Prova Final de Cálculo III – 18/12/2019
Prof. Rafael B. de R. Borges

Aluno: ____

Matrícula: ______________________________________ **Turma: 2**

Instruções para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- Resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas absurdas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **São proibidos:** folha própria de rascunho, calculadora, e celular. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.
- **Não desgrampeie o caderno de provas.**

Boa prova!

Questão 1. Calcule

$$\int_C xy^4\,ds,$$

onde C é a metade direita do círculo $x^2+y^2=16$.

Solução:

$$\vec{r}(t)=\langle 4\cos(t),\,4\operatorname{sen}(t)\rangle\,,\qquad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2},$$

$$\int_C xy^4\,ds=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4\cos(t)(4\operatorname{sen}(t))^4\sqrt{16(-\operatorname{sen}(t))^2+16\cos^2(t)}\,dt=$$

$$=4^6\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)\operatorname{sen}^4(t)\,dt\underset{u=\operatorname{sen}(t)}{=}4096\int_{-1}^{1}u^4\,du=4096\frac{u^5}{5}\Big|_{-1}^{1}=\frac{8192}{5}.$$

Questão 2. Calcule

$$\oint_C \cos(y)\,dx+x^2\operatorname{sen}(y)\,dy,$$

onde C é o retângulo de vértices $(0,0)$, $(5,0)$, $(5,2)$ e $(0,2)$.

Solução:

$$\oint_C \cos(y)\,dx+x^2\operatorname{sen}(y)\,dy=\int_0^5\int_0^2 2x\operatorname{sen}(y)+\operatorname{sen}(y)\;dy\,dx=$$

$$=\int_0^5 -2x\cos(y)-\cos(y)\Big|_0^2\,dx=\int_0^5 -2\cos(2)x-\cos(2)+2x+1\,dx=$$

$$=-\cos(2)x^2-\cos(2)x+x^2+x\Big|_0^5=30-30\cos(2).$$

Questão 3. Seja

$$\vec{F} = \left\langle y,\ xe^{yz},\ \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{z} \right\rangle.$$

Determine $\operatorname{rot}(\vec{F})$.

Solução:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{2y\cos(x^2+y^2)}{z} - xye^{yz},\ -\frac{2x\cos(x^2+y^2)}{z},\ e^{yz} - 1 \right\rangle.$$

Questão 4. Calcule o fluxo de $\vec{F} = \langle x\cos(y),\ yx^2,\ z^3 \rangle$ através da fronteira do paralelepípedo limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 3$, $y = 1$ e $z = 4$.

Solução:

$$\text{Fluxo de } \vec{F} = \int_0^3 \int_0^1 \int_0^4 \cos(y) + x^2 + 3z^2 \ dz\,dy\,dx =$$
$$= \int_0^3 \int_0^1 z\cos(y) + x^2 z + z^3 \Big|_0^4 \ dy\,dx = \int_0^3 \int_0^1 4\cos(y) + 4x^2 + 64 \ dy\,dx =$$
$$= \int_0^3 4\operatorname{sen}(y) + 4x^2 y + 64y \Big|_0^1 \ dx = \int_0^3 4\operatorname{sen}(1) + 4x^2 + 64\,dx =$$
$$= 4\operatorname{sen}(1)x + \frac{4x^3}{3} + 64x \Big|_0^3 = 12\operatorname{sen}(1) + 36 + 192 =$$
$$= 228 + 12\operatorname{sen}(1).$$

Questão 5. Seja

$$\alpha = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\ln(y^2+4)}\, dz{\wedge}dv{\wedge}dw + \frac{v^w}{z^2+1}\, dx{\wedge}dy{\wedge}dz$$

uma 3-forma em $\mathbb{R}^5$ (variáveis: (x, y, z, v, w)). Seja β a forma diferencial tal que

$$\iiint_{\partial\Omega} \alpha = \iiiint_{\Omega} \beta,$$

onde Ω é um paralelotopo tetradimensional suave qualquer e $\partial\Omega$ é a sua fronteira (com uma orientação positiva). Determine a forma diferencial $d\beta$.

Solução:

Pelo Teorema de Stokes, $\beta = d\alpha$. Portanto, $d\beta = d(d\alpha) = 0$.