Argumentos Válidos

Lógica Matemática

Prof. Fermín A. Tang

Argumento

Definição

- Sejam $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$ e Q proposições quaisquer. Chama-se de argumento a toda afirmação que estabelece que dada uma sequência $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$ de proposições tem como consequência a proposição final Q.
- As proposições $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$ são chamadas de premissas do argumento.
- Já a proposição final Q, é chamada de conclusão do argumento.
- Um argumento com premissas $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$ e conclusão Q é denotado como:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

- Que se interpreta das seguintes maneiras:
  - i) $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$ acarretam Q
  - ii) Q decorre de $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$
  - iii) Q se deduz de $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$
  - iv) Q se infere de $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$

Argumento

Silogismo

- Um argumento que possui duas premissas P_1, P_2 e uma conclusão Q é chamado de silogismo:

$$P_1, P_2 \vdash Q$$

Argumento

Validade

- Um argumento $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n \vdash Q$ se diz válido se somente se a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que as premissas $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$ são verdadeiras.
- Em um argumento válido, a veracidade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.
- Já um argumento não válido, admite a possibilidade da conclusão Q ser falsa mesmo quando as premissas $P_1,\ P_2,\ \dots, P_n$ são verdadeiras. Este tipo de argumento é chamado de sofisma.
- Assume-se que as premissas de um argumento são verdadeiras, ou pelo menos são admitidas como tal.

Argumento

Validade

- A lógica se preocupa apenas com a validade dos argumentos e não com veracidade o falsidade das premissas e das conclusões.
- A validade de um argumento depende exclusivamente da relação existente entre as premissas e a conclusão.
- Assim, afirmar que um dado argumento é válido significa que afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas forem verdadeiras.

Argumento

Condicional associada a um argumento

- Dado um argumento qualquer:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

- A condicional associada a este argumento é:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

- onde, o antecedente é a conjunção das premissas e o consequente é a conclusão do argumento.

- De maneira recíproca, a toda condicional corresponde um argumento cujas premissas podem ser extraídas do antecedente (quando o antecedente estiver na forma de conjunção) e cuja conclusão é o consequente.

Argumento

Condicional associada a um argumento – Exemplos

- Dado o seguinte argumento:

$$(p \land \neg q), (p \to \neg r), (q \lor \neg s) \;\vdash\; \neg(r \lor s)$$

- A condicional associada ao argumento é:

$$(p \land \neg q) \land (p \to \neg r) \land (q \lor \neg s) \;\to\; \neg(r \lor s)$$

- Por outro lado, dada a seguinte condicional:

$$(p \to q \lor r) \land \neg s \land (q \lor r \to s) \;\to\; (s \to p \land \neg q)$$

- O argumento associado é o seguinte:

$$(p \to q \lor r), \neg s, (q \lor r \to s) \;\vdash\; (s \to p \land \neg q)$$

Argumento

Teorema de Validade

- Teorema.- Um argumento $P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n \vdash Q$ é válido se somente se a seguinte condicional:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge\ P_n) \rightarrow Q$$

É tautológica.

- Observe que toda afirmação se e somente se possui dois sentidos. Neste caso, temos:
  - Se a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge\ P_n) \rightarrow Q$ é tautológica então o argumento $P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n \vdash Q$ é válido.
  - Se o argumento $P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n \vdash Q$ é válido então a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge\ P_n) \rightarrow Q$ é tautológica .

- Demostração.- Provaremos os dois sentidos presentes no se somente se.
- Se a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge\ P_n) \rightarrow Q$ é tautológica, isso significa que sempre que o antecedente $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge\ P_n)$ é verdadeiro o consequente é verdadeiro Q. O antecedente $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge\ P_n)$ é verdadeiro apenas quando as premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ forem todas verdadeiras. Com isso, o argumento $P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n \vdash Q$ é válido.
- Já se o argumento $P_1,\ P_2,\ \ldots, P_n \vdash Q$ é válido. Todas as premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ serão verdadeiras e com isso a conjunção $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge\ P_n)$ será verdadeira. Como isso, como o antecedente e o consequente na condicional são verdadeiros, temos que a condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge\ P_n) \rightarrow Q$ é tautológica.

Argumentos

Generalização

- Dado um argumento válido:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

- Onde tanto as premissas quanto a conclusão dependem das proposições $p, q, r, \ldots$:

$$P_1(p,q,r,\ldots), P_2(p,q,r,\ldots), \ldots, P_n(p,q,r,\ldots) \vdash Q(p,q,r,\ldots)$$

- Então, qualquer argumento com igual forma (ou estrutura) também será válido. Ou seja, podemos substituir as proposições $p, q, r, \ldots$ por quaisquer proposições $R, S, T, \ldots$ compostas:

$$P_1(R,S,T,\ldots), P_2(R,S,T,\ldots), \ldots, P_n(R,S,T,\ldots) \vdash Q(R,S,T,\ldots)$$

Argumentos

Sobre a forma dos argumentos

- A validade de um argumento depende apenas de sua forma (ou estrutura) e não de seu conteúdo ou da veracidade ou falsidade das proposições que a conformam.
- Argumentos diversos podem ter a mesma forma, e com isso é licito falar sobre a validade de uma dada forma ao invés de falar da validade de um dado argumento.
- Afirmar que uma dada forma é válida equivale a asseverar que não existe argumento algum com essa forma que possua premissas verdadeiras e conclusão falsa.
- Todo argumento de forma válida é um argumento válido.
- Todo argumento válido dever ter uma forma válida.

Argumentos

Sobre a forma dos argumentos – Exemplos

- Considere o seguinte argumento válido:

$$p \vdash p \vee q$$

- Do argumento acima, segue-se a validade dos seguintes argumentos:

$$(\neg p \wedge r) \vdash (\neg p \wedge r) \vee (\neg s \rightarrow r)$$

$$(p \rightarrow r \vee s) \vdash (p \rightarrow r \vee s) \vee (\neg r \wedge s)$$

- Observe que o primeiro argumento segue o princípio de adição. Dado que p é verdadeira, conclui-se que $p \vee q$ será verdadeira, independente do valor lógico de q.
- Observe que tanto o segundo quanto o terceiro argumentos, possuem a mesma estrutura do primeiro.
- Logo, esses argumentos são também válidos.

Argumentos Válidos Fundamentais

- São argumentos válidos fundamentais ou básicos os seguintes:

  - 1. Adição (AD) :
    $i)\ p \vdash p \vee q$
    $ii)\ p \vdash q \vee p$
  - 2. Simplificação (SIMP) :
    $i)\ p \wedge q \vdash p$
    $ii)\ p \wedge q \vdash q$
  - 3. Conjunção (CONJ) :
    $i)\ p,\ q \vdash p \wedge q$
    $ii)\ p,\ q \vdash q \wedge p$
  - 4. Absorção (ABS) : $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$
  - 5. Modus Ponens (MP) : $p \rightarrow q,\ p \vdash q$
  - 6. Modus Tollens (MT) : $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$

- A validade destes argumentos é consequência imediata das operações lógicas e do teorema de validade de um argumento, apresentado anteriormente.

Argumentos Válidos Fundamentais

- São argumentos válidos fundamentais ou básicos os seguintes:

  - 7. Silogismo disjuntivo (SD) :

    $$i)\ p \vee q,\ \ \neg p\ \vdash\ q$$

    $$ii)\ p \vee q,\ \neg q\ \vdash p$$

  - 8. Silogismo hipotético (SH) :

    $$p \rightarrow q,\ \ q \rightarrow r\ \vdash p \rightarrow r$$

  - 9. Dilema construtivo (DC) :

    $$p \rightarrow q,\ \ r \rightarrow s,\ \ p \vee r\ \ \vdash\ q \vee s$$

  - 10. Dilema destrutivo (DD) :

    $$p \rightarrow q,\ \ r \rightarrow s,\ \neg q \vee \neg s\ \ \vdash\ \neg p \vee \neg r$$

Regras de Inferência

- ✘ Os argumentos válidos estabelecem regras de inferência que permitem deduzir uma expressão a partir de um ou mais expressões assumidas como premissas ou deduzidas previamente:

- ✘ Nesta representação, as premissas se encontram na parte superior e a expressão deduzida é colocada na parte inferior.

- 1. Adição (AD) : $i)\ \dfrac{p}{p \vee q}$ $\quad ii)\ \dfrac{p}{q \vee p}$
- 2. Simplificação (SIMP) : $i)\ \dfrac{p \wedge q}{p}$ $\quad ii)\ \dfrac{p \wedge q}{q}$
- 3. Conjunção (CONJ) : $i)\ \dfrac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$ $\quad ii)\ \dfrac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{q \wedge p}$
- 4. Absorção (ABS) : $\dfrac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$
- 5. Modus Ponens (MP) : $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$
- 6. Modus Tollens (MT) : $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$

Regras de Inferência

- Os argumentos válidos estabelecem regras de inferência que permitem deduzir uma expressão a partir de um ou mais expressões assumidas como premissas ou deduzidas previamente:

- Nesta representação, as premissas se encontram na parte superior e a expressão deduzida é colocada na parte inferior.

- 7. Silogismo disjuntivo (SD) :

$$i)\ \frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q} \qquad ii)\ \frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p}$$

- 8. Silogismo hipotético (SH) :

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r}$$

- 9. Dilema construtivo (DC) :

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \\ p \vee r \end{array}}{q \vee s}$$

- 10. Dilema destrutivo (DD) :

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \\ \neg q \vee \neg s \end{array}}{\neg p \vee \neg r}$$

Referências

- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 9. Argumentos. Regras de Inferência. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.