CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
LABORATÓRIO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

Complexidade de Algoritmos
Comportamento assintótico
Notação Big O, Ω, e Θ

Disciplina: Estrutura de dados II

Prof. Fermín Alfredo Tang Montané

Curso: Ciência da Computação
Universidade Estadual do Norte Fluminense

Comportamento Assintótico
Introdução

- Considere que temos dois algoritmos A e B para resolver um certo problema.
- Considere também que fizemos a análise dos tempos de processamento de cada um dos algoritmos, obtendo-se $T_A(n)$ e $T_B(n)$, onde n, representa o tamanho do problema.

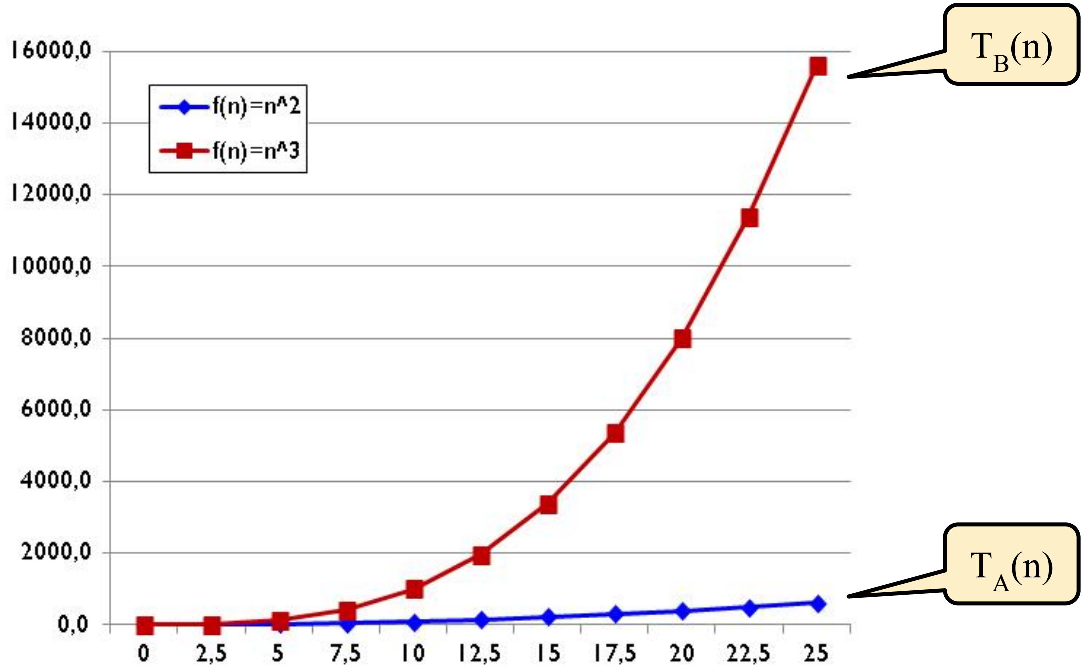
- **Queremos saber, qual algoritmo é o melhor?**
- Caso 1.-
- Comparar $T_A(n)$ e $T_B(n)$ para um tamanho específico de n, digamos n_0, não nos permitirá concluir que um algoritmo é melhor do que o outro.
- Por exemplo, se: $T_A(n_0) \leq T_B(n_0)$
- Somente poderemos afirmar que o algoritmo A é melhor que o algoritmo B para o tamanho de problema n_0.
- Em geral, não temos conhecimento *a priori* sobre o tamanho do n.

Comportamento Assintótico
Introdução

- **Queremos saber, qual algoritmo é o melhor?**
- Caso 2.-
- Se puder ser demonstrado que:

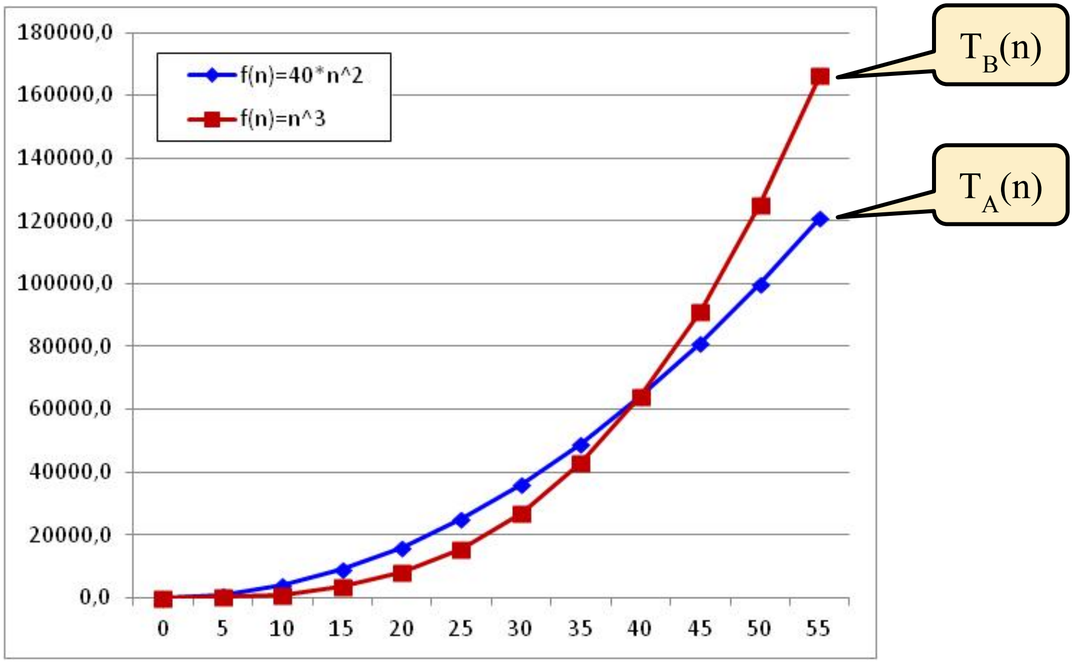
$$T_A(n) \le T_B(n), \quad \forall n \ge 0$$

- Somente neste caso podemos afirmar que o algoritmo A é melhor que o algoritmo B.



Comportamento Assintótico
Introdução

- <u>Caso 3</u>.-
- Em geral, não é verdade que uma das funções T_A seja sempre menor ou igual que a outra T_B para qualquer tamanho n do problema.



- **Como comparar dois algoritmos então?**
- Considera-se o comportamento assintótico das duas funções, para tamanhos de problemas arbitrariamente grandes.

Limite Assintótico Superior

Definição do O(.)

- A notação O(.) - *big oh* - foi introduzida em 1892, por P. Bachmann, para caracterizar o comportamento assintótico de funções.
- No nosso estudo as funções *f(n)* sendo caracterizadas correspondem as mesmas funções de tempo T(n) mencionadas anteriormente.

- **Definição de O(.):**
- Considere uma função f(n) não-negativa, para todo n≥0.

Dizemos que: $f(n) \text{ é } O(g(n))$ ou

$$f(n) = O(g(n))$$

Se existem **um inteiro** n_0 e **uma constante** c>0 tais que:

$$\boxed{f(n) \leq cg(n), \text{ para } n \geq n_0}$$

Limite Assintótico Superior
Definição do O(.)

- **Interpretação:**
- O objetivo da notação O(.) é identificar uma função g(n) que limite superiormente a função f(n) que esta sendo avaliada.
- Geralmente o limite somente será válido a partir de um certo tamanho de n.

Para avaliar a função:

$$f(n) = 5n^2 + 50n$$

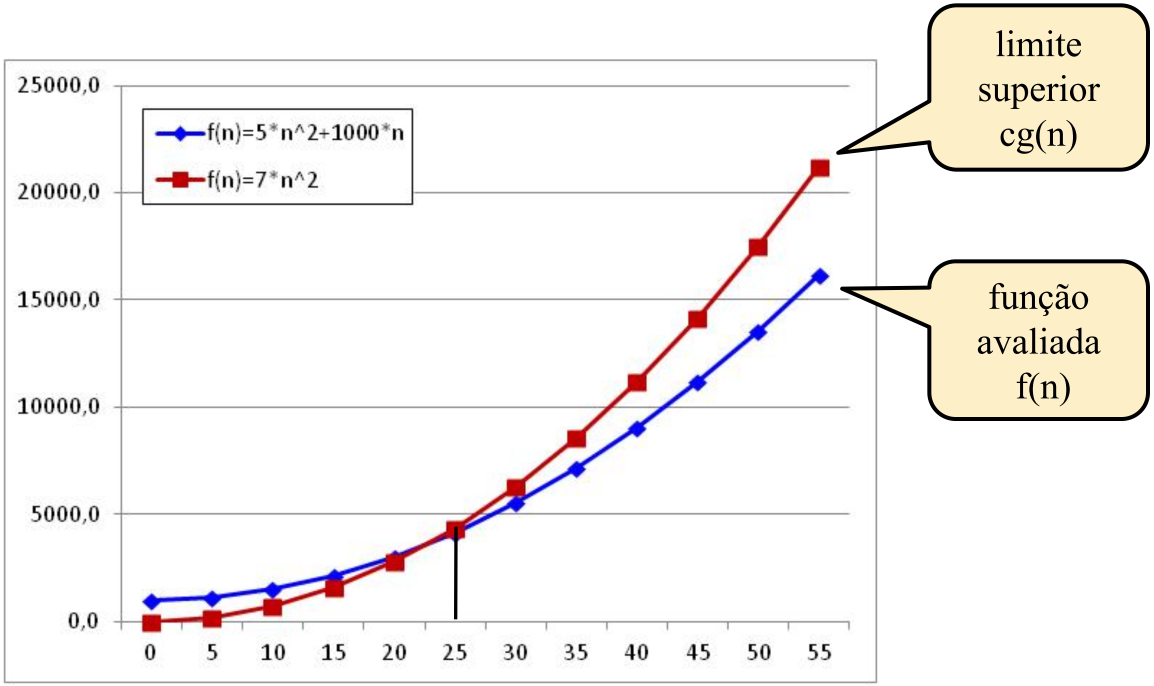
Consideramos o limite superior assintótico:

$$g(n) = n^2$$

Prova-se que:

$$\boxed{f(n) \text{ é } O(n^2)}$$

Por exemplo: c=7 e n_0=25

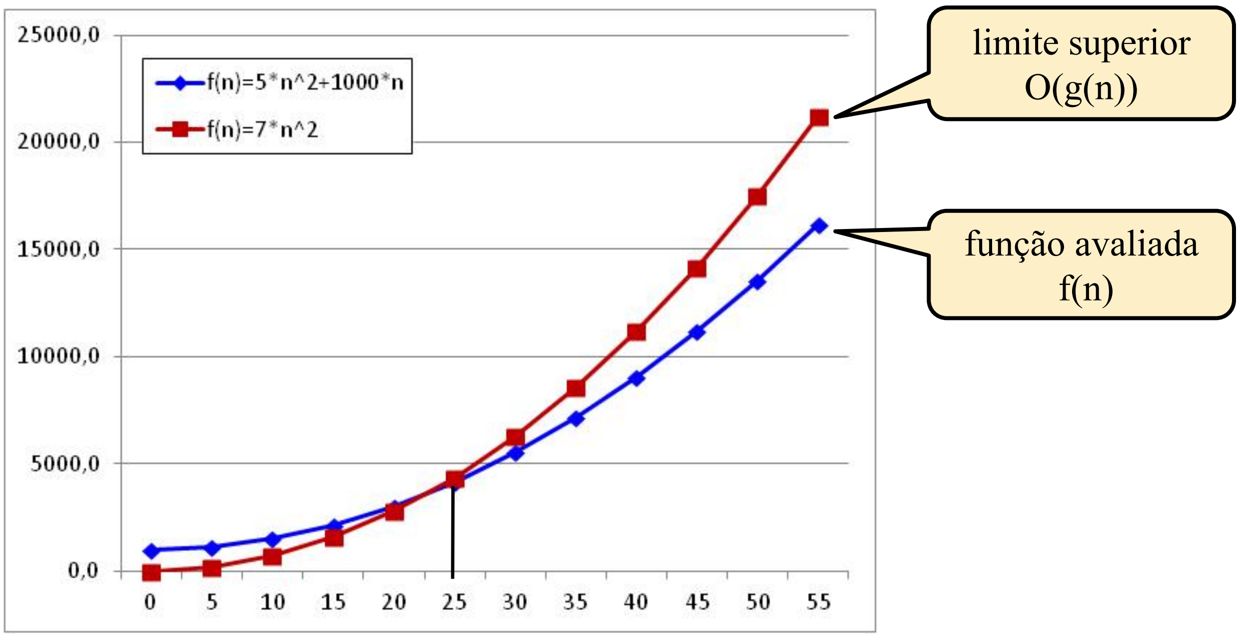


$$\boxed{f(n) = 5n^2 + 50n \leq 7n^2, \quad \forall n \geq 25}$$

Limite Assintótico Superior

Definição do O(.)

- O conceito f(n) é O(g(n)) define a ordem de complexidade de pior caso para a função f(n) como sendo g(n).



Limite Assintótico Superior

Definição do O(.)

- **Exemplo de O(.):**
- Considere a função f(n)=8n+128, queremos mostrar que $f(n)=O(n^2)$
- A prova exige a escolha de uma constante c, mostraremos que o valor da constante não é muito importante, mas sim provar que ela existe.

Para provar que: $f(n) = O(n^2)$

Aplica-se a definição de O(.): $f(n) = 8n + 128 \leq cn^2$

Devemos determinar valores de c e $n_{0.}$

Para c=1, temos:

$$8n + 128 \leq n^2 \Rightarrow n^2 - 8n - 128 \geq 0$$

$$\Rightarrow (n+8)(n-16) \geq 0$$

Que somente será verificada se n≥16.

A prova foi obtida com: $\boxed{c = 1,\ \mathrm{n}_0 = 16}$

Limite Assintótico Superior

Definição do O(.)

- **Exemplo de O(.) (Cont.):**
- Considere a função $f(n)=8n+128$, queremos mostrar que $f(n)=O(n^2)$

- **Diferentes valores de c e n_0, podem ser utilizados na prova do O(.).**

Para c=2, temos:

$$8n+128 \le 2n^2 \Rightarrow n^2 - 4n - 64 \ge 0$$

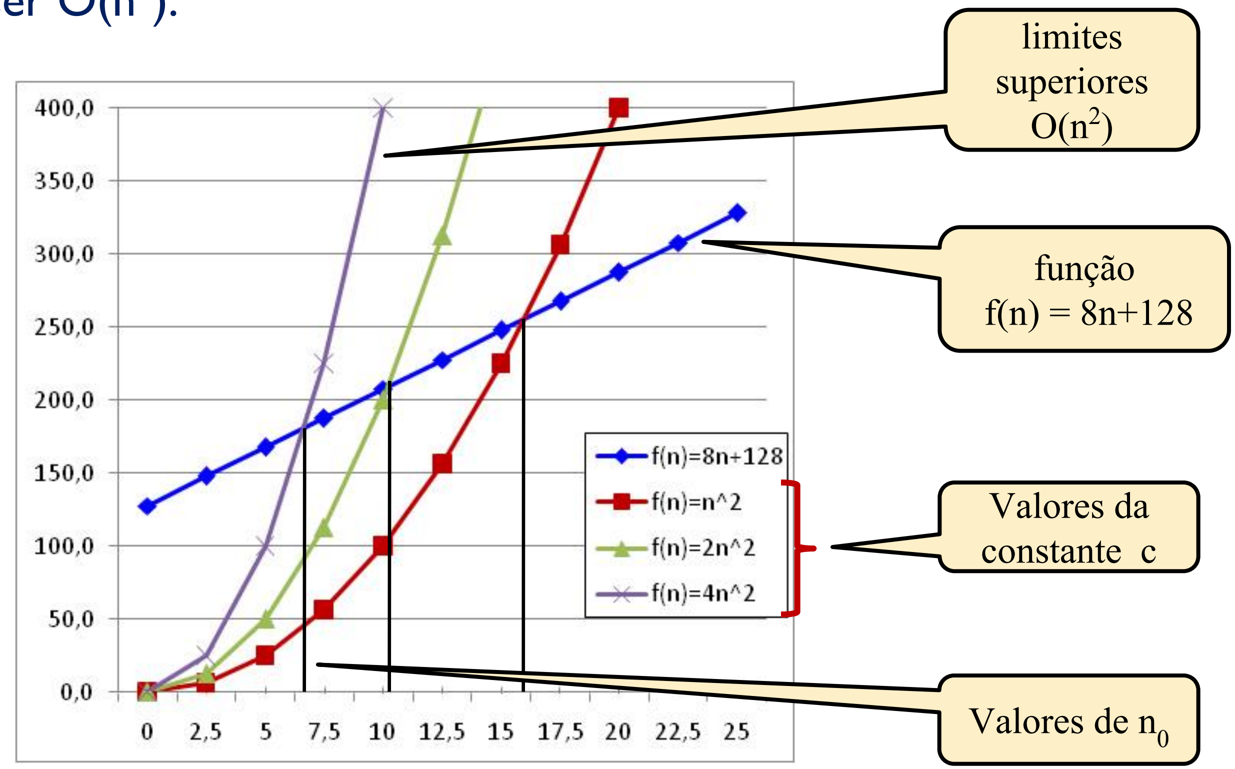
$$\Rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{16+4(1)(64)}}{2}$$

Que somente será verificada se $n \geq 10{,}24$.

A prova foi obtida com: $\boxed{c=2,\ n_0=10{,}24}$

Limite Assintótico Superior
Definição do O(.)

- **Exemplo de O(.) (Cont.):**
- A figura mostra que diferentes valores de c e n_0 garantem a prova de $f(n)=8n+128$ ser $O(n^2)$.



Limite Assintótico Superior
Limites estreitos de O(.)

- A notação O(.) não estabelece quão próximo do limite superior g(n) está o comportamento da função f(n).
- **$O(n^2)$ é o melhor limite assintótico para f(n)=8n+128 ?.**
- Podemos provar que f(n)=8n+128 é O(n)

Aplica-se a definição I: $f(n) = 8n + 128 \leq cn$

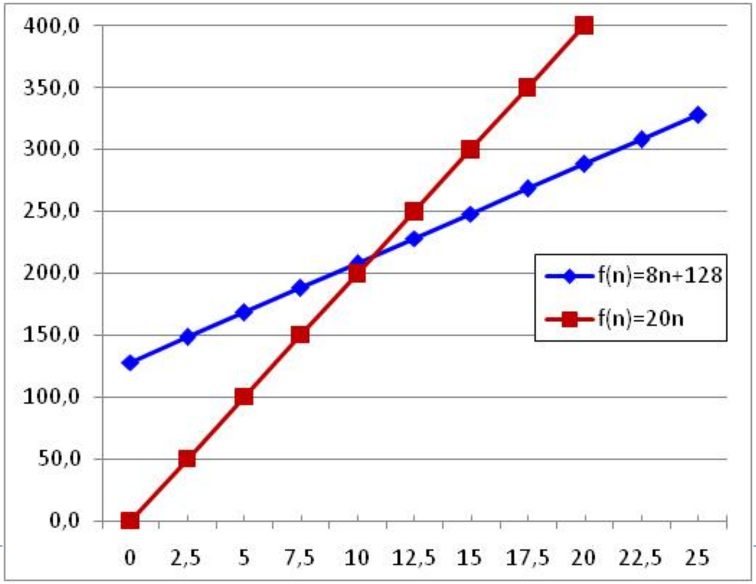
Devemos determinar valores de c e n_0.

Para c=20, temos:

$$8n + 128 \leq 20n \Rightarrow 12n \geq 128$$
$$\Rightarrow n \geq 10,66$$

A prova foi obtida com:

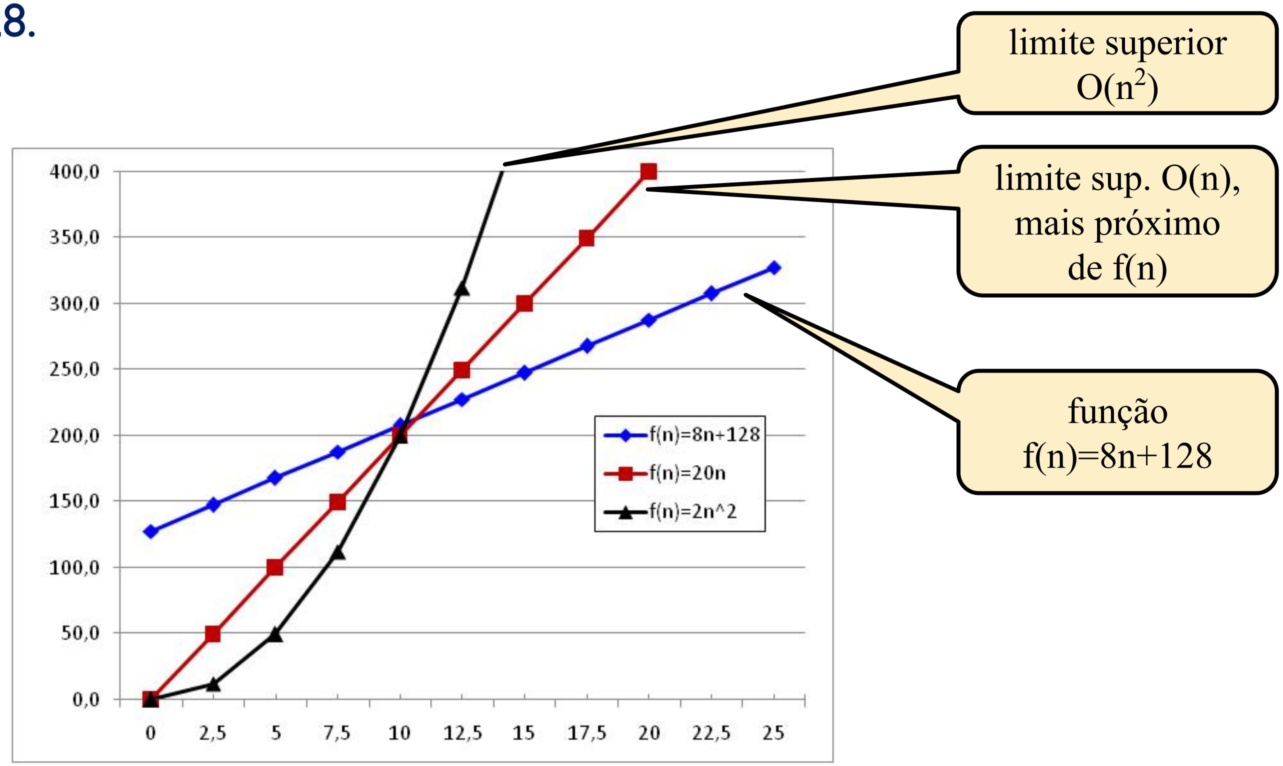
$$\boxed{c = 20,\ n_0 = 10{,}666}$$



Limite Assintótico Superior

Limites estreitos de O(.)

- A figura mostra a diferença entre dois limites superiores para a função f(n)=8n+128.



Limite Assintótico Superior

Limites estreitos de O(.)

- **Definição de limite estreito de O(.) (Justeza):**
- Define-se em que caso g(n) é o limite mais próximo ou justo para uma função f(n). Ou seja, f(n)= O(g(n)) é g(n) é um limite justo.
- Afirmar que g(n) é um limite superior justo significa afirmar que todos os outros limites superiores serão piores que g(n).

- Considere que g(n) é um limite superior para f(n): $f(n) = O(g(n))$
- Se para toda função *h(n)* que seja limite superior para f(n): $f(n) = O(h(n))$
- Se cumpre que, *h(n)* também é limite superior para g(n): $g(n) = O(h(n))$

- Conclui-se que **g*(n)* é um limite justo ou estreito para f(n)**.

Limite Assintótico Inferior
Definição do Ω(.)

- A notação Ω(.) - omega – caracteriza o comportamento assintótico de uma função mediante um limite inferior.
- A definição de Ω(.) é semelhante à definição de O(.)

- **Definição de Ω(.):**
- Considere uma função f(n) não-negativa, para todo n≥0.

Dizemos que: $f(n)\ é\ \Omega(g(n))$ ou

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

Se existem **um inteiro** n_0 e **uma constante** c>0 tais que:

$$\boxed{f(n) \geq cg(n),\ \text{para } n \geq n_0}$$

Limite Assintótico Inferior
Definição do Ω(.)

- **Exemplo de Ω(n):**
- Mostra-se que f(n)=8n+128 é Ω(n)

Aplica-se a definição de Ω(.): $f(n) = 8n + 128 \geq cn$

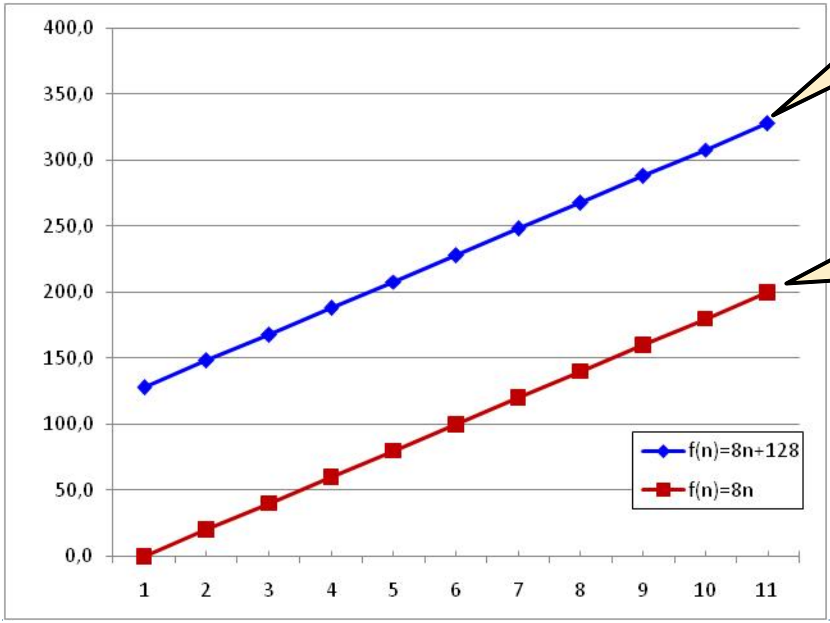
Devemos determinar valores de c e n_0.

Para c=8, temos:

$$8n + 128 \geq 8n \Rightarrow 128 \geq 0$$

A prova foi obtida com:

$$c = 8,\ n_0 = 0$$



função f(n)=8n+128

limite inferior Ω(n) de f(n)

Limite Assintótico Geral

Definição do Θ(.)

- A notação Θ(.) - teta – caracteriza o comportamento assintótico de uma função f(n) que tem g(n) como limite superior e inferior.
- A função f(n) é O(g(n)) e Ω(g(n)) ao mesmo tempo.

Referências

- Bruno R. **Preiss**. Estrutura de Dados e Algoritmos. Capítulo 3. 3ª Edição. 2001. Editora Elsevier