EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUÇÃO O sólido está acima do disco D cujo limite tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar os quadrados,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(Veja as Figuras 9 e 10.)

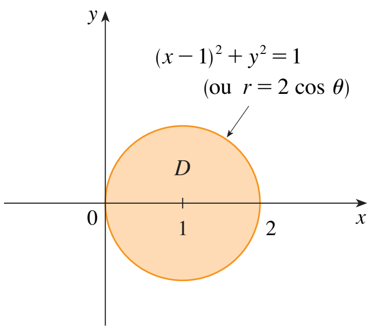


FIGURA 9

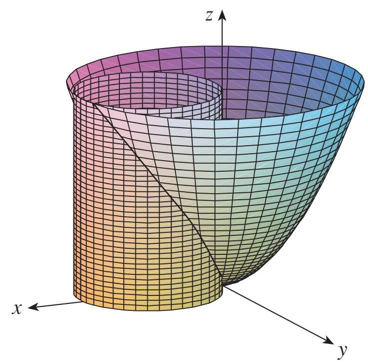


FIGURA 10

Em coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r\cos\theta$, assim, o limite circular fica $r^2 = 2r\cos\theta$ ou $r = 2\cos\theta$. Portanto, o disco D é dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\}$$

e, da Fórmula 3, temos

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

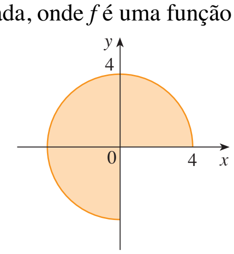
$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right] d\theta$$

$$= 2\left[\tfrac{3}{2}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

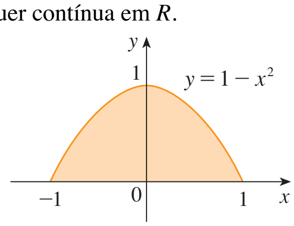
15.4 Exercícios

1–4 Uma região R é mostrada. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares, e escreva $\iint_R f(x, y)\, dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R.

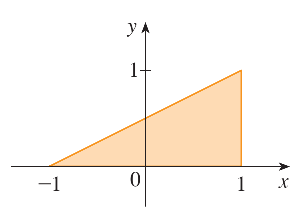
1.



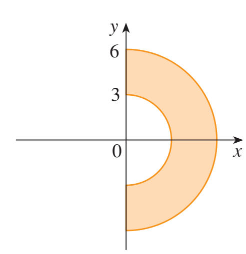
2.



3.



4.



5–6 Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a.

5. $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/4} \int_1^2 r\, dr\, d\theta$

6. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\,\operatorname{sen}\theta} r\, dr\, d\theta$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

7–14 Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

7. $\iint_D x^2y\,dA$, onde D é a metade superior do disco com centro na origem e raio 5

8. $\iint_R (2x - y)\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e as retas $x = 0$ e $y = x$

9. $\iint_R \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3

10. $\iint_R \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}\,dA$, onde R é a região que fica entre os círculos $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$ com $0 < a < b$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y

12. $\iint_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}\,dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2

13. $\iint_R \operatorname{arctg}(y/x)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$

14. $\iint_D x\,dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

15–18 Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

15. Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$

16. A região limitada por ambos os cardioides $r = 1 + \cos\theta$ e $r = 1 - \cos\theta$

17. A região dentro do círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$

18. A região dentro do círculo $r = 1 + \cos\theta$ e fora do círculo $r = 3\cos\theta$

19–27 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

19. Abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$

20. Abaixo do paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ e acima do plano xy

21. Limitado pelo hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e pelo plano $z = 2$

22. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

23. Uma esfera de raio a

24. Limitado pelo paraboloide $z = 1 + zx^2 + zy^2$ e pelo plano $z = 7$ no primeiro octante

25. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Limitado pelos paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

27. Dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ quanto do elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

28. (a) Uma broca cilíndrica de raio r_1 é usada para fazer um furo que passa pelo centro de uma esfera de raio r_2. Determine o volume do sólido em formato de anel resultante.
(b) Expresse o volume da parte (a) em termos da altura h do anel. Observe que o volume depende somente de h e não de r_1 ou r_2.

29–32 Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares.

29. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dy\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2y\,dx\,dy$

31. $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x + y)\,dx\,dy$

32. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

33–34 Expresse a integral dupla em termos de uma integral unidimensional com relação a r. Em seguida, use a calculadora para avaliar a integral correta com quatro casas decimais.

33. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\,dA$, D onde está o disco com centro na origem e raio 1

34. $\iint_D xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dA$, onde D é a porção do disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ que fica no primeiro quadrante

35. Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste para oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina.

36. Um pulverizador agrícola distribui água em um padrão circular de 50 m de raio. Ele fornece água até uma profundidade de e^{-r} metros por hora a uma distância de r metros do pulverizador.
(a) Se $0 < R \leqslant 50$, qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro do círculo de raio R centrada no pulverizador?
(b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora por metro quadrado fornecida à região dentro do círculo de raio R.

37. Encontre o valor médio da função $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ na região anular $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$, onde $0 < a < b$.

38. Seja D o disco com centro na origem e raio a. Qual é a distância média dos pontos em D em relação à origem?

39. Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^x xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

40. (a) Definimos a integral imprópria (sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \pi$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use isto para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

(c) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}\,x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

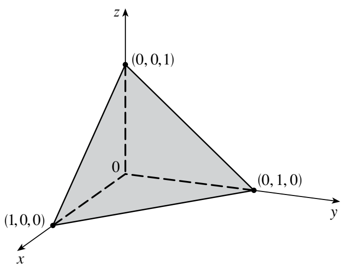
(Esse é um resultado fundamental em probabilidade e estatística.)

41. Utilize o resultado do Exercício 40, parte (c), para calcular as seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$

27. 6 **29.** $\frac{128}{15}$ **31.** $\frac{1}{3}$ **33.** 0, 1,213; 0,713 **35.** $\frac{64}{3}$

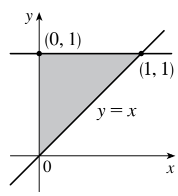
37.



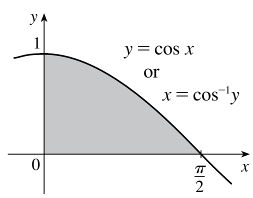
39. 13 984 735 616/14 549 535

41. $\pi/2$

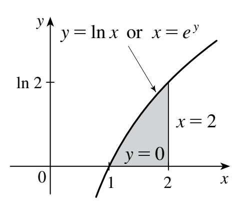
43. $\int_0^1 \int_x^1 f(x, y)\, dy\, dx$



45. $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} f(x, y)\, dx\, dy$



47. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} f(x, y)\, dx\, dy$



49. $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ **51.** $\frac{1}{3}\ln 9$ **53.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ **55.** 1

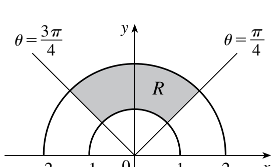
57. $(\pi/16)e^{-1/16} \leqslant \iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA \leqslant \pi/16$ **59.** $\frac{3}{4}$ **63.** 9π

65. $a^2b + \frac{3}{2}ab^2$ **67.** $\pi a^2 b$

EXERCÍCIOS 15.4

1. $\int_0^{3\pi/2} \int_0^4 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$ **3.** $\int_{-1}^{1} \int_0^{(x+1)/2} f(x, y)\, dy\, dx$

5. $3\pi/4$



7. $\frac{1250}{3}$ **9.** $(\pi/4)(\cos 1 - \cos 9)$

11. $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ **13.** $\frac{3}{64}\pi^2$ **15.** $\pi/12$

17. $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **19.** $\frac{16}{3}\pi$ **21.** $\frac{4}{3}\pi$ **23.** $\frac{4}{3}\pi a^3$

25. $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})]$ **27.** $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

29. $\frac{1}{2}\pi(1 - \cos 9)$ **31.** $2\sqrt{2}/3$ **33.** 4,5951

35. 37,5π m^3 **37.** $2/(a+b)$ **39.** $\frac{15}{16}$

41. (a)$\sqrt{\pi}/4$ (b)$\sqrt{\pi}/2$

EXERCÍCIOS 15.5

1. 285 C **3.** $42k$, $\left(2, \frac{85}{28}\right)$ **5.** 6, $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ **7.** $\frac{8}{15}k$, $\left(0, \frac{4}{7}\right)$

9. $L/4$, $(L/2, 16/(9\pi))$ **11.** $\left(\frac{3}{8}, 3\pi/16\right)$ **13.** $\left(0, 45/14\pi\right)$

15. $(2a/5, 2a/5)$ se o vértice é (0, 0) e os lados estão ao longo dos eixos positivos

17. $\frac{64}{315}k$, $\frac{8}{105}k$, $\frac{88}{315}k$

19. $7ka^6/180$, $7ka^6/180$, $7ka^6/90$ se o vértice é (0, 0) e os lados estão ao longo dos eixos positivos

21. $\rho bh^3/3$, $\rho b^3h/3$; $b/\sqrt{3}$, $h/\sqrt{3}$

23. $\rho a^4\pi/16$, $\rho a^4\pi/16$; $a/2$, $a/2$

25. $m = 3\pi/64$, $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{16384\sqrt{2}}{10395\pi}, 0\right)$,

$$I_x = \frac{5\pi}{384} - \frac{4}{105},\ I_y = \frac{5\pi}{384} + \frac{4}{105},\ I_0 = \frac{5\pi}{192}$$

27. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0,375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0{,}1042$

29. (b) (i) $e^{-0,2} \approx 0{,}8187$
(ii) $1 + e^{-1,8} - e^{-0,8} - e^{-1} \approx 0{,}3481$ (c) 2, 5

31. (a) $\approx 0{,}500$ (b) $\approx 0{,}632$

33. (a) $\iint_D (k/20)[20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}]\, dA$, onde D é o disco com raio de 10 km centralizado no centro da cidade
(b) $200\pi k/3 \approx 209k$, $200\left(\pi/2 - \frac{8}{9}\right)k \approx 136k$, na borda

EXERCÍCIOS 15.6

1. $15\sqrt{26}$ **3.** $3\sqrt{14}$ **5.** $12\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

7. $(\pi/6)(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$ **9.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

11. $a^2(\pi - 2)$ **13.** 13,9783 **15.** (a) $\approx 1{,}83$ (b) $\approx 1{,}8616$

17. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln[(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70})]$

19. 3,3213 **23.** $(\pi/6)(101\sqrt{101} - 1)$

EXERCÍCIOS 15.7

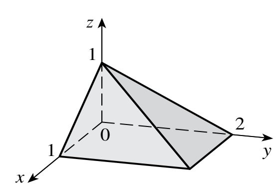
1. $\frac{27}{4}$ **3.** $\frac{16}{15}$ **5.** $\frac{5}{3}$ **7.** $-\frac{1}{3}$ **9.** 4 **11.** $9\pi/8$

13. $\frac{65}{28}$ **15.** $\frac{1}{60}$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $\frac{16}{3}$ **21.** $\frac{8}{15}$

23. (a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$ (b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$

25. 0,985

27.



29. $\int_{-2}^{2} \int_0^{4-x^2} \int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{-1}^{1} \int_0^{4-4z^2} \int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}/2}^{\sqrt{4-y}/2} \int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2} \int_0^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}} \int_0^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

31. $\int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_0^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_0^2 \int_0^{4-2z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_0^4 \int_0^{2-y/2} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2} \int_0^{2-x^2/2} \int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}} \int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$