Technische
Hochschule
Ulm

Prof. Dr.-Ing. Jochen Neher

Technische Mechanik 1

1. Einführung

1.1. Allgemeines zur Mechanik

Bedeutung

- Naturwissenschaft (Erfahrungswissenschaft)
- ältestes Teilgebiet der Physik
- Historie: elementare einfache Maschinen (Seil, Hebel, Rolle, Keil (schiefe Ebene))
- die ingenieurwissenschaftliche Grundlage
  Für Ingenieurinnen und Ingenieure wird Technische Mechanik als Grundwissen vorausgesetzt!

Anwendungsgebiete

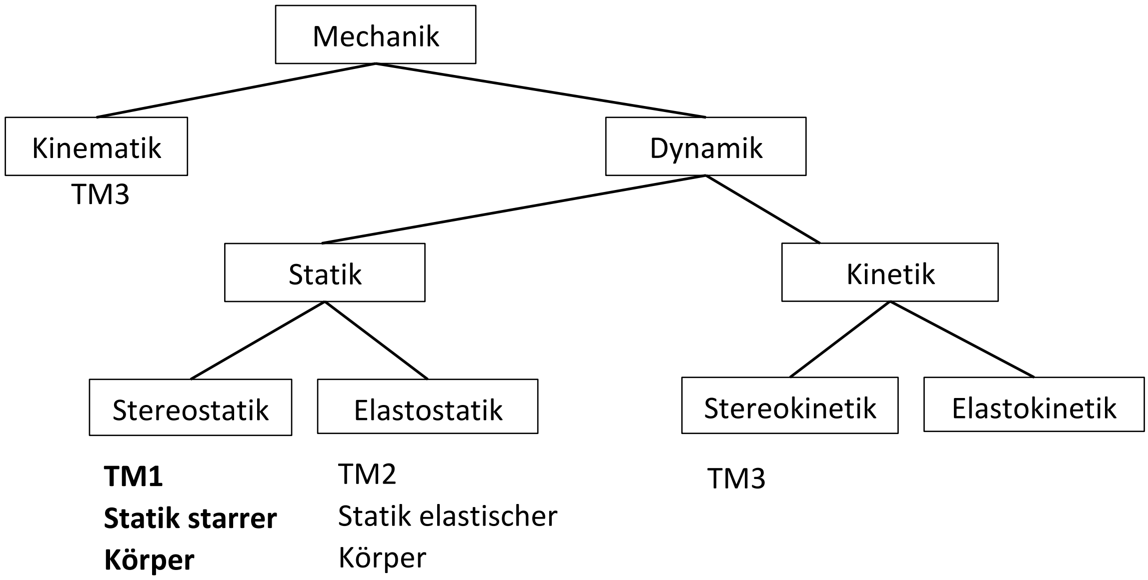
- Bauingenieurwesen
- Maschinenbau
- Fahrzeugindustrie, Schiffbau
- Luft-und Raumfahrtindustrie

In der Regel unter Einsatz von Berechnungs- und Simulationsprogrammen zur Lösung komplexer Probleme, z.B.

- Kraft- und Momentengleichgewicht
- Festigkeit, Lebensdauer von Bauteilen
- Bewegungsverhalten von Körpern
- Schwingungen und Akustik

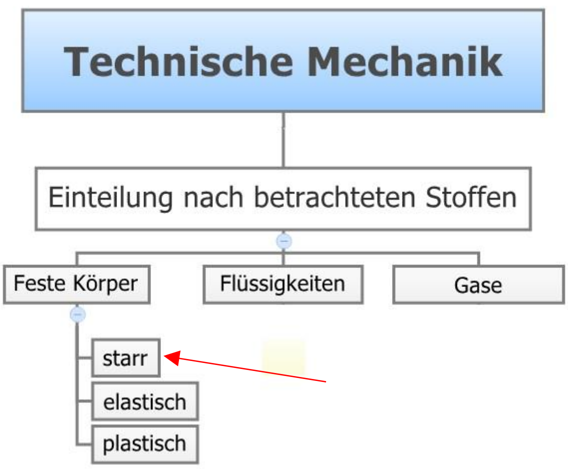
1.2. Einteilung der Mechanik

Wissenschaftliche Einteilung

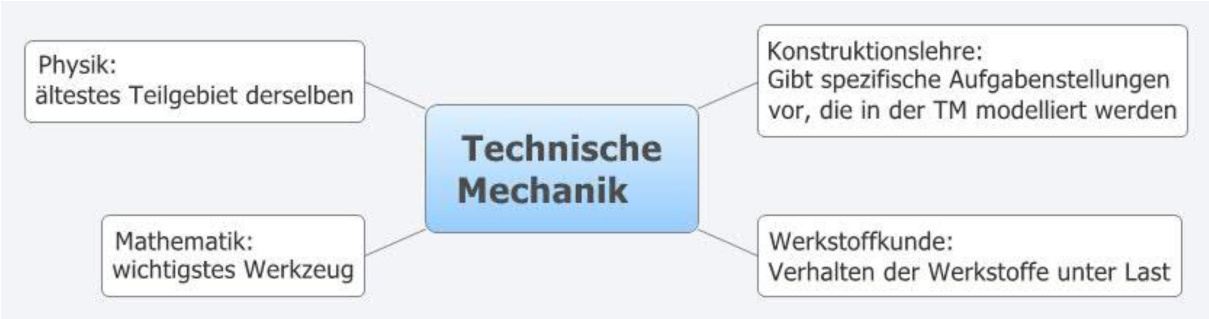


Kinematik	Beschreibung der räumlichen **Bewegung** innerhalb der Zeit. Betrachtung **ohne Kräfte**.
Statik	Ermittlung der Bedingungen (z.B. Kräfte), damit ein Körper seinen temporären (zeitlichen) Zustand der **Ruhe** oder der gleichförmigen Bewegung nicht verändert.
Kinetik	Untersuchung der **Bewegung** von Körpern unter **Krafteinfluss**

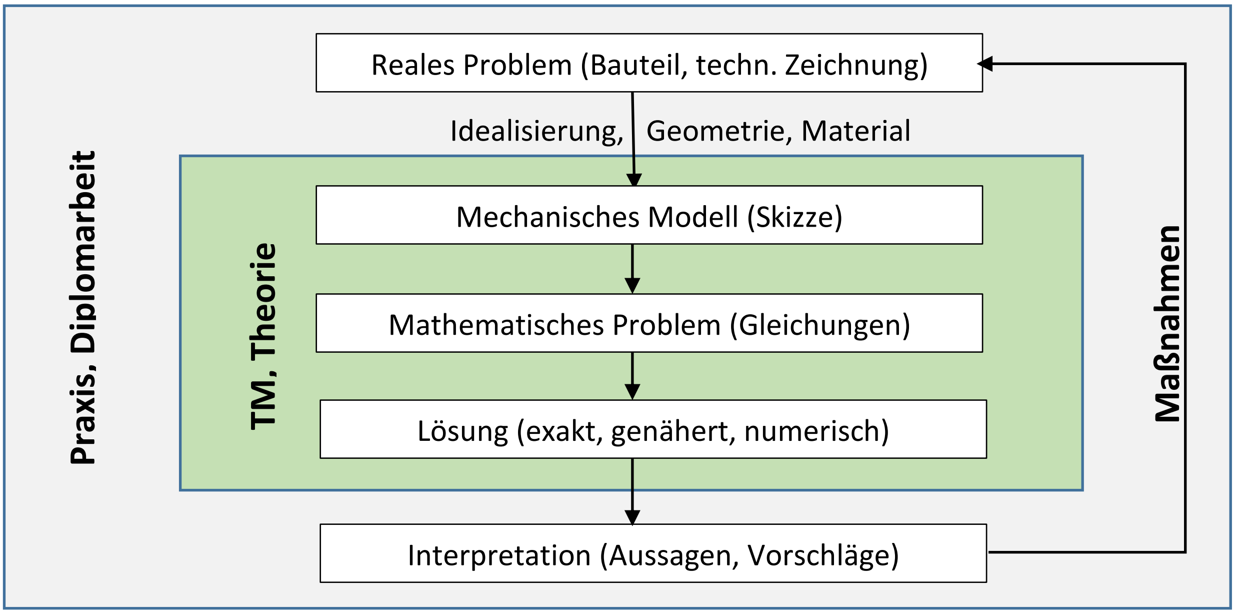
Einteilung nach den Eigenschaften der betrachteten Stoffe



Verbindung mit anderen Fächern



1.3. Vorgehensweise bei der Lösung mechanischer Probleme



1.4. Aufgabe der Mechanik

Aufgabe: Beschreibung der Bewegungen und Zustände von Körpern unter der Einwirkung von Kräften

Größe	Einheit	
Länge	m (SI) oder mm, cm	(SI: frz. Système international d'unités)
Masse	kg (SI) oder g	
Zeit t (tempus)	s (SI) oder ms, min, h	
Kraft	N	

Beispiele

Radstand eines LKW, Länge	R = 5,2m = 5200 mm
Radlast, Kraft	F_R = 5000N = 5kN
Weltrekord über 100m, Zeit	9,58s
Dehnung ε	206 µm/m = 206/1000000 m/m = 0,000206 = 0,0206%

Beispiel-Aufgabe

Auf welcher Fläche in dm² üben die 4 Reifen eines Autos Druck auf den Boden aus, wenn die Gewichtskraft des Autos 10kN beträgt und 2,5 bar ($2{,}5 \cdot 10^5$ N/m²) Druck in den Reifen ist?

2. Grundlagen

2.1. Grundbegriffe

2.1.1. Die Kraft

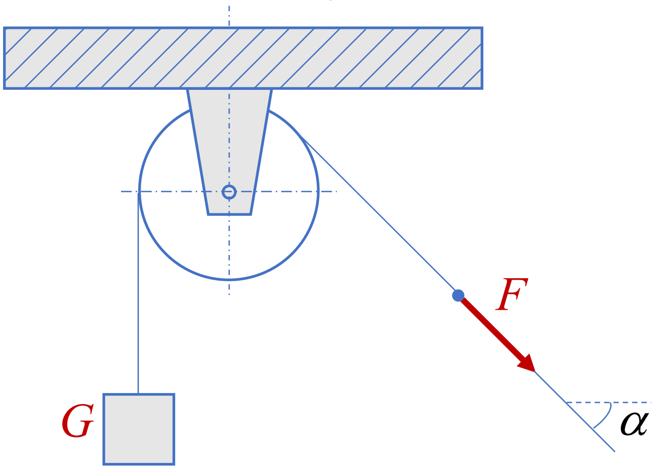
Definition
Kräfte, die auf einen Körper die gleiche Wirkung haben, sind gleich.
Die Messung unbekannter Kräfte erfolgt durch den Vergleich ihrer Wirkung mit der Wirkung bekannter Kräfte.

Eigenschaften der Kraft

- Betrag
  Größe der Kraft, Messung z.B. durch Vergleich mit Gewichtskraft
- Richtung
  Die Wirkung der Kraft ist von ihrer Orientierung abhängig.
- Angriffspunkt
  Die Wirkung der Kraft ist vom Angriffspunkt abhängig. → gebundener Vektor

Die Kraft ist also ein Vektor mit Betrag und Richtung!
(Im Gegensatz dazu gibt es skalare Größen, z.B. Temperatur, Zeit, …)

Zeichnerische Darstellung



Betrag Pfeillänge
Richtung Wirkungslinie, Pfeilspitze

Formelzeichen Kraftvektor	$\vec{F}_{Index}$
Betrag Kraftvektor	F_{Index}
Index	Zahlen oder Buchstaben, z.B. Gewichtsgraft F_G, Normalkraft F_N, F_{42}

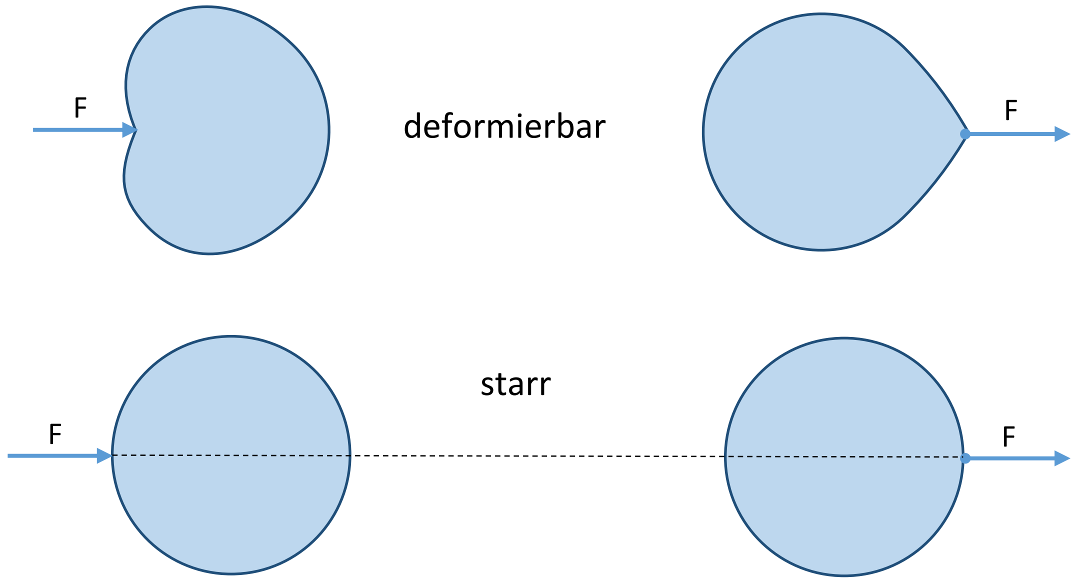
2.1.2. Der starre Körper

TM1 (Stereostatik) → Beschränkung auf starre Körper
TM2 (Elastostatik) → einfache elastische Körper
FEM (Finite Elemente Methode) → komplexe elastische Körper

Ein starrer Körper erfährt unter Krafteinwirkung keine Deformationen.

→ Idealisierung, Vereinfachung, oft hinreichend genau

→ Deformationen werden in TM2/ behandelt



Die Wirkungslinie (WL) einer Kraft ist gerade, sie wird festgelegt durch Angriffspunkt und Richtung.

2.2. Axiome

Axiome sind unbeweisbare, sich aus der Beobachtung ergebende Grundaussagen.
4 Axiome bilden die Basis der Mechanik, sie gehen auf Isaac Newton (1643-1727) zurück.

2.2.1. Trägheitsaxiom oder 1. Newtonsches Gesetz

Ein Körper verharrt im Zustand der **Ruhe** oder der **gleichförmig, geradlinigen Bewegung**, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern!

In der Technik: relative Ruhe in Bezug auf die Erdoberfläche

In der Statik: „Gleichgewichtszustand“
Heben sich mehrere Kräfte gegenseitig auf, so ist der Körper im Gleichgewicht.
„Die Resultierende ist eine Nullkraft“ $\vec{F}_R = 0$

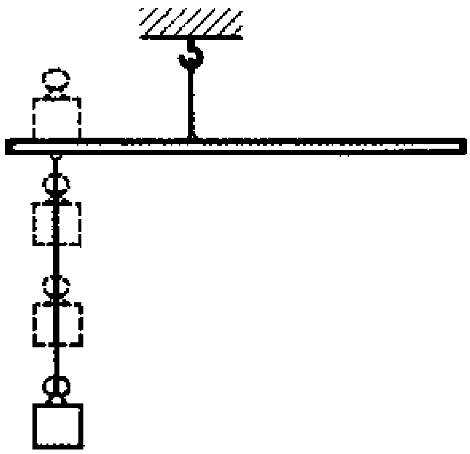
2.2.2. Verschiebungsaxiom

Zwei Kräfte, die

- den gleichen Betrag,
- die gleiche Wirkungslinie und
- die gleiche Richtung,
- jedoch unterschiedliche Angriffspunkte haben,

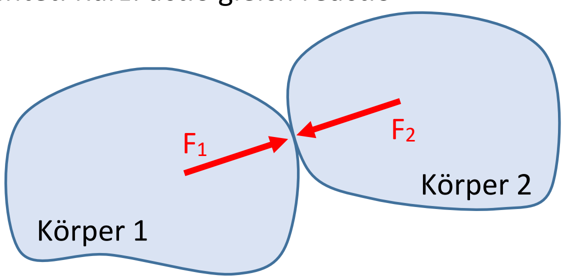
… üben auf einen starren Körper die gleiche Wirkung aus.

→ Die Kraft darf entlang der WL verschoben werden!
Lockerung der Gebundenheit des Kraftvektors. Die Kraft ist ein linienflüchtiger Vektor.



2.2.3. Reaktionsaxiom oder 3. Newtonsches Gesetz oder Wechselwirkungsgesetz

Übt ein Körper auf einen zweiten eine Kraft aus (actio), so übt der zweite auf den erste auch eine Kraft aus (reactio). Diese stimmt mit der ersten in Betrag und WL überein, ist aber entgegengesetzt gerichtet. Kurz: actio gleich reactio



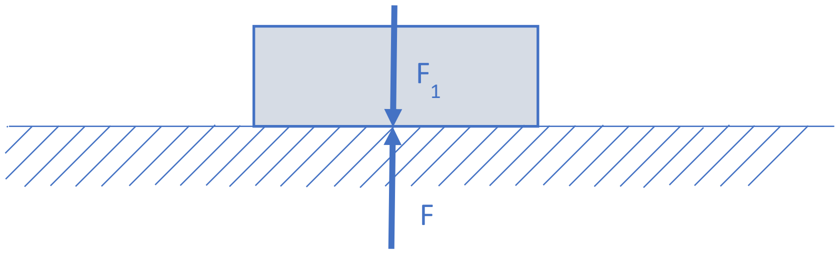
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} N = -\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} N$$

Körper 1	$\vec{F}_1$	Aktionskraft	$\vec{F}_2$	Reaktionskraft
Körper 2	$\vec{F}_2$	Aktionskraft	$\vec{F}_1$	Reaktionskraft

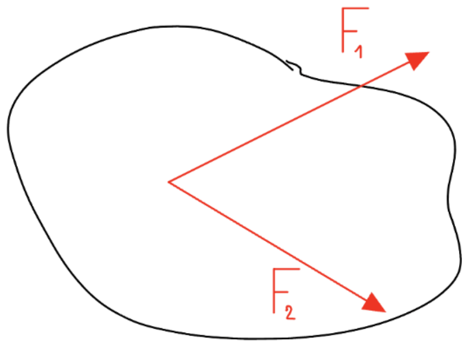
(2. Newtonsches Gesetz → TM3)

Transfer auf obiges Beispiel, Abgrenzung zum TA



2.2.4. Parallelogrammaxiom oder 4. Newtonsches Gesetz

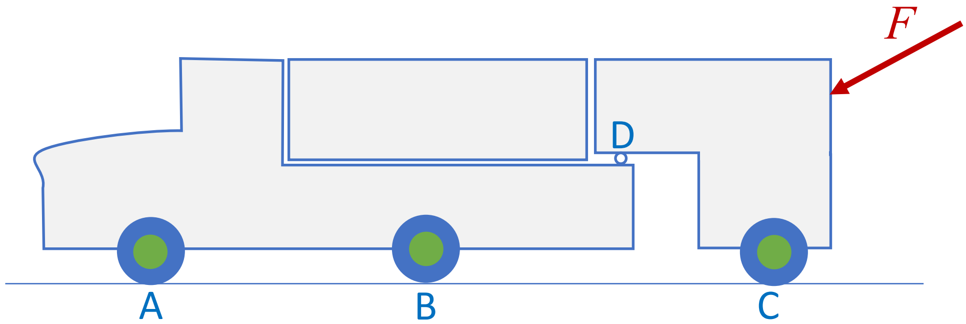
Die Wirkung zweier Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mit einem gemeinsamen Angriffspunkt ist gleich der Wirkung einer einzigen Kraft $\vec{F}_R$, die in diesem Punkt angreift. Der Vektor von $\vec{F}_R$ ist die Diagonale des mit $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gebildeten Parallelogramms.



2.3. Einwirkung von Kräften auf Körper

2.3.1. Schnittmethode (Freichmachen) und Erstarrungsmethode

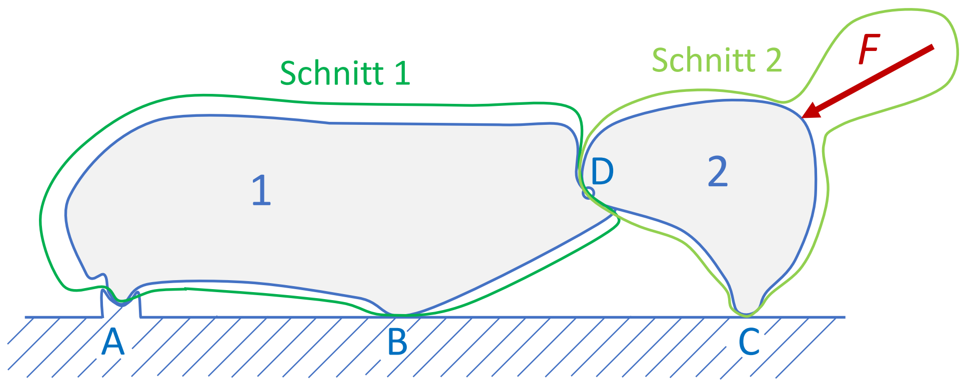
Beispiel: mechanisches System LKW, Einfluss Windkraft F (vordere Achse Zugfahrzeug gebremst)



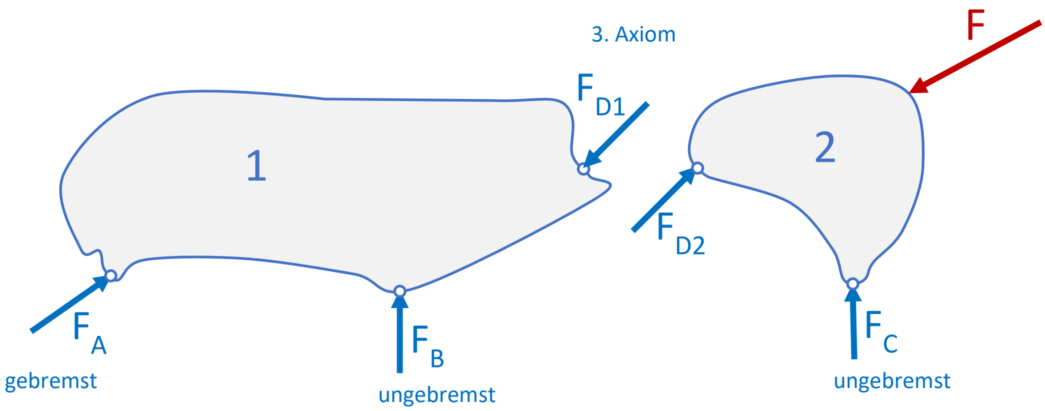
Gesucht Kräfte in den Lagerstellen A, B und C
Kräfte in der Kontaktstelle D

Schnittmethode

1. Schritt: Zwei gedachte Schnitte durch die Lagerstellen und die Kontaktstelle zeichnen



2. Schritt: Einzeichnen der Reaktionskräfte



Zur Kraftrichtung

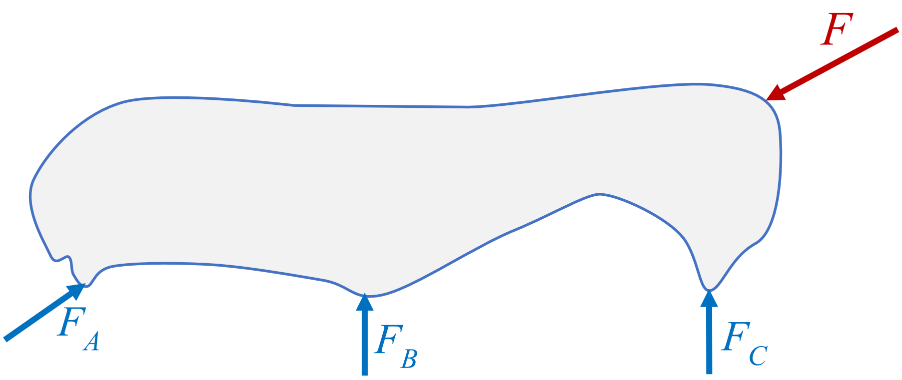
Eintragung der Reaktionskräfte, also der Kräfte, die **auf das Teilsystem** einwirken!

Niemals die Kräfte einzeichnen, die das Teilsystem selbst ausübt!

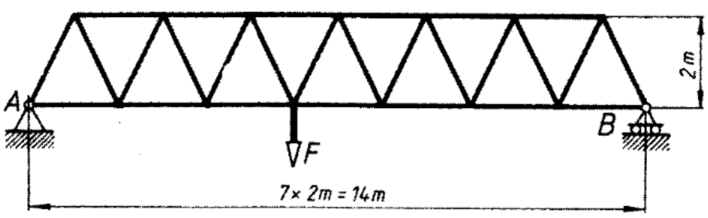
Schnittmethode: Zuvor **innere** Kräfte $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C, \vec{F}_{D1}, \vec{F}_{D2}$ werden zu **äußeren** Kräften.
Das Schnittprinzip ermöglicht auch die Berechnung der Kräfte im Innern von Körpern (später!).
Falls die Schnitte nur durch Lager, Kontaktstellen und Gelenke gehen auch „**Freimachen**“.

Erstarrungsmethode

System von mehreren miteinander verbundenen Körpern im Gleichgewicht wird als ein **einzelner Starrkörper** betrachtet. Damit können die am System wirkenden Kräfte bestimmt werden.

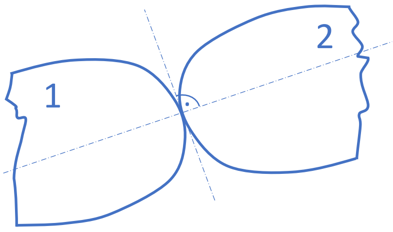


Weiteres Beispiel: Brücke



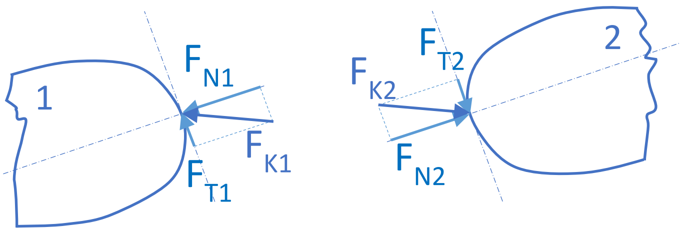
2.3.2. Kraftübertragung bei ebenen Problemen

Reine Berührung



Frage: Kontaktkräfte?

Freimachen der Körper an der Kontaktstelle



Reaktionsaxiom $\vec{F}_{K1} = -\vec{F}_{K2}$

Parallelogrammaxiom $\vec{F}_{K1} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{T1}$

$\vec{F}_{K2} = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{T2}$

Geometrie (Kontaktstelle) $\vec{F}_{N1} = -\vec{F}_{N2}$ senkrecht zur Oberfläche (Normalkraft)

$\vec{F}_{T1} = -\vec{F}_{T2}$ tangential zur Oberfläche (Tangentialkraft)

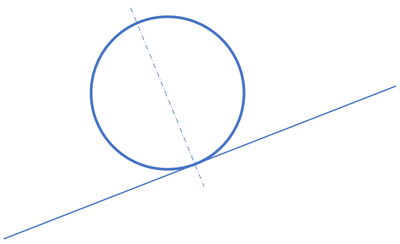
Ohne Reibung, bei glatter Oberfläche gilt:

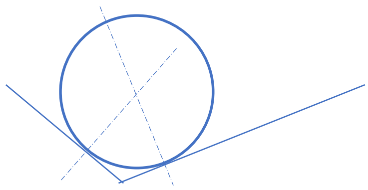
$\vec{F}_{T1} = \vec{F}_{T2} = \vec{0}$

$\vec{F}_{K1}$ und $\vec{F}_{K2}$ dann senkrecht zur Oberfläche, WL ist somit bekannt

Reibung wird vernachlässigt, falls nichts anderes gesagt ist.

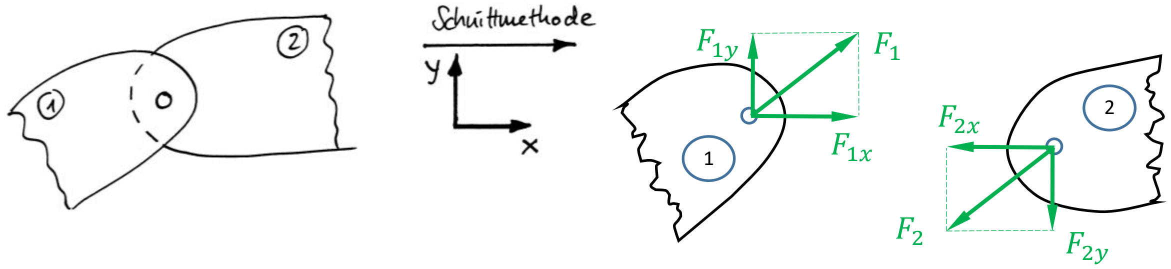
Beispiele: WL der Kontaktkraft bei rutschendem Rad





Hinweis: Bei reiner Berührung nur Druckkräfte, bei Zugkräften würden Körper voneinander abheben.

Gelenkverbindung (zweiwertige Verbindung)



Gelenkkräfte?

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad \vec{F}_{1x} = -\vec{F}_{2x} \qquad \vec{F}_{1y} = -\vec{F}_{2y}$$

$$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} N = -\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix} N \qquad \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} N = -\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} N \qquad \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} N = -\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} N$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} \qquad \vec{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y}$$

$$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} N = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} N + \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} N \qquad \begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix} N = \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} N + \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} N$$

$\vec{F}_{1x}$; $\vec{F}_{2x}$ x-Komponenten (Vektoren, Pfeile nicht vergessen)

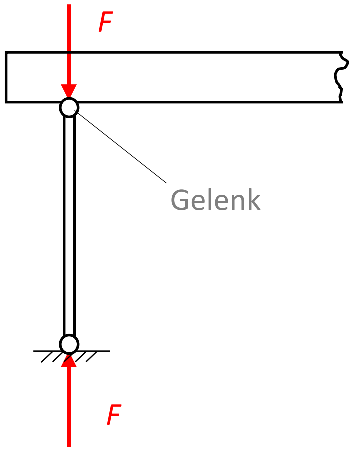
$\vec{F}_{1y}$; $\vec{F}_{2y}$ y-Komponenten

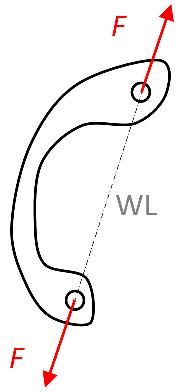
F_{1x} ; F_{2x} x-Koordinaten (Skalare, vorzeichenbehaftet)

F_{1y} ; F_{2y} y-Koordinaten

Fazit Gelenk: Nur ein Punkt (Kraftangriffspunkt) der WL liegt von vornherein fest. Ein Gelenk ist zweiwertig, die WL ist unbekannt.

Pendelstütze (einwertige Verbindung)





Bauteil an dem nur **zwei Kräfte** mit voneinander verschiedenen Angriffspunkten angreifen.
Eine Pendelstütze überträgt nur Kräfte in Richtung der **Verbindungslinie** ihrer Gelenke, die **WL** ist also **bekannt**.
Pendelstütze gerade und dünn → Stab (Druckstab / Zugstab je nach Kraftorientierung)

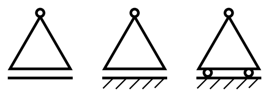
Beispiele

Zuordnung Zug- und Druckstäbe!

Verschiebe-/ Loslager (einwertiges Lager)

Überträgt Zug- und Druckkräfte, WL ist bekannt

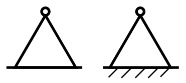
Symbole

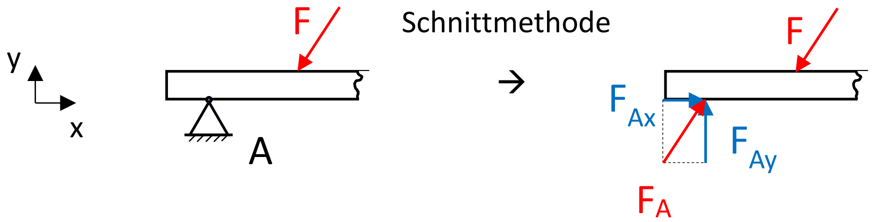


Festlager (zweiwertiges Lager)

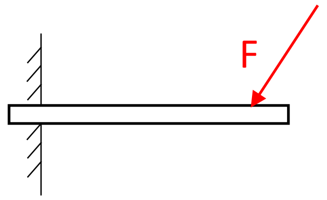
Überträgt Kraftkomponenten in x- und y-Richtung, WL ist unbekannt

Symbole





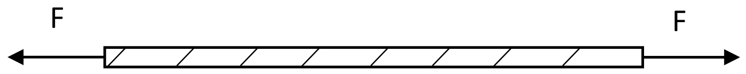
Feste Einspannung (dreiwertiges Lager)



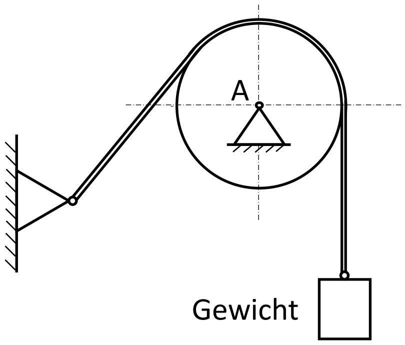
Bauteil gleitet nicht weg und kippt auch nicht… später!

Seil/ Seilrolle

Ein Seil nimmt nur Zugkräfte in Richtung seiner Längsachse auf.

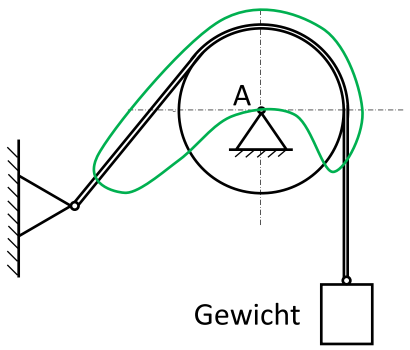


Seilrolle im Gleichgewicht (Umlenkrolle ohne Reibung)

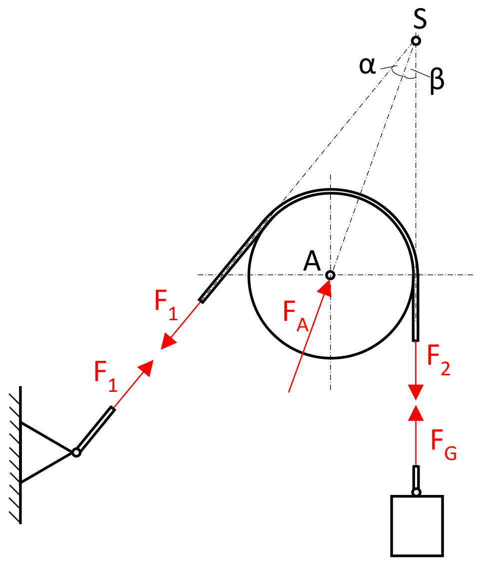


gesucht: Kräfte am System Seilrolle → Lagerkraft der Seilrolle und Seilkräfte

Erstarrungsmethode: Freischneiden des interessierenden Teilsystems
(Teilsystem Rolle mit Seilabschnitt sei Starrkörper)

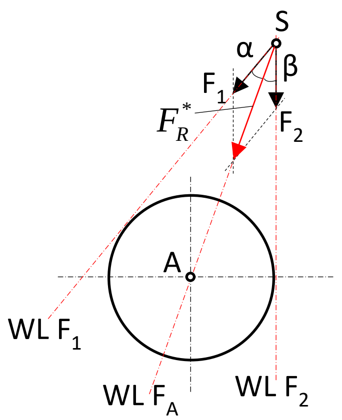


Eintragung Wechselwirkungskräfte



Betrachtung des Teilsystem-Gleichgewichts mit den bekannten Axiomen

1. Trägheitsaxiom: Gleichgewicht, „Resultierende ist eine Nullkraft“
   $\vec{F}_R \ = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_A = \vec{0}$
2. Reaktionsaxiom $\vec{F}_2 \ = - \ \vec{F}_G$
3. WL von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ liegen fest, sie schneiden sich in S
4. Parallelogramm- & Verschiebungsaxiom
   $\vec{F}_R^* \ = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
5. Einsetzen
   $\vec{F}_R \ = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_A = \vec{0}$
   $\vec{F}_R \ = \vec{F}_R^* + \vec{F}_A = \vec{0}$
   $\vec{F}_R^* = -\vec{F}_A$ → Folglich: WL von $\vec{F}_A$ geht auch durch S



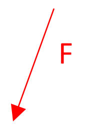
6. Geometrie: $\alpha = \beta$
   (F_1=F_2 wegen Loslager und ohne Reibung
   → gleichseitiges Parallelogramm, bzw. Raute mit 4 gleich langen Seiten)

Fazit für das System Seilrolle

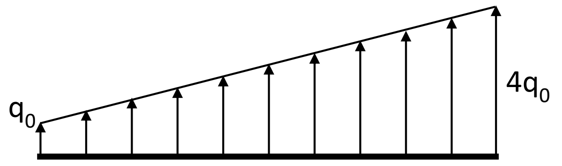
- $F_1 = \mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_G$ aber $\vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$
  Reibungsfreie Umlenkrolle, nur radiale Kräfte werden auf das Seil ausgeübt, keine tangentialen
  Die (Zug)Kraft im Seil ist überall gleich groß!
  Gedankenmodell: „Seife zwischen Seil und Rolle“ oder „keinerlei Reibung der Rollenaufnahme“
- Die WL der Seilkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ schneiden sich in einem Punkt S.
- Die WL der Auflagerkraft $\vec{F}_A$ geht auch durch diesen Punkt.
- Sie halbiert den Winkel zwischen den Seilkräften.

2.3.3. Einteilung der Kräfte

- Einzelkraft — Kraft mit Wirkungslinie und Angriffspunkt (Idealisierung)



- Linien-/Streckenlast — Idealisierung → später!

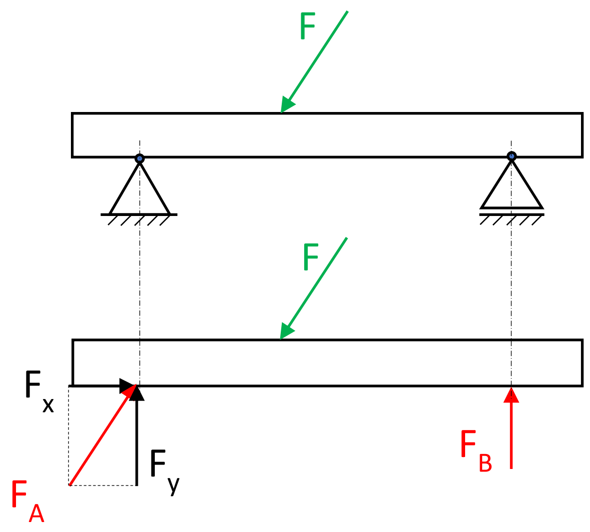


- Flächenkraft — Kraftverteilung in der Berührungsfläche zweier Körper (z. B. Flüssigkeitsdruck, Schneelast, …)

- Volumenkraft — Kraft über Volumen verteilt (z. B. Gewicht, Trägheitskraft, magnetische Kraft)

- Eingeprägte Kraft — physikalisch vorgegebene Belastung (z. B. Gewicht, Winddruck, Schneelast)

- Reaktionskraft — entsteht durch die Einschränkung der Bewegungsfreiheit (Zwangsbedingung), wird durch Freischneiden sichtbar (Auflagerreaktionen).



- Äußere Kraft — wirkt von außen auf ein mechanisches System (z. B. eingeprägte Kraft, Belastung)

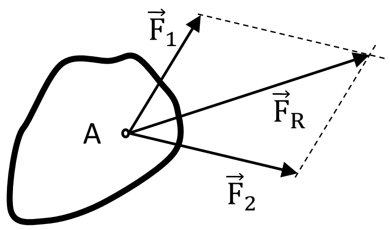
- Innere Kraft — wirkt zwischen Systemteilen, wird durch Freischneiden sichtbar (z. B. flächenförmige Verteilung in der Schnittebene), Maß für lokale Materialbeanspruchung

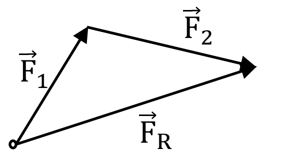
3. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt in der Ebene

Die WL aller Kräfte liegen in einer Ebene und schneiden sich in einem Punkt.
Dann spricht man von einem **zentralen ebenen Kräftesystem**.

Zusammensetzen von Kräften zeichnerisch (Parallelogrammaxiom)

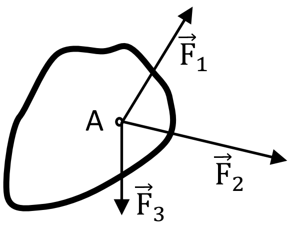
Beispiel mit <u>zwei</u> Kräften: $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ werden zu $\vec{F}_R$ zusammengesetzt



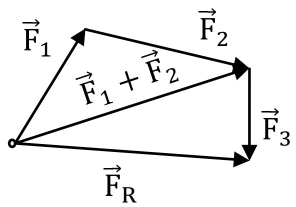


Die Reihenfolge der Kräfteaddition ist beliebig.
$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_R$

Beispiel mit <u>mehreren</u> Kräften: $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ werden zu $\vec{F}_R$ zusammengesetzt



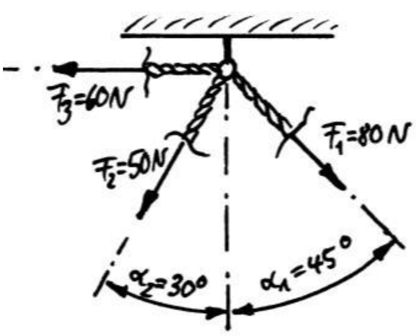
Lageplan



Kräfteplan

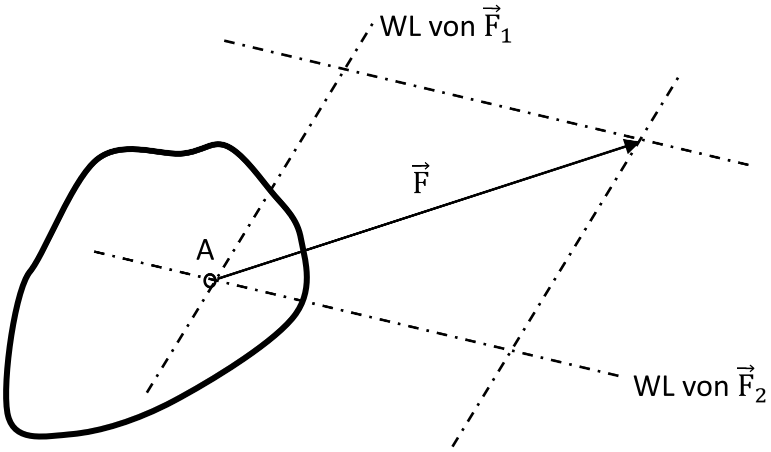
Die Reihenfolge der Kräfteaddition ist beliebig.
Die Zwischenresultierende kann weggelassen werden.
Der Vektor vom Ausgangspunkt der ersten bis zum Endpunkt (Spitze) der letzten Kraft entspricht der Resultierenden.
$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_R$
allgemein: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_R$

Übung



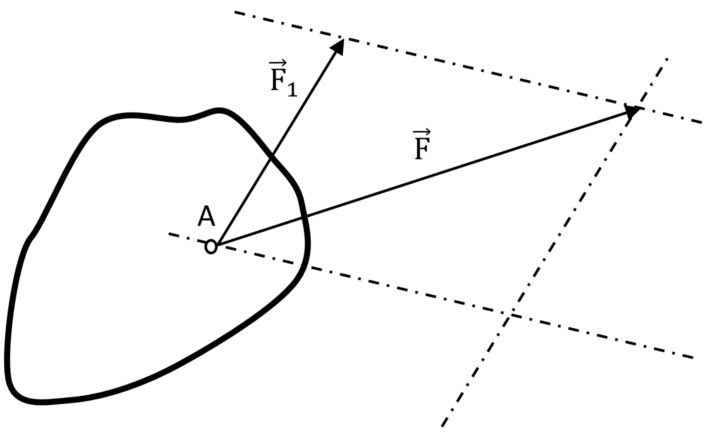
Zerlegen der Kraft $\vec{F}$ zeichnerisch in $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (Umkehrung Parallelogrammaxiom)

Variante 1: Wirkungslinie von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gegeben



$\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ sind Komponenten von $\vec{F}$ bezüglich der Richtungen f_1 und f_2.
Die Prallelen zu f_1 und f_2 sind NICHT die Wirkungslinien von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$!

Variante 2: Betrag und Richtung von $\vec{F}_1$ gegeben



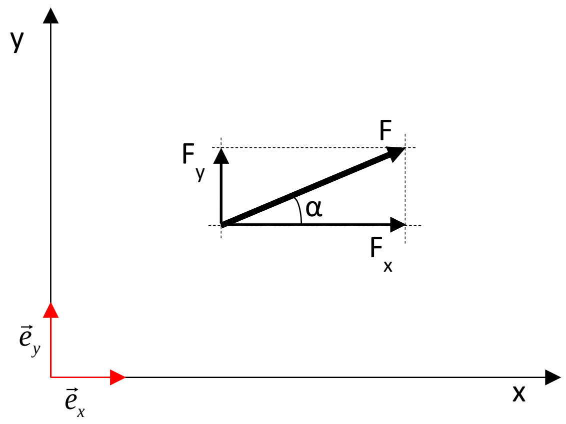
In der Ebene ist die Zerlegung einer Kraft in zwei verschiedene Richtungen eindeutig möglich.
$\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1$

Eine eindeutige Zerlegung einer Kraft in mehr als 2 Komponenten ist in der Ebene nicht möglich, bzw. nur mit weiteren Vorgaben. In der Ebene hat eine Kraft nur zwei Komponenten!

3.1. Komponentendarstellung und Addition von Kräften

Bekannt: In der Ebene kann eine Kraft eindeutig in zwei gegebene Richtungen zerlegt werden.
Daher: Einführung und standardmäßige Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems mit 2 aufeinander senkrechten Richtungen.

Zerlegung einer Kraft in x- und y-Richtung.



Vektoraddition: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$

$\vec{F}_x, \vec{F}_y$ x- und y-Komponenten des Kraftvektors $\vec{F}$

Vektor = Betrag · Richtungseinheitsvektor (REV)

$\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y$ Richtungseinheitsvektoren in *x*- und *y*-Richtung

F_x, F_y x- und y-Koordinate des Kraftvektors $\vec{F}$

Abkürzung $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ Koordinatenform

Zusammenhänge $F_x = F \cdot \cos(\alpha)$ Wichtig: Definition von α ausgehend von der x-Achse!

$F_y = F \cdot \sin(\alpha)$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

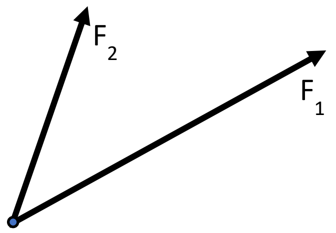
$\tan(\alpha) = \frac{F_y}{F_x}$

bzw. $\alpha = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$

Vorsicht: α hat mehrere mathematische Lösungen (+180°)
→ Vorzeichen beachten!

Addition zweier Kräfte

Gegeben sind folgende zwei zentrale ebene Kräfte:



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} = F_{1x}\,\vec{e}_x + F_{1y}\,\vec{e}_y$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} = F_{2x}\,\vec{e}_x + F_{2y}\,\vec{e}_y$$

Resultierende

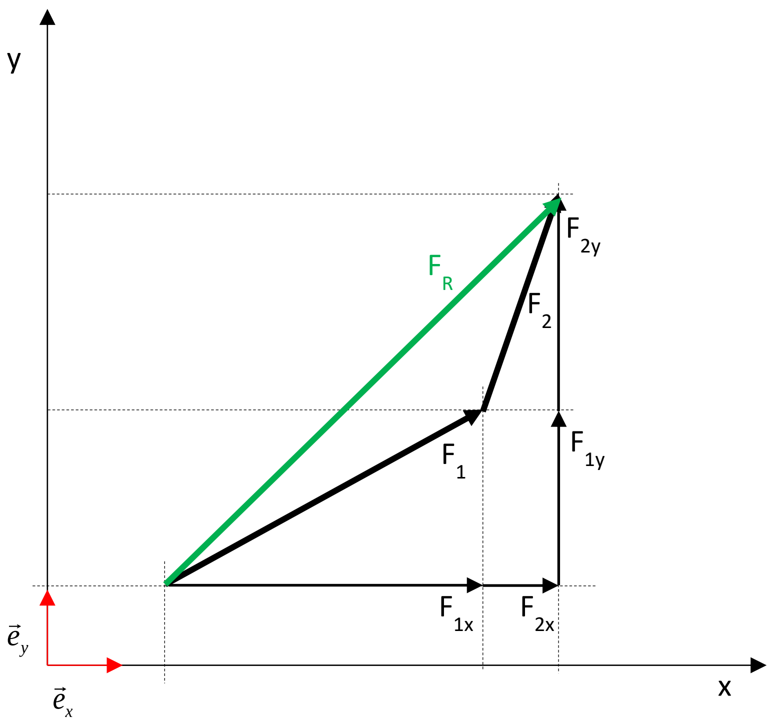
$$\vec{F}_R \quad = \vec{F}_1 + \vec{F}_1$$

$$= F_{1x}\cdot\,\vec{e}_{1x} + F_{1y}\cdot\,\vec{e}_{1y} + F_{2x}\cdot\,\vec{e}_{2x} + F_{2y}\cdot\,\vec{e}_{2y}$$

$$= (F_{1x} + F_{2x})\,\vec{e}_x + \left(F_{1y} + F_{2y}\right)\vec{e}_y$$

$$= F_{Rx}\cdot\,\vec{e}_x + F_{Ry}\cdot\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \end{pmatrix}$$

In Worten: Die x-Komponente der Resultierenden ist gleich der Summe der x-Komponenten der Einzelkräfte (y-Komponenten analog).



Für n Kräfte gilt entsprechend:

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\cdot\vec{e}_x + F_{Ry}\;\cdot\vec{e}_y$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\,\vec{e}_x + F_{iy}\,\vec{e}_y\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}F_{ix}\right)\vec{e}_x + \left(\sum_{i=1}^{n}F_{iy}\right)\vec{e}_y$$

Beispiel: Addition von 3 Kräften

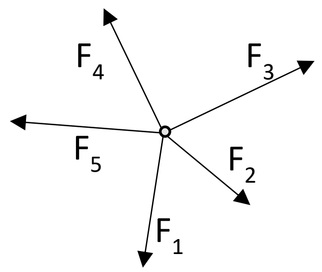
Gegeben	$F_{1x} = 2kN$	$F_2 = 4kN$	$F_3 = 7kN$
	$F_{1y} = 3kN$	$\alpha_2 = 30°$	$F_{3x} = 3{,}5kN$, $F_{3y} > 0$

Gesucht
$\vec{F}_R$ zeichnerisch
$\vec{F}_R$ rechnerisch, in Koordinatenform (Spaltenmatrix)
$\vec{F}_R$ rechnerisch, in Betrag und Richtung

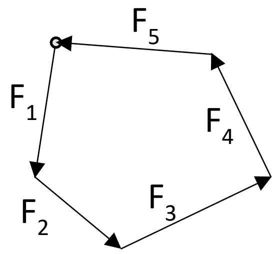
3.2. Gleichgewichtsbedingungen

Wiederholung
Trägheitsaxiom: Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig, geradlinigen Bewegung, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern
„**Gleichgewichtszustand**" der Statik: Heben sich mehrere Kräfte gegenseitig auf, so ist der Körper im Gleichgewicht. Die Resultierende ist eine Nullkraft, $\vec{F}_R = \vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

Zeichnerische Behandlung



Lageplan

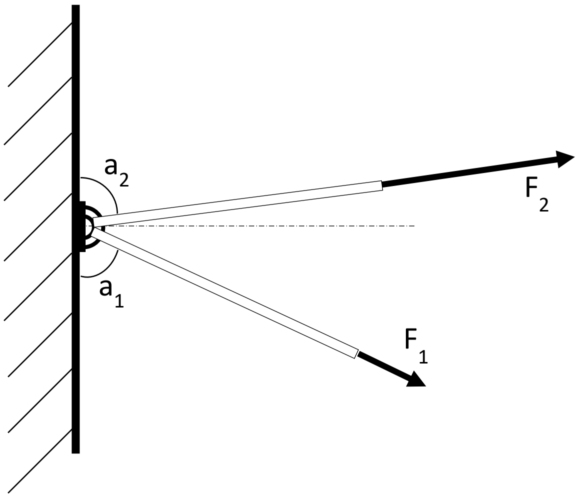


Kräfteplan

Der Endpunkt der letzten Kraft ist gleich dem Anfangspunkt der ersten Kraft.
→ „**Das Krafteck ist geschlossen.**"

Rechnerische Behandlung
- die Resultierende ist null → jede ihrer Komponenten ist null
- in der **Ebene** gibt es damit **zwei skalare Gleichgewichtsbedingungen**:
  $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0}$
- diese sind notwendige und hinreichende Bedingungen für das Gleichgewicht ebener zentraler Kräftesysteme
- mit den Gleichgewichtsbedingungen können in der Ebene höchstens zwei unbekannte Kraftkomponenten bestimmt werden
  (mehr Unbekannte → System statisch unbestimmt → höhere Festigkeitslehre)

Übungsaufgabe: Zwei Seile ziehen an einer Wandöse.



Gegeben: $F_1 = 3kN$ $\alpha_1 = 45^0$
$F_2 = 8kN$ $\alpha_2 = 70^0$

Gesucht: Reaktionskraft der Wand auf die Öse.

4. Allgemeines Kräftesystem in der Ebene

4.1. Die Resultierende zweier paralleler Kräfte

Bisher: Die Wirkungslinien der Kräfte schneiden sich in einem **Punkt** → Bestimmung von $\vec{F}_R$

Neu: Die Wirkungslinien zweier Kräfte verlaufen **parallel**! → Wie wird nun $\vec{F}_R$ bestimmt?

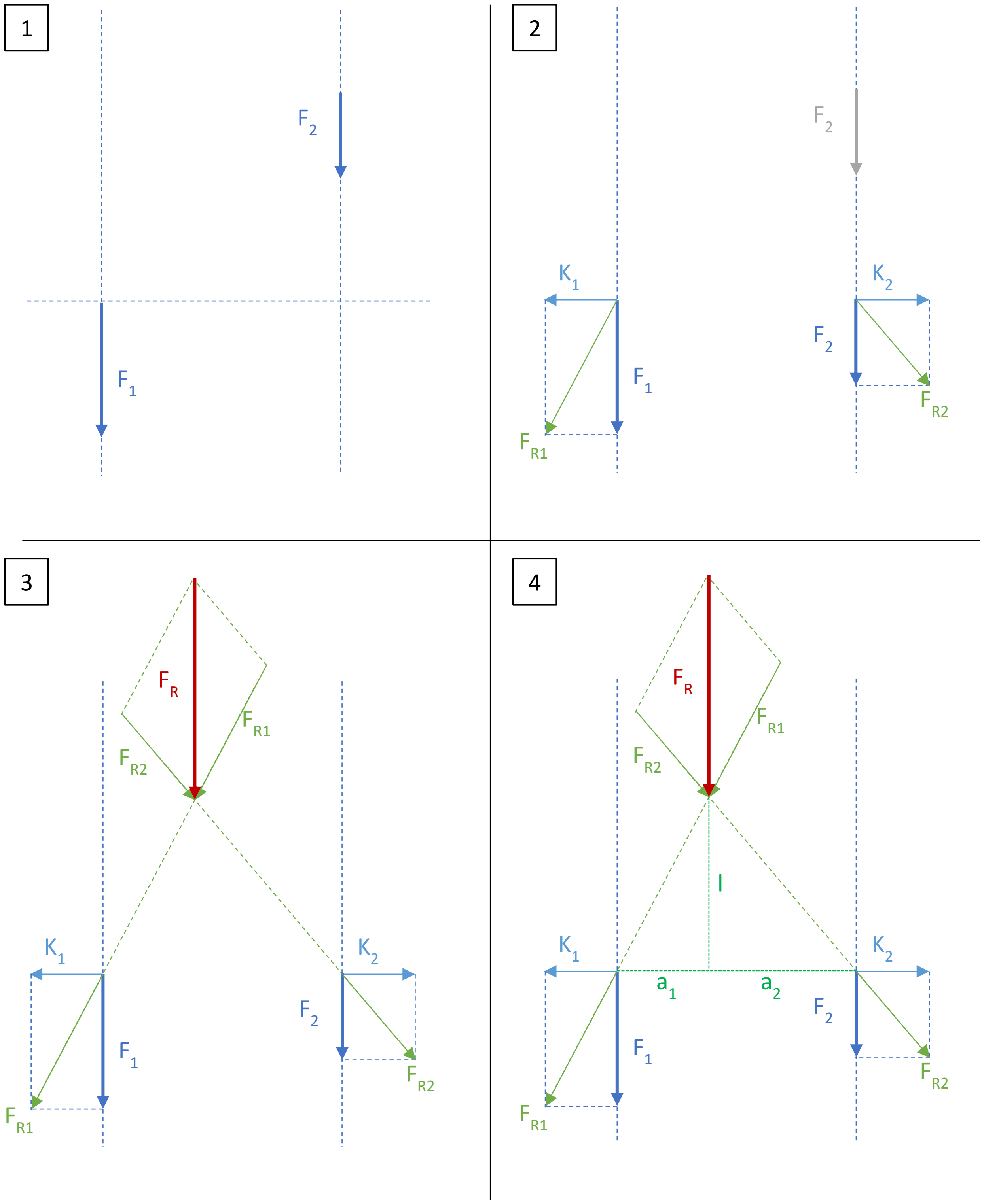


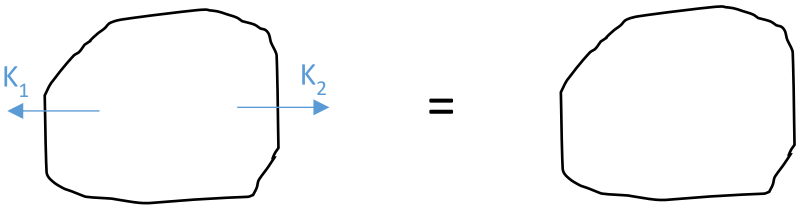
Bild 1: **Ausgangslage** mit zwei parallelen Kräften

Bild 2: Einführung von **Hilfskräften K_1 und K_2** und Bildung der **Zwischenresultierenden F_{R1} und F_{R2}**

Verschiebung von $\vec{F}_2$ entlang WL_2 bis rechter Winkel zwischen Verbindungslinie der Anfangspunkte und den WL's vorliegt

Hinzufügen der beiden Hilfskräfte K_1 und K_2 mit…
- gleichem Betrag
- gleicher Wirkungslinie
- entgegengesetzter Richtung

… sie haben auf einen Starrkörper keine Wirkung!



$\vec{K}_1 = -\vec{K}_2$ $\vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \vec{0}$

Bildung der Zwischenresultierenden $\vec{F}_{R1}$ und $\vec{F}_{R2}$

$$\vec{F}_{R1} = \vec{F}_1 + \vec{K}_1$$
$$\vec{F}_{R2} = \vec{F}_2 + \vec{K}_2 = \vec{F}_2 - \vec{K}_1$$

Bild 3: Bildung der **Gesamtresultierenden** aus den Zwischenresultierenden

Verschiebung der **Zwischenresultierenden** $\vec{F}_{R1}$ und $\vec{F}_{R2}$ in den Schnittpunkt ihrer WL's

Bildung der **Gesamtresultierenden** $\vec{F}_R$

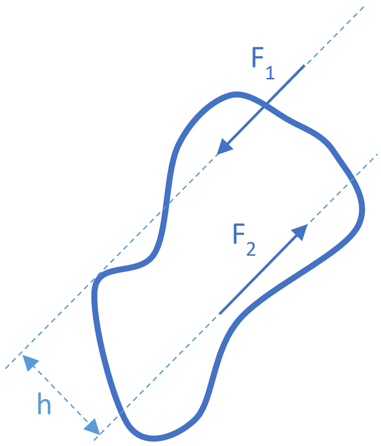
$$\vec{F}_R = \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{R2} = \vec{F}_1 + \vec{K}_1 + \vec{F}_2 - \vec{K}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Bild 4: Geometrie (Ähnlichkeitssätze) und **Hebelgesetz**

4.2. Kräftepaar und Moment des Kräftepaares

Kräftepaar: Zwei gleich große, entgegengesetzt wirkende Kräfte auf parallelen Wirkungslinien.

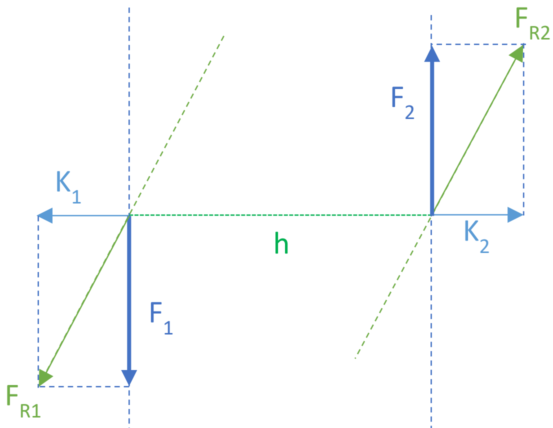
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



Die Resultierende eines Kräftepaares ist eine **Nullkraft**! $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

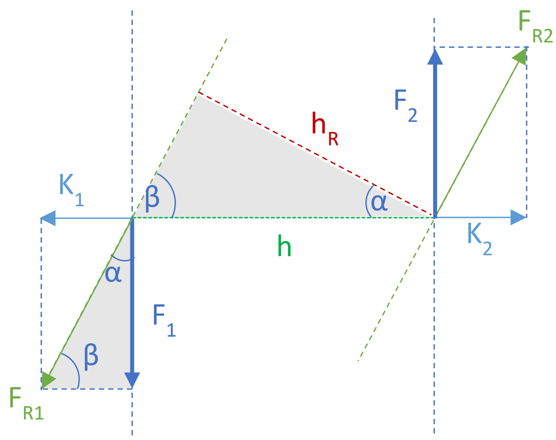
Trotzdem ist eine physikalische **Wirkung** vorhanden → **Drehung** des Körpers!
Bsp. Kreuzschlüssel für Radwechsel

Herleitung wie zuvor in Abschnitt 4.1:



Die WL der Zwischenresultierenden $\vec{F}_{R1}$ und $\vec{F}_{R2}$ verlaufen parallel!

Aus der Geometrie folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke mit cos α:



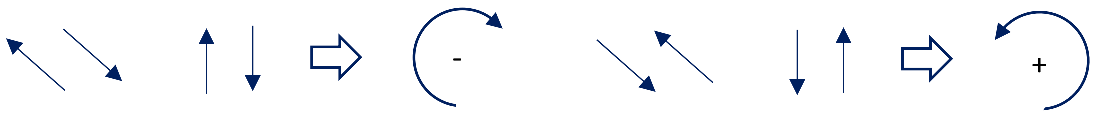
$\cos\alpha = \frac{F_1}{F_{R1}} = \frac{h_R}{h}$ → $F_1 \cdot h = F_{R1} \cdot h_R$

Mit $F_1 = F_2 = F$ und $F_{R1} = F_{R2} = F_R$ → $F \cdot h = F_R \cdot h_R$

$F \cdot h$ ist Maß für die **Drehwirkung** und wird als **Moment** des Kräftepaars bezeichnet.

Definition: Das Moment M des Kräftepaares ist gleich der Kraft mal dem Abstand der WL's bzw. Kraft mal Hebelarm: $M = F \cdot h$

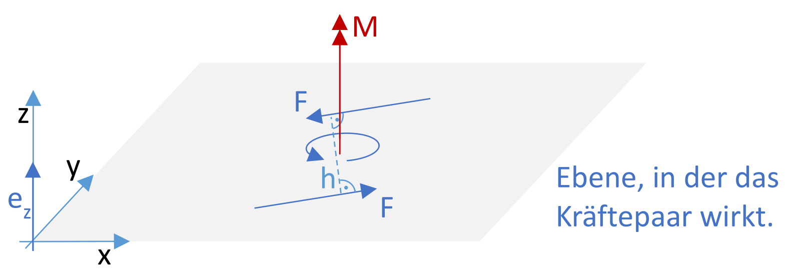
Das Kräftepaar wirkt in einem bestimmten Drehsinn mit der Kennzeichnung durch einen gebogenen Pfeil:



Das Moment M des Kräftepaares ist wie die Kraft ein Vektor, der senkrecht auf der Wirkebene des Kräftepaares steht.

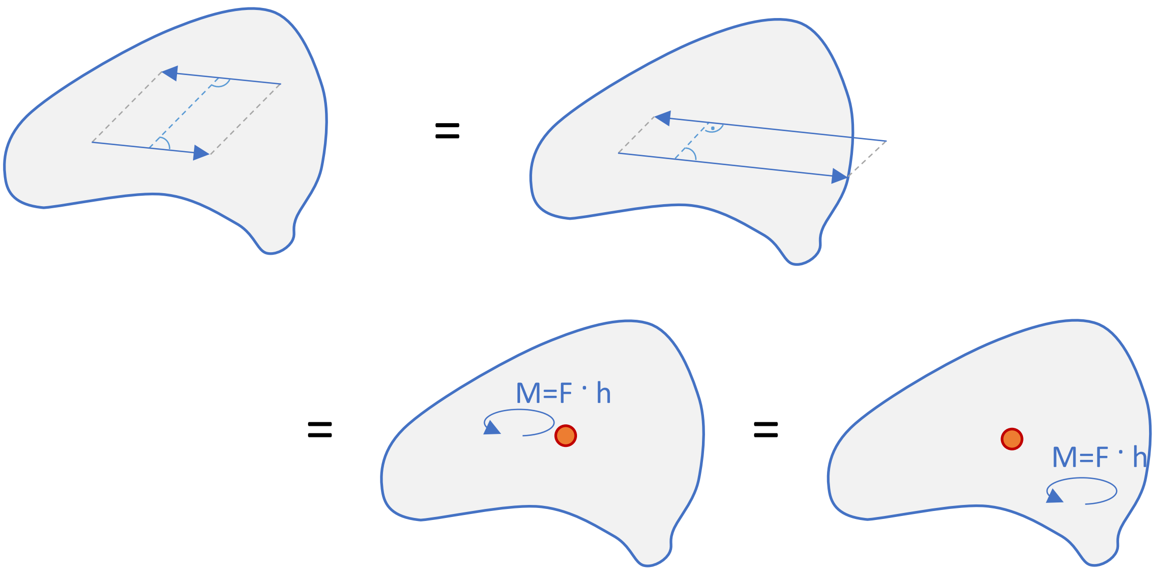
Regeln

Der Momentenpfeil erhält **zwei Spitzen** (Unterscheidung vom Kraftpfeil)
Die **Pfeillänge** entspricht dem Betrag $|\vec{M}| = M = F \cdot h$.
Die **Pfeilrichtung** ist gleich der Richtung, in der sich eine Rechtsschraube unter der Wirkung des Kräftepaares bewegen würde (**Korkenzieherregel**).
Vektorschreibweise: $\vec{M} = 0 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y + M_z \cdot \vec{e}_z = M_z \cdot \vec{e}_z$ (M_z ist Koordinate, nicht Betrag!)



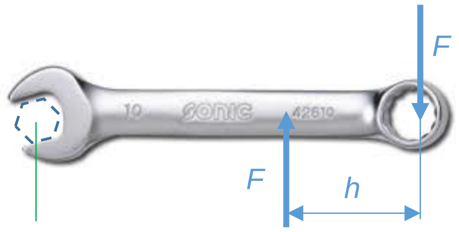
Verschieben der Kräfte des Kräftepaares und Aneinanderreihen mehrerer der **vorgenannten Konstruktionen** zeigt:

- Ein Kräftepaar kann beliebig in der Ebene **verschoben** oder **verdreht** werden, ohne dass sich sein Moment ändert.
- Bei gleichbleibendem Moment können die Wirkungslinien eine **beliebige Lage, Richtung und Abstand** einnehmen.
- Das Kräftepaar ist nicht an eine Wirkungslinie gebunden, es kann ohne Änderung der Wirkung an beliebigen Stellen des starren Körpers angreifen.
- Man sagt daher, das Moment ist ein **freier Vektor**!

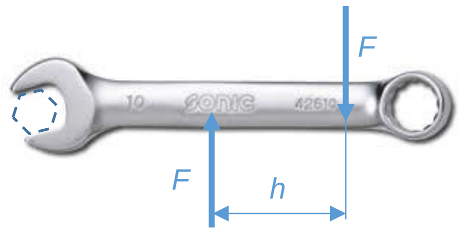


Einschub: Abgrenzung Kräftepaar und Einzelkraft

Kräftepaar
Kraft und Gegenkraft greifen am Schlüssel an.



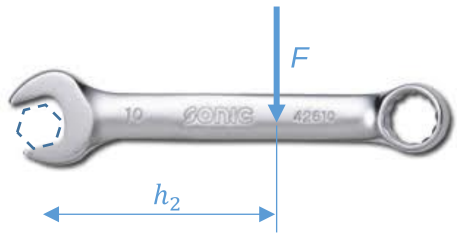
=



Kräftepaar ist frei
(gleiche Wirkung)

Einzelkraft
Nur eine Kraft greift am Schlüssel an.

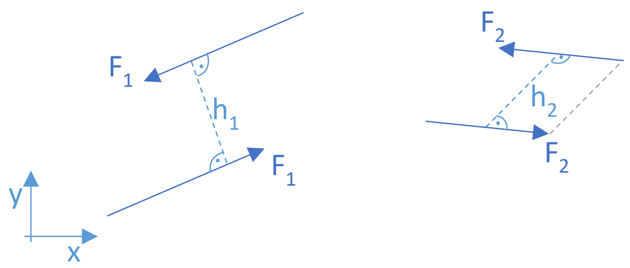
≠



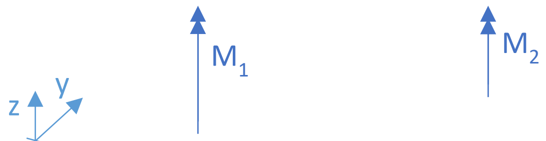
Einzelkraft ist an WL gebunden
(unterschiedliche Wirkung, Erfahrung)

4.3. Zusammensetzen von Kräftepaar<u>en</u> – resultierendes Moment

Zwei Kräftepaare greifen an einem Körper an



zugehörige Vektorpfeile:

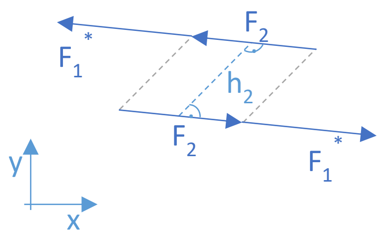


$M_1^+ = F_1 \cdot h_1$ $\qquad$ $M_2^+ = F_2 \cdot h_2$

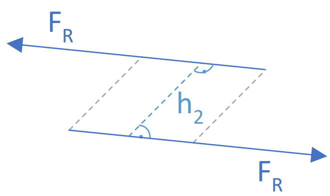
Wichtig: Bei der Addition den Drehsinn (Vorzeichen) beachten!

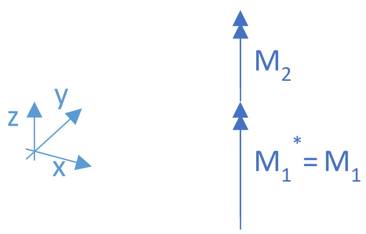
Verschieben und Verdrehen der Kräfte in die gleiche Lage $\rightarrow$ Addition der entsprechenden Kräfte der Kräftepaare zu einem resultierendem Kräftepaar

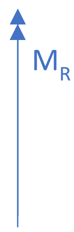
$\rightarrow$



$\rightarrow$







$M_1^+ = M_1^{*+} = F_1 \cdot h_1 = F_1^* \cdot h_2$ $\qquad$ $M_R^+ = M_1^{*+} + M_2^+ = (F_1^* + F_2) \cdot h_2 = F_R \cdot h_2$

Vektorschreibweise (Kräfte in der x-y-Ebene): $\overrightarrow{M_R} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} = M_1 \cdot \overrightarrow{e_z} + M_2 \cdot \overrightarrow{e_z} = (M_1 + M_2) \cdot \overrightarrow{e_z}$

Addition mehrerer Momente:

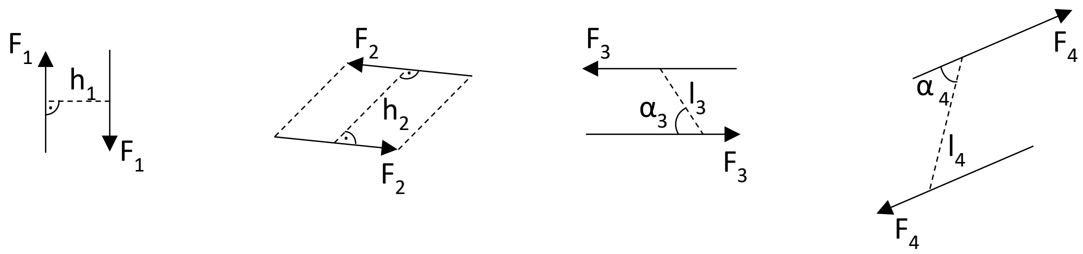
$$M_R \cdot \vec{e}_Z = \vec{M}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \vec{e}_Z = \vec{e}_Z \cdot \sum_{i=1}^{n} M_i$$

Vektorschreibweise → für räumliche Probleme
Skalare Schreibweise → für ebene Probleme

Regel zur skalaren Addition von Momenten in der Ebene
- Festlegen des positiven Drehsinns (üblich: positiv gegen den Uhrzeigersinn)
- Drehen die Momente in positive Richtung, dann positives, ansonsten negatives Vorzeichen
- Resultierendes Moment folgt aus dieser Drehsinnfestlegung

$$M_R = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

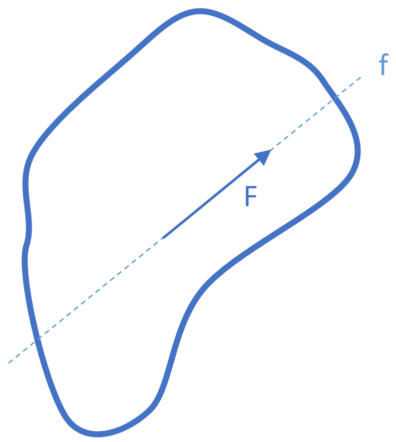
Beispiel: Für die Kräftepaare gemäß Skizze ermittele man das resultierende Moment!



F_1= 200N	h_1= 0,8m	
F_2= 350N	h_2= 1,4m	
F_3= 600N	l_3= 1,8m	α_3=70°
F_4= 820N	l_4= 2,2m	α_4=50°

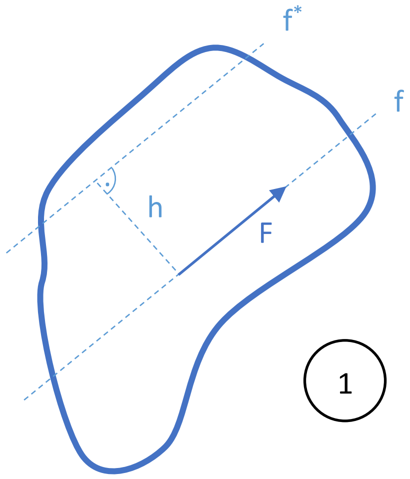
Hinweis:
Die **mechanische Wirkung** eines Kräftepaars auf einen Starrkörper ist eindeutig durch Betrag und Drehsinn seines Momentes gegeben. Daher wird das Kräftepaar meist einfach als **Moment** bezeichnet.
Begriff „**Moment**“ → **Idealisierung** (wie Einzelkraft).

4.4. Moment einer Kraft



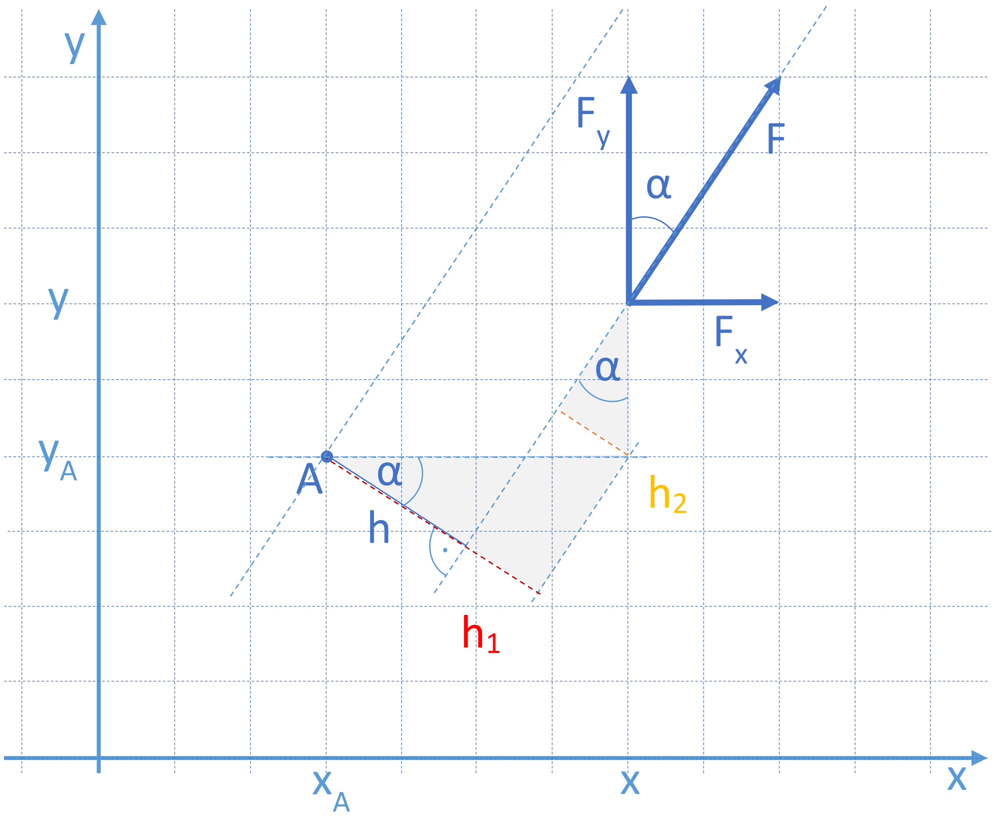
Wir wissen: Eine Kraft F kann ohne Änderung ihrer Wirkung nur entlang ihrer Wirkungslinie f verschoben werden.

Frage: Wie ändert sich die Wirkung bei Parallelverschiebung der Kraft F zur WL f^*?



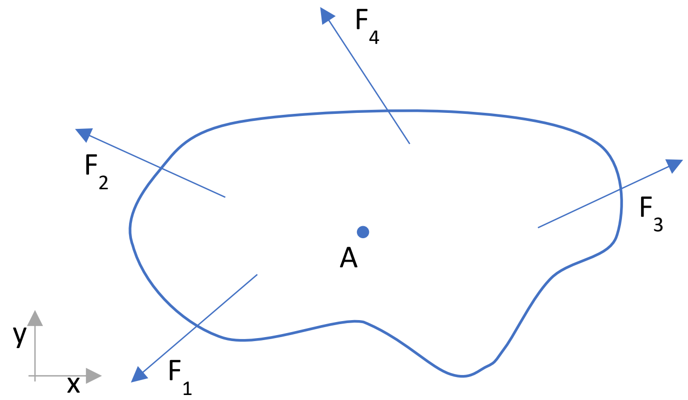
Neue Fragestellung, gleicher Sachverhalt:

Die Kraft $\vec{F}$ ist durch ihre kartesischen Komponenten gegeben.
Wie groß ist das Moment von $\vec{F}$ bezüglich eines Punktes A?



4.5. Die Resultierende allgemeiner ebener Kräftesysteme

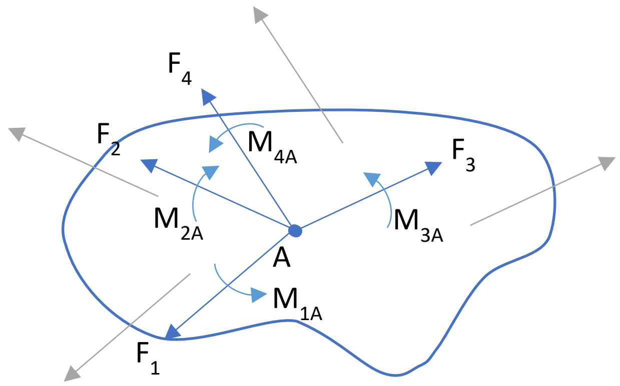
Motivation: Aus vielen Kräften berechnet man in der Praxis oft eine Resultierende, sodass die Situation übersichtlicher und die Wirkung leichter erkannt wird.

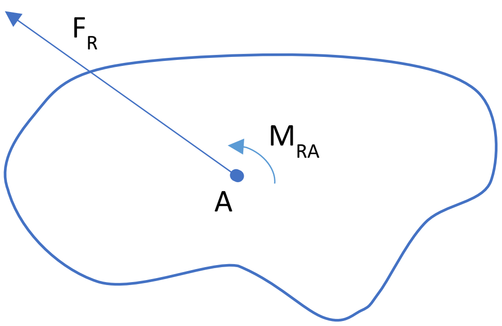


Es greifen verschiedene Kräfte beliebig an einem Körper an.

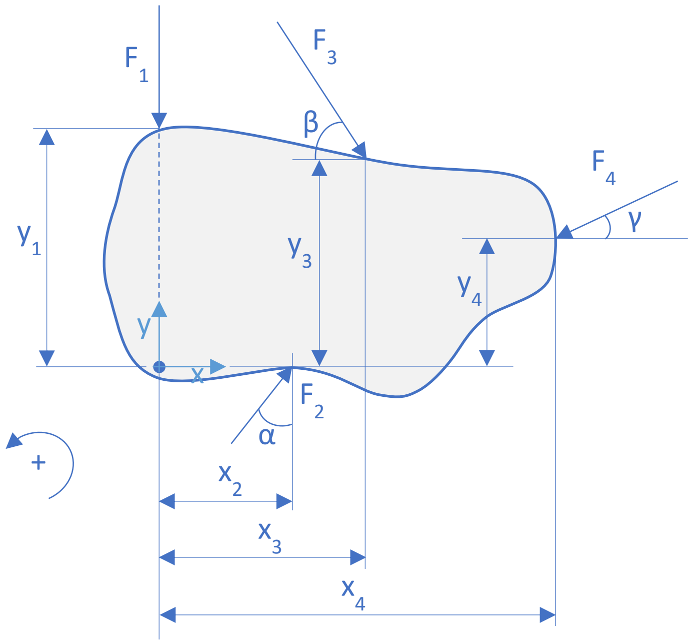
Gesucht: Resultierende Kraft und resultierendes Moment des Kräftesystems bzgl. Punkt A!

Lösungsweg





Beispiel: Reduzieren Sie das gegebene Kräftesystem auf den Koordinatenursprung!



Gegeben

$F_1 = 5kN$	$F_2 = 3kN$	$F_3 = 4kN$	$F_4 = 3kN$
	$x_2 = 3m$	$x_3 = 5m$	$x_4 = 8m$
$y_1 = 3m$		$y_3 = 2m$	$y_4 = 1m$
	$\alpha = 45°$	$\beta = 60°$	$\gamma = 30°$

4.6. Gleichgewichtsbedingungen

Erweiterungen der Gleichgewichtsbedingungen auf allgemeine ebene Kräftesysteme.

Ein mit Kräften belasteter Körper ist im Gleichgewicht, wenn die resultierende Kraft $\vec{F}_R$
und das resultierende Moment $\vec{M}_{RA}$ bezüglich eines <u>beliebigen</u> (s.u.) Punktes *A* zu null werden.

Es müssen folgende drei skalare Gleichungen erfüllt sein:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0$$

$$\text{mit } \mathrm{M_{iA}} = (\mathrm{x_i} - \mathrm{x_A}) \cdot \mathrm{F_{iy}} - (\mathrm{y_i} - \mathrm{y_A}) \cdot \mathrm{F_{ix}}$$

Warum darf A beliebig gewählt werden?

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = \sum_{i=1}^{n} [(\mathrm{x_i} - \mathrm{x_A}) \cdot \mathrm{F_{iy}} - (\mathrm{y_i} - \mathrm{y_A}) \cdot \mathrm{F_{ix}}]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\left(\mathrm{x_i} \cdot \mathrm{F_{iy}} - \mathrm{x_A} \cdot \mathrm{F_{iy}}\right) - (\mathrm{y_i} \cdot \mathrm{F_{ix}} - \mathrm{y_A} \cdot \mathrm{F_{ix}})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{x_i} \cdot \mathrm{F_{iy}} - \mathrm{y_i} \cdot \mathrm{F_{ix}}] - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x_A} \cdot \mathrm{F_{iy}} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{y_A} \cdot \mathrm{F_{ix}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{x_i} \cdot \mathrm{F_{iy}} - \mathrm{y_i} \cdot \mathrm{F_{ix}}] - \mathrm{x_A} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F_{iy}} - \mathrm{y_A} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F_{ix}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{x_i} \cdot \mathrm{F_{iy}} - \mathrm{y_i} \cdot \mathrm{F_{ix}}] - \mathrm{x_A} \cdot 0 - \mathrm{y_A} \cdot 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{x_i} \cdot \mathrm{F_{iy}} - \mathrm{y_i} \cdot \mathrm{F_{ix}}] \quad \rightarrow \text{unabhängig von A}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_{i0} \qquad \text{0: Ursprung des CS}$$

Hinweis 1
Später werden die **Gleichgewichtsbedingungen verallgemeinert**:

auf räumliche Probleme	TM I
auf <u>Teile</u> von Körpern (Schnittgrößen)	TM I
auf differentiell kleine Materialausschnitte	TM II Festigkeitslehre, FEM
auf Bewegungen durch Einbeziehung von Trägheitskräften	TM III

Daher sind Gleichgewichtsbedingungen die zentralen Gleichungen der gesamten Mechanik!

Hinweis 2
In der Ebene gibt es drei Gleichgewichtsbedingungen, diese entsprechen folgenden drei unabhängigen **Bewegungsmöglichkeiten** oder **Freiheitsgraden**:

Translation in x-Richtung
Translation in y-Richtung
Drehung (Rotation) um Achse senkrecht zur x-y-Ebene

Möglich: Ersatz der Kraft-Gleichgewichtsbedingungen durch zusätzliche Momenten-Gleichgewichtsbedingungen hinsichtlich der Bezugspunkte A, B, C.
Ein Körper ist also auch im Gleichgewicht wenn gilt:

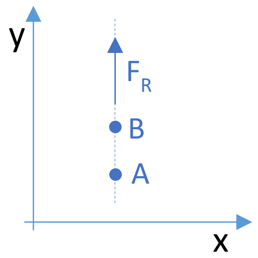
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0$$

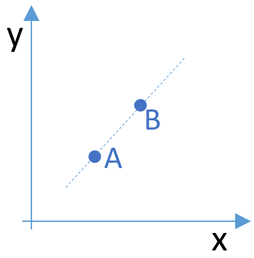
Fall 1: $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0$

Fall 2: $\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0$

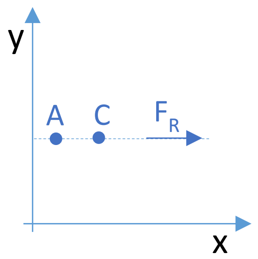
Fall 3: $\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0$

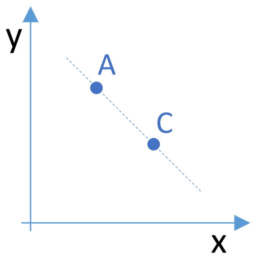
ggf. kein Gleichgewicht Resultierende nicht erfasst Fehler	immer Gleichgewicht Resultierende erfasst OK	Einschränkungen daher:



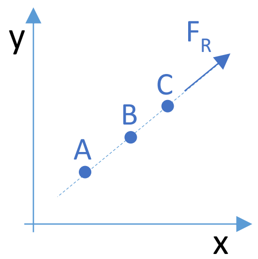


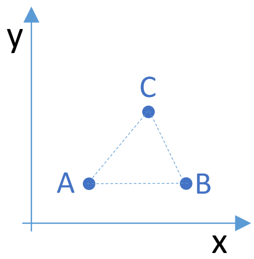
Fall 1
Die Punkte A und B dürfen nicht auf einer zur y-Achse parallelen Gerade liegen.





Fall 2
Die Punkte A und C dürfen nicht auf einer zur x-Achse parallelen Gerade liegen.





Fall 3
Die Punkte A, B und C dürfen nicht auf einer Gerade liegen.

Fall 1, links
In y-Richtung muss F_R nicht 0 sein, da die Gleichung ersetzt wird.
Wenn A und B auf einer Senkrechten liegen, bildet F_R auch kein Moment bzgl. A und B und entzieht sich einer Bildung des Gleichgewichts.

Fall 2, links
In x-Richtung muss F_R nicht 0 sein, da die Gleichung ersetzt wird.
Wenn A und C auf einer Waagrechten liegen, bildet F_R auch kein Moment bzgl. A und C und entzieht sich einer Bildung des Gleichgewichts.

Fall 3, links
In x- und y-Richtung muss F_R nicht 0 sein, da die Gleichungen ersetzt werden.
Wenn A, B und C auf einer Geraden liegen, bildet F_R auch kein Moment bzgl. A, B und C und entzieht sich einer Bildung des Gleichgewichts.

4.7. Überlagerungs- oder Superpositionsprinzip

Greifen an einem Körper (Beispiel: Feder) zwei Kräftesysteme (KS) an, die jedes für sich im Gleichgewicht sind, dann ist auch das aus beiden Systemen gebildete Gesamtsystem im Gleichgewicht.

Mathematisch formuliert:

KS 1 $\sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{(1)} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^{(1)} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iA}^{(1)} = 0$

KS 2 $\sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{(2)} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^{(2)} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iA}^{(2)} = 0$

Folglich:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}^{(1)} + F_{ix}^{(2)}\right) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(F_{iy}^{(1)} + F_{iy}^{(2)}\right) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(M_{iA}^{(1)} + M_{iA}^{(2)}\right) = 0$$

Das Vorgehen funktioniert auch, wenn die Systeme mit n und m skaliert werden!

System 1 $\sum_{i=1}^{n} n \cdot F_{ix}^{(1)} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} n \cdot F_{iy}^{(1)} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} n \cdot M_{iA}^{(1)} = 0$

System 2 $\sum_{i=1}^{n} m \cdot F_{ix}^{(2)} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} m \cdot F_{iy}^{(2)} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} m \cdot M_{iA}^{(2)} = 0$

Folglich:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(n \cdot F_{ix}^{(1)} + m \cdot F_{ix}^{(2)}\right) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n}\left(n \cdot F_{iy}^{(1)} + m \cdot F_{iy}^{(2)}\right) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n}\left(n \cdot M_{iA}^{(1)} + m \cdot M_{iA}^{(2)}\right) = 0$$

Die Ergebnisse (Auslenkungen, Auflagerreaktionen…) werden dann ebenfalls skaliert und addiert.

Damit können ohne größere Zusatzrechnung Ergebnisse für neue Lastfälle erstellt werden!

Anwendung: Fahrzeug-Lastfälle Eigengewicht, Beladung, Luftwiderstand usw. (…)

5. Ebene Tragwerke

Ausweitung des Bekannten auf beliebig geformte und zusammengesetzte Bauteile.

5.1. Lager und Gelenke (Kraftübertragungselemente)

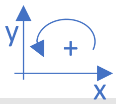
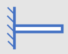
Lager unterbinden oder sperren Bewegungsmöglichkeiten / Freiheitsgrade.
Sie übertragen dabei Kräfte und Momente.

Mehrteilige Tragwerke aus zwei oder mehr starren Körpern sind durch Gelenke verbunden. In diesen werden, je nach Konstruktion ebenfalls Kräfte / Momente übertragen.

Je nach Anzahl der übertragbaren Kraft- und Momentkomponenten in der Ebene heißen Lager und Gelenke **ein-, zwei, oder dreiwertig**.

Ebene Probleme → höchstens dreiwertige Lager/ Gelenke
Räumliche Probleme → bis zu sechswertige Lager/ Gelenke

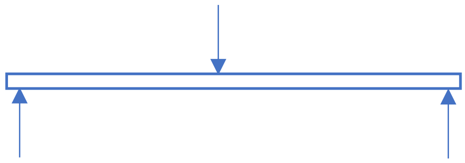
Übliche Kraftübertragungselemente in der Ebene:

		Übertragbare Kraft / Moment			
Bezeichnung	Symbol	F_x	F_y	M	Wertigkeit
Loslager			X		1
Pendelstütze			X		1
Festlager		X	X		2
feste Einspannung		X	X	X	3
Schiebehülse			X	X	2
Gelenk		X	X		2

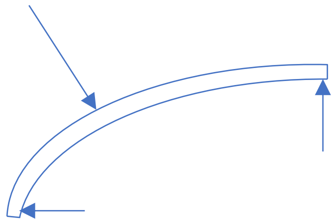
5.2. Einteilige Tragwerke

Stab: lang, dünn, gerade
Last in Richtung Stabachse

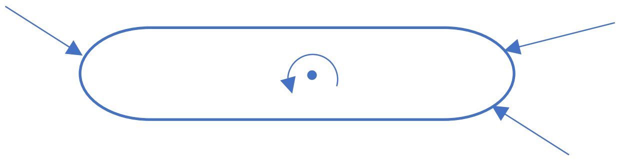
Balken: wie Stab, aber Last auch
quer zur Stabachse



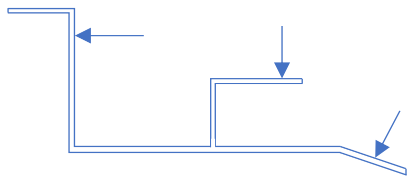
Bogen: gekrümmter Balken



Scheibe: dünn und eben
Last in der Scheibenebene



Rahmen: dünn, lang, abgewinkelt
aus Balken zusammengesetzt



5.2.1. Statische Bestimmtheit

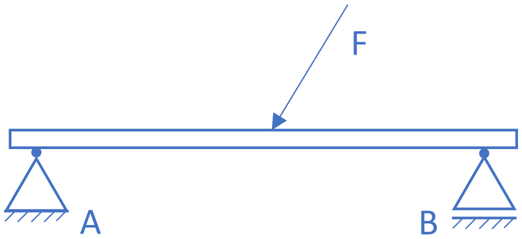
Ein ebenes, einteiliges Tragwerk hat drei Freiheitsgrade, die über drei Gleichgewichtsbedingungen berechenbar sind. Es ist statisch bestimmt gelagert, wenn aus den drei Gleichgewichtsbedingungen die Lagerreaktionen berechenbar sind.

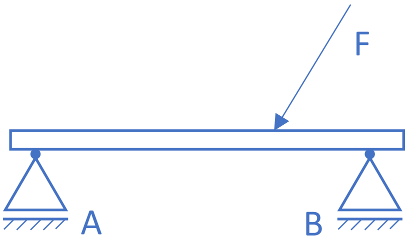
In diesem Fall entspricht die Anzahl der Auflagerreaktionen (a = 3) der Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen (3) und das Tragwerk hat keine Freiheitsgrade mehr (f = 0).

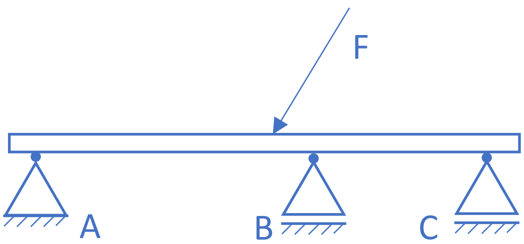
$f = g - a$

f Anzahl der Freiheitsgrade
g Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen
a Anzahl der Auflagerreaktionen

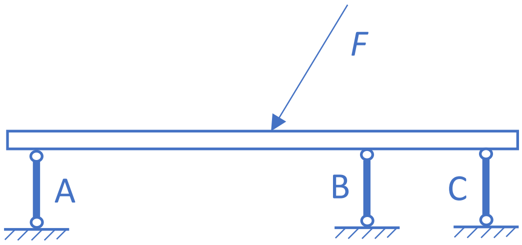
Beispiele

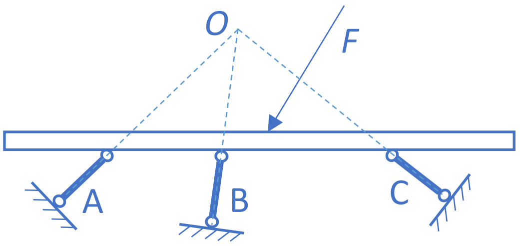


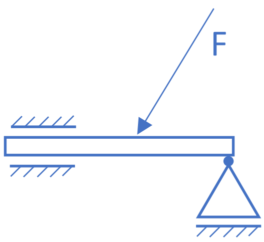




Ausnahmefälle







Zusammenfassung

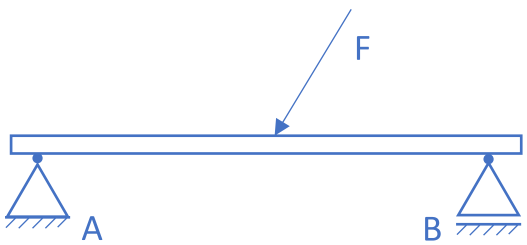
Bedingungen für die statisch bestimmte Lagerung von ebenen einteiligen Tragwerken:

I. Es gilt $f = g - a = 0$

II. a) Drei Lagerkräfte dürfen nicht parallel sein.
b) Drei Lagerkräfte dürfen nicht durch einen gemeinsamen Punkt gehen.
c) Bei einem Lagermoment dürfen die beiden Lagerkräfte nicht parallel sein.

Hinweis: Die statische Bestimmtheit hängt nur von der Lagerung und nicht von der Belastung eines Tragwerks ab!

5.2.2. Berechnung der Auflagerreaktionen

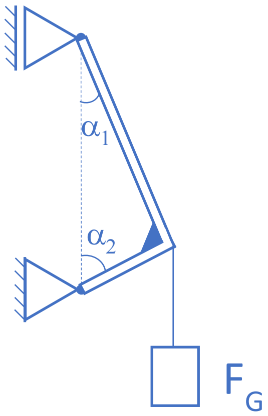


Vorgehensweise

1. Festlegen eines KS mit Momentdrehsinn
2. Freischneiden in den Lagern
3. Einzeichnen der Lagerreaktionen → FKD
(Richtungssinn beliebig, liefert Rechnung negatives Vorzeichen war Richtungsannahme falsch, also: Richtungsannahme und Ergebnis → eindeutige Lösung!)
4. Prüfung der statischen Bestimmtheit
5. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen
6. Auflösen des Gleichungssystems und Einsetzen
7. Ergebnis-Check

Beispiel: belastetes Tragwerk

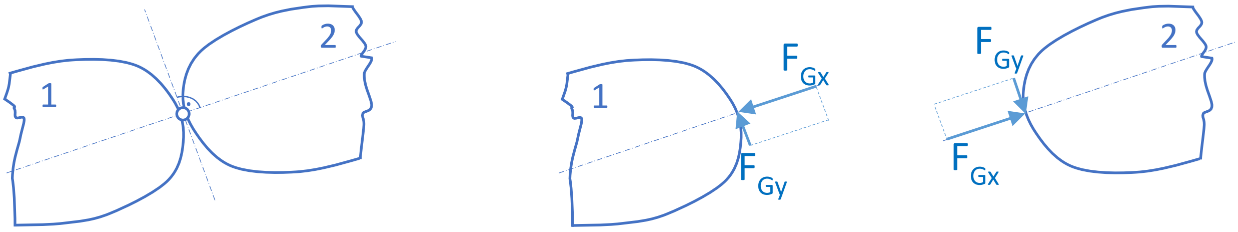
Für das durch F_G belastete Tragwerk bestimme man die Auflagerreaktionen.
Gegeben: F_G=520N; α_1=40°; α_2=70°



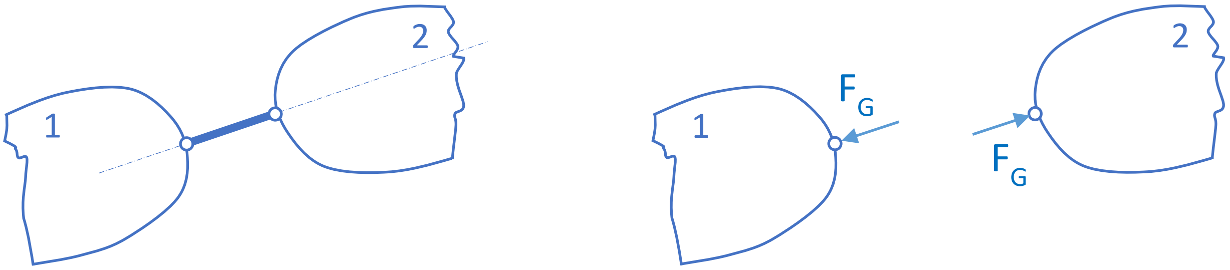
5.3. Mehrteilige Tragwerke

In den Verbindungselementen mehrteiliger Tragwerke treten Zwischenreaktionen (z) auf, und zwar immer paarweise. Sie wirken an den beteiligten Starrkörpern jeweils entgegengesetzt (actio = reactio).

Beispiel: Gelenk
zwei Zwischenreaktionen (z = 2) F_{Gx}, F_{Gy}



Beispiel: Pendelstütze
eine Zwischenreaktion (z = 1) F_G



5.3.1. Statische Bestimmtheit

Zwischenreaktionen sind weitere Unbekannte neben den Auflagerreaktionen.

Berechnung der Unbekannten

- **Trennen** der einzelnen Starrkörper in den Verbindungsstellen

- bei n Starrkörpern g·n **Gleichgewichtsbedingungen** (3·n in der Ebene)

- Klärung der **statischen Bestimmtheit** bei mehrteiligen Tragwerken

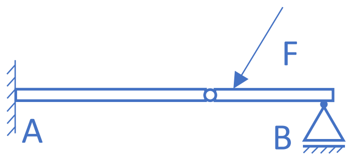
  Klärung der **hinreichenden Bedingung** für die statische Bestimmtheit mit der Theorie linearer Gleichssysteme. Koeffizientenmatrix (…) muss invertierbar sein, dafür darf die Determinante nicht Null werden… → wird hier nicht behandelt

  Pragmatischer Ansatz ist die Klärung nur der **notwendigen Bedingung**: Stimmt die Anzahl der Unbekannten mit der Anzahl der Gleichungen überein?
  Hierzu $f = g \cdot n - a - z$

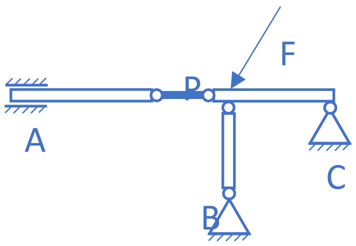
f	Anzahl Freiheitsgrade
g	Anzahl Gleichgewichtsbedingungen pro Starrkörper (Ebene: 3, Raum: 6)
n	Anzahl starrer Körper im Tragwerk
a	Anzahl Auflagerreaktionen
z	Anzahl Zwischenreaktionen

falls $f = 0$	notwendige Bedingung erfüllt, Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen
falls $f < 0$	überbestimmt, System ist f-fach statisch unbestimmt
falls $f > 0$	kinematisch unterbestimmt, System ist wackelig oder verschieblich

Beispiel 1



Beispiel 2



5.3.2. Berechnung der Auflager- und Zwischenreaktionen

Vorgehensweise

- Festlegung **KS** mit Momentendrehsinn
- **Freischneiden** in Lagern und Verbindungselementen
- Einzeichnen **Lagerreaktionen und Zwischenreaktionen** (paarweise entgegengesetzt)
  Richtungssinn beliebig.
  Liefert Rechnung negatives Vorzeichen → Annahme war falsch
  Also: Richtungsannahme + Ergebnis → Eindeutige Lösung
- Überprüfung **statische Bestimmtheit**
- Aufstellen **GGB's** für jeden Körper
  ggf. Momenten- statt Kraftgleichgewichtsbedingung
  Bezugspunkte geschickt wählen
- **Lösen** des Gleichungssystems
- **Check** Lösung

5.4. Ebene Fachwerke

Ein Stabwerk oder **Fachwerk** ist ein Tragwerk, das nur aus (geraden, unverschieblichen) **Stäben** besteht, die in sogenannten Knoten miteinander verbunden sind.

Beispiele sind Gerüste, Brücken, Krane, …

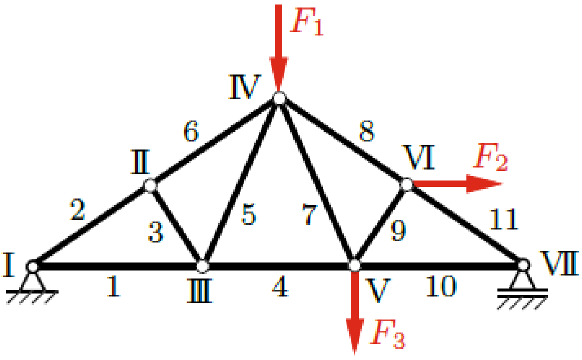
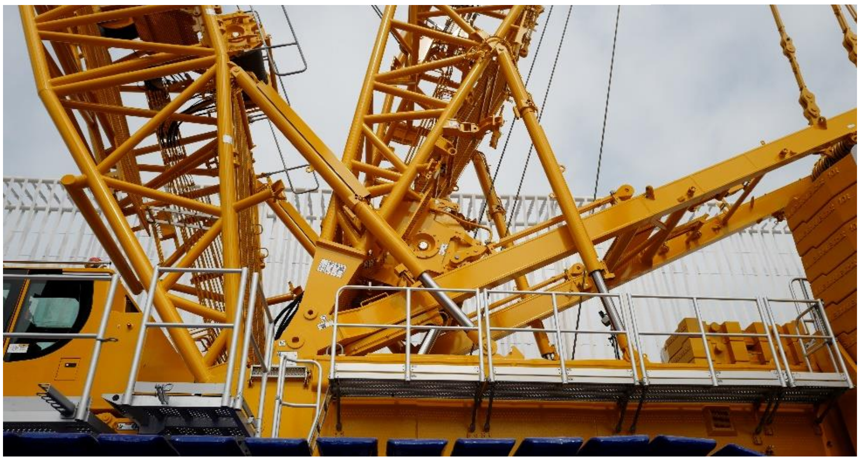


Bild: D. Gross, W. Hauger, J. Schröder, W. A. Wall: Technische Mechanik 1, Springer Vieweg Verlag



Zur **Berechnung** der in den Stäben auftretenden Kräfte werden folgende **idealisierte Annahmen** getroffen:

- die Stäbe sind an den Knoten zentrisch und gelenkig miteinander verbunden,
  die Knoten sind **reibungsfreie Gelenke**
  jeder Stab ist jeweils nur an zwei Gelenken angeschlossen

- äußere **Kräfte und Auflagerreaktionen** greifen nur an den **Gelenken** an
  Kräfte, die nicht an den Gelenken angreifen, werden zerlegt in Kraftanteile, welche am Stabanfang sowie am Stabende angreifen.

- die **Stabachsen** schneiden sich in den Knotenpunkten und sind gerade
  Durch die Voraussetzung des idealen Fachwerks ist gewährleistet, dass alle Stäbe nur auf Zug oder Druck beansprucht werden.

In der **Realität** werden die Gelenke geschweißt, geschraubt oder genietet.

Berechnung der Stabkräfte – Knotenpunktverfahren

- an jedem Knotenpunkt greift ein **zentrales Kräftesystem** an
  es treten **keine Momente** auf – Momentengleichgewicht muss also nicht aufgestellt werden
- das **Freischneiden** erfolgt immer in den **Gelenken**
  jedes Gelenk wird einzeln freigeschnitten und als starrer Körper betrachtet, an dem die Stabkräfte angreifen
- man setzt zweckmäßig alle Stabkräfte am Gelenk als **Zugkräfte** (+) an
  auf den Stab wirken sie dann ebenfalls als Zugkräfte

Feststellungen

- die **Auflagerreaktionen** lassen sich oft gesondert behandeln, indem das ganze Fachwerk als starrer Körper behandelt wird
- meist interessieren nicht alle Stabkräfte, sondern einzelne **kritische Stäbe**, deren Festigkeitsverhalten untersucht werden soll
- oft sind Stäbe gar nicht belastet (**Nullstäbe**)

Nullstäbe entdecken

1. sind an unbelasteten Knoten zwei Stäbe angeschlossen, die nicht in gleicher Richtungen liegen, so sind es Nullstäbe
2. sind an einem belasteten Knoten zwei Stäbe angeschlossen, und greift die äußere Kraft in Richtung des einen Stabes an, so ist der andere ein Nullstab
3. Sind an einem unbelasteten Knoten drei Stäbe angeschlossen, von denen zwei in gleicher Richtung liegen, so ist der dritte Stab ein Nullstab

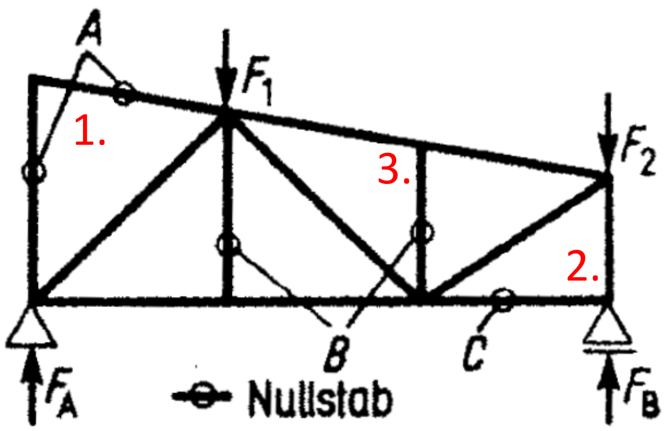
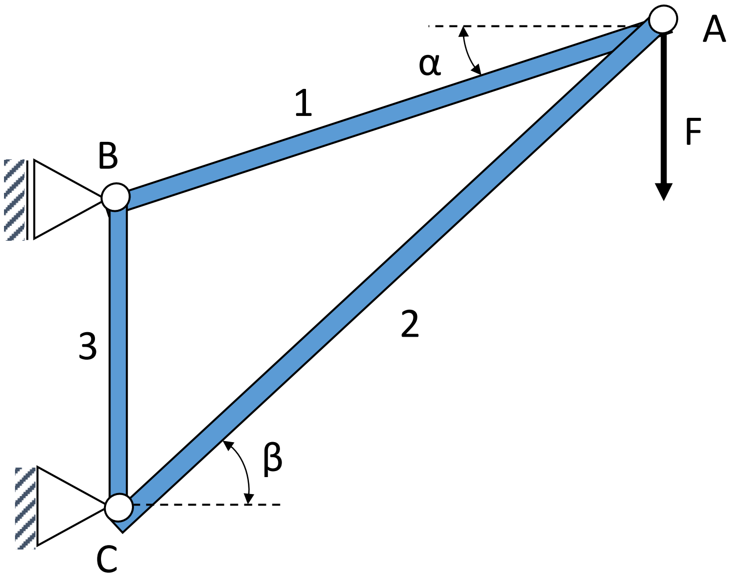


Bild: Holzmann, Meyer, Schumpich: Technische Mechanik 1 – Statik, Springer Vieweg Verlag

Beispiel: Drehkran



$\alpha = 20°$
$\beta = 45°$
$F = 20$ kN

Berechnen Sie die Auflagerkräfte und die Zwischenreaktionen an den Gelenken!

6. Räumliche Statik

6.1. Kraft in Raum

Einführung eines kartesischen, räumlichen **Koordinatensystems**

→ Rechtssystem	Daumen	x-Achse
	Zeigefinger	y-Achse
	Mittelfinger	z-Achse
→Rechte-Hand-Regel	Daumen in Richtung Achse	
	4 andere Finger zeigen positive Drehrichtung an	

Kraftvektor liegt in dem vom Koordinatensystem aufgespannten Raum

Spaltenmatrix $$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Zeilenmatrix $$\vec{F}^T = [F_x \quad F_y \quad F_z]$$

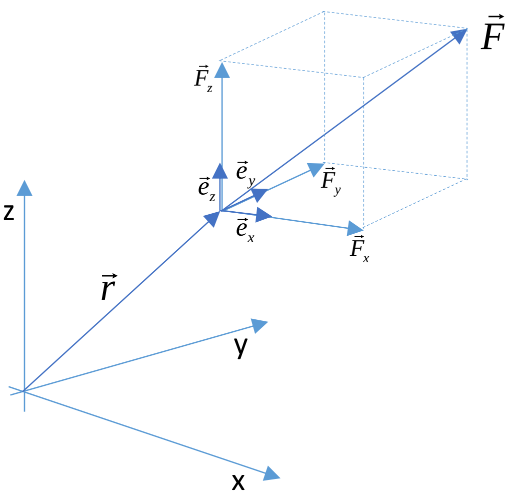
Komponenten $$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y} + \vec{F_z}$$

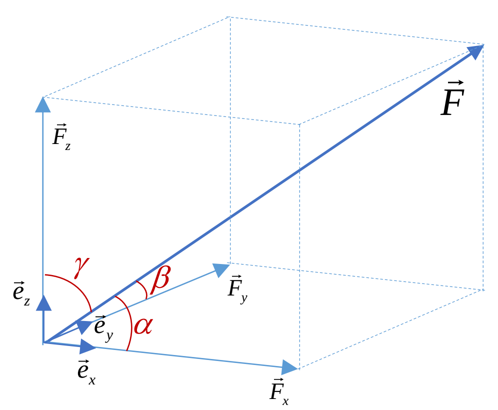
Koordinaten $$\vec{F} = F_x \cdot \vec{e_x} + F_y \cdot \vec{e_y} + F_z \cdot \vec{e_z}$$

Betrag $$|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Richtungskosinusse: Winkel α, β, γ zwischen Kraftvektor und den Koordinatenachsen x, y, z

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$





6.2. Ortsvektor

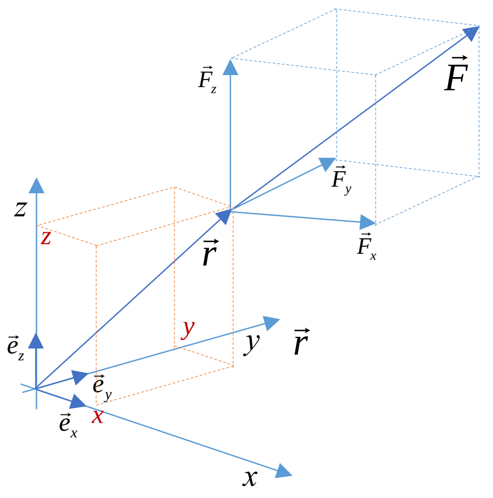
Ortsvektor $\vec{r}$ zeigt vom Ursprung zum Kraftangriffspunkt.

Spaltenmatrix $\quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Zeilenmatrix $\quad \vec{r}^T = [x \quad y \quad z]$

Komponenten $\quad \vec{r} = \vec{r_x} + \vec{r_y} + \vec{r_z}$

Koordinaten $\quad \vec{r} = r_x \cdot \vec{e_x} + r_y \cdot \vec{e_y} + r_z \cdot \vec{e_z}$

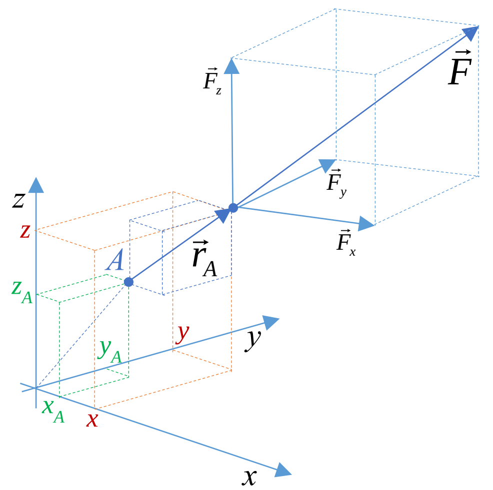


Vektor $\vec{r_A}$ zeigt vom Punkt A zum Kraftangriffspunkt.

Komponenten $\quad \vec{r_A} = \vec{r_{Ax}} + \vec{r_{Ay}} + \vec{r_{Az}}$

Spaltenmatrix $\quad \vec{r_A} = \begin{bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{bmatrix}$

Koordinaten $\quad \vec{r_A} = (x - x_A) \cdot \vec{e_x} + (y - y_A) \cdot \vec{e_y} + (z - z_A) \cdot \vec{e_z}$



6.3. Das Moment einer Kraft im Raum

Moment einer Kraft in der **Ebene** bzgl. **Punkt 0**

$\mathrm{M_z} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{F_y} - \mathrm{y} \cdot \mathrm{F_x}$

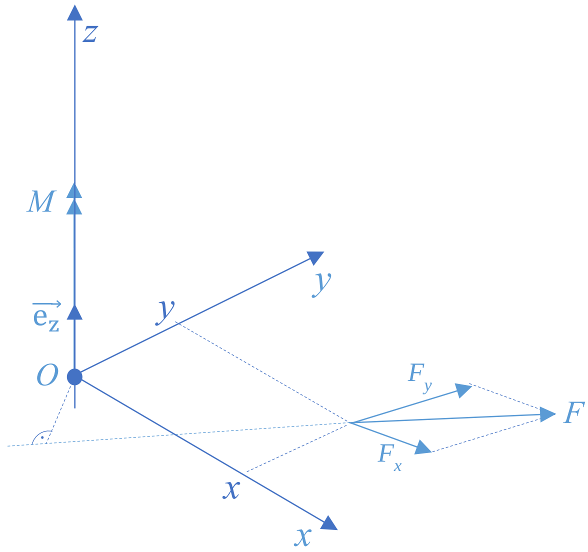
$\overrightarrow{\mathrm{M_z}} = \mathrm{M_z} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e_z}}$ Vektorschreibweise

$\mathrm{M_z} > 0$ Moment dreht mathematisch positiv (entgegen Uhrzeigersinn)

$\mathrm{M_z} < 0$ Moment dreht mathematisch negativ (im Uhrzeigersinn)

In der xy-Ebene gibt es nur eine einzige Drehmöglichkeit – um die *z*-Achse.

Der Momentenvektor hat nur eine einzige Komponente. $\overrightarrow{\mathrm{M_z}} = \overrightarrow{\mathrm{M}}$

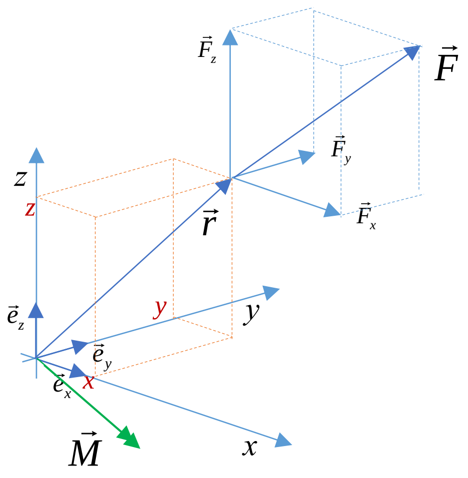


Moment einer Kraft in der **Ebene** bzgl. **Punkt A**

$\mathrm{M_A} = (\mathrm{x} - \mathrm{x_A}) \cdot \mathrm{F_y} - (\mathrm{y} - \mathrm{y_A}) \cdot \mathrm{F_x}$

$\overrightarrow{\mathrm{M_A}} = \mathrm{M_A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e_z}}$

Moment einer Kraft im **Raum** bzgl. **Punkt 0**



Diese Beziehungen lassen sich formal über das Vektorprodukt aus Orts- und Kraftvektor zusammenfassen:

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}}$$

$$\vec{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathrm{F_x} \\ \mathrm{F_y} \\ \mathrm{F_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{y} \cdot \mathrm{F_z} - \mathrm{z} \cdot \mathrm{F_y} \\ \mathrm{z} \cdot \mathrm{F_x} - \mathrm{x} \cdot \mathrm{F_z} \\ \mathrm{x} \cdot \mathrm{F_y} - \mathrm{y} \cdot \mathrm{F_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M_x} \\ \mathrm{M_y} \\ \mathrm{M_z} \end{bmatrix}$$

geometrische Deutung:
Betrag des Vektorproduktes entspricht dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms.
Das Vektorprodukt steht **senkrecht** auf der Parallelogrammfläche.

Betrag des Moments

$$\left|\vec{M}\right| = M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

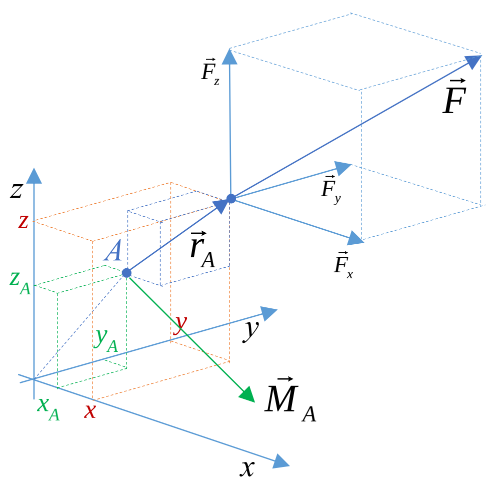
Richtungskosinus: Winkel α, β, γ zwischen Momentenvektor und den Koordinatenachsen x, y, z

$$cos \propto = \frac{M_x}{M} \qquad cos\beta = \frac{M_y}{M} \qquad cos\gamma = \frac{M_z}{M}$$

Moment einer Kraft im **Raum** bzgl. **Punkt A**

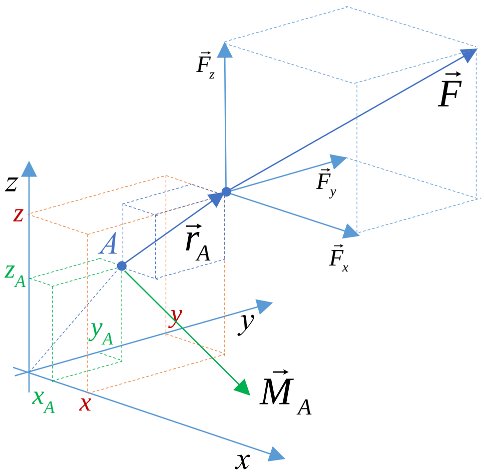
$$\vec{\mathrm{M_A}} = \vec{\mathrm{r_A}} \times \vec{\mathrm{F}}$$

$$\vec{\mathrm{M_A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} - \mathrm{x_A} \\ \mathrm{y} - \mathrm{y_A} \\ \mathrm{z} - \mathrm{z_A} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathrm{F_x} \\ \mathrm{F_y} \\ \mathrm{F_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathrm{y} - \mathrm{y_A}) \cdot \mathrm{F_z} - (\mathrm{z} - \mathrm{z_A}) \cdot \mathrm{F_y} \\ (\mathrm{z} - \mathrm{z_A}) \cdot \mathrm{F_x} - (\mathrm{x} - \mathrm{x_A}) \cdot \mathrm{F_z} \\ (\mathrm{x} - \mathrm{x_A}) \cdot \mathrm{F_y} - (\mathrm{y} - \mathrm{y_A}) \cdot \mathrm{F_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M_{Ax}} \\ \mathrm{M_{Ay}} \\ \mathrm{M_{Az}} \end{bmatrix}$$



6.4. Die Resultierende eines allgemeinen räumlichen Kräftesystems

„Die" Resultierende im Raum besteht wie in der Ebene allgemein aus einer resultierenden **Kraft** und einem resultierenden **Moment**.



Resultierende Kraft

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$
$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$
$$F_{Rz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

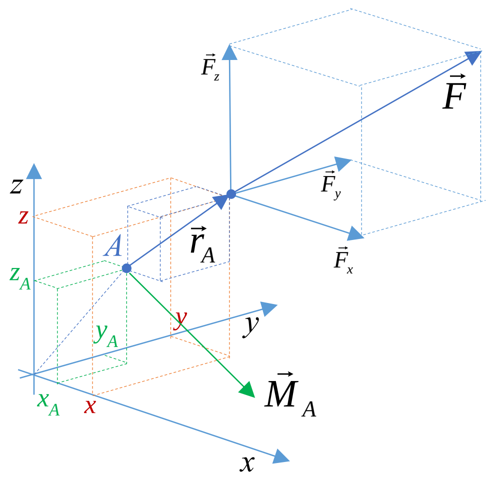
Resultierendes Moment

$$\vec{M}_{RA} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iA}$$

$$M_{RAx} = \sum_{i=1}^{n} M_{iAx}$$
$$M_{RAy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iAy}$$
$$M_{RAz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iAz}$$

Wichtig: Das resultierende Moment ist von A abhängig!

6.5. Gleichgewichtsbedingungen



Ein mit einem allgemeinen räumlichen Kräftesystem belasteter Körper ist im Gleichgewicht, wenn die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ und das resultierende Moment $\vec{M}_{RA}$ bezüglich eines beliebigen Punktes A gleich null sind.

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \qquad\qquad \vec{M}_{RA} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iA} = \vec{0}$$

Diesen Vektorgleichungen entsprechen folgende sechs skalare Gleichgewichtsbedingungen:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad\qquad M_{RAx} = \sum_{i=1}^{n} M_{iAx} = 0$$
$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad\qquad M_{RAy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iAy} = 0$$
$$F_{Rz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad\qquad M_{RAz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iAz} = 0$$

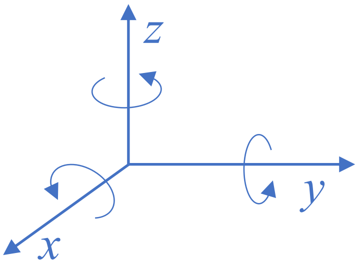
mit
$$\begin{bmatrix} \mathrm{M_{iAx}} \\ \mathrm{M_{iAy}} \\ \mathrm{M_{iAz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathrm{y_i} - \mathrm{y_A}) \cdot \mathrm{F_{iz}} - (\mathrm{z_i} - \mathrm{z_A}) \cdot \mathrm{F_{iy}} \\ (\mathrm{z_i} - \mathrm{z_A}) \cdot \mathrm{F_{ix}} - (\mathrm{x_i} - \mathrm{x_A}) \cdot \mathrm{F_{iz}} \\ (\mathrm{x_i} - \mathrm{x_A}) \cdot \mathrm{F_{iy}} - (\mathrm{y_i} - \mathrm{y_A}) \cdot \mathrm{F_{ix}} \end{bmatrix}$$

Die Kräftegleichgewichtsbedingungen können wieder durch weitere Momentengleichgewichtsbedingungen ersetzt werden. Dabei kann für jede Gleichung ein anderer Bezugspunkt/ eine andere Bezugsachse gewählt werden.

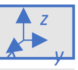
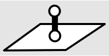
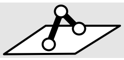
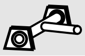
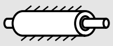
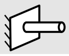
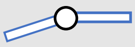
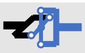
6.6. Räumliche Lager und Gelenke, statische Bestimmtheit

Im Raum gibt es folgende sechs **Bewegungsfreiheitsgrade**:

Translation in x-Richtung	Rotation um x-Achse
Translation in y-Richtung	Rotation um y-Achse
Translation in z-Richtung	Rotation um z-Achse



Die **Freiheitsgrade** werden durch **Lager** eingeschränkt.
Mehrteilige Tragwerke sind durch **Gelenke** verbunden.
Lager und Gelenke werden nach ihrer **Anzahl der Lagerreaktionen** klassifiziert.

Bezeichnung	Symbol 
Pendelstütze	
Zweiwertige Stütze	
Festlager	
Festlager	
Schiebehülse	
Feste Einspannung	
Kugelgelenk	
Scharniergelenk	
Kreuzgelenk	

Ein **einteiliges** räumliches Tragwerk ist **statisch bestimmt gelagert**, wenn es **unbeweglich** ist und die Lagerreaktionen aus den **sechs Gleichgewichtsbedingungen** berechnet werden können.
Daher müssen in den **Lagern sechs Reaktionen** auftreten (g=6). Sie werden wie bei einem ebenen Tragwerk durch Freischneiden ermittelt.

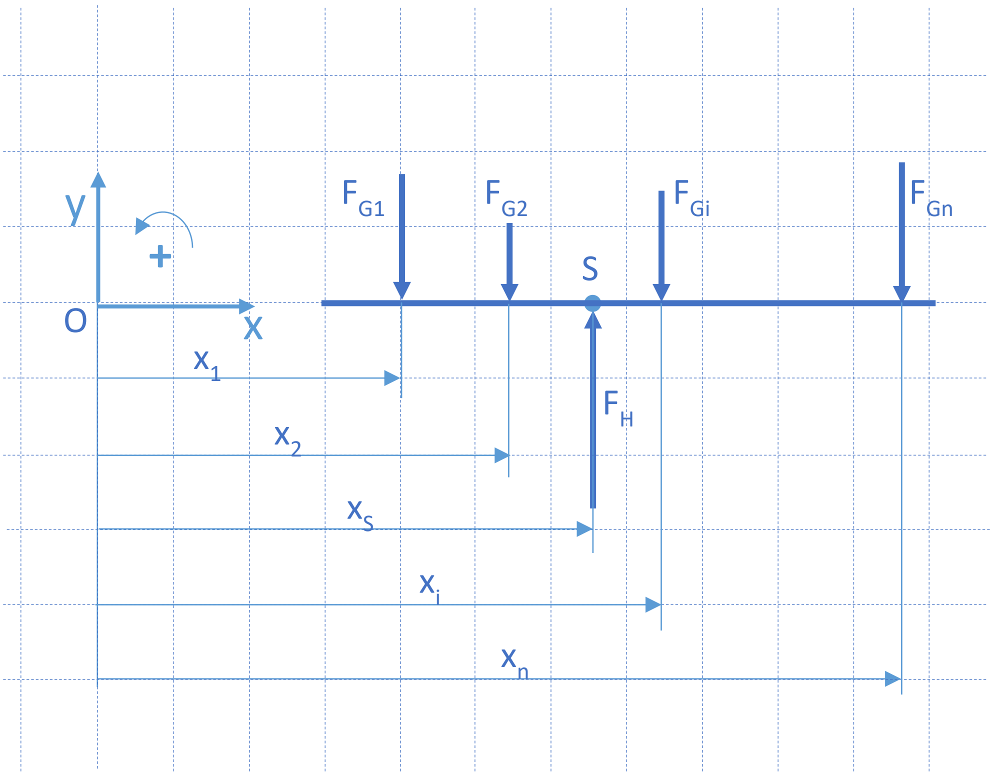
7. Schwerpunkte

7.1. Schwerpunkt paralleler Kräfte

7.1.1. Ebene Anordnung der Kräfte

Einzellasten (Meter Kölsch)

Gegeben: ein gewichtsloser Balken, an dem *n* parallele Kräfte senkrecht nach unten angreifen. Die Wirkungslinien der Kräfte werden durch Koordinaten x_i festgelegt.



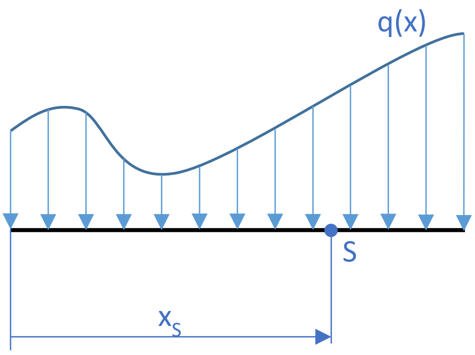
Gesucht: die Haltekraft $\vec{F}_H$, die den Kräften $\vec{F}_{Gi}$ das Gleichgewicht hält mit dem Betrag F_H und der Lage der Wirkungslinie (Koordinate x_S).

Streckenlasten

Anstelle von Einzelkräften wird nun eine **kontinuierlich verteilte Belastung** eines Balkens durch eine **Streckenlast q(x)** betrachtet.

Dimension einer Streckenlast: Kraft/Länge, N/m

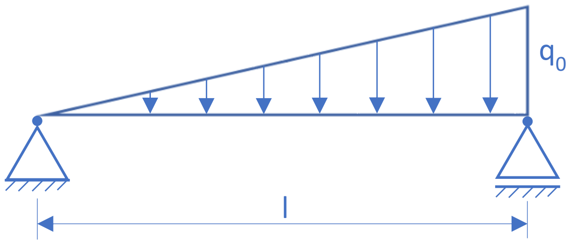
Mit der **Streckenlast** q(x) werden häufig **idealisierte Flächenlasten** beschrieben.
Die Streckenlast ist in der Technischen Mechanik eine wichtige Belastungsart.
Beispiele: Schüttungen, Schneelasten usw.



Gesucht: Lage des **Schwerpunktes S** der Streckenlast.

Beispiel Streckenlast (Schneelast)

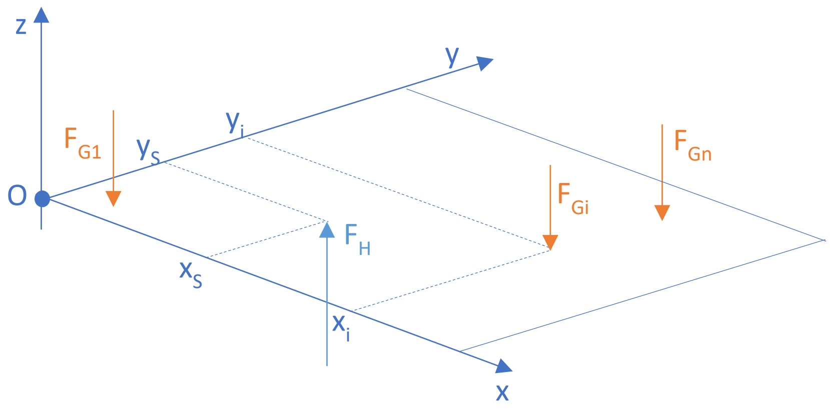
Gegeben: Balken der Länge l mit dreieckförmiger Streckenlast



Gesucht: Resultierende F_R und Lage ihrer Wirkungslinie (z.B. zur Berechnung der Lagerreaktionen)

7.1.2. Räumliche Anordnung der Kräfte

Gegeben: Ein gewichtsloser Körper, an dem n Kräfte parallel zur z-Achse angreifen. (z.B. ein Tablett mit Pilsgläsern)



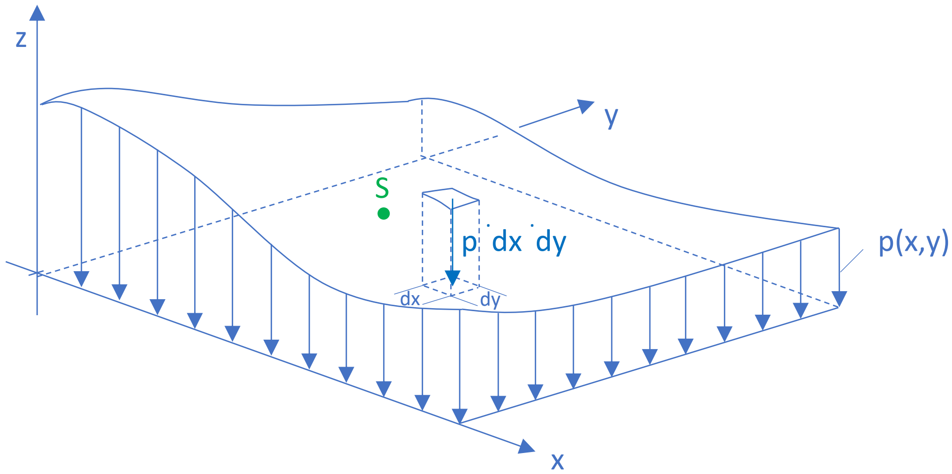
Gesucht: Die Haltekraft $\vec{F}_H$, die den Kräften $\vec{F}_{Gi}$ das Gleichgewicht hält mit dem Betrag F_H und der Lage der Wirkungslinie (Koordinaten x_S, y_S).

Auch hier: Übergang zu einer kontinuierlichen Belastung, einer **Flächenlast** p(x,y)

Beispiele: Schneelasten, Schüttungen, …

Flächenlasten treten real auf, sie müssen keine Idealisierung sein.

Dimension einer Flächenlast: Kraft / Fläche, N/m



Gesucht: Lage des Schwerpunktes S

Beispiel für Doppelintegral aus „Mathematische Formelsammlung", Lothar Papula, 12. Auflage, Springer Vieweg

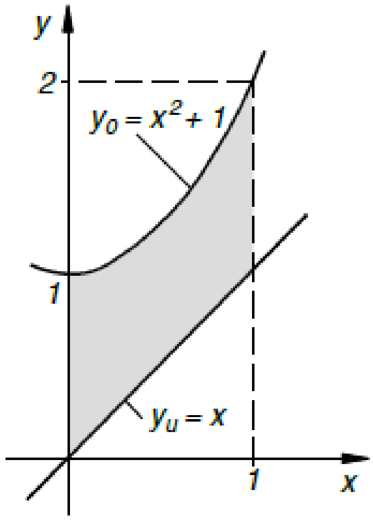
Beispiel

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{x^2+1} x^2\, y\, dy\, dx = ?$$

Innere Integration nach der Variablen y*:*

$$\int_{y=x}^{x^2+1} x^2 y\, dy = x^2 \cdot \int_{y=x}^{x^2+1} y\, dy = \frac{1}{2} x^2 \left[y^2 \right]_{y=x}^{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \left[(x^2+1)^2 - x^2 \right] = \frac{1}{2} (x^6 + x^4 + x^2)$$



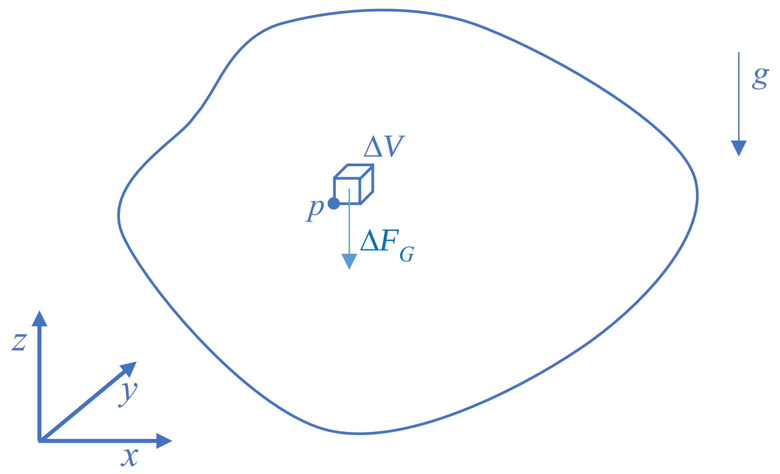
Äußere Integration nach der Variablen x*:*

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{1} (x^6 + x^4 + x^2)\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{71}{210}$$

Ergebnis: $\displaystyle \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{x^2+1} x^2\, y\, dy\, dx = \frac{71}{210}$

7.2. Dichte und Schwerpunkt eines Körpers

Volumenelement ΔV an der Stelle p mit den Koordinaten x, y, z, mit der Masse Δm.



Im Schwerkraftfeld mit der Erdbeschleunigung g greift an ihm folgende Gewichtskraft an:

$$\Delta F_G = g \cdot \Delta m$$

Wir bilden den folgenden Grenzwert, um die Dichte ρ des Körpers im Punkt p(x,y,z) zu bestimmen:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} = \rho(x, y, z)$$

→Falls die Dichte $\rho(x, y, z) = konstant$, heißt der Körper homogen.

→Falls die Dichte $\rho(x, y, z) \neq konstant$, heißt der Körper inhomogen.

Beim Grenzübergang wird die Gewichtskraft ΔF_G zu

$$dF_G = g \cdot dm = g \cdot dV \cdot \rho(x, y, z)$$

Die **resultierende Gewichtskraft** ist dann

$$F_R = \int dF_G = \int g \cdot \rho(x, y, z) \cdot dV$$

Aus den **Momentengleichgewichten** ergeben sich die Koordinaten des **(Gewichtskraft)Schwerpunktes**

$$x_S = \frac{\int x \cdot dF_G}{\int dF_G} = \frac{\int x \cdot g \cdot \rho(x,y,z) \cdot dV}{\int g \cdot \rho(x,y,z) \cdot dV} \qquad y_S = \frac{\int y \cdot dF_G}{\int dF_G} = \frac{\int y \cdot g \cdot \rho(x,y,z) \cdot dV}{\int g \cdot \rho(x,y,z) \cdot dV} \qquad z_S = \frac{\int z \cdot dF_G}{\int dF_G} = \frac{\int z \cdot g \cdot \rho(x,y,z) \cdot dV}{\int g \cdot \rho(x,y,z) \cdot dV}$$

Mit g = konstant berechnen sich die **Schwerpunktkoordinaten**:

$$x_S = \frac{\int x \cdot \rho(x,y,z) \cdot dV}{\int \rho(x,y,z) \cdot dV} \qquad y_S = \frac{\int y \cdot \rho(x,y,z) \cdot dV}{\int \rho(x,y,z) \cdot dV} \qquad z_S = \frac{\int z \cdot \rho(x,y,z) \cdot dV}{\int \rho(x,y,z) \cdot dV}$$

Als **homogener Körper** mit ρ = konstant und $\int dV = V$ ist der **Volumenmittelpunkt**:

$$x_S = \frac{\int x \cdot \cancel{\rho(x,y,z)} \cdot dV}{\int \cancel{\rho(x,y,z)} \cdot dV} = \frac{\int x \cdot dV}{V} \qquad y_S = \frac{\int y \cdot dV}{V} \qquad z_S = \frac{\int z \cdot dV}{V}$$

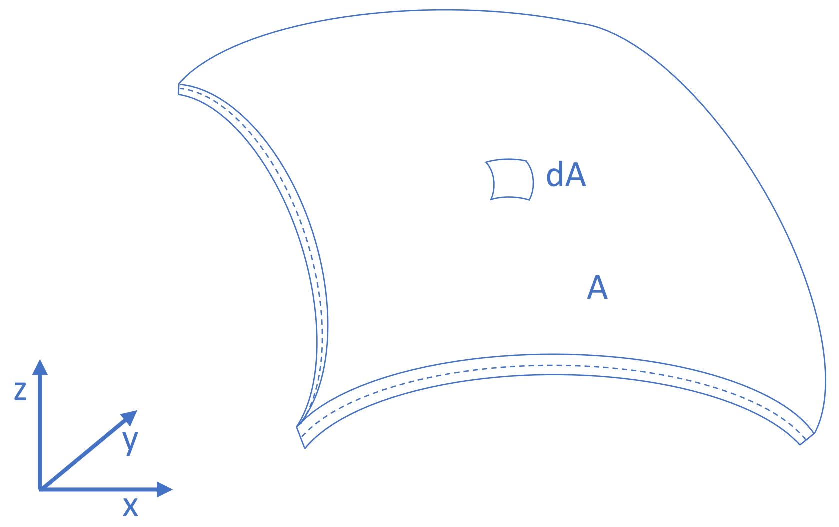
Mit $dm = \rho(x, y, z) \cdot dV$ (s.o.) wird daraus der **Massenmittelpunkt** (TM III):

$$x_S = \frac{\int x \cdot dV}{\int dV} = \frac{\int x \cdot \frac{dm}{\rho(x,y,z)}}{\int \frac{dm}{\rho(x,y,z)}} = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot dm}{m} \qquad y_S = \frac{\int y \cdot dm}{m} \qquad z_S = \frac{\int z \cdot dm}{m}$$

7.3. Schwerpunkte von Flächen und Linien

Schwerpunkte von Flächen

Gegeben: ein flächenhafter Körper mit Wanddicke t=konstant, z. B. ein gebogenes Blech (Schale)



Gesucht: Flächenschwerpunkt

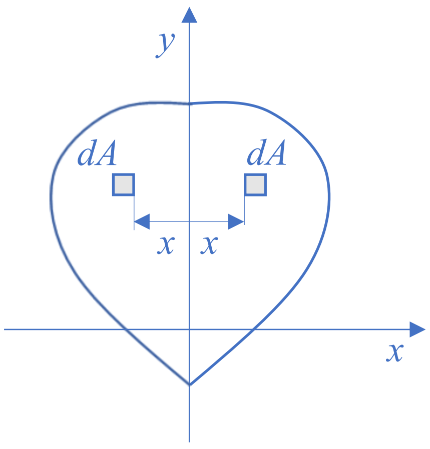
Für ein Volumenelement gilt $dV = t \cdot dA$
Gesamtvolumen der Schale $V = t \cdot A$
A Flächeninhalt der gestrichelt angedeuteten Mittelfläche der Schale

Damit erhält man die Koordinaten des Flächenschwerpunktes (aus Volumenmittelpunkt oben):

$$x_S = \frac{\int x \cdot dV}{V} = \frac{\int x \cdot t \cdot dA}{t \cdot A} = \frac{\int x \cdot dA}{A} \qquad y_S = \frac{\int y \cdot dA}{A} \qquad z_S = \frac{\int z \cdot dA}{A}$$

Bei ebenen Flächen ist z.B. $z_S = 0$. Die Integrale $S_y = \int x \cdot dA$ und $S_x = \int y \cdot dA$ werden dann als **Flächenmomente 1. Ordnung** oder als **statische Momente** der Fläche *A* bezeichnet (TM II).

Schwerpunkt symmetrischer Flächen



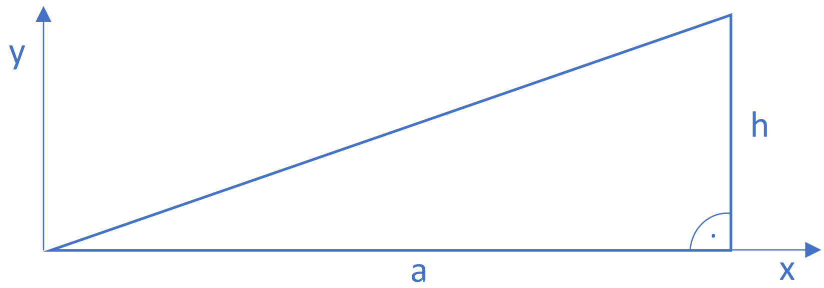
Ist eine Fläche **symmetrisch** bezüglich einer Achse, so liegt der Schwerpunkt der Fläche auf der **Achse**.

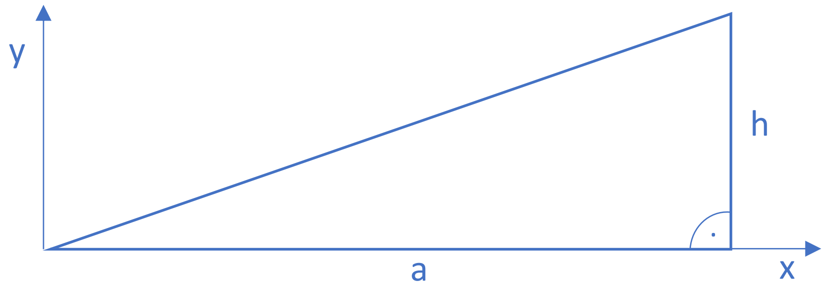
Hier ist z. B. $S_y = \int x \cdot dA = 0$ und damit $x_S = 0$, damit liegt der Schwerpunkt *S* liegt auf der *y*-Achse.

Symmetrieachsen sind Schwereachsen

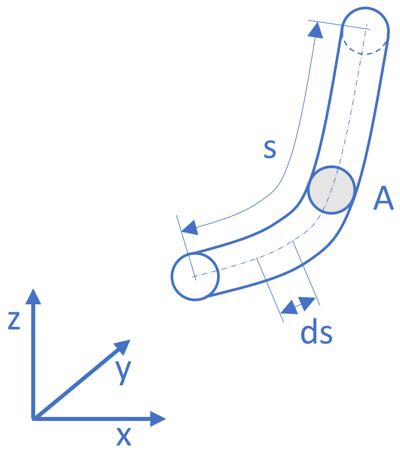
Beispiel Flächenschwerpunkt

Man berechne die **Schwerpunktkoordinaten** des rechtwinkligen Dreiecks bezüglich des gegebenen Koordinatensystems!





Schwerpunkte von Linien (Linienschwerpunkt)



Gegeben Körper der Gestalt eines **gebogenen Drahtes** mit **konstantem Querschnitt A**

Gesucht Linienschwerpunkt

Aus Volumenmittelpunkt (oben) $x_S = \frac{\int x \cdot dV}{V}$ $y_S = \frac{\int y \cdot dA}{A}$ $z_S = \frac{\int z \cdot dA}{A}$

Mit dem infinitesimalen Bogenstück ds gilt dann

für ein Volumenelement $dV = A \cdot ds$

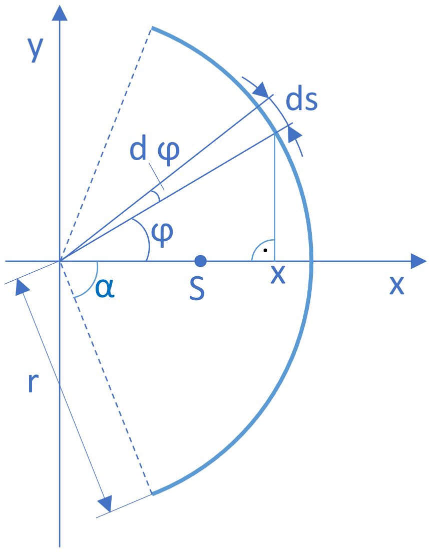
für das Gesamtvolumen $V = A \cdot s$

Damit erhält man die Koordinaten des Linienschwerpunktes

$$x_S = \frac{\int x \cdot A \cdot ds}{A \cdot s} = \frac{\int x \cdot ds}{s} \qquad y_S = \frac{\int y \cdot ds}{s} \qquad z_S = \frac{\int z \cdot ds}{s}$$

Für Linien in der Ebene ist z.B. $z_S = 0$.

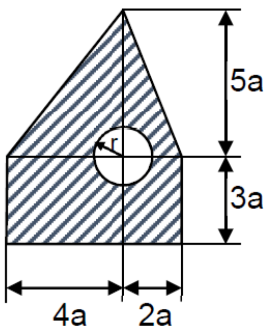
Beispiel Linienschwerpunkt



Wo liegt der Schwerpunkt eines Kreisbogens mit dem Radius r und dem Öffnungswinkel 2·α?

7.4. Schwerpunkte zusammengesetzter Gebilde

Gebilde: Körper, Fläche oder Linie



Oft lassen sich **komplexe Gebilde** aus einfachen **Teilgebilden** aufbauen, deren Schwerpunkte und z. B. Flächeninhalte bekannt sind.

Sind z. B. x_i, y_i, z_i die Schwerpunktkoordinaten von Teilkörpern mit den Gewichten F_{Gi}, so ergibt sich für den **Schwerpunkt des Gesamtkörpers**:

$$y_S = \frac{\sum y_i \cdot F_{Gi}}{\sum F_{Gi}} \quad z_S = \frac{\sum z_i \cdot F_{Gi}}{\sum F_{Gi}}$$

Für den **Volumenschwerpunkt** gilt:

$$x_S = \frac{\sum x_i \cdot V_i}{\sum V_i} \quad y_S = \frac{\sum y_i \cdot V_i}{\sum V_i} \quad z_S = \frac{\sum z_i \cdot V_i}{\sum V_i}$$

Bei **Flächen- und Linienschwerpunkten** werden in obigen Gleichungen die Volumina V_i durch die Teilflächen A_i bzw. die Bogenlängen s_i ersetzt.

Bei **ebenen Gebilden** in x-y-Ebene entfällt die letzte Gleichung, d. h. $z_S = 0$.

Bei Gebilden mit **Ausschnitten** werden die Ausschnitte als **„negative“ Volumina (Flächen)** angesehen.

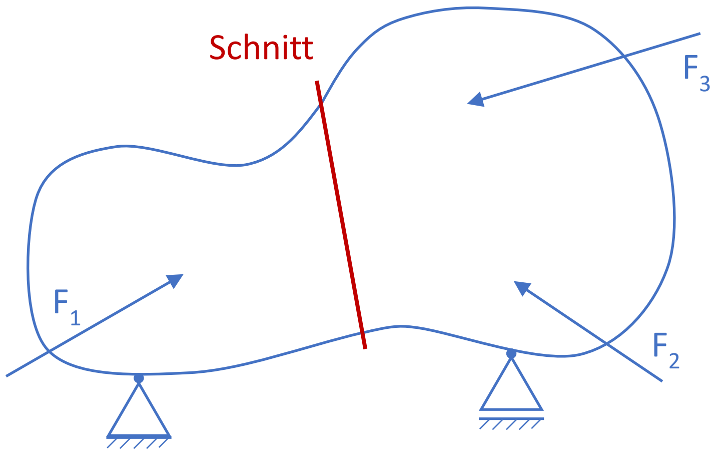
8. Schnittgrößen

Bisher: Berechnung von **Auflager- und Zwischenreaktionen**.

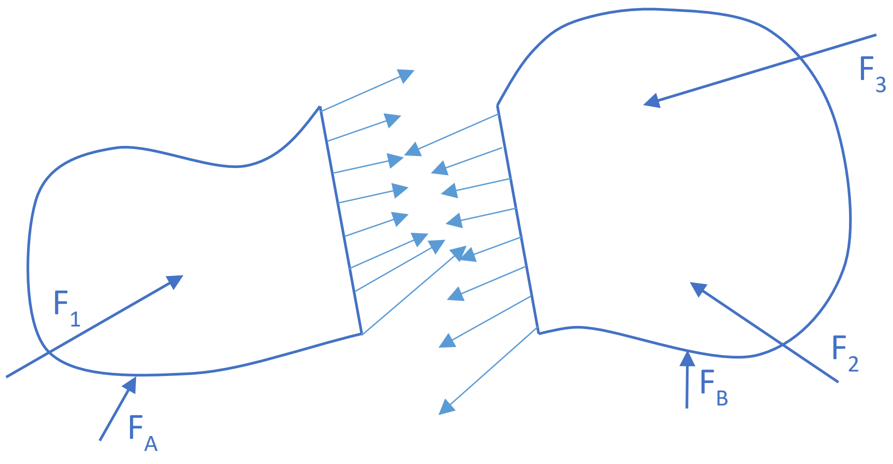
Diese Kenntnisse reichen nicht aus, um Bauteile so zu bemessen, dass Sie den Beanspruchungen im Einsatz standhalten.

Neu: Kräfte im **Bauteilinneren** müssen bekannt sein, sie sind ein Maß für die Materialbeanspruchung im Bauteil.

Schnitt durch ein mit den Kräften F_i belastetes Bauteil.

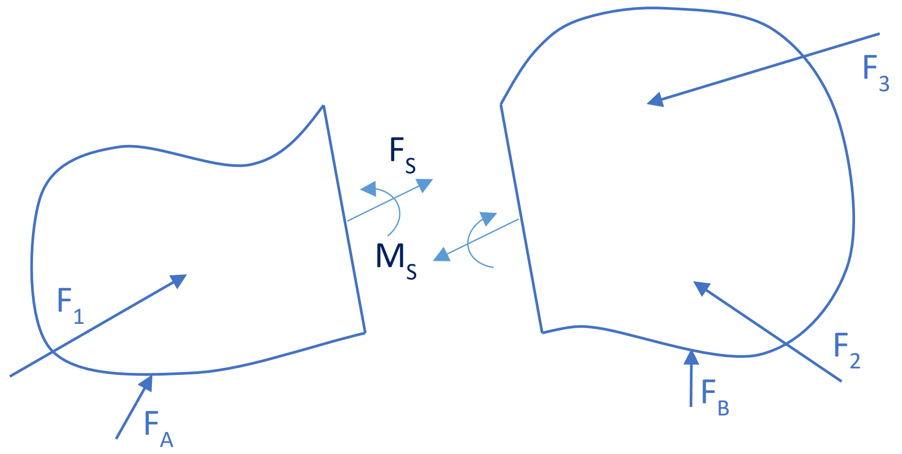


An der Schnittstelle wirken die über den Querschnitt verteilten **inneren Kräfte**.
Reaktionsaxiom: Schnittkräfte links und rechts müssen entgegengesetzt gleich groß sein.



Die Bestimmung der **Verteilung der Schnittkräfte** kann aufwendig sein.
→ Zentrale Aufgabe der Festigkeitslehre (TM II).

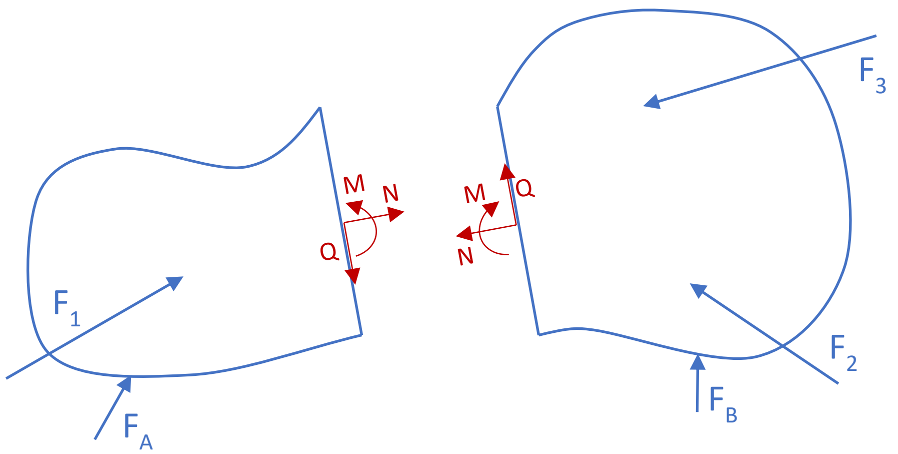
Mit Hilfe der Statik kann man die **resultierende Kraft F_S** und das **resultierende Moment M_S** der Schnittkräfte bezüglich des Schwerpunktes der Schnittfläche bestimmen.



Die Schnittflächen nennt man **Schnittufer**.

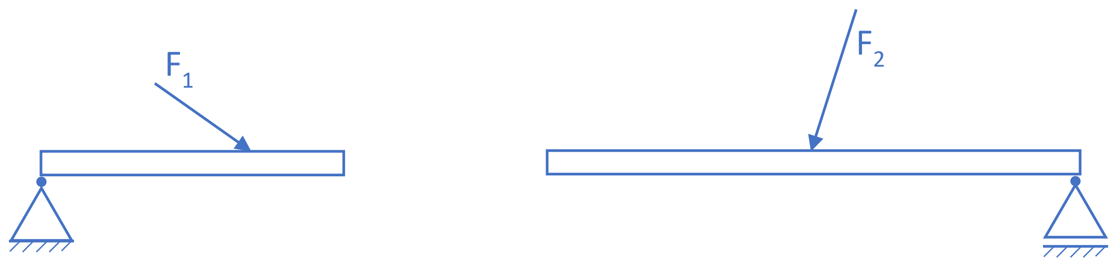
Die Schnittkraft (F_S) wird in **Komponenten** senkrecht (N) und parallel (Q) zur Schnittfläche zerlegt.

Beschränkung auf **ebene Systeme** → Schnittmoment (M) hat nur eine einzige Komponente



Weitere Beschränkung auf Bauteile, deren **Länge gegenüber den Querabmessungen groß** ist, also auf Balken, Bogen, Rahmen. Diese können Idealisierungen sein für Träger, Maschinenwellen, Blattfedern, etc., deren Querschnitt sich entlang der Längsachse auch ändern kann.

Konventionen



Koordinatensystem

x-Achse entlang Bauteillängsachse, z-Achse nach unten, y-Achse nach vorn.

Schnittgrößen

Die Schnittkraft F_S hat die Koordinaten N (Normalkraft) und Q (Querkraft) parallel zur Schnittfläche.
Die Koordinate des Schnittmomentes M_S heißt Biegemoment M .

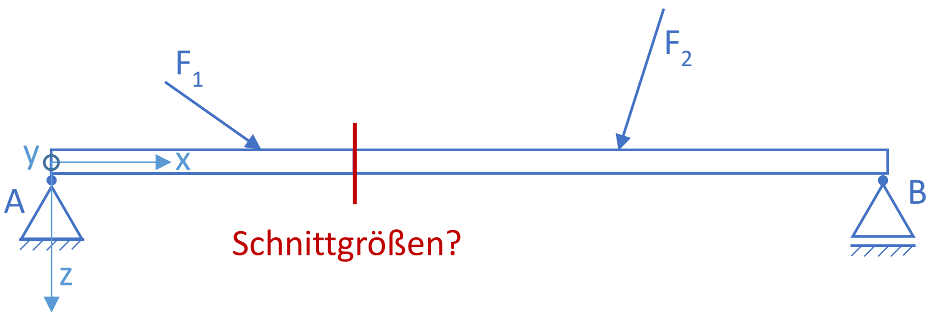
Vorzeichen

Das Schnittufer, dessen Normalenvektor n in positive Koordinatenrichtung (x-Richtung) zeigt, heißt positiv. Das andere Schnittufer heißt negativ.

Positive Schnittgrößen zeigen am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtungen. Das Biegemoment hat positiven Drehsinn um die y-Achse am positiven Schnittufer.

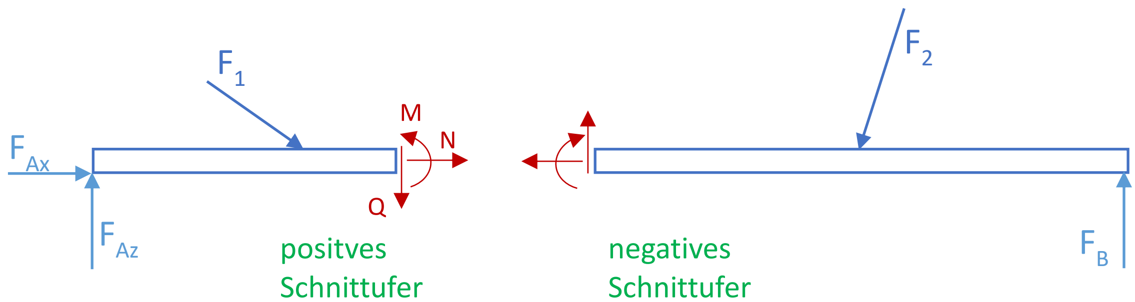
Nach dieser Konvention ist das linke Schnittufer positiv. Alle Schnittgrößen sind hier positiv eingezeichnet.

8.1. Bestimmung der Schnittgrößen am geraden Balken



Berechnung der Schnittgrößen

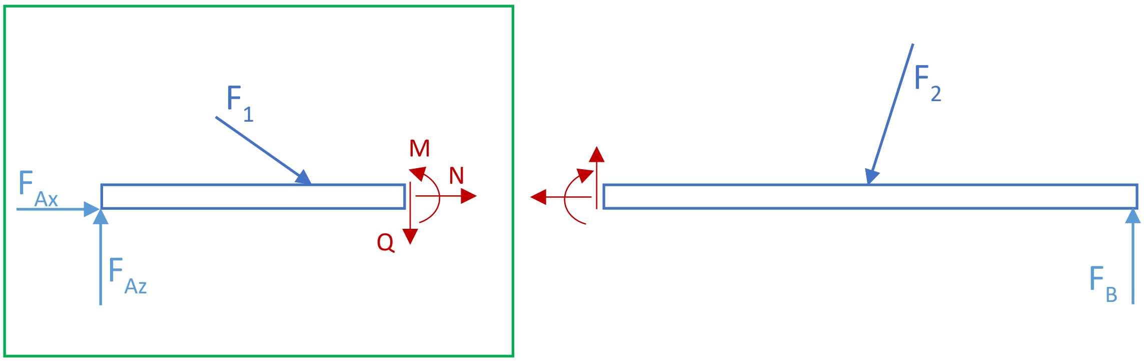
- Gedachter **Schnitt** an der interessierenden Stelle senkrecht zur x-Achse.
- Eintragen der **Schnittgrößen** an den Schnittufern gemäß obiger Konvention.
  Hinweis: Die **Lagerreaktionen** F_{Ax}, F_{Az} und F_B zeigen weiterhin nach rechts bzw. oben!



- Sowohl der linke, als auch der rechte Balkenteil müssen für sich im **Gleichgewicht** sein.
  Also gilt hier jeweils ein Satz **Gleichgewichtsbedingungen**,
  d. h. sechs Gleichungen für die sechs **Unbekannten** F_{Ax}, F_{Az}, F_B, N, Q, M.
- Vereinfachung dieses Schrittes in der Praxis: Lagerreaktionen → Schnittgrößen

  Schritt 1: **Vorab** Ermittlung der **Auflagerreaktionen** F_{Ax}, F_{Az}, F_B am ungeschnittenen Balken

Schritt 2: Betrachtung nur jeweils **eines Balkenteils** zur **Schnittgrößenberechnung**



für den linken Teil lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_{ix} + N = 0$$

$$\sum F_{iz} + Q = 0$$

$$\sum M_i + M = 0$$

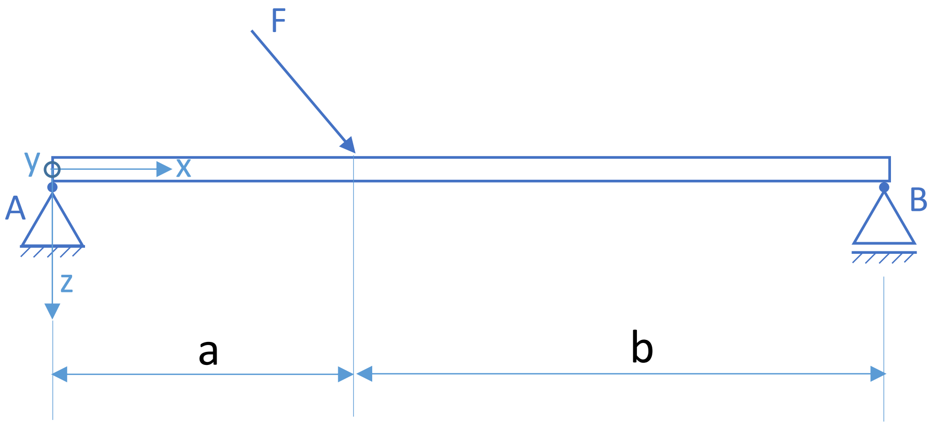
Hinweis
Für das Momentengleichgewicht ist der **Momentenbezugspunkt die Schnittstelle**!
Schnittkräfte haben so keine Momente → vereinfachte Gleichungsauflösung

- Die Schnittgrößen hängen ab von der Lage der Schnittstelle, sie sind Funktionen der x-Koordinate:

x-Koordinate:	Normalkraft	N = N(x)
	Querkraft	Q = Q (x)
	Biegemoment	M = M(x)

Beispiel 1

Für den Balken ermittele man die Verläufe der Schnittgrößen!



Gegeben:

a = 2m

b = 3,5m

F_x=3kN

F_z=5,5kN

Schnittgrößenverläufe

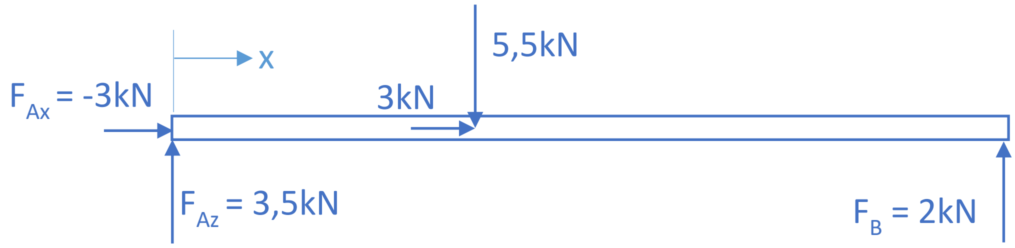
Krafteinleitungsstellen sind Unstetigkeitsstellen für die Schnittgrößenverläufe!

Beim Vorhandensein von Krafteinleitungsstellen muss der Balken in mehrere Bereiche eingeteilt werden.

Im vorliegenden Beispiel:

Schnitt durch den Balken einmal im	Bereich I	$\{ 0 \leq x \leq a \}$	→ vor F
und einmal im	Bereich II	$\{ a \leq x \leq (a+b) \}$	→ nach F

Zusammenfassung und Auftragung der Verläufe

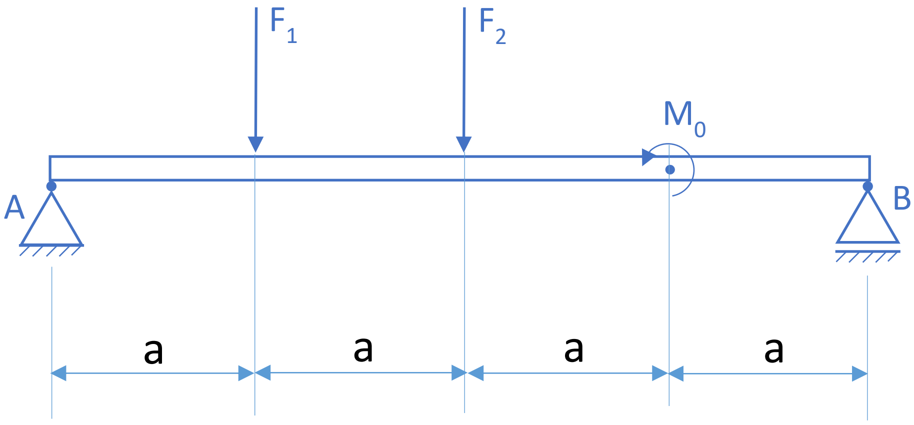


Anmerkungen zu den Verläufen der Schnittmomente

- an den Verläufen ist erkennbar, wo Kräfte eingeleitet werden
  (Sprünge – Unstetigkeiten)
- insbesondere sind die Auflagerreaktionen betragsmäßig ablesbar
- an den Balkenenden ist M = 0
  Auflager können keine Momente aufnehmen, es greifen keine externen Momente an
  Bei Auflagern im Balkeninneren muss dies nicht sein
- Zusammenhang: Q–Sprung ←→ M-Knick → später!
- die Diagramme heißen auch N-, Q-, M-Fläche

Beispiel 2

Für den Balken ermittle man die Schnittgrößenverläufe.



Gegeben:

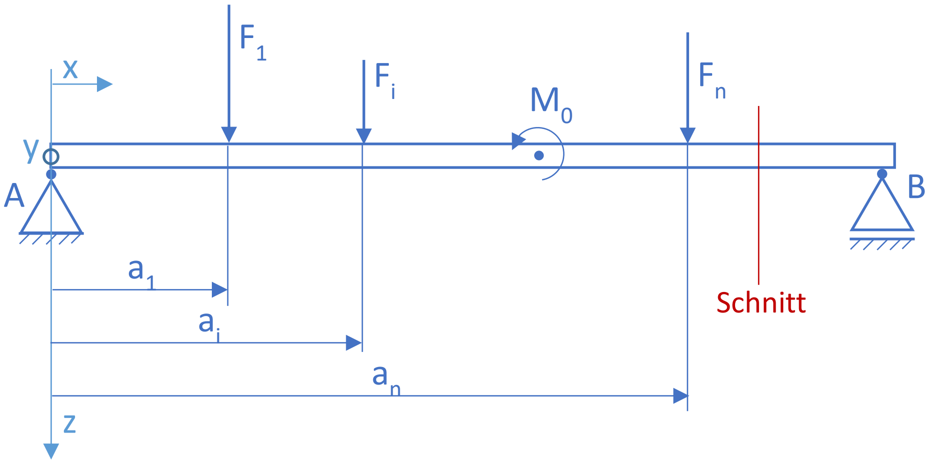
$F_1 = 2 \cdot F$

$F_2 = F$

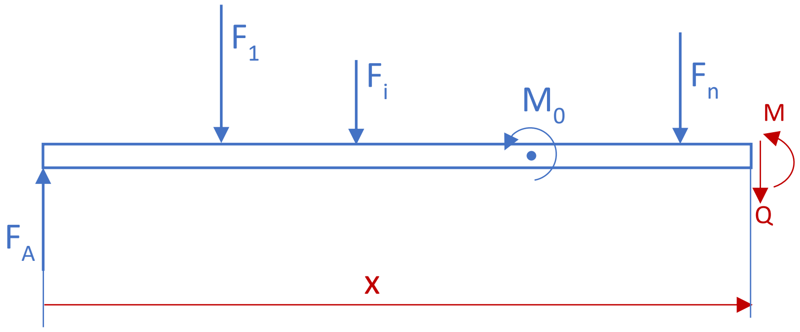
$M_0 = 4 \cdot F \cdot a$

8.2. Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen

Gegeben: Balken, belastet mit n Kräften F_i sowie einem Einzelmoment M_0.
Gesucht: Schnittgrößen an der eingezeichneten Schnittstelle.



Schnitt an der Stelle x (F_A sei bekannt)



Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_{iz} = -F_A + Q + \sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \qquad \rightarrow \quad Q = F_A - \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$\sum M_{iS} = -F_A \cdot x + M + \sum_{i=1}^{n} F_i (x - a_i) + M_0 = 0$$

$$\rightarrow \quad M = F_A \cdot x - \sum_{i=1}^{n} F_i (x - a_i) - M_0$$

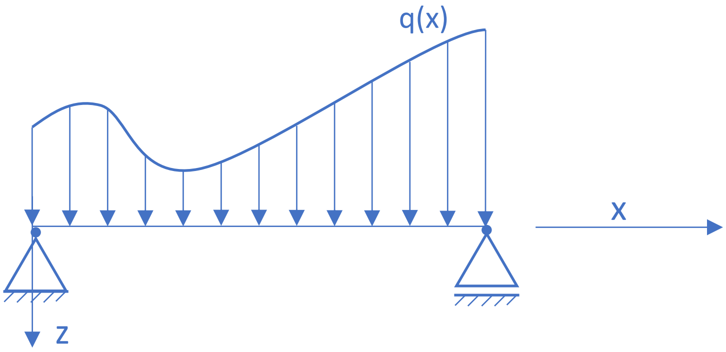
Ableitung von M nach x

$$\frac{dM}{dx} = F_A - \sum_{i=1}^{n} F_i = Q$$

Für beliebige Belastungen gilt daher

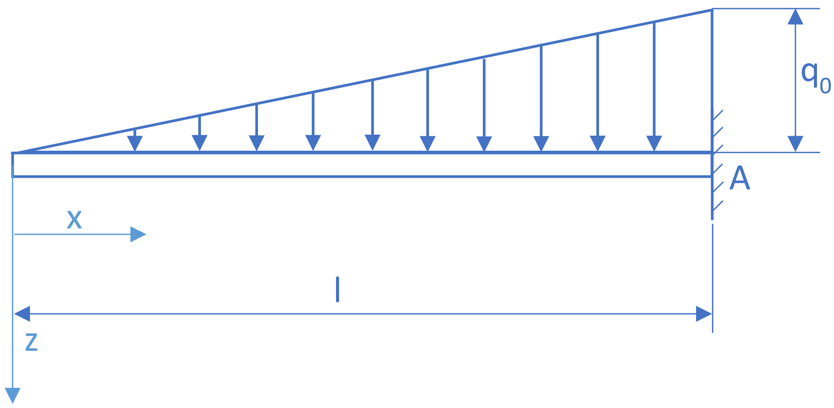
$$\frac{dM}{dx} = Q$$

Verallgemeinerung: Balken mit Streckenlast q(x)



Beispiel

Ein Träger der Länge l ist bei A fest eingespannt und durch eine dreieckförmige Streckenlast q(x) belastet. Man bestimme Q(x) und M(x).



Wichtiger Hinweis

Einzellasten F_i	→	Q - konstant	→	M – linear
konstante Streckenlast q_0	→	Q - linear	→	M – quadratisch
dreieckförmige Streckenlast q(x)	→	Q - quadratisch	→	M – kubisch

→ Integration

← Ableitung

8.3. Punktweise Ermittlung der Schnittgrößen

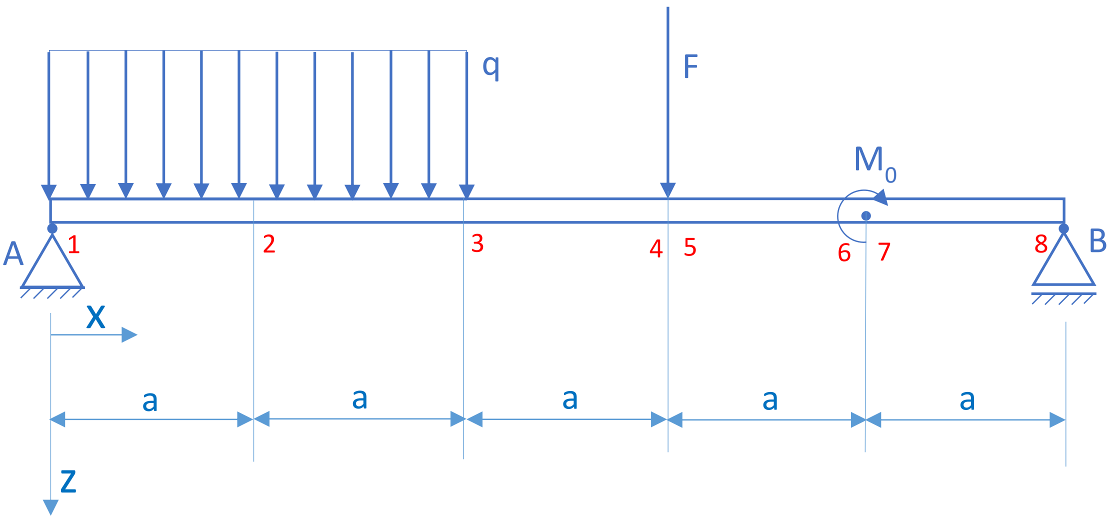
Häufig ist die analytische Ermittlung des gesamten Schnittgrößenverlaufs (z. B. Q(x)) nicht erforderlich.

Dann

- Berechnung der Schnittgrößen **punktweise**, also an ausgezeichneten Stützstellen (im Bsp. 1 – 8)
- **Verläufe**: Verbindung der Stützwerte entsprechend der Belastung
  (siehe obige Hinweise zum belastungsabhängigen Verlauf der Schnittgrößen)

Beispiel

Ein Träger ist durch die Streckenlast q, die Kraft F und das Moment M_0 belastet.
Man bestimme die Schnittgrößen punktweise und trage sie ungefähr maßstäblich auf.
Gegeben: $q = F/a$ $M_0 = 5 \cdot F \cdot a$



Notwendige Stützstellen für Q	**Notwendige Stützstellen für M** (vgl. S. 25)
1 Sprung wegen F_A Zwischen 1 und 3 → Q linear 3 Ende von q, Knick im Q-Verlauf Zwischen 3 und 4 → Q konstant 5 Sprung wegen F 8 Sprung wegen F_B	1-Momentenfreies Balkenende; M = 0 2-Zwischenwert für quadratische Parabel 3-Endwert für quadratische Parabel (1 bis 3 → M quadratisch → 3 Stützwerte erf) 3 bis 4 - M linear 5-Knick im M-Verlauf wegen F 5 bis 6 - M linear 6-Ende linearer Verlauf 7-Sprung wegen M_0 7 bis 8 - M linear 8-Momentenfreies Balkenende M=0

Tipp: Bei Unsicherheit besser zu viele als zu wenige Stützstellen wählen!

Beidseitiges Anbringen von Schnittgrößen, Aufgabe und Anmerkung

Schneiden Sie ein Balkenteilstück heraus bringen Sie beidseitig die Schnittgrößen an.
Zeigen Sie, dass sich das Balkenteilstück im Gleichgewicht befindet!
Wie können Sie diese Erkenntnis nutzen?

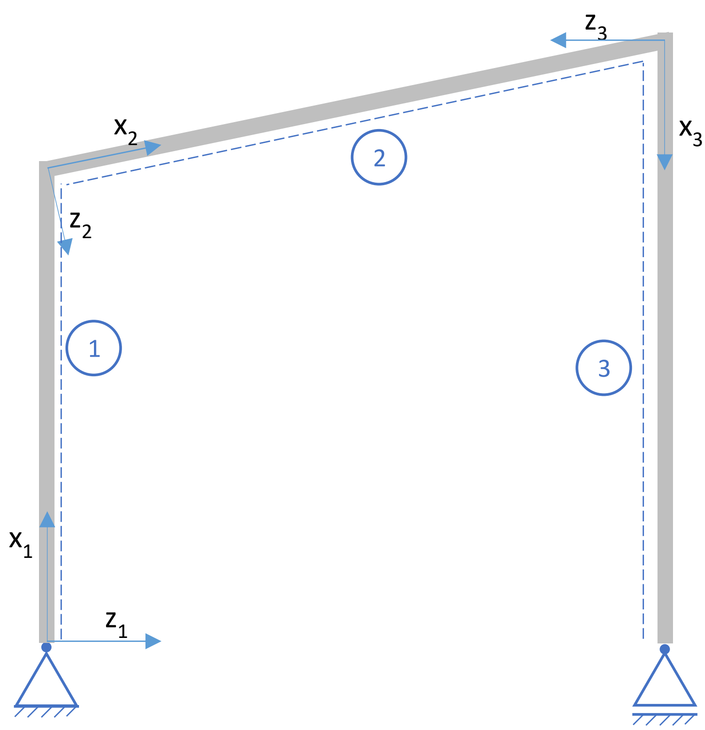
8.4. Schnittgrößen bei Rahmen und gekrümmten Trägern

Verallgemeinerung: Gerade Balken → Rahmen (aus Balken, siehe Kap. 5.2)
→ gekrümmte Träger (Bögen)

Rahmen

- **Zusammenhang** zwischen **Belastung und Schnittgrößen** aus Kapitel 8.2 gilt nur für **gerade** Rahmenteile, also nicht an Ecken bzw. Verbindungen
  → Beschränkung auf punktweise Ermittlung
- Bei Rahmen treten häufig auch Normalkräfte auf
  → stets Berechnung **aller drei Schnittgrößen N, Q, M**
- An **Rahmenecken**: **Übergang** der Schnittgrößen (z.B. Q_{ht} → N_{ve})
- **Koordinatensystem**
  Für jedes gerade Teilstück eigenes Koordinatensystem mit **x-Achse entlang dem Rahmenteil**.
  Rechtssystem **y-Achse** zeigt aus der **Ebene heraus**
  z-Achse entsprechend **Rechtssystem** ausrichten

  Zweckmäßig: Kennzeichnen der Orientierung der Koordinatensysteme mit **gestrichelter Linie**
  x-Achse zeigt entlang der Linie
  y-Achse weist aus der Ebene heraus
  z-Achse weist von der Mittelachse der Rahmenteile auf die gestrichelte Linie

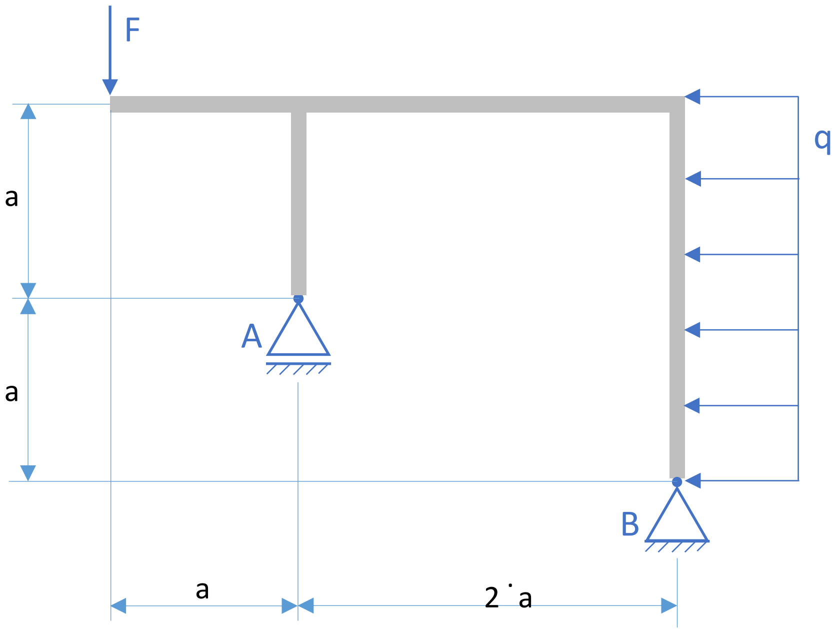


Beispiel Rahmen

Nebenstehender Rahmen wird durch eine Kraft F und eine Streckenlast q belastet.

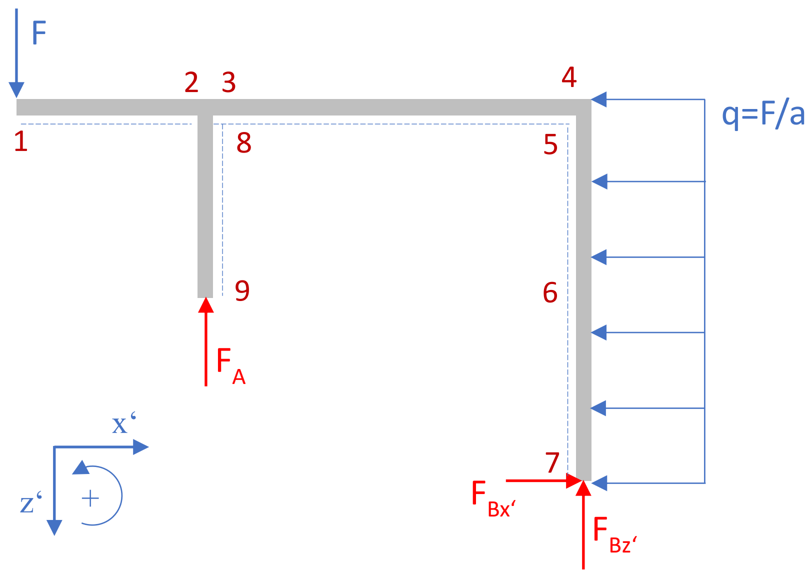
Man ermittele den Verlauf der Schnittgrößen.

Gegeben: q = F / a



Lösung

- Globales Koordinatensystem für Auflagerreaktionen mit ‘
- Auflagerreaktionen einzeichnen
- Koordinatensystem für Schnittstellen → Kennzeichnung mit gestrichelter Linie
- Schnittstellen kennzeichnen (1...9)



Hinweise

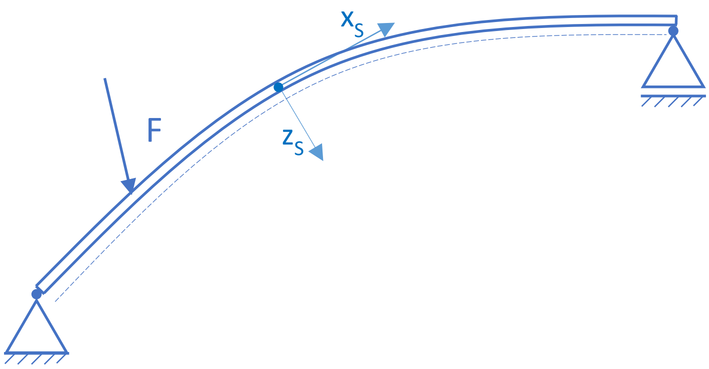
- Das Moment M geht an der Ecke 4/5 stetig über. Dies gilt grundsätzlich an Ecken bei ebenen Rahmen.
- Zwecks Übersichtlichkeit: Richtung, in der die Flächen positiv abgetragen werden kann wechseln. Daher Flächen eindeutig mit + und - kennzeichnen.
- Bei rechtwinkligen Ecken wechselt Querkraft zur Normalkraft und umgekehrt. Das Vorzeichen ist dabei abhängig von der Orientierung der lokalen Koordinatensysteme.

Gekrümmte Träger

Für jeden Punkt S, an dem Schnittgrößen interessieren, ist ein eigenes Koordinatensystem notwendig.

Kennzeichnen der Orientierung wieder über gestrichelte Linien. An beliebiger Stelle S ist die

x-Achse tangential dazu
y-Achse weist aus der Ebene heraus
z-Achse rechtwinklig zur x-Achse in Richtung der gestrichelten Linie

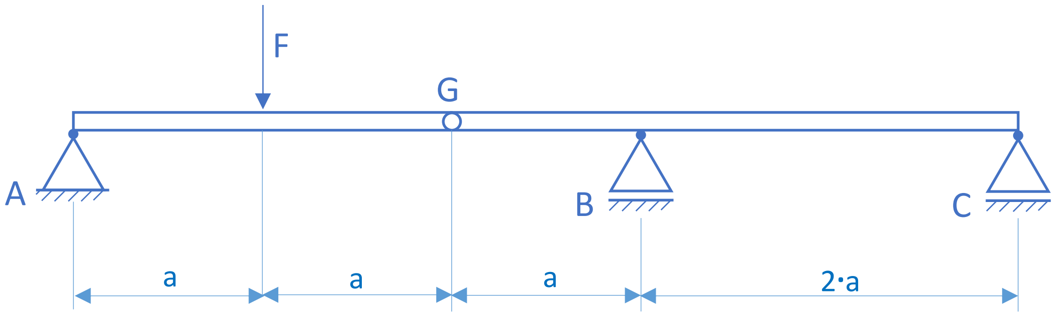


8.5. Schnittgrößen bei zusammengesetzten Tragwerken

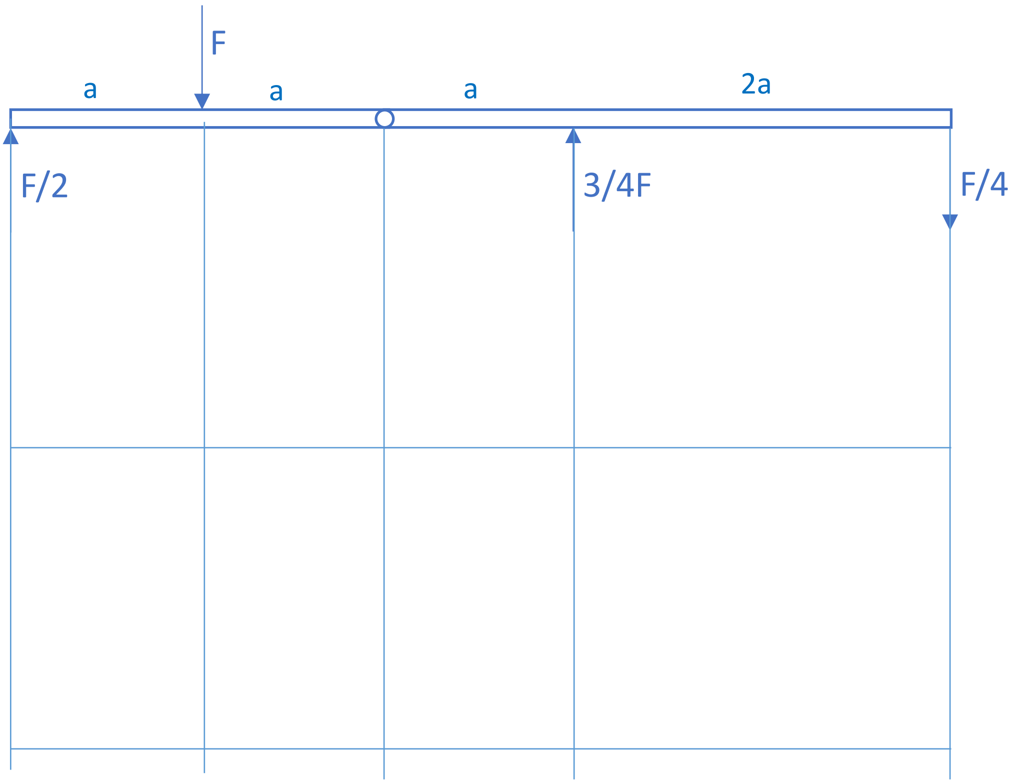
Vorgehensweise bei zusammengesetzten Tragwerken

- Ermittlung der Lager- und Zwischenreaktionen (vgl. Abschnitt 5)
- Punktweise oder analytische Bestimmung der Schnittgrößen
- Grundsätzlich: Zwischenreaktionen fallen bei der Schnittgrößenermittlung automatisch an. Durch Vorabbestimmung zusammen mit den Lagerreaktionen besteht die Möglichkeit zur Kontrolle.

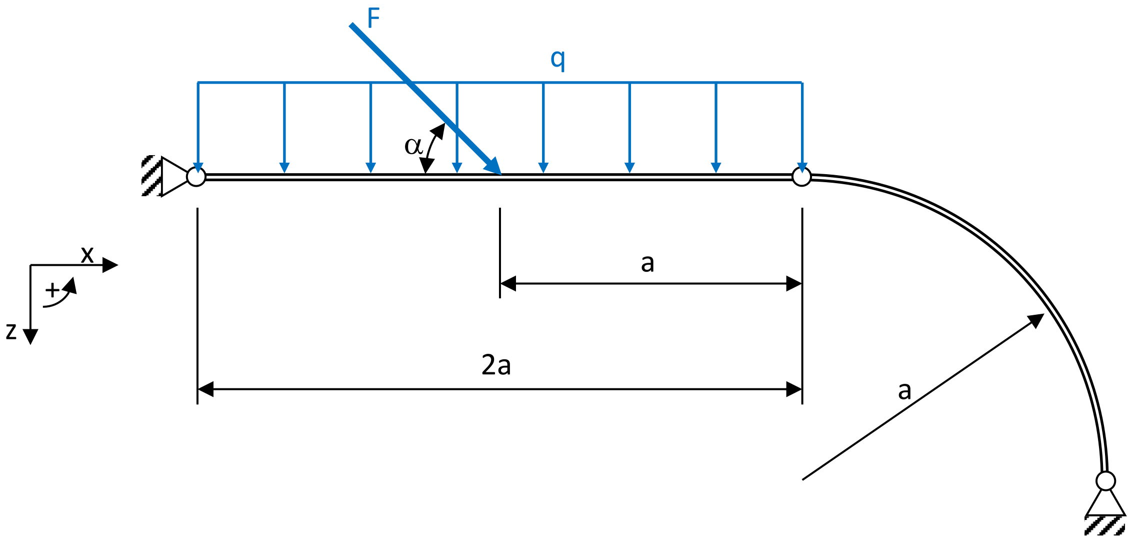
Beispiel
Der gezeigte Gelenkträger ist mit der Kraft F belastet.
Man bestimme den Verlauf von Q und M punktweise.



Diagramme



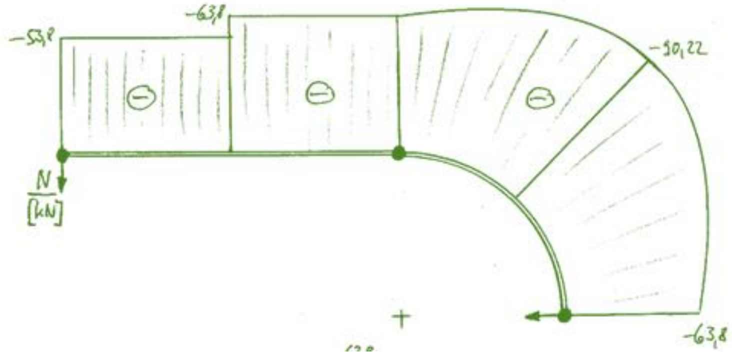
Beispiel: Balken mit Bogen, zusammengesetzt



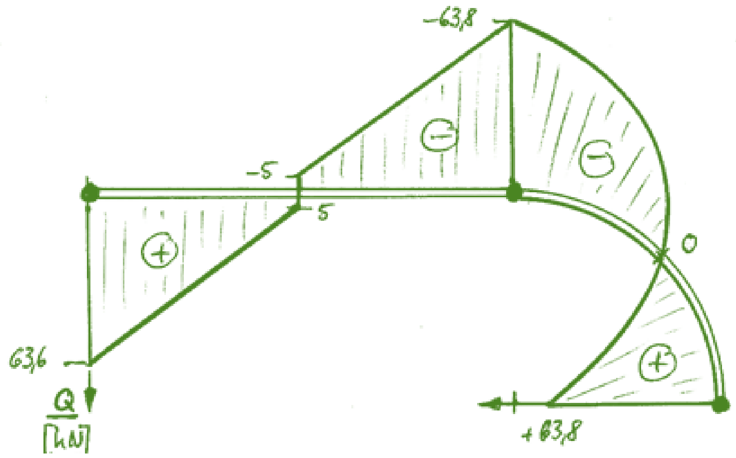
Gegeben $q = 42$ kN/m; $a = 1{,}4$ m; $F = 14{,}14$ kN; $\alpha = 45°$

Gesucht Verlauf von N, Q, M analytisch

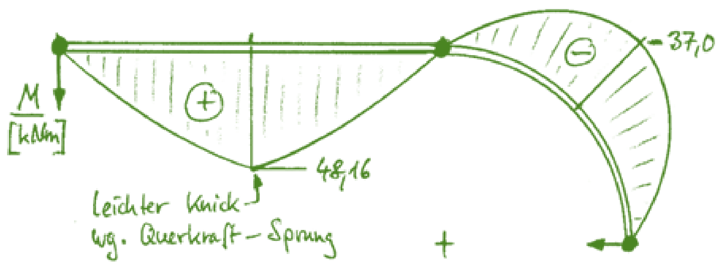
Diagramme



-53,8
-63,8
-50,22
N
[kN]
-63,8



-63,8
-5
5
0
63,6
Q
[kN]
+63,8



-37,0
M
[kNm]
48,16
leichter Knick
wg. Querkraft-Sprung

8.6. Räumliche Schnittgrößen

Untersuchung der Schnittgrößen von Tragwerken, die **räumlich belastet** werden.
Die betrachteten Tragwerke bestehen **abschnittweise aus Balken**.

Um die **Schnittgrößen** an einer Balkenstelle zu bestimmen, denken wir uns den Balken an dieser Stelle mit einer Ebene **senkrecht zur Balkenachse geschnitten**.

Gesucht ist nun wieder die **resultierende Kraft $\overrightarrow{\boldsymbol{F_S}}$ und das resultierende Moment $\overrightarrow{\boldsymbol{M_S}}$** der verteilten Schnittkräfte bezüglich des Schwerpunktes der Schnittfläche.

Die **Koordinaten** von $\overrightarrow{F_S}$ und $\overrightarrow{M_S}$ sind die räumlichen Schnittgrößen, die im einzeln wie folgt bezeichnet werden:

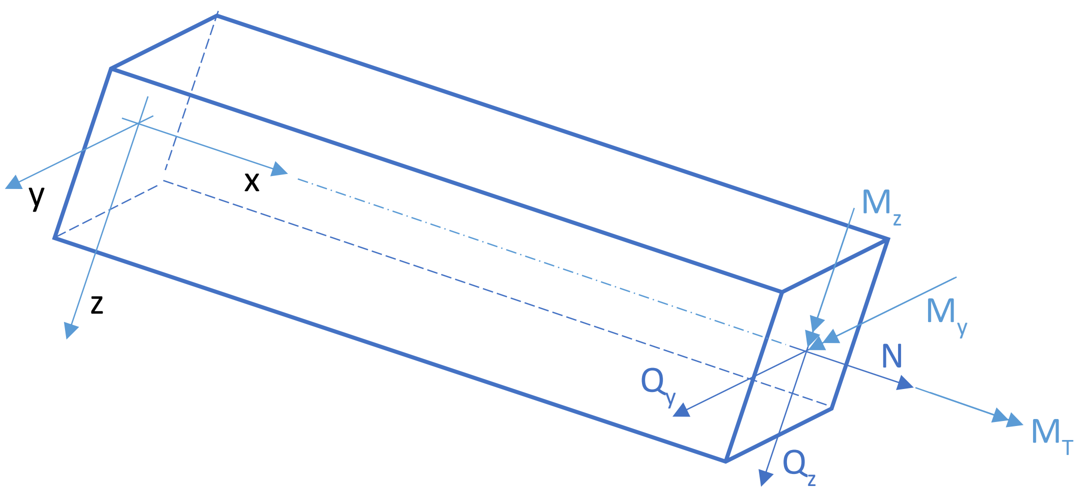
Normalkraft	$F_{Sx} = N$
Querkraft	$F_{Sy} = Q_y$
Querkraft	$F_{Sz} = Q_z$
Torsionsmoment	$M_{Sx} = M_T$
Biegemoment	$M_{Sy} = M_{Sy}$
Biegemoment	$M_{Sz} = M_{Sz}$

Zur Vorzeichenfestlegung ordnen wir dem Balken ein *x*-, *y*-, *z*- **Koordinatensystem** zu, wobei die *x*-Achse in der Balkenlängsachse und die *y*- und *z*-Achsen in der Schnittebene liegen.

Bei **abgewinkelten Tragwerken**, z. B. Rahmen, verwendet man ein eigenes Koordinatensystem für jeden Teilbereich.

Die Vorzeichenregel lautet wieder:
Positive Schnittgrößen zeigen am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtung.

Die Skizze zeigt ein **positives Schnittufer**, an dem alle räumlichen Schnittgrößen positiv eingezeichnet sind.

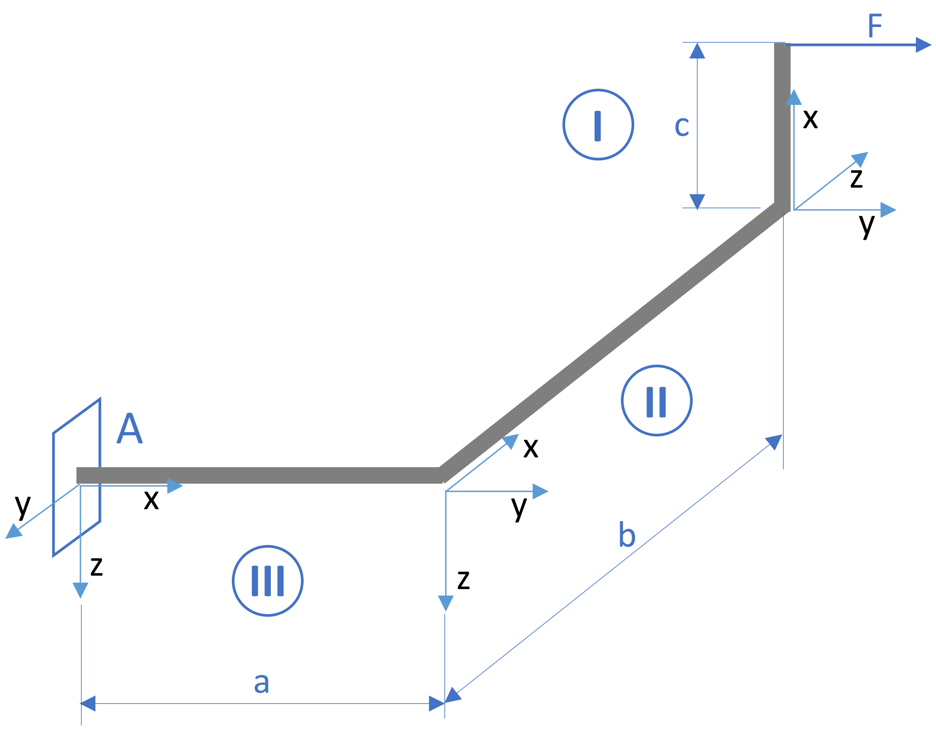


Das abgeschnittene Balkenstück muss sich unter der Einwirkung der Schnittgrößen im **Gleichgewicht** befinden. Damit lassen sich aus den räumlichen **Gleichgewichtsbedingungen** die Schnittgrößen berechnen. Die **Momentengleichgewichte** sollten wieder **bezüglich der Schnittstelle** aufgestellt werden, da dann die Querkräfte keinen Anteil bringen.

Normalkraft	$\sum F_{ix}$	$+ N$	$= 0$
Querkraft	$\sum F_{iy}$	$+ Q_y$	$= 0$
Querkraft	$\sum F_{iz}$	$+ Q_z$	$= 0$
Torsionsmoment	$\sum M_{ix}$	$+ M_T$	$= 0$
Biegemoment	$\sum M_{iy}$	$+ M_y$	$= 0$
Biegemoment	$\sum M_{iz}$	$+ M_z$	$= 0$

Beispiel räumliches Tragwerk

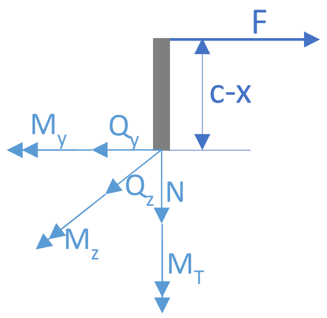
Das bei A fest eingespannte räumliche Tragwerk wird durch eine Kraft F belastet.
Man bestimme die Schnittgrößen (analytisch)!



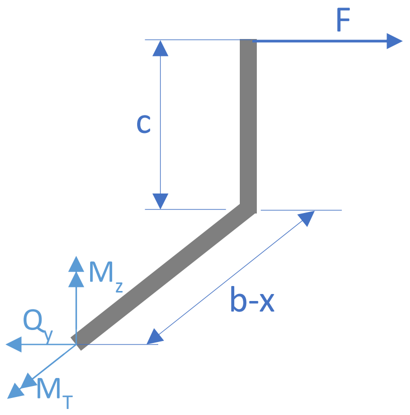
Lösung

- Wir teilen das Tragwerk in die **Bereiche I, II und III** auf.
- Zur Festlegung der Vorzeichen verwenden wir **pro Bereich ein Koordinatensystem**.
- Wir **schneiden** das Tragwerk in **jedem** der drei Teilbereiche an einer beliebigen Stelle.
- Aufstellen der **Gleichgewichtsbedingungen** jeweils am **abgeschnittenen** Teil.
  Dadurch brauchen wir die **Lagerreaktionen** nicht vorab zu ermitteln.
  Am abgeschnittenen Teil ist die Schnittstelle ein **negatives Schnittufer**.
  Hierfür sind die Schnittgrößen in negativen Koordinatenrichtungen eingezeichnet.

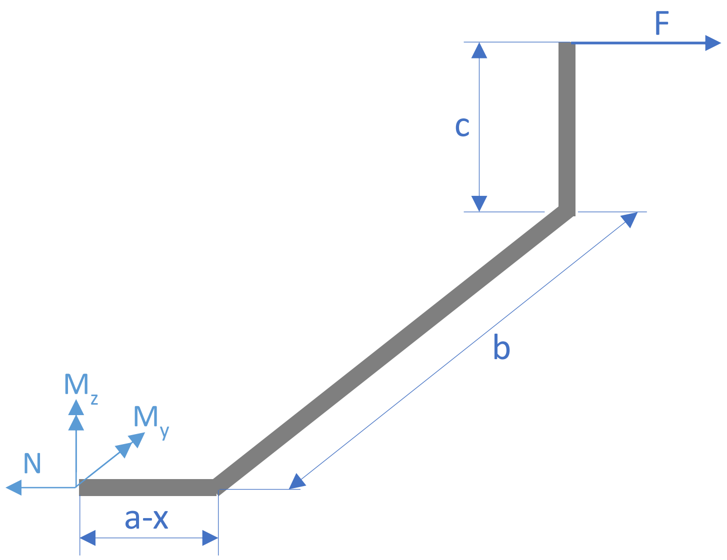
Schnittgrößen im Bereich I



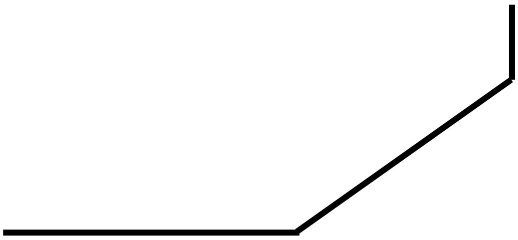
Schnittgrößen im Bereich II



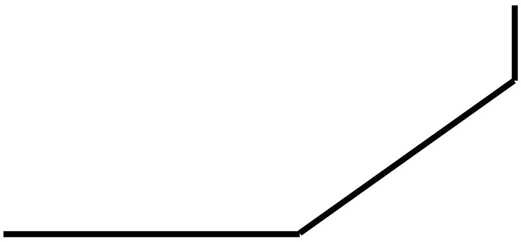
Schnittgrößen im Bereich III



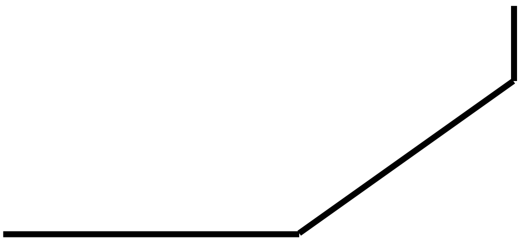
Schnittgrößendiagramme



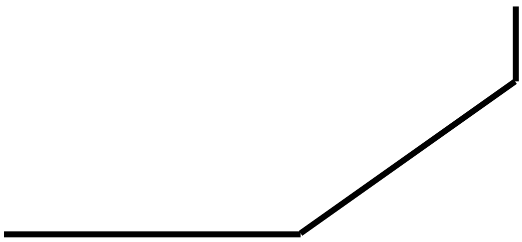
N



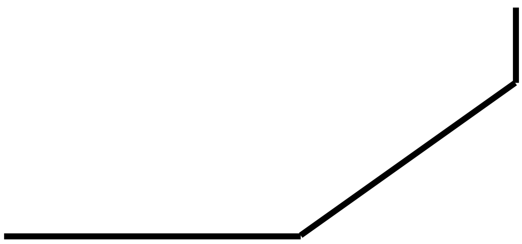
Q_y



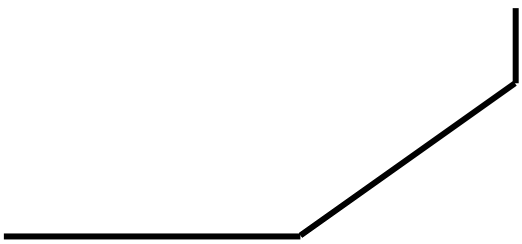
Q_z



M_T



M_y



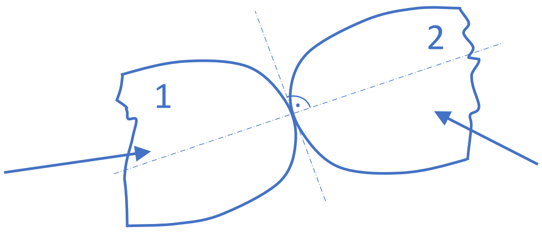
M_z

Hinweise

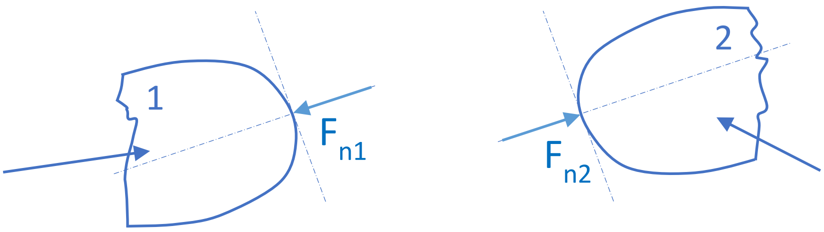
- Schnittgrößenverläufe so auftragen, dass sie **deutlich** und zweifelsfrei erkennbar sind! Klare Definition des **Bezugs-KS** für jeden Bereich und der entsprechenden **Vorzeichen** der Schnittgrößen!
- **Zusammenhänge** zwischen Belastung und Schnittgrößen existiert auch im räumlichen Fall: z.B. Einzellast → konstante Querkraft → lineares Moment bei entsprechenden Komponenten.
- Beträge von **Auflagerreaktionen** und **Belastungen** lassen sich aus den Schnittgrößendiagrammen ablesen.
- Rechtwinklige **Ecken**:
  Torsionsmomente wechseln in Biegemomente und umgekehrt
  Normalkräfte wechseln in Querkräfte und umgekehrt
- Auch im räumlichen Fall ist es oft günstiger, die Schnittgrößen **punktweise** zu bestimmen und daraus die Verläufe abzuleiten.

9. Reibung

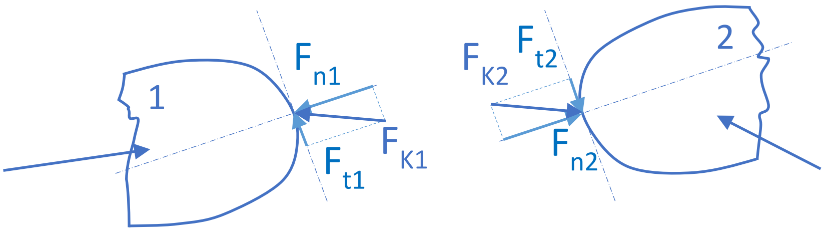
Berührung zweier Körper
→ Kräfte werden von dem einen Körper auf den anderen Körper übertragen.



Bisherige Annahme
Körper sind **völlig glatt** an der Berührungsstelle → keine Kräfte in tangentialer Richtung
Diese **Idealisierung** ist <u>häufig</u> nicht zulässig
z. B. Vortrieb beim Fahrzeug durch Tangentialkräfte zwischen Reifen und Fahrbahn
→ Berücksichtigung der **Tangentialkräfte** ist **erforderlich**!

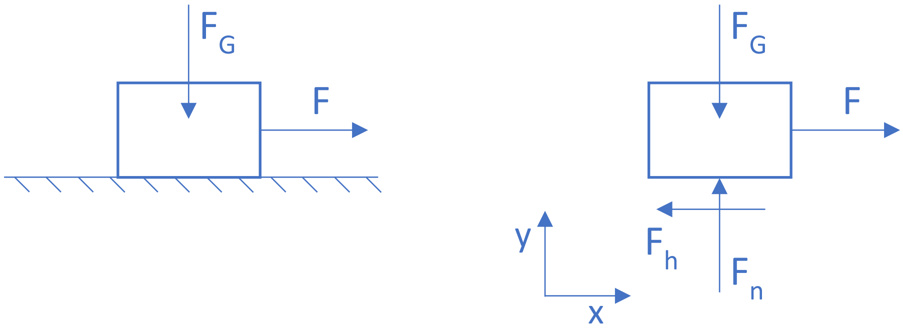


Mit der Berücksichtigung von Reibung
… hat die Kontaktkraft eine Tangentialkomponente F_t .
Vektorschreibweise: $\vec{F}_K = \vec{F}_n + \vec{F}_t$



9.1. Haftung

Tägliche Erfahrung: **Haftung** eines Körpers an einer Unterlage
→ trotz Einwirkung einer horizontalen Kraft **bewegt sich der Körper nicht** sofort.
(Fall 1)



Freischneiden → Freikörperdiagramm (FKD) → Kraft in tangentialer Richtung
→ Haltekraft F_h bzw. Haftreibungskraft

Gleichgewichtsbedingungen

$\sum F_{iy} = F_n - F_G = 0 \qquad F_n = F_G$
$\sum F_{ix} = F - F_h = 0 \qquad F_h = F$

Die Größe der Haltekraft F_h entspricht der angreifenden Kraft F.

Zusatzfrage: **<u>Ab</u>** welcher Kraft F setzt sich der Körper in Bewegung? (Fall 2)

Untersuchungsergebnisse von Coulomb (1737-1806)

Die größtmögliche Haltekraft F_{hmax} ist abhängig von

- der Oberflächenbeschaffenheit
- den Werkstoffen der Körper
- der Normalkraft F_n (Anpresskraft)

Das Verhältnis $\frac{F_{h\,max}}{F_n} = \mu_0$ ist die Haftzahl oder der Haftreibungskoeffizient.

Beachte: Unterschied zwischen F_h und F_{hmax} (Obergrenze)!

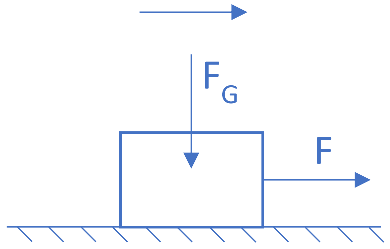
Beispiele

- Stahl auf Stahl $\mu_0 = 0{,}15 \ldots 0{,}5$
- Gummi auf Asphalt $\mu_0 = 0{,}7 \ldots 0{,}9$

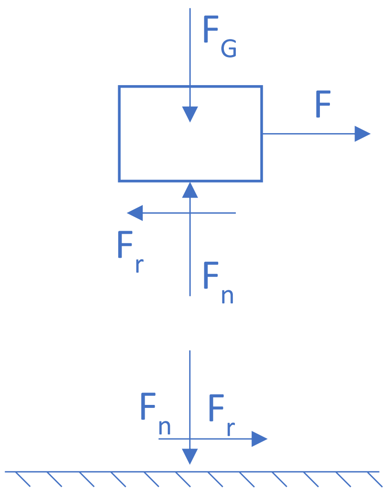
9.2. Gleitreibung

Bei Überschreitung der maximal möglichen Haftkraft F_{hmax} setzt sich der Körper in Kraftrichtung in **Bewegung**.
(Fall 3)

Bewegungsrichtung des Körpers



Freikörperdiagramm (FKD)



Er **gleitet** auf der Unterlage. Dabei entsteht eine bremsende Wechselwirkung zwischen Körper und Unterlage, welche als **Reibungskraft F_r** bezeichnet wird.

Wichtig: Die Reibungskraft F_r ist immer **der relativen Bewegungsrichtung entgegengesetzt**!

Nach Coulomb hängt auch die Reibungskraft ab von der

- Oberflächenbeschaffenheit
- Werkstoffpaarung und
- Normalkraft F_n

Das Verhältnis $\frac{F_r}{F_n} = \mu$ wird als Reibungszahl oder Gleitreibungskoeffizient bezeichnet.

Beispiele

- Stahl auf Stahl $\mu = 0{,}1 \ldots 0{,}4$
- Gummi auf Asphalt $\mu = 0{,}5 \ldots 0{,}8$

In der Regel gilt also $\mu < \mu_0$

9.3. Coulombsches Reibungsgesetz

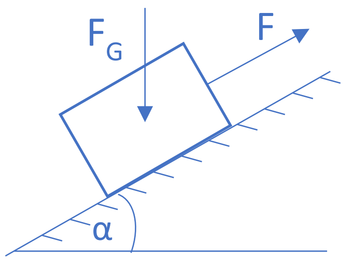
Zusammenfassung der drei Fälle der Reibung

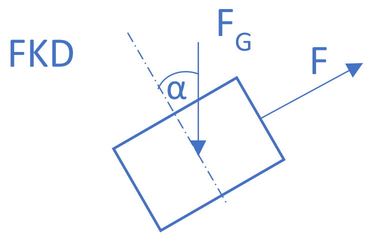
Fall1
Haftung
Körper ist in **Ruhe**
$F_h < \mu_0 \cdot F_n$

Fall 2
Grenzhaftung
Körper bleibt **gerade noch in Ruhe**
Bei einem infinitesimalen Zuwachs von F setzt der Körper sich in Bewegung.
$F_h = \mu_0 \cdot F_n$

Fall 3
Gleitreibung
Körper **gleitet** auf Unterlage
Entgegen der Bewegungsrichtung wirkt am Körper die **Reibungskraft** F_r .
$F_r = \mu \cdot F_n$

Beispiel



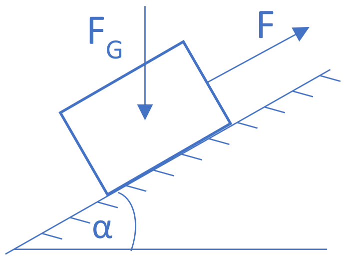


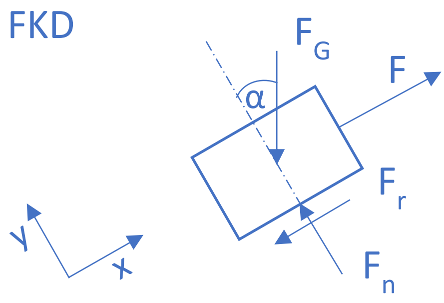
Ein Körper mit dem Gewicht F_G soll auf einer rauen Unterlage, die um den Winkel α gegenüber der Horizontalen geneigt ist, mit konstanter Geschwindigkeit hochgezogen werden. Welche Kraft F ist dafür erforderlich?

Gegeben: $F_G = 50N$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}4$

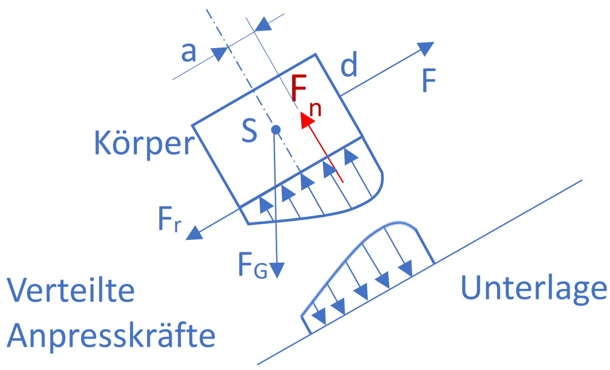
Anmerkungen

Bei der Lösung wurde die Momentengleichgewichtsbedingung nicht berücksichtigt – streng genommen muss diese auch erfüllt sein.





Eigentlich geht die **Normalkraft F_n** (die Resultierende der in der Kontaktfläche verteilten Anpresskräfte) nicht durch den **Körperschwerpunkt**:



Über das Momentengleichgewicht kann der Abstand a ermittelt werden:

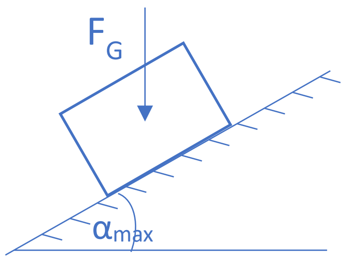
$$\sum M_{i,S} = 0 = F_n \cdot a - F_r \cdot \frac{d}{2}$$

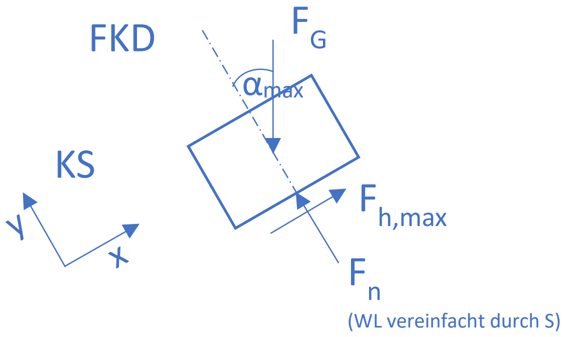
$$a = \frac{F_r}{F_n} \cdot \frac{d}{2} = \mu \cdot \frac{d}{2}$$

Solange die Momentenwirkung nicht interessiert (z.B. für Kippen des Körpers), reicht das Kräftegleichgewicht allein aus. Man kann dann - wie oben - vereinfachend annehmen, dass F_n durch den Schwerpunkt geht.

Ansonsten muss man die genaue **Lage der Resultierenden der verteilten Anpresskraft** bestimmen (im Beispiel: a). Die Verteilung der Anpresskräfte ist allerding schwierig zu ermitteln (Theorie der Hertzschen Pressung, Kontaktproblem mit Finite Elemente Methode).

Beispiel – anders gefragt





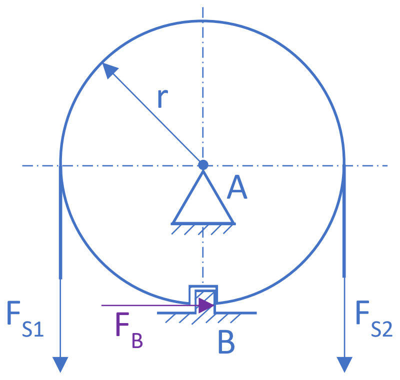
Der Körper darf unter der Wirkung seines **Eigengewichtes** F_G nicht herunterrutschen.
Wie groß darf der Winkel α dann maximal sein?

Gegeben: $F_G = 50N$, $\mu_0 = 0{,}4$

9.4. Seilhaftung/ Seilreibung

Bisher: An einer frei drehbar gelagerten Umlenkrolle, über die ein Seil geführt ist, herrscht Gleichgewicht, wenn überall im Seil betragsmäßig die gleiche Kraft wirkt (vgl. Kapitel 2.3.2).

Nun: **Arretierung der Rolle**
Wird die Rolle arretiert, so kann das Momentengleichgewicht auch bei **unterschiedlichen Seilkräften** erfüllt sein, da die Arretierung eine tangential gerichtete Kraft aufbringen kann.



Hinweis Skizze: Freischnitt an den Seilenden und um die Arretierung

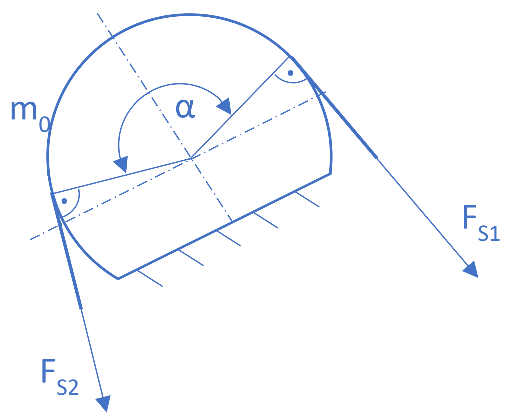
GGB (weiterhin Stillstand)

$\sum M_{iA} = F_{S1} \cdot r - F_{S2} \cdot r + F_B \cdot r = 0$

$\rightarrow F_{S1} \neq F_{S2}$ ist möglich!

Damit das Seil bei unterschiedlichen Seilkräften nicht über die arretierte Rolle rutscht, müssen zwischen Seil und Rolle **Haftkräfte** übertragen werden.

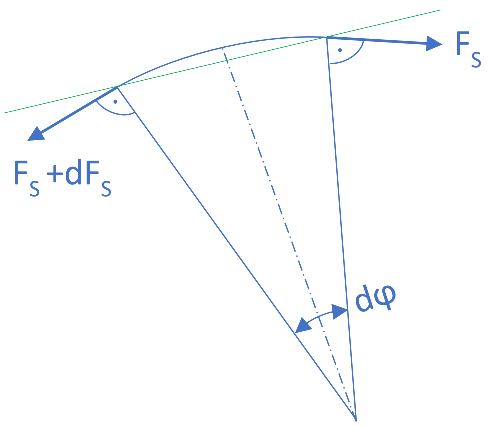
Aufgabe: Ein Seil ist über einen feststehenden Zylinder geführt.



Gegeben Seilkraft F_{S1}, μ_0 = konstant, Umschlingungswinkel α.

Gesucht Seilkraft F_{S2} so, dass das Seil gerade noch nicht in Richtung dieser Kraft rutscht.

Lösung



Beispiel zur Seilreibung

Ein Riemen wird n-mal um eine runde Haltestange geschlungen.
Das freie Ende ist nur durch seine Gewichtskraft $m_1 \cdot g$ belastet.
Am anderen Ende greift horizontal die Kraft F an.

Gegeben $F = 4kN$, $m_1 = 0{,}2kg$, $\mu_0 = 0{,}5$

Gesucht Anzahl der Umschlingungen n, um mit der geringen Gewichtskraft des freien Endes des Riemens der Kraft das Gleichgewicht zu halten.