Cálculo III – Primeira Avaliação – 18/04/2024
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Matrícula: ____________________ **Curso:** ____________________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

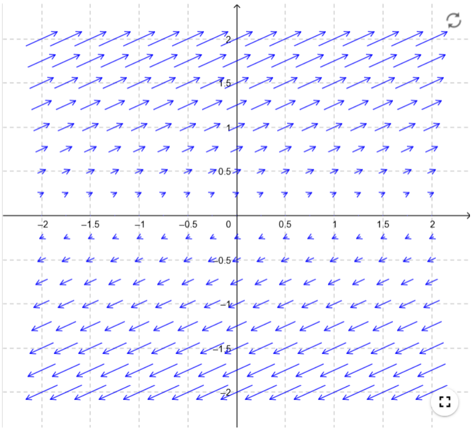
- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

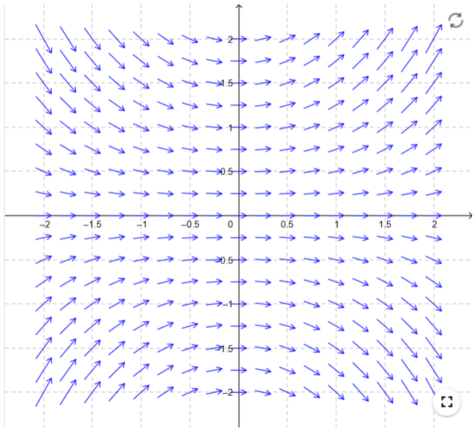
D

1. (1 ponto) Assinale a figura que corresponde ao campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (2y, y)$. Justifique a sua resposta.

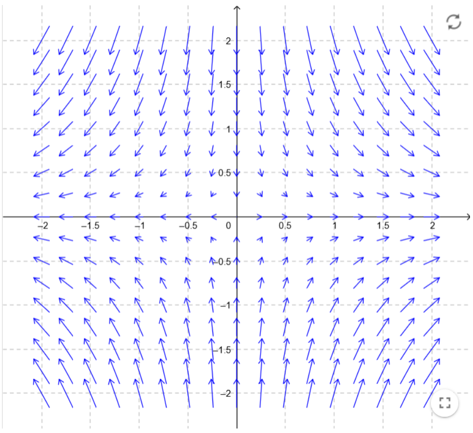
A.



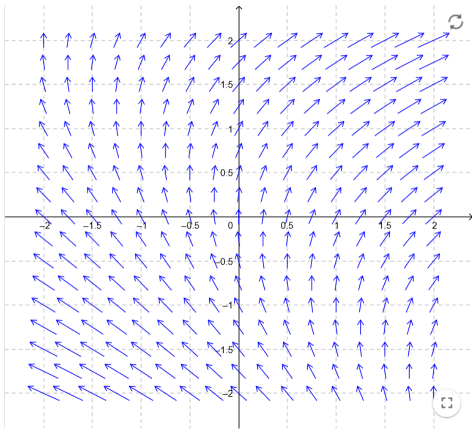
B.



C.



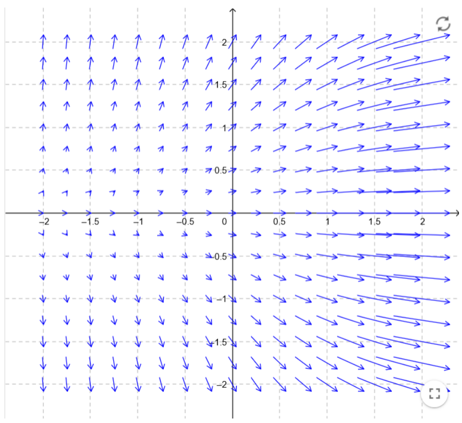
D.



Solução:

Alternativa correta: A

2. (1 ponto) Assinale a função que corresponde à figura abaixo. Justifique.



A. $\vec{F}(x,y) = (x^2, y)$

B. $\vec{F}(x,y) = (e^x, y)$

C. $\vec{F}(x,y) = (-x, y)$

D. $\vec{F}(x,y) = (2y, x)$

Solução:
Alternativa correta: B

3. (1 ponto) Assinale a única alternativa correta:

A. Se $\vec{F}(x,y) = \nabla f$, então $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(y) - f(x)$.

B. Se $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ é um campo conservativo, então $P_x = Q_y$.

C. Se $\vec{F}(x,y)$ é um campo conservativo e C é uma curva fechada, então

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

D. Se $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ em uma dada curva fechada C, então $\vec{F}(x,y)$ é um campo conservativo.

Solução:
Alternativa correta: C

4. (2 pontos) Seja $f(x,y) = x^2 y$ e seja C o segmento de reta que vai de $A = (0,2)$ a $B = (2,-1)$. Calcule

$$\int_C f\, ds.$$

Solução:
Temos

$$\begin{aligned} &\vec{r}(t) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\cdot t = (2t, 2-3t), \qquad 0 \le t \le 1,\\ &\vec{r'}(t) = (2,-3), \qquad \|\vec{r'}(t)\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_C f\, ds &= \int_0^1 [x(t)]^2 y(t)\, \|\vec{r'}(t)\|\, dt = \int_0^1 (2t)^2(2-3t)\sqrt{13}\, dt \\ &= 4\sqrt{13}\int_0^1 2t^2 - 3t^3\, dt = 4\sqrt{13}\left[\frac{2t^3}{3} - \frac{3t^4}{4}\right]_{t=0}^{1} = -\frac{\sqrt{13}}{3}. \end{aligned}$$

5. Seja $\vec{F}(x,y) = (2x+y, x+4y)$ e considere C a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (t^2, t^3), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

a) (2 pontos) Diretamente.

Solução:
Temos

$$\vec{r'}(t) = (2t, 3t^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (2x(t)+y(t), x(t)+4y(t)) \cdot \vec{r'}(t)\, dt \\
&= \int_0^1 (2t^2+t^3, t^2+4t^3) \cdot (2t, 3t^2)\, dt \\
&= \int_0^1 (4t^3+2t^4) + (3t^4+12t^5)\, dt = t^4+t^5+2t^6 \Big|_{t=0}^{1} = 4.
\end{aligned}$$

b) (2 pontos) Usando o Teorema Fundamental das Integrais de Linha.

Solução:
Denote $P = 2x+y$ e $Q = x+4y$, de forma que $\vec{F} = (P,Q)$. Vamos verificar que $\vec{F}$ é conservativo pelo teste das derivadas cruzadas:

$$P_y = 1 = Q_x. \qquad\qquad \text{(OK)}$$

Portanto, há uma função potencial $f(x,y)$ tal que $\vec{F} = \nabla f = (f_x, f_y)$. Assim,

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = \int f_x\, dx = \int P\, dx = \int 2x+y\, dx = x^2+yx+g(y), \\
&f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+yx+g(y)\right] = x+g'(y) \\
&\quad = Q = x+4y, \\
&\therefore \quad g'(y) = 4y \quad \therefore \quad g(y) = 2y^2 \\
&\therefore \quad f(x,y) = x^2+yx+2y^2.
\end{aligned}$$

Logo, pelo TFIL,

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) \\
&= f(1^2, 1^3) - f(0^2, 0^3) = f(1,1) - f(0,0) \\
&= (1^2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1^2) - (0^2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0^2) = 4.
\end{aligned}$$