CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
LABORATÓRIO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

Curso: Ciência da Computação **Disciplina:** Estatística e Probabilidade
Data: 20./.03./2024

Lista de exercícios 2 – Probabilidades

1.- Ao extrair uma carta do baralho (onde se tem 52 cartas). Qual é a probabilidade de se obter:
a) um as de espadas? b) um as? c) um as ou uma figura? d) um as de espadas ou uma figura?

Resposta 1.-

a) O baralho tem exatamente um as de espadas. Define-se o evento X =”Obter um as de espadas”. Aplicando-se a definição de probabilidades:
$P(X) = 1/52$
b) O baralho tem um as de cada naipe (paus, copas, espadas e ouros). Define-se o evento X =”Obter um as”
$P(X) = 4/52 = 1/13$
c) Existem três figuras em cada naipe (valete, dama e rei). Definem-se os eventos:
X = “Obter um as” e Y=”Obter uma figura”
$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) = 1/13 + 12/52 = 1/13 + 3/13 = 4/13$

Observe que não existe interseção entre X e Y.
d) Define-se os eventos:
X = “Obter um as de espadas” e Y=”Obter uma figura”
$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) = 1/52 + 12/52 = 13/52 = 1/4$

2.- Si se extraem ao acaso três cartas (sem reposição) de um baralho com 52 cartas. Qual é a probabilidade de que:
a) todas sejam copas? b) nenhuma seja copa? c) todas sejam figuras (valete, dama, ou rei)?

Resposta 2.-

No caso de extração de cartas sem reposição, é importante lembrar que o número de cartas diminui a cada extração.

a) Define-se os eventos:
X = “A primeira carta extraida é copa”

Y = “A segunda carta extraida é copa”
Z = “A terceira carta extraida é copa”

Lembre que existem 13 copas em um baralho. Assim:

P(X) = 13/52, P(Y) = 12/51 e P(Z) = 11/50

Pede-se: $P(X \cap Y \cap Z) = P(X).P(Y).P(Z) = (1/4)(12/51)(11/50) = 11/850$

b) Define-se os eventos:
X = “A primeira carta extraida não é copa”
Y = “A segunda carta extraida não é copa”
Z = “A terceira carta extraida não é copa”
As probabilidades correspondentes a estes eventos são:

P(X) = 39/52, P(Y) = 38/51 e P(Z) = 37/50

Pede-se: $P(X \cap Y \cap Z) = P(X).P(Y).P(Z) = (1/4)(19/17)(37/25) = 703/1700$

c) Sabe-se que existem três figuras em cada naipe. Em consequência temos 12 figuras em um baralho.

Define-se os eventos:
X = “A primeira carta extraida é uma figura”
Y = “A segunda carta extraida é uma figura”
Z = “A terceira carta extraida é uma figura”

As probabilidades correspondentes a estes eventos são:

P(X) = 12/52, P(Y) = 11/51 e P(Z) = 10/50

Pede-se: $P(X \cap Y \cap Z) = P(X).P(Y).P(Z) = (3/13)(11/51)(1/5) = 11/1105$

3.- Responda a questão 2, no caso com reposição das cartas.
Resposta 3.-

No caso de extração de cartas com reposição o número de cartas não diminui.

a) Define-se os eventos:
X = “A primeira carta extraida é copa”
Y = “A segunda carta extraida é copa”
Z = “A terceira carta extraida é copa”

Lembre que existem 13 copas em um baralho. Assim:

P(X) = 13/52, P(Y) = 13/52 e P(Z) = 13/52

Pede-se: $P(X \cap Y \cap Z) = P(X).P(Y).P(Z) = (1/4)(1/4)(1/4) = 1/64$

b) Define-se os eventos:
   X = "A primeira carta extraida não é copa"
   Y = "A segunda carta extraida não é copa"
   Z = "A terceira carta extraida não é copa"
   As probabilidades correspondentes a estes eventos são:

   $P(X) = 39/52$, $P(Y) = 39/52$ e $P(Z) = 39/52$

   Pede-se: $P(X \cap Y \cap Z) = P(X).P(Y).P(Z) = (3/4)(3/4)(3/4) = 27/64$

c) Sabe-se que existem três figuras em cada naipe. Em consequência temos 12 figuras em um baralho.

   Define-se os eventos:
   X = "A primeira carta extraida é uma figura"
   Y = "A segunda carta extraida é uma figura"
   Z = "A terceira carta extraida é uma figura"

   As probabilidades correspondentes a estes eventos são:

   $P(X) = 12/52$, $P(Y) = 12/52$ e $P(Z) = 12/52$

   Pede-se: $P(X \cap Y \cap Z) = P(X).P(Y).P(Z) = (3/13)(3/13)(3/13) = 27/2197$

4.- Dado o experimento que consiste no lançamento de dois dados. Definem-se os eventos:

a) A = ocorre um seis no 1º lançamento (dado);
   B = ocorre um seis no 2º lançamento (dado);
   C = o resultado é seis em ambos os lançamentos;
   Calcule P(C) e mostre a sua relação com a regra do produto. Diga se os eventos A e B são independentes;

b) A = ocorre um seis no 1º lançamento;
   B = ocorre um seis no 2º lançamento;
   C = o resultado é seis em pelo menos um dos dois lançamentos ;
   Calcule P(C) e mostre a sua relação com a regra da soma. Diga se os eventos A e B são disjuntos;

c) A = Obter no mínimo 7 no total de pontos dos dois dados;
   B = Obter no máximo 4 pontos em cada dado;
   C = Obter no máximo 4 pontos em cada dado e no mínimo 7 no total de pontos dos dois dados
   Calcule P(C). Diga se os eventos A e B são disjuntos; Diga se os eventos A e B são independentes.

Resposta 4.-

Considera-se o experimento aleatório definido como:

E = "dois dados são lançados e os resultados observados"

Neste problema é importante calcular o espaço amostral Ω do experimento. Onde:

$$\Omega = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix}$$

a) Observe que o evento A contempla os seguintes resultados possíveis:

   A = {(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

   Observe que o evento B contempla os seguintes resultados possíveis:

   B = {(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)}

   Aqui é importante perceber que C = A ∩ B = (6,6)

   Claramente, P(C) = 1/36

   Utilizando-se a regra do produto tem-se que: P(C) = P(A).P(B)= (1/6).(1/6) = 1/36

   Neste caso, claramente os eventos A e B são independentes. Uma vez que os resultados obtidos no lançamento do primeiro dado independem dos resultados obtidos no segundo dado.

b) Neste caso, da definição de C, tem-se que:

C = A ∪ B = {(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6)}

P(C) = 11/36

Utilizando-se a regra da soma calcula-se P(C):

P(C) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B) = 1/6 + 1/6 – 1/36 = 2/6 – 1/36 = 12/36 – 1/36 = 11/36

Os eventos A e B não são disjuntos A ∩ B = (6,6).

c) Ilustram-se os casos possíveis para cada evento:

   A = Obter no mínimo 7 no total de pontos dos dois dados;

$$\Omega = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix}$$

B = Obter no máximo 4 pontos em cada dado;

$$\Omega = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix}$$

Claramente, o evento C = A $\cap$ B.

$$\Omega = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix}$$

P(C) = 3/36 = 1/12

Os eventos A e B não são disjuntos. Eles têm interseção.
Os eventos A e B são dependentes. Utiliza-se probabilidade condicional.

5.- Um conjunto de candidatos a um emprego é formado por cinco homes e três mulheres. Entre essas oito pessoas, apenas duas serão escolhidas ao acaso para serem entrevistadas. Qual a probabilidade de que os entrevistados sejam um homem e uma mulher?

Resposta 5.-

O conjunto de candidatos é o seguinte: X = { xy, xy, xy, xy, xy, xx, xx, xx }
O experimento consiste em escolher duas pessoas do total de oito.

Calcula-se: $n(\Omega) = C_2^8 = \dfrac{8!}{2!(8-2)!} = \dfrac{8.7}{2} = 28$

A = As pessoas escolhidas são um homen e uma mulher.
Calcula-se: n(A) = 5x3 = 15

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{28}$$

Define-se os eventos A = O primeiro escolhido é homen
B = O segundo escolhido é mulher

C = O primeiro escolhido é mulher
D = O segundo escolhido é homen

Pede-se: $P(A \cap B) + P(C \cap D)$

$P(A) = 5/8$ e $P(B) = 3/7$
$P(C) = 3/8$ e $P(D) = 5/7$
$P(A \cap B) + P(C \cap D) = 15/56 + 15/56 = 30/56 = 15/28$

6.- Um executivo pediu à sua secretária que fizesse uma ligação para o escritório do Sr. X. Considerando que:

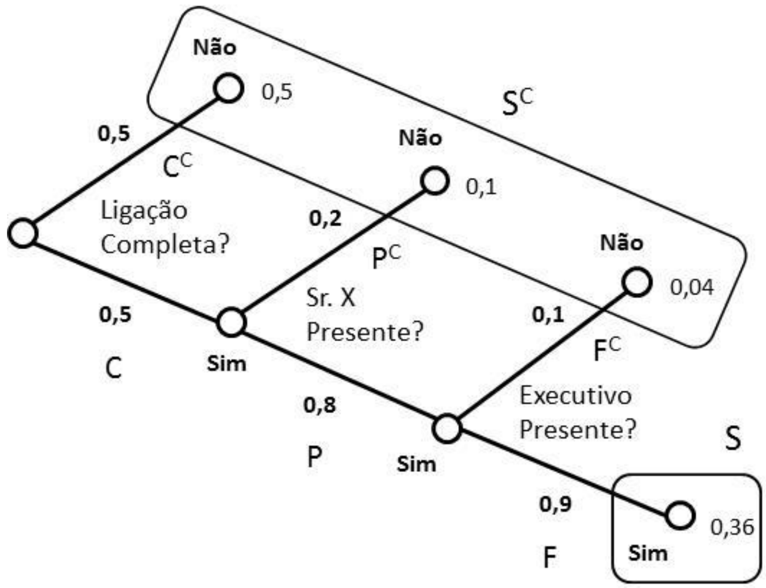
- a probabilidade de a secretária completar a ligação é 0,5;
- a probabilidade do Sr. X se encontrar no escritório naquele momento é 0,8;
- a probabilidade de o executivo não se ausentar da sala enquanto a secretária tenta completar a ligação é 0,9;

a) Calcule a probabilidade de que o executivo tenha de fato conseguido falar pelo telefone com o Sr. X;
b) Caso o executivo não tenha conseguido falar pelo telefone com o Sr. X. Calcule a probabilidade condicional que isso aconteca porque a ligação não se completou;
c) Caso o executivo não tenha conseguido falar pelo telefone com o Sr. X. Calcule a probabilidade condicional que isso aconteca porque embora a ligação tenha se completado, o Sr. X estava ausente naquele momento;
d) Caso o executivo não tenha conseguido falar pelo telefone com o Sr. X. Calcule a probabilidade condicional que isso aconteca porque embora a ligação tenha se completado, e o Sr. X estava presente naquele momento o executivo saiu da sala dele.

Resposta 6.-

Definem-se os seguintes eventos:
C = A secretária conseguiu completar a ligação.
P = O Sr. X se encontra presente no escritório naquele momento.
F = O executivo não se ausenta da sala enquanto isso.
S = O executivo consegue falar como o Sr. X

A figura ilustra a ocorrência de eventos na forma de árvore. Onde cada ramo da arvore mostra uma sequência de eventos possível, junto com a probabilidade de ocorrência (considerando-se independência e regra do produto).



a) S somente acontece se os três eventos ocorrem, S = (C e P e F). Como C, P e F são independentes, pela regra do produto:
P(S) = P(C).P(P).P(F) = 0,5 x 0,8 x 0,9 = 0,36.

b) Pede-se calcular: $P(C^C \mid S^C) = \dfrac{P(C^C \cap S^C)}{P(S^C)}$

Observa-se que não conseguir completar a ligação C^C sempre pertence a S^C. Assim, $C^C \subseteq S^C$ implica em: $(C^C \cap S^C) = C^C$, logo:

$$P(C^C \mid S^C) = \frac{P(C^C)}{P(S^C)} = \frac{1-0,5}{1-0,36} = 0,781$$

c) Observa-se que conseguir completar a ligação C porem não encontrar o Sr. X corresponde a: $\left(C \cap P^C\right)$

Pede-se calcular: $P(C \cap P^C \mid S^C) = \dfrac{P(C \cap P^C \cap S^C)}{P(S^C)}$

Como: $\left(C \cap P^C\right) \subseteq S^C$, então: $\left(C \cap P^C\right) \cap S^C = \left(C \cap P^C\right)$

Assim, $P(C \cap P^C \mid S^C) = \dfrac{P(C \cap P^C)}{P(S^C)}$ por independência:

$$P(C \cap P^C \mid S^C) = \frac{P(C)P(P^C)}{P(S^C)} = \frac{(0,5)(1-0,8)}{1-0,36} = 0,1562$$

d) Observa-se que conseguir completar a ligação C, encontrar o Sr. X presente, porem, o executivo ter saído corresponde a: $\left(C \cap P \cap F^C\right)$

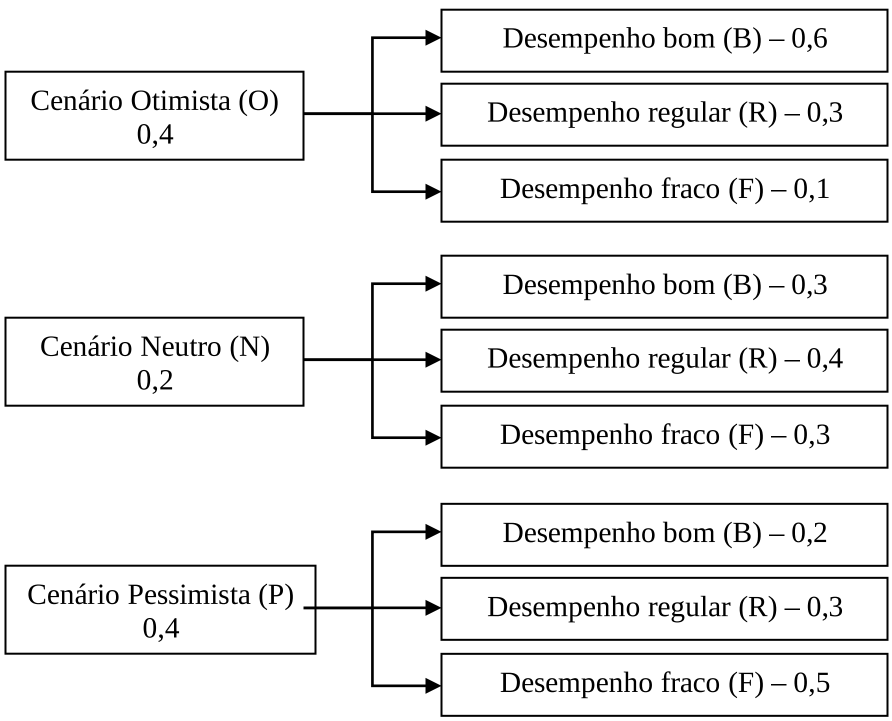
Pede-se calcular: $P(C \cap P \cap F^C \mid S^C) = \dfrac{P(C \cap P \cap F^C \cap S^C)}{P(S^C)}$

Como: $\left(C \cap P \cap F^C\right) \subseteq S^C$, então: $\left(C \cap P \cap F^C\right) \cap S^C = \left(C \cap P \cap F^C\right)$

Assim, $P(C \cap P \cap F^C \mid S^C) = \dfrac{P(C \cap P \cap F^C)}{P(S^C)}$ por independência:

$$P(C \cap P \cap F^C | S^C) = \frac{P(C)P(P)P(F^C)}{P(S^C)} = \frac{(0{,}5)(0{,}8)(1-0{,}9)}{1-0{,}36} = \frac{0{,}04}{0{,}64} = 0{,}0625$$

7.- Um investidor examina a possibilidade de comprar determinada ação de uma companhia. Ele considera três possíveis cenários: Otimista (O), Neutro (N) e Pessimista (P). O desempenho da ação com relação ao mercado é classificada em três categorias bom (B), regular (R) ou fraca (F), com probabilidades que dependem do cenário conforme a seguir:



a) Calcule as probabilidades de que o desempenho da ação seja boa, regular e fraca;
b) Com base nos resultados obtidos, o investidor deve ou não incorporar essa ação a sua carteira de aplicações?

Resposta 7.-

a) Aplicando o teorema de probabilidade total:

$$P(B) = (0,4)(0,6) + (0,2)(0,3) + (0,4)(0,2) = 0,38$$
$$P(R) = (0,4)(0,3) + (0,2)(0,4) + (0,4)(0,3) = 0,32$$
$$P(F) = (0,4)(0,1) + (0,2)(0,3) + (0,4)(0,5) = 0,30$$

b) O investidor deve incorporar a ação uma vez que o desempenho B e regular é predominante.

8.- Em um torneio de voleibol envolvendo 8 países (A,B,C,D,E,F,G,H) a tabela de jogos a serem realizados é a seguinte:

1ª Rodada:

Jogo 1: A vs. B	Jogo 2: C vs. D	Jogo 3: E vs. F	Jogo 4: G vs. H
(Local: País A)	(Local: País C)	(Local: País E)	(Local: País G)

2ª Rodada:

Jogo 5: Venc. Jogo 1 vs. Venc. Jogo 2	Jogo 6: Venc. Jogo 3 vs. Venc. Jogo 4
(Local: País Neutro)	(Local: País Neutro)

3ª Rodada:
Jogo 7: Venc. Jogo 5 vs. Venc. Jogo 6

Considere que a chance de vitoria de um pais é de 60% se ele joga em casa, de 40% se ele joga na casa do adversário e 50% se o jogo é realizado em campo neutro. Todos os Jogos são eliminatórios.

Qual a probabilidade de que a partida final seja:

a) Entre os países A e F?
b) Entre os países C e G?
c) Entre os países Be H?
d) Entre um país que estreia em casa e outro que estreia fora de casa?
e) Entre dois países que estreia em casa?
f) Entre dois países que estreiam fora de casa?

Resposta 8.-

a) Para que a partida final seja entre os países A e F. Devemos ter os seguintes eventos ocorrendo todos juntos:

(A vence B) e (F vence E) na primeira rodada.
(A vence o Venc. Jogo 2) e (F vence o Venc. Jogo 4) na segunda rodada.
Observe que os eventos são todos independentes entre si, uma vez que o resultado de um jogo não influenciam nos resultados dos outros.

As probabilidades destes eventos são:

P(A vence B) = 0,60	P(F vence E) = 0,40
P(A vence o Venc. Jogo 2) = 0,50	P(F vence o Venc. Jogo 4) = 0,50

Assim: P(a partida final seja entre os países A e F) = (0,6)(0,40)(0,5)(0,5) = 0,06

b) Para que a partida final seja entre os países C e G. Devemos ter os seguintes eventos ocorrendo todos juntos:

(C vence D) e (G vence H) na primeira rodada.
(C vence o Venc. Jogo 1) e (G vence o Venc. Jogo 3) na segunda rodada.
Observe que os eventos são todos independentes entre si.

As probabilidades destes eventos são:

P(C vence D) = 0,60	P(G vence H) = 0,60
P(C vence o Venc. Jogo 1) = 0,50	P(G vence o Venc. Jogo 3) = 0,50

Assim: P(a partida final seja entre os países C e G) = (0,6)(0,6)(0,5)(0,5) = 0,09

c) Para que a partida final seja entre os países B e H. Devemos ter os seguintes eventos ocorrendo todos juntos:

(B vence A) e (H vence G) na primeira rodada.
(B vence o Venc. Jogo 2) e (H vence o Venc. Jogo 3) na segunda rodada.
Observe que os eventos são todos independentes entre si.

As probabilidades destes eventos são:

P(B vence A) = 0,40	P(H vence G) = 0,40
P(B vence o Venc. Jogo 2) = 0,50	P(H vence o Venc. Jogo 3) = 0,50

Assim: P(a partida final seja entre os países C e G) = (0,4)(0,4)(0,5)(0,5) = 0,04

d) A probabilidade de que a final seja entre um time que estreia em casa e outro que estreia fora de casa é sempre 0,06 (como em a)). Existem 8 casos possíveis: (AxF) (AxH) (BxE) (BxG) (CxF) (CxH) (DxE) (DxG). Assim, pela regra da soma temos: 8x0,06 = 0,48.

e) Analogamente, entre dois times que estreiam em casa, a probabilidade é 0,09 (como em b)). Existem 4 casos possíveis. (AxE)(AxG)(CxE)(CxG). Assim, pela regra da soma temos: 4x0,09 = 0,36.
f) Analogamente, entre dois times que estreiam fora de casa, a probabilidade é 0,04 (como em c)). Existem 4 casos possíveis. (BxF)(BxH)(DxF)(DxH). Assim, pela regra da soma temos: 4x0,04 = 0,16.

9.- Um determinado paciente tem uma consulta marcada com seu médico. Sabe-se que a probabilidade de que ele compareça no dia e hora marcados é de 0,90. Por outro lado, a probabilidade de que o médico receba um chamado urgente que o obrigue a desmarcar essa consulta é de 0,05. Assume-se que há independencia entre esses dois eventos e que esses são os únicos dois motivos que poderão fazer que a consulta não ocorra no dia e hora marcados.
Calcule a probabilidade de que a consulta não ocorra no dia e hora marcados.

10.- Considere o desempenho de um teste T destinado a diagnosticar a presença de infeção pelo virus HIV. A população considerada aqui é formada somente por doadores de sangue e, entre eles, apenas 1 em cada 1.000 está infectado pelo vírus. Suponha que foi sorteada ao acaso uma pessoa dessa população e que ela será submetida ao teste T.

Definen-se os seguintes eventos:

- D^+: Se a pessoa está infectada;
- D^-: Se a pessoa não está infectada;
- T^+: Se o resultado do teste for positivo;
- T^-: Se o resultado do teste for negativo;

Sabe-se que:

- P(T+/D+): A probabilidade do resultado do teste ser positivo dado que a pessoa está infectada é 0,85.
- P(T-/D-): A probabilidade do resultado do teste ser negativo dado que a pessoa não esta infectada é 0,99.

Responda a seguintes questões:

a) Calcule a probabilidade condicional $P(D^+/T^+)$;
b) Calcule a probabilidade condicional $P(D^-/T^-)$;

Resposta 10.-

Observe que os eventos D+ e D- constituem uma partição do espaço amostral de doadores de sangue Ω de maneira que $\Omega = (D+ \cup D-)$. Além disso, sabe-se que:

P(D+) = 1/1000 = 0,001;
P(D-) = 999/1000 = 0,999;

Do enunciado temos as seguintes probabilidades condicionais:

$P(T^+/D^+) = 0{,}85;$
$P(T^-/D^-) = 0{,}99$

Como o teste tem apenas dois resultados possíveis T^+ e T^-, se deduz que:

$P(T^-/D^+) = (1 - 0{,}85) = 0{,}25;$
$P(T^+/D^-) = (1 - 0{,}99) = 0{,}01;$

Para calcular as probabilidades condicionais solicitadas em a) e b) fazemos uso do teorema de Bayes. Onde A_i, i=1,..., n corresponde a uma partição do espaço amostral Ω.

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i)}$$

a) Calcula-se a probabilidade condicional:

$$P(D^+/T^+) = \frac{P(D^+)P(T^+/D^+)}{P(D^+)P(T^+/D^+) + P(D^-)P(T^+/D^-)}$$

Substituindo-se os valores temos que:

$$P(D^+/T^+) = \frac{(0,001)(0,85)}{(0,001)(0,85) + (0,999)(0,1)} = \frac{0,00085}{0,10075} = 0,008436 \text{ ou } 0,8436\%$$

Dado que o valor é muito baixo, observa-se que o teste não é um bom preditor da presença da doença. O teste pode dar positivo e a pessoa pode não ter a doença com probabilidade 99,15%.

b) Calcula-se a probabilidade condicional:

$$P(D^-/T^-) = \frac{P(D^-)P(T^-/D^-)}{P(D^-)P(T^-/D^-) + P(D^+)P(T^-/D^+)}$$

Substituindo-se os valores temos que:

$$P(D^-/T^-) = \frac{(0,999)(0,99)}{(0,999)(0,99) + (0,001)(0,25)} = \frac{0,98901}{0,98926} = 0,99974 \text{ ou } 99,974\%$$

Como o valor é muito alto, um resultado negativo do teste é praticamente uma garantia de que a pessoa não esta infectada.