Álgebra Linear
Profa. Elba Bravo
Semestre: 2022 - 1

Lista de Exercícios 7

1. Em cada parte, explique em palavras por que os vetores dados *não são* uma base do espaço vetorial dado.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (2, 7)$ para R^2

(b) $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (6, 1, 1)$ para R^3

(c) $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = x - 1$ para P_2

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$,
$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ para M_{22}

3. Quais dos conjuntos de vetores dados são bases de R^3?

(a) $\{(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)\}$

(b) $\{(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)\}$

(c) $\{(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)\}$

(d) $\{(1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)\}$

5. Mostre que as matrizes dadas formam uma base de M_{22}.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de R^2.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$; $\mathbf{w} = (3, -7)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 8)$; $\mathbf{w} = (1, 1)$

(c) $\mathbf{u}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 2)$; $\mathbf{w} = (a, b)$

Respostas:

1. **(a)** Uma base de R^2 tem dois vetores linearmente independentes. **(b)** Uma base de R^3 tem três vetores linearmente independentes.
(c) Uma base de P_2 tem três vetores linearmente independentes. **(d)** Uma base de M_{22} tem quatro vetores linearmente independentes.

3. (a), (b) **7.** **(a)** $(\mathbf{w})_S = (3, -7)$ **(b)** $(\mathbf{w})_S = \left(\frac{5}{28}, \frac{3}{14}\right)$ **(c)** $(\mathbf{w})_S = \left(a, \frac{b-a}{2}\right)$

No Exercício 13, mostre que {$A1$, $A2$, $A3$, $A4$} é uma base de $M22$ e expresse A como uma combinação linear dos vetores da base.

13. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

No Exercício 15, mostre que {**p**1, **p**2, **p**3} é uma base de $P2$ e expresse **p** como uma combinação linear dos vetores da base.

15. $\mathbf{p}_1 = 1 + x + x^2$, $\mathbf{p}_2 = x + x^2$, $\mathbf{p}_3 = x^2$; $\mathbf{p} = 7 - x + 2x^2$

Nos Exercícios 1 - 3, encontre uma base do espaço solução do sistema linear homogêneo e encontre a dimensão desse espaço.

1.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

7. Encontre bases dos seguintes subespaços de R^3.

(a) O plano $3x - 2y + 5z = 0$.

(b) O plano $x - y = 0$.

(c) A reta $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$.

(d) Todos os vetores da forma (a, b, c) com $b = a + c$.

8. Encontre as dimensões dos seguintes subespaços de R^4.

(a) Todos os vetores da forma $(a, b, c, 0)$.

(b) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), em que $d = a + b$ e $c = a - b$.

(c) Todos os vetores da forma (a, b, c, d), em que $a = b = c = d$.

Respostas:

13. $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$ **15.** $\mathbf{p} = 7\mathbf{p}_1 - 8\mathbf{p}_2 + 3\mathbf{p}_3$

1. Base: $(1, 0, 1)$; dimensão = 1. **3.** Base: $(4, 1, 0, 0)$, $(-3, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$; dimensão = 3.

7. **(a)** $\left(\frac{2}{3}, 1, 0\right)$, $\left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right)$ **(b)** $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ **(c)** $(2, -1, 4)$ **(d)** $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$