tros e as componentes de **v**, em metros por segundo. Encontre a taxa de vazão para fora do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$.

45. Use a Lei de Gauss para achar a carga contida no hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}.$$

46. Use a Lei de Gauss para achar a carga dentro de um cubo com vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$ se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

47. A temperatura no ponto (x, y, z) em uma substância com uma condutividade $K = 6{,}5$ é $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine a taxa de transmissão de calor nessa substância para dentro superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

48. A temperatura em um ponto de uma bola com condutividade K é inversamente proporcional à distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

49. Seja $\mathbf{F}$ um campo inverso do quadrado, ou seja, $\mathbf{F}(r) = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Mostre que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de uma esfera S com o centro de origem é independente do raio de S.

16.8 Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha em torno de sua curva limite plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral em torno da curva da fronteira S (que é uma curva no espaço). A Figura 1 mostra uma superfície orientada com vetor normal unitário **n**. A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira** ***C*** mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de **n**, então a superfície estará sempre à sua esquerda.

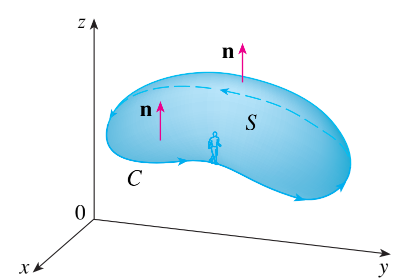


FIGURA 1

Teorema de Stokes Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds \qquad \text{e} \qquad \iint_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha em torno da curva fronteira de S da componente tangencial de $\mathbf{F}$ é igual à integral de superfície sobre S da componente normal do rotacional de $\mathbf{F}$.

A curva na fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com frequência denotada por ∂S, de modo que o Teorema de Stokes pode ser escrito como

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Existe uma analogia entre o Teorema de Stokes, o de Green e o Teorema Fundamental do Cálculo. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo derivadas do lado esquerdo da Equação 1 (lembre-se de que rot **F** é uma espécie de derivada de **F**) e do lado direito, envolvendo valores de **F** calculados somente na *fronteira* de S.

De fato, no caso especial em que a superfície S é plana e pertence ao plano xy, com orientação ascendente, o vetor normal unitário é **k**, a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\,dA$$

Essa é precisamente a forma vetorial do Teorema de Green dada na Equação 16.5.12. Assim, vemos que o Teorema de Green é realmente um caso especial do Teorema de Stokes.

Apesar de o Teorema de Stokes ser muito difícil de demonstrar no caso geral, podemos fazer uma demonstração quando S for um gráfico e **F**, S e C forem bem comportados.

George Stokes

O Teorema de Stokes tem seu nome em homenagem ao físico matemático irlandês sir George Stokes (1819-1903). Stokes era professor na Universidade de Cambridge (ele detinha a mesma cadeira de Newton, Lucasian Professor of Mathematics) e se sobressaiu por seus estudos sobre vazão de fluidos e luz. O teorema que hoje chamamos Teorema de Stokes foi, na verdade, descoberto pelo físico escocês sir William Thompson (1824- 1907, conhecido como lorde Kelvin). Stokes soube desse teorema por uma carta de Thomson em 1850 e pediu a seus estudantes que o demonstrassem em um exame em Cambridge, em 1854. Não se sabe se algum de seus estudantes foi capaz de fazê-lo.

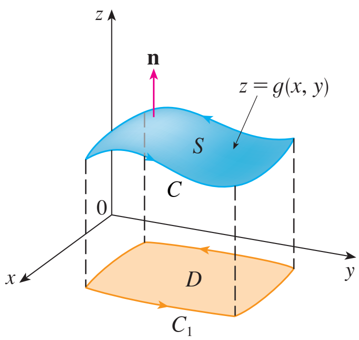


FIGURA 2

DEMONSTRAÇÃO DE UM CASO ESPECIAL DO TEOREMA DE STOKES Admitiremos que a equação de S é $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, onde g tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, e que D seja uma região plana simples cuja curva fronteira C_1 corresponde a C. Se a orientação de S for ascendente, a orientação positiva de C corresponde à orientação positiva de C_1. (Veja a Figura 2.) Foi-nos dado que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, onde as derivadas parciais de P, Q e R são contínuas.

Como S é um gráfico de uma função, podemos aplicar a Fórmula 16.7.10 com $\mathbf{F}$ substituído por rot $\mathbf{F}$. O resultado é

$$\boxed{2} \quad \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dA$$

onde as derivadas parciais de P, Q e R são calculadas em $(x, y, g(x, y))$. Se

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

é a representação parametrizada de C_1, então a representação parametrizada de C é

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = g(x(t), y(t)) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Isso nos permite, com ajuda da Regra da Cadeia, calcular a integral de linha como segue:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{dz}{dt} \right) dt \\
&= \int_a^b \left[P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt \\
&= \int_a^b \left[\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\
&= \int_{C_1} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Green no último passo. Então, utilizando novamente a Regra da Cadeia e lembrando que P, Q e R são funções de x, y e z e que z é, por sua vez, função de x e y, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \Bigg[&\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \right) \\
&- \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + R \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \right) \Bigg] dA
\end{aligned}$$

Quatro dos termos da integral dupla se cancelam, e os seis restantes podem ser rearranjados para que coincidam com o lado direito da Equação 2. Portanto

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ e C é a curva da interseção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C no sentido anti-horário quando observado de cima.)

SOLUÇÃO A curva C (uma elipse) está mostrada na Figura 3. Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ poder ser calculada diretamente, é mais simples usar o Teorema de Stokes. Vamos inicialmente calcular

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\,\mathbf{k}$$

Apesar de existirem muitas superfícies com fronteira C, a escolha mais conveniente é a região elíptica S no plano $y + z = 2$ cuja fronteira é C. Se orientarmos S para cima, em seguida, C tem a orientação induzida positiva. A projeção D de S no plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e portanto, usando a Equação 16.7.10 com $z = g(x, y) = 2 - y$, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \text{ sen } \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3} \text{ sen } \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \text{ sen } \theta \right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi$$

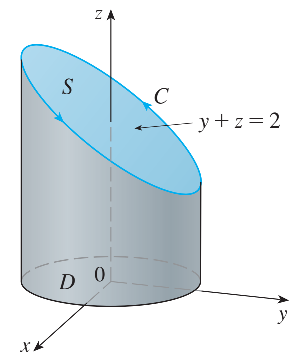


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Use o Teorema de Stokes para calcular a integral $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy. (Veja a Figura 4.)

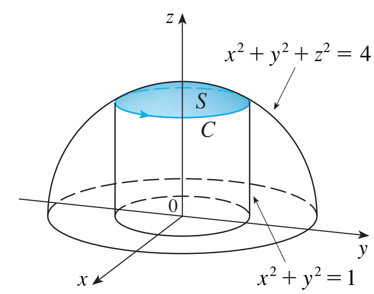


FIGURA 4

SOLUÇÃO Para acharmos a curva fronteira C, resolvemos as equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 1$. Subtraindo, obtemos $z^2 = 3$ e, portanto, $z = \sqrt{3}$ (uma vez que $z > 0$). Então C é a circunferência dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. A equação vetorial de C é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen } t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Assim,

$$\mathbf{r}'(t) = -\text{sen } t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Temos também

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\text{ sen } t\,\mathbf{j} + \cos t \text{ sen } t\,\mathbf{k}$$

Portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3}\cos t \text{ sen } t + \sqrt{3}\text{ sen } t \cos t \right) dt$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$

Observe que no Exemplo 2, calculamos uma integral de superfície simplesmente conhecendo os valores de $\mathbf{F}$ na fronteira C. Isso significa que, se tivermos outra superfície orientada com a mesma fronteira C, obteremos o mesmo valor para a integral de superfície!

Em geral, se S_1 e S_2 são superfícies orientadas com mesma fronteira orientada C e ambas satisfazem as hipóteses do Teorema de Stokes, então

3 $$\iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Esse fato é muito útil quando for difícil integrar sobre uma das superfícies, mas for mais fácil integrar sobre a outra.

Usaremos agora o Teorema de Stokes para tentar explicar o significado do vetor rotacional. Suponha que C seja uma curva fechada orientada e $\mathbf{v}$ represente o campo de velocidade de um fluido. Considere a integral de linha

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

e recorde que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é a componente do vetor $\mathbf{v}$ na direção do vetor tangente unitário $\mathbf{T}$. Isto significa que quanto mais perto a direção de $\mathbf{v}$ é a direção de $\mathbf{T}$, maior é o valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Assim, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ é a medida da tendência de o fluido se mover em torno de C e é chamada **circulação** de $\mathbf{v}$ em torno de C. (Veja a Figura 5.)

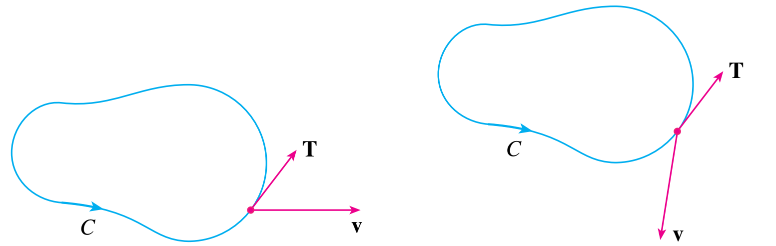


FIGURA 5 (a) $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} > 0$, circulação positiva (b) $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} < 0$, circulação negativa

Seja agora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do fluido e seja S_a um pequeno círculo com raio a e centro P_0. Então $(\text{rot } \mathbf{F})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{F})(P_0)$ para todos os pontos P em S_a porque rot $\mathbf{F}$ é contínuo. Então, pelo Teorema de Stokes, temos a seguinte aproximação do fluxo em torno do círculo fronteira C_a:

$$\int_{C_a} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}\cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0)\cdot \mathbf{n}(P_0)\, dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0)\cdot \mathbf{n}(P_0)\pi a^2$$

Essa aproximação se torna melhor quando $a \to 0$ e temos

$$\boxed{4} \qquad \text{rot } \mathbf{v}(P_0)\cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\pi a^2}\int_{C_a} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$$

Imagine uma roda pequena formada por pás colocadas em um fluido em um ponto P, como na Figura 6; essa roda vai girar mais rapidamente quando seu eixo for paralelo a rot $\mathbf{v}$.

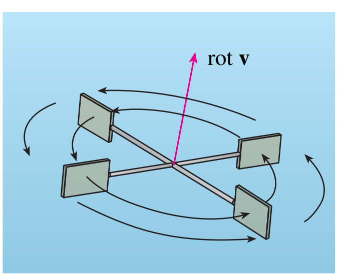


FIGURA 6

A Equação 4 fornece a relação entre o rotacional e a circulação. Ela mostra que rot $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ é uma medida do efeito de rotação do fluido em torno do eixo $\mathbf{n}$. O efeito de ondulação é maior sobre o eixo paralelo a rot $\mathbf{v}$.

Finalmente, mencionamos que o Teorema de Stokes pode ser usado para demonstrar o Teorema 16.5.4 (que afirma que, se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre $\mathbb{R}^3$, então $\mathbf{F}$ é conservativo). Do nosso trabalho anterior (16.3.3 e 16.3.4 Teoremas), sabemos que $\mathbf{F}$ é conservativo se $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada caminho fechado C. Dado C, suponha que possamos encontrar uma superfície orientável S cuja fronteira é C. (Isso pode ser feito, mas a demonstração exige técnicas avançadas.) Em seguida, o teorema de Stokes fornece

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

Uma curva que não seja simples pode ser quebrada em diversas curvas simples e as integrais ao longo dessas curvas simples são todas 0. Somando essas integrais, obtemos $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C.

16.8 Exercícios

1. Um hemisfério H e uma porção P de um paraboloide são mostrados. Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ cujas componentes tenham derivadas parciais contínuas. Explique por quê

$$\iint_H \text{rot } \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_P \text{rot } \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

2–6 Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{curl } \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\cos z\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + xe^y\,\mathbf{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$, de orientação ascendente

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\,\mathbf{i} + y^2z^2\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$, S é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com orientação ascendente

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{tg}^{-1}(x^2yz^2)\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + x^2z^2\,\mathbf{k}$, S é o cone $x = \sqrt{y^2 - z^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, orientado na direção do eixo positivo x

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + x^2yz\,\mathbf{k}$, S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$, com orientação para fora.

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy}\,\mathbf{i} + e^{xz}\,\mathbf{j} + x^2z\,\mathbf{k}$, S é a metade do elipsoide

$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ que se situa à direita do plano xz orientado na direção do eixo positivo y

7–10 Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso, C é orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + (y + z^2)\,\mathbf{j} + (z + x^2)\,\mathbf{k}$, C é o triângulo com vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1)

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + (x + yz)\,\mathbf{j} + (xy - \sqrt{z})\,\mathbf{k}$, C é o limite da parte do plano $3x + 2y + z = 1$ no primeiro octante

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k}$, C é a curva da interseção do plano $x + z = 5$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 9$

11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

e C é a curva da intersecção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do plano e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

12. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 y\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ e C é a curva da intersecção do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do paraboloide hiperbólico e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

13–15 Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial dado $\mathbf{F}$ e a superfície S.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$,
S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$, com orientação descendente

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2yz\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$,
S é a parte do paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 1$, com orientação ascendente

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geqslant 0$, orientado na direção do eixo positivo y

16. Seja C uma curva fechada simples suave que se situa no plano $x + y + z = 1$. Mostre que a integral de linha

$$\int_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz$$

depende apenas da área da região englobada por C e não da forma de C ou de sua posição no plano.

17. Uma partícula se move ao longo de segmentos de reta da origem aos pontos (1, 0, 0), (1, 2, 1), (0, 2, 1), e de volta para a origem sob a influência do campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + 4y^2\,\mathbf{k}$$

Encontre o trabalho realizado.

18. Calcule

$$\int_C (y + \operatorname{sen} x)\,dx + (z^2 + \cos y)\,dy + x^3\,dz$$

onde C é a curva curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. [*Dica*: observe que C está na superfície $z = 2xy$.]

19. Se S é uma esfera e $\mathbf{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes, mostre que $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

20. Suponha que S e C satisfaçam as hipóteses do Teorema de Stokes e f e g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Use os Exercícios 24 e 26 da Seção 16.5 para demonstrar o seguinte:

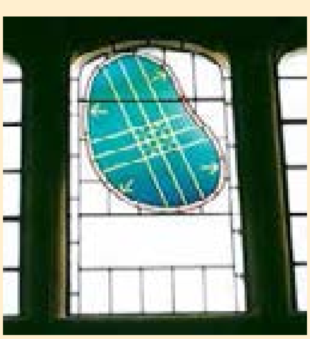
(a) $\int_C (f\,\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\int_C (f\,\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

(c) $\int_C (f\,\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

PROJETO APLICADO — TRÊS HOMENS E DOIS TEOREMAS

A ilustração mostra um vitral da Universidade de Cambridge em homenagem a George Green.



Cortesia de Masters and Fellows of Gonville e Caius College, University of Cambridge, Inglaterra

Apesar de dois dos mais importantes teoremas em cálculo vetorial terem seus nomes em homenagem a George Green e George Stokes, um terceiro homem, William Thomson (também conhecido como lorde Kelvin), teve um papel muito importante na formulação, disseminação e aplicação dos dois resultados. Os três homens estavam interessados em como usar os dois teoremas para explicar e predizer fenômenos físicos em eletricidade e magnetismo e em escoamento de fluidos.

Escreva um trabalho sobre as origens históricas dos Teoremas de Green e de Stokes. Explique as semelhanças e as relações entre os teoremas. Discuta o papel que Green, Thomson e Stokes tiveram na descoberta desses teoremas e em torná-los conhecidos. Mostre como esses teoremas apareceram em pesquisas em eletricidade e magnetismo e foram depois usados no estudo de diversos outros problemas físicos.

O dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte tanto para dados biográficos como para informações científicas. O livro de Hutchinson [5] trata da vida de Stokes e o livro de Thomson [8] é uma biografia de lorde Kelvin. Os artigos de Grattan-Guinness [3] e Gray [4] e o livro de Cannell [1] fornecem uma descrição da vida extraordinária e dos trabalhos de Green. Informações adicionais históricas e matemáticas podem ser encontradas nos livros de Katz [6] e Kline [7].

1. D. M. Cannell. *George Green, Matemático e Físico 1793–1841: O fundo para sua vida e obra* (Filadélfia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

2. C. C. Gillispie, (Ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo em Green por P. J. Wallis no Volume XV e os artigos no Thomson por Jed Buchwald e em Stokes por E. M. Parkinson no Volume XIII.