REGRAS DE EQUIVALÊNCIA EM INFERÊNCIA

Lógica Matemática



A REGRA DE SUBSTITUIÇÃO

- X Há muitos argumentos cuja validade não se pode demostrar, verificar ou testar com o uso exclusivo das Dez Regras de Inferência dadas anteriormente, sendo necessário neste caso fazer uso de um princípio de inferência adicional, a "Regra da substituição" de proposições equivalentes.
- X A regra de substituição diz:
- X Uma proposição qualquer P ou apenas uma parte de P pode ser substituída por uma proposição equivalente, e a proposição Q que assim se obtém é equivalente à P.

Equivalências Notáveis

As seguintes proposições são equivalentes e podem substituir-se mutuamente: X

$$p \Leftrightarrow p \land p$$

i)
$$p \Leftrightarrow p \land p$$
 ii) $p \Leftrightarrow p \lor p$

i)
$$p \land q \Leftrightarrow q \land p$$

i)
$$p \land q \Leftrightarrow q \land p$$
 ii) $p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$

i)
$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

ii)
$$p \lor (q \lor r) \Leftrightarrow (p \lor q) \lor r$$

i)
$$p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$$

ii)
$$p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$$

$$p \Leftrightarrow \neg \neg p$$

Equivalências Notáveis

i)
$$\neg (p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$$

ii)
$$\neg (p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$$

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \lor q$$

i)
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$$

ii)
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$$

$$p \to q \iff \neg q \to \neg p$$

$$p \land q \rightarrow r \iff p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

X Estas equivalências notáveis constituem dez regras de inferência adicionais que se usam para demonstrar, verificar ou testar a validade de argumentos mais complexos.

Uso das Equivalências

- **x** Uma observação importante deve ser feita no modo de aplicar as dez primeiras regras de inferência e as dez regras de equivalência.
- * As regras de inferência só podem ser aplicadas a linhas completas de uma prova, demonstração ou dedução, enquanto, as regras de equivalência podem ser aplicadas tanto a linhas completas como a partes dessas linhas de acordo com a regra de substituição.

DEFINIÇÃO

X Dado um argumento $P_1,P_2,\dots,P_n\vdash Q$, chama-se demonstração ou dedução de Q, a partir das premissas P_1,P_2,\dots,P_n , todas sequência finita de proposições X_1,X_2,\dots,X_k tais que X_i ou é uma premissa ou resulta de proposições anteriores da sequência pelo uso de uma regra de inferência e de tal modo que a última proposição X_k seja a conclusão Q do argumento dado.

EXEMPLO 1

x 1) Demonstrar que é válido o seguinte argumento:

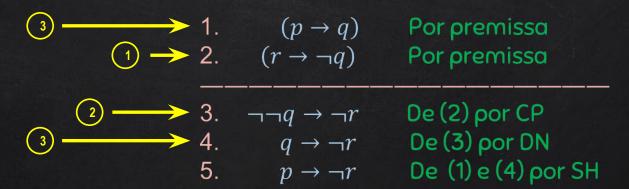
$$(p \rightarrow \neg q), \qquad q \qquad \vdash \quad \neg p$$

1.
$$(p \rightarrow \neg q)$$
 Por premissa
2. q Por premissa
2. q Por premissa
3. $\neg \neg q \rightarrow \neg p$ De (1) por CP
4. $q \rightarrow \neg p$ De (3) por DN
5. $\neg p$ De (4) e (2) por MP

EXEMPLO 2

2) Demonstrar que é válido o seguinte argumento:

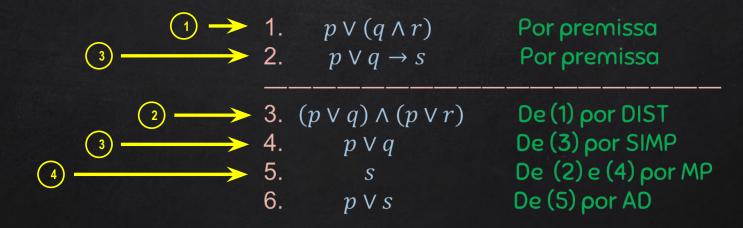
$$(p \rightarrow q), \qquad (r \rightarrow \neg q) \qquad \vdash \qquad (p \rightarrow \neg r)$$



EXEMPLO 3

x 3) Demonstrar que é válido o seguinte argumento:

$$(p \lor (q \land r)), (p \lor q \rightarrow s) \vdash (p \lor s)$$



EXEMPLO 4

x 4) Demonstrar que é válido o seguinte argumento:

$$(p \lor q \to r \land s), \quad \neg s \vdash \neg q$$

1.
$$p \lor q \rightarrow r \land s$$
 Por premissa

2. $\neg s$ Por premissa

3. $\neg r \lor \neg s$ De (2) por AD

4. $\neg (r \land s)$ De (3) por DM

5. $\neg (p \lor q)$ De (1) e (4) por MT

6. $\neg p \land \neg q$ De (5) por DM

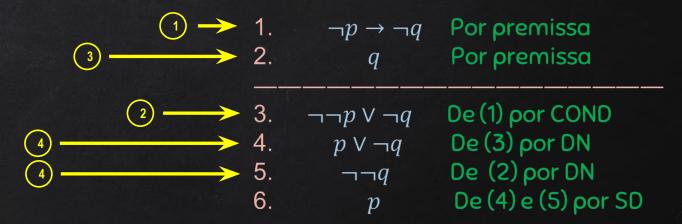
7. $\neg q$ De (6) por SIMP

EXEMPLO 5

- **x** 5) Demonstrar a validade do seguinte argumento:
- o "Se Londres não fica na Bélgica, então Paris não fica na França. Mas Paris fica na França. Logo, Londres fica na Bélgica".
- X Temos assim a prova do argumento:

- **x** Demonstração:
 - X Representando as proposições como:
 - \circ p: "Londres fica na Bélgica"
 - o q: "Paris fica na França"
 - X Temos assim o argumento na forma simbólica:

$$(\neg p \rightarrow \neg q), \quad q \vdash p$$



EXEMPLO 6

x 6) Demonstrar a validade do seguinte argumento:

$$(p \lor \neg q) \lor r$$
, $\neg p \lor (q \land \neg p) \vdash q \rightarrow r$

1.
$$(p \lor \neg q) \lor r$$
 Por premissa
2. $\neg p \lor (q \land \neg p)$ Por premissa

EXEMPLO 7

x 7) Demonstrar a validade do argumento:

$$(p \rightarrow \neg q), \qquad r \rightarrow q, \qquad r \vdash \neg p$$

1.
$$p \rightarrow \neg q$$
Por premissa2. $r \rightarrow q$ Por premissa3. r Por premissa

EXEMPLO 8

x 8) Demonstrar a validade do argumento:

$$(p \rightarrow q)$$
, $q \leftrightarrow s$, $t \lor (r \land \neg s) \vdash p \rightarrow t$

- 1. $p \rightarrow q$ Por premissa
- 2. $q \leftrightarrow s$ Por premissa
- 3. $t \lor (r \land \neg s)$ Por premissa

EXEMPLO 9

- **x** 9) Demonstrar a validade do argumento:
- "Se estudo, então não sou reprovado em Física. Se não jogo basquete, então estudo. Mas fui reprovado em Física. Portanto, joguei basquete".
- **x** Demonstração:
- X Representando as proposições como:
- p:"Estudo"
- o q: "Sou reprovado em Física"
- \circ r: "Jogo Basquete"
- X Temos o argumento na forma simbólica:

$$(p \rightarrow \neg q), \qquad (\neg r \rightarrow p), \qquad q \vdash r$$

X Temos assim a prova do argumento:

1.
$$p \rightarrow \neg q$$
 Por premissa

2.
$$\neg r \rightarrow p$$
 Por premissa

EXEMPLO 10

10) Demonstrar a validade do argumento: X

$$p \lor (q \land r), \quad p \to s, \quad s \to r \vdash r$$

Demonstração:

- 1. $p \lor (q \land r)$ Por premissa

2. $p \rightarrow s$ Por premissa

3. $s \rightarrow r$ Por premissa

Inconsistência

DEFINIÇÃO

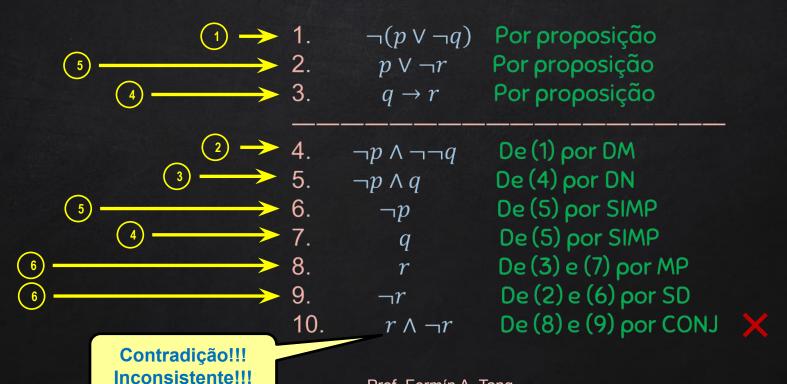
- X Duas ou mais proposições que não podem ser simultaneamente verdadeiras dizem-se inconsistentes. Também se diz que formam um conjunto inconsistente de proposições.
- Y Um argumento se diz inconsistente se suas premissas não podem ser simultaneamente verdadeiras.
- Pode-se demonstrar que um conjunto de proposições é inconsistente deduzindo do seu conjunto uma contradição qualquer, mediante regras de inferência.

Inconsistência

EXEMPLO 1

x Demonstrar que as três proposições dadas são inconsistentes:

$$\neg (p \lor \neg q), \qquad p \lor \neg r, \qquad q \to r$$



INCONSISTÊNCIA

EXEMPLO 2

 (2) Demonstrar que é inconsistente o conjunto de proposições:

1.
$$x = 1 \rightarrow y < x$$

2. $y < x \rightarrow y = 0$
3. $\neg (y = 0 \lor x \ne 1)$

- **x** Demonstração:
- X Neste caso, devemos converter as expressões matemáticas em proposições utilizando símbolos proposicionais.

$$p: x = 1$$
 $r: y = 0$ $q: y < x$

X Substituindo temos:

1.
$$p \rightarrow q$$
Por premissa2. $q \rightarrow r$ Por premissa3. $\neg (r \lor \neg p)$ Por premissa

Inconsistência

Exemplo 3

x (3) Demonstrar que são inconsistentes as três proposições:

$$\neg p \lor \neg q$$
, $p \land s$, $\neg s \lor r$, $r \rightarrow r \land q$

```
1. \neg p \lor \neg q Por proposição

2. p \land s Por proposição

3. \neg s \lor r Por proposição

4. r \rightarrow r \land q Por proposição
```

Inconsistência

EXEMPLO 4

x (4) Demonstrar que é inconsistente o conjunto de proposições:

$$\neg (p \lor q), \qquad r \to s, \qquad \neg q \land r$$

- 1. $\neg (p \lor q)$ Por premissa
- 2. $r \rightarrow s$ Por premissa
- 3. $\neg q \land r$ Por premissa

REFERÊNCIAS

Matemática. Capítulo 12. Validade Mediante Regras de Inferência e Equivalências. Editora Alta Books. Rio de Janeiro. 2013.