3.4 Gedämpfte Schwingung

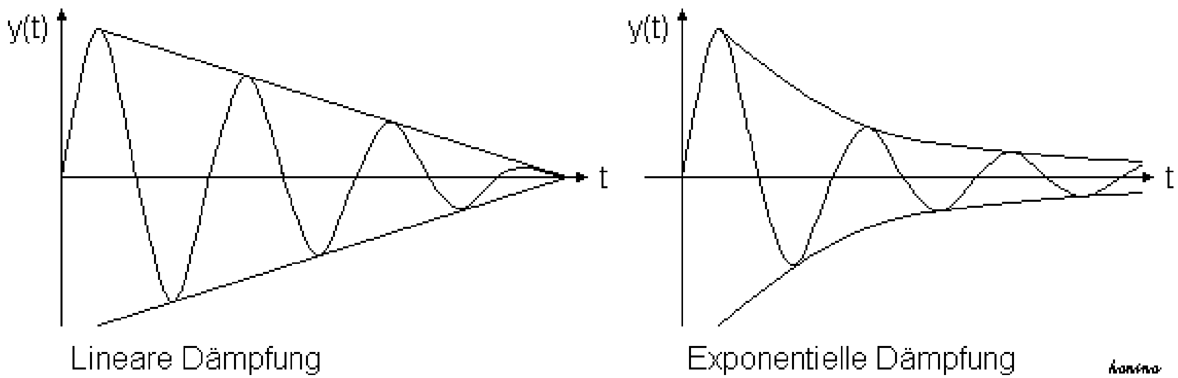
Reale Schwingungen:
- Entzug von Bewegungsenergie durch „bremsende Kräfte“
- Reibungsarbeit (innere und äußere Reibung, Luftreibung,….)
- Energieumwandlung $W_{kin} \rightarrow$ Wärme (innere Energie dU)
- da $W \sim \hat{y}$ nimmt auch Amplitude $\hat{y}$ allmählich auf 0 ab.

Def.: **Dämpfung** = gesetzmäßige zeitliche Abnahme der Amplitude der Schwingung

Man unterscheidet:

a) Konstante Reibungskraft

b) Geschwindigkeits-
proportionale Reibungskraft



a) b)

Bildquelle: https://elsenbruch.info/ph12_daempfung.htm

Fall a), z.B. trockene Lagerreibung des Schwingers:

Hier bilden die Amplitudenwerte eine fallende arithmetische Reihe, sie nehmen **linear** ab.

Die **Differenz** zweier aufeinander folgender Amplituden mit gleichem Vorzeichen ist konstant $\Delta\hat{y} = \hat{y}_1 - \hat{y}_2 = \hat{y}_i - \hat{y}_{i+1} = konst.$

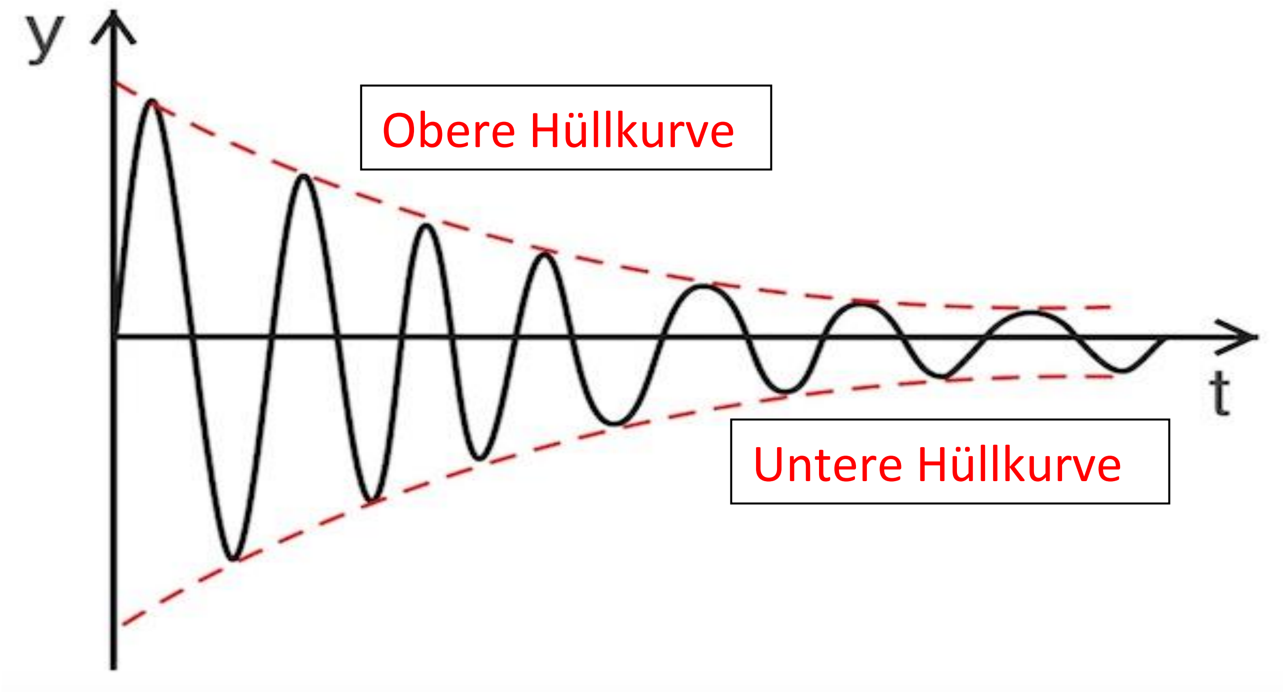
Fall b), z.B. innere Reibung bei elastischer Verformung, laminare Flüssigkeits-reibung, Wirbelstrombremse:

Hier bilden die Amplitudenwerte eine fallende geometrischen Reihe, sie nehmen **exponentiell** ab.

Der **Quotient** zweier aufeinander folgender Amplituden mit gleichem Vorzeichen ist konstant $\frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_2} = \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} = konst.$

Wichtigster Fall in der Technik ist Fall b) (geschwindigkeitsabhängige Dämpfung).

Oft treten aber auch beide Dämpfungs-Arten gleichzeitig auf, die Hüllkurve ergibt sich dann aus einer Überlagerung beider Kurvenverläufe.



Bildquelle: https://physikunterricht-online.de/jahrgang-11/gedaempfte-schwingungen/

3.4.1 Schwingungsgleichung mit Dämpfung

Ursache der Dämpfung: Reibungskraft, proportional zur Geschwindigkeit

$$F_R \sim -v = -\dot{y} = -\frac{dy}{dt} \qquad \rightarrow \qquad F_R = -\beta \cdot \dot{y} = -\beta \cdot \frac{dy}{dt}$$

Proportionalitätsfaktor: **Dämpfungskonstante $\boldsymbol{\beta}$** **Einheit [$\boldsymbol{\beta}$] = $\boldsymbol{\frac{N \cdot s}{m} = \frac{kg}{s}}$**

Bewegungsgleichung (Grundgleichung):

$$m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y - \beta \cdot \dot{y}$$

Bzw. umgestellt: $$\boldsymbol{\ddot{y} + \frac{\beta}{m} \cdot \dot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0}$$

Benennungen: **Eigenkreisfrequenz** $\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$; **Abklingkoeffizient** $\boldsymbol{\delta = \frac{\beta}{2 \cdot m}}$

hiermit: $$\boldsymbol{\ddot{y} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0}$$

3.4.2 Auslenkungsfunktion: Elongation

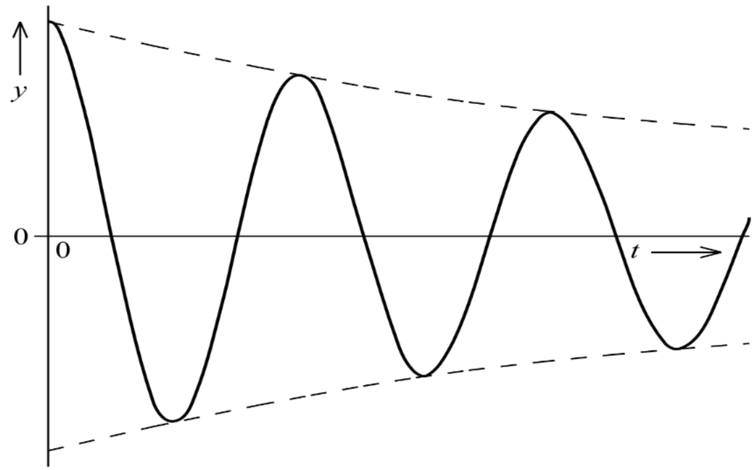
Eine Lösung der Differentialgleichung (s. 3.4.1) hat folgende Form:

$$y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega_d \cdot t + \varphi_0)$$

Dabei ist $\boldsymbol{\omega_d}$ die **Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung**;
sie unterscheidet sich von ω_0 , der Eigenkreisfrequenz im ungedämpften Fall.

Bei Start am Umkehrpunkt (Maximalauslenkung mit $v_0 = 0$) wird daraus:

$$y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega_d \cdot t + \frac{\pi}{2}) = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \cos \omega_d \cdot t$$



Bildquelle: Von Saure - Eigenes Werk, CC BY 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20637165

Amplituden-Abnahme

Der Quotient zweier aufeinander folgender Amplituden ist konstant

Amplituden-Verhältnis: *q* $q = \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} \quad \rightarrow \quad q^n = \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+n}}$

Der zeitliche Abstand zweier aufeinander folgender Amplituden beträgt T_d

Daher folgt: $$q = \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} = e^{\delta \cdot T_d}$$

Der Exponent: $\boldsymbol{\delta \cdot T_d = \Lambda}$ (Lambda) heißt „**logarithmisches Dekrement**“

Λ kann aus dem Amplitudenverhältnis berechnet werden:

$$\boxed{\Lambda = \delta \cdot T_d = \ln\left(\frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}}\right) = \ln\,(q)}$$

3.4.3 Eigenfrequenz

Dämpfung verursacht eine Veränderung der Frequenz f bzw. Kreisfrequenz ω und Schwingungsdauer T, abhängig vom Abklingkoeffizienten δ:

Für die Kreisfrequenz ω_d und die Schwingungsdauer T_d mit Dämpfung gilt:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Merken:

- Dämpfung führt bei einer Schwingung zur Verkleinerung der Kreisfrequenz bzw. zu einer Vergrößerung der Schwingungsdauer.
- Kreisfrequenz ist mit Dämpfung kleiner, aber unabhängig von der Amplitude, das heißt, während des Schwingvorgangs bleibt ω_d konstant.
- In der Praxis: Unterschied zwischen ω_d und ω_0 bzw. T_0 und T_d sehr gering

3.4.4 Aperiodische Bewegung

Kreisfrequenz bei gedämpfter Schwingung:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

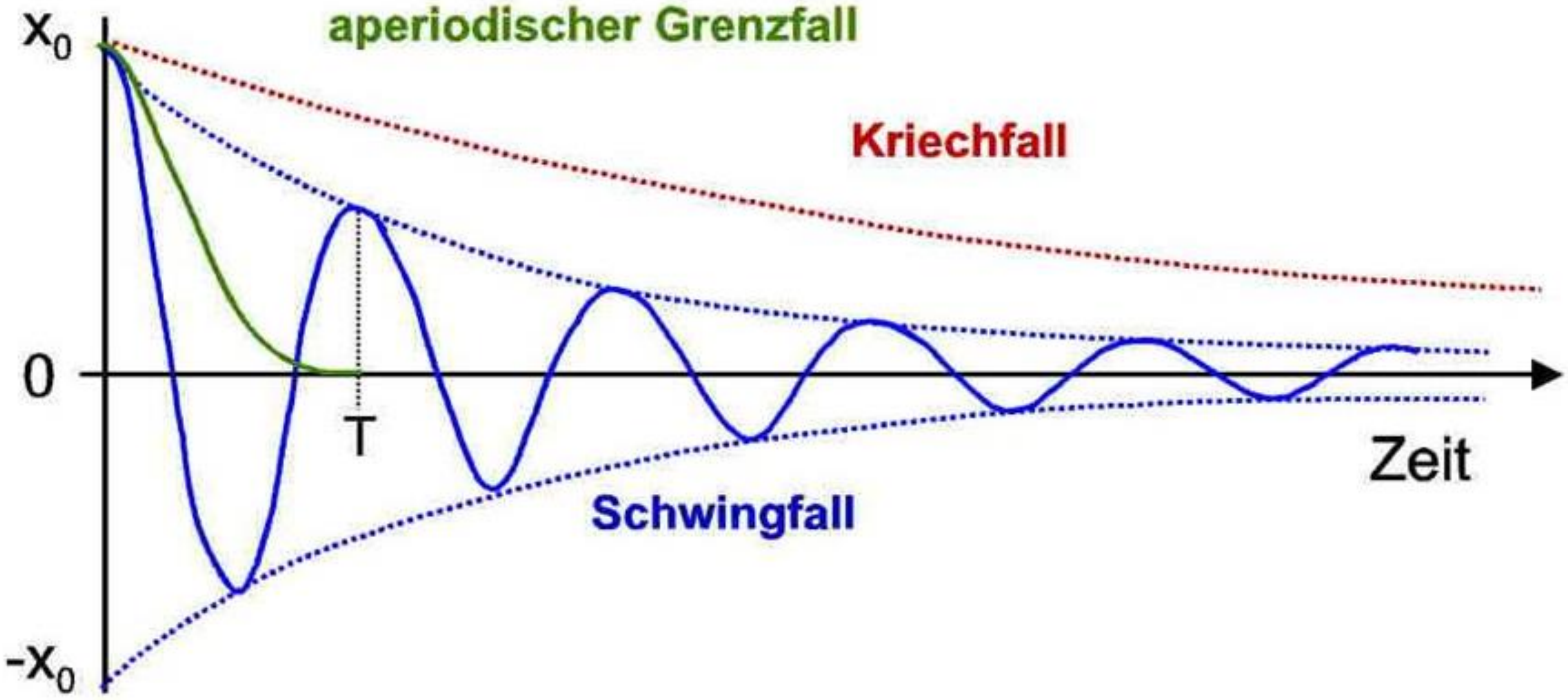
Wie man leicht erkennt, muss für eine Kreisfrequenz $\omega_d > 0$
die Bedingung $\delta^2 < \omega_0^2$ erfüllt sein.

Ist dagegen $\delta^2 \geq \omega_0^2$ dann ist keine periodische Schwingung beobachtbar, sondern das System kehrt nach der Auslenkung asymptotisch in die Ruhelage zurück.

Beachten:

Für den Fall, dass $\boldsymbol{\delta^2 \geq \omega_0^2}$ vorliegt, handelt es sich bei der Bewegung im physikalischen Sinne nicht um Schwingungen, da **keine Periodizität** auftritt.

Fallunterscheidung: Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall



Bildquelle: https://slideplayer.org/slide/1304598/

1.) Schwingfall: $\delta^2 < \omega_0^2$

Es tritt periodische Bewegung auf mit exponentieller Amplituden-Abnahme und Schwingungsdauer: $T_d = const. = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ bzw. $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

2.) Kriechfall: $\delta^2 > \omega_0^2$

Hier wird der Wert unter der Wurzel negativ, d.h. das Ergebnis für ω_d wird imaginär. Das System kriecht langsam in seine Gleichgewichtslage zurück.
Mit den Startwerten $y_0(t_0) = \hat{y}_0 \; und \; v_0(t_0) = 0$ erhält man für den Verlauf:

$$y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cosh\left(\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) \cdot t\right)$$

3.) Aperiodischer Grenzfall: $\delta^2 = \omega_0^2$

Dies ist der „schnellste Kriechfall“, das System kehrt rasch in die Gleichgewichtslage zurück, ohne Überschwingen über die Null-Lage. Keine Periodizität erkennbar, also $\omega_d = 0$. Mit den Startwerten $y_0(t_0) = \hat{y}_0 \; und \; v_0(t_0) = 0$ erhält man: $y(t) = \hat{y}_0 \cdot (1 + \delta t) \cdot e^{-\delta t}$.