3.5 Erzwungene Schwingung, Resonanz

Reale schwingende Systeme: Dämpfung durch Energieverlust (Reibung)

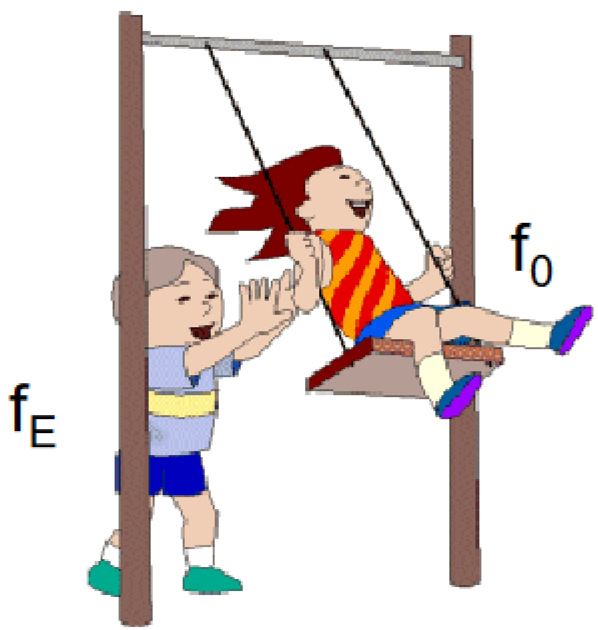
Ausgleich der Verluste durch Energiezufuhr von außen?

Ja, ist möglich, aber…

- Energiezufuhr nur periodisch
- „Anregefrequenz" f_E passend
- Zeitpunkt der Energiezufuhr passend
- Phasenlage von f_E passend

Energiezufuhr (z.B.) durch:

Erregerkraft $F_E(t) = \hat{F}_E \cdot \cos(\omega \cdot t)$



Bildquelle: https://www.findi.de/images/stories/schule/physik/physik10/Resonanz.pdf

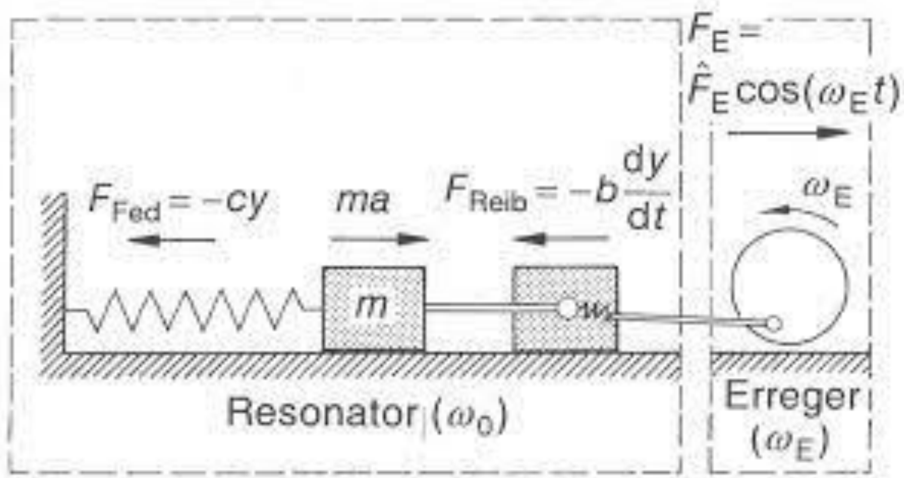
Wirkt auf ein schwingungsfähiges System eine periodische Kraft von außen ein,

die das System durch Kopplung

zum Mitschwingen zwingt,

so bezeichnet man dies als

„Erzwungene Schwingung“



3.5.1 Schwingungsgleichung der erzwungenen Schwingung

In diesem System wirken 3 Kräfte:

Rückstellende Federkraft $F_{Fed} = -k \cdot y$

Dämpfende Reibungskraft $F_{Reib} = -\beta \cdot \dot{y} = -\beta \cdot \frac{dy}{dt}$

Erregerkraft $F_E = \hat{F}_E \cdot \cos(\omega_E \cdot t)$

Bildquelle: http://homepages.hs-bremen.de/~krausd/iwss/V5b.pdf

Die Bewegungsgleichung (Grundgesetz der Dynamik + Kräfte) lautet hier also:

$$m \cdot a = m \cdot \ddot{y} = F_{Fed} + F_{Reib} + F_E$$

$$m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y - \beta \cdot \dot{y} + \hat{F}_E \cdot \cos\left(\omega_E \cdot t\right)$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \cdot y - \frac{\beta}{m} \cdot \dot{y} + \frac{\hat{F}_E}{m} \cdot \cos(\omega_E \cdot t)$$

Umgestellt und mit den Bezeichnungen $\frac{\beta}{m} = 2\delta$ und $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ erhält man:

$$\boxed{\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{\widehat{F_E}}{m} \cdot \cos(\omega_E \cdot t)}$$

Differentialgleichung (DGl) der erzwungenen Schwingung: **Inhomogene DGl**

Lösung der inhomogenen DGl: Lösung der homogenen DGl + eine spezielle Lösung

Lösung der homogenen DGl: $y(t) = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta t} \cos \omega_d \cdot t$ (siehe Kap. 3.4) (*)

Spezielle Lösung: $y(t) = \hat{A}(\omega_E) \cdot \cos[\omega_E t + \varphi(\omega_E)]$ (**)

Gleichung (*) beschreibt die gedämpfte Schwingung des Systems.

System beginnt mit ω_d zu schwingen,

klingt exponentiell ab.

Erzwungen wird eine Schwingung mit ω_E (**);

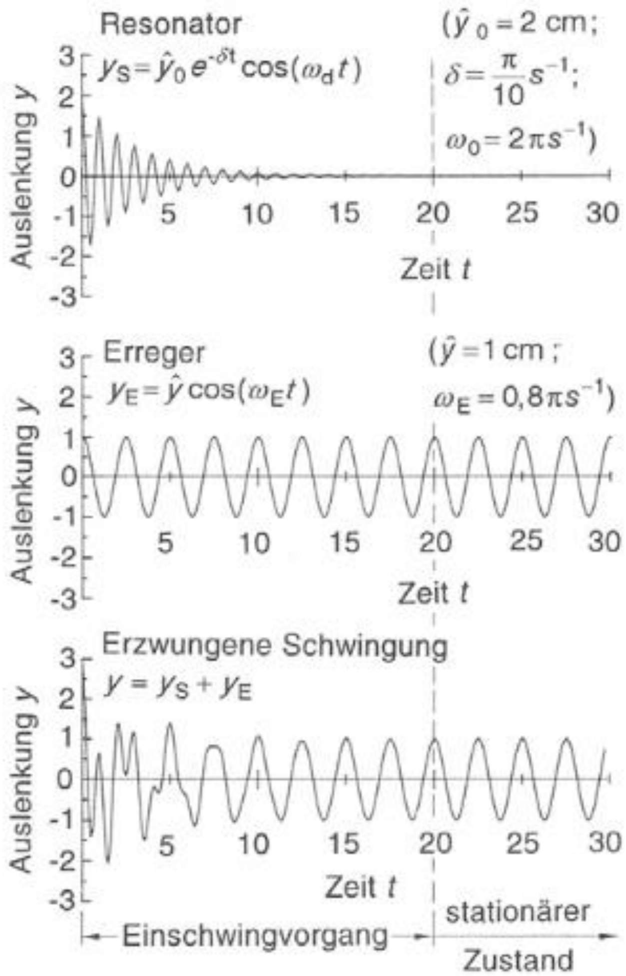
nach einer Einschwingzeit stellen sich

„stationäre Verhältnisse“

mit $\hat{A}(\omega_E)$ und $\varphi(\omega_E)$ ein.

Während **Einschwingvorgang** schwankt

die Amplitude stark. (wichtig bei V 27!)



Bildquelle: : http://homepages.hs-bremen.de/~krausd/iwss/V5b.pdf

3.5.2. Elongation bei erzwungener Schwingung

Nach Abklingen des Einschwingvorgangs: **„Stationärer Zustand“**

$$y(t) = \hat{A}(\omega_E) \cdot \cos[\omega_E t - \varphi(\omega_E)]$$

Amplitude im stationären Zustand:

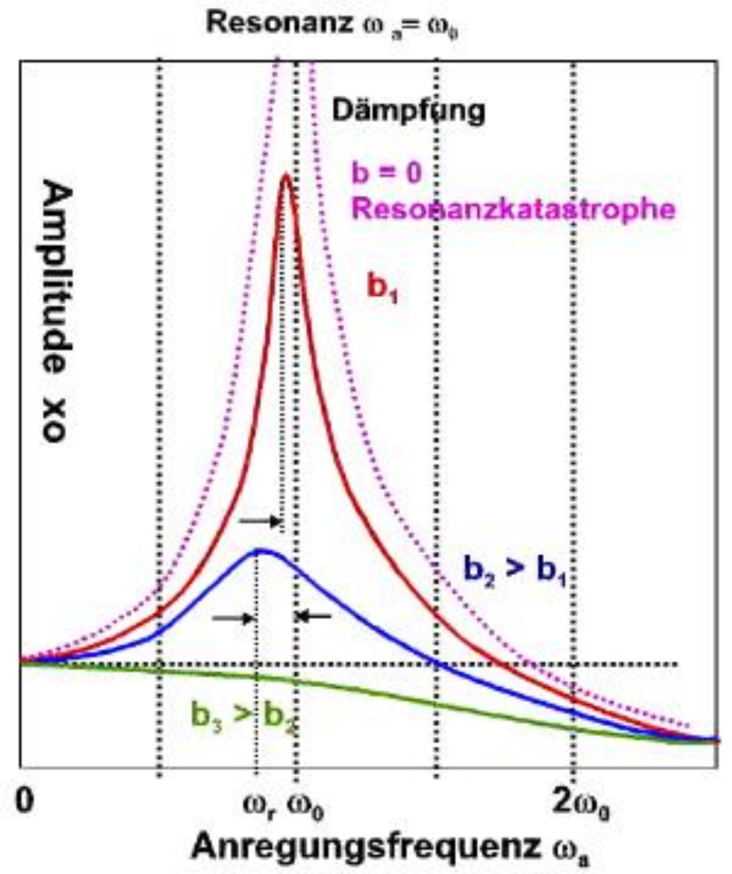
$$\hat{A}(\omega_E) = \hat{F}_E \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + \beta^2 \cdot \omega_E^2}}$$

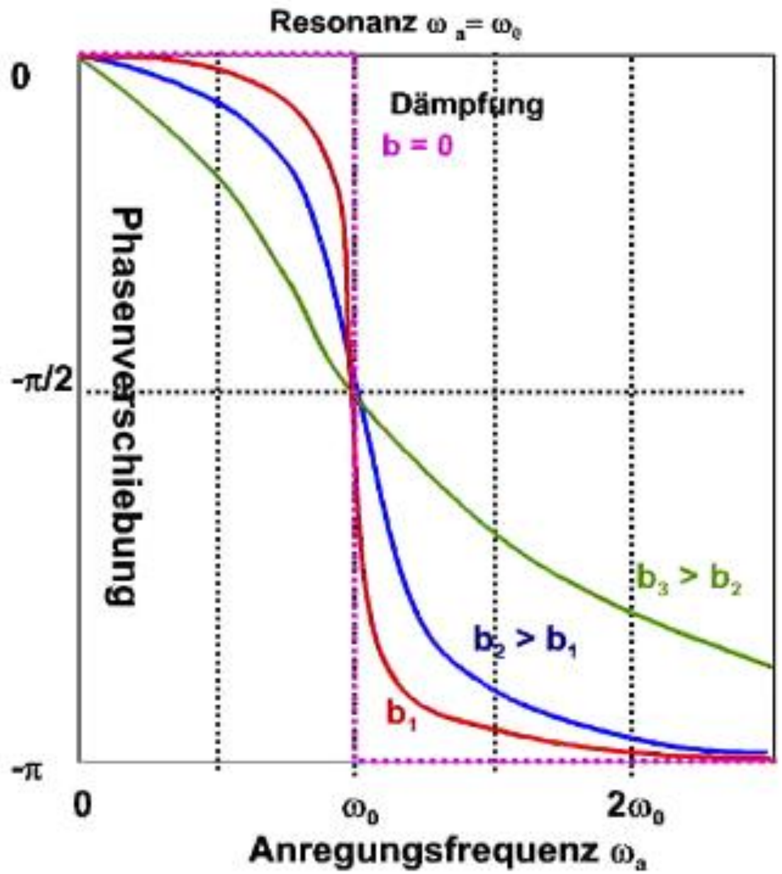
Phasenverzögerung des Resonators gegenüber Erreger:

$$\varphi(\omega_E) = \arctan\left[\frac{\omega\beta}{m(\omega_0^2 - \omega_E^2)}\right] = \arctan\left[\frac{2\omega\delta}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)}\right]$$

Beachten: Amplitude bleibt auch mit $\beta>0$ konstant, ändert sich aber mit ω_E!

Verlauf von $\hat{A}(\omega_E)$ und $\varphi(\omega_E)$ als Funktion der Anregefrequenz.





Bildquelle: https://www.fh-muenster.de/phy/labore/physiklabor/downloads/Pr_EX_SW01_Resonanz_6_v2_2014-09-26.pdf

Beachten:

- Für $\omega_E \rightarrow \omega_0$ und $\beta \rightarrow 0$ geht die Amplitude gegen ∞!
  Dies kann zur „**Resonanz-Katastrophe**" führen.
- Bei $\beta = 0$ ist die Phasenverschiebung unterhalb von ω_0 gleich 0, oberhalb von ω_0 gleich π (bzw. 180^o) und genau bei der Resonanzfrequenz ω_0 gerade $\pi/2$.
- Bei sehr geringer Kreisfrequenz ω_E schwingt der Resonator mit der „quasi-statischen" (Anrege-)Amplitude mit.
- Oberhalb einer bestimmten Frequenz $\omega_E > \omega_0$ wird die Amplitude des Resonators kleiner als die Anrege-Amplitude. (Schwingungs-Dämpfer)
- Ist die Amplitude größer als die Anrege-Amplitude, existiert eine Mehrdeutigkeit hinsichtlich der Lage der Resonanz-Frequenz!

Anmerkung: Sehr häufig wird in der Literatur statt ω_E einfach nur ω geschrieben.

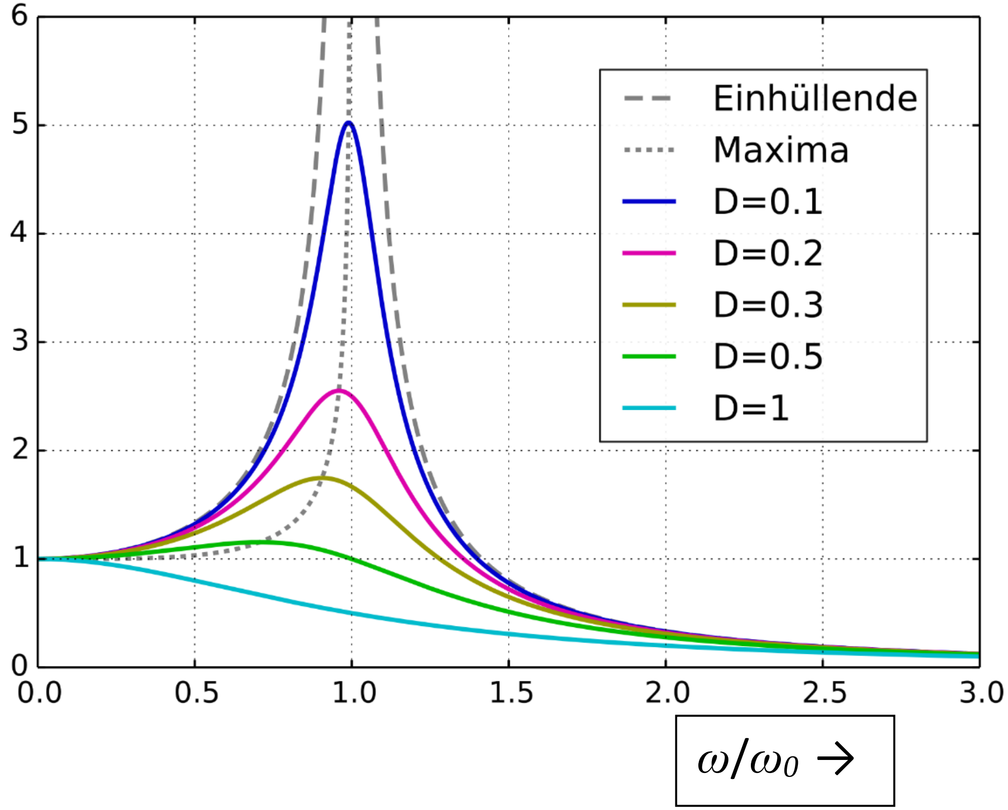
3.5.3 Resonanz

Sind maximale Anregekraft $\hat{F}_E$ und Dämpfungskonstante β bekannt, dann ist die Amplitude

$\hat{y} = \hat{y}(\omega_E) = \hat{y}(\omega)$

nur von der **Anregefrequenz** abhängig. Ihr Maximum erreicht sie bei $\omega \approx \omega_0$.

Mit steigendem Wert von $\delta > 0$ verschiebt sich der Resonanzfall zu kleineren Frequenzen $\omega < \omega_0$ (siehe Diagramm).



Bildquelle: Von Geek3 - Eigenes Werk, CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=37806997

Für **quasi-statische Auslenkung** gilt ($\omega_E = \omega = 0$), falls Maximalwert F_E bekannt:

$$\hat{A}(\omega_E) = \hat{F}_E \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + \beta^2 \cdot \omega_E^2}} \qquad \rightarrow \qquad \hat{y}_{stat} = \frac{\hat{F}_E}{m\omega_0^2}$$

Als „**Resonanzfrequenz**" (Frequenz, bei der Amplitude maximal wird) erhält man:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Die **Amplitude im Resonanzfall** ergibt sich dann als:

$$\hat{y}_{res} = \frac{\hat{F}_E}{\beta\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{\hat{F}_E}{\beta\omega_d} = \frac{\hat{F}_E}{2\delta m\omega_d}$$

Das Verhältnis von Resonanz-Amplitude zu quasistatischer Auslenkung heißt

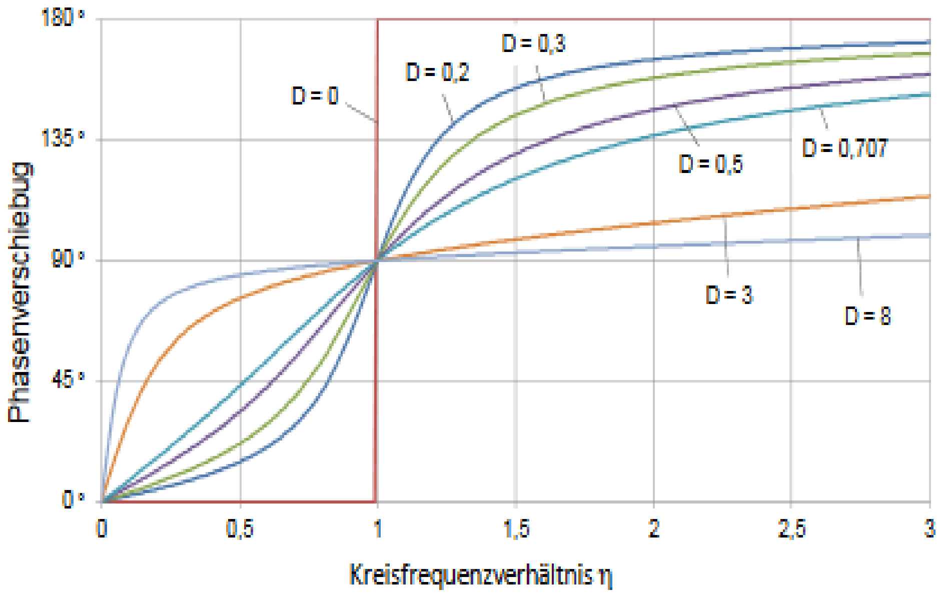
Resonanz-Überhöhung: $$\frac{\hat{y}_{res}}{\hat{y}_{stat}} = \frac{\omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{\omega_0^2}{2\delta\omega_d}$$

Für **beliebige Anrege-Frequenzen** errechnet sich das Verhältnis von Schwingungs-Amplitude zur quasistatischen Auslenkung mit:

$$\frac{\hat{y}}{\hat{y}_{stat}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

Wie auf Seite 3.5-5 bereits gezeigt, ist die Phasendifferenz $\varphi(\omega_E) = \varphi(\omega)$ ebenfalls von der Anregefrequenz abhängig.

Unabhängig von der Dämpfung ist bei $\omega = \omega_0$ die Phasendifferenz $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$



Hinweis: D= Dämpfungsgrad; $D = \beta/2m\omega_0$

Bildquelle: http://homepages.hs-bremen.de/~krausd/iwss/V5b.pdf

Anmerkung: Sehr viele mechanische Gebilde sind in irgendeiner Form schwingungsfähig. Daher ist die praktische Bedeutung von Resonanz sehr groß.

Resonanz führt dann zu einem „Aufschaukeln“, das im Extremfall bis zur Zerstörung (z.B. durch Überlastung) reichen kann. Grund ist die ständige Zufuhr von Energie.

Beispiel: Erdbeben, Tacoma-Brücke, Helikopter Bodenresonanz,…

Maßnahmen zur Verhinderung von kritischen Amplituden-Größen („Magnitude“):

- Vermeidung periodischer Anregung
- Abstand zwischen Anregefrequenz und Eigenfrequenz einhalten
- Resonanzfrequenz nur auf Zeitspannen kleiner als Einschwingdauer begrenzen
- Dämpfungselemente (Schwingungsdämpfer) einsetzen
- Eigenfrequenzen durch Konstruktionsmaßnahmen verschieben.

☞NB: Resonanz kann auch ein sehr nützliches 😉 Phänomen sein!