

Cálculo III – 2a Chamada da P2 – 06/07/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: _____

Matrícula: _____ Curso: _____

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:

■ “ x vezes -6 ” é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.

■ $x - \frac{1}{y+2}$ é $\frac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\frac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.

- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\sin 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. Calcule

$$\int_0^1 \int_0^z \int_{y^2}^z x + y + z \, dx \, dy \, dz.$$

Solução:

$$\frac{11}{30}.$$

2. Seja D a região do primeiro quadrante delimitada por $y = x$ e $y = x^3$. Calcule

$$\iint_D x^2 + 2y \, dA.$$

Solução:

$$\iint_D x^2 + 2y \, dA = \int_0^1 \int_{x^3}^x x^2 + 2y \, dy \, dx = \frac{23}{84}.$$

3. Seja Ω o pedaço do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ entre os planos $z = -5$ e $z = 4$. Calcule

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dV.$$

Solução:

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dV = \int_{-5}^4 \int_0^{2\pi} \int_0^4 r \cdot r \, dr \, d\theta \, dz = 384\pi.$$

4. Seja Ω a região entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Calcule

$$\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dV.$$

Solução:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 + y^2 \, dV &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^3 [(\rho \cos \theta \sin \phi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \phi)^2] \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^3 \rho^4 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^3 \rho^4 (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{1688\pi}{15}. \end{aligned}$$