1a Prova de Cálculo III – 12/11/2019
Prof. Rafael B. de R. Borges

Aluno: ____

Matrícula: ____________________________________ **Turma: 2**

Instruções para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- Resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas absurdas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- **São proibidos:** folha própria de rascunho, calculadora, e celular. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.
- **Não desgrampeie o caderno de provas.**

Boa prova!

Questão 1. (2 pontos) Calcule o comprimento de arco da curva C parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \langle \cos(t), \operatorname{sen}(t), \cosh(t) \rangle, \quad 0 \le t \le 1.$$

Solução:

$$L = \int_C \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2 + \cos^2(t) + \operatorname{senh}^2(t)}\, dt$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(t)}\, dt = \int_0^1 \sqrt{\cosh^2(t)}\, dt = \int_0^1 \cosh(t)\, dt$$
$$= \operatorname{senh}(t) \Big|_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

Questão 2. Seja $\vec{F} = \left\langle \frac{1}{x^2} + \ln(y), \frac{x}{y} \right\rangle$ e C a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left\langle \sqrt{t} + 2, t^2 + 1 \right\rangle, \quad 0 \le t \le 1.$$

a) (1 ponto) Determine uma equação cartesiana para C.

Solução:
Várias soluções possíveis. Por exemplo, $y - 1 = (x - 2)^4$.

b) (1 ponto) Determine se $\vec{F}$ é conservativo ou não.

Solução:
Considere $P = \frac{1}{x^2} + \ln(y)$ e $Q = \frac{x}{y}$, de modos que $\vec{F} = \langle P, Q \rangle$. Temos

$$P_y = \frac{1}{y} = Q_x.$$

Como, além disto, P_x, P_y, Q_x e Q_y são todos contínuos para $0 \le t \le 1$, concluímos que $\vec{F}$ é um campo conservativo.

c) (1 ponto) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução:
Como $\vec{F}$ é conservativo, existe $f(x, y)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$. Pelo Teorema Fundamental das Integrais de Linha,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \nabla f \cdot \vec{r}\,'(t) dt = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)).$$

Vamos portanto achar $f(x, y)$. Temos

$$f(x, y) = \int P\, dx = -\frac{1}{x} + x \ln(y) + g(y)$$
$$\therefore \quad f_y(x, y) = \frac{x}{y} + g'(y) = Q = \frac{x}{y}$$
$$\therefore \quad g'(y) = 0 \quad \therefore \quad g(y) = K.$$

Podemos tomar a constante K como sendo zero, o que nos dá $f(x, y) = -\frac{1}{x} + x\ln(y)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -\frac{1}{x(1)} + x(1)\ln(y(1)) + \frac{1}{x(0)} - x(0)\ln(y(0)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1}+2} + (\sqrt{1}+2)\ln(1^2+1) + \frac{1}{\sqrt{0}+2} - (\sqrt{0}+2)\ln(0^2+1) \\ &= \frac{1}{6} + 3\ln 2.\end{aligned}$$

Questão 3. (2 pontos) Calcule $\int_C xy^2z\,ds$, onde C é o segmento de reta entre $(-1, 5, 0)$ e $(1, 6, 4)$.

Solução:

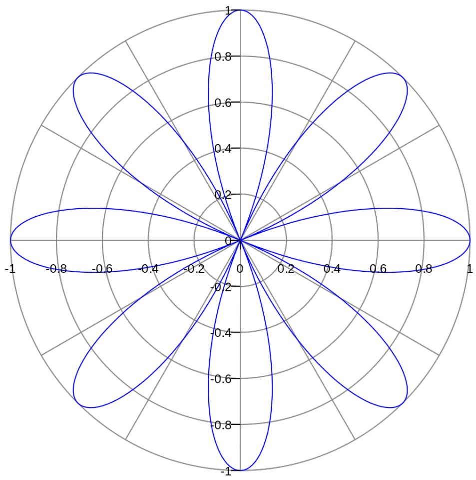
C pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (1-t)\langle -1,\, 5,\, 0\rangle + t\langle 1,\, 6,\, 4\rangle\,, \quad 0 \le t \le 1 \\ &= \langle 2t-1,\, t+5,\, 4t\rangle\,, \quad 0 \le t \le 1.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}&\int_C xy^2z\,ds = \int_0^1 x(t)[y(t)]^2 z(t)\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt \\ &= \int_0^1 (2t-1)(t+5)^2(4t)\sqrt{4+1+16}\,dt = 4\sqrt{21}\int_0^1 (2t^2-t)(t^2+10t+25)\,dt \\ &= 4\sqrt{21}\int_0^1 2t^4+20t^3+50t^2-t^3-10t^2-25t\,dt \\ &= 4\sqrt{21}\int_0^1 2t^4+19t^3+40t^2-25t\,dt = 4\sqrt{21}\left[\frac{2t^5}{5}+\frac{19t^4}{4}+\frac{40t^3}{3}-\frac{25t^2}{2}\right]_0^1 dt \\ &= 4\sqrt{21}\left(\frac{24+285+800-750}{60}\right) = \frac{359\sqrt{21}}{15}.\end{aligned}$$

Questão 4. (2 pontos) Seja C a rosa polar de 8 pétalas ilustrada abaixo, a qual é parametrizada por $\vec{r}(t) = \langle \cos(4t)\cos(t),\, \cos(4t)\,\mathrm{sen}(t)\rangle, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.



Determine o valor de $\displaystyle\oint_C (\mathrm{sen}(y) - \mathrm{sen}(x))\; dx + (e^y + x\cos(y))\; dy$.

Solução:

Considere $P = \mathrm{sen}(y) - \mathrm{sen}(x)$, $Q = e^y + x\cos(y)$ e $\vec{F} = \langle P, Q\rangle$, de forma que o que estamos querendo calcular é $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Primeiro, note que $\vec{F}$ é um campo conservativo, pois

$$P_y = \cos(y) = Q_x$$

e as derivadas parciais de P e Q são todas contínuas. Portanto, como $\vec{F}$ é um campo conservativo e C é uma curva fechada suave por partes, temos

$$\oint_C (\mathrm{sen}(y) - \mathrm{sen}(x))\; dx + (e^y + x\cos(y))\; dy = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Dicas:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh^2(x) - \mathrm{senh}^2(x) = 1,$$
$$(\cosh(x))' = \mathrm{senh}(x), \quad (\mathrm{senh}(x))' = \cosh(x).$$