63–67 Use a geometria ou simetria, ou ambas, para calcular a integral dupla.

63. $\displaystyle\iint_D (x + 2)\,dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2}\}$

64. $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dA$, D é o disco com centro na origem e raio R

65. $\displaystyle\iint_D (2x + 3y)\,dA$, D é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$

66. $\displaystyle\iint_D (2 + x^2y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)\,dA, \quad D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant |y| \leqslant 1\}$

67. $\displaystyle\iint_D (ax^3 + by^3 + \sqrt{a^2 - x^2})\,dA, \quad D = [-a, a] \times [-b, b]$

SCA **68.** Desenhe o sólido limitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e determine seu volume exato. (Utilize seu SCA para fazer esse desenho, para achar as equações dos limites da região de integração e para calcular a integral dupla.)

15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y)\,dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos, a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

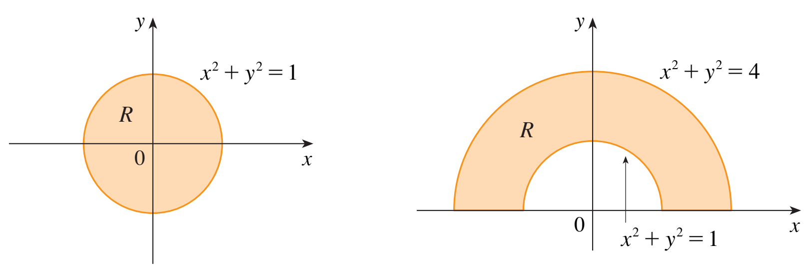


FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Lembre-se, a partir da Figura 2, de que as coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta}$$

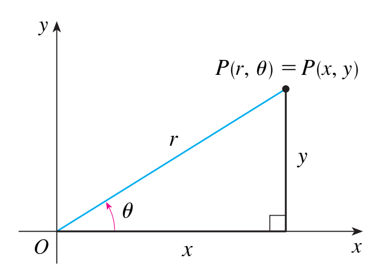


FIGURA 2

(Veja a Seção 10.3.)

As regiões da Figura 1 são casos especiais de um **retângulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$$

que é apresentado na Figura 3. Para calcularmos a integral dupla $\iint_R f(x, y)\,dA$, onde R é um retângulo polar, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b - a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Então, os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar R nos retângulos polares menores R_{ij} mostrados na Figura 4.

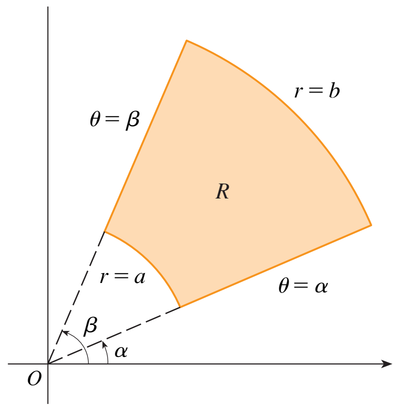


FIGURA 3 Retângulo polar

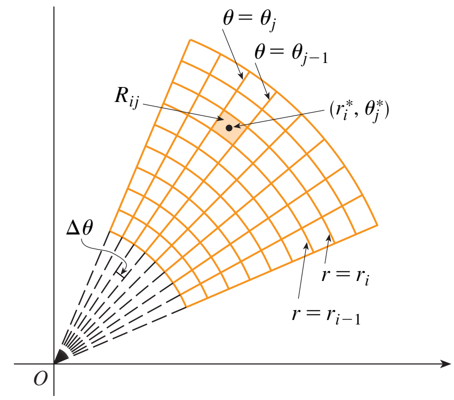


FIGURA 4 Divisão de R em sub-retângulos polares

O "centro" do sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i, \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$

tem coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Calculamos a área de R_{ij} usando o fato de que a área de um setor de círculo de raio r e ângulo central θ é $\frac{1}{2}r^2\theta$. Subtraindo as áreas de dois desses setores, cada um deles com ângulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, descobrimos que a área de R_{ij} é

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \tfrac{1}{2}r_i^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}r_{i-1}^2\,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta\end{aligned}$$

Apesar de termos definido a integral dupla $\iint_R f(x, y)\,dA$ em termos de retângulos convencionais, podemos mostrar que, para as funções contínuas f, obtemos a mesma resposta usando retângulos polares. As coordenadas retangulares do centro de R_{ij} são $(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)$, portanto, uma soma de Riemann típica é

$$\boxed{1} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\, r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Se escrevermos $g(r, \theta) = r f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, a soma de Riemann na Equação 1 pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta$$

que é a soma de Riemann para a integral dupla

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x, y)\,dA &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i \\ &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta\end{aligned}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$\boxed{2}$ **Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla** Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, onde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

A fórmula em $\boxed{2}$ diz que convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla escrevendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, usando os limites de integração adequados para r e θ e substituindo dA por $r\, dr\, d\theta$. Cuidado para não esquecer o fator adicional r no lado direito da Fórmula 2. Um método clássico para se lembrar disso está na Figura 5, onde podemos pensar nos retângulos polares "infinitesimais" como retângulos convencionais com dimensões $r\, d\theta$ e dr e, portanto, com "área" $dA = r\, dr\, d\theta$.

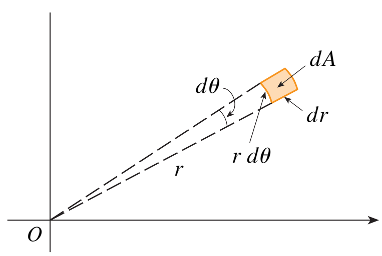


FIGURA 5

EXEMPLO 1 Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) \mid y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

É a metade do anel mostrado na Figura 1(b), e em coordenadas polares é dado por $1 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Portanto, pela Fórmula 2,

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x + 4y^2)\, dA &= \int_0^{\pi} \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\,\text{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\,\text{sen}^2\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \Big[r^3\cos\theta + r^4\,\text{sen}^2\theta\Big]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi} (7\cos\theta + 15\,\text{sen}^2\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[7\cos\theta + \tfrac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\right] d\theta \\
&= 7\,\text{sen}\,\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\,\text{sen}\,2\theta \Big]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}$$

Aqui usamos a identidade trigonométrica

$$\text{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Veja a Seção 7.2, no Volume I, para informações sobre a integração de funções trigonométricas.

EXEMPLO 2 Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUÇÃO Se tomarmos $z = 0$ na equação do paraboloide, obteremos $x^2 + y^2 = 1$. Isso significa que o plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 1$ e o sólido está abaixo do paraboloide e acima do disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$ [veja as Figuras 6 e 1(a)]. Em coordenadas polares, D é dado por $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Como $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, o volume é

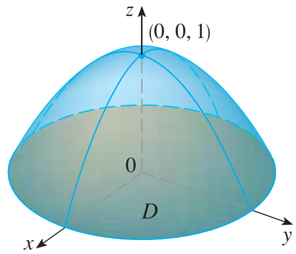


FIGURA 6

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Se trabalhássemos com coordenadas retangulares em vez de coordenadas polares, obteríamos

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

que não é fácil de calcular, pois envolve determinar $\int (1 - x^2)^{3/2}\, dx$.

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais complicados, como o mostrado na Figura 7. Isso é semelhante à região com coordenadas retangulares do tipo II vista na Seção 15.3. De fato, combinando a Fórmula 2 desta seção com a Fórmula 15.3.5, obtemos o seguinte.

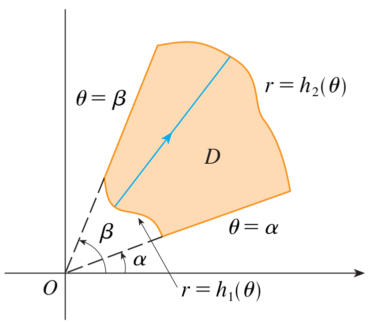


FIGURA 7
$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$

3 Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

então $$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Em particular, tomando $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$ nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[h(\theta)]^2\, d\theta$$

que coincide com a Fórmula 10.4.3.

EXEMPLO 3 Use a integral dupla para determinar a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r = \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO Do esboço da curva na Figura 8, vemos que um laço da rosácea de quatro pétalas corresponde à região

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$$

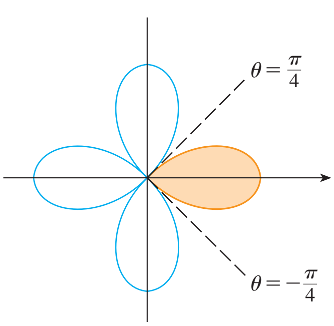


FIGURA 8

Então, a área é

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{4}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\, 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUÇÃO O sólido está acima do disco D cujo limite tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar os quadrados,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(Veja as Figuras 9 e 10.)

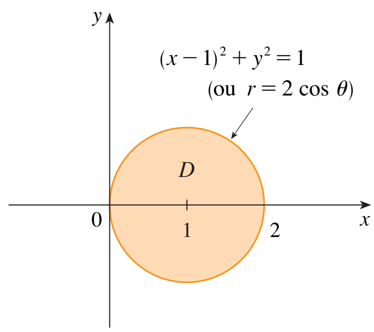


FIGURA 9

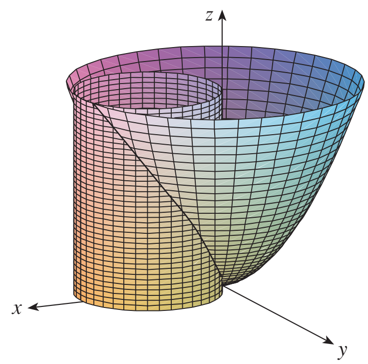


FIGURA 10

Em coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r\cos\theta$, assim, o limite circular fica $r^2 = 2r\cos\theta$ ou $r = 2\cos\theta$. Portanto, o disco D é dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\}$$

e, da Fórmula 3, temos

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

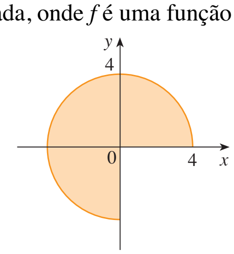
$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right] d\theta$$

$$= 2\left[\tfrac{3}{2}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

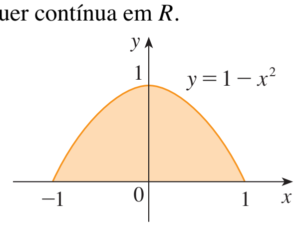
15.4 Exercícios

1–4 Uma região R é mostrada. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares, e escreva $\iint_R f(x, y)\,dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R.

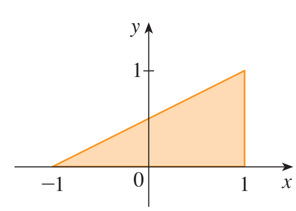
1.



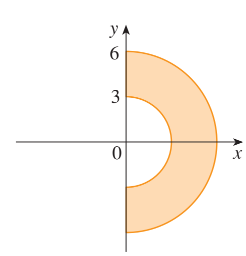
2.



3.



4.



5–6 Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a.

5. $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/4} \int_1^2 r\,dr\,d\theta$

6. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r\,dr\,d\theta$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com