NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITES

1) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ e usando uma calculadora determine:

a) $f\,(1{,}8)$

b) $f\,(1{,}85)$

c) $f\,(1{,}9)$

d) $f\,(1{,}96)$

e) $f\,(2)$

f) $f\,(2{,}1)$

g) $f\,(2{,}01)$

h) $f\,(2{,}001)$

i) $f\,(2{,}0001)$

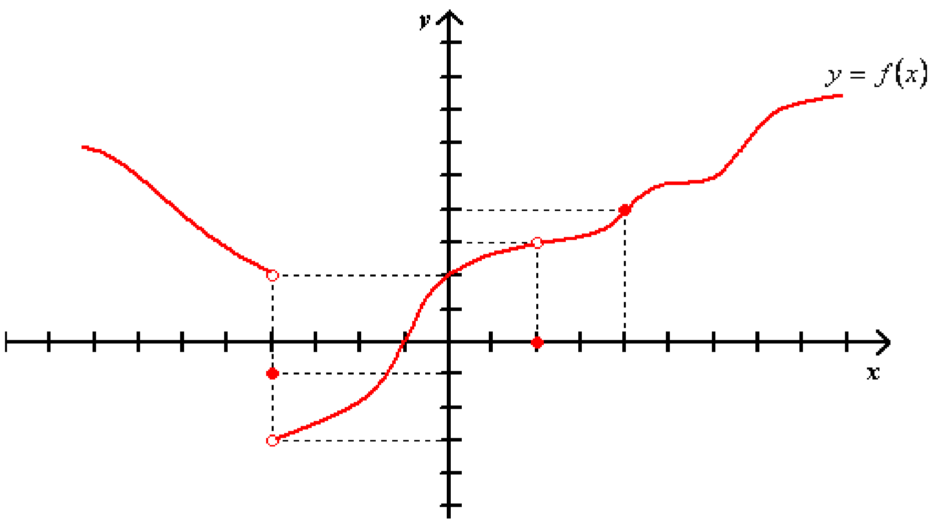
j) $f\,(2)$

2) Observe os resultados encontrados na questão anterior e responda:

a) Para quanto se "aproxima" o valor de $f(x)$ quando x se "aproxima" de 2 e é menor do que 2?

b) Para quanto se "aproxima" o valor de $f(x)$ quando x se "aproxima" de 2 e é maior do que 2?

3) Dado o gráfico da função, responda:



a) Para quanto se "aproxima" o valor de $f(x)$ quando x se "aproxima" de - 4 e x < - 4?

b) Para quanto se "aproxima" o valor de $f(x)$ quando x se "aproxima" de - 4 e x > - 4?

c) Qual é o valor de $f(x)$ quando x = - 4?

d) Para quanto "tende" o valor de f (ou se "aproxima") quando x "tende" a 2 pela esquerda (ou tende a 2 e é menor do que 2)?

e) Para quanto “tende” o valor de f quando x “tende” a 2 pela direita?

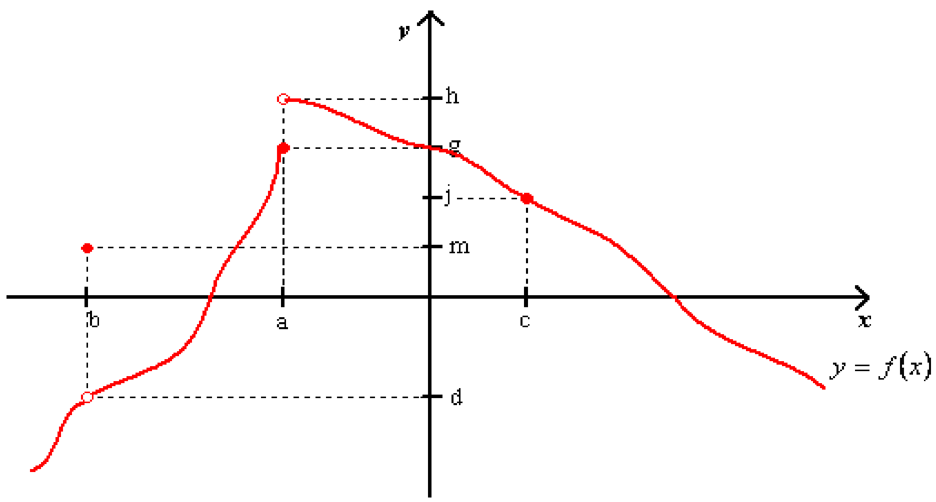
f) Qual é o valor de f quando $x = 2$?

g) Para quanto “tende” o valor de f quando x “tende” a 4 pela esquerda?

h) Para quanto “tende” o valor de f quando x “tende” a 4 pela direita?

i) Qual é o valor de $f(4)$?

4) Considere o gráfico de uma função dado abaixo e complete, corretamente, as sentenças seguintes:



a) Se x tende a a pela esquerda então $f(x)$ tende a ______.

Simbolicamente:

Se $x \to a^-$ então $f(x) \to$ ______.

b) Se x tende a a pela direita então $f(x)$ tende a ______.

Simbolicamente:

Se $x \to a^+$ então $f(x) \to$ ______.

c) $f(a) =$ ______.

d) Se $x \to b^-$ então $f(x) \to$ ______.

e) Se $x \to b^+$ então $f(x) \to$ ______.

f) $f(b) =$ ______.

g) Se $x \to c^-$ então $f(x) \to$ ______.

h) Se $x \to c^+$ então $f(x) \to$ ______.

i) $f(c) =$ ______.

Observações:

Dada uma função definida num intervalo aberto I, com $a \in$ I.

Para descrever o fato de que se $x \to a^-$ então $f(x) \to b$ escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = b}$$

(lê-se: limite de *f(x)* quando *x* "tende" a *a* pela esquerda é igual a *b*)

Analogamente, para descrever que se $x \to a^+$ então $f(x) \to c$ escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = c}$$

(lê-se: limite de *f(x)* quando *x* "tende" a *a* pela direita é igual a *c*)

Tais limites são denominados **limites laterais esquerdo e direito**, respectivamente.

Quando os limites laterais são iguais a *b* dizemos que existe o limite de *f(x)* no ponto *a* e, então escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

Assim, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se, e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b$.

Comentários sobre o exercício 4:

1) Observe que, em *f* quando $x \to a^-$ (lê-se: *x* "tende" a *a* pela esquerda), *f(x)* "tende" a g. Para descrever este fato em linguagem simbólica escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = \mathrm{g}}$$

(lê-se: limite de *f(x)* quando *x* "tende" a *a* pela esquerda é igual a g)

2) Observe que, em *f* quando $x \to a^+$ (lê-se: *x* "tende" a *a* pela direita), *f(x)* "tende" a h. Para descrever este fato em linguagem simbólica escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = \mathrm{h}}$$

(lê-se: limite de $f(x)$ quando x "tende" a a pela direita é igual a h)

3) Observe que, em f quando $x \to b^-$ (lê-se: x "tende" a b pela esquerda), $f(x)$ "tende" a d. Para descrever este fato em linguagem simbólica escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to b^-} f(x) = \mathrm{d}}$$

(lê-se: limite de $f(x)$ quando x "tende" a b pela esquerda é igual a d)

4) Observe que, em f quando $x \to b^+$ (lê-se: x "tende" a b pela direita), $f(x)$ "tende" a d. Para descrever este fato em linguagem simbólica escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to b^+} f(x) = \mathrm{d}}$$

(lê-se: limite de $f(x)$ quando x "tende" a b pela direita é igual a d)

5) Observe que $f(b) = m$ (a imagem de b é igual a m) é diferente dos limites encontrados nos itens *d* e *e*.

6) Observe que, em f quando $x \to c^-$ (lê-se: x "tende" a c pela esquerda), $f(x)$ "tende" a j. Para descrever este fato em linguagem simbólica escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to \mathrm{c}^-} f(x) = \mathrm{j}}$$

(lê-se: limite de $f(x)$ quando x "tende" a c pela esquerda é igual a j)

7) Observe que, em f quando $x \to c^+$ (lê-se: x "tende" a c pela direita), $f(x)$ "tende" a j. Para descrever este fato em linguagem simbólica escrevemos:

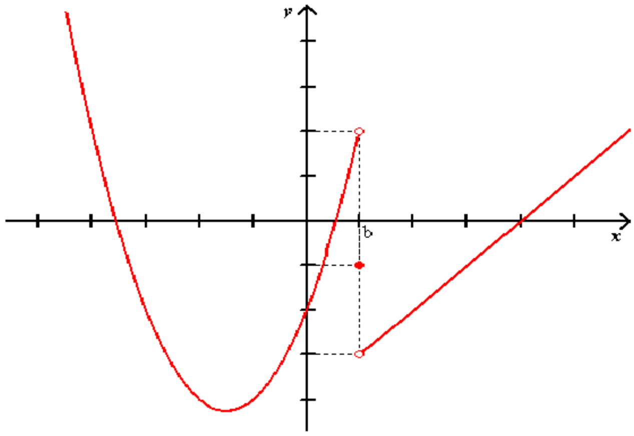
$$\boxed{\lim_{x \to \mathrm{c}^+} f(x) = \mathrm{j}}$$

(lê-se: limite de $f(x)$ quando x "tende" a c pela direita é igual a j)

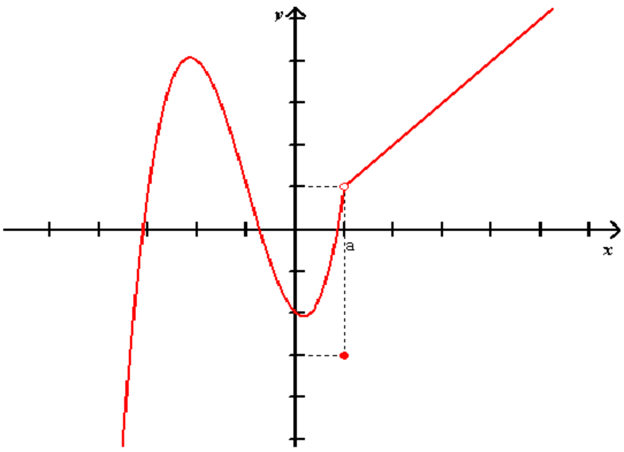
8) Observe que $f(c) = j$ (a imagem de c é igual a j) é igual aos limites encontrados nos itens *g* e *h*.

Conclusões:

Nos itens 1 e 2, podemos concluir que quando os limites laterais são diferentes, isto caracteriza geometricamente uma descontinuidade do tipo "**salto**" no ponto onde $x = b$.



$$\lim_{x\to b^-} f(x) \neq \lim_{x\to b^+} f(x)$$

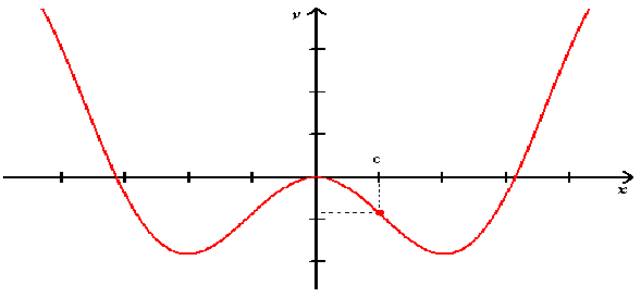


$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$$

Nos itens 3, 4 e 5 podemos concluir que quando os limites laterais são iguais, mas é diferente da imagem no ponto de abscissa a, esse fato algébrico revela geometricamente uma descontinuidade do tipo "**furo**" em $x = a$.

Nos itens 6, 7 e 8 podemos concluir que quando os limites laterais, no ponto estudado, são iguais e igual a imagem do ponto, esse fato algébrico revela geometricamente que a função é **contínua** nesse ponto.

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

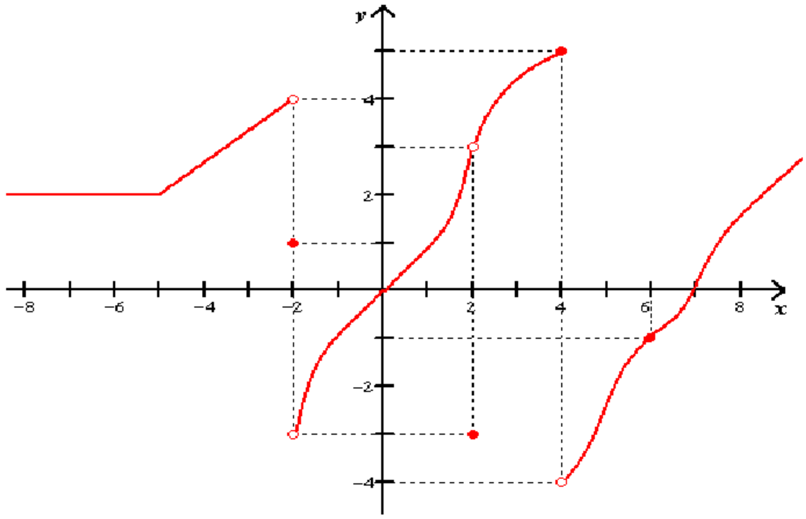


FUNÇÃO CONTÍNUA: Para provar que f é contínua em x_1 precisamos mostrar que três condições são satisfeitas:

i) $f(x_1)$ existe;
ii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ existe;
iii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Exemplo: Verifique se $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \leq 1 \\ 3x - 5 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua em $x_1 = 1$.

5) Dado o gráfico abaixo, determine, se existir:



a) $\lim\limits_{x \to -7^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -7^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -7} f(x)$

d) $f(-7)$

e) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

h) $f(-2)$

i) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

j) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

k) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

l) $f(2)$

m) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

n) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

o) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

p) $f(4)$

q) $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x)$

r) $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x)$

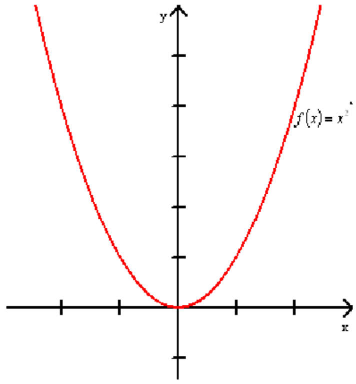
s) $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$

t) $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$

u) $f(6)$

v) $f(7)$

6) Considere a função $f(x) = x^2$ e seu gráfico dado. Calcule:



a) $f(-1)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} x^2$

c) $\lim\limits_{x \to -2} x^2$

d) $\lim\limits_{x \to 0} x^2$

e) $\lim\limits_{x \to 1} x^2$

f) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$

g) $\lim\limits_{x \to 3} x^2$

h) $\lim\limits_{x \to -4} x^2$

7) Calcule, se existir:

Para calcular o limite de uma função, primeiramente supomos que a função é contínua no ponto estudado, como no exemplo em x = 1. Com isso podemos calcular a imagem neste ponto e igualar ao limite, pois em funções contínuas o limite do ponto é igual à imagem do ponto. Sempre que o $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ dizemos que o limite pode ser calculado por **substituição direta**.

$$\boxed{\text{a) } \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3}{1 + x} = f(1) = -1}$$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{3x + 1}$

c) $\lim\limits_{t \to 1} \left(-t^3 + t^2 + 5t - 5\right)$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{sen}^2\, x + \cos^2 x}{\text{sen}\, x}$

e) $\lim\limits_{x \to 5} 1$

f) $\lim\limits_{\alpha \to \pi} \text{sen}\, \alpha$

g) $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \cos \alpha$

h) $\lim\limits_{a \to 10} (a + 1)^2$

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\left(5x^2 - 3x + 2\right)^3}{\sqrt{x + 15}}$

j) $\lim\limits_{x \to 2} \log\left(x^2 + 6\right)^2$

k) $\lim\limits_{x \to 64} \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)$

l) $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - 3x + 5\right)$

m) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{x}$

n) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x}{1 - x}$

o) $\lim\limits_{x \to 0} 2^x$

p) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - x}$

q) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x - 7}{x}$

r) $\lim\limits_{x \to -2} \left[\log_3 \left(\dfrac{x^2 - 3x}{8 - x}\right)\right]$

s) $\lim\limits_{x \to -2} \left(3^x + 2^x\right)$

Para os itens a seguir considere $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - x, \text{ se } -1 < x < 0 \\ e^x, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

t) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

u) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

v) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

x) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x)$

8) Considere as funções reais de variável real, e estude a continuidade no ponto pedido:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, \text{ se } x < 3 \\ x^2 - 5x + 8, \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$, para $x = 3$

Solução:

$f(3) = 3^2 - 5 \,.\, 3 + 8 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \exists \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$$

Como $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$ então a função f é contínua no ponto $x = 3$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x - 2, \text{ se } x \leq 3 \\ -2x + 5, \text{ se } x > 3 \end{cases}$, para $x = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 - \dfrac{x}{4}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, para $x = 2$

9) Considere a função $E(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ e calcule:

a) $E(1)$
b) $E(2)$
c) $E(4)$
d) $E(5)$
e) $E(10)$
f) $E(20)$
g) $E(50)$
h) $E(100)$
i) $E(1000)$
j) $E(10\ 000)$
k) $E(100\ 000)$
l) $E(1\ 000\ 000)$

Observações:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

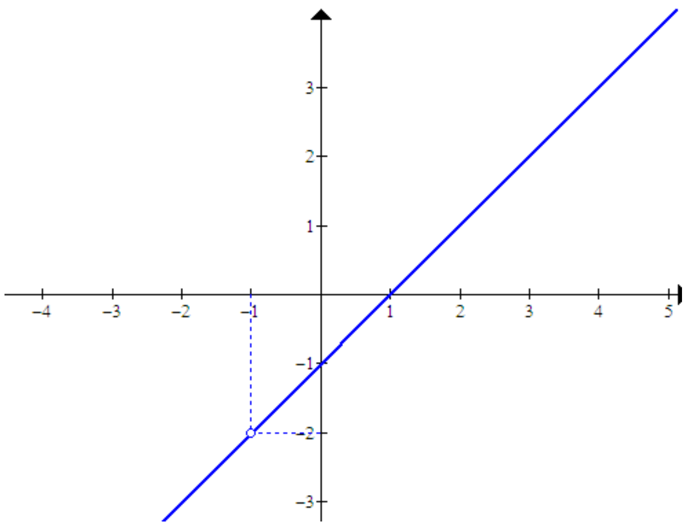
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\alpha}$$

10) Calcule, se existir:

a) $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

Para calcular este limite vamos analisar o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Observe que o gráfico da função *f* é descontínuo para x = -1. Existe um furo no gráfico.



Manipulando algebricamente a equação da função f obtemos uma nova lei:

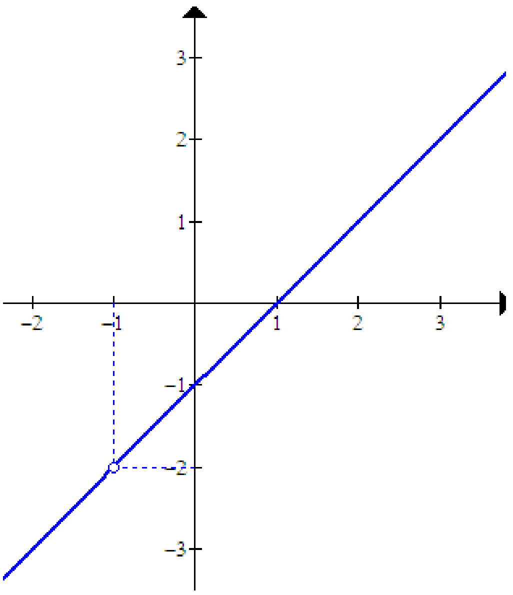
$$y = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)\cdot(x + 1)}{x + 1} = x - 1 \text{, desde que } x \neq -1$$

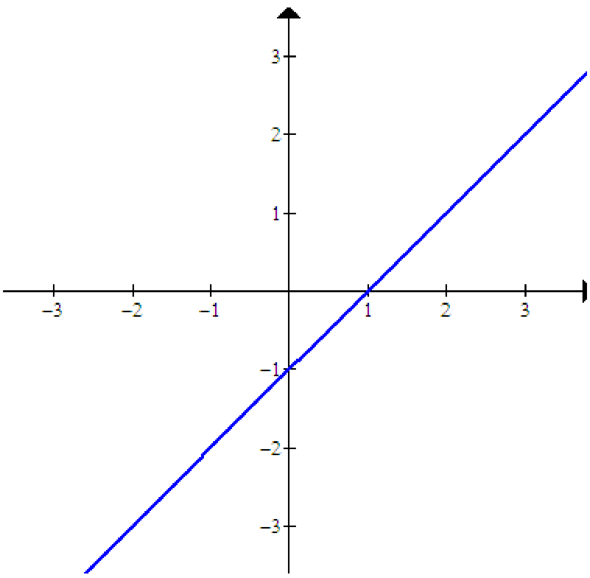
Podemos escrever a função f da seguinte maneira: como o numerador é a diferença dos quadrados de dois números, pode ser escrito como o produto da soma pela diferença desses números. Simplificando o numerador pelo denominador chegamos a ***h(x)*** = *x* – 1. Lembre-se que -1, não está definido para ambas as funções, ou seja, $D(f) = D(h) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Observe que o gráfico das funções f e h.

$\boxed{f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}}$

$\boxed{h(x) = x - 1}$





Podemos observar que o gráfico da função ***f(x)*** é idêntico ao gráfico de ***h(x)***, com exceção do ponto (-1, -2), que não está definido em ***f(x)***, pois ***x*** = -1 é o valor que anula o denominador da função, logo não está definido no domínio da função.

O limite não é o estudo no ponto, e sim, o estudo da vizinhança de um ponto. Desta forma utilizamos esta "nova" lei para calcular o limite da função $f(x)$ quando x tende a -1, pois os valores de f e h possuem o mesmo comportamento na vizinhança de x = -1. Compare o limite das duas funções, com a ajuda dos gráficos.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \left(x - 1\right) = -2$$

Lembre-se que quando calculamos o limite de uma função e encontramos o sinal de indeterminação $\frac{0}{0}$, podemos, em muitos casos, calcular este limite pelo limite de outra função cujo gráfico é igual (possui a mesma vizinhança do ponto estudado) ao gráfico da função desejada.

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x + x}{x^2 + 2x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x}$

f) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

g) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

h) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

i) $\lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

j) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 5x}{x}$

k) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}$

l) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

m) $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{x}$

n) $\lim_{x \to 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$

o) $\lim_{x \to 0} \log\left(x^2 - 4x + 1\right)$

p) $\lim_{t \to 1} \frac{t^3 + t^2 - 5t + 3}{t^2 - 3t + 2}$

q) $\lim_{x \to 3} \sqrt{2^x + 1}$

r) $\lim_{r \to 0} \frac{r}{3r^2 - 6r}$

s) $\lim_{s \to 2} \frac{s^2 - 4s + 4}{s^2 + s - 6}$

t) $\lim_{x \to 4} \frac{4 - x}{x^2 - 2x - 8}$

u) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + 2x}$

v) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - x}$

x) $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y^2 + 7y + 10}$

y) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$

z) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$

a.1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

b.1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

c.1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{1 + x + x^2}$

d.1) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{x - 1}{x}$

e.1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 4x}{x + 5}$

f.1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$

g.1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x - 1}$

h.1) $\lim\limits_{x \to 1} 7$

i.1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x - 2)^2}$

Solução:

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x - 2)^2} = \dfrac{3}{0}$ (Impossível)

Teste:

$x = 1{,}9 \rightarrow \dfrac{3}{(x - 2)^2} = 300\ (+)$

$x = 2{,}1 \rightarrow \dfrac{3}{(x - 2)^2} = 300\ (+)$

então $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x - 2)^2} = +\infty$.

j.1) $\lim\limits_{x \to 2} -\dfrac{3}{(x - 2)^2}$

k.1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x}{x - 1}$

l.1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$

m.1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x - 2}$

n.1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{|x - 4|}$

o.1) $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{x^2}$

p.1) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x + 2}{2 - x}$

q.1) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3 - x}{x^2}$

r.1) $\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 3)$

s.1) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x + 1}{x + 5}$

t.1) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{|x|}$

LIMITES INFINITOS E ASSÍNTOTAS VERTICAIS

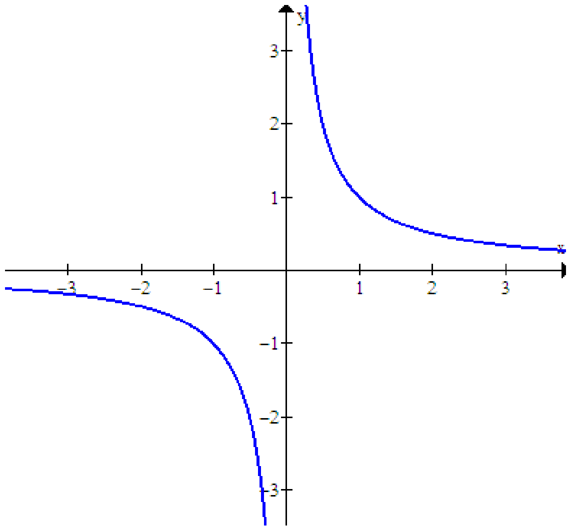
Observe o gráfico cartesiano da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e responda:

i) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

ii) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

iii) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

iv) $f(0) =$



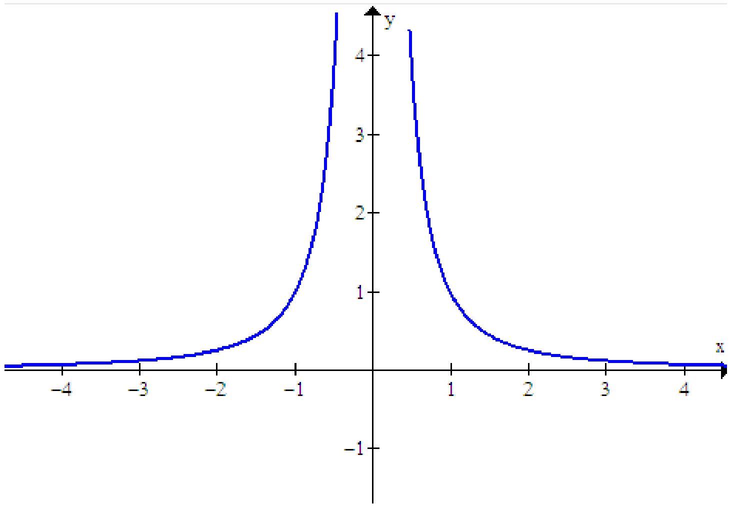
Observe o gráfico cartesiano da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e responda:

i) $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

ii) $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

iii) $\lim_{x \to 0} f(x) =$

iv) $f(0) =$



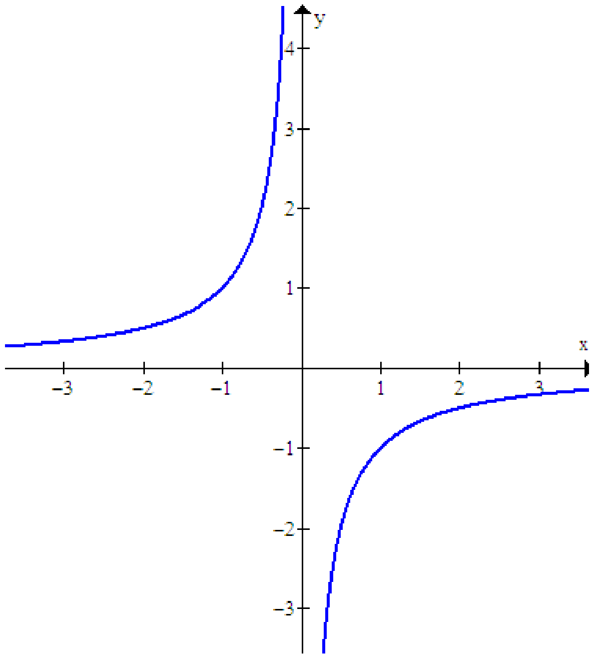
Observe o gráfico cartesiano da função $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ e responda:

i) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

iv) $f(0) =$



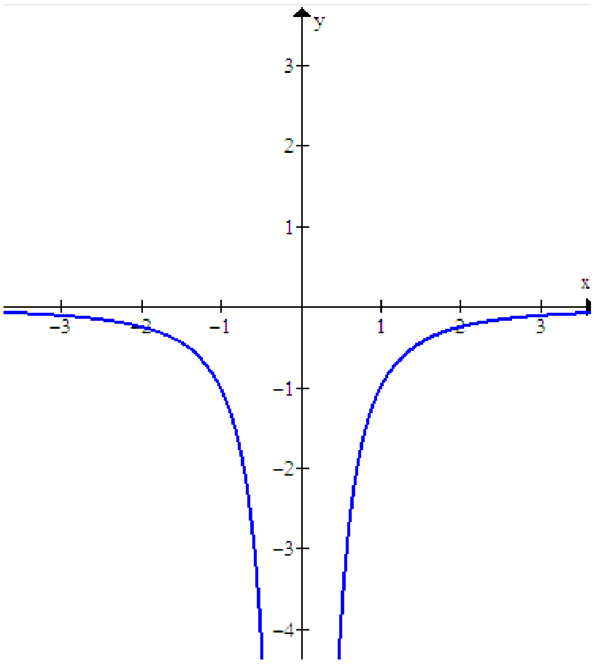
Observe o gráfico cartesiano da função $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ e responda:

i) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

iv) $f(0) =$



Se o valor de *f(x)* cresce indefinidamente quando x "tende" a a, pela esquerda ou pela direita, então podemos escrever

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

conforme for apropriado, e dizemos que *f(x)* cresce sem limitação quando x "tende" a a pela esquerda $\left(x \to a^-\right)$ ou x "tende" a a pela direita $\left(x \to a^+\right)$.

De forma análoga, se o valor de *f(x)* decresce indefinidamente quando x "tende" a a, pela esquerda ou pela direita, então escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

conforme for apropriado, e dizemos que *f(x)* decresce sem limitação quando x "tende" a a pela esquerda $\left(x \to a^-\right)$ ou x "tende" a a pela direita $\left(x \to a^+\right)$.

Da mesma forma, se ambos os limites laterais forem $+\infty$, então escrevemos

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty}$$

e se ambos os limites laterais são iguais a $-\infty$, então escrevemos

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty}$$

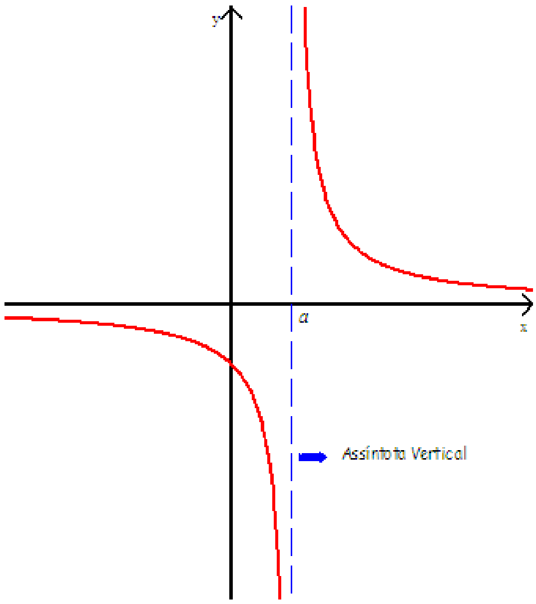
Conclusão:

Considere o $\lim_{x \to a} \dfrac{h(x)}{g(x)}$. Se o limite do denominador for zero, porém não o do numerador, então há três possibilidades para o limite da função racional quando $x \to a$:

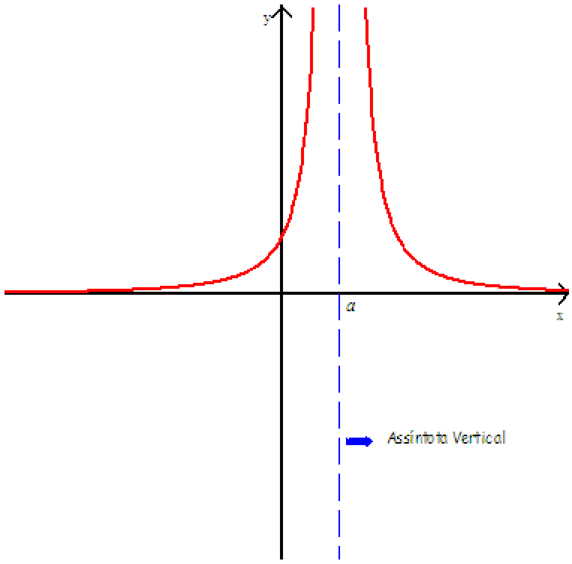
i) O limite poderá ser $+\infty$;
ii) O limite poderá ser $-\infty$;
iii) O limite poderá ser $+\infty$ de um lado e $-\infty$ do outro.

Assíntota Vertical

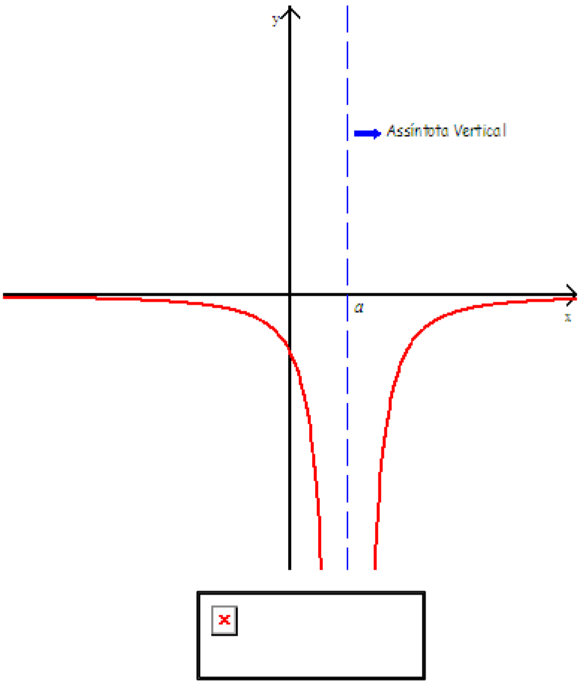
Uma reta $x = a$ é chamada de **assíntota vertical** do gráfico de uma função f se $f(x)$ "tende" a $-\infty$ ou $+\infty$, quando x "tende" a a pela esquerda ou pela direita.



$$f(x) = \frac{1}{x - a}$$



$$f(x) = \frac{1}{(x - a)^2}$$



Todas as funções, cujos gráficos estão anteriormente, têm uma assíntota vertical em $x = a$, a qual está indicada pela reta tracejada.

11) Calcule os limites, se existirem:

Para calcular o limite desta função, devemos calcular os limites laterais. Comparamos seus valores. Se forem iguais, existe o limite no ponto e este tem o mesmo valor dos limites laterais. Se forem diferentes, não existe o limite no ponto.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2} =$

Solução:

$f(2) = \dfrac{2^2 + 4}{2 - 2} = \dfrac{8}{0}$ (*Impossível*)

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2} = -\infty$

x	$f(x)$
1,9	- 76,1
1,99	- 796,01
1,999	- 7996,001
1,9999	- 79996,0001

Podemos concluir que quando x "tende" a 2 pela esquerda a função f decresce sem limitação, ou seja, "tende" a $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2} = +\infty$

x	$f(x)$
2,1	84,1
2,01	804,01
2,001	8004,001
2,0001	80004,0001

Podemos concluir que quando x "tende" a 2 pela direita a função f cresce sem limitação, ou seja, "tende" a $+\infty$.

Observação:

Acrescente mais valores na tabela, se julgar necessário, para ajudar a chegar às conclusões.

Se $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2} \neq \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$ então não existe o limite. $\boxed{\nexists \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x + 1} =$

Para calcular o limite desta função, devemos calcular os limites laterais. Comparamos seus valores. Se forem iguais, existe o limite no ponto e este tem o mesmo valor dos limites laterais. Se forem diferentes, não existe o limite no ponto.

Solução:

$f(1) = \dfrac{1 - 2}{1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = \dfrac{-1}{0}$ (*Impossível*)

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$

x	$f(x)$
0,9	- 110
0,99	- 10100
0,999	- 1001000
0,9999	- 100010000

Podemos concluir que quando x "tende" a 1 pela esquerda a função f decresce sem limitação, ou seja, "tende" a $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x + 1} = -\infty$

x	$f(x)$
1,1	- 90
1,01	- 9900
1,001	- 999000
1,0001	- 99990000

Podemos concluir que quando x "tende" a 1 pela direita a função f decresce sem limitação, ou seja, "tende" a $-\infty$.

Se $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x + 1}$ então existe o limite.

$$\boxed{\exists \lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 1} = -\infty}$$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{(x + 1)^2}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{1 - x}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{x - 2}$

12) Verifique se o gráfico das funções reais abaixo possui assíntota vertical. Em caso afirmativo estabeleça sua equação. Verifique suas respostas utilizando um *software* que possua recursos gráficos.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{(x - 4)^4}$

e) $f(y) = \dfrac{y - 3}{9 - y^2}$

f) $f(x) = \log(x - 3)$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

h) $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt[3]{x}}$

i) $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x - 4}}$

j) $f(x) = 5\log_2(3x + 2)$

13) Deposita-se a quantia de \$1000 em uma conta, a juro composto trimestralmente à taxa anual *r* (em forma decimal). O saldo *A* após 10 anos é

$$A = 1000\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{40}.$$

Existe o limite de *A* quando a taxa de juros tende para 6%? Em caso afirmativo, qual é o limite?

LIMITES INFINITOS E ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

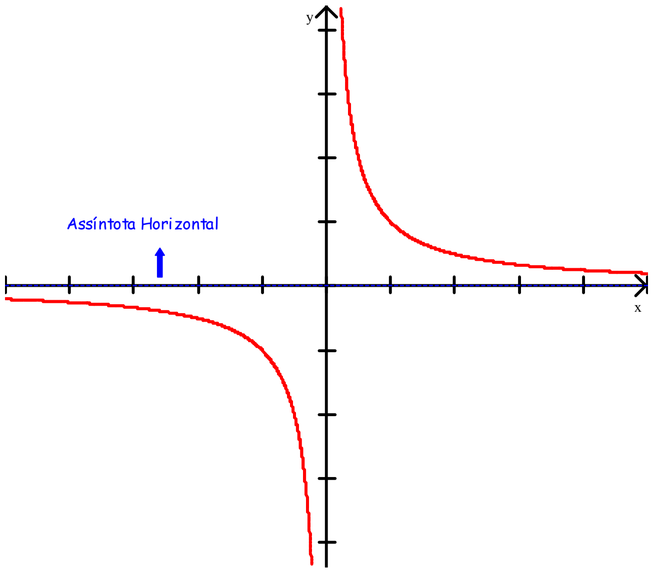
Observe o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e responda:

Para quanto "tende" *f(x)* à medida que x cresce sem limitação? _________.

Simbolicamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ______ .

Para quanto "tende" *f(x)* à medida que x decresce sem limitação? _________.

Simbolicamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ______ .



Observe a tabela abaixo:

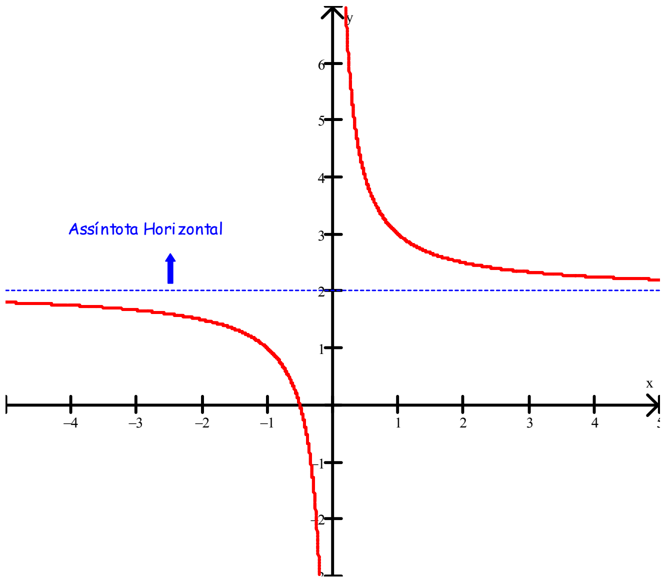
x decrescendo sem limitação ←   → x crescendo sem limitação

x	…	-10000	-1000	-100	-10	-1		1	10	100	1.000	10.000	…
f(x)	…	−0,0001	−0,001	−0,01	−0,1	−1		1	0,1	0,01	0,001	0,0001	…

$f(x)$ tendendo a zero ←   → $f(x)$ tendendo a zero

Os valores que completam a tabela comprovam o que pode ser observado no gráfico acima.

Observe o gráfico da função $g(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ e responda:



Para quanto “tende” *g(x)* à medida que x cresce sem limitação? __________.

Simbolicamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$ ______ .

Para quanto “tende” *g(x)* à medida que x decresce sem limitação? __________.

Simbolicamente, escrevemos $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$ ______ .

Observe a tabela abaixo:

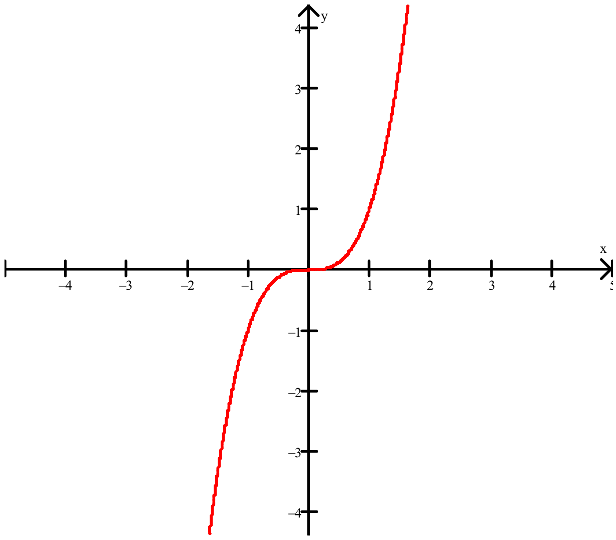
x decrescendo sem limitação ← | → x crescendo sem limitação

x	...	−10000	−1000	−100	−10	−1		1	10	100	1.000	10.000	...
$g(x)$	...	1,9999	1,999	1,99	1,9	1		3	2,1	2,01	2,001	2,0001	...

← $g(x)$ tendendo a dois | $g(x)$ tendendo a dois →

Os valores que completam a tabela comprovam o que pode ser observado no gráfico acima.

Observe o gráfico da função $h(x) = x^3$.



Quando x cresce sem limitação $h(x)$ também cresce sem limitação.

Simbolicamente, escrevemos $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{h}(x) = +\infty$.

Quando x decresce sem limitação $h(x)$ também decresce sem limitação.

Simbolicamente, escrevemos $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$.

Como se pode observar a curva h não possui assíntota horizontal.

← x decrescendo sem limitação | x crescendo sem limitação →

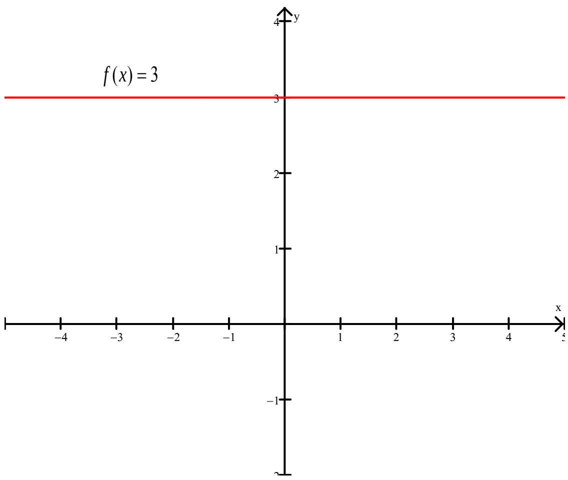
x	...	-10000	-1000	-100	-10	-1		1	10	100	1.000	10.000	...
$h(x)$	...	-10^{12}	-10^9	-10^6	-10^3	1		1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	...

← $h(x)$ decrescendo sem limitação | $h(x)$ crescendo sem limitação →

Observe os exemplos a seguir:

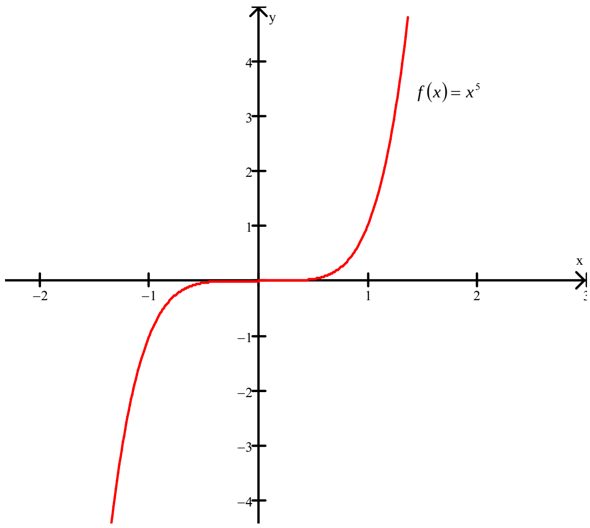
a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

O limite de uma função constante é a própria constante.

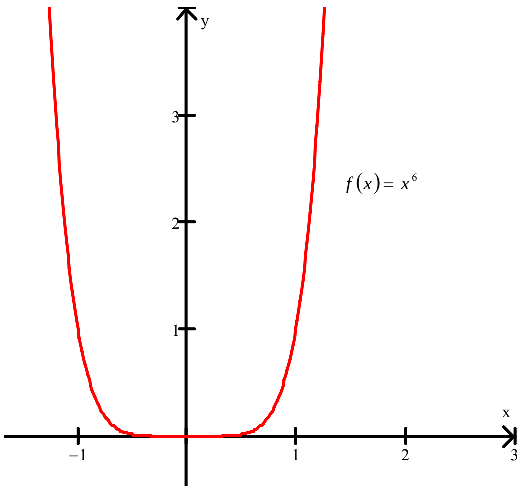


b) $\lim_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

Ao lado temos o gráfico da função polinomial $f(x) = x^5$, como podemos observar, quando x cresce sem limitação a função também cresce sem limitação e quando x decresce sem limitação a função também decresce sem limitação.



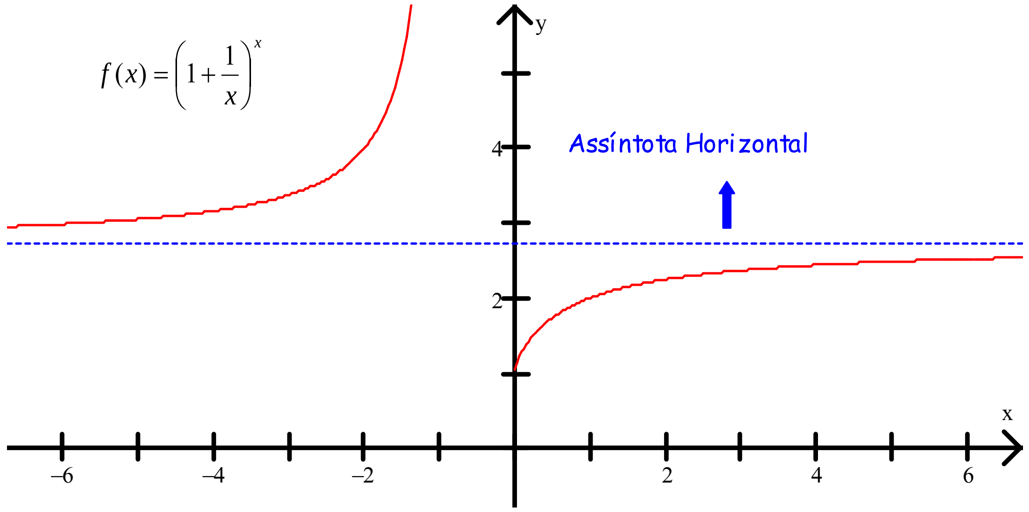
c) $\lim_{x \to +\infty} x^6 = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$



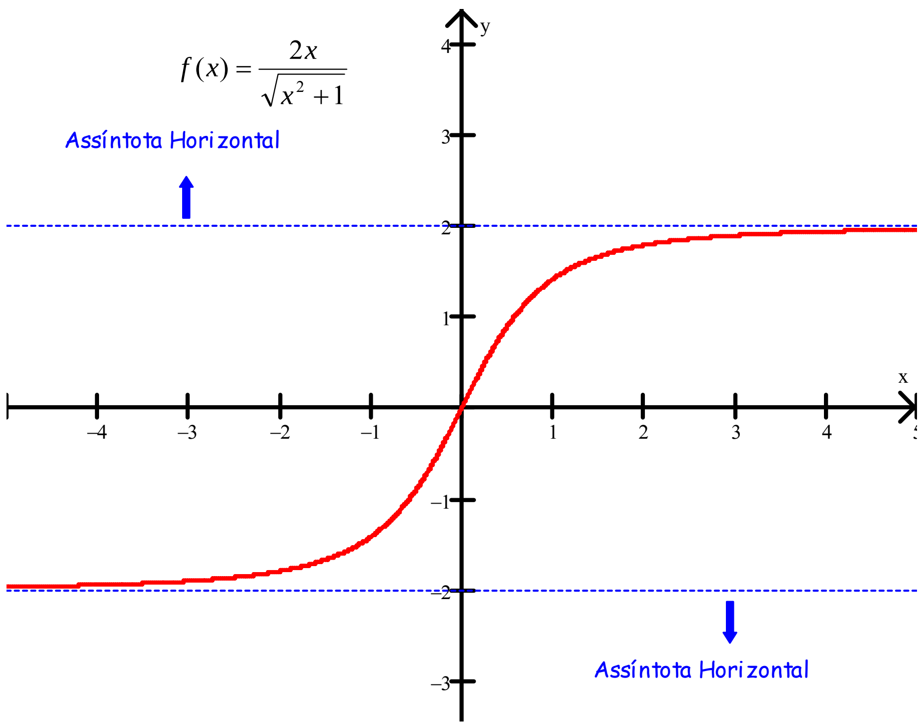
Ao lado temos o gráfico da função polinomial $f(x) = x^6$, como podemos observar, quando x cresce sem limitação a função também cresce sem limitação e quando x decresce sem limitação a função também cresce sem limitação.

Assíntota horizontal

Uma reta $y = L$ é chamada de **assíntota horizontal** do gráfico de uma função f se $f(x) \to L$, quando $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.



Quando $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L_2$, as retas $y=L_1$ e $y=L_2$ são assíntotas horizontais do gráfico de f . Algumas funções têm duas assíntotas horizontais: uma à direita e outra à esquerda, como por exemplo:



Vimos nos exercícios 9 e 10 que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

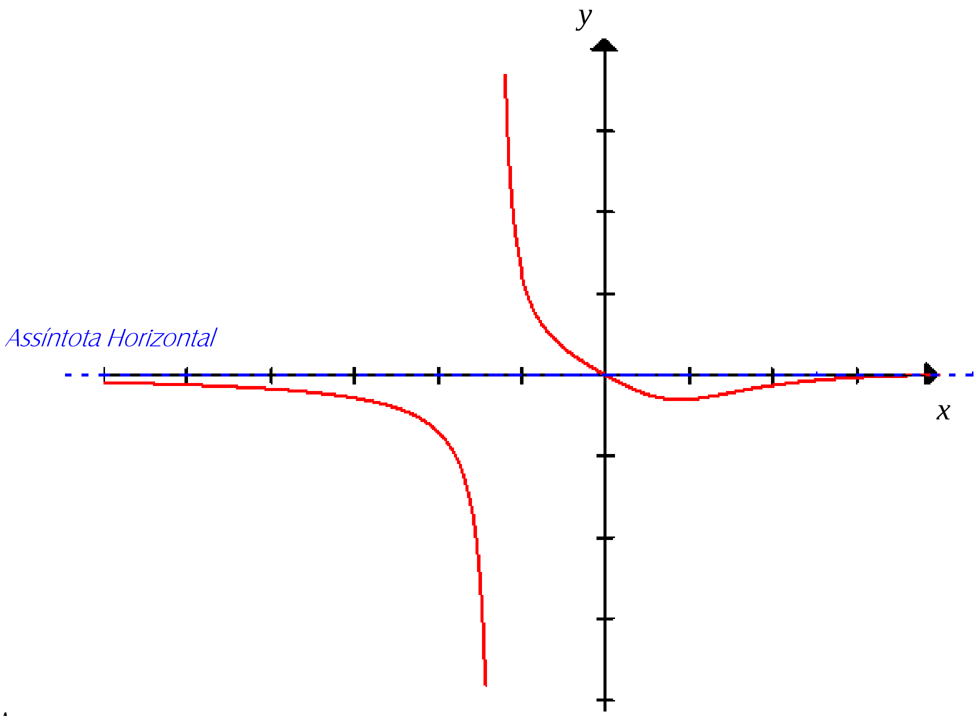
Mostraremos a seguir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2$ e que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -2$. Portanto o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ possui duas assíntotas horizontais.

Demonstração:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x}{|x|}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x}{|x|}}{\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{2x}{|x|}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{2x}{|x|}}{\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = -2$$

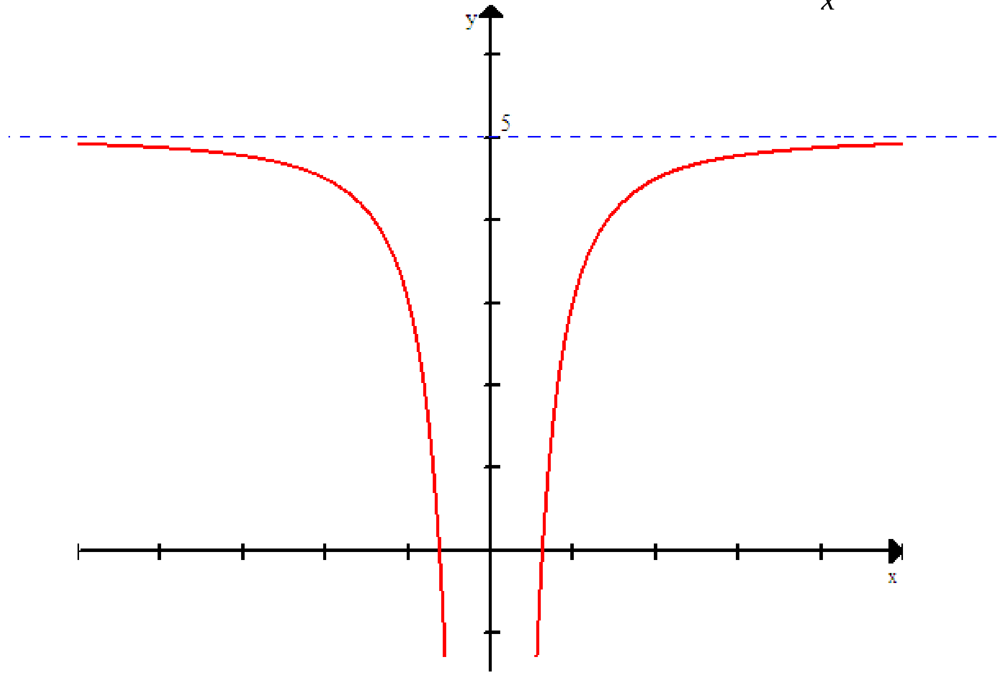
Note que o gráfico de uma função pode cortar suas assíntotas horizontais.



Exemplos:

1) Ache o limite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 - \dfrac{2}{x^2} \right)$.

Pode-se verificar este limite traçando o gráfico de $f(x) = 5 - \dfrac{2}{x^2}$:



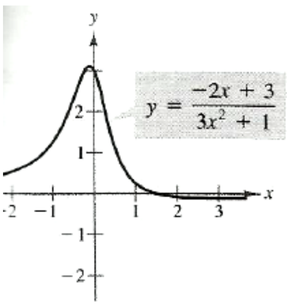
Note que o gráfico tem y = 5 como assíntota horizontal à direita. Calculando o limite de $f(x)$ quando $x \to -\infty$, vê-se que esta reta também é assíntota horizontal à esquerda.

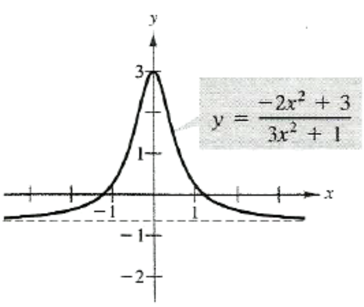
2) Ache as assíntotas horizontais dos gráficos das funções:

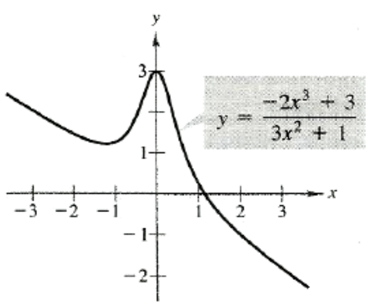
a) $y = \dfrac{-2x+3}{3x^2+1}$

b) $y = \dfrac{-2x^2+3}{3x^2+1}$

c) $y = \dfrac{-2x^3+3}{3x^2+1}$







3) A população *y* de uma cultura de bactérias segue o modelo da função logística

$$y = \frac{925}{1 + e^{-0,3\,t}}$$

onde *t* é o tempo em dias. A população tem um limite quando *t* cresce ilimitadamente?

4) A aprendizagem *P(t)* ao longo de *t* anos de trabalho de um operário é dada por

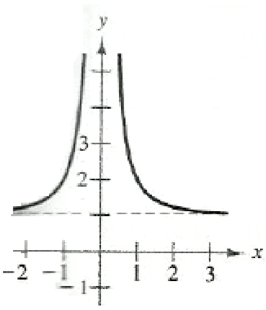
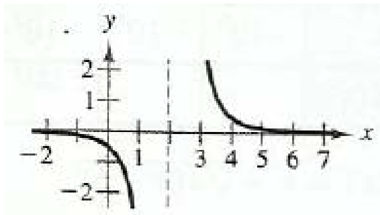
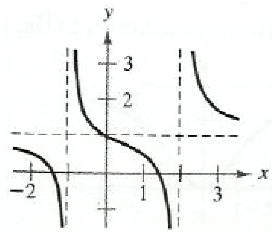
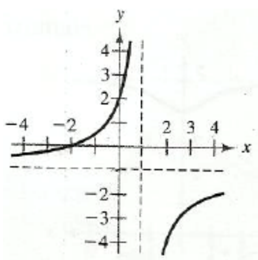
$$P(t) = 60 - 20.\ e^{-0,2t}.$$

O que ocorre com a aprendizagem depois de vários anos de trabalho?

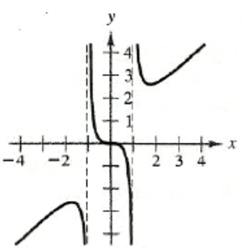
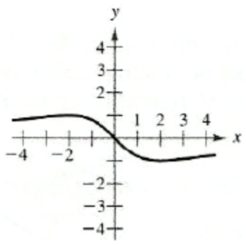
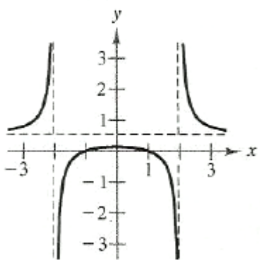
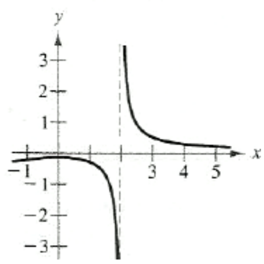
EXERCÍCIOS

14) Ache as assíntotas horizontais e verticais:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$ d) $f(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$

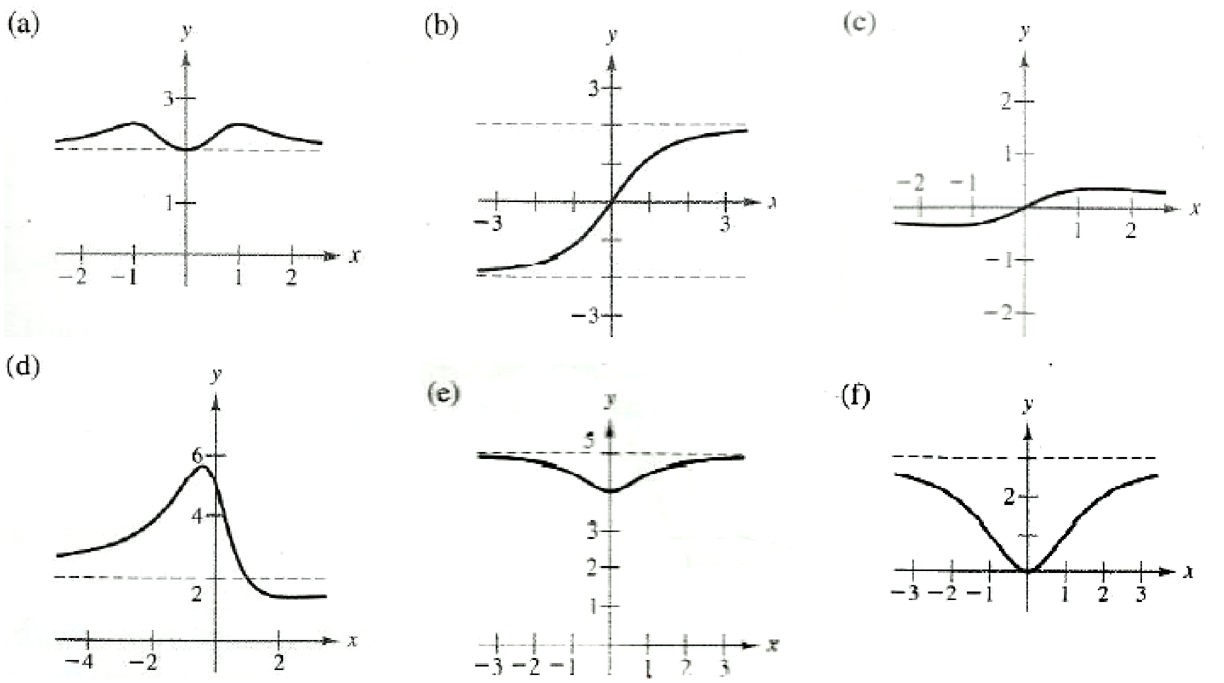
e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ f) $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2+4}$ g) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2-8}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-8}$

15) Associe cada função ao seu gráfico. Recorra às assíntotas horizontais como auxílio.

i) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2}$ ii) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ iii) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

iv) $f(x) = 2 + \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$ v) $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2 + 1}$ vi) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 + 1}$



16) Determine, se existirem, as equações das assíntotas horizontais dos gráficos das funções reais abaixo: (Verifique suas respostas utilizando um *software* que possua recursos gráficos.)

a) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x - 9}{x^2 + x - 6}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x + 2x^2}$

17) Determine os limites, se existir:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x - 3}{2x + 5}$

Solução:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (4x - 3) \div x}{\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 5) \div x} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x}} = \frac{4 - 3 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{2 + 5 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{4}{2} = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x + 2x^2}{-7 + 3x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + 5\right)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + 1365\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x\right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^4 + 7x^3 - x^2 + x + 1\right)$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 8}{x + 3}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - x + x^2 + 5x^3}{4 + x^3}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - 4x^3}{5x^3 - 8}$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(10 + e^{-x}\right)$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln (x + 1)\right]$

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3}{x^2 + 4x - 1}$

q) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$

r) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 1 + x^2, & x > 0 \end{cases}$

s) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

t) $\lim\limits_{x \to 0} e^{x}$

u) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\ln \left(1 + x - x^2\right)\right]$

Propriedades:

Se existem $L_1 = \lim_{x\to a} f(x)$ e $L_2 = \lim_{x\to a} g(x)$, então,

(1) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

O limite da soma é a soma dos limites.

(2) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$

O limite da diferença é a diferença dos limites.

(3) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$

O limite do produto é o produto dos limites.

(4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$

O limite do quociente é o quociente dos limites desde que o limite do denominador não seja zero.

(5) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = (L_1)^n$

O limite da potência é a potência do limite.

(6) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$, desde que $L_1 \geq 0$ se n for par.

O limite da raiz n-ésima é a raiz n-ésima do limite.

(7) $\lim_{x\to a} b^{(f(x))} = b^{\lim_{x\to a} f(x)} = b^{L_1}$, $0 < b \neq 1$.

O limite da exponencial é a exponencial do limite.

(8) $\lim_{x\to a}[\log_b f(x)] = \log_b\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = \log_b L_1$, desde que $L_1 \geq 0$ e $0 < b \neq 1$

O limite do logaritmo é o logaritmo do limite.