Campos Gradiente

Se f é uma função escalar de duas variáveis, sabemos da Seção 14.6 que seu gradiente ∇f (ou grad f) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

Portanto, ∇f é realmente um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ e é denominado **campo vetorial gradiente**. Da mesma forma, se f for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

EXEMPLO 6 Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo vetorial gradiente juntamente com um mapa de contorno de f. Como eles estão relacionados?

SOLUÇÃO O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

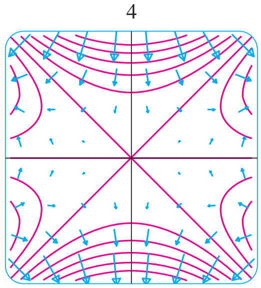


FIGURA 15

A Figura 15 mostra o mapa de contorno de f com o campo vetorial gradiente. Observe que os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível, como devíamos esperar da Seção 14.6. Observe também que os vetores gradientes são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação no gráfico.

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é chamado **campo vetorial conservativo** se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. Nessa situação, f é denominada **função potencial** de $\mathbf{F}$.

Nem todos os campos vetoriais são conservativos, mas estes campos aparecem frequentemente em física. Por exemplo: o campo gravitacional $\mathbf{F}$ do Exemplo 4 é conservativo, pois, se definimos

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k} \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z)\end{aligned}$$

Nas Seções 16.3 e 16.5, aprenderemos a determinar se um campo vetorial é conservativo ou não.

16.1 Exercícios

1-10 Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}$ desenhando um diagrama como o da Figura 5 ou da Figura 9.

1. $\mathbf{F}(x, y) = 0{,}3\,\mathbf{i} - 0{,}4\,\mathbf{j}$

2. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + (x + y)\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{k}$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{k}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{i}$

11–14 Faça a correspondência entre o campo vetorial $\mathbf{F}$ e a figura rotulada de I–IV. Justifique suas escolhas.

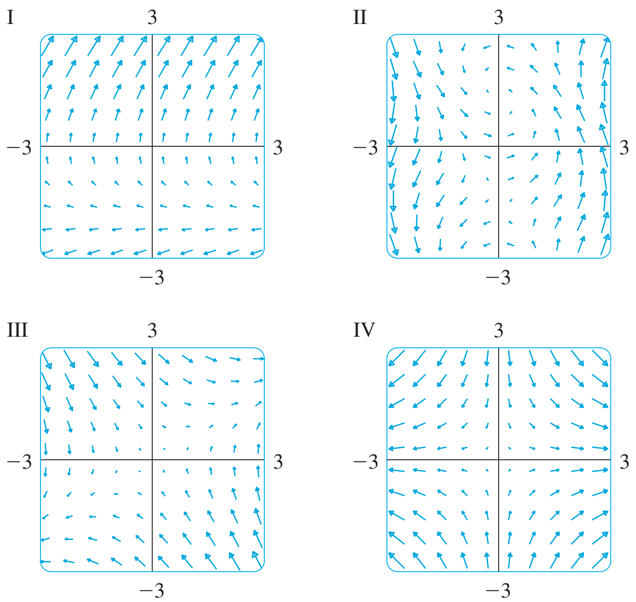
11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, -y\rangle$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x, -y\rangle$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, y + 2\rangle$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \cos(x + y), x\rangle$

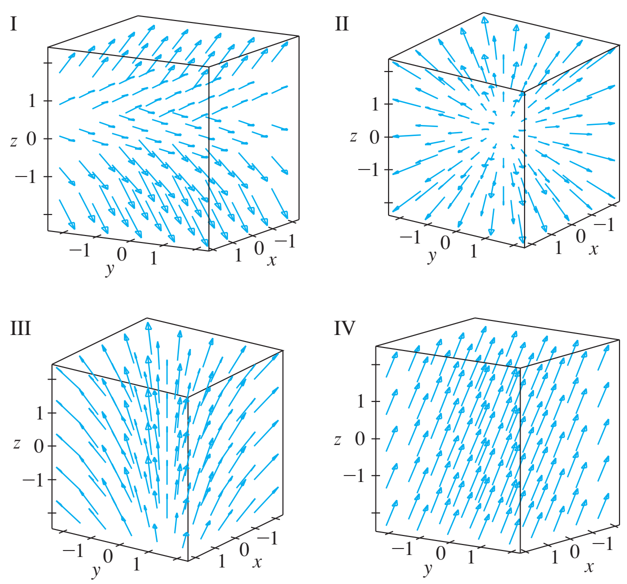
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica   1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com



15–18 Faça a correspondência entre o campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ e a figura rotulada de I–IV. Justifique suas escolhas.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ **16.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ **18.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$



SCA **19.** Se você dispõe de um SCA que trace campos vetoriais (o comando para fazê-lo no Maple é `fieldplot` e no Mathematica é `PlotVectorField` ou `VectorPlot`), use-o para traçar

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2xy)\,\mathbf{i} + (3xy - 6x^2)\,\mathbf{j}$$

Explique sua aparência, determinando um conjunto de pontos (x, y) tal que $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$.

SCA **20.** Seja $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$ e $r = |\mathbf{x}|$. Use um SCA para traçar esse campo vetorial em vários domínios, até conseguir visualizar o que ocorre. Descreva a aparência do desenho e explique-o, determinando os pontos onde $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

21–24 Determine o campo vetorial gradiente f.

21. $f(x, y) = xe^{xy}$ **22.** $f(x, y) = \text{tg}(3x - 4y)$

23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **24.** $f(x, y, z) = x\cos(y/z)$

25–26 Determine o campo vetorial gradiente ∇f de f e esboce-o.

25. $f(x, y) = x^2 - y$ **26.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

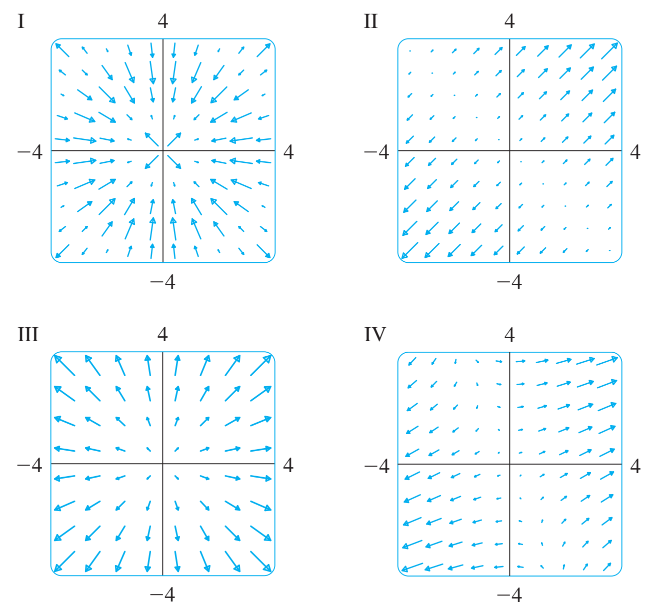
SCA **27–28** Desenhe o campo vetorial gradiente de f juntamente com um mapa de contorno de f. Explique como eles estão relacionados entre si.

27. $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + 2y^2)$ **28.** $f(x, y) = \cos x - 2\,\text{sen}\,y$

29–32 Faça uma correspondência entre as funções f e os desenhos de seus campos vetoriais gradientes rotulados de I–IV. Justifique suas escolhas.

29. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **30.** $f(x, y) = x(x + y)$

31. $f(x, y) = (x + y)^2$ **32.** $f(x, y) = \text{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$



33. Uma partícula se move em um campo de velocidade $\mathbf{V}(x, y) = \langle x^2, x + y^2\rangle$. Se ela está na posição (2, 1) no instante $t = 3$, estime sua posição no instante $t = 3{,}01$.

34. No instante $t = 1$, uma partícula está localizada na posição (1, 3). Se ela se move em um campo de velocidade

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle xy - 2, y^2 - 10\rangle$$

encontre sua posição aproximada no instante $t = 1{,}05$.

35. As **linhas de escoamento** (ou **linhas de corrente**) de um campo vetorial são as trajetórias seguidas por uma partícula cujo campo de velocidade é um campo vetorial dado. Assim, os vetores do campo vetorial são tangentes a suas linhas de fluxo.

(a) Use um esboço do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ para desenhar algumas linhas de escoamento. Desses seus esboços é possível descobrir qual é a equação das linhas de escoamento?

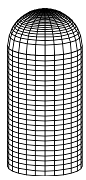
(b) Se as equações paramétricas de uma linha de escoamento são $x = x(t)$, $y = y(t)$, explique por que essas funções satisfazem as equações diferenciais $dx/dt = x$ e $dy/dt = -y$. Então resolva as equações diferenciais para encontrar uma equação da linha de escoamento que passa através do ponto (1, 1).

36. (a) Esboce o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ e algumas linhas de escoamento. Qual é o formato que essas linhas de escoamento parecem ter?

(b) Se as equações paramétricas das linhas de escoamento são $x = x(t)$, $y = y(t)$, que equações diferenciais essas funções satisfazem? Deduza que $dy/dx = x$.

(c) Se uma partícula está na origem no instante inicial e o campo de velocidade é dado por $\mathbf{F}$, determine uma equação para a trajetória percorrida por ela.

21. $312.500\pi/7$ **23.** $1.688\pi/15$ **25.** $\pi/8$
27. $(\sqrt{3} - 1)\pi a^3/3$ **29.** (a) 10π (b) $(0, 0, 2{,}1)$
31. (a) $(0, 0, \frac{7}{12})$ (b) $11K\pi/960$
33. (a) $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$ (b) $4K\pi a^5/15$
35. $\frac{1}{3}\pi(2 - \sqrt{2})$, $(0, 0, 3/[8(2 - \sqrt{2})])$
37. $5\pi/6$ **39.** $(4\sqrt{2} - 5)/15$ **41.** $4096\pi/21$
43.



45. $136\pi/99$

EXERCÍCIOS 15.10

1. 16 **3.** $\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$ **5.** 0
7. O paralelogramo com vértices (0, 0), (6, 3), (12, 1), (6, −2)
9. A região ligada pela reta $y = 1$, o eixo y e por $y = \sqrt{x}$
11. $x = \frac{1}{3}(v - u)$, $y = \frac{1}{3}(u + 2v)$ é uma transformação possível, onde $S = \{(u, v) \mid -1 \leqslant u \leqslant 1, 1 \leqslant v \leqslant 3\}$
13. $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$ é uma transformação possível, onde $S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant u \leqslant \sqrt{2}, 0 \leqslant v \leqslant \pi/2\}$
15. -3 **17.** 6π **19.** $2 \ln 3$
21. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$ (b) $1\,083 \times 10^{12}$ km³ (c) $\frac{4}{15}\pi(a^2 + b^2)abck$
23. $\frac{8}{5}\ln 8$ **25.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 1$ **27.** $e - e^{-1}$

CAPÍTULO 15 REVISÃO

Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Verdadeiro **7.** Verdadeiro **9.** Falso

Exercícios

1. $\approx 64{,}0$ **3.** $4e^2 - 4e + 3$ **5.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **7.** $\frac{2}{3}$
9. $\int_0^{\pi}\int_2^4 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$
11. A região dentro do circuito da rosa de quatro folhas $r = \operatorname{sen} 2\theta$ no primeiro quadrante
13. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **15.** $\frac{1}{2}e^6 - \frac{7}{2}$ **17.** $\frac{1}{4}\ln 2$ **19.** 8
21. $81\pi/5$ **23.** $\frac{81}{2}$ **25.** $\pi/96$ **27.** $\frac{64}{15}$
29. 176 **31.** $\frac{2}{3}$ **33.** $2ma^3/9$
35. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{15}\right)$
(c) $I_x = \frac{1}{12}$, $I_y = \frac{1}{24}$; $\bar{\bar{y}} = 1/\sqrt{3}$, $\bar{\bar{x}} = 1/\sqrt{6}$
37. (a) $(0, 0, h/4)$ (b) $\pi a^4 h/10$
39. $\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}/3$ **41.** $\frac{486}{5}$ **43.** $0{,}0512$
45. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{45}$
47. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ **49.** $-\ln 2$ **51.** 0

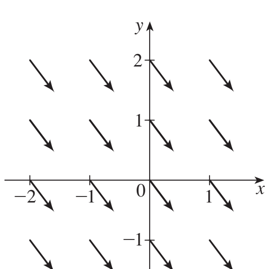
PROBLEMAS QUENTES

1. 30 **3.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **7.** (b) 0,90
13. $abc\pi\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{9\sqrt{3}}\right)$

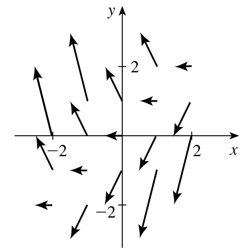
CAPÍTULO 16

EXERCÍCIOS 16.1

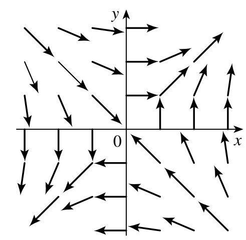
1.



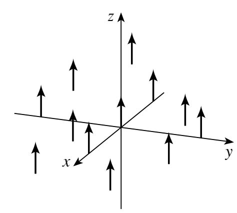
3.



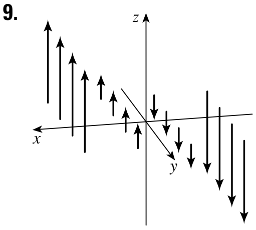
5.



7.

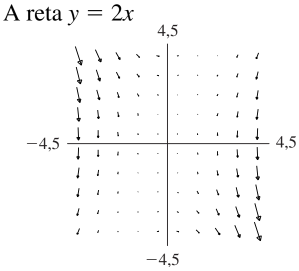


9.



11. IV **13.** I **15.** IV **17.** III

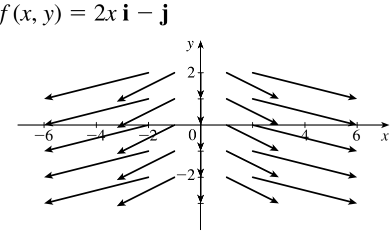
19. A reta $y = 2x$



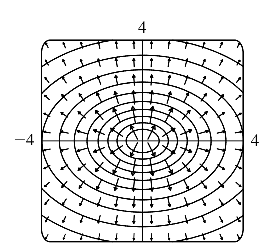
21. $\nabla f(x, y) = (xy + 1)\, e^{xy}\, \mathbf{i} + x^2 e^{xy}\, \mathbf{j}$

23. $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, \mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, \mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, \mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = 2x\, \mathbf{i} - \mathbf{j}$



27.



29. III **31.** II **33.** (2,04, 1,03)