

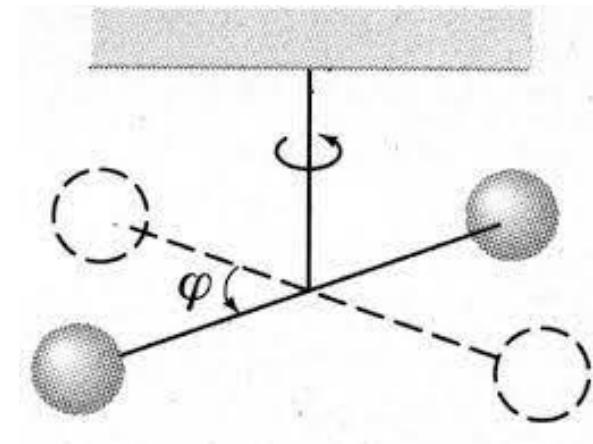
3.3 Beispiele für schwingende Systeme

3.3.1 Torsions- und Drehpendel

Pendelkörper: Starrer Körper, der Beschleunigte Drehbewegung ausführt.

Lösung: a) DGl aufstellen und lösen
b) Lösung von Federpendel
umschreiben auf Rotation.

Masse $m \rightarrow$ Massenträgheitsmoment J
Richtgröße $k \rightarrow$ Winkelrichtgröße D^*



Bildquelle: <http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~jwagner/WS0910/Uebungen/Uebungsblaetter/Uebung14.pdf>

https://www.phywe.de/versuche-sets/hochschulversuche/erzwungene-schwingungen-pohlsches-pendel_10989_12022/

Winkelrichtgröße?

Richtgröße $k = (\text{Kraft } F \text{ auf Masse } m)/\text{Auslenkung } s$

Winkelrichtgröße $D^* = (\text{Drehmoment } M \text{ auf MTM } J)/\text{Drehwinkel } \varphi$

Damit folgt dann:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \rightarrow \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D^*}}$$

Anwendung: Messung von unbekannten Massenträgheitsmomenten J

durch Messung der Schwingungsdauer.

(s. Versuch 3 im Physik-Labor zu Physik 2)

Wichtig: Rückstellkraft bzw. Rückstellmoment muss linear sein!

3.3.2 Fadenpendel, „mathematisches Pendel“

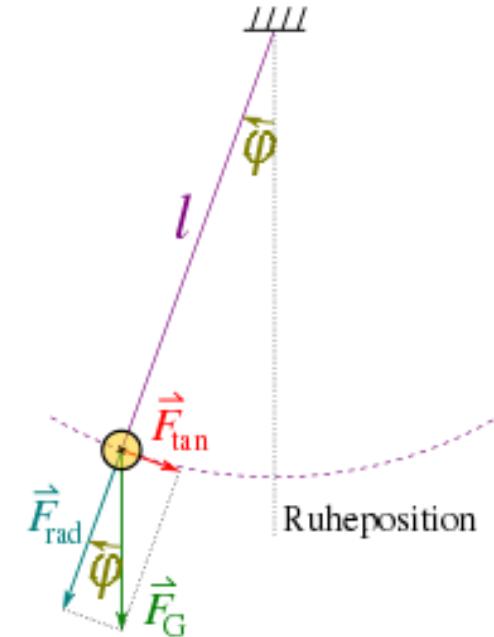
Näherungsannahmen:

- 1.) Fadenmasse $m_F = 0$ (oder $m_F \ll m$)
- 2.) Pendelkörper = Massenpunkt

In m greift dann $F_G = m \cdot g$ an.

Komponente von F_G in Wegrichtung entspricht

der Rückstellkraft: $F_{tan} = mg \sin \varphi = mg \sin \frac{s}{l}$



Vorsicht: Kein lineares Kraftgesetz, also keine harmonische Schwingung!

Aber für $s = \hat{s} \ll l$ gilt näherungsweise: $\sin \varphi = \sin \frac{s}{l} \sim \frac{s}{l}$

Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Pendel

Also folgt für die Rückstellkraft: $F_{tan} = \frac{m \cdot g}{l} \cdot s = k \cdot s$ mit $k = \frac{m \cdot g}{l} = \text{konst.}$

Damit erhält man für **kleine** Amplituden näherungsweise eine harmonische

Schwingung mit: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

Die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ist unabhängig von

- a) der Pendelmasse m !
- b) der Amplitude \hat{s} , solange die Einschränkung $\hat{s} \ll l$ erfüllt ist

Bei großer Amplitude verändert sich die Schwingungsdauer, weil dann

die Abhängigkeit gilt: $F_{tan} \sim \sin \varphi$

3.3.3 Physikalisches (physisches) Pendel

Pendelkörper: Außerhalb des Schwerpunkts aufgehängerter starrer Körper.

Im Schwerpunkt S greift F_G an.

Rückstellkraft (analog zu 3.3.2.):

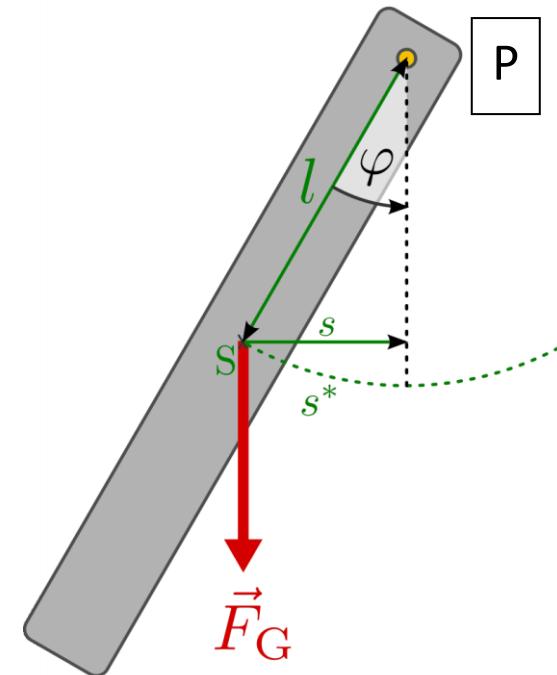
$$F_{tan} = m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

Dies ergibt Rückstellmoment M :

$$M = l \cdot F_{tan} = l \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

Für kleine Amplituden, also wenn $s^* \ll l$, gilt dann wieder: $\sin \varphi \sim \varphi$

Daher näherungsweise: $M = m \cdot g \cdot l \cdot \varphi \quad \rightarrow \quad D^* = \frac{M}{\varphi} = m \cdot g \cdot l$



Bildquelle: <https://www.grund-wissen.de/physik/mechanik/schwingungen-und-wellen/harmonische-schwingungen.html>

Mit J_P = Massenträgheitsmoment (MTM) bezogen auf Achse in P erhält man für die Schwingungsdauer bei kleiner Amplitude:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D^*}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_P}{mgl}}$$

J_P mit Hilfe des Steinerschen Satzes aus J_S : $J_P = J_S + ml^2$

Definition: „**Reduzierte Pendellänge l'** eines phys. Pendels“ ist die Pendellänge eines mathematischen Pendels mit der identischen Schwingungsdauer.

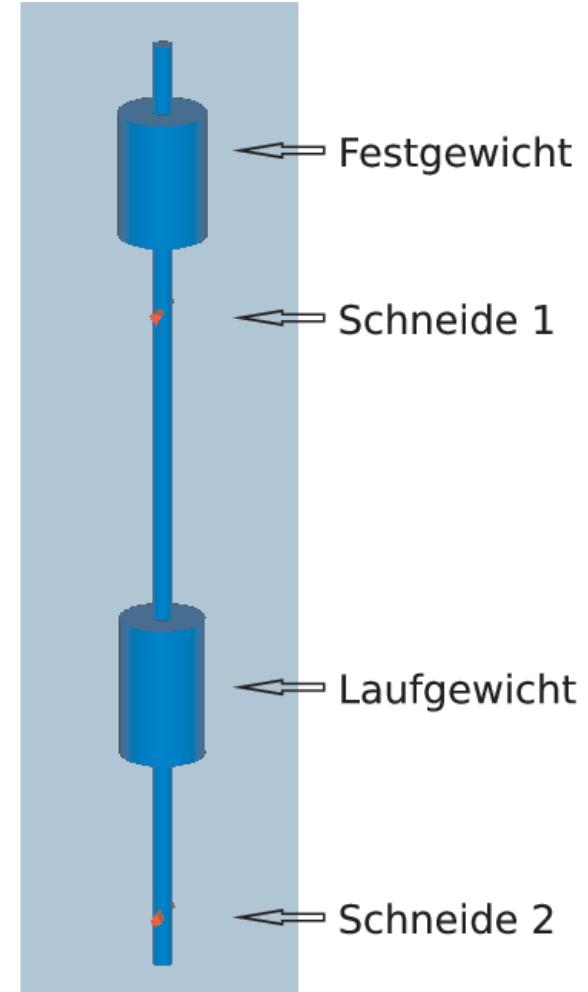
$$T_{math} = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} = T_{Phys} = 2\pi \sqrt{\frac{J_P}{mgl}} \rightarrow l' = \frac{J_P}{ml}$$

☞ Häufig steht statt l die Variable a = Abstand Aufhängepunkt-Schwerpunkt

Definition: „Schwingungsmittelpunkt A“ =
der Punkt, der beim phys. Pendel in der
Ruhelage um die Länge l' unterhalb des
Aufhängepunktes liegt.

Eigenschaften von A:

- 1.) Anstoßen oder Bremsen eines Pendels
in A ergibt geringste Lagerbelastung im
Aufhängepunkt P
(keine seitlichen Lagerkräfte)
- 2.) Phys. Pendel schwingt bei Aufhängung
in A mit gleichem T wie bei Aufhängung
in P. („Reversionspendel“)



Bildquelle: <http://people.physik.hu-berlin.de/~schaefer/Grundpraktikum/M9-Reversionspendel/index.html>

Beispiel: Langer dünner Stab mit Länge L $J_S = \frac{1}{12}mL^2$

Schwingung um P (Stabende)

$$J_P = J_S + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Schwingungsdauer um P:

$$T_P = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{3mg\frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Schwingung um A (Aufhängepunkt um l' unterhalb von P):

Berechnung von l' (red. Pendellänge): $l' = \frac{J_P}{m\frac{L}{2}} = \frac{1}{3}mL^2 \cdot \frac{2}{mL} = \frac{2}{3}L$

Abstand von S zu A (Schwerpunktsabstand): $l' - \frac{1}{2}L = \frac{2}{3}L - \frac{1}{2}L = \frac{L}{6}$

Schwingung um A (MTM):

$$J_A = J_S + m\left[\frac{L}{6}\right]^2 = \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{36}\right]mL^2 = \frac{1}{9}mL^2$$

Schwingungsdauer um A:

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{9 \cdot mg\frac{L}{6}}} = 2\pi \sqrt{\frac{6L}{9g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} = T_P$$

3.3.4. Flüssigkeitsspendel (U-Rohr)

Rohrquerschnitt A , Dichte ρ , Säulen-Länge l

Gleichgewicht: Beide Enden gleich hoch.

„Verschiebung“ um y : Überstand $\Delta h = 2y$

Resultierende rücktreibende Gewichtskraft:

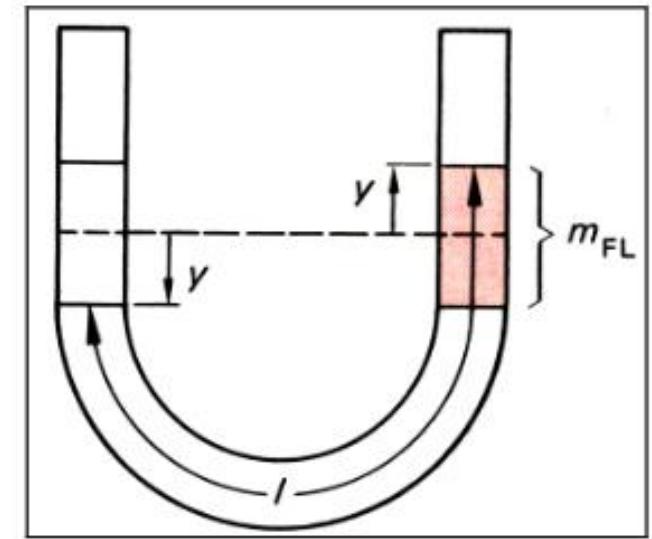
$$\Delta m \cdot g = m_{fl} \cdot g = 2yA\rho \cdot g$$

Gesamte schwingende Masse: $m = l \cdot A \cdot \rho$

Bewegungsgleichung: $F = m \cdot \ddot{y} \rightarrow 2 \cdot y \cdot A \cdot \rho \cdot g = l \cdot A \cdot \rho \cdot \ddot{y}$

Umgestellt ergibt sich: $\ddot{y} = 2 \cdot y \cdot g \cdot l^{-1} = 2 \cdot \frac{g}{l} \cdot y = \omega_0^2 \cdot y$

Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}}$ bzw. Schwingungsdauer: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}}$



Bildquelle: https://qnap.e3.physik.tu-dortmund.de/suter/Vorlesung/Physik_B3_SS03/4.3_Systeme.pdf