EQS. NÃO-HOMOGÊNEAS (LINEAR)

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS.

2º ORDEM: $$\boxed{a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x)}$$

$g(x) = 0 \Rightarrow$ EQ. HOMOGÊNEA;

$g(x) \neq 0 \Rightarrow$ EQ. NÃO-HOMOGÊNEA.

RESOLVER A EQ. NÃO-HOMOGÊNEA $\Rightarrow$ RESOLVER 1º A EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA.

$$\underbrace{y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6}_{g(x)\neq 0} \Rightarrow \underbrace{y'' + 4y' - 2y = 0}_{g(x)=0}$$

$\Rightarrow$ EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA.

A $\Rightarrow$ SOLUÇÃO PARTICULAR: y_p

B $\Rightarrow$ SOLUÇÃO COMPLEMENTAR: y_c

C $\Rightarrow$ SOLUÇÃO GERAL EQ. NÃO-HOMOGÊNEA

O QUE SÃO?

A $\Rightarrow$ SOLUÇÃO PARTICULAR $\Rightarrow$ QUALQUER SOLUÇÃO DA EQ. NÃO-HOMOGÊNEA.

EX: $\boxed{y'' + 9y = 27}$

$y_p = 3 \Rightarrow$ POIS: $y_p' = 0$, $y_p'' = 0 \Rightarrow y'' + 9.y = 0 + 9.3$, $y'' + 9.y = 27$.

B) ⇒ SOLUÇÃO COMPLEMENTAR

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ ⇒ n SOLUÇÕES DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA.

ENTÃO: (P.S.)

$$\boxed{y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n}$$

→ SUPERPOSIÇÃO DAS SOLUÇÕES DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA $[g(x) = 0]$.

C) ⇒ SOLUÇÃO GERAL – EQ. NÃO-HOMOGÊNEA

$$\boxed{y = y_p + y_c}$$

→ SOLUÇÃO GERAL

ESQUEMATICAMENTE

DADA EQ. NÃO-HOMOGÊNEA

$y'' + by' + cy = g(x)$

⇒ RESOLVE A EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA ⇒ FAZ: $g(x) = 0$.

$y'' + by' + cy = 0$.

OBTÉM: $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$

⇒ ACHA y_p

→ SOLUÇÃO DA NÃO-HOMOGÊNEA:

$y = y_c + y_p$

EX: DADA $\boxed{y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x}$

- HOMOGÊNEA ASSOCIADA $\Rightarrow$ $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; (1)
- SOLUÇÕES $\Rightarrow$ $y_1 = e^{x}$; $y_2 = e^{2x}$ E $y_3 = e^{3x}$; (2)
- SOLUÇÃO COMPLEMENTAR $\Rightarrow$ $y_c = C_1 . e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$; (3)
- SOLUÇÃO PARTICULAR $\Rightarrow$ $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{x}{2}$; (4)
- SOLUÇÃO DA EQ. NÃO-HOMOGÊNEA $\Rightarrow$ $\boxed{y = y_c + y_p}$

$$y = \underbrace{C_1 . e^{x} + C_2 . e^{2x} + C_3 . e^{3x}}_{y_c} \underbrace{- \frac{11}{12} - \frac{x}{2}}_{y_p} ; \quad (5)$$

OBS: $a y'' + b y' + c y = g(x)$ $\longrightarrow$ EQS. LINEARES

$\rightarrow$ CONSTANTES

- $g(x) = 10$;
- $g(x) = x^2 - 5x$;
- $g(x) = \text{sen}(3x) - 5x . \cos(2x)$;
- $g(x) = e^{x} \cos(x) - (3x^2 - 1) e^{-x}$;

MÉTODO É APLICÁVEL

- $g(x) = \ln(x)$;
- $g(x) = \frac{1}{x}$;
- $g(x) = tg(x)$;

NÃO-APLICÁVEL

EX1 - RESOLVA $\boxed{y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6}$

SOL. GERAL: $y = y_c + y_p \longrightarrow$ PROCURAR!

$\hookrightarrow$ SOLUÇÕES DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA

- $\boxed{\text{OBTENDO } y_c}$:

$y'' + 4y' - 2y = 0;$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} y = e^{m.x}, \\ y' = m.e^{m x}, \\ y'' = m^2.e^{m.x}. \end{array}}$

$(m^2 + 4m - 2).e^{mx} = 0,$

$\therefore \boxed{m^2 + 4m - 2 = 0}$ (6)

$\Delta = 16 - 4.1(-2) \Rightarrow \Delta = 16 + 8 = 24 \begin{array}{l} \rightarrow m_1 \\ \rightarrow m_2 \end{array}$

$m = \dfrac{-4 \pm \sqrt{24}}{2.1} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4.6}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2};$

$\therefore \boxed{m_1 = -2 + \sqrt{6}}$ E $\boxed{m_2 = -2 - \sqrt{6}}$ (7)

$\boxed{+\text{EQ. I}} \Rightarrow y = C_1.e^{m_1.x} + C_2.e^{m_2.x}$

$$\boxed{y_c = C_1.e^{(-2+\sqrt{6}).x} + C_2.e^{(-2-\sqrt{6})x}}$$ (8)

- $\boxed{\text{OBTENDO } y_p}$:

$g(x) = 2x^2 - 3x + 6 \Rightarrow$ TENTA: $\boxed{y_p = Ax^2 + Bx + C}$

POLINÔMIO 2º GRAU (9)

$\hookrightarrow$ COEFICIENTES INDETERMINADOS

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \begin{cases} y' = 2Ax + B ; \\ y'' = 2A ; \end{cases}$$

SUBSTITUI y'', y' E y NA EQ. DADA (NÃO-HOM.)

DADA: $y'' + 4 \cdot y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$;

$$2A + 4[2Ax + B] - 2[Ax^2 + Bx + C] = 2x^2 - 3x + 6 ; \quad (10)$$

$$2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6 ; \quad (11)$$

$$(-2A) x^2 + (8A - 2B) \cdot x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6 ; \quad (12)$$

COEFICIENTES DE POTÊNCIAS IGUAIS DEVEM SER IGUAIS, ENTÃO:

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ 8A - 2B = -3 \\ 2A + 4B - 2C = 6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -1} ; \quad (13)$$

$$\Downarrow$$

$$8(-1) - 2B = -3 ;$$

$$-2B = -3 + 8 ,$$

$$\boxed{B = -\frac{5}{2}} \rightarrow (14)$$

, ENTÃO

$$2(-1) + 4\left(-\frac{5}{2}\right) - 2C = 6 ;$$

$$\underbrace{-2 - 10 - 6}_{-18} = 2C \Rightarrow \boxed{C = -9} \quad (15)$$

COMO: $y_p = Ax^2 + Bx + C$;

TEMOS: $\boxed{y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9}$ (16)

SOL. GERAL: $y = y_c + y_p$

$$\boxed{y = \underbrace{C_1 . e^{(-2+\sqrt{6}).x} + C_2 . e^{(-2-\sqrt{6}).x}}_{y_c} \underbrace{- x^2 - \frac{5}{2}x - 9}_{y_p}}$$

$y_c \quad + \quad y_p$

OBSERVAÇÕES

$$\boxed{a y'' + b y' + c y = g(x)}$$

- $g(x) = 2x^2 - 3x + 6 \Rightarrow \boxed{y_p = Ax^2 + BX + C}$

- $g(x) = \cos(\alpha . x)$, ou $g(x) = \text{sen}(\alpha . x)$ $\Rightarrow$ $y_p = A . \cos(\alpha . x) \Rightarrow$ NÃO!

  TENTA:

  $$\boxed{y_p = A \cos(\alpha . x) + B . \text{sen}(\alpha . x)}$$

- $g(x) = e^{\alpha . x} \Rightarrow \boxed{y_p = A . e^{\alpha . x}}$ ou $\boxed{y_p = A . x . e^{\alpha . x}}$

- $g(x) = \underbrace{4 . x - 5}_{\text{POLINOMIAL}} + \underbrace{6 . x . e^{2x}}_{\text{EXPONENCIAL}}$

$$\boxed{y_p = \underbrace{Ax + B}_{\text{POLINÔMIO}} + \underbrace{C x . e^{2x} + D . e^{2x}}_{\text{EXPONENCIAL}}}$$