Cálculo III – 3a Avaliação – 23/11/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Matrícula: ____________________ **Curso:** ____________________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

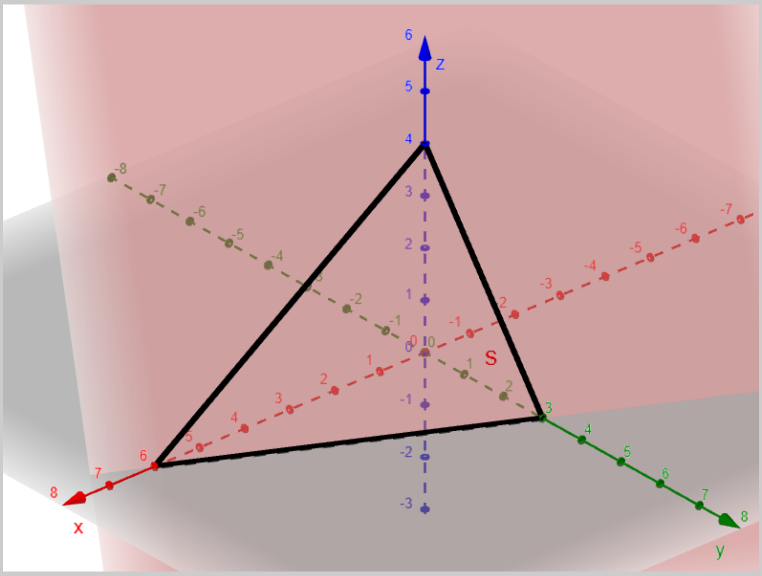
Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. (2 pontos) Seja S a parte do plano $2x+4y+3z=12$ que se encontra no primeiro octante. Calcule a área de S.

Solução:



A superfície S é naturalmente parametrizada por

$$\vec{r}(x,y) = \left(x, y, \frac{12-2x-4y}{3}\right), \qquad 0 \le x \le 6, \qquad 0 \le y \le 3 - \frac{x}{2}.$$

Temos

$$\vec{r}_x = \left(1, 0, -\frac{2}{3}\right), \qquad \vec{r}_y = \left(0, 1, -\frac{4}{3}\right),$$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1\right), \qquad \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| = \frac{\sqrt{29}}{3}.$$

Assim,

$$A = \int_0^6 \int_0^{3-x/2} \|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| \, dy \, dx = \int_0^6 \int_0^{3-x/2} \frac{\sqrt{29}}{3} \, dy \, dx$$
$$= \frac{\sqrt{29}}{3} \int_0^6 3 - \frac{x}{2} \, dx = \frac{\sqrt{29}}{3} \left[3x - \frac{x^2}{4}\right]_0^6 = 3\sqrt{29}.$$

2. Seja S o paralelogramo parametrizado por

$$\vec{r}(u,v) = (u+v,\, u-v,\, 1+2u+v), \quad 0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 1.$$

Solução:

Temos

$$\vec{r}_u = (1,\,1,\,2), \qquad \vec{r}_v = (1,-1,1),$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3,1,-2), \qquad \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{14}.$$

a) (2 pontos) Calcule $\displaystyle\iint_S x+y+z\,dS$.

Solução:

$$\begin{aligned}
&\iint_S x+y+z\,dS \\
&\quad = \int_0^2 \int_0^1 \big[(u+v)+(u-v)+(1+2u+v)\big]\,\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,dv\,du \\
&\quad = \int_0^2 \int_0^1 (1+4u+v)\sqrt{14}\,dv\,du = 11\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

b) (2 pontos) Seja $\vec{F}(x,y,z) = (ze^{xy},\, -3ze^{xy},\, xy)$. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, onde S segue orientação ascendente (dada por $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$).

Solução:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_S (ze^{xy},\, -3ze^{xy},\, xy)\cdot(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,dS \\
&= \int_0^2 \int_0^1 (ze^{xy},\, -3ze^{xy},\, xy)\cdot(3,1,-2)\,dv\,du \\
&= \int_0^2 \int_0^1 \cancel{3ze^{xy}} - \cancel{3ze^{xy}} - 2xy\,dv\,du \\
&= \int_0^2 \int_0^1 -2(u+v)(u-v)\,dv\,du = -4.
\end{aligned}$$

3. (2 pontos) Seja $\vec{F}(x,y) = (x-y,\ x+y)$ e C o círculo de raio 2 centrado na origem. Use o Teorema de Green para calcular

$$\oint_{\partial C} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde a circunferência ∂C é percorrida no sentido trigonométrico.

Solução:

Como de praxe, chame $\vec{F} = (P,Q) = (x-y,\ x+y)$. Pelo Teorema de Green,

$$\oint_{\partial C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_C \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \iint_C 1 - (-1)\, dA = \iint_C 2\, dA$$
$$= 2 \iint_C dA = 2 \cdot (\text{Área do círculo de raio 2}) = 8\pi.$$

4. (2 pontos) Seja $\vec{F}(x,y,z) = (e^{xz}\operatorname{sen}(yz),\ e^{xz}\cos(yz),\ z^2(x-y))$ e S o paralelepípedo dado por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 4\right\}.$$

Use o Teorema da Divergência para calcular

$$\oiint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

onde a superfície ∂S segue orientação positiva (com a normal apontando para fora).

Solução:

Como de praxe, chame $\vec{F} = (P,Q,R) = (e^{xz}\operatorname{sen}(yz),\ e^{xz}\cos(yz),\ z^2(x-y))$. Pelo Teorema de Ostrogradski–Gauss,

$$\oiint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_S \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$
$$= \iiint_S \cancel{ze^{xz}\operatorname{sen}(yz)} - \cancel{ze^{xz}\operatorname{sen}(yz)} + 2z(x-y)\, dV$$
$$= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^4 2z(x-y)\, dz\, dy\, dx = 16.$$

5. (0.1 pontos extras) Qual o nome do matemático russo que publicou a primeira demonstração do caso geral do Teorema da Divergência?

Resposta: **Ostrogradski ou Ostrogradsky**