Cálculo III – Prova Substitutiva da P2 – 07/12/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ______________________________

Matrícula: ______________ **Curso:** ______________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. (2½ pontos) Troque a ordem de integração para calcular a integral

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy.$$

Solução:

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^3 \frac{x}{3} e^{x^2}\, dx$$

$$\underset{u=x^2}{=} \frac{1}{3} \int_0^9 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{6} e^u \Big|_0^9 = \frac{e^9 - 1}{6}.$$

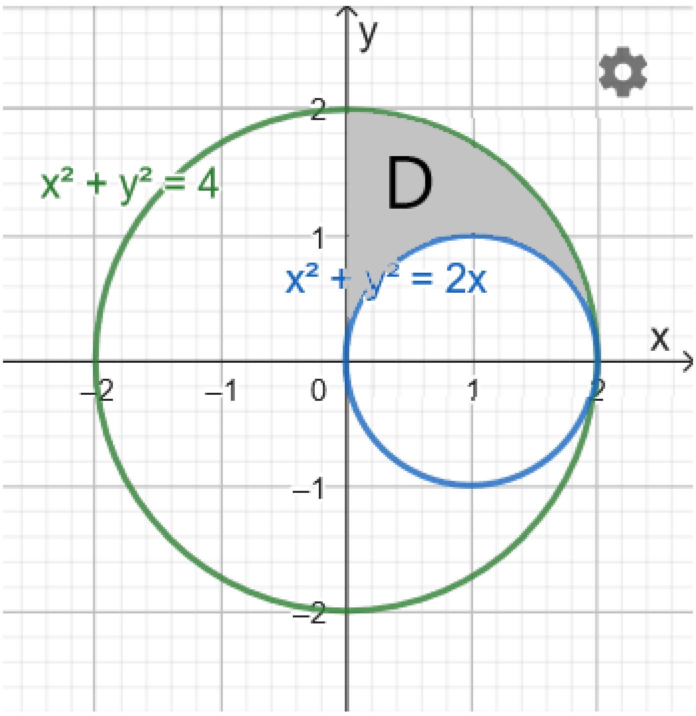
2. (2½ pontos) Calcule o determinante da matriz Jacobiana da transformação $(x, y) \longrightarrow (u, v)$, onde

$$(x, y) = \left(uv, \frac{u}{v}\right).$$

Solução:

$$\frac{\partial x, y}{\partial u, v} = \begin{bmatrix} v & u \\ 1/v & -u/v^2 \end{bmatrix}, \qquad \det\left(\frac{\partial x, y}{\partial u, v}\right) = -\frac{2u}{v}.$$

3. (2½ pontos) Calcule $\iint_D x\, dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$ (ilustrada abaixo). *Dica do Mestre: use coordenadas polares.*



Solução:

Em coordenadas polares, as equações dos círculos são

$$r^2 = 4 \quad \therefore \quad r = 2,$$
$$r^2 = 2r\cos\theta \quad \therefore \quad r = 2\cos\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_D x\,dA &= \int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{2} (r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\bigg|_{2\cos\theta}^{2} \cos\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{8 - 8\cos^3\theta}{3}\cos\theta\,d\theta \qquad (1)\\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos\theta - \cos^4\theta\,d\theta = -\theta + \frac{8}{3}\operatorname{sen}(\theta) - \frac{2}{3}\operatorname{sen}(2\theta) - \frac{1}{12}\operatorname{sen}(4\theta)\bigg|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Observação: quem chegou em (1) ganhou o ponto máximo.

4. (2½ pontos) Encontre o volume da parte da bola $\rho \le 2$ que está entre os cones $\varphi = \pi/6$ e $\varphi = \pi/3$ (em coordenadas esféricas).

Solução:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\theta = \frac{8\pi}{3}(\sqrt{3}-1).$$