Árvores Lógicas

Lógica Matemática

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UENF

Prof. Fermín A. Tang

Árvores Lógicas

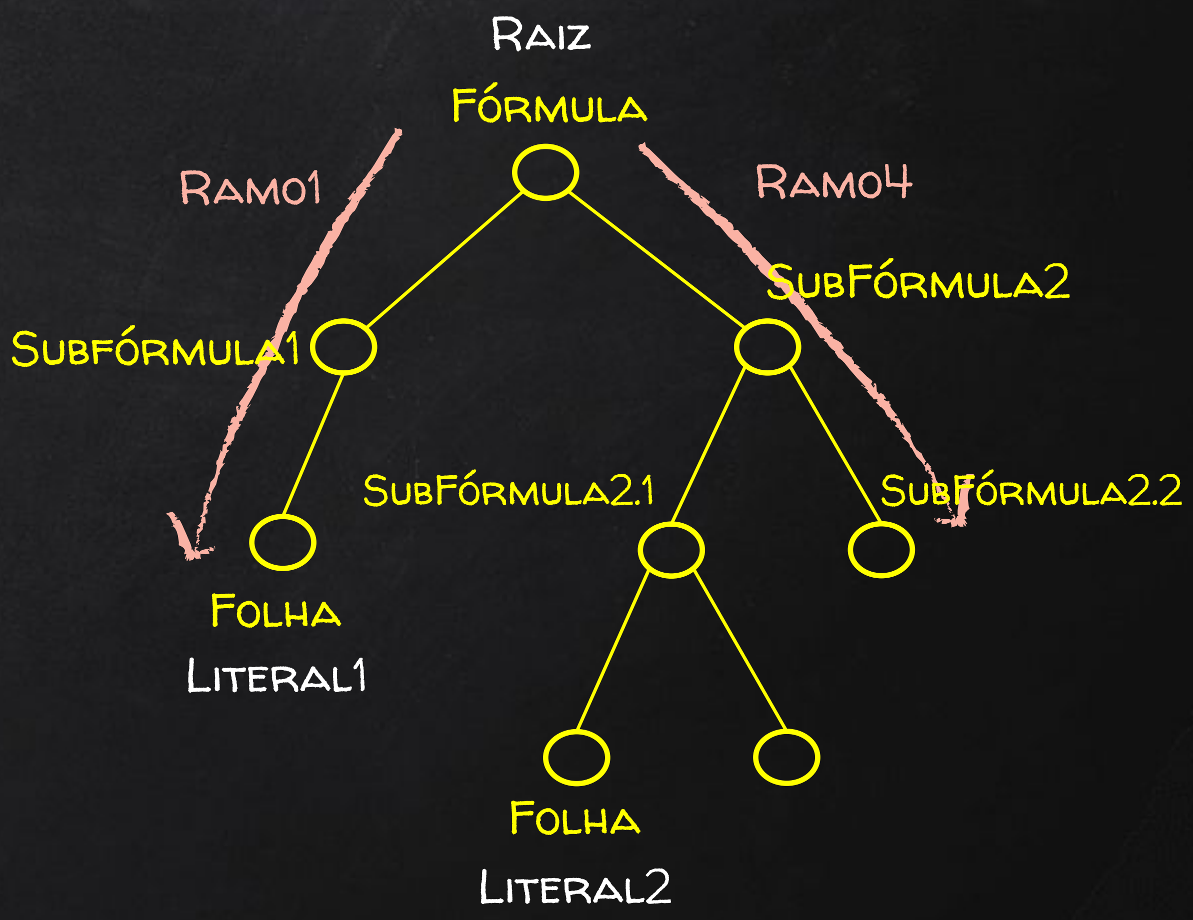
Definição

- Foram apresentadas duas ferramentas para analisar uma expressão lógica composta:
  - i) A tabela-verdade, que lista todas as possíveis combinações de valores-lógicos para as proposições simples presentes na expressão composta.
  - ii) O método dedutivo, que utiliza propriedades da álgebra das proposições para simplificar a expressão composta, e/ou encontrar uma equivalência conhecida, que revele a sua natureza.
- Ambos métodos apresentam algumas desvantagens. O número de combinações em uma tabela-verdade pode ser muito grande. Por outro lado, achar a simplificação de uma expressão não é uma tarefa padronizada. Podemos seguir diferentes caminhos sem garantia de sucesso.
- Estudaremos uma terceira ferramenta para analise de expressões lógicas compostas, chamada de árvore lógica.
- As árvores lógicas são estruturas que permitem representar uma expressão lógica composta e decompor ela de forma padronizada, em subfórmulas menores.
- A decomposição é realizada até chegar ao nível de um literal (Proposições simples ou suas negações).

Árvores Lógicas

Definição

- Anteriormente, estudamos o conceito de árvore de decomposição, descrito como uma árvore binária.
- A árvore lógica tem estrutura semelhante, mas possui regras de construção específicas e uso diferenciado.
- Quanto as regras de construção.- Considere que todo operador lógico sempre será representado mediante os operadores ¬, ∧, ∨.
- Quanto as regras de uso.- Considere que a árvore lógica será utilizada para analisar os casos em que a expressão lógica que se encontra na raiz é verdadeira. Sendo que cada ramo da árvore indica um possível caminho para tornar essa expressão verdadeira e estabelece condições necessárias para isso.



Árvores Lógicas

Decomposição de Proposições

- Existem dois tipos de decomposição de proposições, que serão chamadas de:
  - Sopreposição.- Duas partes dependentes.
  - Bifurcação.- Duas parte independentes;
- Ilustraremos cada uma delas.

Árvores Lógicas

Sobreposição

- Neste caso, decompor uma proposição verdadeira significa dividi-la em duas partes, onde ambas precisam ser verdadeiras ao mesmo tempo.
- A sobreposição está associada a uma conjunção.
- Por exemplo, considere que a seguinte proposição:

$$(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)$$

- Sabe-se que, para que essa proposição seja verdadeira as suas duas componentes precisam ser verdadeiras simultaneamente. Assim, podemos quebrar a proposição em duas, mas devemos colocar essas componentes no mesmo ramo da árvore, porque ambas são necessárias para tornar verdadeira a proposição.
- Esta decomposição é chamada de ramo único.

$$(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)$$

$$\begin{array}{c} | \\ (P \vee Q) \\ (Q \vee R) \end{array}$$

Árvores Lógicas

Bifurcação

- Neste caso, decompor uma proposição verdadeira significa dividi-la em duas partes, onde pelo menos uma delas precisa ser verdadeira.
- A bifurcação está associada a uma disjunção.
- Por exemplo, considere que a seguinte proposição:

$$(P \rightarrow Q) \vee (Q \leftrightarrow R)$$

- Sabe-se que, para que essa proposição seja verdadeira pelo menos uma delas precisa ser verdadeira.
- Assim, podemos quebrar a proposição em duas, e devemos colocar essas componentes em ramos distintos da árvore, porque cada uma representa uma maneira distinta de tornar verdadeira a proposição.
- Esta decomposição é chamada de ramo duplo.

$$(P \rightarrow Q) \vee (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \qquad (Q \leftrightarrow R)$$

Árvores Lógicas

Regras de Decomposição

- Existem oito regras de decomposição de expressões da lógica proposicional.
- Toda expressão lógica pode ser decomposta usando alguma das oito regras.
- As regras podem ser classificadas em duas categorias:
    - Ramo único: Sobreposição associada a um operador $\wedge$;
    - Ramo duplo: Bifurcação associada a um operador $\vee$.
- A regras de ramo duplo se dividem em:
    - Ramo duplo de um nível: Bifurcação simples.
    - Ramo duplo de dois níveis: Bifurcação de duas sobre posições.

Ramo Único	Ramo Duplo Um Nível	Ramo Duplo Dois Níveis
$x \wedge y$ x y	$x \vee y$ $x \quad y$	$x \leftrightarrow y$ $x \quad \neg x$ $y \quad \neg y$
$\neg(x \vee y)$ $\neg x$ $\neg y$	$\neg(x \wedge y)$ $\neg x \quad \neg y$	$\neg(x \leftrightarrow y)$ $x \quad \neg x$ $\neg y \quad y$
$\neg(x \rightarrow y)$ x $\neg y$	$x \rightarrow y$ $\neg x \quad y$	

Árvores Lógicas

Regras de Decomposição

- Todas as regras ou são definições dos operadores $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ ou podem ser deduzidas mediante alguma propriedade da álgebra de proposições.

$x \wedge y$

x

y

(Definição do operador $\wedge$)

$x \vee y$

$x \qquad y$

(Definição do operador $\vee$)

$\neg(x \vee y)$

$\neg x$

$\neg y$

(De Morgan)

$\neg(x \wedge y)$

$\neg x \qquad \neg y$

(De Morgan)

$x \rightarrow y$

$\neg x \qquad y$

(Equiv. Condicional)

$\neg(x \rightarrow y)$

x

$\neg y$

(Equiv. Condicional)

(De Morgan)

$x \leftrightarrow y$

$x \qquad \neg x$

$y \qquad \neg y$

(Definição do operador $\leftrightarrow$)

$\neg(x \leftrightarrow y)$

$x \qquad \neg x$

$\neg y \qquad y$

(Definição do operador $\leftrightarrow$)

Árvores Lógicas

Regras de Decomposição

- ✗ Todas as regras ou são definições dos operadores ∧, ∨, ↔ ou podem ser deduzidas mediante alguma propriedade da álgebra de proposições.

$\neg(x \vee y) \Leftrightarrow \neg x \wedge \neg y$ (De Morgan)

$\neg(x \wedge y) \Leftrightarrow \neg x \vee \neg y$ (De Morgan)

$x \rightarrow y \Leftrightarrow \neg x \vee y$ (Equiv. Condicional)

$\neg(x \rightarrow y) \Leftrightarrow \neg(\neg x \vee y)$ (Equiv. Condicional)

$\Leftrightarrow x \wedge \neg y$ (De Morgan)

$x \leftrightarrow y \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$ (Definição do operador ↔)

- ✘ As duas proposições verdadeiras ou as duas proposições falsas.

$\neg(x \leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$ (Definição do operador ↔)

- ✘ Uma proposição verdadeira e a outra falsa.

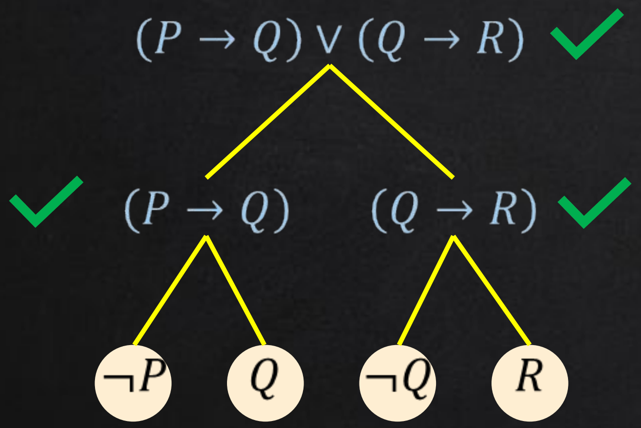
Árvores Lógicas

Exemplo 1

- Considere a seguinte proposição:

$$(P \to Q) \lor (Q \to R)$$

- Construímos a árvore lógica aplicando as regras descritas anteriormente:



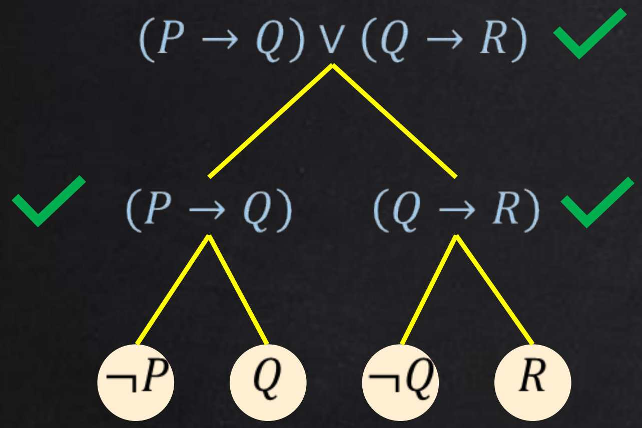
  - A medida que as proposições são decompostas elas são marcadas com uma seta.
  - Os literais (proposições simples ou suas negações) são circulados.

- A árvore possui 4 ramos, cada um com apenas um literal. Cada ramo nos diz algo sobre uma ou mais formas (interpretações) em que a proposição original se torna verdadeira.
- Siga o caminho desde a raiz até o final de um ramo e observe todas os literais presentes nesse ramo.
  - Por exemplo, o ramo mais a esquerda possui o literal $\neg P$. Qualquer interpretação em que P seja falsa garante que a proposição seja verdadeira.
  - O ramo mais a direita possui o literal R. Qualquer interpretação em que R seja verdadeiro garante que a proposição seja verdadeira.

Árvores Lógicas

Exemplo 1

- Considere a árvore lógica:



			A	B	
P	Q	R	$(P \to Q)$	$(Q \to R)$	$(A \vee B)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

- Observe a tabela-verdade correspondente. Cada combinação de valores para P, Q e R representa uma interpretação para a formula.

- O ramo mais a esquerda nos diz que basta $\neg P$ ser verdadeiro (P ser falso) para a expressão ser verdadeira.

Árvores Lógicas

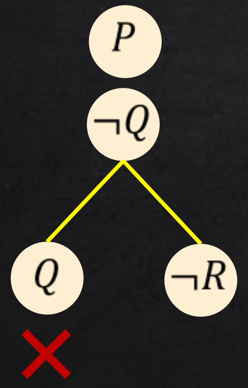
Ramos Abertos e Fechados

- Considere a seguinte árvore lógica:

$(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R)$

$(P \wedge \neg Q)$

$(Q \vee \neg R)$



- Um ramo aberto é um ramo em que não existe contradição entre quaisquer par de literais (ou duas formulas quaisquer) presentes nesse ramo.
- Um ramo fechado é um ramo em que existe pelo menos uma contradição entre dois literais (ou duas formulas quaisquer) presentes nesse ramo.

  - No exemplo a esquerda, a árvore possui dois ramos.
  - No ramo a esquerda, existem contradição entre os literais $\neg Q$ e Q.
  - No ramo a direita, não existe qualquer contradição seja entre literais ou subfórmulas. Este ramo revela uma intepretação que torna verdadeira a expressão: $P = V, Q = F$ e $R = F$

Árvores Lógicas

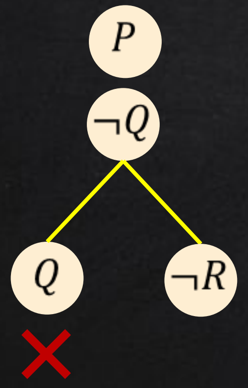
Ramos Abertos e Fechados

- Considere a seguinte árvore lógica:

$$(P \land \neg Q) \land (Q \lor \neg R) \quad ✓$$

$$(P \land \neg Q) \quad ✓$$

$$(Q \lor \neg R) \quad ✓$$



- Observe a tabela-verdade correspondente.

			A	B	
P	Q	R	$(P \land \neg Q)$	$(Q \lor \neg R)$	$(A \land B)$
V	V	V	F	V	F
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F

- A interpretação que torna verdadeira a expressão é ressaltada.

Árvores Lógicas

aplicação do método

- As árvores lógicas são uma alternativa para resolver diversos problemas lógicos, entre eles: classificação de uma expressão como tautologia, contradição ou contingência; consistência entre várias expressões; validação de um argumento lógico; equivalência entre proposições.
- O método segue os seguintes passos:
- Passo1: Prepararação.- Definir a raiz da árvore de acordo com o tipo de problema a ser resolvido. A raiz compreenderá uma ou mais expressões.
- Passo2: Decomposição.- Construir a árvore com base nas 8 regras de decomposição até decompor todos os componentes; conseguir literais em todos os ramos ou conseguir fechar todos os ramos.
- A decomposição deve priorizar: ramos únicos, ramos duplos de dois níveis e ramos duplos de um nível, nessa ordem.
- Passo3: Interpretação.- Verificar a ocorrência de um dos seguintes resultados:
  - Existe pelo menos um ramo aberto: existe ao menos uma interpretação que torna a raiz verdadeira.
  - Todos os ramos estão fechados: nenhuma interpretação torna a raiz verdadeira. Existe contradição em todos os ramos.

Árvores Lógicas

Tautologias, Contradições e Contigências

- Podemos usar árvores lógicas para classificar as proposições em tautologias (sempre verdadeiras), contradições (sempre falsas) ou contingências (as vezes verdadeiras e as vezes falsas).

Árvores Lógicas

Tautologia

- Para demostrar que uma proposição P é tautologia construa uma árvore lógica usando a sua negação $\neg P$ como raiz.
- Trata-se de uma prova por contradição, assume-se como hipótese, a negação daquilo que queremos provar. Uma tautologia significa que a expressão é sempre verdadeira. Afirmar que não é tautologia significa que ela pode ser as vezes falsa.
- Assim, assume-se que $\neg P$ pode ser verdadeira.
    - Se a árvore tiver pelo menos um ramo aberto, significa que a hipótese é verdadeira, com isso conclui-se que não é tautologia.
    - Já se todos os ramos forem fechados, significa que é impossível que hipótese seja verdadeira, e com isso conclui-se que é tautologia.

Árvores Lógicas

Tautologia – Exemplo1

- Considere a seguinte proposição H:

$$((P \land Q) \lor R) \rightarrow \big((P \leftrightarrow Q) \lor \big(R \lor (P \land \neg Q)\big)\big)$$

- Para provar que ela é uma tautologia, construiremos a árvore da sua negação $\neg H$:

$$\neg\Big(((P \land Q) \lor R) \rightarrow \big((P \leftrightarrow Q) \lor \big(R \lor (P \land \neg Q)\big)\big)\Big)$$

Árvores Lógicas

Tautologia – Exemplo1

$$\neg\Big(\big((P \wedge Q) \vee R\big) \rightarrow \Big((P \leftrightarrow Q) \vee \big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big)\Big)\Big) \checkmark$$

$$(P \wedge Q) \vee R$$

$$\neg\Big((P \leftrightarrow Q) \vee \big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big)\Big)$$

Decompor a $\neg H$ usando a regra:

$$\neg(x \rightarrow y)$$
$$x$$
$$\neg y$$

Marcar a expressão que foi decomposta.

Na sequência observe que existem duas expressões: A primeira geraria um ramo duplo; já a segunda um ramo único; Escolhe-se a segunda.

Árvores Lógicas

Tautologia – Exemplo1

$$\neg\Big(((P \wedge Q) \vee R) \rightarrow \big((P \leftrightarrow Q) \vee (R \vee (P \wedge \neg Q))\big)\Big) \checkmark$$

$$(P \wedge Q) \vee R$$

$$\neg\big((P \leftrightarrow Q) \vee (R \vee (P \wedge \neg Q))\big) \checkmark$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q)$$

$$\neg(R \vee (P \wedge \neg Q))$$

Decompor usando a regra: $\neg(x \vee y)$

$$\neg x$$

$$\neg y$$

Marcar a expressão que foi decomposta.

Na sequência observe que existem três expressões pendentes: A primeira geraria um ramo duplo de um nível; A segunda um ramo duplo de dois níveis; A terceira um ramo único. Escolhe-se a terceira.

Árvores Lógicas

Tautologia – Exemplo1

$$\neg\Big(\big((P \wedge Q) \vee R\big) \rightarrow \Big((P \leftrightarrow Q) \vee \big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big)\Big)\Big) \checkmark$$

$$(P \wedge Q) \vee R$$

$$\neg\Big((P \leftrightarrow Q) \vee \big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big)\Big) \checkmark$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q)$$

$$\neg\big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big) \checkmark$$

$$\neg R$$

$$\neg(P \wedge \neg Q)$$

Decompor usando a regra: $\neg(x \vee y)$

$$\neg x$$

$$\neg y$$

Marcar a expressão que foi decomposta.

Existem três expressões pendentes, todas de ramo duplo. Escolhe-se a segunda que é um ramo duplo de dois níveis.

Árvores Lógicas

Tautologia – Exemplo1

$$\neg\Big(\big((P \wedge Q) \vee R\big) \rightarrow \Big((P \leftrightarrow Q) \vee \big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big)\Big)\Big) \checkmark$$

$$(P \wedge Q) \vee R$$

$$\neg\Big((P \leftrightarrow Q) \vee \big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big)\Big) \checkmark$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \checkmark$$

$$\neg\big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big) \quad (P \wedge Q) \vee R$$

$$\neg R$$

$$\neg(P \wedge \neg Q)$$

$$P \qquad \neg P$$

$$\neg Q \qquad Q$$

Decompor usando a regra: $\neg(x \leftrightarrow y)$

$$x \qquad \neg x$$

$$\neg y \qquad y$$

Marcar a expressão que foi decomposta.

Existem duas expressões pendentes, ambas de ramo duplo de um nível. Escolhe-se a primeira que parece mais simples.

Árvores Lógicas

Tautologia – Exemplo1

Decompor usando a regra:

$$x \vee y$$
$$x \qquad y$$

Marcar a expressão que foi decomposta.

Temos dois ramos fechados por contradição entre $\neg R$ e R.

Existem três expressões pendentes. A primeira de ramo duplo; a segunda e terceira de ramo único. Escolhe-se a segunda e terceira.

$$\neg\Big(\big((P \wedge Q) \vee R\big) \rightarrow \Big((P \leftrightarrow Q) \vee \big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big)\Big)\Big) \checkmark$$

$$(P \wedge Q) \vee R \checkmark$$

$$\neg\Big((P \leftrightarrow Q) \vee \big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big)\Big) \checkmark$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \checkmark$$

$$\neg\big(R \vee (P \wedge \neg Q)\big) \checkmark$$

$$\neg R$$

$$\neg(P \wedge \neg Q)$$

$$P \qquad \neg P$$

$$\neg Q \qquad Q$$

$$(P \wedge Q) \quad R \qquad (P \wedge Q) \quad R$$

$$\neg P \qquad \neg P$$

Árvores Lógicas

Tautologia – Exemplo1

Decompor usando a regra: $\begin{array}{c} x \land y \\ x \\ y \end{array}$

Marcar as expressões decompostas.

Os ramos restantes são fechados por contradição entre $\neg Q$ e Q; $\neg P$ e P; respectivamente.

Observe que restou uma expressão sem decompor $\neg(P \land \neg Q)$.

A árvore resultante possui 4 ramos.

$\neg\Big(\big((P \land Q) \lor R\big) \rightarrow \big((P \leftrightarrow Q) \lor \big(R \lor (P \land \neg Q)\big)\big)\Big)$ ✓

$(P \land Q) \lor R$ ✓

$\neg\big((P \leftrightarrow Q) \lor \big(R \lor (P \land \neg Q)\big)\big)$ ✓

$\neg(P \leftrightarrow Q)$ ✓

$\neg\big(R \lor (P \land \neg Q)\big)$ ✓

$\neg R$

$\neg(P \land \neg Q)$

P	Q
$\neg Q$	$\neg P$

$(P \land Q)$ ✓	R	$(P \land Q)$ ✓	R
P	✗	P	✗
Q		Q	
✗		✗	

Temos todos os ramos fechados.
É tautologia.

Árvores Lógicas

Tautologia – Exemplo1

- Apenas para confirmar o resultado da árvore lógica temos a tabela-verdade correspondente.

$$((P \land Q) \lor R) \to \left((P \leftrightarrow Q) \lor \left(R \lor (P \land \neg Q)\right)\right)$$

P	Q	R	$((P \land Q)$	$\lor R)$	$\to$	$((P \leftrightarrow Q)$	$\lor$	$(R \lor$	$(P \land \neg Q)))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	F	F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V	V	F	F

Árvores Lógicas

Tautologias – Exemplo1

Variante 1

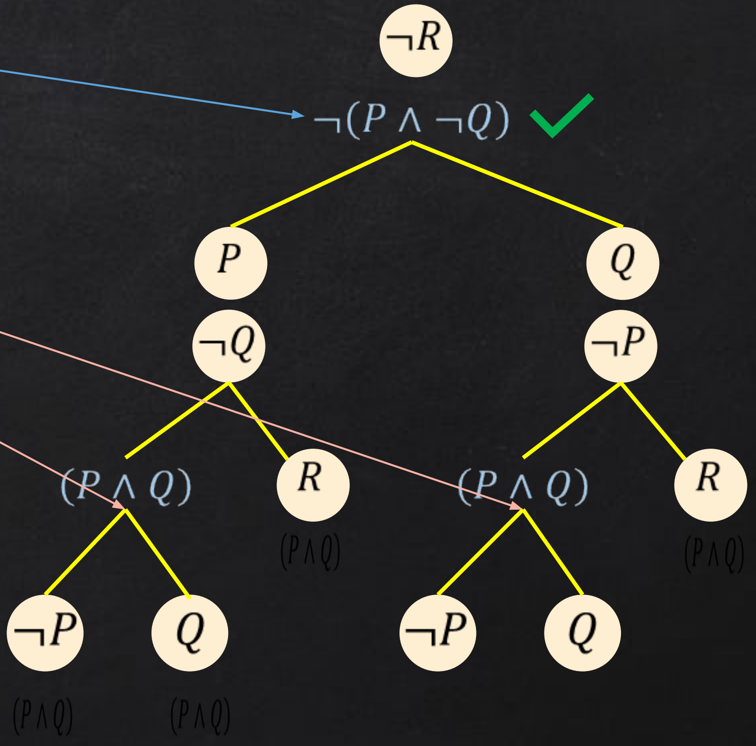
$$\neg\Big(\big((P \wedge Q) \vee R\big) \to \big((P \leftrightarrow Q) \vee (R \vee (P \wedge \neg Q))\big)\Big)$$ ✓

$$(P \wedge Q) \vee R$$ ✓

$$\neg\big((P \leftrightarrow Q) \vee (R \vee (P \wedge \neg Q))\big)$$ ✓

$$\neg(P \leftrightarrow Q)$$ ✓

$$\neg(R \vee (P \wedge \neg Q))$$ ✓



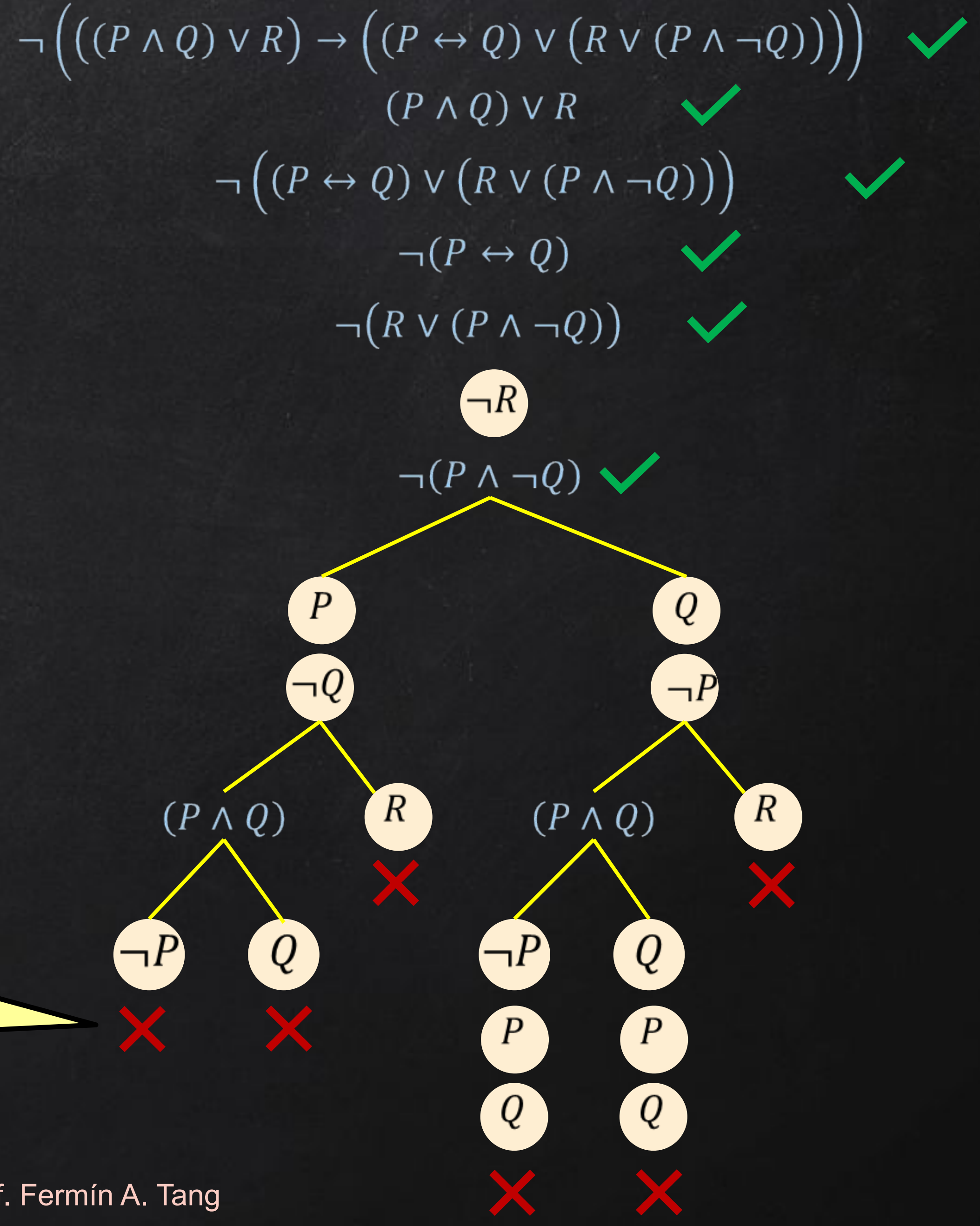
- ✗ Neste caso, ilustra-se a variante em que decompõe-se primeiro a expressão $\neg(P \wedge \neg Q)$ antes que $(P \wedge Q)$.
- ✗ Observe que a bifurcação se repete nos dois ramos abertos.
- ✗ Por causa da bifurcação a árvore cresce mais rapidamente e acaba se tornando maior.

Árvores Lógicas

Tautologias – Exemplo1

Variante 1

- ✘ Neste caso, a árvore lógica ficou maior.
- ✘ Observe que ela possui 6 ramos.



Temos todos os ramos fechados.
É tautologia.

Árvores Lógicas

Tautologias – Exemplo1 Variante 2

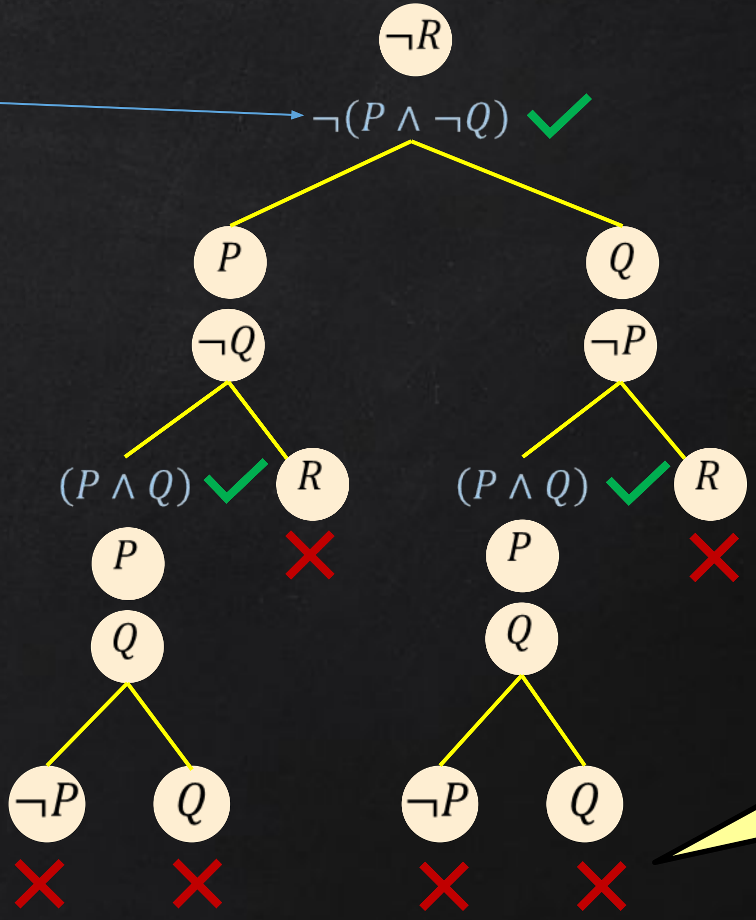
$$\neg\Big(\big((P \wedge Q) \vee R\big) \rightarrow \big((P \leftrightarrow Q) \vee (R \vee (P \wedge \neg Q))\big)\Big) \checkmark$$

$$(P \wedge Q) \vee R \checkmark$$

$$\neg\big((P \leftrightarrow Q) \vee (R \vee (P \wedge \neg Q))\big) \checkmark$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \checkmark$$

$$\neg(R \vee (P \wedge \neg Q)) \checkmark$$



- ✘ Esta variante, faz questão de mostrar a decomposição da última expressão pendente na árvore original. Embora isso não seja necessário.
- ✘ Observe que esta árvore possui 6 ramos.

Temos todos os ramos fechados.
É tautologia.

Árvores Lógicas

Contradição

- Para demostrar que uma proposição P é uma contradição (sempre falsa), construa uma árvore lógica usando a própria proposição P como raiz.
- Trata-se de uma prova por contradição, assume-se como hipótese, a negação daquilo que queremos provar, que a expressão P pode ser verdadeira.
  - Se a árvore tiver pelo menos um ramo aberto, significa que a proposição pode ser verdadeira, o que contradiz o fato de ser sempre falsa, logo não é contradição.
  - Já se todos os ramos forem fechados significa que não tem como ser verdadeira, o que mostra que é contradição.
- Observe que provar que P é uma contradição corresponde a provar que $\neg P$ é uma tautologia. Com isso a árvore começa com a expressão $\neg\neg P$ na raiz.

Árvores Lógicas

Contradição – Exemplo 1

- Considere a seguinte proposição H:

$$(P \leftrightarrow Q) \land \big(\neg(P \land R) \land (Q \leftrightarrow R)\big)$$

- Para provar que H é uma contradição, construímos a árvore da própria H.

Árvores Lógicas

Contradição – Exemplo 1

$$(P \leftrightarrow Q) \wedge \big(\neg(P \wedge R) \wedge (Q \leftrightarrow R)\big) \checkmark$$

$$P \leftrightarrow Q$$

$$\neg(P \wedge R) \wedge (Q \leftrightarrow R)$$

Decompor usando a regra:

$$\begin{array}{c} x \wedge y \\ x \\ y \end{array}$$

Árvores Lógicas

Contradição – Exemplo 1

$$(P \leftrightarrow Q) \land \big(\neg(P \land R) \land (Q \leftrightarrow R)\big) \checkmark$$

$$P \leftrightarrow Q$$

$$\neg(P \land R) \land (Q \leftrightarrow R) \checkmark$$

$$\neg(P \land R)$$

$$(Q \leftrightarrow R)$$

Decompor usando a regra:

$$\begin{array}{c} x \land y \\ x \\ y \end{array}$$

Árvores Lógicas

Contradição – Exemplo 1

$$(P \leftrightarrow Q) \land \big(\neg(P \land R) \land (Q \leftrightarrow R)\big)$$

$$P \leftrightarrow Q$$

$$\neg(P \land R) \land (Q \leftrightarrow R)$$

$$\neg(P \land R)$$

$$(Q \leftrightarrow R)$$

P	$\neg P$
Q	$\neg Q$

Decompor usando a regra: $\neg(x \leftrightarrow y)$

x	$\neg x$
$\neg y$	y

Árvores Lógicas

Contradição – Exemplo 1

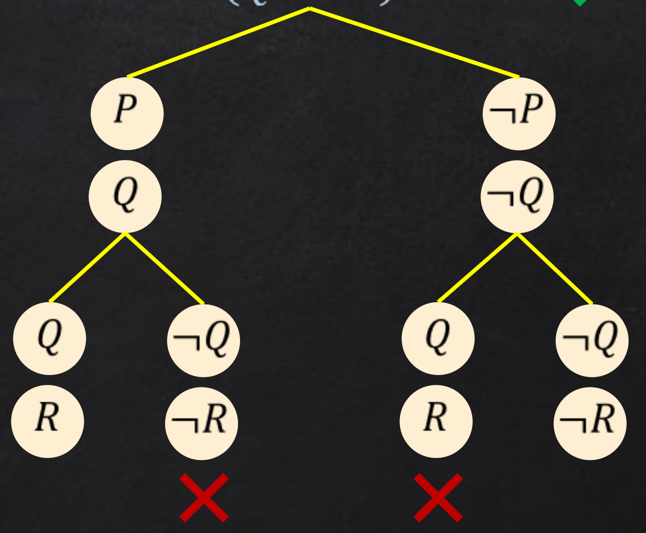
$$(P \leftrightarrow Q) \wedge \big(\neg(P \wedge R) \wedge (Q \leftrightarrow R)\big)$$

$$P \leftrightarrow Q$$

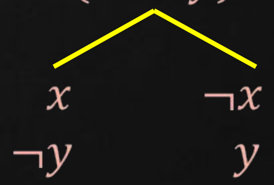
$$\neg(P \wedge R) \wedge (Q \leftrightarrow R)$$

$$\neg(P \wedge R)$$

$$(Q \leftrightarrow R)$$



Decompor usando a regra: $\neg(x \leftrightarrow y)$



Temos dois ramos fechados por contradição entre Q e $\neg Q$.

Ainda descompor a expressão $\neg(P \wedge R)$

Árvores Lógicas

Contradição – Exemplo 1

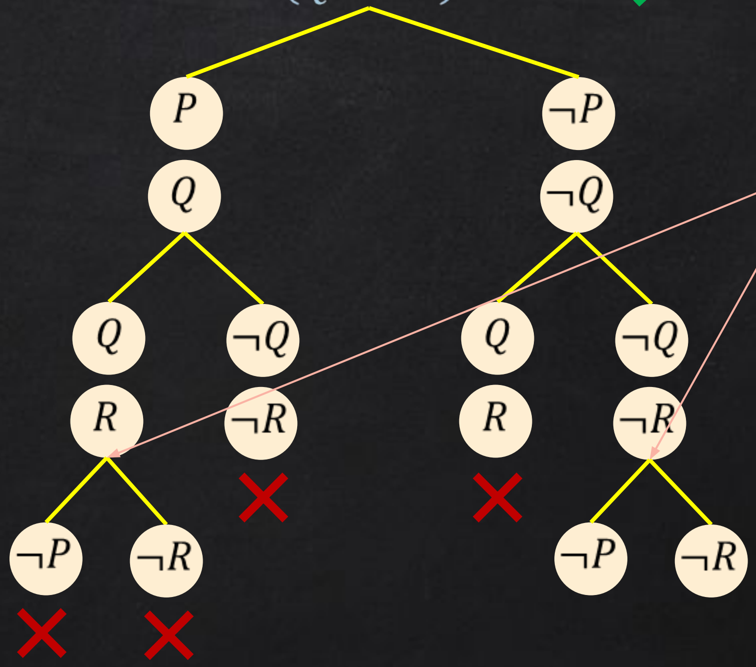
$(P \leftrightarrow Q) \wedge \big(\neg(P \wedge R) \wedge (Q \leftrightarrow R)\big)$ ✓

$P \leftrightarrow Q$ ✓

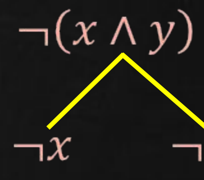
$\neg(P \wedge R) \wedge (Q \leftrightarrow R)$ ✓

$\neg(P \wedge R)$ ✓

$(Q \leftrightarrow R)$ ✓



Decompor usando a regra:



✘ Observe que a bifurcação se repete nos dois ramos abertos.

Temos mais dois ramos fechados por contradição entre P e $\neg P$; R e $\neg R$.

Todas as expressões foram decompostas.

Temos 2 ramos abertos.
A expressão pode ser verdadeira.
Não é contradição

Árvores Lógicas

Contingência

- Para verificar que uma proposição é uma contingência, precisamos excluir as possibilidades de que seja uma tautologia ou uma contradição.
- Verifica-se que ela não seja uma tautologia e que ela não seja uma contradição, com isso será uma contingência.

Árvores Lógicas

Consistência

- Um conjunto de proposições é consistente, se existe pelo menos uma forma (uma interpretação) que torne todas elas verdadeiras ao mesmo tempo.
- Já o conjunto de proposições é inconsistente se não existe nenhuma forma (uma interpretação) que torna elas verdadeiras ao mesmo tempo.
- Podemos usar árvores lógicas para mostrar que um conjunto de proposições é consistente (ou inconsistente).

Árvores Lógicas

Consistência – Exemplo 1

- Considere a seguinte conjunto de proposições:

$$(P \wedge \neg Q)$$
$$(Q \vee \neg R)$$
$$(\neg P \rightarrow R)$$

- Para provar a consistência, construímos a árvore lógica com o conjunto de proposições na raiz.
- Começamos pela proposição com decomposição em ramo único, seguida da decomposição em ramo duplo com dois níveis e por último da decomposição em ramo duplo com apenas um nível.

- Seria equivalente a assumir que o conjunto de proposições é representado por:

$$(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \rightarrow R)$$

- Aplicando-se uma generalização da regra:

$$\begin{array}{c} x \wedge y \\ x \\ y \end{array}$$

- Para três componentes:

$$\begin{array}{c} x \wedge y \wedge z \\ x \\ y \\ z \end{array}$$

Árvores Lógicas

Consistência – Exemplo 1

$(P \wedge \neg Q)$ ✓ Decompor usando a regra: $x \wedge y$

$(Q \vee \neg R)$ $\quad x$

$(\neg P \to R)$ $\quad y$

P

$\neg Q$

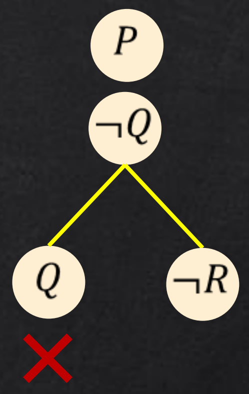
Árvores Lógicas

Consistência – Exemplo 1

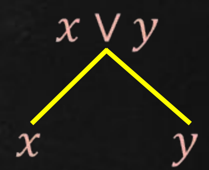
$(P \wedge \neg Q)$ ✓

$(Q \vee \neg R)$ ✓

$(\neg P \to R)$



Decompor usando a regra:



Temos um ramo fechado por contradição entre Q e $\neg Q$.

Ainda falta descompor a expressão $(\neg P \to R)$.

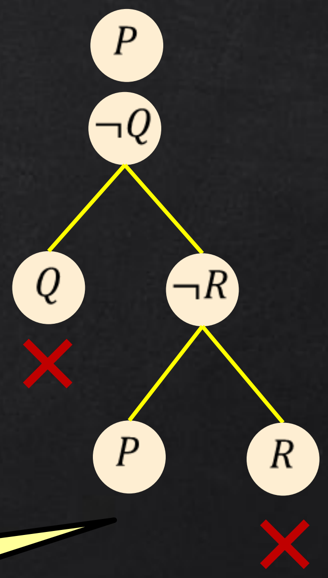
Árvores Lógicas

Consistência – Exemplo 1

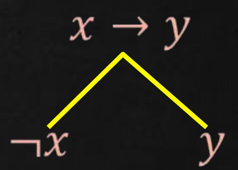
$(P \land \neg Q)$ ✓

$(Q \lor \neg R)$ ✓

$(\neg P \to R)$ ✓



Decompor usando a regra:



Temos outro ramo fechado por contradição entre R e $\neg R$.

Todas as expressões foram decompostas.

Temos 1 ramo aberto.
O conjunto é consistente

Árvores Lógicas

Argumentos Válidos

- Considere o seguinte argumento, com as suas premissas e a conclusão:
  - Premissas:

    $$\neg P \leftrightarrow Q$$

    $$\neg(P \vee R)$$
  - Conclusão:

    $$\neg Q \wedge \neg R$$

- Para provar se um argumento é válido (ou inválido), devemos construir uma árvore lógica usando as premissas e a negação da conclusão na raiz.
  - Se a arvore lógica tiver ao menos um ramo aberto, o argumento é inválido.
  - Já se a arvore lógica tiver todos os ramos fechados, o argumento é válido.

Árvores Lógicas

Argumentos Válidos – Exemplo 1

$\neg P \leftrightarrow Q$

$\neg(P \vee R)$ ✓ Decompor usando a regra: $\neg(x \vee y)$

$\neg(\neg Q \wedge \neg R)$ $\qquad \neg x$

$\qquad \neg y$

$\neg P$

$\neg R$

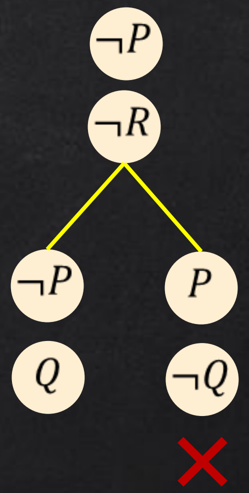
Árvores Lógicas

Argumentos Válidos – Exemplo 1

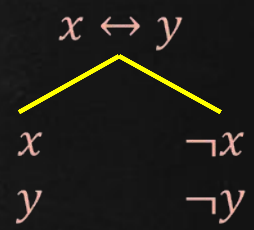
$\neg P \leftrightarrow Q$ ✓

$\neg(P \vee R)$ ✓

$\neg(\neg Q \wedge \neg R)$



Decompor usando a regra:



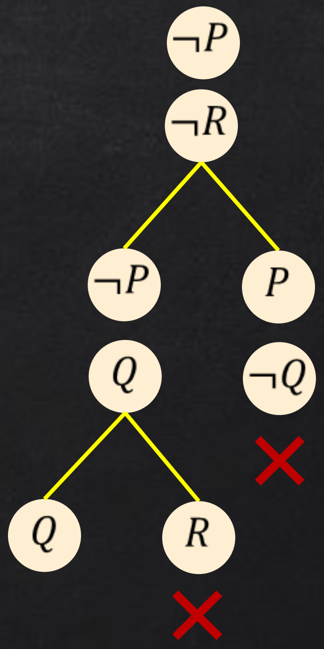
Árvores Lógicas

Argumentos Válidos – Exemplo 1

$\neg P \leftrightarrow Q$ ✓

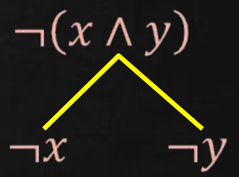
$\neg(P \vee R)$ ✓

$\neg(\neg Q \wedge \neg R)$ ✓



Temos 1 ramo aberto.
O argumento é inválido

Decompor usando a regra:



Temos dois ramos fechados por contradição entre R e $\neg R$; P e $\neg P$;

Todas as expressões foram decompostas.

Árvores Lógicas

Equivalência

- Para determinar a equivalência de duas proposições (saber se elas tem o mesmo valor de verdade sob todas as interpretações) podemos utilizar árvores lógicas.
- Para decidir se duas proposições são equivalentes devemos construir duas árvores lógicas:
  - A primeira árvore usando a primeira proposição e a negação da segunda como raiz;
  - A segunda árvore usando a negação da primeira proposição e a segunda proposição como raiz.
- Se qualquer uma das árvores tiver um ramo aberto, as proposições não serão equivalentes.
- Já se ambas árvores lógicas tiverem todos os ramos fechados, as proposições serão equivalentes.
- Observe que as expressões em ambas as árvores representam a negação da equivalência.

$$\neg(x \leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \land \neg y) \lor (\neg x \land y)$$

Árvores Lógicas

Equivalência – Exemplo

- Considere que queremos descobrir se as seguintes proposições são equivalentes:

$$\neg P \to (Q \to \neg R)$$

$$\neg(P \vee \neg Q) \to \neg R$$

- Devemos construir duas árvores com as seguintes raízes:

  - Árvore 1:

$$\neg P \to (Q \to \neg R)$$

$$\neg\,(\neg(P \vee \neg Q) \;\to \neg R)$$

  - Árvore 2:

$$\neg\left(\neg P \to (Q \to \neg R)\right)$$

$$\neg(P \vee \neg Q) \;\to \neg R$$

Árvores Lógicas

Equivalência – Exemplo

✔ **Árvore 1:**

$\neg P \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)$

$\neg\,(\neg(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R)$ ✔ Decompor usando a regra: $\neg(x \rightarrow y)$

x

$\neg y$

$\neg(P \vee \neg Q)$

R

Árvores Lógicas

Equivalência – Exemplo

- **Árvore 1:**

$$\neg P \to (Q \to \neg R)$$

$$\neg\,(\neg(P \vee \neg Q) \to \neg R)$$ ✓

$$\neg(P \vee \neg Q)$$ ✓

$$R$$

$$\neg P$$

$$Q$$

Decompor usando a regra:

$$\begin{array}{c} x \wedge y \\ x \\ y \end{array}$$

Ainda falta descompor a expressão $\neg P \to (Q \to \neg R)$.

Árvores Lógicas

Equivalência – Exemplo

✔ **Árvore I:**

$\neg P \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)$ ✓

$\neg\,(\neg(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R)$ ✓

$\neg(P \vee \neg Q)$ ✓

R

$\neg P$

Q

P ✗ $\qquad Q \rightarrow \neg R$

Decompor usando a regra: $x \rightarrow y$

$\neg x \qquad y$

Temos um ramo fechado por contradição entre P e $\neg P$;

Ainda falta descompor a expressão $(Q \rightarrow \neg R)$.

Árvores Lógicas

Equivalência – Exemplo

✔ **Árvore I:**

$\neg P \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)$ ✓

$\neg\,(\neg(P \vee \neg Q)\ \rightarrow \neg R)$ ✓

$\neg(P \vee \neg Q)$ ✓

R

$\neg P$

Q

P ✗ $\qquad Q \rightarrow \neg R$ ✓

$\neg Q$ ✗ $\qquad \neg R$ ✗

Decompor usando a regra: $x \rightarrow y$

$\neg x \qquad y$

Todas as expressões foram decompostas.

✘ Esta árvore mostra que é impossível que aconteça uma das condições para não equivalência.

Todos os ramos estão fechados

Árvores Lógicas

Equivalência – Exemplo

- **Árvore 2:**

$$\neg\left(\neg P \to (Q \to \neg R)\right)$$

$$\neg(P \vee \neg Q) \to \neg R$$

$$\neg P$$

$$\neg(Q \to \neg R)$$

- Decompor usando a regra:

$$\begin{array}{c} \neg(x \to y) \\ x \\ \neg y \end{array}$$

Árvores Lógicas

Equivalência – Exemplo

- **Árvore 2:**

$\neg\left(\neg P \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)\right)$ ✓

$\neg(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$

$\neg P$

$\neg(Q \rightarrow \neg R)$ ✓

Q

R

Decompor usando a regra: $\neg(x \rightarrow y)$
x
$\neg y$

Ainda falta descompor a expressão $\neg(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$.

Árvores Lógicas

Equivalência – Exemplo

- **Árvore 2:**

$\neg\left(\neg P \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)\right)$ ✓

$\neg(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$ ✓

$\neg P$

$\neg(Q \rightarrow \neg R)$ ✓

Q

R

$P \vee \neg Q$ $\qquad$ $\neg R$ ✗

Decompor usando a regra: $x \rightarrow y$

$\neg x$ $\qquad$ y

Temos um ramo fechado por contradição entre R e $\neg R$;

Ainda falta descompor a expressão $P \vee \neg Q$.

Árvores Lógicas

Equivalência – Exemplo

- **Árvore 2:**

$\neg\left(\neg P \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)\right)$ ✓

$\neg(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$ ✓

$\neg P$

$\neg(Q \rightarrow \neg R)$ ✓

Q

R

$P \vee \neg Q$ ✓ | $\neg R$ ✗

P ✗ | $\neg Q$ ✗

- Esta árvore mostra que é impossível que aconteça a outra condição para não equivalência. Com isso ambas expressões são equivalentes.

Decompor usando a regra: $x \vee y$ → x | y

Os dois ramos restantes são fechados por contradição entre P e $\neg P$; R e $\neg R$;

Todas as expressões foram decompostas.

Todos os ramos estão fechados nas duas árvores
As proposições são equivalentes.

Referências

- Zegarelli, Mark. Lógica para Leigos. Capítulo 8. A Verdade Nasce em Árvores. Editora Alta Books. Rio de Janeiro. 2013.
- De Souza, João Nunes. Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins. Capítulo 4. 3ª Edição. Editora Campus. São Paulo. 2015.