Álgebra Linear
Profa. Elba Bravo
Semestre: 2022 - 1

Lista de Exercícios 10

1) Consideremos a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (3x - 2y, x + 4y)$. Utilizar os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (3, -1)$ para mostrar que $T(3u + 4v) = 3T(u) + 4T(v)$.

2) Dada a transformação linear $T: V \longrightarrow W$, tal que $T(u) = 3u$ e $T(v) = u - v$, calcular em função de u e v:

a) $T(u + v)$

b) $T(3v)$

c) $T(4u - 5v)$

3) Dentre as transformações $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas pelas seguintes leis, verificar quais são lineares:

a) $T(x, y) = (x - 3y, 2x + 5y)$

b) $T(x, y) = (y, x)$

c) $T(x, y) = (x^2, y^2)$

d) $T(x, y) = (x + 1, y)$

e) $T(x, y) = (y - x, 0)$

f) $T(x, y) = (|x|, 2y)$

g) $T(x, y) = (\text{sen}x, y)$

j) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M(2, 2)$, $T(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 2y & 3x \\ -y & x + 2y \end{bmatrix}\right)$

k) $T: M(2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - c, b + c)$

l) $T: M(2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

9) Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,0,0) = (3,4)$.

a) Determinar $T(x, y, z)$.

b) Determinar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-3, -2)$.

c) Determinar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (0, 0)$.

23) Seja $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(e_1) = (1, -2, 1)$, $T(e_2) = (-1, 0, -1)$, $T(e_3) = (0, -1, 2)$ e $T(e_4) = (1, -3, 1)$, sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^4$.

a) Determinar o núcleo e a imagem de T.

b) Determinar bases para o núcleo e para a imagem.

c) Verificar o Teorema da Dimensão.

28) Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (2x - y, x + 3y, -2y)$ e as bases $A = \{(-1, 1,),(2, 1)\}$ e $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$. Determinar $[T]_B^A$. Qual a matriz $[T]_C^A$, onde C é a base canônica do $\mathbb{R}^3$?

30) Seja

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz canônica de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se $T(v) = (2, 4, -2)$, calcular v.

33) Consideremos o operador linear

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (x + 2y,\ x - y)$

e as bases $A = \{(-1, 1), (1, 0)\}$, $B = \{(2, -1), (-1, 1)\}$ e C canônica.

Determinar $[T]_A, [T]_B, [T]_C$.

Observação.

$[T]_A = [T]_A^A$ são as componentes das imagens dos vetores da base A em relação à própria base.

41) Consideremos as transformações lineares S e T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definidas por $S(x, y, z) = (2x - y,\ 3x - 2y + z)$ e $T(x, y, z) = (x + y - z,\ y - 2z)$.

a) Determinar o núcleo da transformação linear $S + T$.

b) Encontrar a matriz canônica de $3S - 4T$.

44) As transformações $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ são tais que $S(x, y) = (y, x - y, 2x + 2y)$ e $T(x, y, z) = (x, y)$.

a) Sendo $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, determinar a matriz $[S \circ T]_B$.

b) Determinar $[T \circ S]_{B'}$ e $[T \circ S]_{B''}$, sendo $B' = \{(1, 1), (0, -1)\}$ e B'' a base canônica.