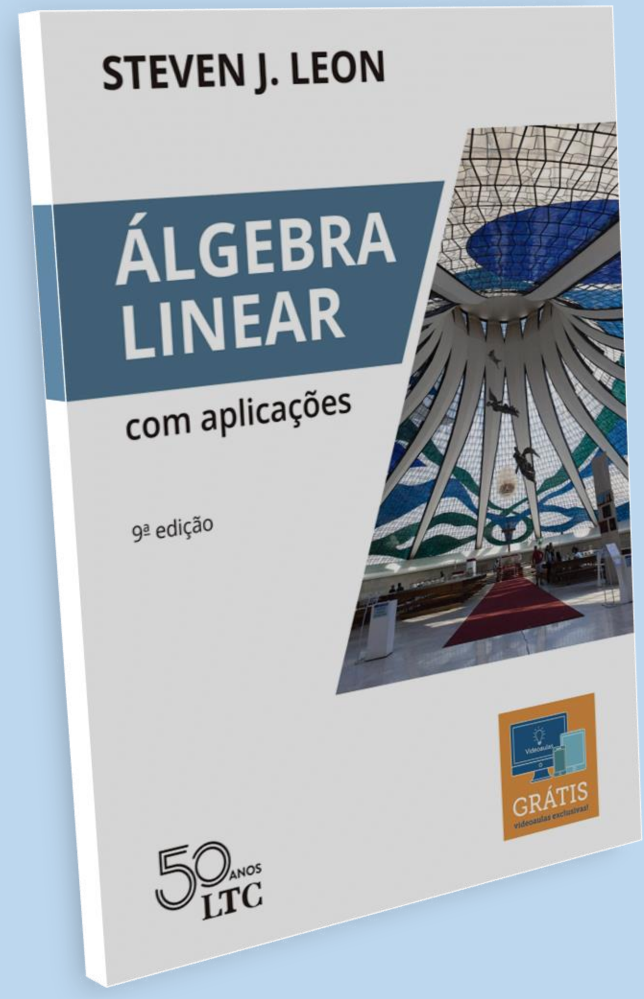
UENF

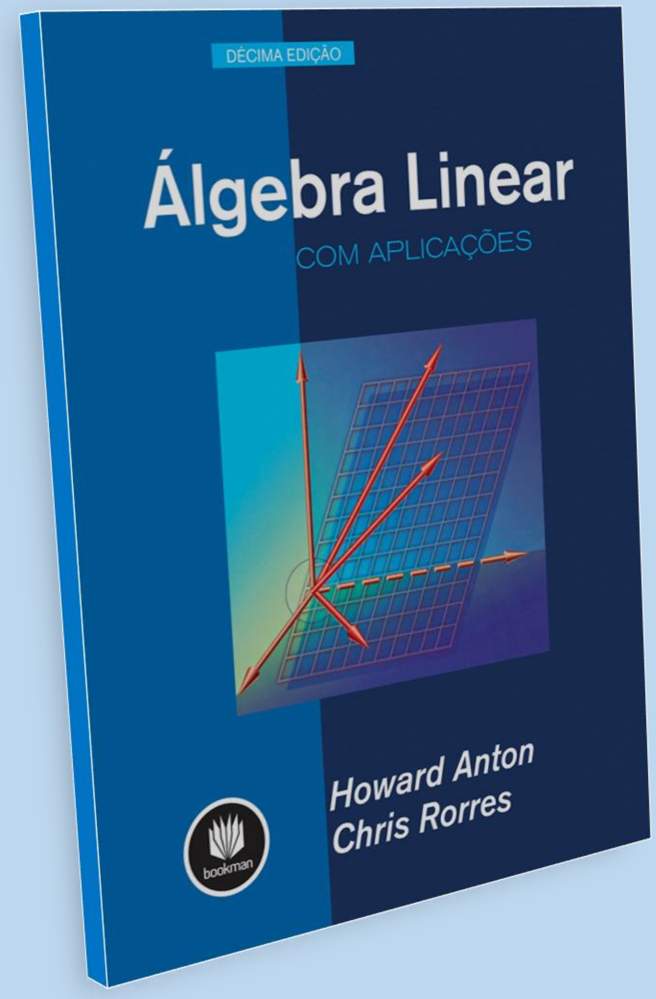
Álgebra Linear

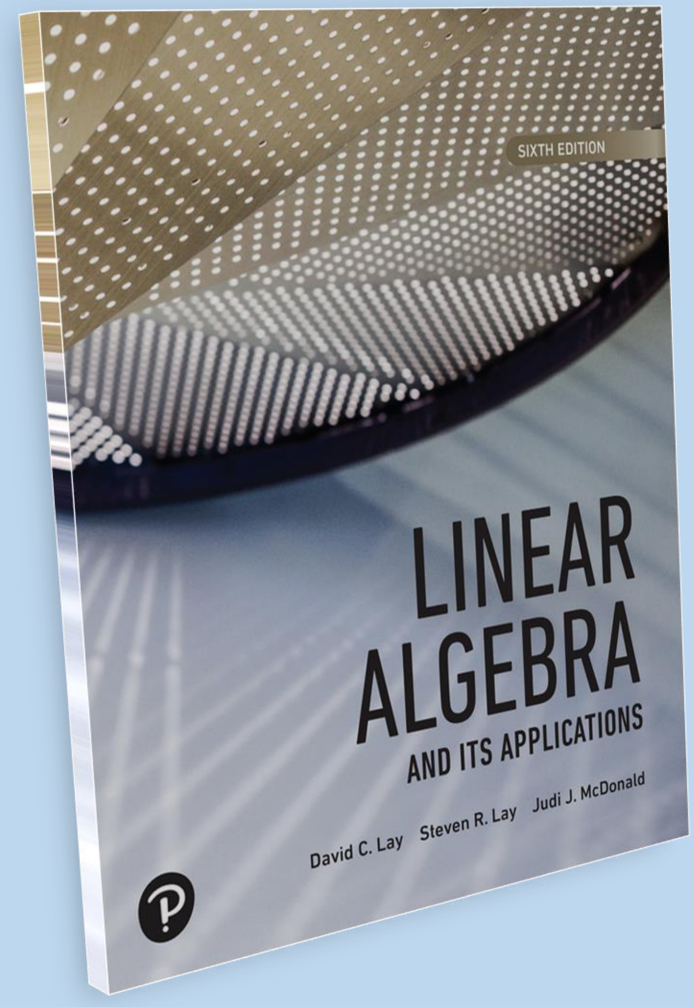
Diagonalização de Operadores

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







Vetores Próprios e Valores Próprios

Definição. Vetor Próprio e Valor Próprio de um Operador Linear

Seja $T: V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, é chamado ***vetor próprio*** do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(v) = \lambda v$$

O número real λ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado ***valor próprio*** de T associado ao vetor próprio v.

Observações.

a) Os vetores próprios são também denominados vetores característicos ou autovetores.

b) Os valores próprios são também denominados valores característicos ou autovalores.

Vetores Próprios e Valores Próprios

1. **Determinação dos Valores Próprios**

   Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuja matriz canônica é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Isto é $A = [T]$

Se v e λ são, respectivamente, vetor próprio e o correspondente valor próprio do operador T, tem-se:

$$T(v) = \lambda v$$

$A v = \lambda v$ ou $A v - \lambda v = 0$ ou

$A v - \lambda Iv = 0$, pois $v = I v$, onde I é a matriz Identidade

Ou

$$(A - \lambda I) v = 0 \qquad (*)$$ sistema homogêneo

Valores Próprios

Para que esse sistema homogêneo admita soluções não nulas, isto é,

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ deve-se ter: det (A - λ I) = 0

Ou, em termos de componentes:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Ou ainda:

Valores Próprios

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

A equação $det\,(A - \lambda I) = 0$ é denominada ***equação característica*** do operador T ou da matriz A, e suas raízes são os valores próprios do operador T ou da matriz A.
O determinante $det\,(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ denominado ***polinômio característico***.

Vetores Próprios

2) Determinação dos Vetores Próprios

A substituição de λ pelos seus valores no sistema homogêneo de equações lineares (*) permite determinar os vetores próprios associados.

Exemplo 1. Determinar os valores próprios e os vetores próprios do operador linear

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x , y , z) = (3x - y + z \;,\; -x + 5y - z \;,\; x - y + 3z)$$

Solução

I) A matriz canônica do operador T é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A equação característica do operador T é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Logo, desenvolvendo o determinante pela primeira linha, obtém-se:

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(15 - 8\lambda + \lambda^2 - 1) + 1(-3 + \lambda + 1) + 1(1 - 5 + \lambda) = 0$$

Simplificando a expressão, resulta:

$$-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0 \qquad \text{ou,} \qquad \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

Fatorando a última expressão obtém-se:

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3)\,(\lambda - 6) = 0$$

Logo os valores próprios do operador T são:

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$

II) O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos vetores próprios associados é dado por:

$$(A - \lambda I)\,v = 0$$

Considerando

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

O sistema é dado por:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

i) Substituindo λ por 2 no sistema (1), obtém-se os vetores próprios associados a $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é:

$$\begin{cases} 1x - 1y + 1z = 0 \\ -1x + 3y - 1z = 0 \\ 1x - 1y + 1z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções: z = - x, $y = 0$

Assim, os vetores do tipo $v_1 = (x\,, 0\,, -x)$ ou $v_1 = x(1\,, 0\,, -1)$ com $x \neq 0$, são os vetores próprios associados a $\lambda_1 = 2$.

ii) Substituindo λ por 3 no sistema (1), obtém-se os vetores próprios associados a $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é:

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções: y = x , z = x

Assim, os vetores do tipo $v_2 = (x\,, x\,, x)$ ou $v_2 = x(1\,, 1\,, 1)$ com $x \neq 0$, são os vetores próprios associados a $\lambda_2 = 3$.

iii) Substituindo λ por 6 no sistema (1), obtém-se os vetores próprios associados a $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é:

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções: y = - 2x , z = x

Assim, os vetores do tipo $v_2 = (x\,, -2x\,, x)$ ou $v_2 = x(1\,, -2\,, 1)$ com $x \neq 0$, são os vetores próprios associados a $\lambda_3 = 6$.

Diagonalização de Operadores

Sabe-se que dado um operador linear $T: V \to V$, a cada base B de V corresponde uma matriz $[T]_B$ que representa T na base B. Nosso propósito é obter uma base do espaço de modo que a matriz de T nessa base seja a mais simples representante de T. Veremos que essa matriz é uma matriz diagonal.

Propriedade. Vetores próprios associados a valores próprios distintos de um operador $T: V \to V$ são linearmente independentes.

Corolário. Sempre que tivermos um operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o conjunto $\{v_1 , v_2\}$, formado pelos vetores próprios associados, será uma base do $\mathbb{R}^2$. Este fato vale em geral, isto é, se $T : V \to V$ é linear, $\dim V = n$ e T *possui* n *valores próprios distintos, o conjunto* $\{v_1 , v_2, \dots , v_n\}$, *formado pelos correspondentes vetores próprios, é uma base de V.*

Exemplo. Seja o operador linear

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x\,,\,y) = (-3x - 5y\,,\,2y)$$

A matriz Canônica de T é $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

A equação característica de T é $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Ou $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

e, portanto, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$ são os valores próprios de T.

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, os correspondentes vetores próprios formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

Calculando os vetores próprios por meio do sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obteremos:

- Para $\lambda_1 = 2$ os vetores $v_1 = x(1\,,-1)$ com $x \neq 0$;
- Para $\lambda_2 = -3$ os vetores $v_2 = x(-1\,,0)$ com $x \neq 0$;

Logo, o conjunto $\{(1\,,-1)\,,(-1\,,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Matriz Diagonalizável

Definição. A matriz quadrada A é ***diagonalizável*** se existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}A\,P$ seja diagonal.

Diz-se, nesse caso, que a matriz P diagonaliza A, ou que P é a matriz diagonalizadora.

A definição acima pode ser expressa de modo equivalente: *Um operador linear* T: V → V *é diagonalizável se existe uma base de V formada por vetores próprios de T.*

Matriz Diagonalizável – Exemplos

Exemplo 1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear dado por $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$

Encontre uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz de T é diagonal.

Solução

A matriz canônica do operador T é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$, e os respectivos vetores próprios são

$v_1 = x(5, 2)$ e $v_2 = x(1, -1)$

A base em relação à qual a matriz de T é diagonal é $P = \{(5, 2), (1, -1)\}$, base dos vetores próprios.

Por conseguinte, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

é a matriz que diagonaliza A, isto é:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

Observação. Se na matriz P trocamos a ordem dos vetores coluna, isto é, tomarmos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz diagonal $D = P^{-1}A\,P$ será

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonalizável – Exemplos

Exemplo 2. Determinar uma matriz P que diagonaliza a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução

I) A equação característica de A é:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, usando a primeira linha, obtém-se:

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ou $\quad -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$.

Ou então: $\quad \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$.

Fatorando a última expressão obtém-se: $\quad (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

Logo os valores próprios de A são:

$\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$

(o número 2 é uma raiz dupla da equação)

II) Calculando osvetores próprios por meio do sistema homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obteremos:

- Para $\lambda_1 = 2$ um só vetor próprio LI $v_1 = (1, 0, 0)$;
- Para $\lambda_2 = -3$ um só vetor próprio LI $v_2 = (1, 1, -2)$

III) Como só existem dois vetores LI de $\mathbb{R}^3$, não existe uma base P constituída de vetores próprios . Logo, a matriz A não é diagonalizável.

Diagonalização de Matrizes Simétricas

Propriedades:

I) A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas raízes reais.

II) Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear simétrico com valores próprios distintos, então os vetores próprios são ortogonais.

Observação. No caso particular de A ser simétrica, P será uma base ortogomal. Normalizando cada vetor, tem-se que P, além de ortogonal, será também ortonormal. Logo os vetores próprios ortonormais de P formarão uma *matriz ortogonal* tal que

$$P^{-1} = P^t$$

Assim,

$$D = P^{-1} A\, P = P^t A\, P$$

E, nesse caso, diz-se que P *diagonaliza A ortogonalmente*.

Diagonalização de Matrizes Simétricas - Exemplo

Exemplo 1. Seja o operador linear simétrico $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinar uma matriz ortogonal P que diagonaliza A.

Solução

I) A equação característica de A é:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, considerando a primeira linha, obtém-se:

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Isto é: $-\lambda^3 + 5\lambda^2 = 0$ ou $\lambda^2 (5 - \lambda) = 0$.

As raízes dessa última equação são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 5$ e, por conseguinte, são valores próprios do operador linear simétrico T.

II) O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos vetores próprios associados é:

$$(A - \lambda I)\, v = 0$$

Considerando

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

i) Substituindo λ por 0 no sistema (1), obtém-se os vetores próprios associados a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções próprias: $z = ½\,x$ e y qualquer.

Assim, os vetores v = (x , y , ½ x) são os vetores próprios associados a $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$.

$$v = (x , y , ½ x) = (x , 0 , ½ x) + (0 , y , 0) = x (1 , 0 , ½) + y (0 , 1 , 0) =$$
$$= \frac{x}{2}\,(2 , 0 , 1) + y\,(0 , 1 , 0)$$

Logo os vetores $v_1 = (2, 0, 1)$ e $v_2 = (0 , 1 , 0)$ linearmente independentes são dois vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$.

Os vetores próprios unitários, associados $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$, são:

$$u_1 = \frac{1}{|v_1|}\,v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{|v_2|}\,v_2 = (0, 1, 0)$$

ii) Substituindo λ por 5 no sistema (1), obtém-se os vetores próprios associados a $\lambda_3 = 5$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é:

$$\begin{cases} -4x \quad - 2z = 0 \\ \quad -5y \quad = 0 \\ -2x \quad - z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções próprias: $z = -2x$ e $y = 0$.

Assim, os vetores $v_3 = (x, 0, -2x) = x\,(1, 0, -2)$ são os vetores próprios associados a $\lambda_3 = 5$.

O vetor próprio unitário, associado a $\lambda_3 = 5$ é dado por:

$$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

III) A matriz P, cujas colunas são as componentes dos vetores próprios unitários u_1 , u_2 e u_3 , associados aos valores próprios λ_1 , λ_2 e λ_3 , é ortogonal:

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array}$$

De fato

$$u_1 \,.\, u_1 = u_2 \,.\, u_2 = u_3 \,.\, u_3 = 1$$

$$u_1 \,.\, u_2 = u_1 \,.\, u_3 = u_2 \,.\, u_3 = 0$$

IV) A matriz P é a matriz diagonalizadoa.

De fato: $D = P^{-1}A\,P = P^{t}A\,P$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$