Logo,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\, dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\Big]_0^1 = \frac{27}{28}$$

Finalmente, observamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Suponha que o campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ seja dado na forma de componente, a equação $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Usamos a Definição 13 para calcular a sua integral de linha ao longo de C:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$
$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \big(x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}\big)\, dt$$
$$= \int_a^b \Big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,z'(t)\Big]\, dt$$

Mas essa última integral é exatamente a integral de linha de $\boxed{10}$. Portanto, temos

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \text{onde } \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}}$$

Por exemplo, a integral $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ do Exemplo 6 poderia ser expressa como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

16.2 Exercícios

1–16 Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

1. $\int_C y^3\, ds$, $\quad C: x = t^3, \quad y = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

2. $\int_C xy\, ds$, $\quad C: x = t^2, \quad y = 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\int_C xy^4\, ds$, $\quad C$ é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.

4. $\int_C x \operatorname{sen} y\, ds$, $\quad C$ é o segmento de reta que liga $(0, 3)$ a $(4, 6)$.

5. $\int_C \big(x^2y^3 - \sqrt{x}\big)\, dy$, C é o arco da curva $y = \sqrt{x}$ de $(1, 1)$ a $(4, 2)$.

6. $\int_C xe^y\, dx$, C é o arco da curva $x = e^y$ de $(1, 0)$ a $(e, 1)$.

7. $\int_C (x + 2y)\, dx + x^2\, dy$, $\quad C$ consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 1)$ e de $(2, 1)$ a $(3, 0)$.

8. $\int_C x^2 dy + y^2\, dy$, $\quad C$ consiste na metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2, 0)$ a $(0, 2)$ e no segmento de reta de $(0, 2)$ a $(4, 3)$.

9. $\int_C xyz\, ds$, $\quad C: x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = t, \quad z = -2\cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

10. $\int_C xyz^2\, ds$, $\quad C$ é o segmento de reta de $(-1, 5, 0)$ a $(1, 6, 4)$.

11. $\int_C xe^{yz}\, ds$, $\quad C$ é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

12. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$, $\quad C: x = t, \quad y = \cos 2t, \quad z = \operatorname{sen} 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

13. $\int_C xye^{yz}\, dy$, $\quad C: x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\int_C z\,dx + x\,dy + y dz$, $\quad C: x = t^2, \quad y = t^3, \quad z = t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

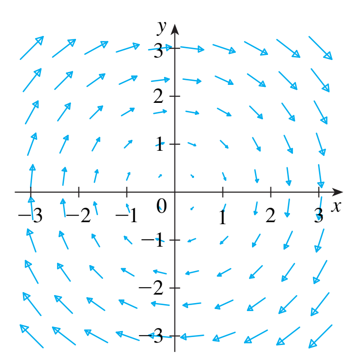
15. $\int_C z^2\, dx + x^2\, dy + y^2\, dz$, $\quad C$ consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 0)$ a $(4, 1, 2)$.

16. $\int_C (y + z)\,dx + (x + z)\, dy, + (x + y)\, dz$, $\quad C$ consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 1)$ e de $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 2)$.

17. Seja $\mathbf{F}$ o campo vetorial mostrado na figura.

(a) Se C_1 é o segmento de reta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.

(b) Se C_2 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.

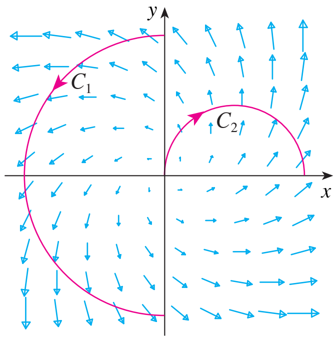


É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

18. A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}$ e duas curvas C_1 e C_2. As integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.



19–22 Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j}$, $\quad \mathbf{r}(t) = 11t^4\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\,\mathbf{i} + (y - z)\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

23–26 Use uma calculadora ou um SCA para calcular a integral de linha correta até a quarta casa decimal.

23. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t^2}\,\mathbf{j}$, $1 \leqslant t \leqslant 2$

24. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + z \operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 5t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

25. $\int_C x \operatorname{sen}(y + z)\,ds$, onde C tem equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 5$

26 $\int_C ze^{-xy}\,ds$, onde C tem equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

SCA **27–28** Use um gráfico do campo vetorial $\mathbf{F}$ e a curva C para dizer se a integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Em seguida, calcule a integral.

27. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido horário de $(2, 0)$ a $(0, -2)$

28. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{j}$,

C é a parábola $y = 1 + x^2$ de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$

29. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(b) Ilustre a parte (a) utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = 0$, $1/\sqrt{2}$ e 1 (como na Figura 13).

30. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

(b) Ilustre a parte (a) utilizando um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = \pm 1$ e $\pm \frac{1}{2}$ (como na Figura 13).

SCA **31.** Encontre o valor exato de $\int_C x^3y^2z\,ds$, onde C é a curva com equações paramétricas $x = e^{-t} \cos 4t$, $y = e^{-t} \operatorname{sen} 4t$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

32. (a) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientada no sentido anti-horário.

SCA (b) Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar o campo de força e o círculo na mesma tela. Use essa figura para explicar sua resposta para a parte (a).

33. Um arame fino é entortado no formato da semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$. Se a densidade linear for uma constante k, determine a massa e o centro de massa do arame.

34. Um arame fino tem a forma da parte que está no primeiro quadrante da circunferência com centro na origem e raio a. Se a função densidade for $\rho(x, y) = kxy$, encontre a massa e o centro de massa do arame.

35. (a) Escreva fórmulas semelhantes à Equação 4 para o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um arame fino com forma da curva espacial C se o fio tem função densidade $\rho(x, y, z)$.

(b) Determine o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade for uma constante k.

36. Determine a massa e o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade em qualquer ponto for igual ao quadrado da sua distância do ponto à origem.

37. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y)$ está sobre uma curva plana C, seus **momentos de inércia** em relação aos eixos x e y são definidos por

$$I_x = \int_C y^2\rho(x, y)\,ds \qquad I_y = \int_C x^2\rho(x, y)\,ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exemplo 3.

38. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y, z)$ está sobre uma curva espacial C, seus **momentos de inércia** em relação aos eixos x, y e z são definidos por

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,ds$$
$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,ds$$
$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exercício 35.

39. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (y + 2)\,\mathbf{j}$ sobre um objeto que se move sobre um arco da cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

40. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + ye^x\,\mathbf{j}$ em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2 + 1$ de $(1, 0)$ a $(2, 1)$.

41. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x - y^2, y - z^2, z - x^2 \rangle$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta de $(0, 0, 1)$ a $(2, 1, 0)$.

42. A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada em um ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, onde K é uma constante. (Veja o Exemplo 5 da Seção 16.1.) Encontre o trabalho feito quando a partícula se move ao longo de uma linha reta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.

43. A posição de um objeto com massa m no instante t é $\mathbf{r}(t) = at^2\,\mathbf{i} + bt^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
(a) Qual é a força que age sobre o objeto no instante t?
(b) Qual é o trabalho realizado pela força durante o intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant 1$?

44. Um objeto com massa m se move com função posição $\mathbf{r}(t) = a \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + b \cos t\,\mathbf{j}, ct\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Encontre o trabalho realizado sobre o objeto durante este período de tempo.

45. Um homem de 160 libras carrega uma lata de 25 libras de tinta subindo uma escada helicoidal que circunda um silo com um raio de 20 pés. Se o silo é de 90 pés de altura e o homem faz exatamente três rotações completas para subir ao topo, de quanto é o esforço feito pelo homem contra a gravidade?

46. Suponha que exista um furo na lata de tinta do Exercício 45 e 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo e uniforme durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?

47. (a) Mostre que um campo de força constante realiza trabalho nulo sobre uma partícula que dá uma única volta completa uniformemente na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
(b) Isso também é verdadeiro para um campo de força $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, onde k é uma constante e $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$?

48. A base de uma cerca circular com raio de 10 m é dada por $x = 10 \cos t$, $y = 10 \operatorname{sen} t$. A altura da cerca na posição (x, y) é dada pela função $h(x, y) = 4 + 0{,}01(x^2 - y^2)$, de modo a altura varia de 3 m a 5 m. Suponha-se que 1 L de tinta cubra 100 m². Faça um esboço da cerca e determine de quanta tinta você precisará para pintar os dois lados da cerca.

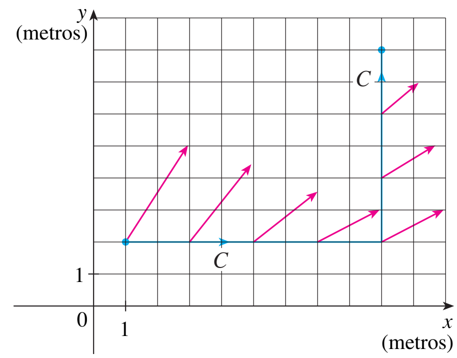
49. Se C é uma curva suave dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, e $\mathbf{v}$ é um vetor constante, mostre que

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot [\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)]$$

50. Se C é uma curva suave dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, mostre que

$$\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\left[|\mathbf{r}(b)|^2 - |\mathbf{r}(a)|^2\right]$$

51. Um objeto se move sobre a curva C, mostrada na figura, de (1, 2) a (9, 8). Os comprimentos dos vetores do campo de força $\mathbf{F}$ são medidos em newtons pela escala nos eixos. Estime o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre o objeto.

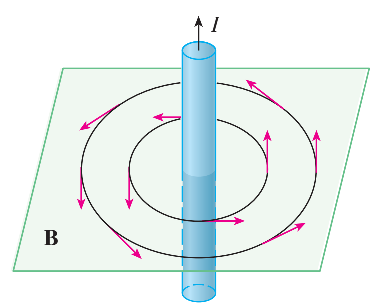


52. Experiências mostram que uma corrente contínua I em um fio comprido produz um campo magnético $\mathbf{B}$ que é tangente a qualquer círculo em um plano perpendicular ao fio cujo centro seja o eixo do fio (como na figura). A *Lei de Ampère* relaciona a corrente elétrica ao campo magnético criado e afirma que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

onde I é a corrente total que passa por qualquer superfície limitada por uma curva fechada C, e μ_0 é uma constante chamada permeabilidade no vácuo. Tomando C como um círculo de raio r, mostre que o módulo $B = |\mathbf{B}|$ do campo magnético a uma distância r do centro do fio é dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Lembre-se, da Seção 5.3, no Volume I, que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

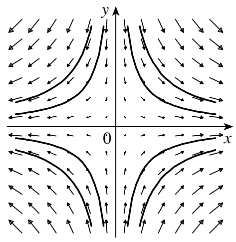
onde F' é contínua em $[a, b]$. A Equação 1 é também chamada Teorema da Variação Total: a integral de uma taxa de variação é a variação total.

Se consideramos o vetor gradiente ∇f de uma função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f, então o teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

$\boxed{2}$ **Teorema** Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

35. (a)



$y = C/x$

(b) $y = 1/x$, $x > 0$

EXERCÍCIOS 16.2

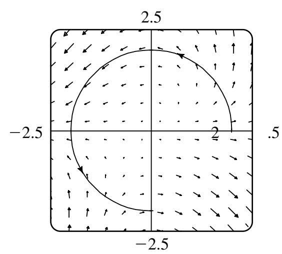
1. $\frac{1}{54}(145^{3/2} - 1)$ **3.** 1638,4 **5.** $\frac{243}{8}$ **7.** $\frac{5}{2}$

9. $\sqrt{5}\,\pi$ **11.** $\frac{1}{12}\sqrt{14}\,(e^6 - 1)$ **13.** $\frac{2}{5}(e - 1)$ **15.** $\frac{35}{3}$

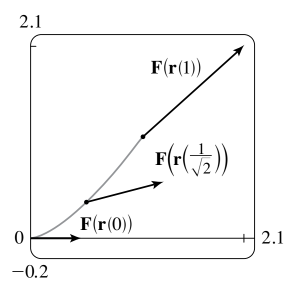
17. (a) Positiva (b) Negativa **19.** 45

21. $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ **23.** 1,9633 **25.** 15,0074

27. $3\pi + \frac{2}{3}$



29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$ (b)



31. $\frac{172\,704}{5\,632\,705}\sqrt{2}(1 - e^{-14\pi})$ **33.** $2\pi k$, $(4/\pi, 0)$

35. (a) $\bar{x} = (1/m)\int_C x\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{y} = (1/m)\int_C y\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{z} = (1/m)\int_C z\rho(x, y, z)\,ds$, onde $m = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$
(b) $(0, 0, 3\pi)$

37. $I_x = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\right)$, $I_y = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)$ **39.** $2\pi^2$ **41.** $\frac{7}{3}$

43. (a) $2ma\,\mathbf{i} + 6mbt\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (b) $2ma^2 + \frac{9}{2}mb^2$

45. $\approx 1{,}67 \times 10^4$ pés-lb **47.** (b) Sim **51.** ≈ 22 J

EXERCÍCIOS 16.3

1. 40 **3.** $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$

5. Não conservativo **7.** $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$

9. $f(x, y) = x \ln y + x^2y^3 + K$

11. (b) 16 **13.** (a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ (b) 2

15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a) $f(x, y, z) = ye^{xz}$ (b) 4 **19.** 2

21. Não importa qual curva é escolhida.

23. 30 **25.** Não **27.** Conservativo

31. (a) Sim (b) Sim (c) Sim

33. (a) Não (b) Sim (c) Sim

EXERCÍCIOS 16.4

1. 8π **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** 12 **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** -24π **11.** $-\frac{16}{3}$

13. 4π **15.** $-8e + 48e^{-1}$ **17.** $-\frac{1}{12}$ **19.** 3π **21.** (c) $\frac{9}{2}$

23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ se a região é a porção do disco $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro quadrante

27. 0

EXERCÍCIOS 16.5

1. (a) $-x^2\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz

3. (a) $ze^x\,\mathbf{i} + (xye^z - yze^x)\,\mathbf{j} - xe^z\,\mathbf{k}$ (b) $y(e^z + e^x)$

5. (a) $\mathbf{0}$ (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7. (a) $\langle -e^y \cos z, -e^z \cos x, -e^x \cos y\rangle$
(b) $e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} z + e^z \operatorname{sen} x$

9. (a) Negativa (b) rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

11. (a) Zero (b) rot $\mathbf{F}$ pontos na direção negativa de z

13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ **15.** Não conservativo

17. $f(x, y, z) = xe^{yz} + K$ **19.** Não

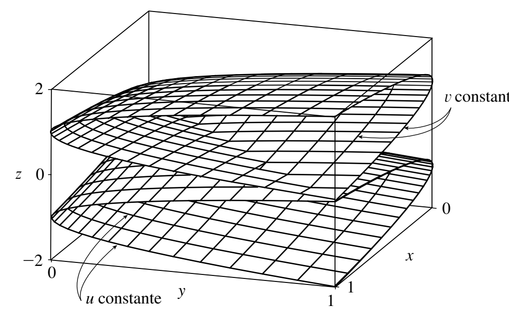
EXERCÍCIOS 16.6

1. P: não; Q: sim

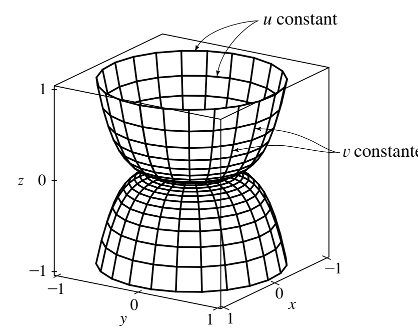
3. Plano por (0, 3, 1) contendo os vetores $\langle 1, 0, 4\rangle$, $\langle 1, -1, 5\rangle$

5. Paraboloide hiperbólico

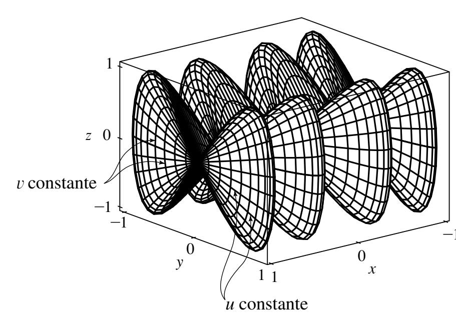
7.



8.



11.



13. IV **15.** II **17.** III

19. $x = u$, $y = v - u$, $z = -v$

21. $y = y$, $z = z$, $x = \sqrt{1 + y^2 + \frac{1}{4}z^2}$

23. $x = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$,
$z = 2 \cos \phi$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
[ou $x = x$, $y = y$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 2$]

25. $x = x$, $y = 4 \cos \theta$, $z = 4 \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

29. $x = x$, $y = e^{-x} \cos \theta$,
$z = e^{-x} \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant x \leqslant 3$,
$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$