REDUÇÃO DE ORDEM

ESSE MÉTODO PERMITE:

USAR UMA SOLUÇÃO y_1 DE UMA EQ. LINEAR HOMOGÊNEA DE 2ª ORDEM:
$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$
$\xRightarrow{\text{PARA}}$ ENCONTRAR UMA 2ª SOLUÇÃO y_2 (LI DE y_1)

EX1 – SE $y_1 = e^x$ É SOLUÇÃO DE $\boxed{y'' - y = 0}$;
ENCONTRE $y_2 = ?$

- TENTATIVA: $\boxed{y = u(x) . y_1(x)}$ (1) $\Rightarrow \begin{cases} u(x) = ? \\ y_1(x) = e^x . \end{cases}$

- EQ. $\boxed{y'' - y = 0}$ (2) PRECISA y' E y''!!

DE (1): $\boxed{y = u_{(x)} . e^x}$; (3)

ENTÃO: $y' = u' e^x + u . e^x$; (4)

E: $y'' = u'' e^x + u' e^x + u' . e^x + u e^x$; (5)

OU: $y'' = (u'' + u' + u' + u) . e^x$; (6)

$$\boxed{y'' = (u'' + 2u' + u) . e^x} \quad ; \quad (7)$$

SUBSTITUI: (7) E (3) NA EQ. (2):

$$\boxed{y'' - y = 0}$$

2

$$y'' - y = (u'' + 2u' + u).e^{x} - (u\,e^{x}) ; \quad (8)$$

$$0 = (u'' + 2u' + \cancel{u} - \cancel{u}).e^{x} ; \quad (9)$$

$$\therefore \boxed{u'' + 2u' = 0} \quad (10) \qquad e^{x} \neq 0 ;$$

FAZEMOS AGORA: $\boxed{w = u'}$ (11) $\boxed{w = \frac{du}{dx}}$;

REESCREVENDO (10) USANDO (11): $\boxed{(u')' + 2u' = 0}$ (12)

ENTÃO: $\boxed{w' + 2w = 0}$ (13) → EQ. LINEAR EM w; 1ª ORDEM

$\boxed{F.I.}$ $\bar{\mu}(x) = e^{2\int dx} = e^{2x}$; (14)

F.I.: $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = g(x)$$

$$\bar{\mu}(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

MULTIPICA (13) POR $\bar{\mu}(x)$:

$$\frac{dw}{dx}.e^{2x} + 2e^{2x}.w = 0 ; \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx}(w.e^{2x}) = 0 ; \quad (16)$$

$$w.e^{2x} = c_1 ; \quad (17) \qquad (\times)\ e^{-2x}$$

$$\boxed{w = c_1.e^{-2x}} ; \quad (18)$$

↳ SOLUÇÃO EM w

LEMBRANDO: $w = \frac{du}{dx}$, ENTÃO, EM (18):

$$\boxed{\frac{du}{dx} = c_1 . e^{-2x}} \; ; \quad (19)$$ OBTEM $u(x)$ (S.V.)

$$du = c_1 e^{-2x} dx \; ; \quad (20)$$

$$\int du = c_1 . \int e^{-2x} dx \; ; \quad (21)$$

$$\boxed{u(x) = -\frac{c_1}{2} . e^{-2x} + c_2} \; ; \quad (22)$$

LEMBRE: PARTIMOS DE (EQ. (1)): $y = u(x) . e^{x}$

SUBSTITUI (22) EM (1):

$$y(x) = \left[-\frac{c_1}{2} . e^{-2x} + c_2 \right] . e^{x} \; ; \quad (23)$$

$$y(x) = -\frac{c_1}{2} e^{-2x} . e^{x} + c_2 . e^{x} \; ; \quad (24)$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{c_1}{2} e^{-x} + c_2 . e^{x}} \; ; \quad (25)$$

$$\boxed{y(x) = A \, y_2 + B \, y_1}$$ => SOL. GERAL (P.S)

ENTÃO: $\boxed{y_2 = e^{-x}}$ => SOLUÇÃO LI DE y_1 ENCONTRADA.

ESQUEMATICAMENTE

- EQ. DADA: $\boxed{y'' - y = 0}$, $y = f(x)$.
- SUPÕE: $\boxed{y(x) = u(x) \cdot y_1(x)}$ → CONHECIDA ↳ QUER $y_2 = ?$
- $y(x) = u(x) \cdot \overset{\text{CONHECIDA}}{e^{x}} \Rightarrow$ OBTÉM: y' E y'';
- RECAI EM OUTRA EQ.: $\boxed{u'' + 2u' = 0}$
- DEFINE $w = u'$ (REDUZ A ORDEM)

$$\boxed{w' + 2w = 0}$$

FATOR INTEGRANTE

RESOLVE ⇒ (SOLUÇÃO EM w): $w = c_1 \cdot e^{-2x}$

$$\boxed{\frac{du}{dx} = c_1 \cdot e^{-2x}}$$

RESOLVE ⇒ (SOLUÇÃO EM u): $\boxed{u(x) = -\frac{c_1}{2} e^{-2x} + c_2}$

SUBSTITUI

MAS: $\boxed{y(x) = u(x) \cdot e^{x}}$ E OBTÉM y_2.

EX2 - SENDO $\boxed{y_1 = x^3}$, ENCONTRAR UMA SEGUNDA SOLUÇÃO PARA $\boxed{x^2 y'' - 6y = 0}$

SOLUÇÃO

- $y(x) = u(x) \cdot y_1 \Rightarrow \begin{cases} u(x) = ? \\ y_1 = x^3 \end{cases}$;

- ENTÃO: $\boxed{y = u \cdot x^3}$; (1) $\boxed{(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'}$

$y' = u' x^3 + u \cdot 3x^2$; (2)

$y'' = u'' x^3 + u' 3x^2 + 3[u' \cdot x^2 + u\, 2x]$; (3)

$y'' = u'' x^3 + 3u' x^2 + 3u' x^2 + 6ux$; (4)

$\boxed{y'' = u'' x^3 + 6u' x^2 + 6ux}$; (5)

EQ. DADA $x^2 \cdot y'' - 6 \cdot y = 0$

SUBSTITUI (5) E (1) NA EQ. DADA:

$x^2 [u'' x^3 + 6u' x^2 + 6ux] - 6[u x^3] = 0$; (6)

$x^5 u'' + 6x^4 u' + 6x^3 u - 6x^3 u = 0$; (7)

$\boxed{x^5 u'' + 6x^4 u' = 0}$ (8) EQ. LINEAR EM u.

$$\boxed{u'' + \frac{6}{x}u' = 0} \Rightarrow W = u' \Rightarrow \text{REDUZ ORDEM}$$ (9)

$$\boxed{W' + \frac{6}{x}W = 0}$$ (10)

F.I. $\boxed{\bar{\mu} = x^6}$ (11) $\Longleftrightarrow$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = g(x)$$

$$\bar{\mu}(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\bar{\mu}(x) = e^{6\int \frac{1}{x}dx}, \quad (A)$$

$$\bar{\mu}(x) = e^{6\ln|x|} = e^{\ln|x|^6}; \quad (B)$$

$$\bar{\mu}(x) = x^6. \quad (C)$$

$$n.\log b = \log b^n;$$

$$a^{\log_a(b)} = b$$

RESOLVE EQ. (10) PARA W:

$$\frac{dW}{dx}.x^6 + \frac{6}{x}x^6.W = 0; \quad (12)$$

$$\frac{dW}{dx}.x^6 + 6.x^5W = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dx}\left(W.x^6\right) = 0; \quad (14)$$

$$W.x^6 = C_1 \Rightarrow \boxed{W = C_1.x^{-6}} \quad (15)$$

RESOLVE (15) RELAÇÃO A $u \Rightarrow W = u' = \frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = C_1.x^{-6} \Longrightarrow \int du = C_1\int x^{-6}.dx; \quad (16)$$

$$u = C_1.\frac{x^{-5}}{-5} + C_2 \Longrightarrow \boxed{u(x) = -\frac{C_1}{5}x^{-5} + C_2} \quad (17)$$

PARA OBTER y_2 LEMBRE QUE:

$$\boxed{y = u.x^3} \longrightarrow \text{SUBSTITUI (17)}$$

$$y = \left(-\frac{c_1}{5} x^{-5} + c_2\right) . x^3 \quad ; \quad (18)$$

$$y = -\frac{c_1}{5} . x^{-2} + c_2 . x^3 \quad ; \quad (19)$$ COMPARANDO

$$y = A . y_2 + B y_1 \quad ; \quad (20)$$

CONCLUI-SE QUE $\boxed{y_{2(x)} = x^{-2}}$ (21)

É A OUTRA SOLUÇÃO L.I.

EX 3: $y_{1(x)} = x^3$;

$x^2 y'' - 5 x y' + 9 y = 0$; ACHAR y_2