EQS. LINEARES DE 2ª ORDEM

$y = f(x) \Rightarrow$ $\boxed{a_2(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x)}$

- $g(x) = 0 \Rightarrow$ EQ. HOMOGÊNEA
- $g(x) \neq 0 \Rightarrow$ EQ. NÃO HOMOGÊNEA
- $a_n(x)$, $n = 0, 1, 2 \Rightarrow$ SÃO CONSTANTES

CONTEXTO DIFERENTE
$M\,dx + N\,dy = 0$
$M = t^n M$ E
$N = t^n N$

EXS: $2.y'' - 5.y' - 3.y = 0$;

$y'' - 4.y' + 13.y = \text{sen}(3x)$,

CONSIDERAÇÕES GERAIS

- PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO;
- DEPENDÊNCIA/INDEPENDÊNCIA LINEAR DAS SOLUÇÕES $\Rightarrow$ WRONSKIANO.
- CJ FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES E SOLUÇÃO GERAL DA EDO.
- SOLUÇÕES EXPONENCIAS: EDO 2ª ORDEM

• PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO.

EX1 - • $y_1(x) = x^2$
• $y_2(x) = x^2 \ln(x)$

SÃO SOLUÇÕES DA EQ. $\boxed{x^3 y''' - 2x y' + 4y = 0}$, EM $(0, +\infty)$

ENTÃO A C.L.:

$$y(x) = \underbrace{C_1}_{} x^2 + \underbrace{C_2}_{} . x^2 \ln(x)$$ TB É SOLUÇÃO

SÃO CONSTANTES

EX2 - • $y = x^2$ É SOLUÇÃO DA EQ.

$\boxed{x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0}$, $(0, +\infty)$

$y(x) = C . x^2$ TB É SOLUÇÃO

DE FORMA GERAL:

$y_1, y_2, \dots, y_n$ => SÃO SOLUÇÕES, ENTÃO

$\boxed{y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n}$ TB É UMA SOLUÇÃO.

C_i, $i = 1, 2, \dots, n$ => CONSTANTES

• DEPENDÊNCIA LINEAR (L.D.)

O CONJUNTO $f_1, f_2, \ldots, f_n$ É L.D. SE:

$$\boxed{c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0} \quad (1)$$; (NEM TODAS CONSTANTES NULAS)

SENÃO: $$\boxed{c_2 f_2 = -c_1 f_1 + c_3 f_3 + \ldots + c_n f_n} \; ; \quad (2)$$

EX: $f_1 = \sqrt{x} + 5$;

$f_2 = \sqrt{x} + 5x$;

$f_3 = x - 1$;

$f_4 = x^2$, SÃO LD ! POIS:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = 0 \; ; \quad (3)$$

$$c_2 f_2 = -c_1 f_1 - c_3 f_3 - c_4 f_4 \; ; \quad (4)$$

$$\underset{1}{\cancel{c_2}} f_2 = -\underset{-1}{\cancel{c_1}}\left[\sqrt{x} + 5\right] - \underset{-5}{\cancel{c_3}}\left[x - 1\right] - \underset{0}{\cancel{c_4}}\, x^2 \; ; \quad (5)$$ SE

$c_1 = -1$

$c_2 = 1$

$c_3 = -5$

$c_4 = 0$

$$f_2 = \sqrt{x} + \cancel{5} + 5x - \cancel{5} - 0 \; ; \quad (6)$$

$$\boxed{f_2 = \sqrt{x} + 5x} \quad (7)$$

$[0, +\infty)$

• INDEPENDÊNCIA LINEAR (L.I)

FUNÇÕES SÃO L.I. SE NÃO FOREM L.D.

COMO SABER ? ?

- WRONSKIANO DAS FUNÇÕES

→ CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA VERIFICAR SE FUNÇÕES SÃO L.I.

$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n \Rightarrow$ SÃO LI SE

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \; ; \quad (8)$$

EX - VERIFIQUE SE $f_1(x) = e^{m_1 . x}$ E $f_2(x) = e^{m_2 . x}$, COM $m_1 \neq m_2$, SÃO L.I.

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} ;$$

$$W(e^{m_1 x}, e^{m_2 . x}) = \begin{vmatrix} e^{m_1 . x} & e^{m_2 . x} \\ m_1 e^{m_1 . x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} ; \quad (9)$$

$$W(e^{m_1 . x}, e^{m_2 . x}) = m_2 e^{m_1 x} . e^{m_2 x} - m_1 e^{m_1 x} . e^{m_2 x} ; \quad (10)$$

$$'' \quad = (m_2 - m_1) . e^{(m_1 + m_2) . x} ; \quad (11)$$

$\therefore \boxed{W(e^{m_1 . x}, e^{m_2 . x}) \neq 0}, \; \forall \; x \in \mathbb{R}.$

- DEFINIÇÃO – CJ FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES

É: QUALQUER CJ $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ DE

n SOLUÇÕES L.I. [A]

- DEFINIÇÃO – SOLUÇÃO GERAL (OU COMPLETA)

SE TEMOS $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ $\Rightarrow$ CJ. FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES

$$\boxed{y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)} \quad [B]$$

$\rightarrow$ SOLUÇÃO GERAL.

EX: $y'' - 9y = 0$ $\begin{cases} \rightarrow f_1(x) = e^{3x} ; & (1) \\ \rightarrow f_2(x) = e^{-3x} , & (2) \end{cases}$

[P1] ? CONSTITUEM CJ FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES?

$f_1' = 3e^{3x} \Rightarrow f_1'' = 9.e^{3x} \Rightarrow y_1'' - 9y_1 = 9e^{3x} - 9e^{3x},$

$y_1'' - 9y_1 = 0.$ (3)

$f_2' = -3e^{-3x} \Rightarrow f_2'' = 9e^{-3x} \Rightarrow y_2'' - 9y_2 = 9e^{-3x} - 9e^{-3x},$

$y_2'' - 9y_2 = 0.$ (4)

$\therefore$ f_1 E f_2 SÃO SOLUÇÕES!

SÃO LI.?

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0.$$

$\therefore$ SÃO LI.

SOLUÇÃO GERAL DA EQ. $y''-9y=0$ É:

$$\boxed{y = C_1 . e^{3x} + C_2\, e^{-3x}} \quad (5) \quad \text{EM } (-\infty,+\infty).$$

OBS: A EDO DE 1ª ORDEM:

$\boxed{y'+6y=0}$ ⇒ POSSUI SOLUÇÃO EXPONENCIAL: $\boxed{y = C_1 . e^{-6.x}}$ (1) EM $(-\infty,+\infty)$

NATURAL ⇒ PROCURAR SOLUÇÕES EXPONENCIAIS PARA E.D.O. DE ORDEM MAIORES.

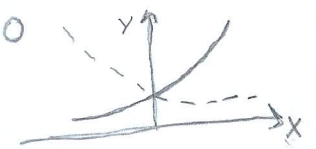
ESQUEMATICAMENTE

TENTAMOS $y = e^{m.x}$ PARA $y''+by'+cy=0$

⇒

LEVA-NOS A OBTER A EQ. AUXILIAR, OU SEJA:

$$\underbrace{(m^2+b.m+c)}_{=0} . \underbrace{e^{m.x}}_{\neq 0} = 0$$



⇓

$m^2+b.m+c=0$ EQ. AUXILIAR ⇒ 3 CASOS

- ⇒ $\Delta > 0 \Rightarrow m_1, m_2$
- ⇒ $\Delta = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m$
- ⇒ $\Delta < 0 \Rightarrow$ COMPLEXAS

⇓

CADA UM DESSES CASO ⇒ UM CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES

- EQ.: $\boxed{y'' + b.y' + c.y = 0}$ (1)

- TENTATIVA: $y = e^{m.x}$, (2)

$y' = m.e^{m.x}$, (3)

$y'' = m^2.e^{m.x}$, (4)

(2), (3) E (4) EM (1):

$m^2.e^{m.x} + b.m.e^{m.x} + c.e^{m.x} = 0$; (5)

$(m^2 + b.m + c).e^{m.x} = 0$; (6)

$\boxed{m^2 + b.m + c = 0}$. (7) EQ. AUXILIAR ou CARACTERISTICA.

OBS: SABENDO OS VALORES DE m, TEMOS SOLUÇÕES EM (2)

1º CASO: $\Delta > 0 \Rightarrow$ RAÍZES m_1, m_2 $(m_1 \neq m_2)$

TEOREMA I:

... RAÍZES DA EQ. AUXILIAR SÃO REAIS E DISTINTAS, ..., A SOLUÇÃO GERAL É:

$\boxed{y = C_1.e^{m_1.x} + C_2.e^{m_2.x}}$ (8)

EX 1 - RESOLVA $y'' - 3y' - 10y = 0$.

COM $\boxed{y = e^{m.x}}$ CHEGA-SE: $\boxed{m^2 - 3m - 10 = 0}$, (9)

$\boxed{m^2 + b.m + c = 0}$

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \longrightarrow \boxed{\Delta = b^2 - 4.1.c} \quad (10)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \longrightarrow \boxed{m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.1}} \quad (11)$$

ASSIM, PARA $m^2 - 3m - 10 = 0$

$$(m+2).(m-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -2 \Rightarrow y_1 = e^{-2x} \\ m_2 = 5 \Rightarrow y_2 = e^{5x} \end{cases}$$

PELO TEOREMA I:

VIMOS: SÃO LI.

$\boxed{y = c_1.e^{5x} + c_2.e^{-2x}}$, (12)

É A SOL. GERAL DA EQ. $\boxed{y'' - 3y' - 10y = 0}$