Distribuições Discretas de Probabilidade

Prof. Fermín Alfredo Tang Montané

Distribuições Discretas de Probabilidade

- Muitas variáveis aleatórias associadas a experimentos aleatórios têm propriedades similares e, portanto, podem ser descritas através de uma mesma distribuição de probabilidade, com pressuposições bem definidas.

- A escolha da distribuição de probabilidade deve ser criteriosa de modo que descreva corretamente as observações geradas no experimento aleatório.

Distribuição Uniforme

- Seja uma variável aleatória X discreta que assume os valores x_1, x_2, x_3,...,x_n. A função de probabilidade para a variável aleatória X com distribuição uniforme é definida por:

$$\boxed{P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad \forall x = \{x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n\}}$$

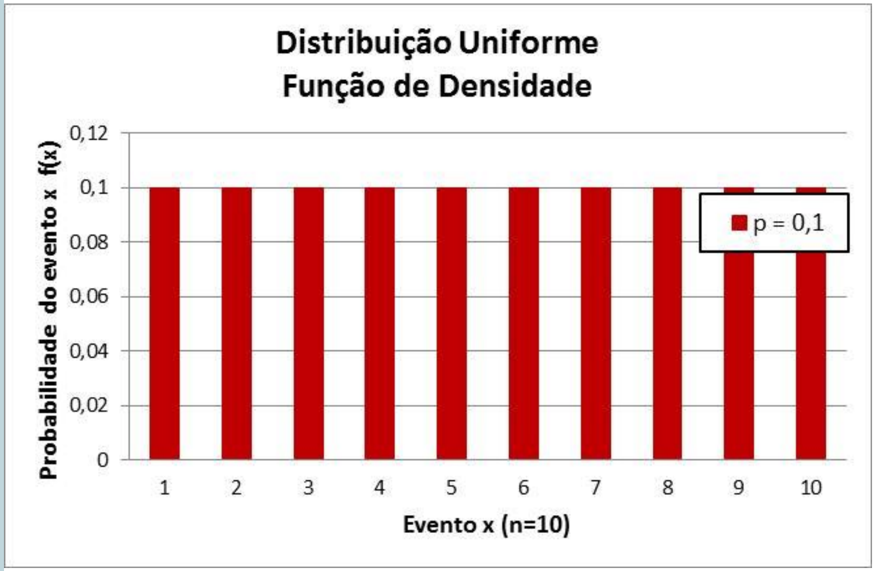
- A esperança e a variancia neste caso são:

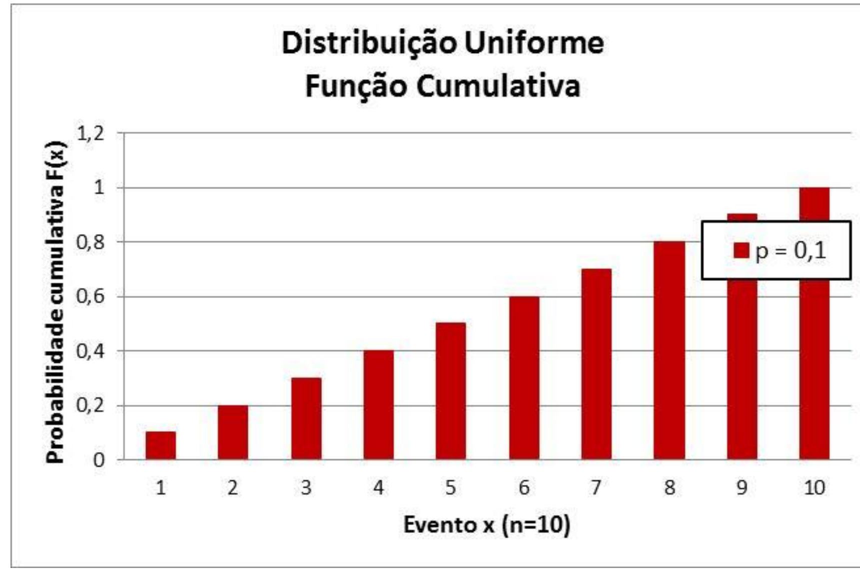
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) \qquad E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 p(x_i) \qquad V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2}{n}$$

Distribuição Uniforme
Função de Densidade e Cumulativa

- **Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.





$$P(X = x) = \frac{1}{10} \quad \text{x} = 1, 2 \ldots, 10$$

$$F(X = x) = \sum_{s=1}^{x} \frac{1}{10}, \quad \text{x} = 1, 2 \ldots, 10$$

Distribuição Uniforme
Exemplo

- Seja o experimento aleatório em que um dado não viciado é lançado. Considerando a variável aleatória X sendo a observação da face que ocorre, determine a função de probabilidade.

- **Resposta:**
- A variável aleatória X, tem 6 valores possíveis com igual probabilidade.

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Assim a função de probabilidade é uniforme.

$$\boxed{P(X = x) = \frac{1}{n} = \frac{1}{6}, \quad \forall x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$$

Distribuição de Bernoulli
Função de Densidade de Probabilidade

- Considere um experimento aleatório. Seja p a probabilidade de sucesso do experimento e q=p-1 a probabilidade de fracasso.
- Seja X uma variável aleatória com dois valores possíveis: 1 se o resultado do experimento for sucesso e 0 se o resultado for um fracasso.
- Esta variável aleatória possui distribuição binomial com a seguinte função de probabilidade:

$$\boxed{P(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad x = 0, 1.}$$

- Onde p é parâmetro da distribuição.

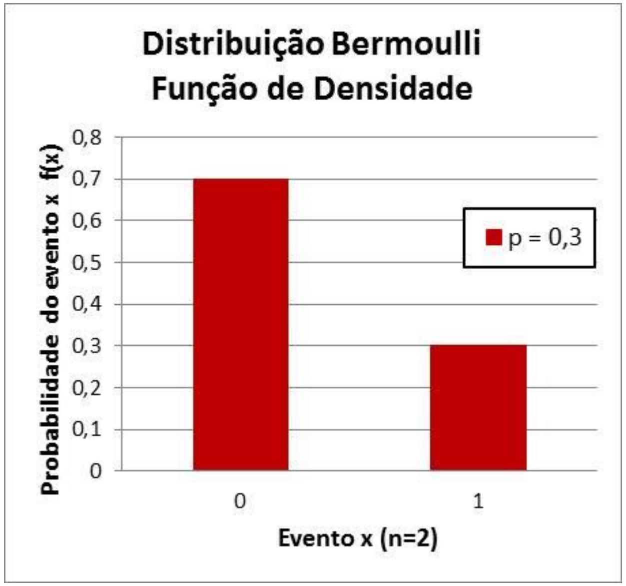
- A esperança e a variância neste caso são:

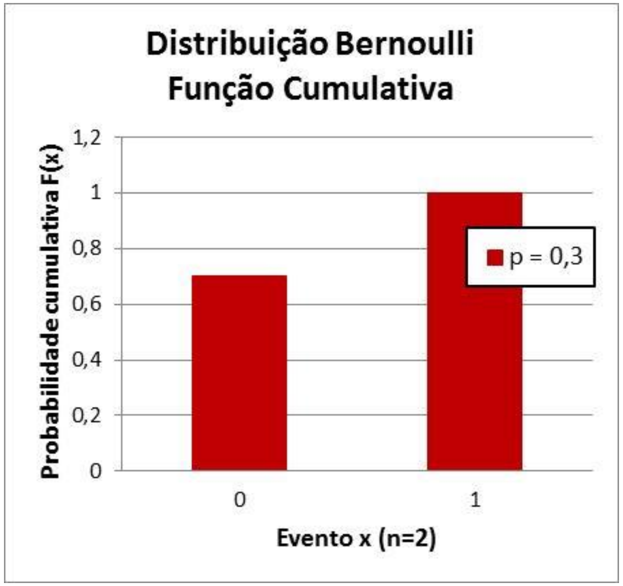
$$E(X) = p$$

$$V(X) = pq$$

Distribuição Bernoulli
Função de Densidade e Cumulativa

- **Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.





$$P(X = x) = \left(\tfrac{3}{10}\right)^{x} \left(\tfrac{7}{10}\right)^{1-x}, \quad x = 0,\ 1.$$

$$F(X = x) = \sum_{s=0}^{x} \left(\tfrac{3}{10}\right)^{s} \left(\tfrac{7}{10}\right)^{1-s}, \quad x = 0,\ 1$$

Distribuição de Bernoulli
Esperança e Variância

- **Esperança Matemática**

$$E(X) = \mu = 1.p + 0.q = p$$

- **Variância**

$$V(X) = \sigma^2 = (1 - p)^2.p + (0 - p)^2.q = p.q$$

- **Observações:**
- 1ª) Quanto maior a probabilidade de sucesso, maior é a esperança matemática;
- 2ª) A variância será máxima quando p=q=0,5.

Distribuição de Bernoulli
Exemplo

- Considere o seguinte experimento aleatório:
- E = “um dado é lançado e o resultado é observado”.
- Considere a variável aleatória X, sendo que:
  - X=1, quando ocorre face 4;
  - X=0, quando não ocorre face 4.
- Determine a função de probabilidade para a variável aleatória X.

- **Resposta:**
- A ocorrência de uma face 4, corresponde ao sucesso, com probabilidade p=1/6.

$$\boxed{P(X = x) = \left(\tfrac{1}{6}\right)^{x}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{1-x}, \quad x = 0,\ 1}$$

Distribuição de Binomial

Função de Densidade de Probabilidade

- Está distribuição recebe seu nome em homenagem à Isaac Newton(1643-1727).
- Considere uma sequência de experimentos independentes (Bernoulli).
- Seja p a probabilidade de sucesso de um experimento e q=p-1 a probabilidade de fracasso.
- Seja X uma variável aleatória indicando o número de sucessos em um conjunto de n experimentos independentes. A variável aleatória X possui a seguinte função de probabilidade:

$$\boxed{P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,\ 1,\ 2...,\ \mathrm{n}}$$

- Onde n e p são parâmetros da distribuição.

- A esperança e a variância neste caso são:

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

Distribuição de Binomial

Descrição

- Considere inicialmente uma sequência qualquer de n experimentos:

$$\boxed{SSS\ldots SFFF\ldots F}$$

- Considerando que x é o número de sucessos na sequência, então está sequência tem x sucessos e (n–x) fracassos.
- Considerando a independência e que a probabilidade de sucesso p e a de fracasso q são constantes para todas as n repetições do experimento, então a probabilidade de ocorrência desta sequência é:

$$\boxed{p.p.p\ldots p.q.q.q\ldots q = p^x q^{n-x}}$$

- Pode-se ter x sucessos e (n-x) fracassos em n repetições do experimento mediante diferentes sequências de eventos. Especificamente, existem:

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- sequências possíveis, todas com igual probabilidade de ocorrência: $p^x q^{n-x}$

Distribuição de Binomial

Descrição

- Assim, a probabilidade de ter x sucessos em n experimentos Bernoulli é dada por:

$$\boxed{P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}, \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \mathrm{n}}$$

- Onde:

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- É chamado de número binomial.

Distribuição de Binomial

Esperança e Variância

- **Esperança Matemática**

Sendo $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ os experimentos de Bernoulli.

Então: $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$.

$$E(X) = \mu = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n)$$

$$E(X) = \mu = p + p + p + \dots + p$$

$$E(X) = \mu = n.p$$

- **Variância**

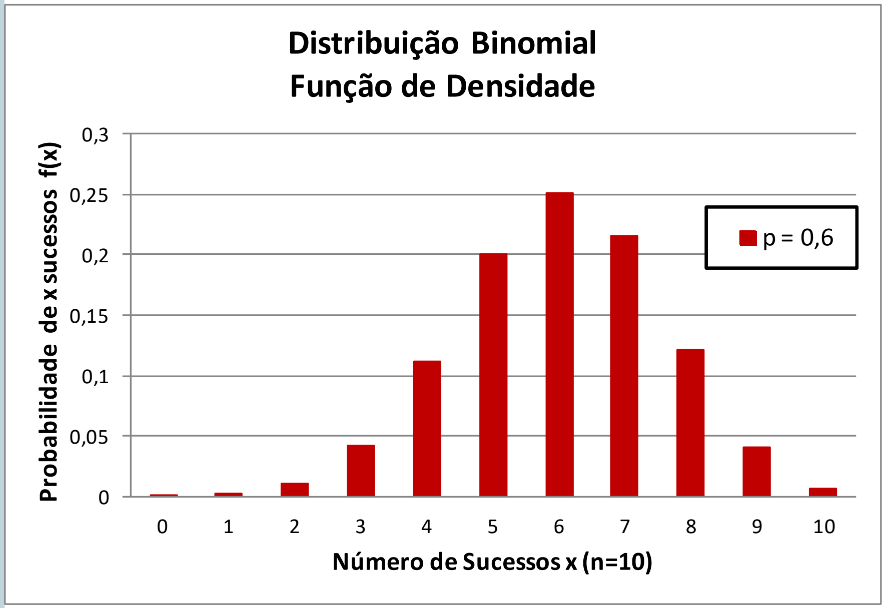
$$V(X) = \sigma^2 = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \dots + V(X_n)$$

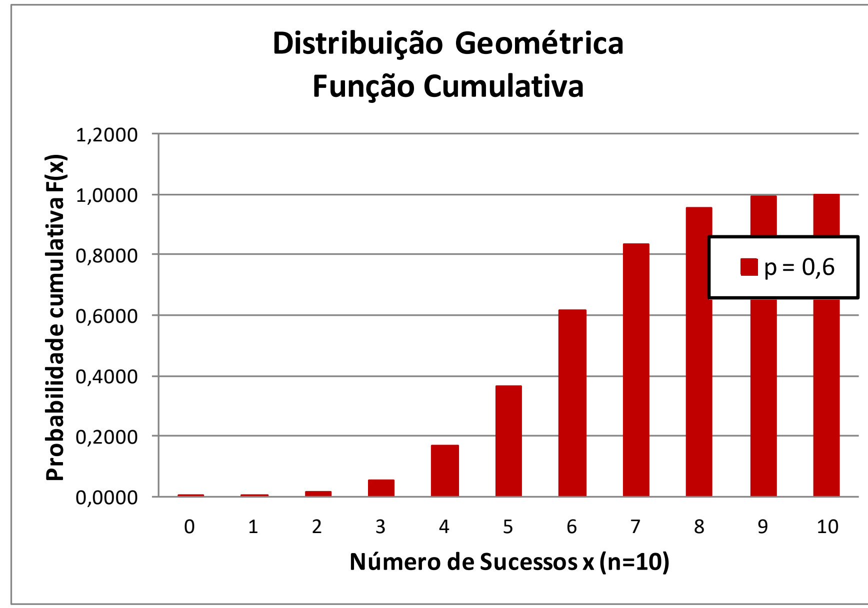
$$V(X) = \sigma^2 = p.q + p.q + p.q + \dots + p.q$$

$$V(X) = \sigma^2 = n.p.q$$

Distribuição de Binomial
Função de Densidade e Cumulativa

- **Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.





$$P(X=k)=\binom{10}{k}(0,6)^{k}(0,4)^{10-k},\quad \mathrm{k} = 0, \ldots{,}10$$

$$F(X=k)=\sum_{s=0}^{k}\binom{10}{s}(0,6)^{s}(0,4)^{10-s},\quad \mathrm{k} = 0, \ldots{,}10$$

Distribuição de Binomial
Exemplos

- 1)Um experimento aleatório consiste em lançar 8 moedas não viciadas. Determine a probabilidade de ocorrer exatamente 4 coroas.
- 2)Numa fábrica,10% dos copos de vidro se quebram ao serem colocados em caixas que comportam 5copos. Escolhendo ao acaso uma caixa, determine a probabilidade de:
  - i)Haver 3 copos quebrados;
  - ii)Haver algum copo quebrado.
- 3) A probabilidade de sair coroa no lançamento de uma moeda viciada é quatro vezes a probabilidade de sair cara. Qual a probabilidade de sair 4 coroas em 6 lançamentos desta moeda?

Distribuição de Geométrica

Função de Densidade de Probabilidade

- Considere uma sequência de experimentos Bernoulli, independentes . Seja p a probabilidade de sucesso de um experimento e q=p-1 a probabilidade de fracasso.
- Seja X uma variável aleatória indicando o número de tentativas sucessivas até a ocorrência do primeiro sucesso. Esta variável aleatória possui distribuição geométrica com a seguinte função de probabilidade:

$$\boxed{P(X=x)=pq^{x-1}, \quad x=1,\ 2...}$$

- Onde p é parâmetro da distribuição.
- A função de probabilidade cumulativa é:

$$\boxed{F(X=x)=\sum_{s=1}^{x} pq^{s-1}, \quad x=1,\ 2...}$$

- A esperança e a variancia neste caso são:

$$E(X)=\frac{1}{p} \qquad V(X)=\frac{q}{p^2}$$

Distribuição de Geométrica

Descrição

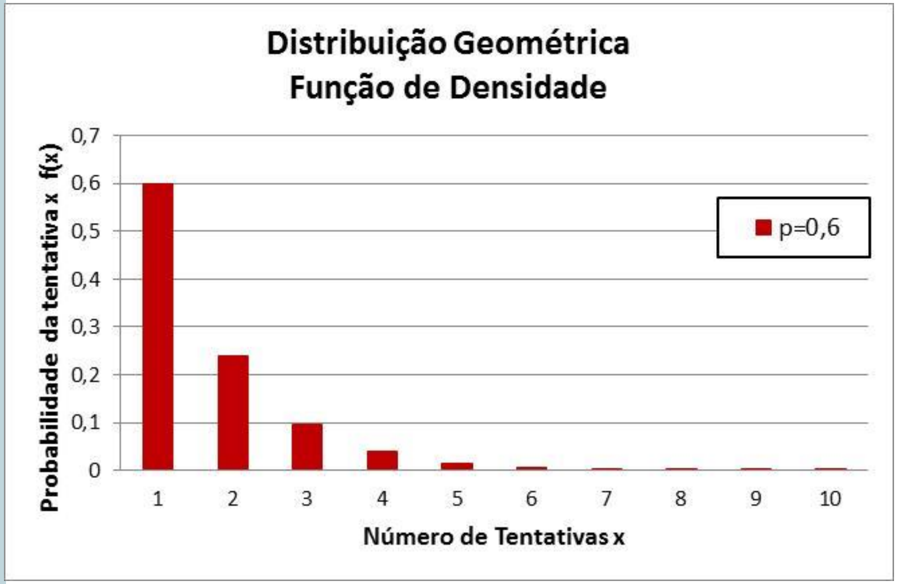
- Observe a probabilidade de ter o primeiro sucesso em cada tentativa:

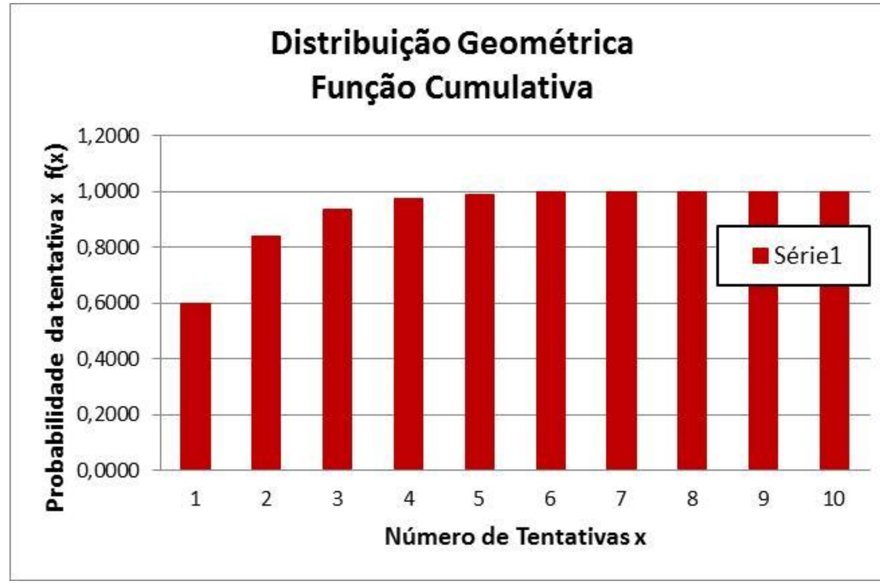
$$\boxed{P(X = x) = pq^{x-1}, \quad x = 1,\ 2\ldots}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1^{\text{a}}\ \text{tentativa: } p \\ 2^{\text{a}}\ \text{tentativa: } pq \\ 3^{\text{a}}\ \text{tentativa: } pq^2 \\ 4^{\text{a}}\ \text{tentativa: } pq^3 \\ \ldots \\ x^{\text{a}}\ \text{tentativa: } pq^{x-1} \end{array}}$$

Distribuição de Geométrica
Função de Densidade e Cumulativa

- **Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.





$$\boxed{P(X = x) = (0,6)(0,4)^{x-1}, \quad x = 1, 2...}$$

$$\boxed{F(X = x) = \sum_{s=1}^{x} (0,6)(0,4)^{s-1}, \quad x = 1, 2...}$$

Distribuição de Geométrica

Exemplos

- 1) Uma urna tem 5 bolas verdes e 4 brancas. Qual a probabilidade que se tenha que tirar 5 bolas com reposição até sair uma branca?
- **Resposta:**
- A probabilidade de sucesso p, corresponde a tirar uma bola branca, assim p=4/9. Pede-se a probabilidade de se precisar 5 tentativas para ter a primeira bola branca.

$$\boxed{P(X=5)=\left(\tfrac{4}{9}\right)\left(\tfrac{5}{9}\right)^{5-1}=0,04333}$$

- 2)Qual a probabilidade de ocorrer a primeira face 2 no 6° lançamento de um dado não viciado?
- **Resposta:**
- A probabilidade de sucesso p, corresponde a tirar uma face 2 no dado, assim p=1/6. Pede-se a probabilidade de se precisar 6 tentativas para ter a primeira face 2.

$$\boxed{P(X=6)=\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)^{6-1}=0,06697}$$

Distribuição de Pascal
Função de Densidade de Probabilidade

- A distribuição de Pascal (BlaisePascal,1623-1662), é também conhecida por Distribuição Binomial Negativa.
- Considere uma sequência de experimentos independentes (Bernoulli), onde p é a probabilidade de sucesso de um experimento e q=p-1 a probabilidade de fracasso.
- Seja X uma variável aleatória que representa o número de tentativas (ou repetições) do experimento necessárias para se ter k sucessos.
- A variável aleatória possui distribuição de pascal com a seguinte função de probabilidade:

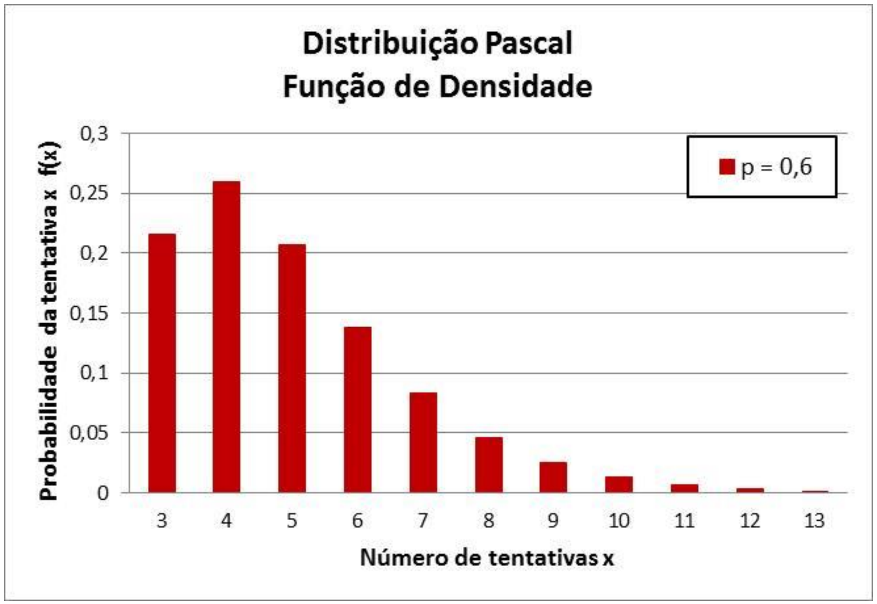
$$\boxed{P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad \text{onde } x \geq k}$$

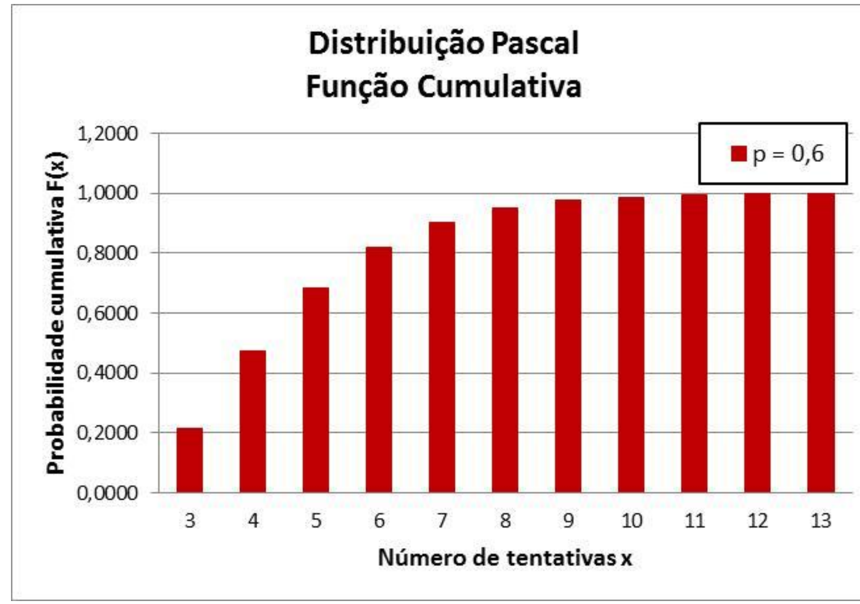
- onde p e k são parâmetros da distribuição.
- A esperança e a variância neste caso são:

$$E(X) = \frac{k}{p} \qquad V(X) = \frac{kq}{p^2}$$

Distribuição de Pascal
Função de Densidade e Cumulativa

- **Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.





$$P(X=x)=\binom{x-1}{3-1}p^3q^{x-3}, \quad \text{onde } x\geq 3$$

$$F(X=x)=\sum_{s=k}^{x}\binom{s-1}{3-1}p^3q^{s-3}, \quad \text{onde } x\geq 3$$

Distribuição de Pascal
Observações

- 1ª) k é o número de sucesso desejado e x é o número de tentativas para que o k-ésimo sucesso ocorra.
- 2ª) A variável aleatória da Distribuição Binomial representa o número de sucessos em n realizações do Experimento de Bernoulli enquanto que a variável aleatória da Distribuição de Pascal é o número de tentativas para se ter k sucessos.
- 3ª)Quando ocorre o k-ésimo sucesso na x-ésima tentativa, já ocorreu (k–1) sucessos e (x–k) fracassos entre as primeiras (x–1) tentativas.

Distribuição de Pascal
Exemplo 1

- 1) De cada 100 produtos confeccionados, 5 tem defeitos. Qual a probabilidade que o 5° produto inspecionado seja o 2° com defeito?
- **Resposta:**
- Neste caso, a presença do defeito corresponde ao sucesso no experimento Bernoulli. A probabilidade de sucesso p, corresponde a p=5/100. Pede-se a probabilidade de se precisar 5 tentativas para se obter 2 produtos com defeito. Esta probabilidade é dada pela distribuição pascal, com: $x = 5, k = 2$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad \text{onde } x \geq k}$$

$$P(X = 5) = \binom{4}{1} (0,05)^2 (0,95)^3 = 0,008573$$

Distribuição de Pascal
Exemplo 2

- 2)Uma máquina produz 10% de peças defeituosas. Qual a probabilidade que a máquina tenha que fabricar 6 peças para se conseguir 3 sem defeitos?
- **Resposta:**
- Neste caso, a ausência de defeito corresponde ao sucesso no experimento Bernoulli. A probabilidade de sucesso p, corresponde a p=9/10. Pede-se a probabilidade de se precisar 6 tentativas para se obter 3 produtos sem defeito. Esta probabilidade é dada pela distribuição pascal, com: $x = 6, k = 3$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad \text{onde } x \geq k}$$

$$P(X = 6) = \binom{5}{2} (0,9)^3 (0,1)^3 = 0,00729$$

Variável Aleatória

Distribuição Hipergeométrica

- Considere um conjunto de N elementos, dos quais k elementos tem um determinada característica (k≤N). São extraídos n elementos sem reposição deste conjunto (n≤N).
- A variável aleatória discreta X que representa o número de elementos dentre os n elementos que terão a referida característica determina uma distribuição de probabilidade denominada hipergeométrica.
- A função de probabilidade para X é dada por:

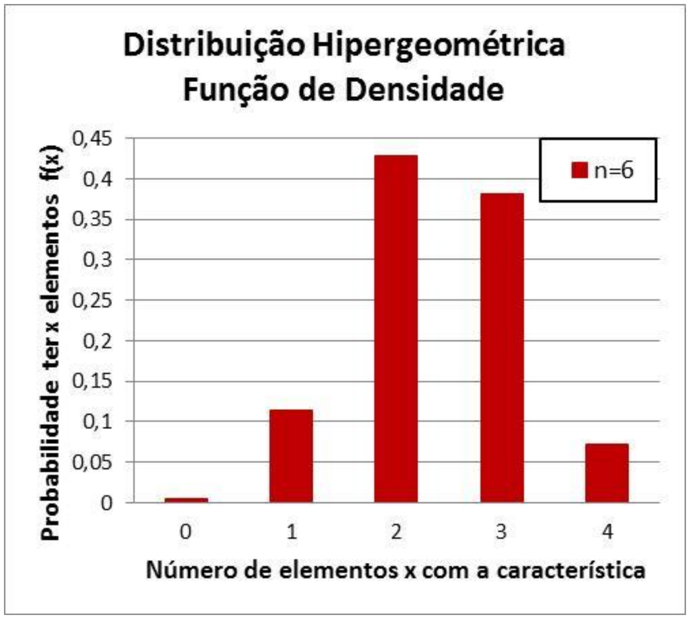
$$\boxed{P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \le x \le Min(n,k)}$$

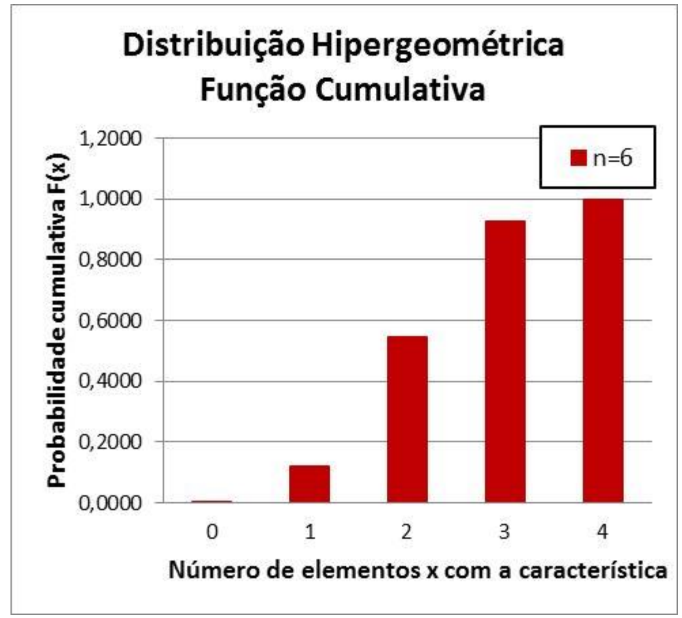
- Onde N, n, e k são parâmetros da distribuição.
- A esperança e a variância neste caso são:

$$E(X)=np, \text{ onde } p=\frac{k}{N} \qquad V(X)=npq\frac{N-n}{N-1}$$

Distribuição Hipergeométrica
Função de Densidade e Cumulativa

- **Exemplo.-** Considere N=10, n=6, k=4.





$$P(X=x)=\frac{\binom{4}{x}\binom{10-4}{6-x}}{\binom{10}{6}}, \quad x \le 4$$

$$F(X=x)=\sum_{s=0}^{x}\frac{\binom{4}{s}\binom{10-4}{6-s}}{\binom{10}{6}}, \quad \text{onde } x \le 4$$

Distribuição Hipergeométrica

Observações

- 1ª)Na distribuição hipergeométrica a probabilidade de sucesso não é constante em todas as realizações do experimento, uma vez que os eventos não são independentes, ou seja, as amostras são extraídas sem reposição.
- 2ª) O fator (N–n)/(N–1) é denominado fator de correção para população finita. A amostragem com reposição (modelo binomial) é equivalente à amostragem de população infinita porque a probabilidade de sucesso permanece constante para as n realizações do experimento. Na amostragem sem reposição (modelo hipergeométrico) a população é finita.
- 3ª) No modelo hipergeométrico, se n é pequeno com relação a N, o fator de correção tende à 1. Neste caso, a distribuição hipergeométrica pode ser aproximada pela distribuição binomial fazendo p = k/N.

Distribuição de Hipergeométrica

Exemplos

- 1)Qual a probabilidade de sair 2 cartas pretas em 5 extrações de um baralho comum, sem reposição.
- Resposta: 32,51%
- 2)Uma caixa tem 12 lâmpadas das quais 5 estão queimadas. São escolhidas aleatoriamente 6 lâmpadas da caixa.
- Qual a probabilidade que duas lâmpadas estejam queimadas?
- Resposta:37,88%
- 3)Retirou-se 6 cartas de um baralho comum sem reposição. Qual a probabilidade que 4 cartas sejam figuras?
- Resposta:1,90%

Distribuição Multinomial

- A distribuição multinomial (polinomial) é uma extensão da distribuição binomial onde generaliza-se o experimento Bernoulli para mais de um resultado ou evento.
- Considere um experimento aleatório com k possíveis resultados, sendo que o experimento é repetido n vezes.
- Sejam $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$ as variáveis aleatórias discretas que representam o total de ocorrências de cada possível resultado. Sejam $X_1=n_1$, $X_2=n_2$, X_3, $=n_3$ ...., X_k $=n_k$ os resultados obtidos após as n repetições, onde $n=n_1+n_2+n_3+...+n_k$.
- O vetor aleatório X = $(X_1, X_2, X_3, ..., X_k)$ segue distribuição de probabilidades multinomial dada pela expressão:

$$\boxed{P(X_1 = n_1; X_2 = n_2; ...X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}}$$

- Onde n, k, p_1,p_2, ..., p_k são parâmetros da distribuição.

Distribuição Multinomial

- A esperança e a variância neste caso são:

$$E(X_i) = np_i \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots k$$

$$V(X_i) = np_i q_i \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots k$$

Distribuição Multinomial

Exemplos

- 1) Um dado não viciado é lançado 8 vezes. Qual a probabilidade de aparecer1 vez a face 2, 3 vezes a face 5 e 4 vezes a face 6?
- **Resposta:** 0,016%

- 2)Uma caixa tem 6 bolas brancas, 4 verdes e 2 amarelas. São retiradas 6 bolas com reposição. Determine a probabilidade de sair 2 bolas brancas, 3 amarelas e 1verde.
- **Resposta:** 2,31%

Distribuição de Poisson

- Na distribuição de Poisson (Siméon-Denis Poisson) (1781-1840), a variável aleatória discreta X representa o número de sucessos que ocorrem num certo intervalo contínuo.

- Por exemplo:
- 1º) Número de acidentes de carros por dia que ocorrem numa determinada cidade.
- 2º)Número de chamadas telefônica recebidas por hora em uma central telefônica.
- 3º)Número de defeitos de soldagem numa chapa de $1m^2$.

Distribuição de Poisson

Função de Densidade de Probabilidade

- A distribuição Poisson modela a ocorrência de um evento particular em um período de tempo unitário (t=1).
- Considera-se λ como o número médio de ocorrências do evento durante o período de tempo t.
- A variável X representa o número de ocorrências do evento durante uma unidade de tempo t. Essa variável tem a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\boxed{P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots}$$

- Onde λ é parâmetro da distribuição.

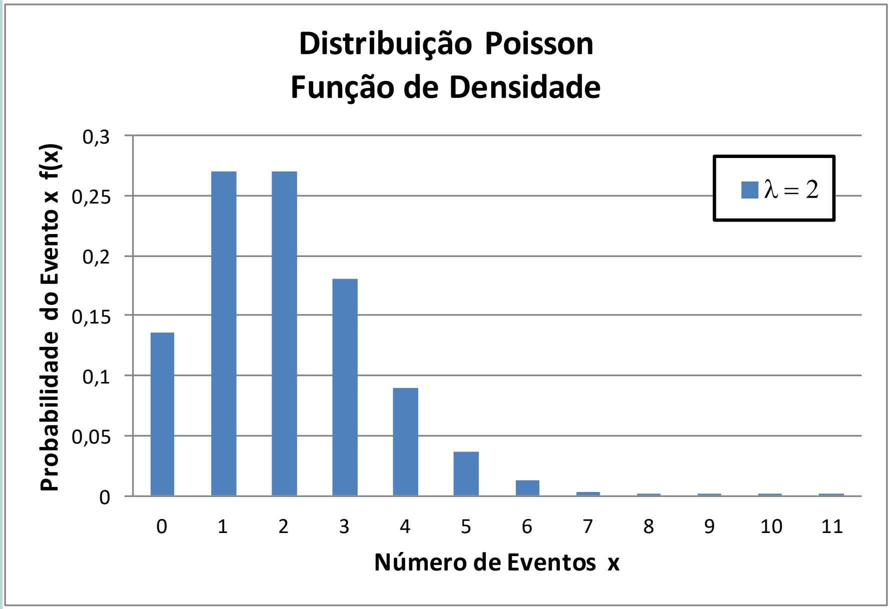
- A esperança e a variância:

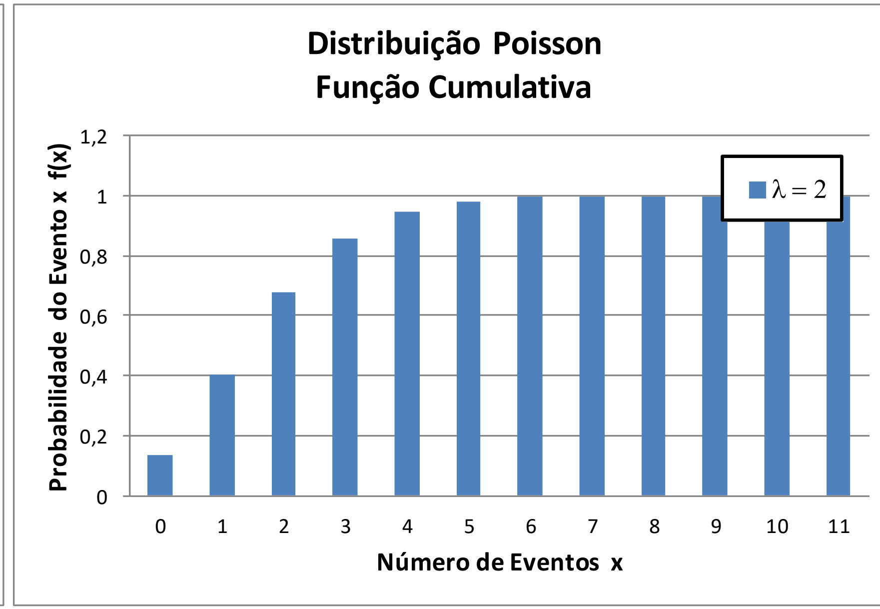
$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Distribuição de Poisson
Função de Densidade e Cumulativa

- **Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.





$$P(X = x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}, \; x = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

$$F(X = x) = \sum_{s=0}^{x} \frac{2^s e^{-2}}{s!}, \quad x = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Distribuição de Poisson

- Um Experimento de Poisson possui as seguintes características:
- 1ª) O número de sucessos que ocorrem num intervalo ou região específica é independente daquele que ocorre em qualquer outro intervalo ou região disjunto.
- 2ª) A probabilidade de ocorrência de um único sucesso que ocorre num intervalo pequeno é proporcional ao comprimento do intervalo e não depende do número de sucessos que ocorrem fora deste intervalo.
- **Observação:** Uma aproximação da Distribuição Binomial pode ser feita pela Distribuição do Poisson fazendo $\lambda = n.p$. Quanto maior o valor de n e menor o valor de p melhor será a aproximação.

Distribuição de Poisson

Função de Densidade Generalizada

- A forma generalizada da distribuição Poisson considera que o intervalo de tempo t, para a ocorrência dos eventos observados, não é necessariamente unitário.

$$\boxed{P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \dots}$$

- Onde λ e t são parâmetros da distribuição.
- A esperança e a variância, neste caso são:

$$E(X) = \lambda t$$

$$V(X) = \lambda t$$

Distribuição de Poisson
Exemplos

- 1)Num determinado aeroporto chegam, em média, 6 aviões por dia. Determine a probabilidade de um certo dia chegar dois ou mais aviões.
- Resposta: 98,26%
- 2)O número de telefonemas recebidos numa central telefônica é de 20 por hora. Qual a probabilidade da central receber 8 telefonemas em meia hora?
- Resposta: 11,27%
- 3)Um dado não viciado foi lançado 30 vezes. Qual a probabilidade de sair 10 faces 2?
- Resposta: Binomial =1,3% e Poisson=1,8%

Exercícios

Uma urna contém 3 bolas vermelhas, 2 verdes e 5 brancas. Determine:

- a)A probabilidade que a 7ª bola retirada com reposição seja a 1ª vermelha;
- **Resp.** Geométrica: (0,7)6.(0,3) = 3,53%
- b)A probabilidade que em10 bolas retiradas com reposição,3 sejam vermelhas;
- **Resp.** Binomial: 120.(0,3)3.(0,7)7 = 26,68%
- c)A probabilidade que de 5 bolas extraídas sem reposição, 2 sejam vermelhas;
- **Resp.** Hipergeométrica: (3.35)/252 =13,89%
- d)A probabilidade que a 10ª bola retirada com reposição seja a 3ªvermelha.
- **Resp.** Pascal: 36.(0,3)3.(0,7)7 = 8%