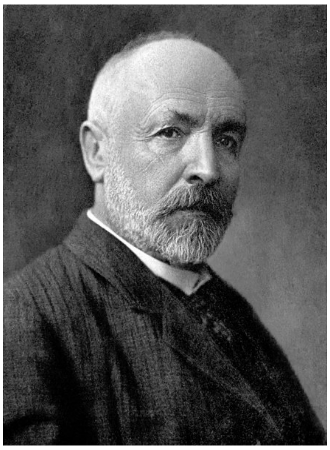
Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Grundzüge der Mengenlehre



Definition 1.1 (Mengendefinition nach Cantor, 1845-1918).
Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die Objekte, aus denen eine Menge M besteht, heißen *Elemente* von M.

Angabe von Mengen:

- durch Aufzählung (die Reihenfolge spielt keine Rolle!)

$M = \{a, b, c\}$	Menge mit den Elementen a, b, c
$N = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$	Menge, die aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 100 besteht
$X = \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge, deren Elemente die natürlichen Zahlen sind

$\{\ \}$

Mengen-klammern

- durch Angabe einer definierenden Eigenschaft:

  A = Menge aller Mannschaften der Fußballbundesliga der aktuellen Saison

  $B = \{x \mid x \text{ ist ein Monat mit 31 Tagen}\}$

  Man sagt: B ist die Menge aller (Objekte) x mit der Eigenschaft, dass x ein Monat mit 31 Tagen ist

$B = \{$Jan, März, Mai, Juli, August, Okt, Dez$\}$

Schreibweisen:

$x \in M$	x ist ein Element der Menge M (gesprochen: x Element von M oder x in M)
$x \notin M$	x ist kein Element der Menge M (gesprochen: x kein Element von M oder x nicht in M)
$\emptyset$ oder $\{\}$	Die *leere Menge* ist die Menge, die kein Element enthält.

$x \in M$

$x \notin M$

$\{\} = \emptyset$

$\emptyset \notin \emptyset$

$\emptyset$ enthält kein Element!

Aufgabe 1.2.
Setzen Sie das richtige Zeichen $\in$ oder $\notin$ ein:

$$0 \quad \notin \quad \emptyset$$

Definition 1.3 (Vergleichsoperatoren für Mengen)**.**

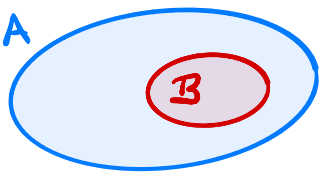
$A \subset B$
$A \subseteq B$
$A = B$ möglich!

$A \subset B$	Die Menge A ist eine *Teilmenge* von B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist, oder anders ausgedrückt: $x \in A \Rightarrow x \in B$ (gesprochen: Aus $x \in A$ folgt $x \in B$). *negativ formuliert:* $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ *In der Sprache der Logik:* Um sicher zu sein, dass x Element von B ist, ist es *hinreichend* zu wissen, dass x Element von A ist. Soll x Element von A sein, ist es *notwendig*, dass x Element von B ist.
$A \not\subset B$	Die Menge A ist keine Teilmenge von B. In anderen Worten: Es gibt mindestens ein Element von A, das nicht in B liegt
$A \supset B$	Die Menge A ist eine *Obermenge* von B, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist, also wenn $B \subset A$.
$A \not\supset B$	Die Menge A ist keine Obermenge von B.
$A = B$	Die Mengen A und B heißen gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen, also wenn $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt. Anders ausgedrückt: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ (x ist genau dann ein Element von A, wenn es ein Element von B ist.)
$A \neq B$	Die Mengen A und B sind nicht gleich.

$A \not\subset B$

$A \subsetneqq B$
d.h. $A \subset B$
aber $A \neq B$

Darstellung im Venn-Diagramm:



$B \subset A$

$\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$
Reihenfolge spielt keine Rolle!
$\{1,2,3\} = \{1,1,2,3,3\}$
Mehrfach auftretende Elemente spielen keine Rolle!

Aufgabe 1.4.
Welche Vergleichsoperatoren (Teilmenge, Obermenge, Gleichheit) gelten für folgende Mengen:

1. $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{1,3,5,7\}$

   $B \subset A \quad A \supset B \quad A \neq B \quad A \supsetneqq B$

2. $C = \{3,7,8,11\}$, $D = \{7,8,11,3\}$

   $C = D \quad C \subset D \quad C \subseteq D \quad D \supset C$
   $D \supseteq C$

$\emptyset$
$\shortparallel$

3. $E = \{\}, F = \{0\}, G = \{2, 3, 4\}$

$\emptyset \subset F, \quad \emptyset \subset G \qquad E \neq F \quad E \neq G \quad F \neq G \qquad \emptyset \subset \emptyset$

4. $A = \{1, 1, 2, 2, 3, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$

$A = B \qquad A \subset B, B \subset A \ldots$

$A \cap B = \{3, 4\}$

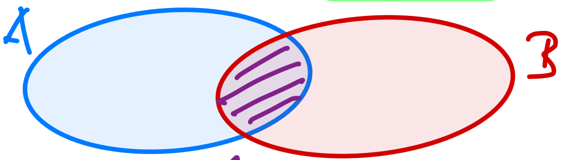
5. $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{3, 4, 5, 6\}$

$X \neq Y \qquad X \not\subset Y \qquad X \not\supset Y$

1.1.1 Verknüpfungen von Mengen (Mengenoperationen)

Definition 1.5.
Aus zwei Mengen A und B kann man mit folgenden Verknüpfungen neue Mengen bilden.

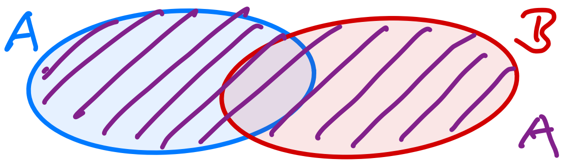
$A \cap B \quad = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
$= $ Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.
Durchschnitt von A und B, gesprochen: *A geschnitten B*



$A \cap B$

$A \cap B = B \cap A$
kommutativ

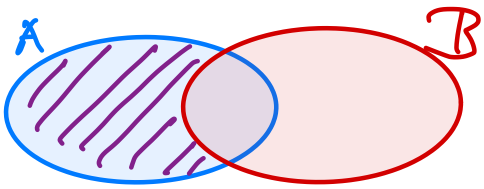
$A \cup B \quad = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
$= $ Menge aller Elemente, die zu A oder zu B gehören (oder zu beiden).
Vereinigung von A und B, gesprochen: *A vereinigt B*



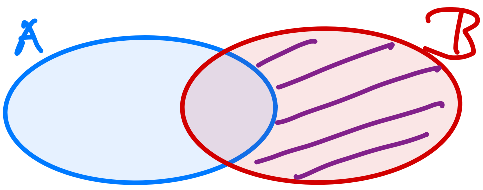
$A \cup B$

$A \cup B = B \cup A$

$A \backslash B \quad = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$
$= $ Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.
Differenzmenge von A und B, gesprochen: *A ohne B*



$A \backslash B$



$B \backslash A$

im Allg. $\quad A \backslash B \neq B \backslash A$

$A \cup B$ Inklusives "Oder"

$x \in A \cup B$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ oder $x \in B$ oder $x \in A \cap B$

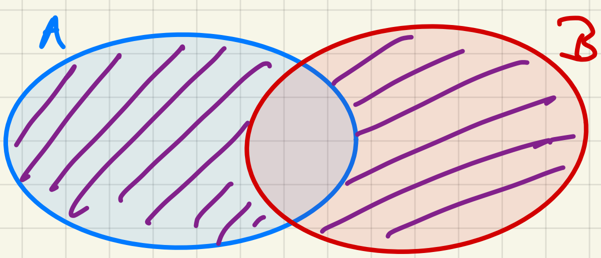
also in beiden Mengen

Umgangssprachlich oft Exklusives "oder"

Aussage A oder Aussage B gilt

bedeutet umgangssprachlich:

A gilt, oder B gilt, aber nicht beides zugleich



$A \dot{\cup} B$

$= \{x \mid x \in A$ oder $x \in B$, aber $x \notin A \cap B\}$

(Verteilung)

Distributivgesetz bei Rechnen mit Zahlen:

$(2+5) \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28$

$\shortparallel$

$2 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 8 + 20 = 28$

Aufgabe 1.6. Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
.
Geben Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$ an.

$A \cup B = \{1, 2, \dots, 8\}$ $\quad$ $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$

$A \cap B = \{4, 5, 6\}$ $\quad$ $B \setminus A = \{7, 8\}$

Bemerkung 1.7 (Einige Rechenregeln).

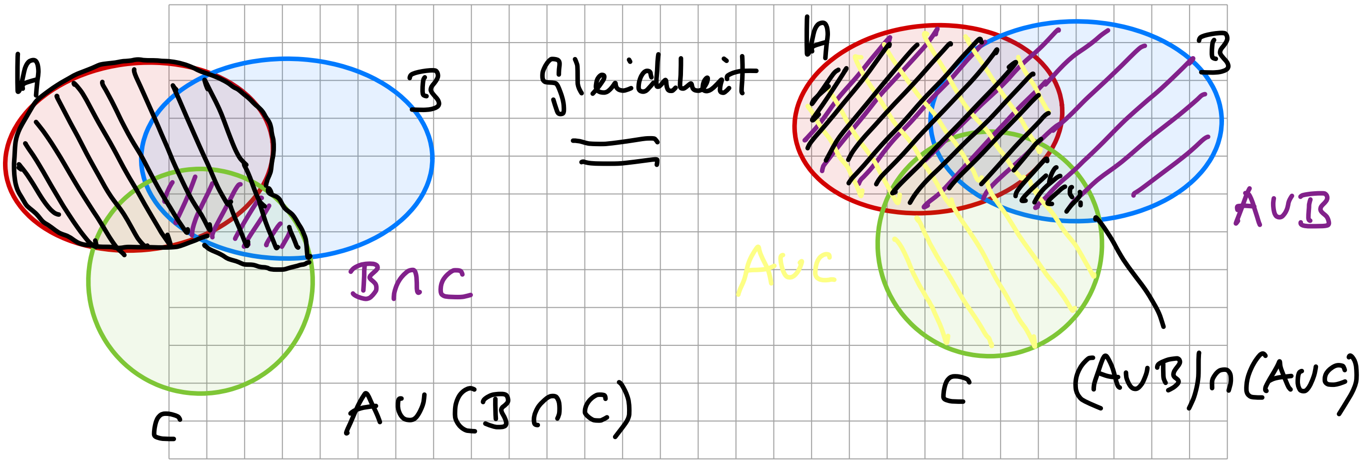
Reihenfolge unwichtig

1. $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität der Vereinigung)
2. $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität der Schnittmenge)

Klammersetzung unwichtig!

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Assoziativität der Vereinigung)
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Assoziativität der Schnittmenge)
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivität I) gilt also
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivität II)
7. $A \cap \emptyset =$ $\emptyset$ $\quad$ $A \cup \emptyset =$ A ,

5



linke Seite von 5

Definition 1.8 (Produktmenge oder Paarmenge).
Die *Produktmenge* (auch: Paarmenge, Kreuzprodukt) von A und B ist die Menge

$A \times B$ "A kreuz B"

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \\ &= \text{Menge aller geordneten Paare } (x, y), \text{ wobei } x \in A \text{ und } y \in B \\ &= \text{Menge aller } \textit{Tupel } (x, y) \text{ von Objekten } x \in A \text{ und } y \in B. \end{aligned}$$

$\in A$ $\quad$ $\in B$

Aufgabe 1.9. Seien $A = \{a, b\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$. Geben Sie $A \times B$ an.

Reihenfolge in den Tupeln ist wichtig!

$A \times B = \{(a, 3); (a, 4); (a, 5); (b, 3); (b, 4); (b, 5)\}$

$\neq$

$B \times A = \{(3, a); (3, b); (4, a); (4, b); (5, a); (5, b)\}$

$(1, 2) \neq (2, 1)$!

Um von der Kommazahl 1,2 zu unterscheiden, schreibt man auch (1|2) (2|1)

1.2 Zahlenmengen

Im Laufe der Schulzeit wird die Menge der Zahlen, mit denen gerechnet wird, sukzessive erweitert. Hier eine Wiederholung der Zahlenarten:

keine Lösung

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der *natürlichen Zahlen*

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der *natürlichen Zahlen* einschließlich 0

$x + 7 = 5$

lösbar

in $\mathbb{N}$ kein Lsg

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der *ganzen Zahlen*
erweitert die natürlichen Zahlen um die negativen ganzen Zahlen.
Hier kann man uneingeschränkt addieren und subtrahieren!
z.B. gilt $4 - 6 = -2$

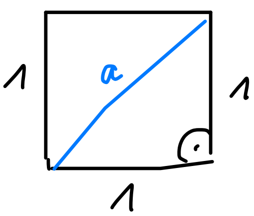
$3 \cdot x = 5$

lösbar $x = 5/3$

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ Menge der *rationalen Zahlen*
Dies sind alle Zahlen, die als Bruch von zwei ganzen Zahlen geschrieben werden können, wobei der Nenner nicht 0 sein darf.
Diese Zahlen kann man auch als endliche oder unendliche, aber periodische Dezimalbrüche schreiben.
Hier kann man fast uneingeschränkt dividieren!

$\frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}66$

wiederholt sich ∞ oft

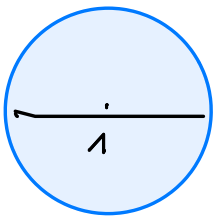


Quadrat

Pythagoras: $1^2 + 1^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$

Symbol: $a = \sqrt{2}$

$\mathbb{R}$ Menge der *reellen Zahlen*, also die Menge aller Dezimalzahlen
Es gibt reelle Zahlen, die man nicht als als Quotient von ganzen Zahlen schreiben kann, z.B. $\sqrt{2}$ oder π. Solche Zahlen heißen auch *irrationale Zahlen*.
Jede reelle Zahl kann man beliebig genau durch rationale Zahlen *appoximieren.* (annähern).



$d = 1$

Umfang

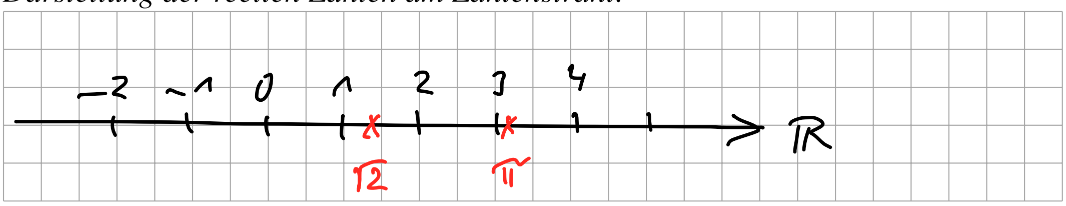
$2r\pi = \pi$ $\notin \mathbb{Q}$

Bemerkung 1.10.
Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$

$\pi \approx 3,14\dots$

$\sqrt{2} \approx 1,42\dots$

Darstellung der reellen Zahlen am Zahlenstrahl:



$x^2 = -1$

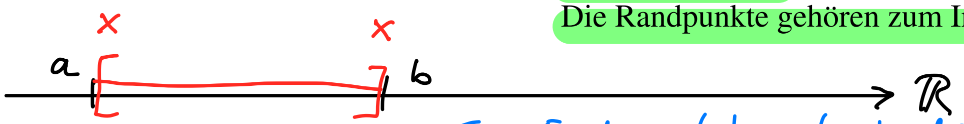
$x := i$ ist ein Lösung

führt zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Definition 1.11 (Intervalle)**.**
Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ definiert man:

[ ]

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *Abgeschlossenes Intervall*
Die Randpunkte gehören zum Intervall



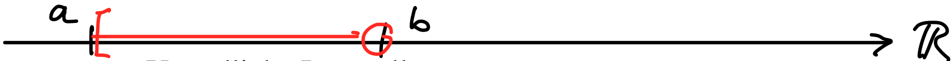
offen:
] [
( )

⟸ Endpunkt gehört dazu

$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *Offenes Intervall*
Die Randpunkte gehören NICHT zum Intervall

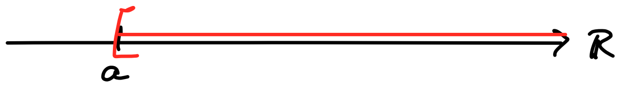
$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ *Halboffenes Intervall*

$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *Halboffenes Intervall*



Unendliche Intervalle:

$[a, \infty[= [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



$]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$]a, \infty[= (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

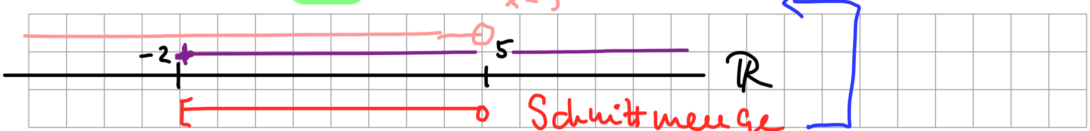
$]-\infty, a[= (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ∞ ist keine reelle Zahl !

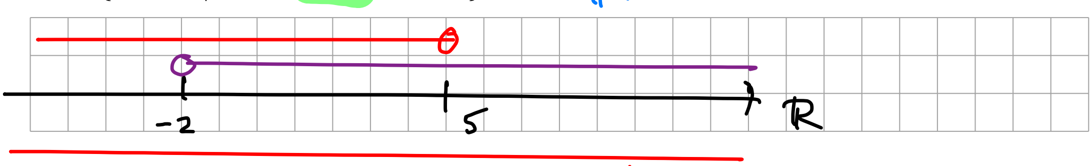
$]0, \infty[= \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ Menge der positiven reellen Zahlen
$[0, \infty[= \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$ Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich 0
$]-\infty, 0[= \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ Menge der negativen reellen Zahlen
$]-\infty, 0] = \mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$ Menge der negativen reellen Zahlen einschließlich 0

Aufgabe 1.12. Stellen Sie folgende Mengen am Zahlenstrahl dar und geben Sie sie mit Hilfe von Intervallen an:

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5$ und $x \geq -2\}$ $x < 5$ $= [-2, 5[$



2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5$ oder $x > -2\}$ $= \mathbb{R}$

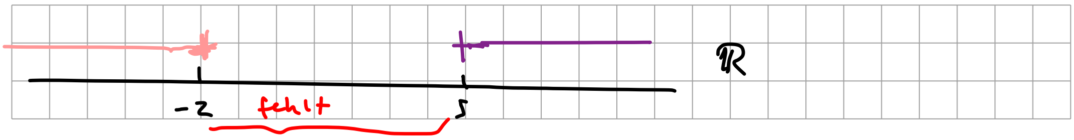


Vereinigungsmenge $\mathbb{R}$

$= \mathbb{R} \setminus \,]-2, 5[$

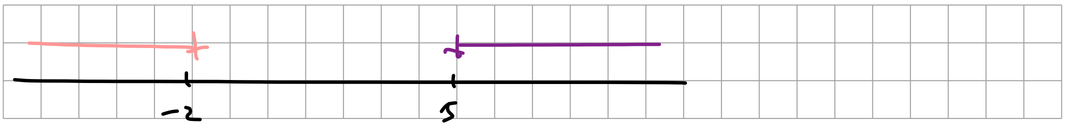
oder: Vereinigung

3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ oder } x \geq 5\}$ $= \,]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$



und: Schnittmenge

4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ und } x \geq 5\}$ $= \emptyset$

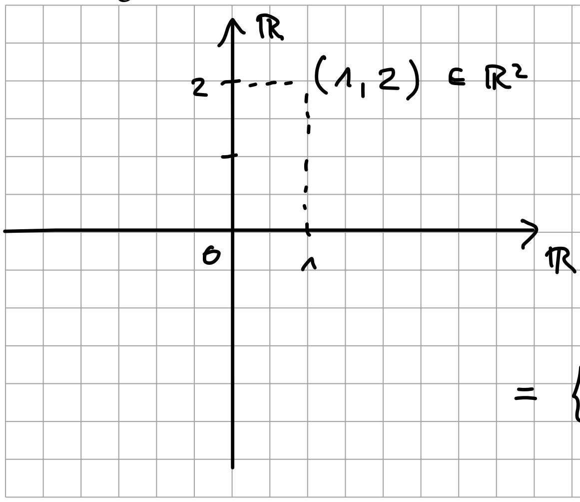


Produktmenge

$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

kartesisches Koordinaten-System

Bemerkung 1.13.
Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kann man in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen:



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$= \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$
Tupel

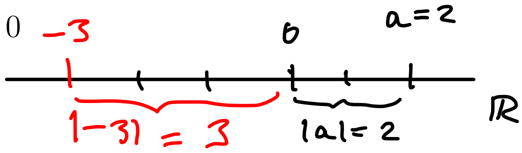
$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$= \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$
Tripel

$\mathbb{R}^n := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$
n-Tupel

Definition 1.14.
Der *Betrag* einer Zahl $a \in \mathbb{R}$, geschrieben $|a|$, entspricht dem Abstand von a zum Nullpunkt auf der reellen Zahlengerade. Er ist formal definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Der Betrag einer Zahl $\neq 0$ ist immer positiv!



$|\overset{a}{-3}| = 3$
$= -(\underset{a}{-3})$
$|a| = -a$ falls $a < 0$
$-a > 0$ in diesem Fall

Anmerkung: Mit dem Zeichen $:=$ definiert man eine neue Größe oder Bezeichnung. Auf der Seite des Doppelpunkts steht das neue Symbol, auf der Seite des Gleichheitszeichens die Bedeutung des Symbols, ausgedrückt in bekannten Größen.
$x := y$ *in Worten:* x wird definiert durch y (wobei y bekannt sein muss).

Bemerkung 1.15 (Eigenschaften von Beträgen)**.** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $|xy| = |x| \cdot |y|$
2. $|x| = |-x|$
3. $|x - y| = |y - x|$ $\Leftarrow$ eng verwandt: $(x-y)^2 = (y-x)^2$
4. $|x| \geq x$ und $|x| \geq -x$

Bsp.: $|x| \le -1$ keine Lösung!

$|x| \ge -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

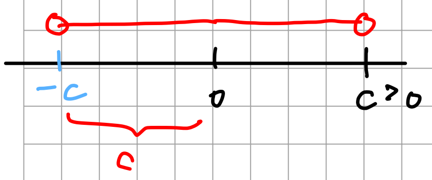
$|x| \le 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x| \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$|x| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Aufgabe 1.16.
Sei $c > 0$. Stellen Sie die Lösungen folgender Ungleichungen auf dem Zahlenstrahl dar:

a) $|x| < c$



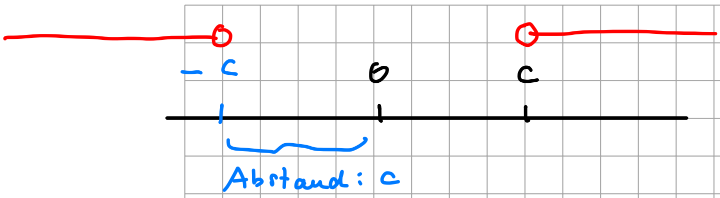
$|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c \Leftrightarrow x \in]-c, c[$

b) $|x| \le c$

$\Leftrightarrow -c \le x \le c$

$\Leftrightarrow x \in [-c, c]$

c) $|x| > c$



$|x| > c \Leftrightarrow x < -c$ oder $x > c$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -c[\cup]c, +\infty[\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus [-c, c]$

d) $|x| \ge c$

$\Leftrightarrow x \le -c$ oder $x \ge c$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -c] \cup [c, +\infty[$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus]-c, c[$

Bemerkung 1.17 (Dreiecksungleichung)**.**
Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x + y| \le |x| + |y|$$

1. Fall $x + y \ge 0 \Rightarrow |x + y| = x + y$

Es gilt allgemein: $x \le |x|$, $y \le |y|$ $\Rightarrow x + y \le |x| + |y|$

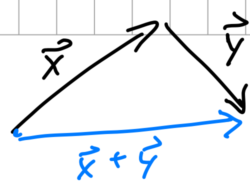
d.h. $|x + y| \le |x| + |y|$

2. Fall $x + y < 0 \Rightarrow |x + y| = -(x + y) = -x - y$

Es gilt allgemein: $-x \le |x|$, $-y \le |y|$ $\Rightarrow -x - y \le |x| + |y|$

d.h. $|x + y| \le |x| + |y|$

Der Name "Dreiecksungleichung" kommt aus der Vektorrechnung: $|\vec{x} + \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|$



$\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}$ bilden ein Dreieck

Zeige: $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. man kann $\sqrt{2}$ nicht als Quotient von natürlichen Zahlen schreiben.

Beweis durch Widerspruch: (Widerspruchsbeweis)

Wir nehmen an, das $\sqrt{2}$ rational ist (und leiten daraus eine Aussage ab, die offensichtlich falsch ist).

$\underbrace{\sqrt{2}}_{>0}$ rational $\Rightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\underbrace{\text{mit } p \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{N}}_{\text{Wir können } p \text{ und } q \text{ als teilerfremd annehmen (sonst kürzt man den ggT)}}$ $\Big|^2$

$\Rightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad | \cdot q^2$

(*) $\Rightarrow \quad p^2 = \underbrace{2 \cdot q^2}_{\text{gerade Zahl}}$

$\Rightarrow$ p^2 ist eine gerade Zahl, d.h. $2 \underset{\text{teilt}}{|} p^2$

$\Rightarrow \quad 2 \overset{(*)}{|} p$, d.h. p ist gerade

$\Rightarrow \quad p = 2 \cdot s$ mit $s \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ einsetzen in (*) $\quad (2 \cdot s)^2 = 2 \cdot q^2$

$\Rightarrow \quad 4s^2 = 2q^2 \quad | :2$

$\Rightarrow \quad q^2 = 2s^2$

$\Rightarrow \quad q$ ist eine gerade Zahl, $2 | q$

Somit gilt: $2 | p$ und $2 | q$ $\lightning$ (Widerspruch!)

im Widerspruch zu $ggT(p, q) = 1$ (p, q teilerfremd) $\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ kann nicht rational sein!

1.3 Das Summenzeichen

Oft treten in der Mathematik oder ihren Anwendungen Summen mit recht vielen ähnlichen Summanden auf. Die Summe der Quadrate der Zahlen von 1 bis 10 ist zum Beispiel

$$s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

Das Bildungsgesetz muss deutlich erkennbar sein!

Diese Darstellung ist recht unübersichtlich und mühsam. Man verwendet deshalb oft Pünktchen:

k: 1 2 3 -- 9 10

$$s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 + 10^2$$

Alternativ dazu gibt es die kürzere und genauere *Summenschreibweise*:

$$s = \sum_{k=1}^{10} k^2 \qquad = \sum_{j=1}^{10} j^2$$

Σ großes Sigma

σ kleines Sigma

Definition 1.18 (Summenzeichen, Produktzeichen)**.**

- Für die Summe der Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ schreiben wir

  k 1 2 3 --- n

  $$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

  Laufindex wird immer in Einer-Schritten hochgezählt.

  Der griechische Großbuchstabe $\sum$ (Sigma) heißt *Summenzeichen*; k heißt der *Laufindex*. (Zählindex)

  Statt k kann man auch einen anderen Buchstaben nehmen. Die Summe muss nicht mit $k = 1$ beginnen, jede ganze Zahl ist als Startindex erlaubt:

  k m m+1 --- n

  $$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

- Für das Produkt der Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ schreiben wir entsprechend

  k 1 2 3 -- n

  $$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n$$

Π großes pi

π kleines pi

Aufgabe 1.19. Berechnen Sie

k: 1 2 3 4 5

1. $\sum_{k=1}^{5} \underbrace{k}_{a_k} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

   $= \underline{\underline{15}}$

i: 3 4 5

2. $\sum_{i=3}^{5} \underbrace{i^2}_{a_i} = 3^2 + 4^2 + 5^2$

   $= 9 + 16 + 25 = \underline{\underline{50}}$

alternierende Summe: Die Vorzeichen wechseln sich ab

Schafft man mit $(-1)^n$ oder $(-1)^{n+1}$

3. $\sum_{j=2}^{5} \overbrace{\frac{(-1)^j}{j}}^{a_j}$

$j:\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$$= \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^5}{5}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 13/60$$

$$= \frac{30}{60} - \frac{20}{60} + \frac{15}{60} - \frac{12}{60} = \frac{30-20+15-12}{60}$$

4. $\sum_{k=2}^{7} \overbrace{4}^{a_k}$

$a_k = 4$ für alle k

$k:\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

$$= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

$$= 6 \cdot 4 = \underline{\underline{24}}$$

5. $\sum_{k=0}^{n} \overbrace{1}^{a_k}$

$a_k = 1$ für alle k

$k:\ 0 \quad 1 \quad 2 \ \ldots \ n$

$$= 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n+1$$

$\boxed{n \geq 0}$

6. $\sum_{n=-2}^{3} \overbrace{n}^{a_n}$

$a_n = n$

$n:\ -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$$= -2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3$$

$$= \underline{\underline{3}}$$

$n \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ \ldots$ komme nie zu 1 !

7. $\sum_{n=3}^{1} n^2$

„Leere Summe", kein Summand

$:= 0$ per definitionem

8. $\prod_{n=2}^{5} \overbrace{\frac{1}{n}}^{a_n}$

$n:\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{120}$$

9. $\prod_{n=1}^{6} \overbrace{2}^{a_n}$

$a_n = 2$ für alle n

$n:\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 2^6 = \underline{\underline{64}}$$

$\forall$ „für alle"

d.h. $a_n = 2 \ \forall n$

All-Quantor

10. $\prod_{n=3}^{1} n^3$

„Leeres Produkt", kein Faktor

$:= 1$ per definitionem

Bemerkung 1.20 (Rechnen mit dem Summenzeichen).

Linearität:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$

2. $\sum\limits_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)=c\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

zu ①:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n)$$
$$=(a_1+a_2+\dots+a_n)+(b_1+b_2+\dots+b_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_n+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

② ebenso leicht!

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=2}^{n+1}a_{k-1}=\sum_{k=3}^{n+2}a_{k-2}=\dots$$

k: 1 2 3 n

$$\sum_{k=1}^{n}a_k = a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$$

k: 2 3 4 ... n+1

$$\sum_{k=2}^{n+1}a_{k-1} = a_1+a_2+a_3+\dots+a_{(n+1)-1}=a_n$$

k-te Summand

„="

Aufgabe 1.21.
Schreiben Sie folgende Summen mit Hilfe des Summenzeichens:

1. $\underset{a_1}{2}+\underset{a_2}{4}+\underset{a_3}{6}+8+\dots+44+46+48 = 2(1+2+3+\dots+24)$

k: 1 2 3 4 ... 24

$$2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+\dots+2\cdot24$$
$$=\sum_{k=1}^{24}2\cdot k = 2\cdot\sum_{k=1}^{24}k$$

2. $2-4+8-\dots+128-256+512$

k 1 2 3

$2^1\quad 2^2\quad 2^3\quad 2^7\quad 2^8\quad 2^9$

$$=2^1-2^2+2^3-\dots+2^7-2^8+2^9$$
$$=(-1)^0\cdot2^1+(-1)^1\cdot2^2+(-1)^2\cdot2^3+\dots+(-1)^8\cdot2^9$$
$$=\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k-1}\cdot2^k=\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k+1}\cdot2^k$$

alternierende Summe

⇝ $(-1)^*$

$0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$

leeres Produkt

Definition 1.22 (Fakultät).
Die *Fakultät* einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist defniert durch

$k: \ 1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ n$

$$n! := \prod_{k=1}^{n} \underbrace{k}_{a_k} = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
$= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Sprechweise: n Fakultät

$3! = 6$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot \underbrace{2 \cdot 1}_{2!} = 3 \cdot 2 = 6$

$4! = 4 \cdot \overbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}^{3! = 6} = 4 \cdot 6 = 24$

$5! = 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4! = 24} = 5 \cdot 4! = 120$

$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 6 \cdot 5!$
$= 6 \cdot 120$
$= 720$

$7! = 7 \cdot 6!$
$= 7 \cdot 720$
$= 5040$

Bemerkung 1.23 (Rechenregel für die Fakultät).

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

$(n+1)!$
$= (n+1) \cdot \underbrace{n \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{n!}$
$= (n+1) \cdot n!$

1.4 Rechnen mit Potenzen und Wurzeln

Definition 1.24.
Ein Ausdruck der Form a^x heißt *Potenz* und

- a heißt *Basis* der Potenz
- x heißt *Hochzahl* oder *Exponent* der Potenz.

Definition 1.25 (Defintion von a^n für ganze Zahlen n).

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man $a^n := \prod_{i=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$
2. $a^0 := 1$
3. Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$.
4. Insbesondere ist $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Beispiel 1.26.

1. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
2. $2^5 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^9$ $\quad 2^{5+4} = 2^9$
3. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25}$
4. $\frac{3^5}{3^7} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3^{7-5}} = \frac{1}{9}$ $\quad 3^{5-7} = 3^{-2} =$
5. $(2^3)^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^6$ $\quad 2^{3 \cdot 2}$

Bemerkung 1.27 (Rechenregeln für Potenzen). Vorsicht!

Basis gleich!

1. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^0 = 1$
5. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
6. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
7. $1^n = 1$

Exponent gleich

$a^n \cdot b^m$ $\qquad \dfrac{a^n}{b^m}$

hier gibt es keine Regel zum Zusammenfassen!

!! $a^n + b^n \neq (a+b)^n$ keine Regel zum Weiterrechnen!

Bemerkung 1.28 (Wissenschaftliche Zahldarstellung).
Eine reelle Zahl wird im wissnschaftlich-technischen Bereich oft in der Form

$$x = d \cdot 10^e$$

dargestellt. Dabei heißt d *Mantisse* (kann positiv oder negativ sein) und e der *Exponent*. Der Exponent wird dabei so gewählt, dass die Mantisse eine angenehme Größenordnung hat. oft: zwischen 1 und < 10

Beispiele:
$0,00002 =$ $2 \cdot 10^{-5}$

$12.000.000.000 =$ $1,2 \cdot 10^{10}$

Avogadro-Konstante $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ ist die Anzahl der Teilchen in einem Mol eines Stoffes.

Gravitationskonstante $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$, taucht im Newtonschen Gravitationsgesetz auf:
Die Anziehungskraft in [N] zweier Massepunkte m_1 und m_2 in [kg] mit Abstand r in [m] ist

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Wir kennen nun Potenzen mit *ganzzahligen Exponenten*. Um Potenzen mit rationalen Exponenten definieren zu können, benötigen wir Wurzeln.

Definition 1.29 (Quadratwurzeln).
Die Quadratwurzel einer Zahl $a \geq 0$ ist die nicht-negative Lösung der Gleichung

$a \in \mathbb{R}_0^+$!

$$x^2 = a$$

Bezeichnung: $\sqrt{a}$ ≥ 0

$x^2 = 4$ hat 2 Lösungen: $\qquad \sqrt{4} = 2$
$x = 2$ und $\boxed{x = -2}$

$\notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \approx \underbrace{1,414}_{\in \mathbb{Q}}\ldots$

Achtung: Die Gleichung $x^2 = a$ für $a > 0$ besitzt 2 Lösungen, nämlich $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$.

$\mathbb{L} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$

Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{(-c)^2} = \begin{cases} c & \text{falls } c \geq 0 \\ -c & \text{falls } c < 0 \end{cases} = |c|$$

$c^2 \geq 0$ gilt für alle $c \in \mathbb{R}$

$c = 2 \Rightarrow \sqrt{c^2} = \sqrt{4} = 2$

$c = -2$

$\sqrt{c^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4}$
$= 2 = -\underbrace{(-2)}_{c}$
$= -c$

Definition 1.30 (n-te Wurzeln).
Für eine nicht-negative Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\sqrt[n]{a}$ die *nicht-negative* Lösung der Gleichung

$a \geq 0$

$\sqrt[n]{a} \geq 0$

$$x^n = a$$

Das *Ziehen der n-ten Wurzel* aus einer Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist die Umkehrung zur Bildung der n-ten Potenz.

Welche nicht-negative Zahl muss man mit n potenzieren, um a zu erhalten?

passt nicht dazu!

$x^5 = 7$

$\vdots$

$\sqrt[5]{7}$ ist die nicht negative Lösung

Da 5 ungerade, ist $\mathbb{L} = \{\sqrt[5]{7}\}$

$x^6 = 7$

$\vdots$

$\sqrt[6]{7}$ ist die nicht-neg. Lösung

$-\sqrt[6]{7}$ ist weitere Lsg

$\mathbb{L} = \{\pm\sqrt[6]{7}\}$

da 6 gerade ist

Bemerkung 1.31 (Ausnahme).
Die n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ ist grundsätzlich nur für $a \geq 0$ definiert. Aus der Definition ergibt sich außerdem, dass $\sqrt[n]{a}$ nicht negativ sein kann
Eine Ausnahme kann man erlauben, wenn n eine ungerade Zahl ist: In diesem Fall hat die Gleichung

$$x^n = a$$

für $a < 0$ genau eine reelle Lösung und diese ist negativ. Wir bezeichnen diese eindeutige Lösung ebenfalls mit $\sqrt[n]{a}$.

Nach (1.30) ist $\sqrt[3]{-8}$ nicht definiert!

Lösen der Gleichung $x^3 = -8$
liefert einzige Lösung: $x = -2$

Wir lassen zu: $\sqrt[3]{-8} = -2$

nur für ungerades n lassen wir $\sqrt[n]{a}$ für $a < 0$ zu.

Bemerkung 1.32 (Rechenregeln für Wurzeln). $a, b \geq 0$

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\leftarrow$ $b \neq 0$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Definition 1.33 (Defintion von a^q für rationale Exponenten, $a > 0$).

$q \in \mathbb{Q}$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

1. $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$
2. $a^{-\frac{1}{n}} := \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$
3. $\boxed{a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Beispiel 1.34.

1. $64^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{6/4} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3}$
   $= \sqrt{2 \cdot 2^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot \sqrt{2}$
2. $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{2/3} = 3^{3 \cdot 2/3} = 3^2 = 9$

Bemerkung 1.35. Die Rechenregeln aus (1.27) gelten auch für rationale Exponenten!

Beispiel 1.36. Vereinfachen Sie:

1. $\frac{\sqrt{a}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{1/2}}{a^{3/4}} = a^{1/2 - 3/4} = a^{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}$
   $= a^{\frac{2}{4} - \frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{a^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$
2. $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ mit Kehrwert multiplizieren

$= \frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} \cdot \frac{b^{m-2}}{a^{4x+y}} = \frac{a^{5x-2y} \cdot b^{m-2}}{a^{4x+y} \cdot b^{6m-1}}$

$= a^{5x-2y-(4x+y)} \cdot b^{m-2-(6m-1)}$

$= a^{5x-2y-4x-y} \cdot b^{m-2-6m+1} = a^{x-3y} \cdot b^{-5m-1}$

$$= a^{x-3y} \cdot b^{-(5m+1)} = \frac{a^{x-3y}}{b^{5m+1}}$$

3. $\frac{(a^2b)^2}{2a\sqrt{ab}}$ $= \frac{a^4 \cdot b^2}{2a^1 \cdot a^{1/2} \cdot b^{1/2}} = \frac{a^4 \cdot b^2}{2 \cdot a^{3/2} \cdot b^{1/2}}$

$$= \frac{1}{2} \cdot a^{4-\frac{3}{2}} \cdot b^{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot a^{5/2} \cdot b^{3/2}$$

teilweises Wurzel-ziehen

$$= \frac{1}{2}(a^5 \cdot b^3)^{1/2} \quad \frac{1}{2}(a^4 \cdot a \cdot b^2 \, b)^{1/2} = \frac{1}{2}a^2 \cdot b\sqrt{ab}$$

4. $\sqrt[x]{b^{2x}}$

$$= (b^{2x})^{\frac{1}{x}} = b^{2x \cdot \frac{1}{x}} = b^2$$

5. $\frac{a}{\sqrt{a}}$ $= \sqrt{a}$ $(a>0)$

$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

insbesondere

$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{\cancel{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a}}{\cancel{\sqrt{a}}} = \sqrt{a}$$

oder:

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = a \cdot a^{-1/2} = a^{1-\frac{1}{2}} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

Definition 1.37 (Defintion von a^r für reelle Exponenten $r \in \mathbb{R}$, $a > 0$).
Für beliebige reelle Zahlen $r \in \mathbb{R}$ wird a^r über einen *Grenzwertprozess* (Annäherung, Approximation) definiert:

annähern

Jede reelle Zahl r kann man beliebig genau durch rationale Zahlen q approximieren (z.B. Dezimalbruchdarstellung mit zunehmender Anzahl von Dezimalstellen). Zum Beispiel:

1. $\pi \approx 3,14$ mit einem Fehler, der kleiner als $0,01$ ist, oder $\pi \approx 3,14159\ldots$
2. $\sqrt{2} \approx 1,4142$ mit einem Fehler, der kleiner als $0,0001$ ist.
3. $\sqrt{2} \approx 1,4142135623$ mit einem Fehler, der kleiner als 10^{-10} ist.

Um a^r für $r \in \mathbb{R}$ näherungsweise zu berechnen, wählt man eine rationale Zahl q, die für die gewünsche Anwendung nahe genug bei r liegt, und erhält mit a^q einen Näherungswert für a^r.
Je näher q bei r liegt, desto genauer liegt a^q bei a^r.

Aufgabe 1.38. Vereinfachen Sie:

$$\frac{b^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{b}\sqrt[6]{b^{-2}}}}{b^{-\sqrt{2}} \cdot b^{-1/6}}$$

$-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$b^0 = 1$

$$= \frac{b^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{b^{1/3} \cdot b^{-2/6}}}{b^{-\sqrt{2}} \cdot b^{-1/6}} = \frac{b^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{b^{1/3-1/3}}}{b^{-\sqrt{2}} \cdot b^{-1/6}}$$

$$= \frac{b^{\sqrt{2}}}{b^{-\sqrt{2}} \cdot b^{-1/6}} = b^{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{6}} = \underbrace{b^{2\sqrt{2}+\frac{1}{6}}}_{\text{nicht mehr groß zu vereinfachen}}$$

Bemerkung 1.39 (Binomische Formeln).

1. $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
2. $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
3. $$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Gegenbsp: $\underbrace{3^2 + 4^2}_{\neq 7^2} = 5^2$

$a^2 + b^2 \underset{}{\overset{\text{i. Allg.}}{\neq}} (a+b)^2$!

Allgemein: $a^n + b^n \overset{\text{i. Allg.}}{\neq} (a+b)^n$!

Aufgabe 1.40 (Rationalmachen des Nenners).
Formen Sie den folgenden Ausdruck so um, dass im Nenner keine Wurzeln vorkommen:

1. $$\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4\cdot 3}} = \frac{\sqrt{5}}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

teilweise wurzel ziehen $= \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

erweitern

$$= \frac{\sqrt{15}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

rational

2. $$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{5^{1/3}} \cdot \frac{5^{2/3}}{5^{2/3}}$$

$$= \frac{2\cdot 5^{2/3}}{5^{1/3+2/3}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{25}}{5}$$

$\sqrt[3]{5^2}$

3. binomische Formel

3. $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

4. $$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}$$

$$= 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

5. $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

3. Binomische Formel

Gleichungen mit Wurzeln

Bemerkung 1.41.
Gleichungen versucht man mit Hilfe von *Äquivalenzumformungen* zu lösen, d.h. man formt die Gleichung so um, dass sich die Lösungsmenge nicht ändert. Zwischen zwei Gleichungen kann man das Zeichen $\Leftrightarrow$ schreiben (*sprich:* ist äquivalent zu *oder:* gilt genau dann, wenn).

$$
\begin{aligned}
& 3x-18 = x+6 && \mid -x \\
\Leftrightarrow\ & 2x-18 = 6 && \mid +18 \\
\Leftrightarrow\ & 2x = 24 && \mid :2 \\
\Leftrightarrow\ & x = 12
\end{aligned}
$$

$\mathbb{L} = \{12\}$

Achtung: Das Multiplizieren beider Seiten einer Gleichung mit 0 ist keine Äquivalenzumformung! Das Dividieren beider Seiten durch 0 ist natürlich nicht gestattet. Beides kann versteckt auftreten!

Fallunterscheidung

$$
\begin{aligned}
& x^2 - x = 0 && \mid +x \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = x && \mid \underbrace{:x} \\
& x = 1
\end{aligned}
$$

darf man nur, wenn $x \neq 0$

Sonderfall: $x=0$ einsetzen zeigt, dass die Gleichung erfüllt ist

$\mathbb{L} = \{1, 0\}$

Alternativer Lösungsweg

$x^2 - x = x\cdot(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=0$ oder $x=1$

Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist

Achtung: Auch das Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung. Deshalb muss man, wenn man eine Gleichung quadriert, eine Probe machen!

$$
\begin{aligned}
& x = 1 && \mid ^2 \\
\Rightarrow\ & x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2-1=0 \\
& \Leftrightarrow (x+1)(x-1)=0 \\
& \Leftrightarrow x = +1 \text{ oder } x=-1
\end{aligned}
$$

$\mathbb{L} = \{1\}$

Probe machen!

man erhält eine weitere Lösung

Aufgabe 1.42. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen

1. $\sqrt{x-2} - 8 = 0$ $\quad \mid +8$ Wurzel separieren

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x-2} = 8 && \mid ^2 \\
\Rightarrow\ & x-2 = 64 \\
\Leftrightarrow\ & x = 66
\end{aligned}
$$

Vorsicht! Probe erforderlich

Probe:

linke Seite (l.S.)

$\sqrt{66-2} - 8 = \sqrt{64} - 8 = 0$

rechte Seite (r.S.)

0

$\mathbb{L} = \{66\}$

Man sieht, sofern man genau hinsieht, sofort, dass die Gleichung keine Lösung hat, da Wurzeln immer ≥ 0 sind !

2. $\sqrt{x-2}+8=0 \quad |-8$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-2} = -8 \quad |^2$

$\Rightarrow \quad x-2 = 64$

$\Leftrightarrow \quad x = 66 \qquad \mathbb{L} = \{\} = \emptyset$

Probe:

l.S. $\sqrt{66-2}+8 = \sqrt{64}+8 = 16$

r.S. 0

$\neq$ ↯

3. $\sqrt{x+2} = x \quad |^2$

$\Rightarrow \quad x+2 = x^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$

Mitternachtsformel:

$$x_{1|2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$ ✗ keine Lös

$\mathbb{L} = \{2\}$

Probe: zwingend !

$x_1 = 2$ Lösung

l.S. $\sqrt{2+2} = 2$

r.S. 2

"=" ✓

$x_2 = -1$

l.S. $\sqrt{-1+2} = \sqrt{1} = 1$

r.S. -1

$\neq$ ↯

4. $\sqrt{4x-3}+2 = x \quad |-2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{4x-3} = x-2 \quad |^2$! Probe zwingend

$\Rightarrow \quad 4x-3 = (x-2)^2$

$\Leftrightarrow \quad 4x-3 = x^2-4x+4$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 7 = 0$

Vieta $\quad a \cdot b = 7$

$a = 1 \quad b = 7 \quad \Rightarrow a+b = 8$ ↯

oder $\quad a = -1 \quad b = -7 \quad \Rightarrow a+b = -8$ ✓

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-7) = 0$

$x_1 = 1, \quad x_2 = 7$

Probe:

$x_1 = 1$

l.S. $\sqrt{4-3}+2 = 1+2 = 3$

r.S. 1

$\neq$ ↯

$x_2 = 7$

l.S. $\sqrt{28-3}+2 = 5+2 = 7$

r.S. 7

"=" ✓

$\mathbb{L} = \{7\}$

Satz von Vieta

$\boxed{x_1 = -a}$ NSt $x_1 = -a$, $x_2 = -b$

$(x+a)(x+b)$
$= x^2 + ax + bx + ab$
$= x^2 + (a+b)\cdot x + ab$

$x^2 - x - 2 = 0$

$a+b = -1 \mid a \cdot b = -2$

Wenn a und b ganzzahlig sind, sind a, b Teiler von −2

Möglichkeiten, −2 als Produkt ganzer Zahlen zu schreiben:

$1 \cdot (-2) = -2$ $\quad a = 1,\ b = -2 \quad \boxed{a+b = -1}$

$(-1) \cdot 2 = -2$ $\quad a = -1,\ b = 2 \quad a+b = 1$

d.h. $a = 1,\ b = -2$

$x^2 - x - 2 = (x+1)\cdot(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ oder $x = 2$ wie oben!

Wurzeln

$a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben

Man betrachtet die Gleichung

$$x^n = a$$

Unbekannte: Basis der Potenz

$\sqrt[n]{a}$ bezeichnet die positive Lösung dieser Gleichung

Logarithmus

$a, b > 0$; $a \neq 1$

Man betrachtet die Gleichung

$$a^x = b$$

Unbekannte: Exponent der Potenz

$\log_a b$ bezeichnet die Lösung dieser Gleichung

1.5 Rechnen mit Logarithmen

Das *Logarithmieren zur Basis a* ist die Umkehrung des Potenzierens zur Basis a. $\log_a b$ ist die Antwort auf die Frage: Mit welcher Zahl muss man a potenzieren, um b zu erhalten?

Definition 1.43. Die Lösung x der Gleichung

$$a^x = b$$

wobei $a > 0$, $a \neq 1$, und $b > 0$ reelle Zahlen sind, heißt *Logarithmus von b zur Basis a.*
Schreibweise:

$$x = \log_a b$$

Der Logarithmus von b zur Basis a ist die Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Achtung:
Der Logarithmus $\log_a b$ ist nur für positive Zahlen $b > 0$ definiert!

Bsp: $2^x = -8$ $\quad \mathbb{L} = \emptyset$ $\qquad 2^x = 0$ $\quad \mathbb{L} = \emptyset$

Mit welcher Zahl muss man 10 potenzieren, um 10.000 zu erhalten?

$10.000 = 10^4 \iff \log_{10} 10.000 = 4$

Mit welcher Zahl muss man 3 potenzieren, um $1/3$ zu erhalten?

$\frac{1}{3} = 3^{-1} \iff \log_3 \frac{1}{3} = -1$

Aufgabe 1.44. Berechnen Sie

1. $\log_{10} 10 = 1$ $\qquad 10^{1} = 10$
2. $\log_{10} 1000 = 3$ $\qquad 10^{3} = 1000$
3. $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ $\qquad 2^{-1} = \frac{1}{2}$
4. $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad 2^{1/2} = \sqrt{2}$
5. $\log_5 1 = 0$ $\qquad$ Taschenrechner? $\qquad 5^{0} = 1$
6. $0,301\ldots \approx \log_{10} 2 = x \leadsto$ TR $\qquad 10^{x} = 2$

Direkt aus der Definition des Logarithmus ergibt sich

gesucht
$a^{?} = a^x$

Bemerkung 1.45 (Umkehrformeln)**.**

1. $\log_a(a^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\qquad \ln e^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (für alle)
2. $a^{\log_a x} = x$ für alle $x > 0$ $\qquad e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0$

$\log_e x =: \ln x$

Aus den Rechenregeln für Potenzen ergeben sich folgende Rechenregeln für Logarithmen:

Bemerkung 1.46 (Rechenregeln für den Logarithmus). $u, v > 0$

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
4. $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$
5. $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$

Vorsicht: Für $\log_a(u+v)$ oder $\log_a(u-v)$ gibt es keine allgemeinen Regeln zum Vereinfachen

zu (3):

$$\left.\begin{aligned} u &= a^{\log_a u} \\ v &= a^{\log_a v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u \cdot v = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v} \overset{\text{Potenzregeln}}{=} a^{\log_a u + \log_a v}$$

$$\Rightarrow \log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

Aufgabe 1.47. Berechnen Sie

1. $\log_3\left(\sqrt[5]{27} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$

$\sqrt[5]{27} = (3^3)^{1/5}$ $\quad 27 = 3^3$ $\quad \sqrt{3} = 3^{1/2}$

$$= \log_3 3^{3/5} + \log_3 3 - \log_3 3^{1/2}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \log_3 3 + \log_3 3 - \frac{1}{2}\log_3 3 = \frac{3}{5} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{6+10-5}{10} = \frac{11}{10}$$

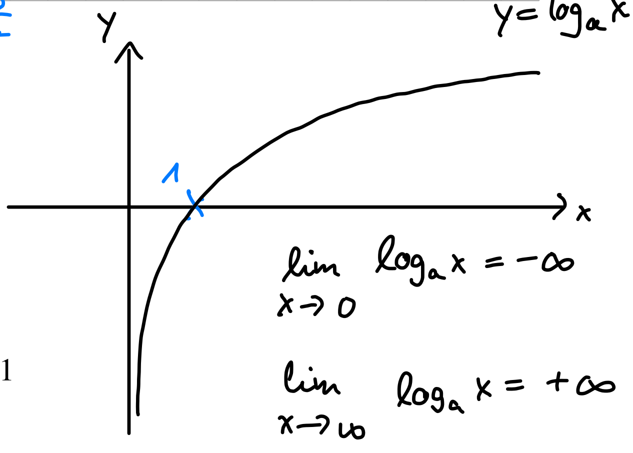
2. $\log_{10}\sqrt{0.1}$

$0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$$= \log_{10}(10^{-1})^{1/2} = \log_{10} 10^{-1/2} = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 1.48.
Sei $a > 1$. Für welche $x > 0$ gilt

1. $\log_a x = 0$ $\qquad x = 1$
2. $\log_a x > 0$ $\qquad x > 1$
3. $\log_a x < 0$ $\qquad 0 < x < 1$



$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} \log_a x = +\infty$

Bemerkung 1.49 (*Umrechnungsformel bei unterschiedlichen Basen*).

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$$

$\log_a x \sim \log_b x$

proportional

Proportionalitäts-faktor $\log_a b$

Denn: $\log_a b \cdot \log_b x$

Umkehrregel

$= \log_b x \cdot \log_a b = \log_a b^{\log_b x} = \log_a x$

Bemerkung 1.50.

$$\frac{\cancel{\log_a b} \cdot \log_b x}{\cancel{\log_a b} \cdot \log_b y} = \boxed{\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}}$$

d.h. Quotienten von Logarithmen zu unterschiedlichen Basen sind gleich.

Anmerkung: Einfache T.R. können oft nur $\log_{10}$ oder $\ln \mathrel{\hat=} \log_e$ berechnen

Rettung:

$$\log_3 17 = \frac{\log_3 17}{\underbrace{\log_3 3}_{=1}} = \frac{\log_{10} 17}{\log_{10} 3} = \frac{\ln 17}{\ln 3}$$

Definition 1.51. Besonders wichtig sind folgende Basen:
Der *natürliche Logarithmus* ist der Logarithmus mit der Basis e. Wir schreiben dafür

$$\log_e x = \ln x$$

$e \approx 2,17$

($e \approx 2,718$ ist die *Eulersche Zahl*. e ist eine irrationale Zahl.)
Der *dekadische Logarithmus* (*Zehner-Logarithmus*) ist der Logarithmus mit der Basis 10. Wir schreiben dafür

$$\log_{10} x = \lg x$$

Der *duale Logarithmus* (Zweier-Logarithmus) ist der Logarithmus zur Basis 2. Er ist besonders in der Informatik wichtig.

Lösen von Gleichungen mit Logarithmen

Wende ln auf beiden Seiten an!

Aufgabe 1.52. Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf:

1. $5^x = 7$

$\Leftrightarrow \log_5 7 = x$

$\log_5 7 = \frac{\ln 7}{\ln 5}$ (umrechnen in andere Basis)

Andere Weg $5^x = 7 \quad | \ln \_\_$

$\ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln 5^x = \ln 7$

$\Leftrightarrow x \cdot \ln 5 = \ln 7 \quad |: \ln 5$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln 5}$

$\ln u^r = r \cdot \ln u$

$\mathbb{L} = \left\{\frac{\ln 7}{\ln 5}\right\} = \{\log_5 7\}$

2. $\log_{10} x = 1 \quad | 10^{\_\_}$ $\}$ $10^{\text{linke S}}$ / $10^{\text{rechte Seite}}$

$10^{\log_{10} x} = 10^1$

$x = 10$

$\mathbb{L} = \{10\}$

NR $4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

$= x^{1/3}$

3. $\log_3 x^4 - 2\log_3 \sqrt[3]{x} = 1$

$\Leftrightarrow \quad 4\cdot \log_3 x - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot \log_3 x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{10}{3}\log_3 x = 1 \qquad \Big| \cdot \frac{3}{10}$

$\Leftrightarrow \quad \log_3 x = \frac{3}{10} \qquad \Big| 3^{\square}$

$\Leftrightarrow \quad x = 3^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{3^3} = \sqrt[10]{27}$

$\mathbb{L} = \{\sqrt[10]{27}\}$

4. $\log_2(x+2) - \log_2 x = 1$

Nur $x>0$ möglich!

„$\Leftarrow$" gilt nicht, da untere Gleichung auch für $x<-2$ sinnvoll ist

$\Rightarrow \quad \log_2 \frac{x+2}{x} = 1 \qquad \Big| 2^{\square}$

Probe erforderlich!

$\Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x} = 2 \qquad \Big| \cdot x$

(kein Problem, da $x \neq 0$!)

$\Leftrightarrow \quad x+2 = 2x$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

$\mathbb{L} = \{2\}$

Probe: l.S. $\log_2(4) - \log_2(2) = 2-1 = 1$ = r.S. ✓

5. $\frac{1}{2}\ln(x-4) - \ln 3 = -\ln\sqrt{x+4}$

$x>4$ notwendig

Wir rechnen einfach los und machen dann die Probe.

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(x-4) - \ln 3 + \ln(x+4)^{1/2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \ln(x-4)^{1/2} - \ln 3 + \ln(x+4)^{1/2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \ln\frac{(x-4)^{1/2}\cdot(x+4)^{1/2}}{3} = 0 \qquad \Big| e^{\square}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-4)^{1/2}\cdot(x+4)^{1/2}}{3} = 1 \qquad \Big| \cdot 3$

$\Leftrightarrow \quad (x-4)^{1/2}\cdot(x+4)^{1/2} = 3 \qquad \Big|^2$ Probe

$\Rightarrow \quad (x-4)(x+4) = 3^2 = 9$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 16 = 9$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 25$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 5, \; x_2 = -5$

$\mathbb{L} = \{5\}$

Probe:

$x_1 = 5$

l.S. $\frac{1}{2}\ln 1 - \ln 3 = -\ln 3$

r.S. $-\ln\sqrt{5+4} = -\ln 3$

„=" ✓

$x_2 = -5$

l.S. $\ln(-5-4)$ nicht definiert ↯

6. $7^{x+5} - 7^{6x} = 0$ $\mathbb{L} = \{1\}$

$\Leftrightarrow \quad 7^{x+5} = 7^{6x} \quad | \log_7 \_$

$\Leftrightarrow \quad x + 5 = 6x$

$\Leftrightarrow \quad 5x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

7. $7^{x+5} - 5^{2x+1} = 0$

$\ln u^r = r \cdot \ln u$

$\Leftrightarrow \quad 7^{x+5} = 5^{2x+1} \quad | \ln \_$

$\Leftrightarrow \quad \ln 7^{x+5} = \ln 5^{2x+1}$

$\Leftrightarrow \quad (x+5) \cdot \ln 7 = (2x+1) \cdot \ln 5$

$\Leftrightarrow \quad (\ln 7) \cdot x + 5 \cdot \ln 7 = (2 \cdot \ln 5) \cdot x + \ln 5$

$\Leftrightarrow \quad (\ln 7 - 2 \ln 5) \cdot x = \ln 5 - 5 \cdot \ln 7$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\ln 5 - 5 \ln 7}{\ln 7 - 2 \ln 5}$

$\mathbb{L} = \left\{ \dfrac{\ln 5 - 5 \ln 7}{\ln 7 - 2 \ln 5} \right\}$

8. $2 \cdot (1 - e^{-0.5x}) = \frac{1}{4}$ $\quad | : 2$

$\Leftrightarrow \quad 1 - e^{-0{,}5x} = \frac{1}{8} \quad | -1$

$\Leftrightarrow \quad -e^{-0{,}5x} = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8} \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}5x} = \frac{7}{8} \quad | \ln \_$

$\Leftrightarrow \quad -0{,}5x = \ln \frac{7}{8} \quad | \cdot (-2)$

$\Leftrightarrow \quad x = \underbrace{\overbrace{-2}^{<0} \cdot \overbrace{\ln \tfrac{7}{8}}^{<0}}_{} > 0$

ist das >0 oder <0 ??

$\ln \underbrace{\tfrac{7}{8}}_{<1} < 0$

Achtung:
Für $\dfrac{\ln 8}{\ln 7}$
gibts keine einfache Rechenregel!

$x = -2 \ln \frac{7}{8}$

$= -2 \cdot \ln \left(\frac{8}{7}\right)^{-1}$

$= (-2) \cdot (-1) \cdot \ln \frac{8}{7}$

$= 2 \cdot \ln \frac{8}{7}$

$\mathbb{L} = \{ \underbrace{2 \cdot \ln \tfrac{8}{7}}_{>0} \}$

$\ln \frac{8}{7} = \ln 8 - \ln 7$

Aufgabe 1.53.

Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist $\dfrac{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^2}}{\sqrt{x}} = x^k$ (unabhängig vom Wert von x)?

$= x^3 \cdot x^{\frac{2}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = x^3$

$k = 3$

Aufgabe 1.54.
Lösen Sie die Formel

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{a}\cdot e^b} \qquad \Big| \cdot \sqrt{a}\cdot e^b$$

nach x, a und b auf.

nach x: (*) $y\cdot\sqrt{a}\cdot e^b = x^2 \quad \big|\sqrt{}$

$$x = \pm\sqrt{y\cdot\sqrt{a}\cdot e^b} = \pm\, y^{\frac{1}{2}}\cdot\big(a^{\frac{1}{2}}\big)^{\frac{1}{2}}\cdot\big(e^b\big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\, y^{1/2}\cdot a^{1/4}\cdot e^{b/2}$$

$\overbrace{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}^{a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}$ $\qquad (e^b)^2 = e^{2b}$

nach a: aus (*)

$$\sqrt{a} = \frac{x^2}{y\cdot e^b} \quad \big|\,^2 \qquad a = \left(\frac{x^2}{y\cdot e^b}\right)^2 = \frac{x^4}{y^2\cdot e^{2b}}$$

nach b: aus (*)

$$e^b = \frac{x^2}{y\cdot\sqrt{a}} \quad \big|\ln$$

$$b = \ln\left(\frac{x^2}{y\cdot\sqrt{a}}\right) = 2\cdot\ln x - \ln y - \ln\sqrt{a} = 2\ln x - \ln y - \tfrac{1}{2}\ln a$$

1.6 Gleichungen mit Beträgen

Gleichungen mit Beträgen löst man am besten, indem man durch *Fallunterscheidung* die Betragsstriche eliminiert:

$a\in\mathbb{R}$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a\geq 0\\ -a & \text{falls } a<0\end{cases}$$

$a<0 \qquad -a \qquad 0$

Aufgabe 1.55. Bestimme die Lösungsmenge von

1. $|2x-3| = 2-x$

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{falls } 2x-3\geq 0\\ -(2x-3) & \text{falls } 2x-3<0\end{cases} = \begin{cases} 2x-3 & \text{falls } \boxed{x\geq \frac{3}{2}}\\ -2x+3 & \text{falls } \boxed{x<\frac{3}{2}}\end{cases}$$

$2x-3\geq 0 \iff 2x\geq 3 \iff x\geq 3/2$

$2x-3<0 \quad \vdots \quad x<\frac{3}{2}$

$2x-3<0 \qquad \frac{3}{2} \qquad 2x-3\geq 0$

Fallunterscheidung:

1. Fall $\boxed{x\geq\frac{3}{2}}$

$$|2x-3| = 2-x$$
$$\iff 2x-3 = 2-x$$
$$\iff 3x = 5$$
$$\iff x = \frac{5}{3} \geq \frac{3}{2}$$

d.h. die Lösung $x=\frac{5}{3}$ liegt im betrachteten Bereich, $\frac{5}{3}\in\mathbb{L}$

2. Fall $\boxed{x<\frac{3}{2}}$

$$|2x-3| = 2-x$$
$$\iff -2x+3 = 2-x$$
$$\iff -x = -1$$
$$\iff x = 1 < \frac{3}{2}$$

liegt im betrachteten Bereich! $\Rightarrow 1\in\mathbb{L}$

Insgesamt:

$$\mathbb{L} = \left\{1, \frac{5}{3}\right\}$$

Alternativ kann man auch eine Probe machen (An sich ist Probe immer gut zur Kontrolle)

$x_1 = \frac{5}{3}$

l.S. $\quad \left|2 \cdot \frac{5}{3} - 3\right| = \left|\frac{10}{3} - \frac{9}{3}\right| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

r.S. $\quad 2 - \frac{5}{3} = \frac{6}{3} - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ "=" ✓ $\quad x_1 \in \mathbb{L}$

$x_2 = 1 \quad$ l.S. $\quad |2 \cdot \overset{x}{\widetilde{1}} - 3| = |2-3| = |-1| = 1$

r.S. $\quad 2 - 1 = 1$

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ "=" ✓ $\quad x_2 \in \mathbb{L}$

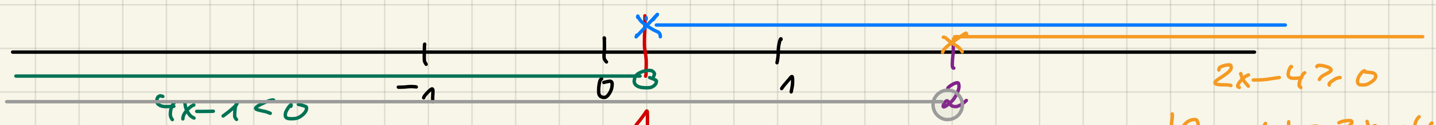
(1.55) ② $\qquad \underbrace{|4x-1|} + |2x-4| = 10$

$4x - 1 \overset{<}{\underset{\geq}{\overset{\geq}{=}}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \overset{\geq}{=} \frac{1}{4}$ (<)

$2x - 4 \overset{<}{\overset{\geq}{=}} 0 \qquad x \overset{\geq}{\underset{<}{=}} 2$

$|4x-1| = 4x-1$

$4x-1 \geq 0$



$|2x-4| = 2x-4$

$|4x-1| = 1-4x$

$2x-4<0$

$|2x-4| = 4-2x$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ $\quad \underbrace{\qquad\qquad}$ $\quad \underbrace{\qquad\qquad}$

$2x-4<0$ und $4x-1<0$ ①

$2x-4<0$, $4x-1>0$ ②

$2x-4>0$, $4x-1>0$ ③

Fallunterscheidung:

① $\quad x < \frac{1}{4}$

$|4x-1| + |2x-4| = 10$

$(1-4x) + (4-2x) = 10$

$5 - 6x = 10$

$-6x = 5$

$x = -\frac{5}{6} \in \mathbb{L}$

liegt im Bereich ①, da $-\frac{5}{6} < \frac{1}{4}$

② $\quad \frac{1}{4} \leq x < 2$

$|4x-1| + |2x-4| = 10$

$4x-1 + 4-2x = 10$

$2x + 3 = 10$

$2x = 7$

$x = \frac{7}{2} > 2$

liegt nicht in ② $\quad \notin \mathbb{L}$

Fehlerquelle

Bemerkung (Vorsicht)

$5\frac{1}{3}$ bedeutet $5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$

$\neq$

$5\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

2. $|4x-1|+|2x-4|=10$

(3) $x \geq 2$

$|4x-1|+|2x-4|=10$

$4x-1+2x-4=10$

$6x-5=10$

$x=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}\geq 2$ ✓

liegt in (3), d.h. $\in \mathbb{L}$

$\mathbb{L}=\left\{-\frac{5}{6}, \frac{5}{2}\right\}$

Korrektur ggüber Video!

Probe:

$x_1=-\frac{5}{6}$ l.S. $\left|-4\cdot\frac{5}{6}-1\right|+\left|2\cdot\frac{-5}{6}-4\right|=\left|\frac{13}{3}\right|+\left|-\frac{17}{3}\right|$

$=\frac{13}{3}+\frac{17}{3}=\frac{30}{3}=10$ = r.S. ✓

$x_2=\frac{7}{2}$ l.S. $\left|4\cdot\frac{7}{2}-1\right|+\left|2\cdot\frac{7}{2}-4\right|=|14-1|+|3|$

$=|13|+|3|=13+3=16\neq 10=$ r.S ↯

$x_3=\frac{5}{2}$ l.S $\left|4\cdot\frac{5}{2}-1\right|+\left|2\cdot\frac{5}{2}-4\right|=|9|+|1|=10=$ r.S ✓

1.7 Trigonometrische Funktionen

Definition 1.56. *Definitionen am rechtwinkligen Dreieck:*

$$\sin\alpha=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} \qquad \cos\alpha=\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan\alpha=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha=\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

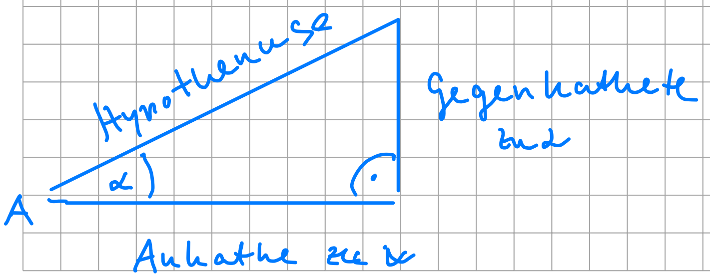
Co-tangens

Cosekans

Sekans

$$\csc\alpha=\frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Gegenkathete}}=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha=\frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Ankathete}}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

Dadurch sind die Funktionen für Winkel $0<\alpha<90°$ definiert.

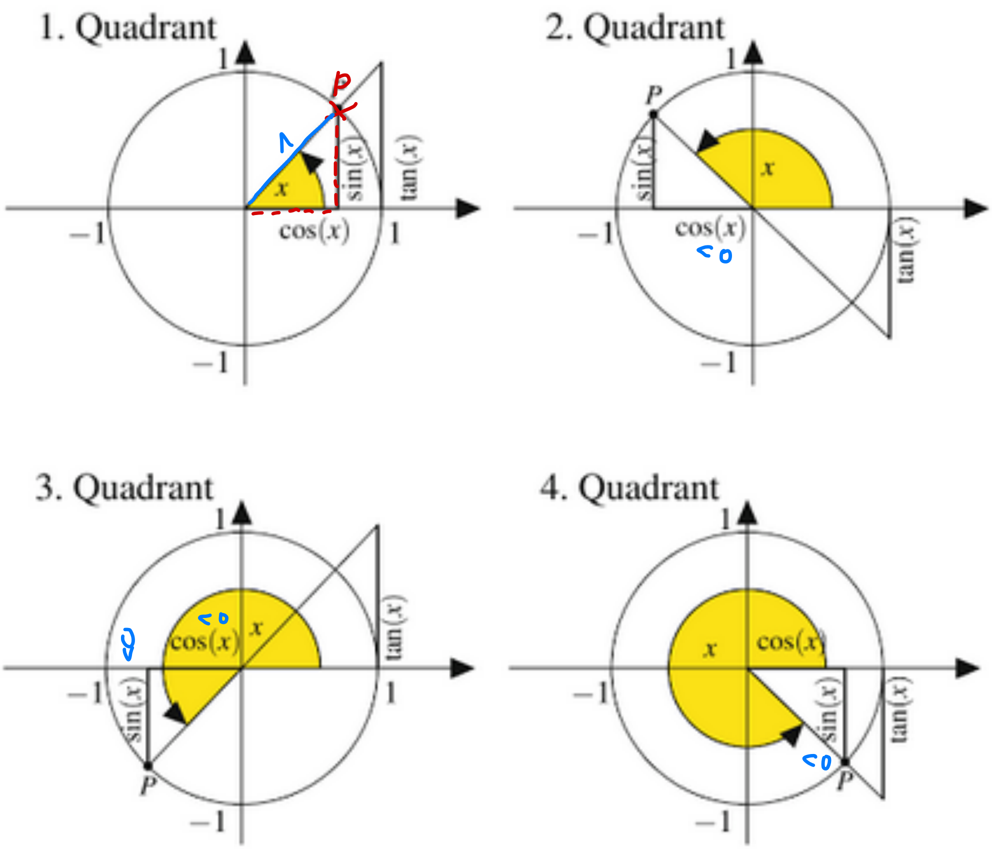


$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$

Für andere Winkel verwenden wir den Einheitskreis (aus Göllmann, Hübl et.al., Mathematik für Ingenieure)

x : Winkel

$P = (\cos x, \sin x)$



Da der Radius der Kreises 1 ist und damit die Hypothenuse die Länge 1 hat, entsprechen die Winkelfunktionen im 1. Quadranten direkt den Seitenlängen.

Definition 1.57. *Definitionen am Einheitskreis*:
Wir betrachten den Punkt $P = (x_0, y_0)$ auf dem Einheitskreis, der auf der Halbgeraden liegt, die um den Winkel α gegen die positive x-Achse gedreht ist.

1. $\sin\alpha = y_0$ $\quad$ y-*Koordinate* des Schnittpunkts mit dem Einheitskreis
2. $\cos\alpha = x_0$ $\quad$ x-*Koordinate* des Schnittpunkts mit dem Einheitskreis
3. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
4. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
5. $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$
6. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

Definition 1.58.
Das *Bogenmaß b* eines Winkels α ist die Länge des Kreisbogens am Einheitskreis, den der Winkel α einschließt. Da $\pi = 180°$, gilt:

radiant

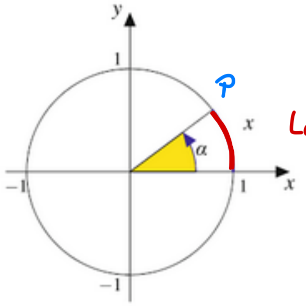
$$b = \frac{\pi}{180°}\alpha \qquad \alpha = \frac{180°}{\pi}b$$

Achtung:
Beim Taschenrechner auf die Einstellung achten!

rad grad deg

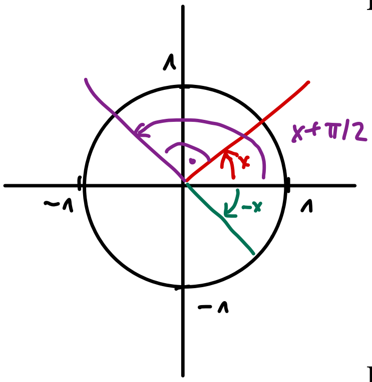
Umfang des Einheitskreises ist $2\pi \cdot r = 2\pi$

$360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$
$180° \mathrel{\hat{=}} \pi$



Länge dieses Bogens ist das Bogenmaß des Winkels α

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar:



Bemerkung 1.59.

1. $\sin(-x) = -\sin(x)$
2. $\cos(-x) = \cos(x)$
3. $\tan(-x) = -\tan(x)$
4. $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$
5. $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
6. $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
7. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
8. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
9. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

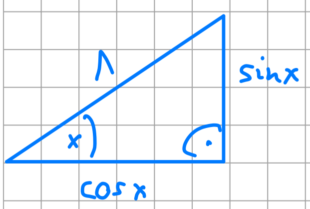
$\sin^2 x := (\sin x)^2 \neq \sin(x^2)$!
$\cos^2 x := (\cos x)^2 \neq \cos(x^2)$

Bemerkung 1.60. Satz des Pythagoras

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$| : \cos^2 x \quad (\neq 0)$
$| : \sin^2 x \quad (\neq 0)$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



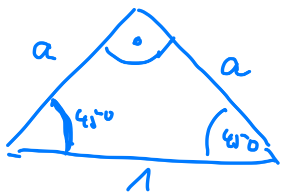
$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{\sec^2 x} = \tan^2 x + 1$

$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \iff 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Bemerkung 1.61. Spezielle Werte:

α	0°	30°	45°	60°	90°
b	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.

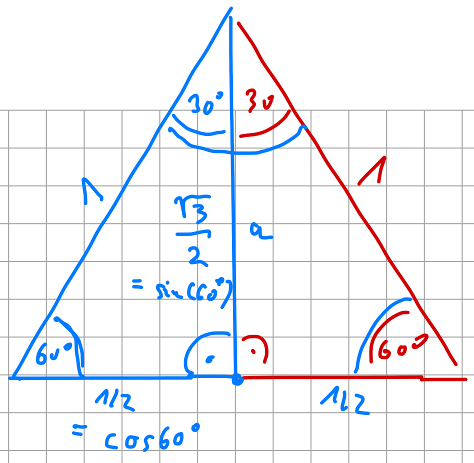
$\frac{\sqrt{0}}{2} \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{4}}{2}$



Pythagoras:

$a^2 + a^2 = 1^2$
$2a^2 = 1$
$a^2 = \frac{1}{2}$
$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$



Gleichseitiges Dreieck!

Pythagoras

$a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$

$a^2 = \frac{3}{4}$ $\qquad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Bemerkung 1.62. **Additionstheoreme**

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Damit folgt aus den Symmetrieeigenschaften:

$\sin(x-y) = \sin(x + (-y)) = \sin(x)\underbrace{\cos(-y)}_{=\cos y} + \cos x \underbrace{\sin(-y)}_{=-\sin y}$
$= \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$
$= \cos x \cos y + \sin x \sin y$

Spezialfälle sind die **Doppelwinkel-Formeln**

$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

und daraus die **Halbwinkel-Formeln**

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Pythagoras

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

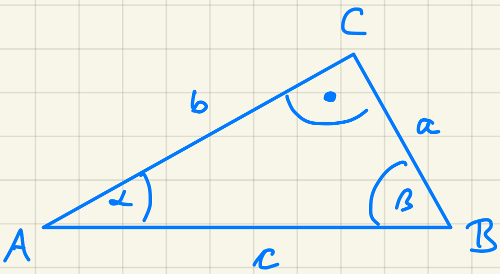
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$
$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}\left[\cos(2x) + 1\right]$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$

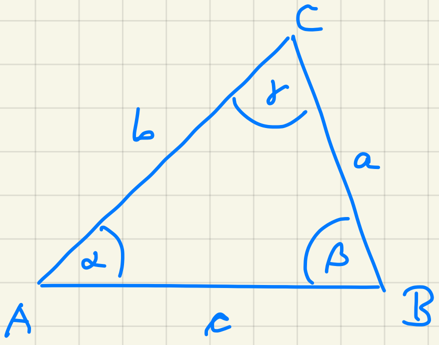
$2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$



Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Beliebiges Dreieck

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Cosinus-Satz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Sinussatz

$$\underbrace{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

in $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{L}$ ist eine Gerade
$2x+3y=1$

$0x+0y=0$
$\Leftrightarrow \quad 0=0$
$\mathbb{L}=\mathbb{R}^2$

$0x+0y=1$
$\Leftrightarrow \quad 0=1$
$\mathbb{L}=\emptyset$

1.8 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Eine lineare Gleichung in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.
Die Lösungsmenge ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Sie besteht aus den n-Tupeln $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, die die Gleichung erfüllen. Meistens ist das eine *Hyperebene* im $\mathbb{R}^n$, d.h. ein *linearer Unterraum* des $\mathbb{R}^n$ der *Dimension* $n-1$.
Speziell:
Für $n=2$ ist die Lösungsmenge meistens eine Gerade im $\mathbb{R}^2$.
Für $n=3$ ist die Lösungsmenge meistens eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. $\quad 2x+3y-z=4$

Definition 1.63.
Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{lccccccccc}
(\mathrm{I}) & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
(\mathrm{II}) & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
(m) & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

a_{ij}
Zeile — Spalte $\hat{=}$ Variable

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ für alle $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ heißt *lineares Gleichungssystem (LGS)* mit m Gleichungen und n Unbestimmten (Variablen) $x_1, ..., x_n$.
Die a_{ij} heißen die *Koeffizienten* des Gleichungssystems. Der erste Index gibt die Zeile, der zweite die Spalte an, in der der Koeffizient steht.
Koeffizientenmatrix:

Tabelle mit den Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Anzahl Zeilen (m), Anzahl Spalten (n)

Symbol
Anzahl $\quad$ #

Anzahl Zeilen
Zeilen

Die Zahlen $b_1, \ldots, b_m$ heißen *Störglieder* oder *rechte Seite* des Gleichungssystems.
Ist $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, heißt das Gleichungssystem *homogen*, sonst *inhomogen*.

$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ Vektor der rechten Seite

Ist $m=n$, also wenn es genau so viele Gleichungen wie Unbekannte gibt, so spricht man von einem *quadratischen linearen Gleichungssystem.*

Die Lösungsmenge eines LGS besteht aus den n-Tupeln $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, die alle Gleichungen des LGS gleichzeitig erfüllen. Dies ist die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen.

homogene lineare Gleichung in $\mathbb{R}^2$
$2x+3y=0$
$(0,0) \in \mathbb{L}$

$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ohne Restriktion $\hat{=}$ n Freiheitsgraden
Jede lineare Gleichung zwischen $x_1, \ldots, x_n$ nimmt im Normalfall genau einen Freiheitsgrad weg.
LGS mit n Gleichungen (d.h. quadratisches LGS):
Im Normalfall werden dadurch n Freiheitsgrade weggenommen,
d.h. es gibt einen Lösungspunkt im $\mathbb{R}^n$
Man sagt: die Lösung ist eindeutig / es gibt genau eine Lösung

Im $\mathbb{R}^3$

Eine lineare Gleichung: $\mathbb{L}$ ist eine Ebene (normale weise)

3 Gleichungen im LGS

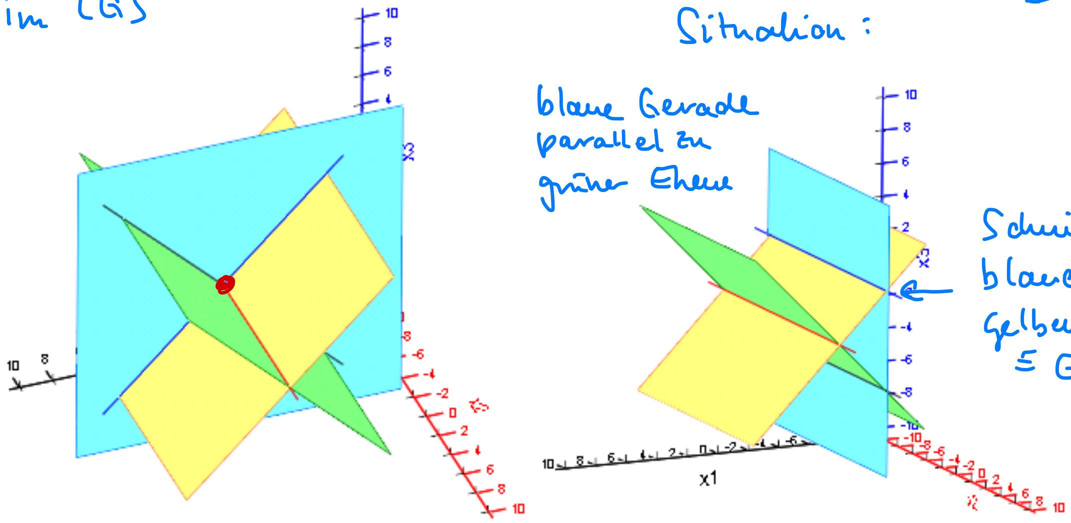
$\mathbb{L}$ = Schnittmenge von 3 Ebenen

Im Normalfall: genau 1 Punkt

Eine besondere Situation: $\mathbb{L} = \emptyset$

blaue Gerade parallel zu grüner Ebene

Schnittmenge blaue Ebene/gelben Ebene = Gerade



http://mathenexus.zum.de/html/geometrie/lage_zueinander/LageEEE_Faelle.html

Das *Gauß'sche Eliminationsverfahren* oder der *Gauß-Algorithmus* ist ein Rechenschema (Algorithmus) zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Er besteht aus zwei Teilen: Dem Rückwärtseinsetzen und der Vorwärtselimination.

1. Rückwärtseinsetzen

Aufgabe 1.64. Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

Dreiecksform

Zeilen-Stufen-Form

Gestaffelte Form

$$\begin{array}{rrrrrrrl} (\mathrm{I}) & x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 12 \\ (\mathrm{II}) & & - & 5x_2 & - & 16x_3 & = & -27 \\ (\mathrm{III}) & & & & - & 100x_3 & = & -200 \end{array}$$

Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix}$$

Diagonal

unter der Diagonale nur Nullen

aus (III): $-100 x_3 = -200 \quad | : (-100)$

$\boxed{x_3 = 2}$

Einsetzen in II: $-5x_2 - 16 \cdot 2 = -27 \quad | +32$

$-5x_2 = 5 \quad | : (-5)$

$\boxed{x_2 = -1}$

Einsetzen in I: $x_1 - (-1) + 5 \cdot 2 = 12$

$x_1 + 11 = 12$

$\boxed{x_1 = 1}$

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

oft als Spaltenvektor geschrieben

Bemerkung 1.65.
Dieses Vorgehen heißt *Rückwärtseinsetzen*. Es funktioniert, wenn das Gleichungssystem eine besondere Gestalt hat: Das LGS aus (1.57) ist in *Dreiecksform*, *gestaffelter Form* oder *Zeilen-Stufen-Form*; d.h. es enthält unterhalb der Diagonalen keine von 0 verschiedenen Einträge.

In jeder Zeile kommt mindestens eine Variable weniger vor als in der vorhergehenden Zeile.

2. Vorwärtselimination

Die Idee des Gauß-Algorithmus ist:
Wir bringen das Gleichungssystem in Dreiecksform durch eine Reihe von Äquivalenzumformungen, sogenannte *elementare Zeilenumformungen*:

- Zwei Gleichungen dürfen miteinander vertauscht werden.
- Jede Gleichung darf mit einem beliebigen Faktor $\neq 0$ multipliziert werden
- Zu jeder Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Gleichung des Systems addiert werden.

Durch diese Umformungen wird die Lösungsmenge des LGS nicht verändert.

Aufgabe 1.66.
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -8 & -1 \\ 10 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (I) & x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 12 \\ (II) & 3x_1 & - & 8x_2 & - & x_3 & = & 9 \\ (III) & 10x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} |\cdot(-3) \;|\cdot(-10) \text{ Pivotzeile} \\ \leftarrow \quad x_1\text{: Pivotelement} \\ \leftarrow \end{array}$$

Pivot: Dreh- und Angelpunkt

Wir wählen die erste Zeile als sogenannte *Pivot-Zeile* (das bedeutet: Dreh- und Angelpunkt). Der Koeffizient von x_1 heißt *Pivotelement*.

$$\frac{15}{-5}\cdot(-1)$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (I) & x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 12 \\ (II) & & & \boxed{-5x_2} & - & 16x_3 & = & -27 \\ (III) & & & 15x_2 & - & 52x_3 & = & -119 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ |\cdot 3 \\ \leftarrow \end{array}$$

Pivotzeile
x_2: Pivotelement

$$\begin{array}{lrcrcrcr} (I) & x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 12 \\ (II) & & & -5x_2 & - & 16x_3 & = & -27 \\ (III) & & & & & -100x_3 & = & -200 \end{array}$$

Zeilen-Stufen-Form

LGS aus 1.64
lösbar mit Rückwärtseinsetzen

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Bemerkung 1.67. Dieses Verfahren, um ein LGS in Dreiecksform zu bringen, heißt *Vorwärtselimination*. Manchmal muss man trickreicher vorgehen als in diesem Beispiel; z.B. muss man eine andere Zeile als Pivot-Zeile wählen oder auch die Reihenfolge der Variablen vertauschen.

III. Gauss'sches Eliminationsverfahren

Definition 1.68. Das *Gauss'sche Eliminationsverfahren* ist die Berechnung der Lösungsmenge eines LGS durch folgende Schritte:

1. Bringe das LGS auf Dreiecksform durch Vorwärtselimination.
2. Bestimme die Lösungsmenge durch Rückwärtseinsetzen.

Zur Reduzierung des Schreibaufwands lässt man die Variablen im Gleichungssystem oft weg. Man schreibt das LGS meistens so:

Matrizen-Notation

$$
\begin{array}{ccc|cll}
x_1 & x_2 & x_3 & & & \\
\hline
1 & -1 & 5 & 12 & |\cdot(-3) & |\cdot(-10) \\
3 & -8 & -1 & 9 & \leftarrow & \\
10 & 5 & -2 & 1 & & \leftarrow
\end{array}
$$

← Pivotzeile

$$
\begin{array}{ccc|cl}
1 & -1 & 5 & 12 & \\
0 & -5 & -16 & -27 & |\cdot 3 \\
0 & 15 & -52 & -119 & \leftarrow
\end{array}
$$

Zeilen-Stufen-Form

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
\mathrm{I} & 1 & -1 & 5 & 12 \\
\mathrm{II} & 0 & -5 & -16 & -27 \\
\mathrm{III} & 0 & 0 & -100 & -200
\end{array}
$$

Rückwärtseinsetzen

aus (III) $-100\,x_3 = -200$

$x_3 = 2$

in (II): $-5x_2 - 32 = -27$

$x_2 = -1$

in (I): $x_1 + 1 + 10 = 12$

$x_1 = 1$

IV. Beispiele und Lösungsverhalten von linearen Gleichungssystemen

Ein lineares Gleichungssystem hat nicht immer eine eindeutig bestimmte Lösung. Allgemein kann man sagen:

Satz 1.69.
Für die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems gibt es ausschließlich die folgenden drei Möglichkeiten:

1. Es gibt eine eindeutige Lösung, also genau ein Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, das das LGS löst. $\mathbb{L}$ besteht aus genau einem Element
2. Es gibt keine Lösung (mit anderen Worten: die Lösungsmenge ist die leere Menge). d.h. $\mathbb{L} = \emptyset$
3. Es gibt unendlich viele Lösungen.

Führt man den Gauß-Algorithmus durch, findet man im Verlauf der Rechnung heraus, welche Variante vorliegt.

Beispiel 1.70. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
(\mathrm{III}) & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\
(\mathrm{II}) & -3x_1 & + & x_2 & & & = & 6 \\
(\mathrm{I}) & x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -9
\end{array}
$$

In Matrixform:

		x_1	x_2	x_3		
Pivot →	(I)	1	-4	2	-9	$\vert\cdot 3\ \vert\cdot(-4)$
	(II)	-3	1	0	6	←
	(III)	4	2	-2	-2	←
		1	-4	2	-9	
Pivot →		0	-11	6	-21	$\vert\cdot\frac{18}{11}$
		0	18	-10	34	
Zeilen-Stufen-Form ✓	(I)	1	-4	2	-9	
	(II)	0	-11	6	-21	
	III	0	0	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{4}{11}$	

NR:

$$\frac{6\cdot 18}{11} - \frac{11}{11} = -\frac{2}{11}$$

$$\frac{-21\cdot 18}{11} + \frac{34\cdot 11}{11} = \frac{-378+374}{11} = -\frac{4}{11}$$

Rückwärts Einsetzen:

(III) $-\frac{2}{11}\cdot x_3 = -\frac{4}{11} \Rightarrow \boxed{x_3 = 2}$

(II) $-11x_2 + 6\cdot 2 = -21$

$-11x_2 = -33 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3}$

(I) $x_1 - 12 + 4 = -9$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -1}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

besteht aus genau einem Punkt, hat eine eindeutige Lösung.

Beispiel 1.71. Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 26 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ -3x_1 & + & 5x_2 & - & 6x_3 & = & 2 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3		
Pivot →	1	-3	5	26	$\vert\cdot(-2)\ \vert\cdot 3$
	2	-2	1	12	←
	-3	5	-6	2	←
	1	-3	5	26	
Pivot →	0	4	-9	-40	$\vert\cdot 1$
	0	-4	9	80	←

x_1	x_2	x_3		
1	-3	5	26	(I)
0	4	-9	-40	(II)
0	0	0	40	III

Zeilen-Stufen-Form

aus III: $\underbrace{0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 40}_{0\,=\,40}$ ↯

$\mathbb{L} = \emptyset$ keine Lösung!

Beispiel 1.72.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ 24x_1 & + & 10x_2 & - & 13x_3 & = & 25 \\ -6x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & -7 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3		
	3	1	-2	3	$\vert\cdot(-8)\vert\cdot 2$
	24	$+10$	-13	25	$\leftarrow$
	-6	-4	1	-7	$\leftarrow$
	3	1	-2	3	
	0	2	3	1	$\cdot 1$
redundant → (überflüssig)	0	-2	-3	-1	$\leftarrow$
(I)	3	1	-2	3	
Zeilen-Stufen-Form (II)	0	2	3	1	
(III)	0	0	0	0	

Pivot →

Rückwärtseinsetzen:

aus III

$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0 x_3 = 0$

$0 = 0$

keine Restriktion!

redundant ?

Eine der Variablen x_2, x_3 kann man frei wählen (irgend ein $t \in \mathbb{R}$ einsetzen), die andere ergibt sich dann aus der Gleichung

Aus (II) $2\cdot x_2 + 3x_3 = 1$.

Sei $x_3 = t$

t freier Parameter

$2x_2 + 3t = 1$

$2x_2 = 1 - 3t \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t$

Aus (I) $3x_1 + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t}_{x_2} - \underbrace{2t}_{x_3} = 3$

$\Rightarrow 3x_1 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2}t \Rightarrow x_1 = \frac{5}{6} + \frac{7}{6}t$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + \frac{7}{6}t \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ohne } t} + t\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 7/6 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Vielfache von } t} \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Parameterform einer Geraden im $\mathbb{R}^3$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen, es gibt einen Freiheitsgrad (t frei wählbar)

Den Gauß-Algorithmus kann man auch auf nicht-quadratische Gleichungssysteme anwenden:

Beispiel 1.73.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & - & 26x_3 & + & 9x_4 & = & -10 \\ -3x_1 & - & 5x_2 & + & 19x_3 & - & 7x_4 & = & 7 \end{array}$$

$\mathbb{L} = \emptyset$ oder

$\mathbb{L}$ hat unendlich viele Elemente

Mächtigkeit von $\mathbb{L}$: $|\mathbb{L}| = \infty$

Pivot

$$
\begin{array}{cccc|c|l}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \\
\hline
1 & 2 & -7 & 2 & -3 & \mid\cdot(-4)\ \mid\cdot 3 \\
4 & 7 & -26 & 9 & -10 & \leftarrow \\
-3 & -5 & 19 & -7 & 7 & \leftarrow \\
\hline
1 & 2 & -7 & 2 & -3 & \\
0 & -1 & 2 & 1 & 2 & \mid\cdot 1 \\
0 & 1 & -2 & -1 & -2 & \leftarrow \\
\hline
1 & 2 & -7 & 2 & -3 & \\
0 & -1 & 2 & 1 & 2 & \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \\
\hline
\end{array}
$$

redundant →

(I)

(II)

$0=0$ redundant

(Erwartung: 4 Unbekannte, 2 Gleichungen
⇒ $\mathbb{L}$ 2-dimensional)

aus II

$$-x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$

2 der Variablen kann man frei wählen,
z.B. $\boxed{x_3 = t} \in \mathbb{R}$, $\boxed{x_4 = s} \in \mathbb{R}$

$$-x_2 + 2t + s = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = -2 + 2t + s}$$

aus (I)

$$x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -3$$

$$x_1 + 2\cdot(-2+2t+s) - 7t + 2s = 3$$

$$x_1 - 4 + 4t + 2s - 7t + 2s = -3$$

$$x_1 - 4 - 3t + 4s = 1$$

$$\boxed{x_1 = 1 + 3t - 4s}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+3t-4s \\ -2+2t+s \\ t \\ s \end{pmatrix} \,\middle|\, t,s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t,s \in \mathbb{R} \right\}$$

Parameterform einer Ebene im $\mathbb{R}^4$

2-dimensional

Bemerkung 1.74.
Ein Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbestimmten heißt *unterbestimmtes Gleichungssystem*. Ein unterbestimmtes LGS hat entweder gar keine oder unendlich viele Lösungen.
Ein Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbestimmten heißt *überbestimmtes Gleichungssystem*. Ein überbestimmtes LGS enthält sicher *redundante* (überflüssige) Gleichungen. Es kann genau eine, unendlich viele oder gar keine Lösung besitzen.

Beispiel 1.75.

überbestimmt
3 Unbekannte
4 Gleichungen

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\
3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 5 \\
2x_1 & - & x_2 & + & 11x_3 & = & 6
\end{array}
$$

x_1	x_2	x_3		
1	−1	3	3	$\vert\cdot 1$ $\vert\cdot(-3)$ $\vert\cdot(-2)$
−1	2	2	−2	←
3	4	−1	5	←
2	−1	11	6	←
1	−2	3	3	
0	1	5	1	$\vert\cdot(-7)$ $\vert\cdot(-1)$
0	7	−10	−4	←
0	1	5	0	←

x_1	x_2	x_3		
1	−2	3	3	I
0	1	5	1	II
0	0	−45	−11 ?	III
0	0	0	−1	IV

(IV) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$

$0 = -1$ ↯

$\mathbb{L} = \emptyset$, keine Lösung

Anwendungsbeispiel: Polynom-Interpolation

Im CAD werden oft Kurven gesucht, die durch polynomiale Gleichungen gegeben sind und auf denen vorgegebene Punkte liegen. Ein sehr einfacher Fall ist folgender:

Beispiel 1.76. Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c in der Parabelgleichung $y = ax^2 + bx + c$ so, dass die Parabel durch die Punkte $P_1 = (1, 4)$, $P_2 = (-2, -8)$ und $P_3 = (3, 2)$ verläuft.

Gleichung der Parabel $y = ax^2 + bx + c$

$P_1(1,4)$ liegt auf der Parabel $\Leftrightarrow$ $4 = a + b + c$ (I)

$P_2(-2,-8)$: $-8 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c$

$-8 = 4a - 2b + c$ (II)

$P_3(3,2)$: $2 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c$

$2 = 9a + 3b + c$ (III)

(I), (II), (III) sind lineare Gleichungen in a, b, c

LGS

	c	b	a		
(I)	1	1	1	4	$\vert\cdot(-1)$
(II)	1	−2	4	−8	←
(III)	1	3	9	2	←
	1	1	1	4	
	0	−3	3	−12	$\vert:3$
	0	2	8	−2	$\vert:2$
	1	1	1	4	
	0	−1	1	−4	$\vert\cdot 1$
	0	1	4	−1	←
(I)	1	1	1	4	
(II)	0	−1	1	−4	
(III)	0	0	5	−5	

Rückwärtseinsetzen:

aus (III) $5\cdot a = -5$ $\Rightarrow$ $\boxed{a = -1}$

aus (II) $-b + a = -4$

$-b - 1 = -4$

$\boxed{b = 3}$

aus (I) $c + b + a = 4$

$c + 3 - 1 = 4$

$\boxed{c = 2}$

Lösungsparabel:

$\boxed{y = -x^2 + 3x + 2}$

Probe: $x = 1 \Rightarrow y = 4$ ✓ $x = -2 \Rightarrow -8$ ✓ $x = 3$, $y = 2$ ✓