Terceira Prova de Cálculo III – 30/06/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. Use a fórmula da área da superfície parametrizada para calcular a área do cone

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

entre $z = 0$ e $z = 1$. *Dica do Mestre: use a parametrização*

$$\vec{r}(\theta, z) = (z\cos\theta,\ z\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z).$$

Solução:

$$r_\theta \times r_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -z\,\mathrm{sen}\,\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 1 \end{vmatrix} = (z\cos\theta,\ z\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -z),$$

$$A = \iint_S \|r_\theta \times r_z\|\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}\, z\, dz\, d\theta = \sqrt{2}\,\pi.$$

2. Seja

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

e P o paralelogramo parametrizado por

$$\vec{r}(u, v) = (u + v,\ u - v,\ 1 + 2u + v), \qquad 0 \le u \le 2, \qquad 0 \le v \le 1.$$

Calcule a integral de supefície de $f(x, y, z)$ em P.

Solução:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3,\ 1,\ -2).$$

$$\begin{aligned} &\iint_P (x + y + z)\, \|r_u \times r_v\|\, dS = \\ &\qquad = \int_0^1 \int_0^2 [(u + v) + (u - v) + (1 + 2u + v)]\, \sqrt{14}\, du\, dv \\ &\qquad = \sqrt{14} \int_0^1 \int_0^2 1 + 4u + v\, du\, dv = 11\sqrt{14}. \end{aligned}$$

3. Considere Ω a superfície dada por

$$z = (x^3 - x)(1 - y^2),$$

com $-1 \leq x \leq 0$ e $-1 \leq y \leq 1$. Seja

$$\vec{F} = (1,\, 1,\, -3x^2y^2 - 2x^3y).$$

Calcule $\displaystyle\iint_\Omega \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Solução:

$$\vec{r}(x, y) = \big(x,\, y,\, (x^3 - x)(1 - y^2)\big),$$

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & (3x^2 - 1)(1 - y^2) \\ 0 & 1 & (x^3 - x)(-2y) \end{vmatrix} = (-3x^2 + 3x^2y^2 - y^2 + 1,\, 2x^3y - 2xy,\, 1),$$

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_\Omega \vec{F} \cdot (r_x \times r_y)\, dS = \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{0} (1,\, 1,\, -3x^2y^2 - 2x^3y) \cdot (-3x^2 + 3x^2y^2 - y^2 + 1,\, 2x^3y - 2xy,\, 1)\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{0} (-3x^2 + \cancel{3x^2y^2} - y^2 + 1) + (\cancel{2x^3y} - 2xy) + (-\cancel{3x^2y^2} - \cancel{2x^3y})\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{0} -3x^2 - y^2 + 1 - 2xy\, dx\, dy = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

4. Considere $R \subset \mathbb{R}^2$ o retângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(3, 0)$ e $(3, 2)$. Seja

$$\vec{F} = (ye^{2x},\, x^3 + y^2 + 2).$$

Calcule $\displaystyle\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde ∂R é percorrido em sentido anti-horário (orientação positiva).

Solução:

Pelo Teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dS = \qquad \left(\vec{F} = (P,\, Q)\right) \\
&= \int_0^2 \int_0^3 3x^2 - e^{2x}\, dx\, dy = 55 - e^6.
\end{aligned}$$

5. Considere C a fatia de cilindro parametrizada por $\vec{s}(r, \theta, z) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$, com $0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le z \le 4$. Seja

$$\vec{F} = (x^2,\ \mathrm{sen}(x^z),\ yz^2).$$

Calcule $\displaystyle\oiint_{\partial C} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, onde ∂C segue orientação positiva.

Solução:

Pelo Teorema de Ostrogradski–Gauss,

$$\oiint_{\partial C} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_C \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \qquad \left(\vec{F} = (P,\ Q,\ R)\right)$$
$$= \iiint_C 2x + 0 + 2yz\, dV = \int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r\cos\theta + 2rz\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$
$$= 64.$$

6. Qual o nome do matemático nascido no Império Russo (atual Ucrânia) que demonstrou, pela primeira vez, o caso geral do Teorema da Divergência?

Solução:

Ostrogradski (ou Ostrogradsky).