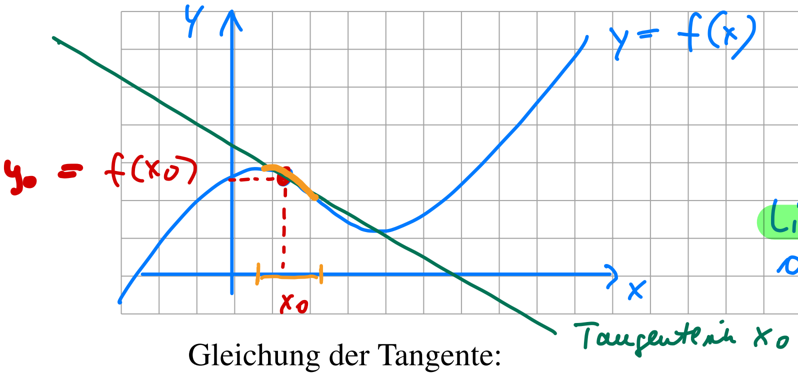
Kapitel 8

Anwendungen der Analysis

Gegeben ist eine reelle Funktion f, die in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist (d.h. in einem offenen Intervall, das x_0 enthält).
Die Ableitung von f an der Stelle x_0 kann man auf verschiedene Arten interpretieren:

1. Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0.



x_0 Arbeitspunkt

Tangente in x_0 = Lineare Approximation an den Graph von f nahe bei x_0

Gleichung der Tangente:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Setzt man $y_0 := f(x_0)$, erhält man

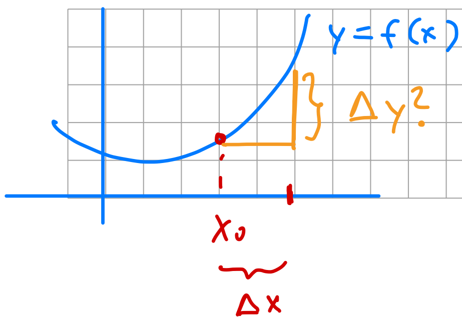
$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Unter allen Geraden, die durch (x_0, y_0) verlaufen, ist die Tangente diejenige, die den Graphen der Funktion f in einer (eventuell kleinen) Umgebung von x_0 am besten approximiert.

2. Die Ableitung $f'(x_0)$ gibt die momentane Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x_0 an. Das heißt, für kleine Änderungen Δx von x_0 gilt:

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y \to 0}{\Delta x \to 0}$$

wobei $\Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Im Grenzwert benutzt man die inifinitesimale Schreibweise

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x_0}$$

3. Die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 liefert somit eine Aussage darüber, wie stark sich der Funktionswert ändert, wenn sich die unabhängige Variable (etwas) verändert.

Änderung des Funktionswerts $=$ $$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x \quad \text{wenn } |\Delta x| \text{ klein ist.}$$

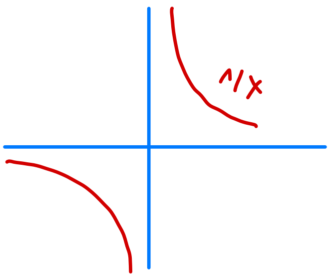
Diesen Sachverhalt drückt man in differentieller Schreibweise mit dem *(totalen) Differential* an der Stelle x_0 aus:

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

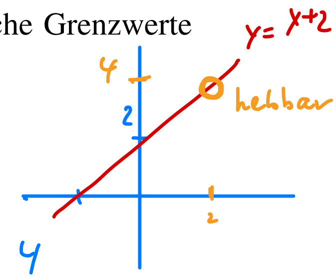
Ein Anwendung des totalen Differentials ist die Fehlerrechung.

8.1 Grenzwerte mit der Regel von l'Hôpital

Hyperbel



Wir haben den Begriff *Grenzwert* bereits intuitiv verwendet. Manche Grenzwerte sind recht einleuchtend, z.B.

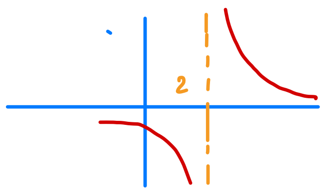


1. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ $= 0$

2. "$\frac{0}{0}$" $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ $\frac{\to 0}{\to 0}$ $= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = 4$

3. $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$ $= +\infty$

$\to$ "$\frac{1}{+0}$"



Für $x \neq 2$ gilt $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$

Wir haben noch nicht mathematisch exakt definiert, was der Grenzwert von Funktionen oder Zahlenfolgen ist, sondern nur mit einem intuitiven Grenzwertbegriff gearbeitet. Darauf beruht auch folgende etwas ungenaue Formulierung:

Definition 8.1.
Sei f eine Funktion. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ sagen wir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

wenn für jede Folge $x_1, x_2, x_3, \dots \in D_f$, die gegen x_0 strebt, die Folge der Funktionswerte

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

gegen den Wert c strebt (konvergiert) .

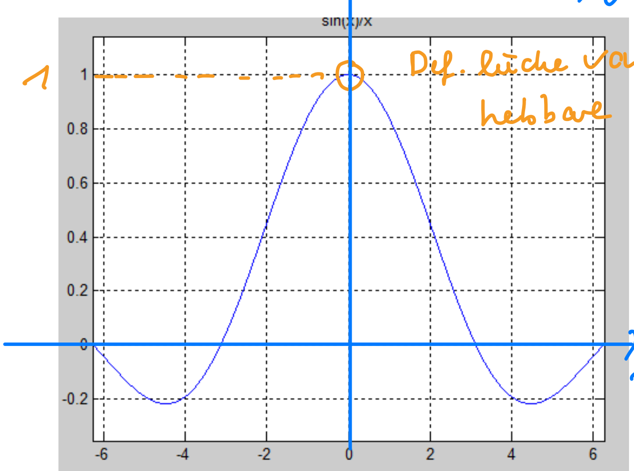
Wichtig ist hierbei, dass das für **jede** Zahlenfolge gelten muss, die gegen x_0 konvergiert. Es genügt nicht, dass es für eine oder ein paar Folgen gilt. Im folgenden argumentieren wir dennoch ungenau, basierend auf einem Beispiel.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

„$\frac{0}{0}$" – Situation

Beispiel 8.2. Was ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\overset{\to 0}{\sin x}}{\underset{\to 0}{x}}$?



x	sin(x)/x
1.000000000	0.841470985
0.100000000	0.998334166
0.010000000	0.999983333
0.001000000	0.999999833
0.000100000	0.999999998

Anscheinend ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Stetige Fortsetzung von f:

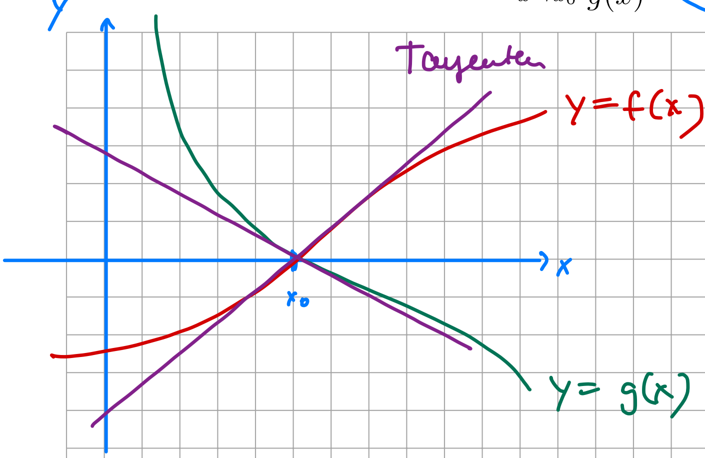
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Mit der Regel von L'Hospital haben wir in vielen Fällen eine Methode zur Verfügung, mit der man solche Grenzwerte berechnen kann.

Bemerkung 8.3.
Seien $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbare Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Was ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 0}{g(x)}}?$$

„$\frac{0}{0}$" ?? unbestimmt



x_0 ist gemeinsame Nullstelle von f und g

Idee:

Approximiere f und g durch die Tangenten in x_0

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0)}_{=0} + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$g(x) \approx \underbrace{g(x_0)}_{=0} + g'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)\cdot \cancel{(x - x_0)}}{g'(x_0)\cdot \cancel{(x - x_0)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

falls $g'(x_0) \neq 0$

Satz 8.4 (Regel von L'Hospital).
Gesucht ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \begin{matrix}\nearrow 0 \\ \searrow 0\end{matrix}$$

Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, sagt man: Der Grenzwert hat die *unbestimmte Form*

$$\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, sagt man: Der Grenzwert hat die *unbestimmte Form*

$$\text{"}\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{"}$$

In diesen Fällen kann man den Grenzwert auf folgende Weise mit Hilfe der Ableitungen von Zähler und Nenner berechnen:

Nur wenn Grenzwert unbestimmte Form hat

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die Regel kann auch für links- oder rechtsseitige Grenzwerte verwendet werden oder beim Grenzwert $x \to \pm\infty$.

Achtung:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Quotientenregel

Beispiel 8.5. Berechne $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \nearrow 0}{x \searrow 0} \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \text{ unbestimmt} \quad \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \nearrow 1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Aufgabe 8.6. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ $\begin{matrix}\nearrow 0 \\ \searrow 0\end{matrix}$ "$\frac{0}{0}$" unbestimmt

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \underline{\underline{1}}$$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ $\begin{matrix}\nearrow \infty \\ \searrow \infty\end{matrix}$ "$\frac{\infty}{\infty}$" unbestimmt

$$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1 \nearrow 1}{e^x \searrow \infty} = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Die Exponentialfunktion steigt schneller als jede Potenzfunktion.

3. $\lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ $\begin{matrix}\to 0 \\ \to 1+1\end{matrix}$ $= \underbrace{\dfrac{0}{2}}_{} = \underline{\underline{0}}$

$\cos\pi = -1$

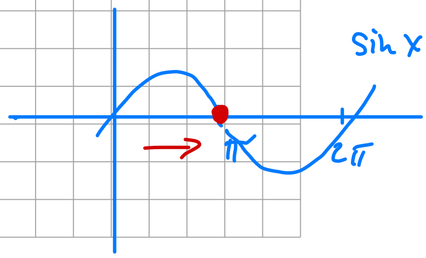
$\sin\pi = 0$

nicht unbestimmt

! L'Hôpital kann nicht angewendet werden !

Hier käme ein falsches Ergebnis raus !

$\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\begin{matrix}\to -1 \\ \to +0\end{matrix}$ $= \underline{\underline{-\infty}}$



Manchmal müssen wir die Regel wiederholt anwenden:

Aufgabe 8.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-x^3-\cos 2x}{x^2}$ $\begin{matrix}\to 1-0-1=0 \\ \to 0\end{matrix}$ „$\dfrac{0}{0}$" unbestimmt

Kettenregel!

$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x^2+2\cdot\sin(2x)}{2x}$ $\begin{matrix}\to 0 \\ \to 0\end{matrix}$ „$\dfrac{0}{0}$" unbest.

$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-6x+4\cos(2x)}{2}$ $\begin{matrix}\to 4 \\ \to 2\end{matrix}$ $= \dfrac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$

Alternativ: Vereinfachen

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-3x^2}{2x} + \dfrac{\sin(2x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{-\dfrac{3}{2}x}_{\to 0} + \dfrac{\sin(2x)}{x}\right)$ $\begin{matrix}\to 0 \\ \to 0\end{matrix}$

$\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos(2x)}{1} = \dfrac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$

Bemerkung 8.8.
Neben den im Grenzwert *unbestimmten* Quotienten

$$„\frac{0}{0}" \qquad „\frac{\pm\infty}{\pm\infty}"$$

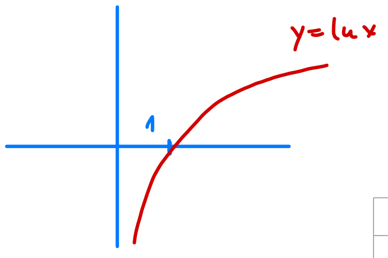
gibt es weitere Ausdrücke, die bei Grenzwertbildung unbestimmt sind:

$$„\infty-\infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0"$$

Bsp: „$\infty - \infty$" $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$

$\lim\limits_{x\to\infty}[\underbrace{(x+5)}_{\to\infty} - \underbrace{x}_{-\infty}] = \lim\limits_{x\to\infty} 5 = 5$

„$\infty - \infty$"



"$0\cdot\infty$" $\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{\to\infty}$ "$0\cdot\infty$"

$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{(5x)}_{f(x)\,\to 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)\,\to +\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} = 5$

"$0\cdot\infty$"

"0^0" aufpassen $\neq$ Unterschied $0^0 = 1$ mathematischer, berechenbarer Ausdruck

$\lim_{x\to x_0} \underbrace{f(x)}_{\to 0}^{\overbrace{g(x)}^{\to 0}}$ "0^0" hier ist alles möglich!

"1^∞" $\lim_{x\to x_0} \underbrace{f(x)}_{\to 1}^{\overbrace{g(x)}^{\to\infty}}$ $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ 0 & 0<q<1 \end{cases}$

Oft kann man die Funktion in Quotientenform mit unbestimmtem Grenzwert bringen, auf die man l'Hôpital anwenden kann.

L'Hôpital gilt nur für Quotienten!

Beispiel 8.9.

1. $\lim_{x\to 0^+} (\underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty})$ "$0\cdot -\infty$" unbestimmt

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x \;\to -\infty}{\frac{1}{x} \;\to +\infty}$ $\left[= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \right]$

"$\frac{-\infty}{+\infty}$" unbestimmt

L'Hôp $= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{1}\right)$

$(x^{-1})' = -x^{-2}$

$= \lim_{x\to 0^+} (-x) = \underline{\underline{0}}$

$\lim_{x\to x_0} \underbrace{f(x)\cdot g(x)}$

$= \frac{f(x)}{1/g(x)}$

$= \frac{g(x)}{1/f(x)}$

Quotient

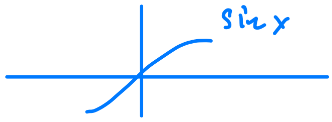
2. $\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{(\ln x)^2}_{\to\infty}$ "$0\cdot\infty$" unbestimmt!!

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2 \;\to (-\infty)^2 = \infty}{\frac{1}{x} \;\to +\infty}$ "$\frac{\infty}{\infty}$" unbestimmt

L'Hôp $= \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2(\ln x)\cdot x$

$= -2\cdot \lim_{x\to 0^+} \overbrace{x}^{0} \cdot \overbrace{\ln x}^{-\infty} = \underline{\underline{0}}$

Bsp. 1



3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty}-\underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{+\infty}\right)$

"$\infty-\infty$" unbestimmt

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x\cdot\sin x}-\frac{x}{x\cdot\sin x}\right)$

Auf einen Nenner bringen

$x\cdot\sin x$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x \;\to 0}{x\cdot\sin x \;\to 0}$ "$\frac{0}{0}$" unbestimmt

Nenner: Prod. Regel

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\cos x}^{\to 1}-1 \;\to 0}{\sin x + x\cdot\cos x \;\to 0}$ "$\frac{0}{0}$" unbestimmt $\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x \;\to 0}{\underbrace{\cos x+\cos x}_{\to 2}-\underbrace{x\cdot\sin x}_{\to 0}}$ bestimmt $=\frac{0}{2}$

$=\underline{\underline{0}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$, $x^{x\,\to 0}$, $\underset{\to 0}{x}$ "0^0" im Grenzwert unbestimmt

$\ln u^r = r\cdot\ln u$

$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\cdot\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = 0$ (mit L'Hôpital berechnet!)

Exponentialfunktion ist stetig

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

5. $\cancel{\lim\limits_{x\to 0}} x^{\frac{1}{x}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty}^{\frac{1}{x}\}\to 0^+}$ "∞^0"

"Trick" $x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x \;\to\infty}{x \;\to\infty}$ "$\frac{\infty}{\infty}$" unbestimmt $\overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

e-Fkt. stetig $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0+} \underbrace{(1+\sin(4x))}_{\to 1}^{\overbrace{\cot x}^{\to\infty}}$.

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x \to 1}{\sin x \to +0} = +\infty$

„1^∞" unbestimmte Grenzwert

Trick: $\left[1+\sin(4x)\right]^{\cot x} = e^{\cot x \cdot \ln(1+\sin(4x))}$

Berechne zunächst

$(\cot x)^{-1} = \tan x$

$= \dfrac{1}{\cot x}$ Kehrwert

$\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\cot x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\ln\left(\underbrace{1+\sin(4x)}_{\to 1}\right)}_{\to 0}$ „$\infty \cdot 0$" unbestimmter Grenzwert

$\tan^{-1} x = \arctan x$

Umkehrfunktion !

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+\sin(4x)) \to 0}{\tan x \to 0}$ „$\frac{0}{0}$" unbestimmt

$(\tan x)' = 1+\tan^2 x$

L'Hôp $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{1+\underbrace{\sin(4x)}_{\to 0}} \cdot \overbrace{\cos(4x)}^{\to 1} \cdot 4 \to 4}{1+\tan^2 x \to 1} = \dfrac{4}{1} = \underline{\underline{4}}$

Somit wegen der Stetigkeit der e-Funktion

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left[1+\sin(4x)\right]^{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\cot x \cdot \ln(1+\sin(4x))}$

$= e^{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x \cdot \ln(1+\sin(4x))}_{\to 4}} = \underline{\underline{e^4}}$

Stetigkeit