# Regras de Equivalência em Inferência

Lógica Matemática

Prof. Fermín A. Tang

# A Regra de Substituição

- Há muitos argumentos cuja validade não se pode demostrar, verificar ou testar com o uso exclusivo das Dez Regras de Inferência dadas anteriormente, sendo necessário neste caso fazer uso de um princípio de inferência adicional, a "Regra da substituição" de proposições equivalentes.
- A regra de substituição diz:
- Uma proposição qualquer $P$ ou apenas uma parte de $P$ pode ser substituída por uma proposição equivalente, e a proposição $Q$ que assim se obtém é equivalente à $P$.

# Equivalências Notáveis

- As seguintes proposições são equivalentes e podem substituir-se mutuamente:
  - 1. Idempotência (ID): i) $p \Leftrightarrow p \wedge p$ ii) $p \Leftrightarrow p \vee p$
  - 2. Comutação (COM) : i) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ ii) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
  - 3. Associação (ASSOC) :
    i) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
    ii) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
  - 4. Distribuição (DIST) :
    i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
    ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - 5. Dupla negação (DN): $p \Leftrightarrow \neg\neg p$

# Equivalências Notáveis

- 6. De Morgan (DM) :
  i) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
  ii) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- 7. Condicional (COND) : $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- 8. Bicondicional (BICOND) :
  i) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$
  ii) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- 9. Contraposição (CP) : $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$
- 10. Exportação-Importação (EI) : $p \wedge q \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$
- Estas equivalências notáveis constituem dez regras de inferência adicionais que se usam para demonstrar, verificar ou testar a validade de argumentos mais complexos.

# Uso das Equivalências

- Uma observação importante deve ser feita no modo de aplicar as dez primeiras regras de inferência e as dez regras de equivalência.
- As regras de inferência só podem ser aplicadas a linhas completas de uma prova, demonstração ou dedução, enquanto, as regras de equivalência podem ser aplicadas tanto a linhas completas como a partes dessas linhas de acordo com a regra de substituição.

# Demonstração ou Dedução

## Definição

- Dado um argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ , chama-se demonstração ou dedução de $Q$ , a partir das premissas $P_1, P_2, \dots, P_n$ , todas sequência finita de proposições $X_1, X_2, \dots, X_k$ tais que $X_i$ ou é uma premissa ou resulta de proposições anteriores da sequência pelo uso de uma regra de inferência e de tal modo que a última proposição $X_k$ seja a conclusão $Q$ do argumento dado.

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 1

- 1) Demonstrar que é válido o seguinte argumento:

$$(p \to \neg q), \quad q \quad \vdash \quad \neg p$$

- Demonstração:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1. | $(p \to \neg q)$ | Por premissa |
| 3 | 2. | $q$ | Por premissa |
| 2 | 3. | $\neg\neg q \to \neg p$ | De (1) por CP |
| 3 | 4. | $q \to \neg p$ | De (3) por DN |
| | 5. | $\neg p$ | De (4) e (2) por MP |

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 2

- 2) Demonstrar que é válido o seguinte argumento:

$$(p \to q), \quad (r \to \neg q) \quad \vdash \quad (p \to \neg r)$$

- Demonstração:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 1. | $(p \to q)$ | Por premissa |
| 1 | 2. | $(r \to \neg q)$ | Por premissa |
| 2 | 3. | $\neg\neg q \to \neg r$ | De (2) por CP |
| 3 | 4. | $q \to \neg r$ | De (3) por DN |
| | 5. | $p \to \neg r$ | De (1) e (4) por SH |

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 3

- 3) Demonstrar que é válido o seguinte argumento:

$$(p \vee (q \wedge r)), \qquad (p \vee q \rightarrow s) \quad \vdash \quad (p \vee s)$$

- Demonstração:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | Por premissa |
| 3 | 2. | $p \vee q \rightarrow s$ | Por premissa |
| 2 | 3. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | De (1) por DIST |
| 3 | 4. | $p \vee q$ | De (3) por SIMP |
| 4 | 5. | $s$ | De (2) e (4) por MP |
| | 6. | $p \vee s$ | De (5) por AD |

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 4

- 4) Demonstrar que é válido o seguinte argumento:

$$(p \vee q \rightarrow r \wedge s), \qquad \neg s \quad \vdash \quad \neg q$$

- Demonstração:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 1. | $p \vee q \rightarrow r \wedge s$ | Por premissa |
| 1 | 2. | $\neg s$ | Por premissa |
| | | | |
| 2 | 3. | $\neg r \vee \neg s$ | De (2) por AD |
| 3 | 4. | $\neg(r \wedge s)$ | De (3) por DM |
| 4 | 5. | $\neg(p \vee q)$ | De (1) e (4) por MT |
| 5 | 6. | $\neg p \wedge \neg q$ | De (5) por DM |
| | 7. | $\neg q$ | De (6) por SIMP |

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 5

- 5) Demonstrar a validade do seguinte argumento:
  - "Se Londres não fica na Bélgica, então Paris não fica na França. Mas Paris fica na França. Logo, Londres fica na Bélgica".

- Demonstração:

- Representando as proposições como:
  - $p$: "Londres fica na Bélgica"
  - $q$: "Paris fica na França"
- Temos assim o argumento na forma simbólica:

$$(\neg p \to \neg q), \quad q \quad \vdash \quad p$$

- Temos assim a prova do argumento:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1. | $\neg p \to \neg q$ | Por premissa |
| 3 | 2. | $q$ | Por premissa |
| 2 | 3. | $\neg\neg p \vee \neg q$ | De (1) por COND |
| 4 | 4. | $p \vee \neg q$ | De (3) por DN |
| 4 | 5. | $\neg\neg q$ | De (2) por DN |
| | 6. | $p$ | De (4) e (5) por SD |

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 6

- 6) Demonstrar a validade do seguinte argumento:

$$(p \lor \neg q) \lor r, \qquad \neg p \lor (q \land \neg p) \quad \vdash \quad q \to r$$

- Demonstração:

1. $(p \lor \neg q) \lor r$ Por premissa
2. $\neg p \lor (q \land \neg p)$ Por premissa

---

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 7

- 7) Demonstrar a validade do argumento:

$$(p \to \neg q), \quad r \to q, \quad r \vdash \neg p$$

- Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p \to \neg q$ | Por premissa |
| 2. | $r \to q$ | Por premissa |
| 3. | $r$ | Por premissa |

---

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 8

- 8) Demonstrar a validade do argumento:

$$(p \rightarrow q), \quad q \leftrightarrow s, \quad t \vee (r \wedge \neg s) \vdash p \rightarrow t$$

- Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p \rightarrow q$ | Por premissa |
| 2. | $q \leftrightarrow s$ | Por premissa |
| 3. | $t \vee (r \wedge \neg s)$ | Por premissa |

---

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 9

- 9) Demonstrar a validade do argumento:
  - "Se estudo, então não sou reprovado em Física. Se não jogo basquete, então estudo. Mas fui reprovado em Física. Portanto, joguei basquete".
- Demonstração:
- Representando as proposições como:
  - $p$: "Estudo"
  - $q$: "Sou reprovado em Física"
  - $r$: "Jogo Basquete"
- Temos o argumento na forma simbólica:

$$(p \rightarrow \neg q), \quad (\neg r \rightarrow p), \quad q \quad \vdash \quad r$$

- Temos assim a prova do argumento:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p \rightarrow \neg q$ | Por premissa |
| 2. | $\neg r \rightarrow p$ | Por premissa |
| 3. | $q$ | Por premissa |

# Demonstração ou Dedução

## Exemplo 10

- 10) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \vee (q \wedge r), \quad p \rightarrow s, \quad s \rightarrow r \vdash r$$

- Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | Por premissa |
| 2. | $p \rightarrow s$ | Por premissa |
| 3. | $s \rightarrow r$ | Por premissa |

---

# Inconsistência

## Definição

- Duas ou mais proposições que não podem ser simultaneamente verdadeiras dizem-se inconsistentes. Também se diz que formam um conjunto inconsistente de proposições.
- Um argumento se diz inconsistente se suas premissas não podem ser simultaneamente verdadeiras.
- Pode-se demonstrar que um conjunto de proposições é inconsistente deduzindo do seu conjunto uma contradição qualquer, mediante regras de inferência.

# Inconsistência

## Exemplo 1

- Demonstrar que as três proposições dadas são inconsistentes:

$$\neg(p \vee \neg q), \qquad p \vee \neg r, \qquad q \rightarrow r$$

- Demonstração:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1. | $\neg(p \vee \neg q)$ | Por proposição |
| 5 | 2. | $p \vee \neg r$ | Por proposição |
| 4 | 3. | $q \rightarrow r$ | Por proposição |
| 2 | 4. | $\neg p \wedge \neg\neg q$ | De (1) por DM |
| 3 | 5. | $\neg p \wedge q$ | De (4) por DN |
| 5 | 6. | $\neg p$ | De (5) por SIMP |
| 4 | 7. | $q$ | De (5) por SIMP |
| 6 | 8. | $r$ | De (3) e (7) por MP |
| 6 | 9. | $\neg r$ | De (2) e (6) por SD |
| | 10. | $r \wedge \neg r$ | De (8) e (9) por CONJ ✗ |

Contradição!!!
Inconsistente!!!

# Inconsistência

## Exemplo 2

- (2) Demonstrar que é inconsistente o conjunto de proposições:

  1. $x = 1 \rightarrow y < x$
  2. $y < x \rightarrow y = 0$
  3. $\neg(y = 0 \vee x \neq 1)$

- Demonstração:

- Neste caso, devemos converter as expressões matemáticas em proposições utilizando símbolos proposicionais.

$p$: $x = 1$      $r$: $y = 0$

$q$: $y < x$

- Substituindo temos:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p \rightarrow q$ | Por premissa |
| 2. | $q \rightarrow r$ | Por premissa |
| 3. | $\neg(r \vee \neg p)$ | Por premissa |

---

# Inconsistência

## Exemplo 3

- (3) Demonstrar que são inconsistentes as três proposições:

$$\neg p \lor \neg q, \qquad p \land s, \qquad \neg s \lor r, \qquad r \to r \land q$$

- Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg p \lor \neg q$ | Por proposição |
| 2. | $p \land s$ | Por proposição |
| 3. | $\neg s \lor r$ | Por proposição |
| 4. | $r \to r \land q$ | Por proposição |

# Inconsistência

## Exemplo 4

- (4) Demonstrar que é inconsistente o conjunto de proposições:

$$\neg(p \vee q), \qquad r \to s, \qquad \neg q \wedge r$$

- Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg(p \vee q)$ | Por premissa |
| 2. | $r \to s$ | Por premissa |
| 3. | $\neg q \wedge r$ | Por premissa |

———————————————————

# Referências


- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 12. Validade Mediante Regras de Inferência e Equivalências. Editora Alta Books. Rio de Janeiro. 2013.