UENF

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

CCT

LCMAT

Variáveis Aleatórias

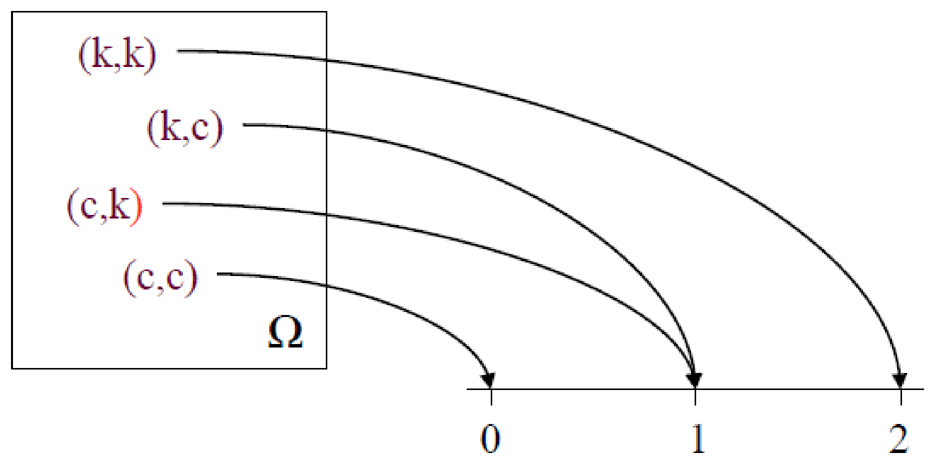
Prof. Fermín Alfredo Tang Montané

Variável Aleatória

- Uma variável aleatória é definida como uma função que associa a cada elemento do espaço amostral de um experimento aleatório um número real.
- **Exemplo:**
- Considere o experimento aleatório E = “Lançar uma moeda não viciada duas vezes e observar os resultados” e seja a variável aleatória X, definida como:
  - X = “número de caras que ocorre no experimento aleatório”

$$\Omega = \{(c,c),(k,c),(k,c),(k,k)\}$$

$$X = \{0,\ 1,\ 2\}$$



Tipos de Variável Aleatória

- **Variável Aleatória Discreta**
- Uma variável aleatória X é dita discreta se o conjunto de valores de X é finito ou infinito enumerável.
- Exemplos:
- 1) E = "Observar aviões que chegam em determinado aeroporto em um mês"
  - X = "número de aviões que chegam atrasados"
  - X = {0, 1, 2, 3}
- 2) E = "Lançar uma moeda até ocorrer uma cara"
  - X = "número de lançamentos até ocorrer a primeira cara"
  - X = {1, 2, 3, 4, ...}
- 3) E = "Observar os estudantes dispostos em 10 salas de aula de uma escola"
  - X = "número de estudantes do sexo feminino"
  - X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... }

Tipos de Variável Aleatória

- **Variável Aleatória Contínua**
- Uma variável aleatória X é dita continua se o conjunto de valores de X é infinito não enumerável.
- Exemplos:
- 1) E = "Observar carros de formula 1 numa corrida"
  - X = "distância percorrida por um carro de fórmula 1numa corrida"
  - $X = \{ x / x \in R \text{ e } x \geq 0 \}$
- 2) E = "Observar o trabalho de funcionários diariamente "
  - X = "tempo que um funcionário leva para atender um cliente num certo dia"
  - $X = \{ t / t \in R \text{ e } 0 \leq t \leq 24\}$

Função de Probabilidade Variável Aleatória Discreta

- Seja X = {$x_1, x_2, \ldots, x_n$} uma variável aleatória discreta.
- p(X) é uma função de probabilidade da variável aleatória X se satisfaz as seguintes condições:

- i) $p(x_i) \geq 0, \text{ i} = 1, 2, \ldots, \text{n}$
- ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1, \text{ i} = 1, 2, \ldots, \text{n}$

- Além disso, a função de probabilidade permite calcular a probabilidade de ocorrencia de um valor da variável.

$$p(x_i) = P(X = x_i), \text{ i} = 1, 2, \ldots, \text{n}$$

Distribuição de Probabilidade
Variável Aleatória Discreta

- É o conjunto de todos os pares ordenados $(x_i, p(x_i))$. Uma distribuição de probabilidades pode ser expressa na forma de tabelas, graficos ou formulas.

Distribuição de Probabilidade Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo 1.-** Seja o seguinte experimento aleatório: E = "lançamento de três moedas não viciadas" e a variável aleatória: X = "número de caras que ocorrem". Montar a distribuição de probabilidade para a variável aleatória X.

- **Solução.-** Calcula-se o espaço amostral e o domínio de X.

$$\Omega = \{(c,c,c),(k,c,c),(c,k,c),(c,c,k),(k,k,c),(k,c,k),(c,k,k),(k,k,k)\}$$

$$X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

X = xi	P(X=xi)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
$\sum$	1

Distribuição de Probabilidade
Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo 1.-**
- **Solução.-**

$$\Omega = \{(c,c,c),(k,c,c),(c,k,c),(c,c,k),(k,k,c),(k,c,k),(c,k,k),(k,k,k)\}$$

$$X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

$X = x_i$	$P(X=x_i)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
$\sum$	1

Distribuição de Probabilidade
Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo 2.-** Utilizando o experimento aleatório e a variável aleatória do exemplo 1, determinar a probabilidade de ocorrer:
- a) Exatamente uma cara; b) No máximo uma cara; c) Pelo menos duas caras;
- **Solução.-**
- a) Exatamente uma cara: $P(X=1)=3/8=0,375$ ou 37,5%
- b) No máximo uma cara:

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1) \text{ ou } 37{,}5\%$$
$$=1/8+3/8=4/8 \text{ ou } 50\%$$

- c) Pelo menos duas caras:

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=3/8+1/8=4/8 \text{ ou } 50\%$$

X = xi	P(X=xi)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
∑	1

Distribuição de Probabilidade Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo 3.-** O número de accidentes em um certo trecho de uma rodovia no período da noite é uma variável aleatória discreta X, com função de probabilidade dada por:

$$P(X = x) = k(3-x)(4-x), \quad x \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}, k \in R$$

- Determine a probabilidade de ocorrer no máximo um accidente naquele trecho.

- **Solução.-** Como $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1, \text{ i} = 1, 2, \ldots, \text{n}$ então

$$P(X = 0) = k(3)(4) = k(12)$$
$$P(X = 1) = k(2)(3) = k(6)$$
$$P(X = 2) = k(1)(2) = k(2)$$
$$P(X = 3) = k(0)(1) = 0$$

$$\boxed{k = \frac{1}{20}}$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= 12/20 + 6/20 = 0{,}9$$

ou 90%

Função de Probabilidade Variável Aleatória Contínua

- f(X) é uma função de densidade de probabilidade (fdp) para a variável aleatória continua X, para todo $X \in R$, se satisfaz as seguintes condições:

- i) $f(x) \geq 0$
- ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

- A função de probabilidade permite calcular a probabilidade de que o valor da variável se encontre no intervalo [a,b].

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(X)dX$$

Função de Probabilidade
Variável Aleatória Contínua

- **Observações:**

- i) $f(x) \geq 0$, para todo x real, significa que o gráfico não pode estar abaixo do eixo das abscissas;

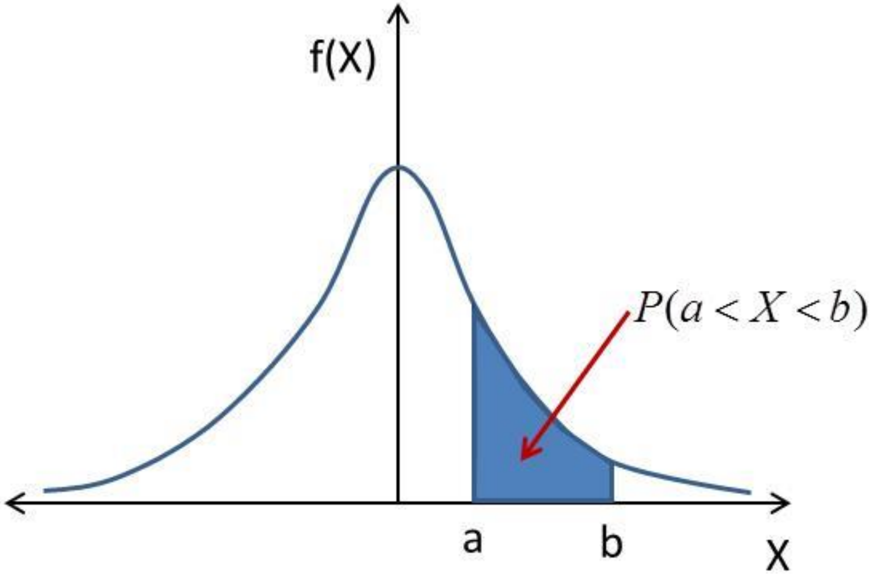
- ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ significa que a área abaixo da função f(X) é igual a 1;

- iii) $P(a < X < b)$

  A probabilidade corresponde

  a área abaixo da função f(X)

  no intervalo [a, b]



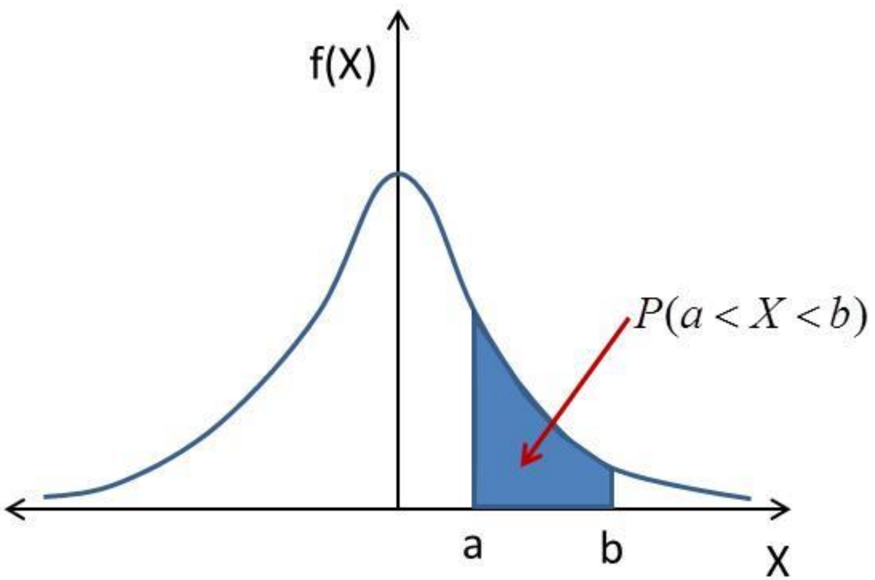
Função de Probabilidade
Variável Aleatória Contínua

- **Observações:**

- iii) $P(a < X < b)$ A probabilidade corresponde a área abaixo da função f(X) no intervalo [a, b]

- iv) Como $P(X = a) = \int_a^a f(X)dX = 0$ então

$$
\begin{aligned}
P(a < X < b) &= P(a \le X < b) \\
&= P(a < X \le b) \\
&= P(a \le X \le b) \\
&= \int_a^b f(X)dX
\end{aligned}
$$



Função de Probabilidade Variável Aleatória Contínua

- **Exemplo I**
- A função de densidade de probabilidade da variável aleatória contínua X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{se } -1 < x < 2 \\ 0, & \text{se } x \le -1 \text{ ou } x \ge 2 \end{cases}$$

- a) Determine o valor de k sabendo que é um número real.

- **Solução.-** Como $f(x) \ge 0$ então $k > 0$

  Como $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ então $\int_{-\infty}^{+\infty} kx^2 dx = 1$

Temos: $$\int_{-1}^{2} kx^2 dx = k\int_{-1}^{2} x^2 dx = k\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = k\left(\tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{3}\right) = k(3) = 1 \qquad \boxed{k = \frac{1}{3}}$$

Função de Probabilidade
Variável Aleatória Contínua

- **Exemplo I**
- A função de densidade de probabilidade da variável aleatória contínua X é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{se } -1 < x < 2 \\ 0, & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \end{cases}$$

- b) Determine P(I< X ≤ 3).
- **Solução.-**

$$\int_1^2 \tfrac{1}{3} x^2 dx = \tfrac{1}{3} \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{7}{9}$$

Função de Probabilidade Variável Aleatória Contínua

- **Exemplo 2**
- As necessidades de matéria prima por dia (em toneladas) de um supermercado é uma variável aleatória contínua X com função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Determine a probabilidade de um determinado dia o super-mercado necessitar mais de uma tonelada de matéria prima.
- **Solução.-**

$$\int_1^2 \left(1 - \tfrac{x}{2}\right) dx = \left(x - \tfrac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4}$$

Função de Distribuição Acumulada

- Chama-se função de distribuição acumulada (ou cumulativa) de uma variável aleatória X, para um valor x, denotada como F(x) à função que representa a seguinte probabilidade:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- Se X é uma variável aleatória discreta:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} p(x_i), \quad \forall\, x_i \leq x$$

- Se X é uma variável aleatória continua:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(X)\,dX$$

Função de Distribuição Acumulada

- Um exemplo de distribuição acumulada discreta.

X = xi	p(x)	F(x)
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	1
∑	1	

$$F(x) = \sum_{i=1}^{x} p(x_i), \quad \forall x_i \leq x \quad \text{ou} \quad F(x) = P(X \leq x)$$

Função de Distribuição Acumulada

- Um exemplo de distribuição acumulada continua.
- A função de densidade de probabilidade da distribuição uniforme é definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{a} < x < b \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

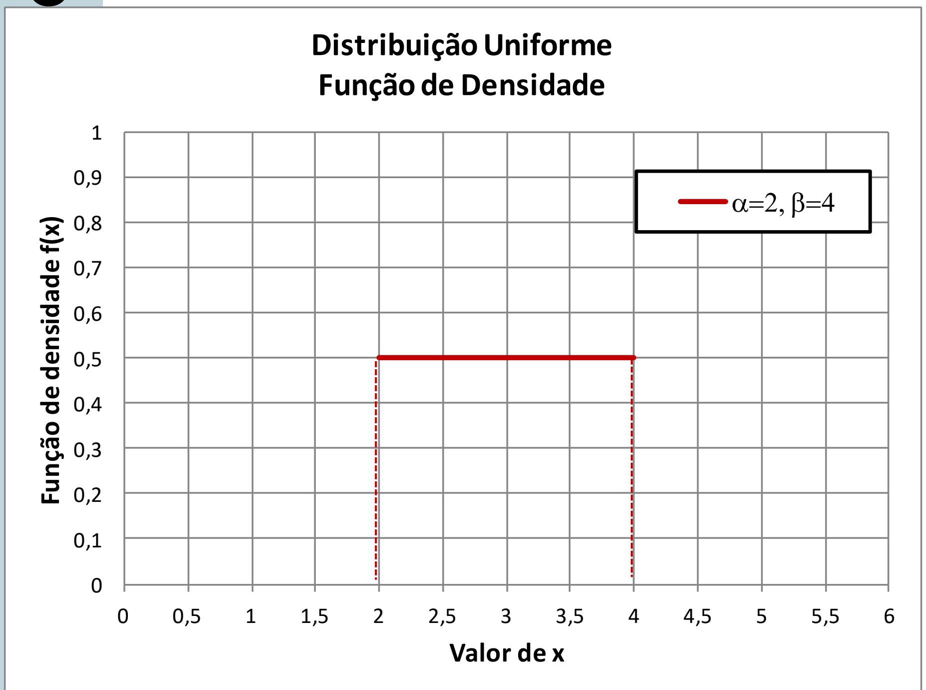
- A função de distribuição acumulada é dada por:

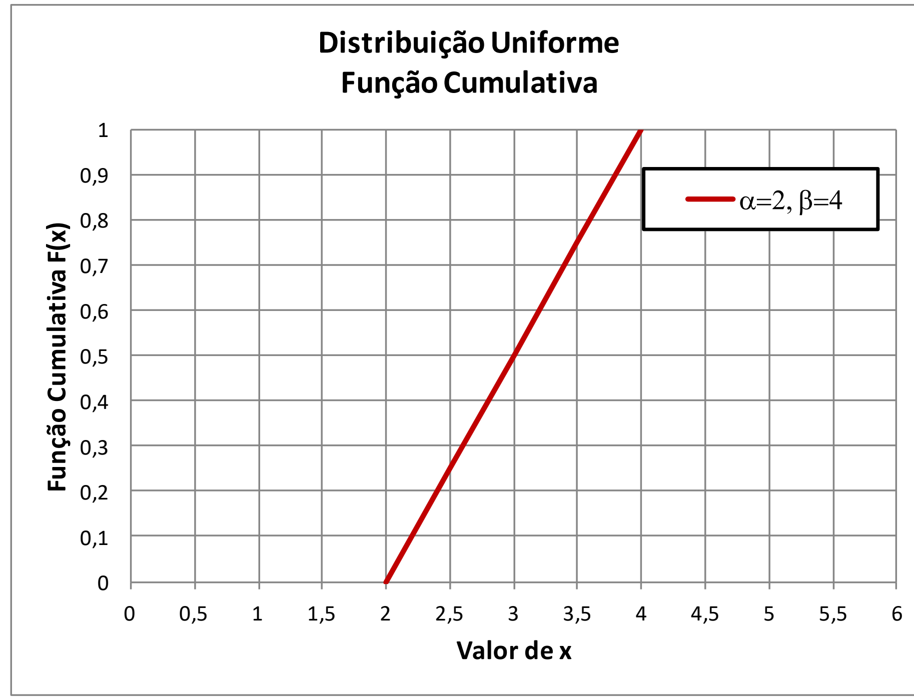
$$F(x) = P[X \leq x] = \int_a^x f(X)dX$$

- onde: $\boxed{F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}}$

Função de Distribuição Acumulada

- Um exemplo de distribuição acumulada continua.





$$\boxed{f(x) = \frac{1}{4-2}, \quad 2 < x < 4}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x-2}{4-2}, \quad 2 < x < 4}$$

Função de Distribuição Acumulada

- **Exemplos:**
- 1) Considerando a variável aleatória X sendo o número de caras que ocorre no lançamento de três não viciadas determine F (2)

- 2) Sendo a função de densidade de probabilidade da variável aleatória X dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- Determine F (1/2)

Esperança Matemática

- A esperança matemática E(X), chamada também de expectância ou média, de uma variável aleatória é uma medida que se posiciona no centro de uma distribuição de probabilidade, é definida como:

- Se X é uma variável aleatória discreta

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

- Se X é uma variável aleatória continua

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Propriedades da Esperança Matemática

- P1) Se $a \in R$ então $E(a) = a$
- P2) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- P3) Se $a \in R$ e $b \in R$ então $E(aX + \mathrm{b}) = a.E(X) + \mathrm{b}$
- P4) $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ se X e Y são variáveis aleatórias independentes.

Exemplos

Exemplo 1:

Considere um jogo no qual três moedas não viciadas são lançadas e o jogador recebe R$ 2,00 por cada cara que ocorrer. Quanto o jogador espera ganhar após uma jogada?

Número de caras	x_i = valor a ser recebido	$p(x_i)$
0	0	1/8
1	2	3/8
2	4	3/8
3	6	1/8
Total	-	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . p(x_i)$$

E(X) = 0.1/8 + 2.3/8 + 4.3/8 + 6.1/8 = R$ 3,00

Exemplos

Exemplo 2:

Determinar a esperança matemática da variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}.x^2, & \text{se } -1 < x < 2 \\ 0, & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \end{cases}$$

Variância

- A variância V(X) de uma variável aleatória X, mede o grau de dispersão da variável com relação a seu valor esperado, é definida nos seguintes casos:

- Se X é uma variável aleatória discreta

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \, p(x_i)$$

- Se X é uma variável aleatória contínua

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [X - E(X)]^2 \, f(X) dX$$

- **Obs.** A raiz quadrada da variância é o desvio padrão

Propriedades da Variância

- P1) Se $a \in R$ então $V(a) = 0$
- P2) Se $a \in R$ então $V(X + \mathrm{a}) = V(X)$
- P3) Se $a \in R$ então $V(aX) = a^2.V(X)$
- P4) $V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

Exemplos

Exemplo 1

Uma urna tem 6 bolas brancas e duas verdes. Três bolas são retiradas sem reposição. Considere a variável aleatória X sendo o número de bolas verdes retiradas. Determine o desvio-padrão da variável aleatória X.

Exemplo 2

Determine a variância da variável aleatória contínua X dada pela função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$