15.9 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Outro sistema de coordenadas tridimensionais útil é o *sistema de coordenadas esféricas*. Ele simplifica o cálculo de integrais triplas em regiões limitadas por esferas ou cones.

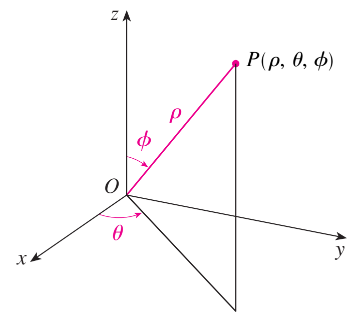


FIGURA 1 As coordenadas esféricas de um ponto

Coordenadas Esféricas

As **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) de um ponto P no espaço são mostradas na Figura 1, onde $\rho = |OP|$ é a distância da origem a P, θ é o mesmo ângulo que nas coordenadas cilíndricas e ϕ é o ângulo entre o eixo z positivo e o segmento de reta OP. Observe que

$$\rho \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

O sistema de coordenadas esféricas é especialmente útil em problemas nos quais exista simetria em torno de um ponto e a origem esteja colocada neste ponto. Por exemplo, a esfera com centro na origem e raio c tem a equação simples $\rho = c$ (veja a Figura 2) – essa é a razão do nome "coordenadas esféricas". O gráfico da equação $\theta = c$ é um semiplano vertical (veja a Figura 3) e a equação $\phi = c$ representa um semicone com o eixo z como seu eixo (veja a Figura 4).

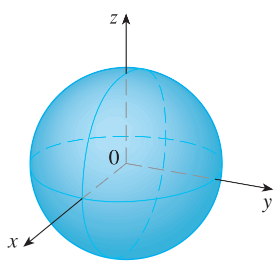


FIGURA 2 $\rho = c$, uma esfera

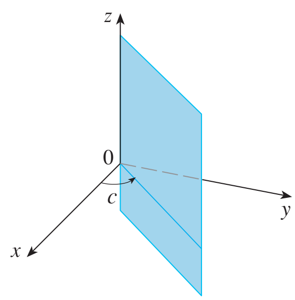
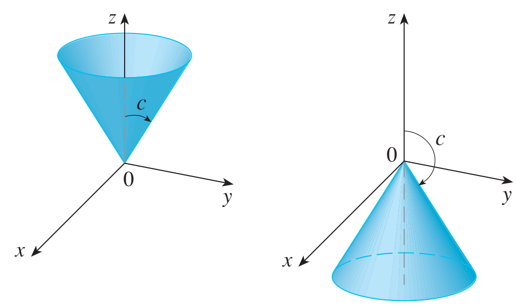


FIGURA 3 $\theta = c$, um semiplano



$0 < c < \pi/2$ $\qquad$ $\pi/2 < c < \pi$

FIGURA 4 $\phi = c$, um cone

A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5. Dos triângulos OPQ e OPP', temos

$$z = \rho \cos \phi \qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Mas $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, de modo que para converter de coordenadas esféricas para retangulares, usamos as equações

$$\boxed{1} \qquad \boxed{x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi}$$

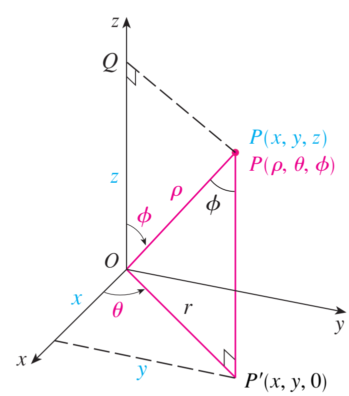


FIGURA 5

Além disso, a fórmula da distância mostra que

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

Usamos essa equação para converter de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas.

EXEMPLO 1 O ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é dado em coordenadas esféricas. Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares.

SOLUÇÃO Marcamos o ponto na Figura 6. Das Equações 1, temos

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

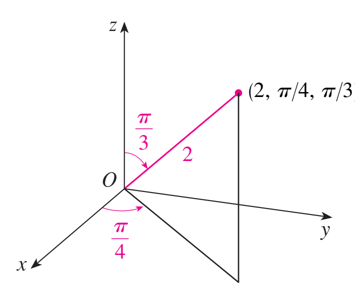


FIGURA 6

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Logo, o ponto $(2, \pi/4, \pi/3)$ é $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$ em coordenadas retangulares.

ATENÇÃO Não existe uma convenção universal na notação de coordenadas esféricas. A maioria dos livros de física troca os significados de θ e ϕ e usa r no lugar de ρ.

EXEMPLO 2 O ponto $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ está dado em coordenadas retangulares. Encontre coordenadas esféricas para este ponto.

SOLUÇÃO Da Equação 2, temos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

e, assim, as Equações 1 fornecem

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen} \phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

TEC Em *Module 15.9* você pode investigar famílias de superfícies em coordenadas cilíndricas e esféricas.

(Observe que $\theta \neq 3\pi/2$ porque $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Portanto, as coordenadas esféricas do ponto dado são $(4, \pi/2, 2\pi/3)$.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Neste sistema de coordenadas, o correspondente à caixa retangular é uma **cunha esférica**

$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b, \ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \ c \leqslant \phi \leqslant d\right\}$$

onde $a \geqslant 0$, $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$ e $d - c \leqslant \pi$. Apesar de termos definido as integrais triplas dividindo sólidos em pequenas caixas, podemos mostrar que, dividindo o sólido em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado. Assim, dividiremos E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio de esferas igualmente espaçadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ e semicones $\phi = \phi_k$. A Figura 7 mostra que E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_i \, \Delta\phi$ (arco de circunferência de raio ρ_i, e ângulo $\Delta\phi$) e $\rho_i \operatorname{sen} \phi_k \, \Delta\theta$ (arco de circunferência de raio $\rho_i \operatorname{sen} \phi_k$, e ângulo $\Delta\theta$). Logo, uma aproximação do volume de E_{ijk} é dada por

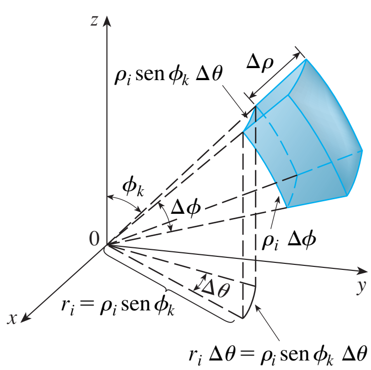


FIGURA 7

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i \, \Delta\phi)(\rho_i \operatorname{sen} \phi_k \, \Delta\theta) = \rho_i^2 \operatorname{sen} \phi_k \, \Delta\rho \, \Delta\theta \, \Delta\phi$$

De fato, pode ser mostrado, com a ajuda do Teorema do Valor Médio (Exercício 47), que o valor exato do volume de E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \, \Delta\rho \, \Delta\theta \, \Delta\phi$$

onde $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ é algum ponto em E_{ijk}. Sejam $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ as coordenadas retangulares desse ponto. Então

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \, \Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \cos \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \operatorname{sen} \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos \tilde{\phi}_k) \, \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \, \Delta\rho \, \Delta\theta \, \Delta\phi$$

Mas essa é uma soma de Riemann para a função

$$F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \, \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

Consequentemente, chegamos à seguinte **fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas**.

$$\boxed{3} \quad \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\theta\, d\phi$$

onde E é uma cunha esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

A Fórmula 3 nos diz que, para converter uma integral tripla de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas, escrevemos

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

utilizando os limites de integração apropriados e substituindo dV por $\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$. Isso é ilustrado na Figura 8.

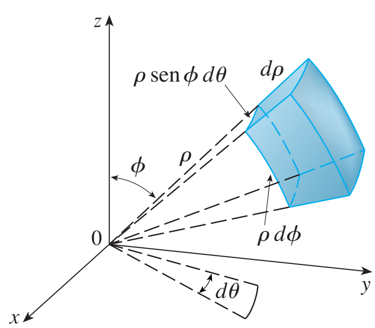


FIGURA 8
Elemento de volume em coordenadas esféricas: $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Essa fórmula pode ser estendida para incluir regiões esféricas mais gerais, como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d,\ g_1(\theta, \phi) \leqslant \rho \leqslant g_2(\theta, \phi)\}$$

Nesse caso, a fórmula é a mesma que $\boxed{3}$, exceto que os limites de integração para ρ são $g_1(\theta, \phi)$ e $g_2(\theta, \phi)$.

Em geral, as coordenadas esféricas são utilizadas nas integrais triplas quando superfícies como cones e esferas formam o limite da região de integração.

EXEMPLO 3 Calcule $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$, onde B é a bola unitária:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

SOLUÇÃO Como o limite de B é uma esfera, utilizaremos coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi\}$$

Além disso, as coordenadas esféricas são convenientes, pois

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Portanto, $\boxed{3}$ fornece

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\; d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} \, d\rho$$

$$= \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}(2\pi)\left[\tfrac{1}{3}e^{\rho^3}\right]_0^1 = \tfrac{4}{3}\pi(e-1)$$

OBSERVAÇÃO Seria extremamente complicado calcular a integral do Exemplo 3 sem coordenadas esféricas. Com coordenadas retangulares, a integral iterada seria

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dz \, dy \, dx$$

EXEMPLO 4 Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Veja a Figura 9.)

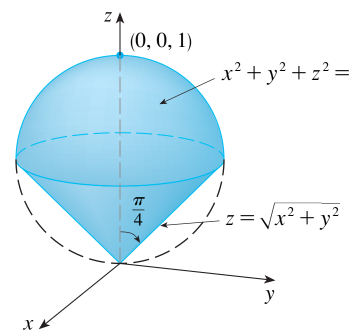


FIGURA 9

SOLUÇÃO Observe que a esfera passa pela origem e tem centro em $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Escrevemos a equação da esfera em coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho\cos\phi \qquad \text{ou} \qquad \rho = \cos\phi$$

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\,\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\,\operatorname{sen}^2\theta} = \rho\operatorname{sen}\phi$$

A Figura 10 mostra uma visão (desta vez, utilizando o MAPLE) do sólido do Exemplo 4.

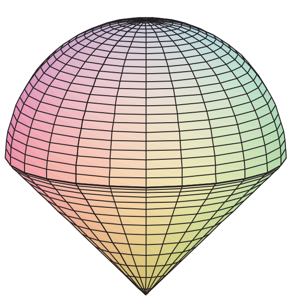


FIGURA 10

TEC *Visual 15.9* mostra uma animação da Figura 11.

Isto resulta em $\operatorname{sen}\phi = \cos\phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto, a descrição do sólido E em coordenadas esféricas é

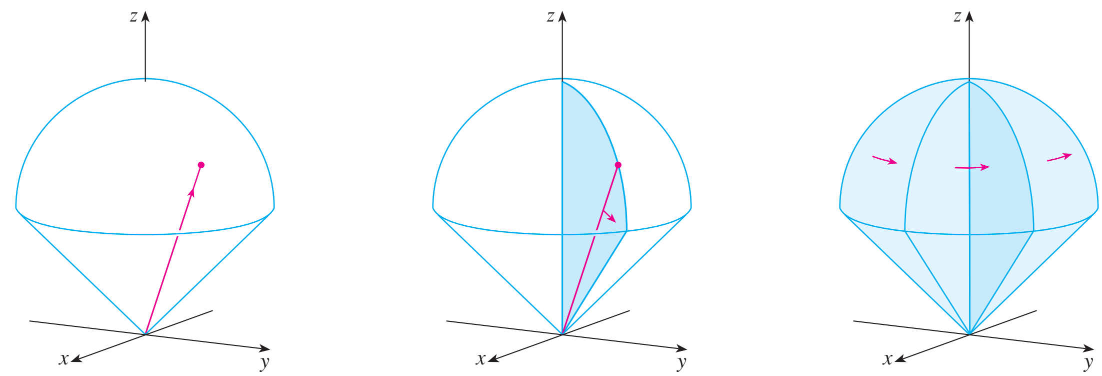
$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos\phi\right\}$$

A Figura 11 mostra como E é apagado se integramos primeiro em relação a ρ, depois em relação a ϕ, e então em relação a θ. O volume de E é

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi\,\cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$



ρ varia de 0 a cos ϕ, enquanto ϕ e θ são constantes.

ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto θ é constante.

θ varia de 0 a 2π.

FIGURA 11

15.9 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(3, \pi/2, 3\pi/4)$

2. (a) $(2, \pi/2, \pi/2)$ (b) $(4, -\pi/4, \pi/3)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para esféricas.

3. (a) $(0, -2, 0)$ (b) $(-1, 1, -\sqrt{2})$

4. (a) $(1, 0, \sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\phi = \pi/3$ **6.** $\rho = 3$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

8. $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

9–10 Escreva a equação em coordenadas esféricas.

9. (a) $z^2 = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + z^2 = 9$

10. (a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ (b) $x + 2y + 3z = 1$

11–14 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $2 \leqslant \rho \leqslant 4, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/3, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $1 \leqslant \rho \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$

13. $\rho \leqslant 1, \quad 3\pi/4 \leqslant \phi \leqslant \pi$

14. $\rho \leqslant 2, \quad \rho \leqslant \operatorname{cossec}\phi$

15. Um sólido está cima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escreva uma descrição do sólido em termos de desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.

16. (a) Determine desigualdades que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas.

(b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva desigualdades que descrevam uma das metades.

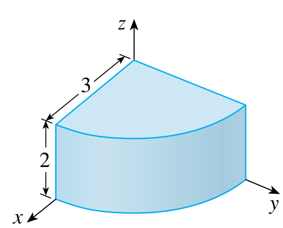
17–18 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi$

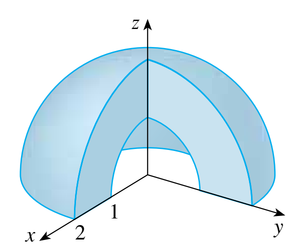
18. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta$

19–20 Escreva a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

19.



20.



21–34 Utilize coordenadas esféricas.

21. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5.

22. Calcule $\iiint_H (9 - x^2 - y^2) \, dV$, onde H é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

23. Calcule $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

24. Calcule $\iiint_E y^2 \, dV$, onde E é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

25. Calcule $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2} \, dV$, onde E é a porção da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ que fica no primeiro octante.

26. Calcule $\iiint_E xyz \, dV$, onde E fica entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

27. Encontre o volume da parte da bola $\rho \leqslant a$ a que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

28. Encontre a distância média de um ponto em uma bola de raio a a seu centro.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com