Cálculo III – Prova Substitutiva da P1 – 07/12/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Matrícula: ____________________ **Curso:** ____________________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. ($2\frac{1}{2}$ pontos) Seja C a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \big(\cos t,\, \operatorname{sen} t,\, \ln(\cos t)\big), \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

Calcule o comprimento de C.

Solução:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(t) = \big(-\operatorname{sen} t,\, \cos t,\, -\operatorname{tg} t\big),\\
&L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + (-\operatorname{tg} t)^2}\, dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}\, dt\\
&\quad = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/4} \sec t\, dt \qquad \Big(\text{pois } \sec t > 0 \text{ em } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}\Big)\\
&\quad = \ln\big|\sec t + \operatorname{tg} t\big|\Big|_0^{\pi/4} = \ln\Big|\sec\Big(\frac{\pi}{4}\Big) + \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\Big| - \ln\big|\sec(0) + \operatorname{tg}(0)\big|\\
&\quad = \ln(\sqrt{2} + 1) - \cancelto{0}{\ln(1+0)} = \ln(\sqrt{2} + 1).
\end{aligned}$$

2. ($2\frac{1}{2}$ pontos) Seja C a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \big(t^2,\, \operatorname{sen} t - t\cos t,\, \cos t + t \operatorname{sen} t\big), \qquad t > 0.$$

Calcule o valor dos vetores $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ e $\vec{B}(t)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
&\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,\, \operatorname{sen} t,\, \cos t),\\
&\vec{N}(t) = (0,\, \cos t,\, -\operatorname{sen} t),\\
&\vec{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\, 2\operatorname{sen} t,\, 2\cos t).
\end{aligned}$$

3. ($2\frac{1}{2}$ pontos) Seja C o segmento de reta que liga $(-1, 5, 0)$ a $(1, 6, 4)$. Calcule a integral de linha de $f(x, y, z) = xyz^2$ em C.

Solução:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(t) = (-1 + 2t,\, 5 + t,\, 4t), \quad 0 \leq t \leq 1,\\
&\vec{r}\,'(t) = (2,\, 1,\, 4),\\
&\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 xyz^2 \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_0^1 (-1 + 2t)(5 + t)(4t)^2 \sqrt{21}\, dt\\
&\quad = \frac{236\sqrt{21}}{15}.
\end{aligned}$$

4. (2½ pontos) Seja C o arco de elipse parametrizado por

$$\vec{r}(t) = \big(\cos t,\ 2\,\mathrm{sen}\, t\big), \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

e seja $\vec{F}(x,y) = \big((1+xy)e^{xy},\ x^2 e^{xy}\big)$.

a) Mostre que $\vec{F}$ é um campo conservativo e determine $f(x,y)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Solução:

$$\frac{\partial}{\partial x} x^2 e^{xy} = (2x + x^2 y)e^{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(1+xy)e^{xy},$$
$$f(x,y) = xe^{xy}.$$

b) Calcule a integral de linha de $\vec{F}$ em C.

Solução:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(\pi/2)) - f(\vec{r}(0))$$
$$= f(0,2) - f(1,0) = 0 - 1 = -1.$$

Dicas do Mestre:

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \mathrm{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x,$$

$$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = \ln|\sec x| + C, \qquad \int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \mathrm{tg}\, x| + C.$$