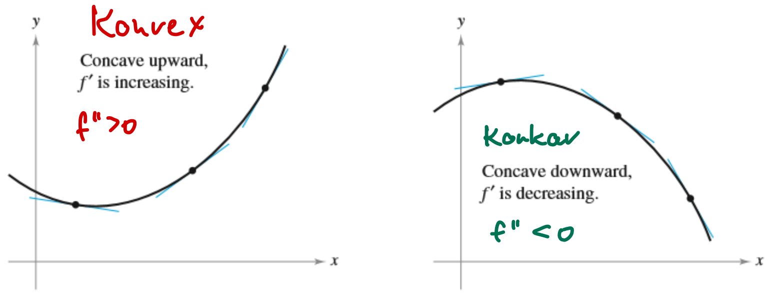


Linkskurve: $\underbrace{\text{Steigung}}$ nimmt zu!
d.h. $f'(x)$ nimmt zu, wenn x größer wird
d.h. $(f')'(x) > 0$
$\boxed{f''(x) > 0}$

entsprechend: Rechtskurve: $f''(x) < 0$

Definition 4.49.
Sei f eine im Intervall I differenzierbare Funktion. Man sagt:

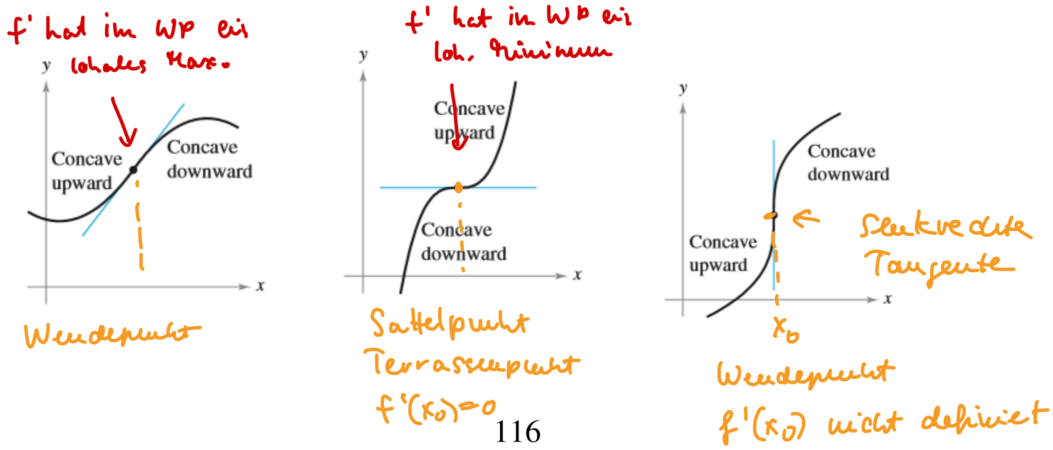
- f ist *links gekrümmt* (konvex) in I, wenn die Steigung des Graphen in I streng monoton zunimmt, also $f'(x)$ streng monoton steigend in I ist. $f''(x) > 0$
- f ist *rechts gekrümmt* (konkav) in I, wenn die Steigung des Graphen in I streng monoton abnimmt, also $f'(x)$ streng monoton fallend in I ist $f''(x) < 0$



(a) The graph of f lies above its tangent lines. (b) The graph of f lies below its tangent lines.
Figure 3.24

http://staff.katyisd.org/sites/thscalculusap/Larson%20Chapter%203%20Textbook/Ch%203.4%20Concavity%20and%202nd%20Derivative%20Test%20p%20190-197.pdf

Definition 4.50.
Ein Punkt x_0 im Inneren des Definitionsbereichs von f heißt *Wendepunkt*, wenn die Krümmung der Funktion f an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt, d.h. an dieser Stelle von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung oder von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung übergeht.



Hier ist f differenzierbar
Weitere Fälle: siehe (*): $f'(x_0)$ gar nicht definiert

Bemerkung 4.51.
Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt
Ist f eine differenzierbare Funktion, die an der Stelle x_0 einen Wendepunkt besitzt, dann gilt:
Entweder ist $f''(x_0)$ nicht definiert oder $f''(x_0) = 0$.

da ein WP ein lokales Extremum von f' ist!

Kandidaten für Wendepunkte sind also die x_0, für die $f''(x_0)$ nicht exisitiert oder für die $f''(x_0) = 0$ ist. $\Leftarrow$ d.h. x_0 kritischer Punkt von f'

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt
Ist x_0 so ein Kandidat für einen Wendepunkt, prüft man, ob die zweite Ableitung an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt. In diesem Fall ist x_0 ein Wendepunkt.

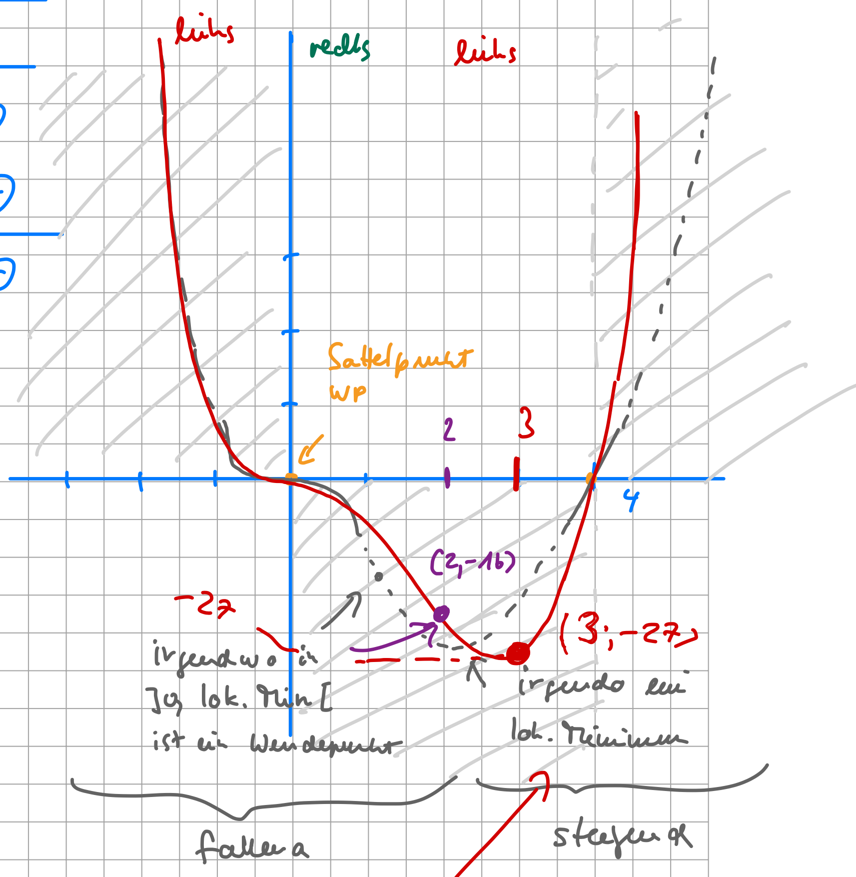
Definition 4.52.
Ein Wendepunkt von f mit waagrechter Tangente heißt *Sattelpunkt* oder *Terrassenpunkt*.

Aufgabe 4.53.
Bestimmen Sie die Nullstellen und untersuchen Sie das Steigungs- und Krümmungsverhalten der Funktion $y = x^4 - 4x^3$, bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima sowie die Wendepunkte und skizzieren Sie den Graphen.

$f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4) = 0$ NSt: $\underset{\text{dreifach}}{x=0}$, $\underset{\text{einfach}}{x=4}$

Vorzeichenschema von f

x		0		4	
x^3	$\ominus$		$\oplus$		$\oplus$
$x-4$	$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$
$f(x)$	$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$



Steigungsverhalten

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$
$= 0 \iff \underset{\text{doppelt}}{x=0}$, $\underset{\text{einfach}}{x=3}$

mit f' bestimmt!

Vorzeichenschema von f'

x		0		3	
$4x^2$	$\oplus$		$\oplus$		$\oplus$
$x-3$	$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$
f'	$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$
	$\searrow$	Sattelpunkt	$\searrow$	lok. Minimum $x=3$	$\nearrow$

$f(3) = -27$

Krümmungsverhalten

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0$ für $\underbrace{x=0,\ x=2}_{\text{einfach}}$

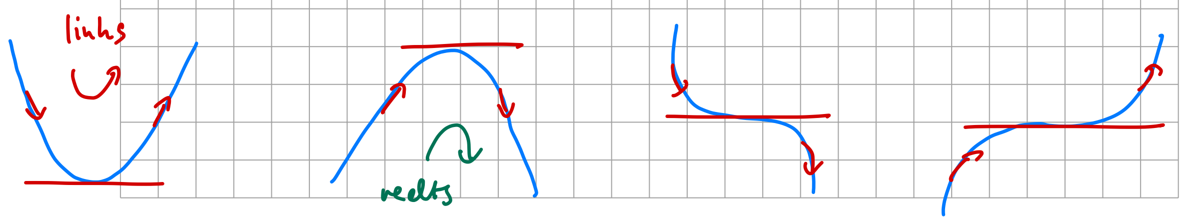
Vorzeichenschema für f''

x		0		2	
$12x$	$\ominus$		$\oplus$		$\oplus$
$x-2$	$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$
$f''(x)$	$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$
	links		rechts		links

$\Rightarrow$ $x=0$, $x=2$ sind Wendepunkte !

$f(2) = -16$

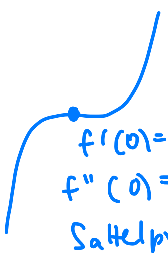
$f'(x_0)=0$



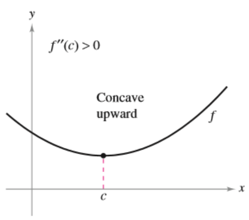
Bemerkung 4.54.
Um zu prüfen, ob an einer Stelle x_0 mit waagrechter Tangente ein Extremum vorliegt, kann man die 2. Ableitung heranziehen:

- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein lokales Minimum.
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 ein lokales Maximum.
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, muss man auf anderem Weg über das Vorliegen eines Extremums entscheiden. !!

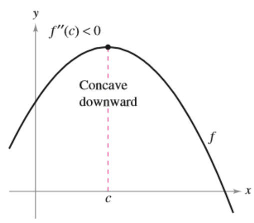
$y = x^3$



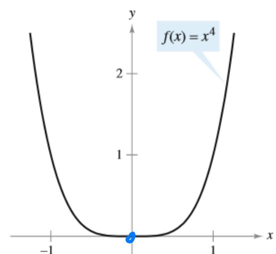
$f'(0)=0$
$f''(0)=0$
Sattelpunkt



If $f'(c) = 0$ and $f''(c) > 0$, $f(c)$ is a relative minimum.



If $f'(c) = 0$ and $f''(c) < 0$, $f(c)$ is a relative maximum.
Figure 3.31



$f''(0) = 0$, but $(0, 0)$ is not a point of inflection.
Figure 3.30

$y = x^4$
$y' = 4x^3$
$y'' = 12x^2$
in 0:
$f'(0) = 0$
$f''(0) = 0$
lokales Minimum !

Bemerkung 4.55.
Um zu prüfen, ob x_0 mit $f''(x_0) = 0$ ein Wendepunkt ist, kann man die 3. Ableitung heranziehen:

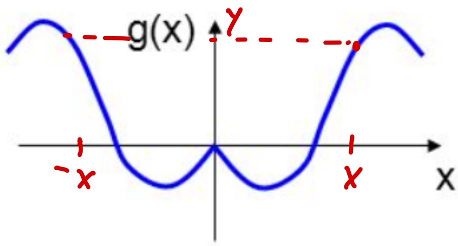
- Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 ein Wendepunkt.
- Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) = 0$, muss man man auf anderem Weg über das Vorliegen eines Wendepunktes entscheiden. ||

4.10 Symmetrie-Eigenschaften

Definition 4.56.
Eine Funktion $f : D \to W$ heißt *achsensymmetrisch* oder *gerade*, wenn für alle $x \in D_f$ gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

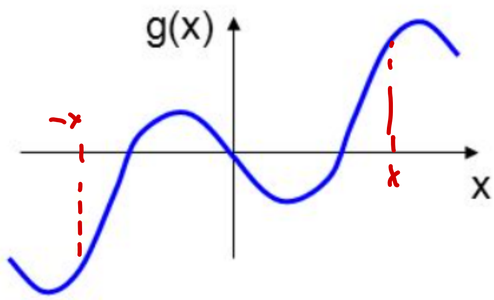
Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.



Eine Funktion $f : D \to W$ heißt *punktsymmetrisch* oder *ungerade*, wenn für alle $x \in D_f$ gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung $(0, 0)$.



Um zu prüfen, ob die Funktion $y = f(x)$ achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch ist, berechnet man $f(-x)$ und schaut, ob es gleich $f(x)$ oder $\cancel{f(-x)}$ ist.
$-f(x)$

Aufgabe 4.57.
Sind die Funktionen $f(x) = -x^3 + 5x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ und $h(x) = -x^2 - x + 1$ gerade, ungerade oder nichts von beidem?

$f(x) = -x^3 + 5x \qquad -f(x) = x^3 - 5x$

$f(-x) = -(-x)^3 + 5\cdot(-x) = x^3 - 5x \quad /\!/ \quad \Rightarrow$ ungerade

$g(x) = \frac{1}{x^2} \;=\; g(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow$ gerade

$h(x) = -x^2 - x + 1 \qquad -h(x) = x^2 + x - 1$

$h(-x) = -(-x)^2 - (-x) + 1$

$= -x^2 + x + 1$

$h(1) = -1 - 1 + 1 = -1$

$h(-1) = -1 + 1 + 1 = +1$

$h(2) = -4 - 2 + 1 = -5$

$h(-2) = -4 + 2 + 1 = -1 \neq {}^{5}_{-5}$

$\Rightarrow$ h ist weder gerade noch ungerade

4.11 Potenzfunktionen

$D_f = \mathbb{R}$ falls $n \geq 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ falls $n < 0$

Definition 4.58.
Die Funktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ heißen *Potenzfunktionen*.

Bemerkung 4.59.
Die *Potenzfunktion* $f(x) = x^n$ ist gerade, wenn n gerade ist, und ungerade, wenn n ungerade ist.

n gerade $\Rightarrow$ $f(-x) = (-x)^n = \overbrace{(-1)^n}^{1} \cdot x^n = x^n = f(x)$

f gerade

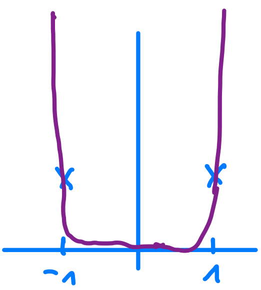
n ungerade $\Rightarrow$ $f(-x) = \underbrace{(-1)^n}_{-1} \cdot x^n = -x^n = -f(x)$

f ungerade

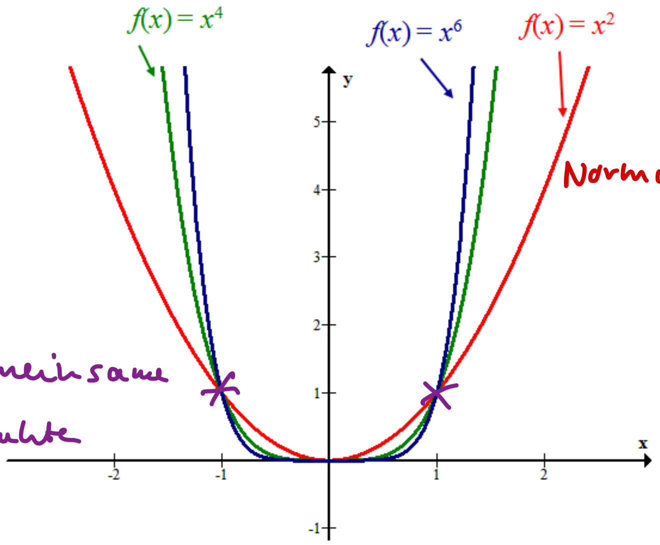
Beispiel 4.60 (Potenzfunktionen mit **positiven geraden** Exponenten).

$f(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$?

n gerade: $f(-1) = 1$



"Plateaubildung" nicht 100% flach ?



$n > 0$ gerade

$f(x) = x^2$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

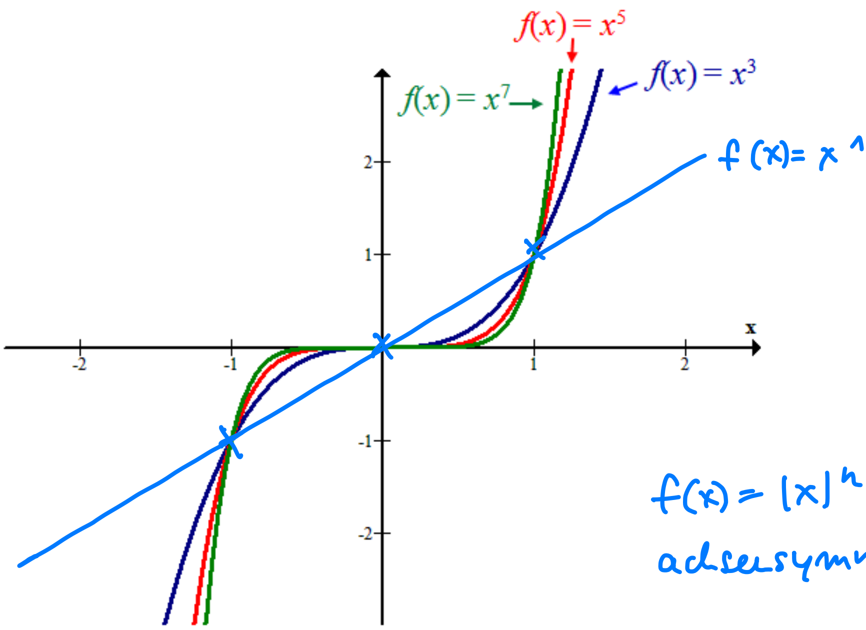
$f(2) = 4$

$f(x) = x^4$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$ viel kleiner als $\frac{1}{4}$

$f(2) = 16$ viel größer als 4

Beispiel 4.61 (Potenzfunktionen mit **positiven ungeraden** Exponenten).



$n = 1$

$f(x) = x$

$n = 3$

$f(x) = x^3$

kubische Parabel

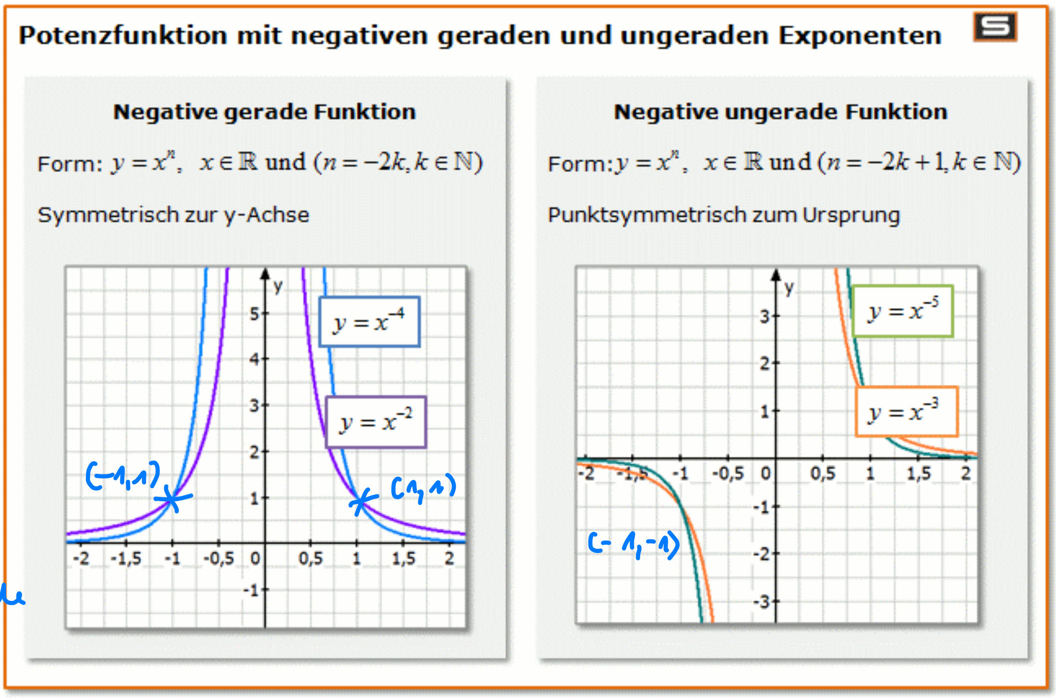
$f(x) = |x|^n$ wären achsensymmetrisch $\forall n \in \mathbb{N}$

$n < 0$

$n = -1$

$f(x) = \frac{1}{x}$

(Normal-) Hyperbel



$f(1) = 1 \quad \forall n$

$f(-1) = 1 \quad n$ gerade

$f(-1) = -1 \quad n$ ungerade

$f(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}} \qquad (-n > 0)$

Umbenennung: $f(x) = \frac{1}{x^k} \qquad (k \in \mathbb{N})$

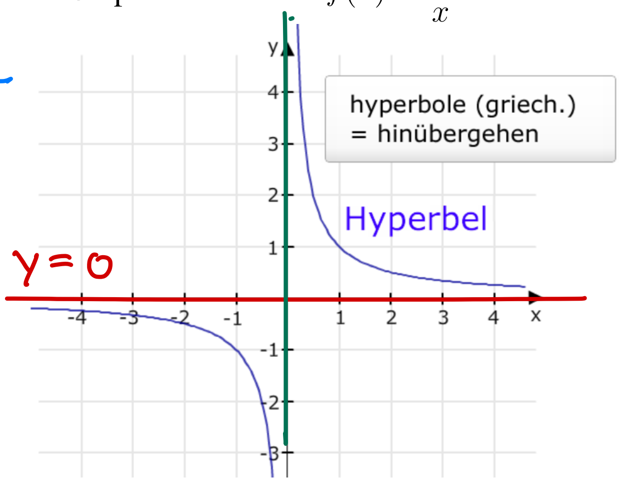
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Hyperbel und umgekehrte Proportionalität

Beispiel 4.62 (Potenzfunktion mit $n = 1$).
Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ heißt *Hyperbel.*

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ von unten

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



$f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ von oben

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Asymptoten (Geraden, denen sich der Graph beliebig nah annähert)

x-Achse: waagrechte Asymptote

y-Achse: senkrechte Asymptote "Pol"

proportional $x \sim y$ $y = \lambda \cdot x$

umgekehrt proportional $y \sim \frac{1}{x}$ $y = \lambda \cdot \frac{1}{x}$

λ Prop. faktor

Bemerkung 4.63.
Besteht zwischen x und y ein funktionaler Zusammenhang der Form

$$y = c \cdot \frac{1}{x}$$

sagt man: y und x sind *umgekehrt proportional*.

$R = \frac{U}{I}$

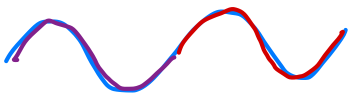
Beispiel 4.64 (Ohmsches Gesetz)**.**
Das Ohmsche Gesetz liefert einen proportionalen Zusammenhang zwischen der Stromstärke I und der Spannung U für einen konstanten Ohmschen Widerstand R, nämlich $U = R \cdot I$.
Interessiert man sich dafür, wie die Stromstärke I bei konstanter Spannung U vom Widerstand R abhängt, erhält man das Gesetz

$$I(R) = \frac{U}{R}$$

$I \sim \frac{1}{R}$

d.h. die Stromstärke ist bei konstanter Spannung umgekehrt proportional zum Widerstand.

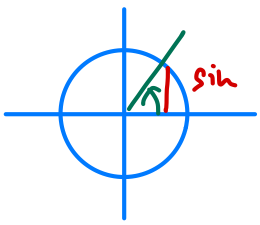
4.12 Periodizität



Definition 4.65.
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch* mit der Periode $p > 0$, wenn

$D = \mathbb{R}$

$$f(x + p) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$



Bsp: $f(x) = \sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

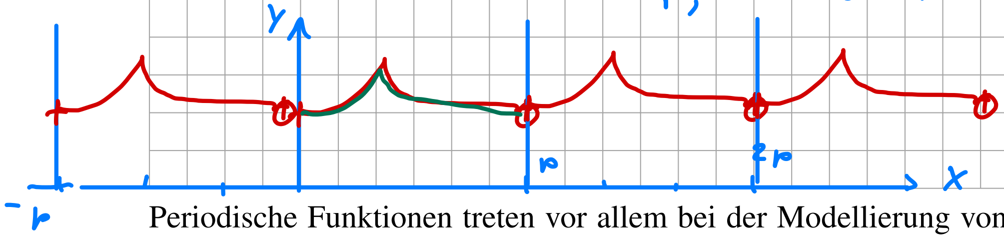
$\Rightarrow$ $= \sin(x + 4\pi)$

$= \sin(x - 2\pi)$

Allgemein: $f(x + kp) = f(x)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

wenn p eine Periode von f ist.

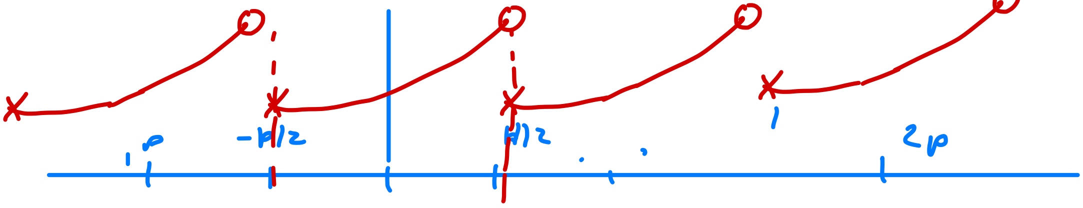
Ist p eine Periode von f, so auch $k \cdot p$ $\forall k \in \mathbb{N}$



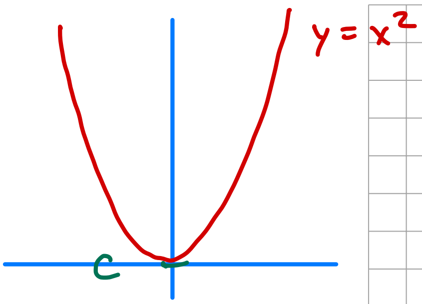
Periodische Funktionen treten vor allem bei der Modellierung von Schwingungen oder anderen periodischen Vorgängen auf. Die Periode ist nicht eindeutig bestimmt.

Definition 4.66.
Die kleinste Periode einer periodischen Funktion heißt *primitive Periode* oder *Schwingungsdauer*. Der Kehrwert der Schwingungsdauer heißt *Frequenz*.

Kennt man f in einem Intervalle der Länge p, so kennt man ihn auf ganz $\mathbb{R}$

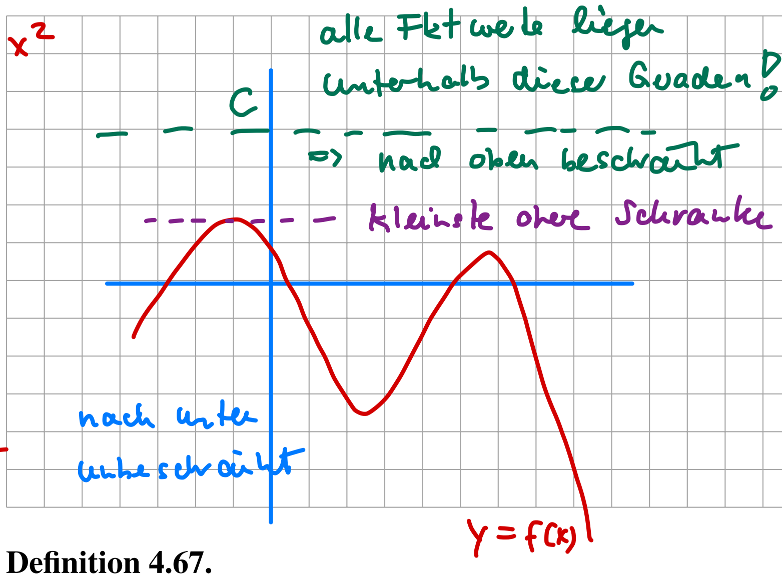


4.13 Beschränktheit



nach unten beschränkt, Werte werden nicht kleiner als 0

C = 0 ist eine untere Schranke



C heißt obere Schranke

es gibt viele obere Schranken, wenn es mindestens 1 gibt.

Definition 4.67.
Beschränktheit von Funktionen heißt, dass die Wertemenge der Funktion beschränkt ist:
Eine Funktion f heißt *nach oben beschränkt* , wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt so dass $W_f \subset (-\infty, C]$. Alle Fkt werte $\leq C$ C obere Schranke
Eine Funktion f heißt *nach unten beschränkt* , wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt so dass $W_f \subset [C, \infty)$. C untere Schranke

Eine Funktion, die nach oben und unten beschränkt ist, heißt *beschränkt*.

Bsp.: $y = \sin(x)$

kleinste obere Schranke: 1

kleinste untere Schranke: −1

beschränkt

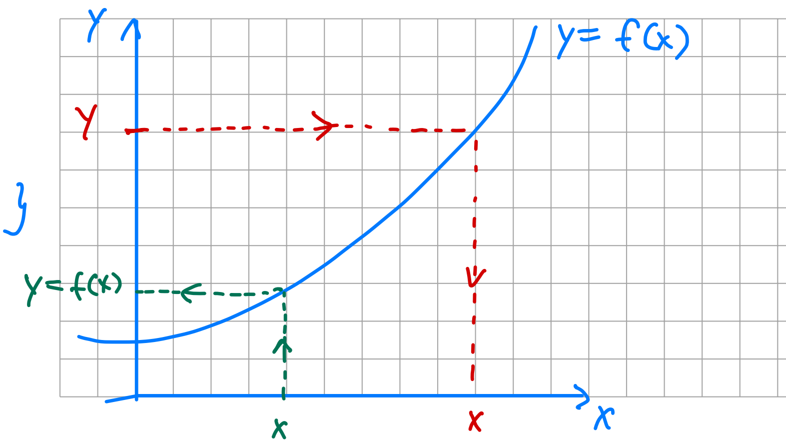
4.14 Funktion und Umkehrfunktion

Für eine Funktion $y = f(x)$ können wir für einen gegebenen x-Wert den zugehörigen y-Wert mit Hilfe der Funktionsvorschrift angeben. Wir können nun umgekehrt fragen: Welche x-Werte haben als Funktionswert einen vorgegebenen y-Wert.

Definition 4.68.
Die *Umkehrfunktion* zu einer Funktion f ist eine Regel, die jedem Element der Wertemenge von f dasjenige Element aus der Definitionsmenge von f zuordnet, das auf dieses Element abgebildet wird. Die Umkehrfunktion macht also rückgängig, was die Funktion f getan hat.
Nicht alle Funktionen haben eine Umkehrfunktion.

$f: D \longrightarrow Z$
$x \longmapsto f(x) = y$

$W_f = \{ y \in Z \mid$ es gibt ein $x \in D$, so dass $y = f(x) \}$ = Bild(f)



Start $x \in D_f$

Ergebnis: $f(x) = y$

Neue Frage:

Angenommen bei $y \in W_f$

Wo bin ich gestartet ??

d.h. gesucht ist $x \in D$ mit $f(x) = y$

Diese Gleichung muss man nach x auflösen.

$y = x^2$

z.B. $y = 4$

$4 = x^2$

$\Rightarrow x = \pm 2$

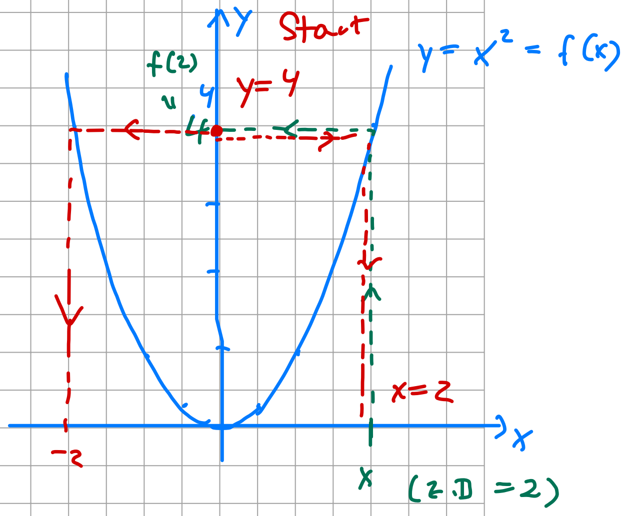
NICHT eindeutig

keine Umkehrfunktion

Falls die Gleichung

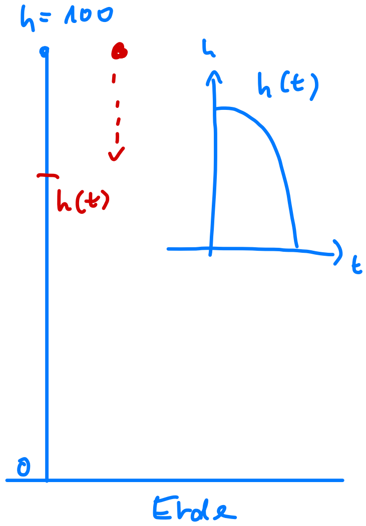
$y = f(x)$

für jedes $y \in Z$ genau eine Lösung $x \in D$ hat, gibt es eine Umkehrfunktion von f. $\boxed{x = f^{-1}(y)}$



Start $y = 4$:

Es gibt 2 $x \in D$ mit $f(x) = 4$, nämlich 2, −2



Beispiel 4.69.
Die Funktion $h(t) = 100 - \frac{1}{2}gt^2$ gibt an, in welcher Höhe [m] sich ein Körper t Sekunden, nachdem er aus einer Höhe von 100 m fallengelassen wurde, befindet. g ist dabei die Erdbeschleunigung.

$g = 10\, m/s^2$

1. In welcher Höhe befindet sich der Körper nach 1 Sekunde?
2. Nach wieviel Sekunden befindet sich der Körper 50 m über dem Boden?
3. Nach wieviel Sekunden schlägt er auf dem Boden auf?
4. Geben Sie allgemein an, nach wieviel Sekunden sich der Körper in der Höhe h [m] über dem Boden befindet. Mit anderen Worten: Geben Sie die Funktionsvorschrift $t(h)$ an.

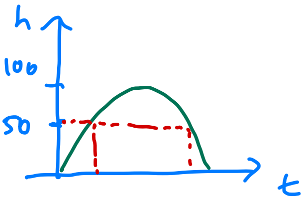
$h(t) = 100 - 5t^2$ h ist Funktion von t

t [s] h [m]

(1) $h(1) = 100 - 5 = 95$ [m]

(Einsetzen in die Funktionsvorschrift)

Senkrechter Wurf nach oben



nicht umkehrbar

(2) Für welches $\underline{t \geq 0}$ ist $h(t) = 50$ [m]

$100 - 5t^2 = 50$

$-5t^2 = -50 \iff t^2 = 10$

Sprechweise:

h^{-1}:

h invers

Mathematische Lösung: $t = \pm\sqrt{10}$

$\approx \pm 3{,}16$

Physikalisch sinnvoll ist nur $t = \sqrt{10} = 3{,}16$ [s]

Schreibweise mit Hilfe von Umkehrfunktionen

$$h^{-1}(50) = \sqrt{10} \approx 3{,}16$$

$D_h \subset \mathbb{R}_0^+$

(3) Für welches $t \geq 0$ ist

$$h(t) = 0$$

$$100 - 5t^2 = 0$$

$$t^2 = 20 \qquad t = \sqrt{20} \approx 4{,}47 \text{ [s]}$$

nur eine Lösung $t \geq 0$

Physikalisch sinnvoller Definitionsbereich von h?

$$D_h = [0, \sqrt{20}]$$

Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} h: [0, \sqrt{20}] &\longrightarrow \overbrace{[0, 100]}^{\text{Wertemenge von } h} = W \\ t &\longmapsto 100 - 5t^2 \end{aligned}}$$

(4) Frage macht nur Sinn für $h \in [0, 100] = W$

Auflösen von $100 - 5t^2 = h$ nach t:

$$5t^2 = 100 - h$$

$$t^2 = 20 - \frac{1}{5}h \qquad t = +\sqrt{20 - \frac{1}{5}\cdot h} = t(h)$$

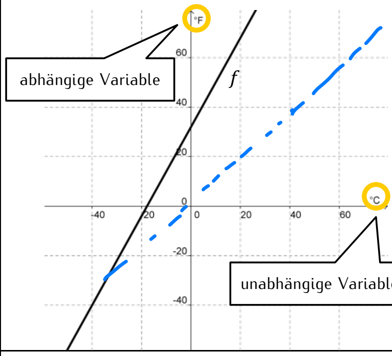
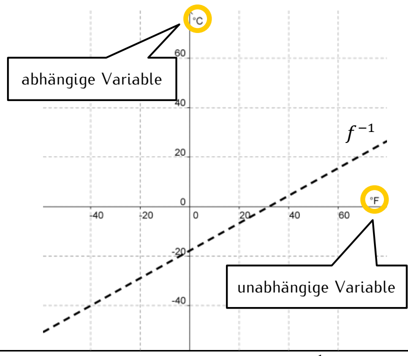
Umkehr-funktion

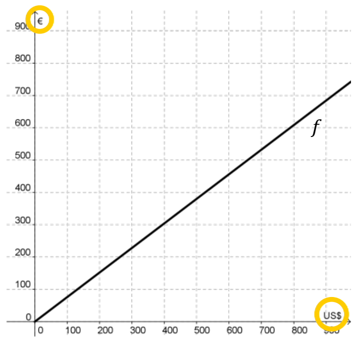
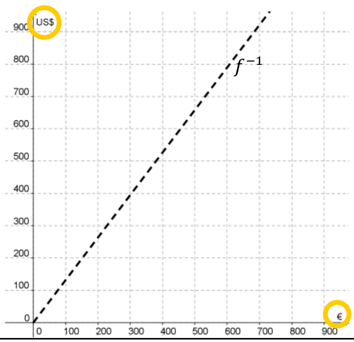
$$\boxed{\begin{aligned} t: [0, 100] &\longrightarrow [0, \sqrt{20}] \\ h &\longmapsto t(h) = \sqrt{20 - \frac{1}{5}h} \end{aligned}}$$

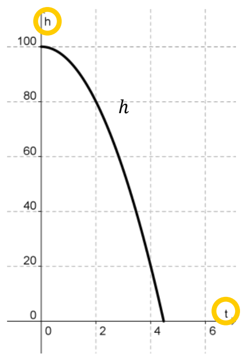
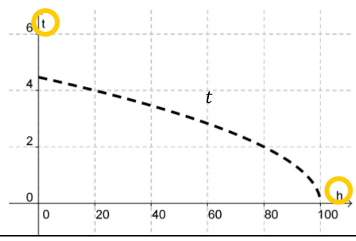
Die folgende Seite enthält Beispiele zur Umkehrung von Funktionen.

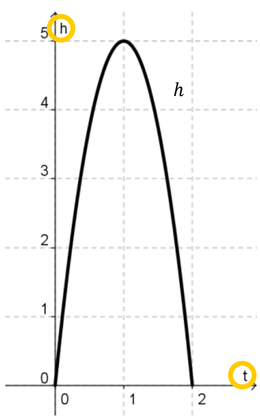
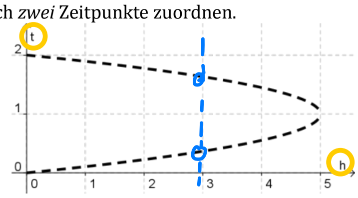
aus: https://lmath.wikispaces.com/file/detail/Umkehrfunktionen+-+Anwendungsbeispiele.pdf

<table>
<tr><th>Sachverhalt</th><th>Funktion f</th><th>Umkehrfunktion f^{-1}</th></tr>
<tr>
<td>Umrechnungsformel zwischen der Temperatur in Grad Celsius (C) und Grad Fahrenheit (F):

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$</td>
<td>$C \mapsto F = f(C) = \frac{9}{5}C + 32$
</td>
<td>$F \mapsto C = f^{-1}(F) = (F - 32) \cdot \frac{5}{9}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Währungskurs:

1 US$ = 0,76 € (31.1.2012)</td>
<td>US$ $\mapsto$ € $= f(\$) = 0{,}76 \cdot \$$
</td>
<td>€ $\mapsto$ US$ $= f^{-1}(€) = \frac{1}{0{,}76} \cdot €$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Zusammenhang zwischen Höhe h (in Meter) und Falldauer t (in Sekunden) eines Körpers bei einem Fall aus 100 m Höhe:

$$h = 100 - 5t^2$$</td>
<td>$t \mapsto h(t) = 100 - 5t^2$
</td>
<td>$h \mapsto t(h) = \sqrt{20 - \frac{h}{5}}$
Nur möglich, weil die Zeit t jedenfalls positiv sein muss, sonst wäre das Ergebnis der Umformung $\pm\sqrt{20 - \frac{h}{5}}$ und die Umkehrfunktion würde nicht existieren (siehe nächstes Beispiel).
</td>
</tr>
<tr>
<td>Höhe h (in Meter) eines mit 10 m/s lotrecht nach oben geworfenen Körpers nach t Sekunden:

$$h = 10t - 5t^2$$</td>
<td>$t \mapsto h(t) = 10t - 5t^2$
</td>
<td>Löst man die Gleichung nach t, so erhält man zwei Lösungen:
$t_1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{h}{5}}$ und $t_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{h}{5}}$
Somit existiert keine Umkehrfunktion (eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung). Das ist auch anschaulich nachvollziehbar: Zwar kann man jedem Zeitpunkt eindeutig eine Höhe zuordnen, aber jeder Höhe zwischen 0 und 5 lassen sich zwei Zeitpunkte zuordnen.

Dieser Zusammenhang lässt sich zwar auch grafisch darstellen, es handelt sich aber nicht um eine Funktion, sondern „nur“ um eine sogenannte Relation, weil die Zuordnung nicht eindeutig ist.</td>
</tr>
</table>

$D = [0,2]$

Definition 4.70.
Damit man eine Funktion umkehren kann, dürfen zwei verschiedene x-Werte aus dem Definitionsbereich nicht denselben Funktionswert haben. Solche Funktionen heißen *eineindeutig*, *injektiv* oder *eins-zu-eins-Funktionen*.
Eine Funktion $f : D \to Z$ ist eineindeutig, wenn gilt:

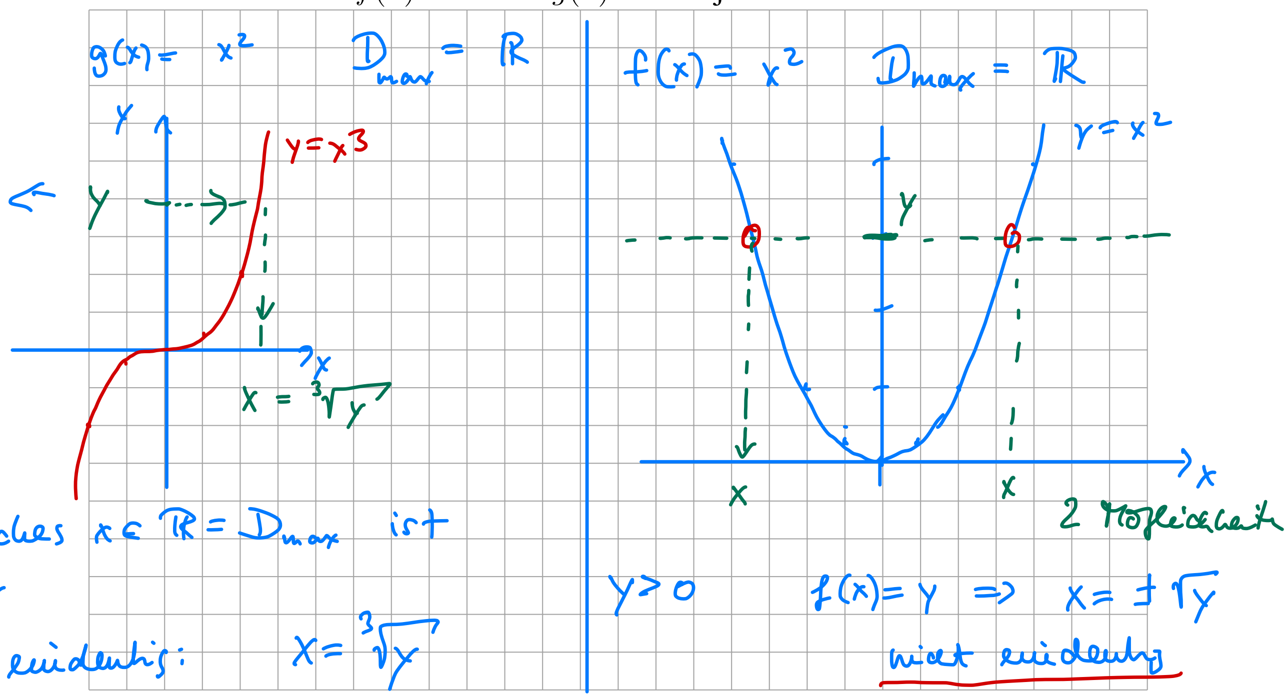
$$\text{Für } x_1 \neq x_2 \in D \text{ gilt: } f(x_1) \neq f(x_2).$$

oder äquivalent ausgedrückt: Gegeben sind $x_1, x_2 \in D$

$$\text{Aus } f(x_1) = f(x_2) \text{ folgt } x_1 = x_2$$

Beispiel 4.71.
Sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ injektiv? Def. bereich wichtig!

g Injektiv



Bemerkung 4.72. Für $D = \mathbb{R}$ nicht injektiv!

1. Eine Funktion ist genau dann eineindeutig (injektiv), wenn jede waagrechte Gerade den Graphen der Funktion in höchstens einem Punkt schneidet.

D Intervall

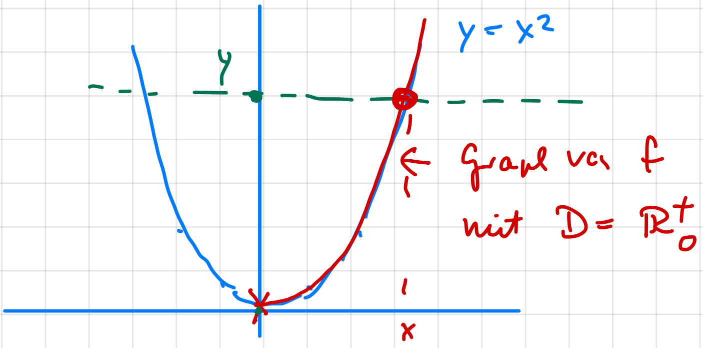
2. Ist $f : D \to Z$ eine *streng monotone Funktion*, so ist f eineindeutig.

Bemerkung 4.73.
Damit die Umkehrfunktion von $f : D \to Z$ auf der ganzen Zielmenge Z definiert ist, muss jedes Element von Z Funktionswert von f sein, d.h. Zielmenge Z und Wertemenge W der Funktion müssen übereinstimmen.
Eine solche Funktion heißt *surjektiv*.
Ist f surjektiv und injektiv, dann ist f umkehrbar. Mit andern Worten:
Eine Funktion $f : D \to Z$ ist genau *umkehrbar* oder *bijektiv*, wenn es zu *jedem* Element $y \in Z$ *genau ein* $x \in D$ gibt mit $y = f(x)$.

bijektiv heißt: injektiv und surjektiv

Bemerkung 4.74.
Funktionen $f : D \to W$, die nicht eineindeutig sind, sind nicht umkehrbar.
Verkleinert man den Definitionsbereich auf geeignete Weise auf eine Teilmenge $\tilde{D} \subset D$, so kann man erreichen, dass die Funtkion $f : \tilde{D} \to W$ eineindeutig wird.

$f(x) = x^2$ $\quad D_f := \mathbb{R}_0^+$



f nur auf $\mathbb{R}_0^+$ betrachtet

ist injektiv

Start mit $y \geq 0$:

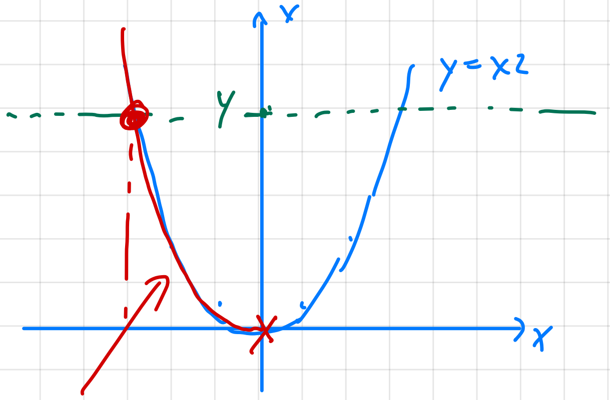
$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y}$$

Wissen: $x \geq 0$ $\quad$ eindeutig

$\in \mathbb{R}_0^+$

Injektiv!

$f(x) = x^2$ mit $D_f := \mathbb{R}_0^-$



Graph von f mit $D_f = \mathbb{R}_0^-$

f nur auf $\mathbb{R}_-^+$ betrachtet

ist ebenfalls injektiv

Starte mit $y \geq 0$

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{y}$$

da nur $x \in \mathbb{R}_0^-$

zulässig (in D_f) sind

injektiv!

$$f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht umkehrbar (obwohl injektiv)

da negative y-Werte nicht in

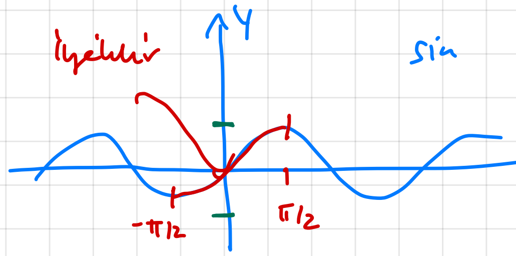
der Wertemenge von f liegen.

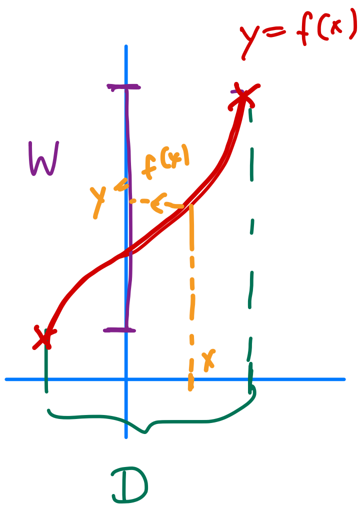
$$f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$
$$x \longmapsto x^2$$

ist umkehrbar (injektiv & surjektiv)

$$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$
$$(\, y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y}\,)$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

als ganzes nicht injektiv





Definition 4.75. Ist $f : D \to W$ umkehrbar, so kann man eine Funktion $g : W \to D$ ~~D~~ folgendermaßen definieren:
Für $y \in W$ sei $x \in D$ dasjenige eindeutig bestimmte x mit $f(x) = y$. Wir setzen $g(y) = x$, d.h. der Funktionswert der Funktion g an der Stelle y ist x.
Die Funktion g heißt *Umkehrfunktion von f*.
Schreibweise: f^{-1} f invers
Es gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in D$$

und

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in W$$

Die Umkehrfunktion zu einer Funktion macht die Wirkung dieser Funktion rückgängig. Man sagt auch f und f^{-1} sind zueinander invers .

Bemerkung 4.76. *Berechnung der Umkehrfunktion*
Die Umkehrfunktion zu f berechnet man folgendermaßen:

1. Man löst die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf und erhält so eine Gleichung $x = g(y)$. Die Funktion ist umkehrbar, wenn dies im Definitonsbereich D von f eindeutig möglich ist.

2. Nun vertauscht man x und y und bekommt als Gleichung der Umkehrfunktion $y = g(x)$, wobei x die unabhängige Variable ist, wie man das bei Funktionen so gewohnt ist.

Aufgabe 4.77.
Bestmmen Sie die Umkehrfunktion von $g(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$W_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

1

$$y = \frac{2x+3}{x-1} \qquad | \cdot (x-1)$$

$$y \cdot (x-1) = 2x+3$$

$$yx - y = 2x+3 \qquad | -2x + y$$

$$yx - 2x = 3 + y$$

$$x \cdot (y-2) = 3 + y \qquad | : (y-2)$$

$$x = \frac{y+3}{y-2} \qquad \text{falls } y \neq 2$$

$$\frac{2x+3}{x-1} = 2$$

$$\cancel{2x}+3 = \cancel{2x}-2$$

$$3 = -2 \quad ↯$$

eindeutig nach x auflösbar, für $y \neq 2$

$y = 2 \notin W_g$

2

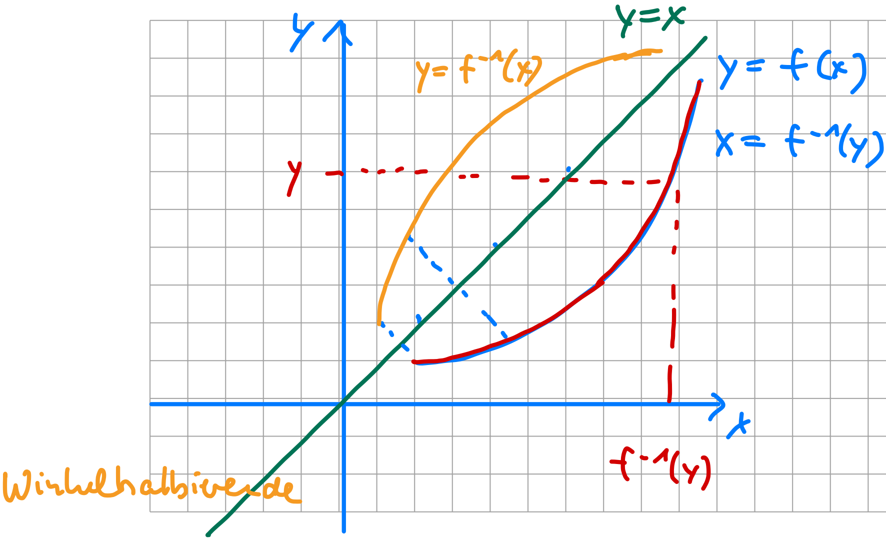
Umbenennen:

$$y = \frac{x+3}{x-2} = g^{-1}(x)$$

$D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\} = W_g$
$W_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\} = D_g$

Immer:
$W_{g^{-1}} = D_g$
$D_{g^{-1}} = W_g$

Bemerkung 4.78. *Graph der Umkehrfunktion*
Den Graphen von f^{-1} erhält man aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden von 1. und 3. Quadranten (d.h. Vertauschen von x und y).



x, y vertauschen $\hat{=}$ x- y-Achse vertauschen $\hat{=}$ An $y = x$ spiegeln

Die Ableitung der Umkehrfunktion

Kennt man die Ableitung der (umkehrbaren) Funktion $y = f(x)$, kann man auch die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen: $y = f^{-1}(x)$

Bemerkung 4.79. Die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} von $f(x)$ ist

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

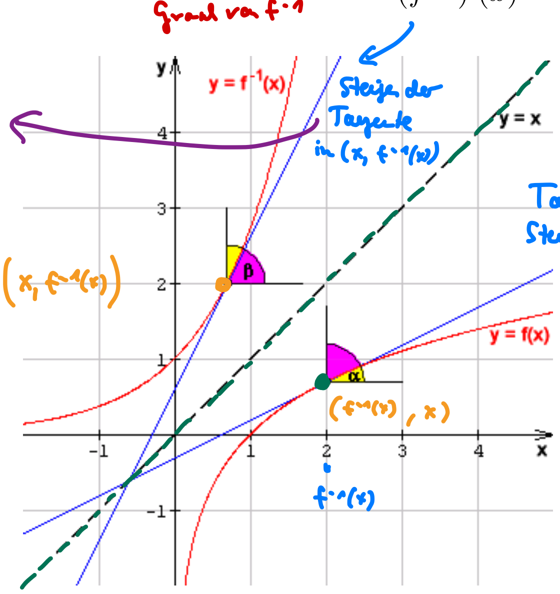
Steigung der Tangente in $(x, f^{-1}(x))$

aus (*) durch Vertauschen von x und y

Steigung $= \frac{1}{m}$

$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$= (f^{-1})'(x)$



Tangenten-Steigung ist hier: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

$= f'(f^{-1}(x))$ (*)

http://de.academic.ru/pictures/dewiki/85/Umkehrregel.png

Bsp: $f(x) = x^2$ $\quad x \in \mathbb{R}_0^+$ $\quad f'(x) = 2x$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$(\sqrt{x})' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Bsp. $f(x) = e^x$ $\quad D = \mathbb{R}, \quad W = \mathbb{R}^+$

$y \in \mathbb{R}^+$ (W) $\qquad y = e^x \quad | \ln$

$\ln y = \ln e^x = x$

$x = \ln y$

Umbenennen: $y = \ln x$ = Umkehrfkt von e^x = $f^{-1}(x)$

$D_{\ln} = \mathbb{R}^+ \quad W_{\ln} = \mathbb{R}$

Ableitung von e^x $\qquad f'(x) = \underline{e^x}$

$\underline{f^{-1}(x) = \ln x}$

$$(\ln x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$