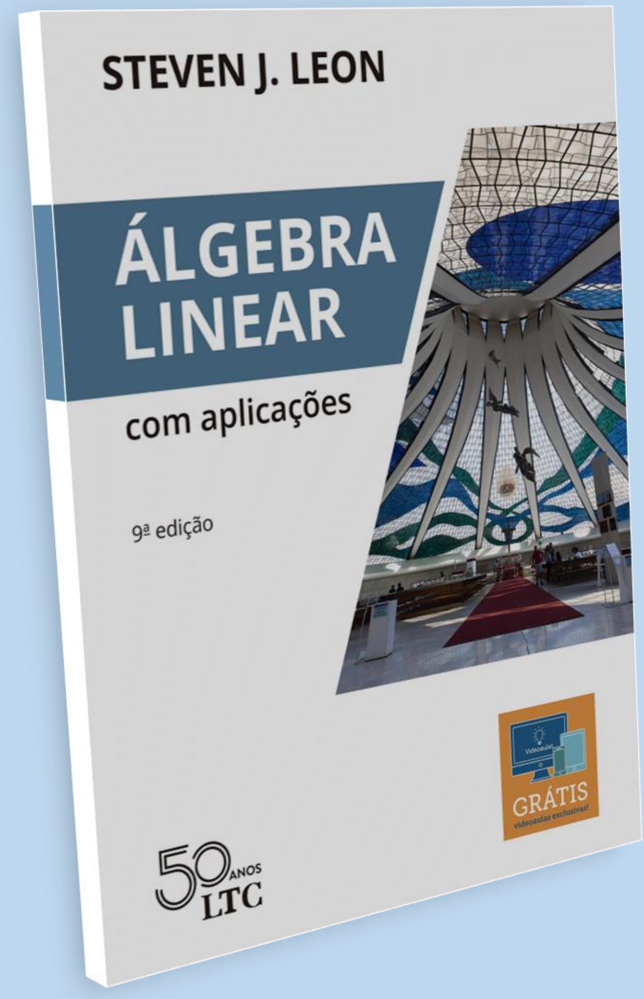
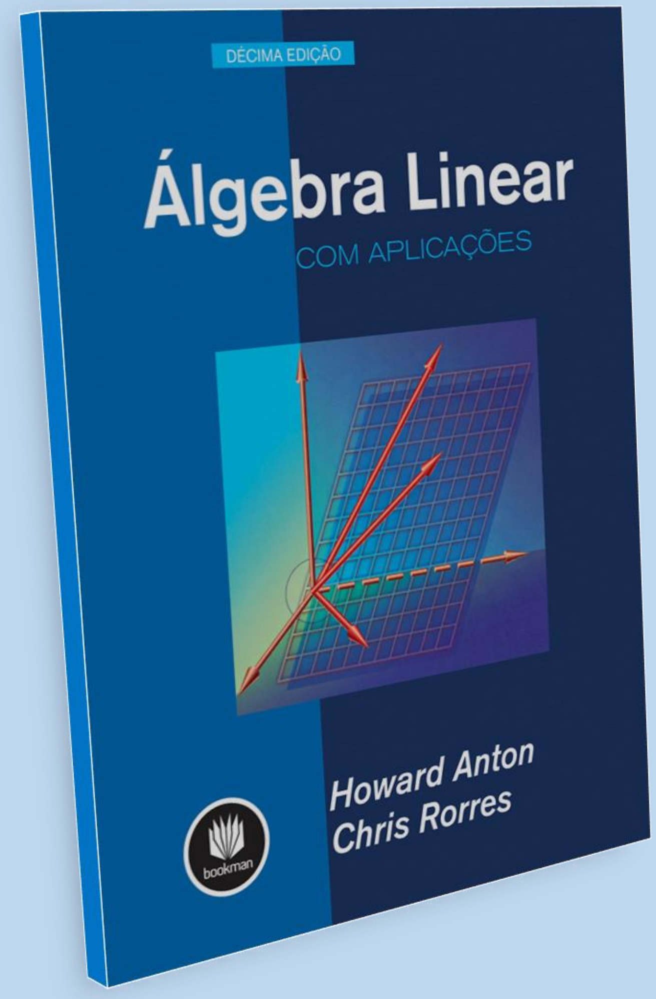
Álgebra Linear

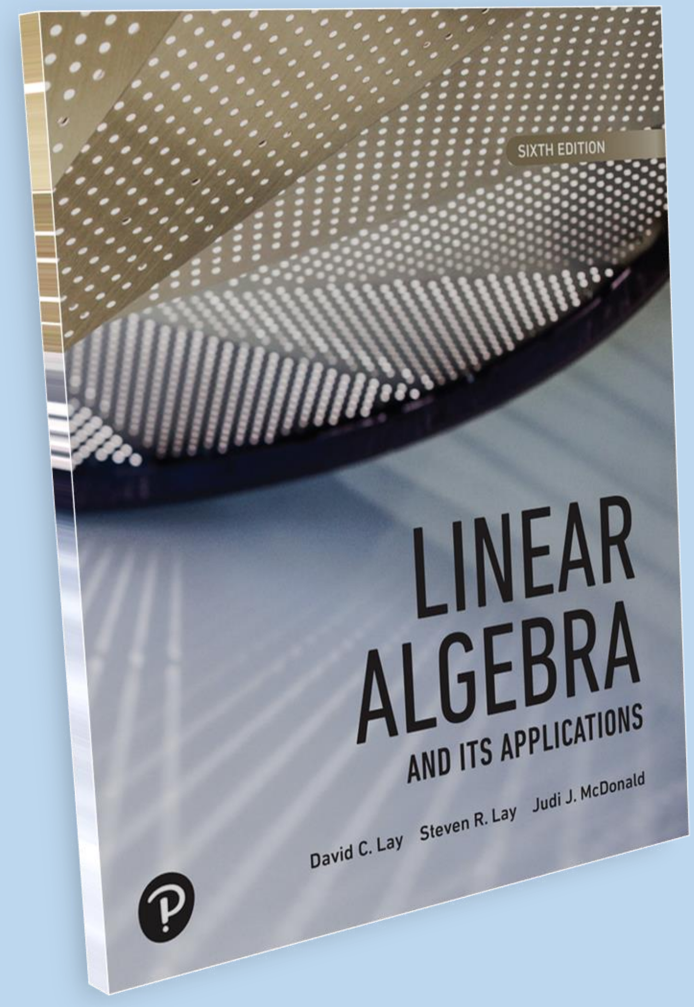
Espaços Vetoriais – Parte 3

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







Espaço Linha, Espaço Coluna e Espaço Nulo

Definição.

Para uma matriz A, m x n,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\ \mathbf{r}_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}] \end{aligned}$$

em R^n formados pelas linhas de A são denominados ***vetores linha*** de A, e os vetores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

em R^m formados pelas colunas de A são denominados ***vetores coluna*** de A.

Definição. Se A for uma matriz m x n, então o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores linha de A é denominado **espaço linha** de A, e o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelos vetores coluna de A é denominado **espaço coluna** de A. O espaço solução do sistema homogêneo de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, é denominado **espaço nulo** de A.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{11}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ denotam os vetores coluna de A, então o produto $A\mathbf{x}$ pode ser expresso como uma combinação linear desses vetores com coeficientes de $\mathbf{x}$, ou seja,

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \qquad (1)$$

Assim, um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m equações em n incógnitas pode ser escrito como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \qquad (2)$$

do que podemos concluir que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A.

Teorema. Um sistema A**x** = **b** de equações lineares é consistente se, e só se, **b** está no espaço coluna de A.

Exemplo 1. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o sistema linear

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Mostre que **b** está no espaço coluna de ***A*** expressando **b** como uma combinação linear dos vetores coluna de ***A***.

Vamos resolver utilizando o método de Eliminação de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -9 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & -1/5 & -8/5 \\ 0 & -3 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{matrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13/5 & -29/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & -8/5 \\ 0 & 0 & 17/5 & 51/5 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow \frac{5}{17} L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -13/5 & -29/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & -8/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \; \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{13}{5} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{5} L_3 \end{matrix} \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Segue que $x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$

Disso e da Fórmula (2) segue que

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Teorema. Se $\boldsymbol{x_0}$ denotar uma solução qualquer de um sistema linear consistente Ax = b e se S = $\{v_1 , v_2 , . . . , v_k\}$ for uma base do espaço nulo de A, então cada solução de Ax = b pode ser expressa na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \qquad (3)$$

Reciprocamente, com qualquer escolha dos escalares $c_1, c_2, . . . , c_k$, o vetor **x** dessa fórmula é uma solução de A**x = b**.

Observação 1. A Equação (3) dá uma fórmula para a ***solução geral*** de *A***x = b**. O vetor $\boldsymbol{X_0}$ nessa fórmula é denominado ***solução particular*** de *A***x = b**, e a parte restante da fórmula é denominada ***solução geral*** de *A***x = 0**.

Em palavras, podemos reescrever essa fórmula como segue.

A solução geral de um sistema linear consistente pode ser expressa como a soma de uma solução particular daquele sistema com a solução geral do sistema homogêneo correspondente.

Exemplo 2. Seja o sistema linear não homogêneo A**x** = **b**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

a solução geral desse sistema linear pode ser escrita de forma paramétrica como

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

que podemos reescrever em forma vetorial como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-3r - 4s - 2t, \quad r, \quad -2s, \quad s, \quad t, \quad 1/3) \qquad (4)$$

Considere o sistema linear homogêneo **Ax = 0,** associado ao problema anterior

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a solução geral desse sistema linear homogêneo pode ser escrita de forma paramétrica como

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

que podemos reescrever em forma vetorial como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-3r - 4s - 2t, \ \ r, \ \ -2s, \ \ s, \ \ t, \ \ 0) \qquad (5)$$

As equações (4) e (5) podem ser reescritas como segue

não homogêneo → $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ = r (-3, 1, 0,0,0,0) + s(-4, 0, -2, 1, 0, 0)
+ t(-2, 0, 0, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 0, 0, 1/3)

homogêneo → $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ = r(-3, 1, 0,0,0,0) + s(-4, 0, -2, 1, 0, 0) + t(-2, 0, 0, 0, 1, 0)

Deduzimos que a solução geral $\mathbf{x}$ do sistema não homogêneo e a solução geral $\mathbf{x}_h$ do sistema homogêneo correspondente (quando escrita como vetor coluna) estão relacionadas por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_0} + \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_h}$$

Os vetores em $\mathbf{x}_h$ formam uma base do espaço solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Teorema. As operações elementares com linhas não alteram o espaço nulo de uma matriz.

Teorema. As operações elementares com linhas não alteram o espaço linha de uma matriz.

Teorema. Se uma matriz R está em forma escalonada por linhas, então os vetores linha com os pivôs (ou seja, os vetores linha não nulos) formam uma base do espaço linha de R, e os vetores coluna com os pivôs vetores linha formam uma base do espaço coluna de R.

Bases para os Espaços Linha e Coluna

Exemplo 3. A matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está em forma escalonada por linhas. Logo os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \quad 3] \\ \mathbf{r}_2 &= [0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0] \\ \mathbf{r}_3 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \end{aligned}$$

formam uma base do espaço linha de R e os vetores

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço coluna de R

Teorema. Sejam A e B matrizes equivalentes por linhas.

(a) Um conjunto qualquer de vetores coluna de A é linearmente independente se, e só se, o conjunto de vetores coluna correspondente de B é linearmente independente.

(b) Um conjunto qualquer de vetores coluna de A forma uma base do espaço coluna de A se, e só se, o conjunto de vetores coluna correspondente de B forma uma base do espaço coluna de B.

Exemplo 4. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Reduzindo A à forma escalonada por linhas, obtemos

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como as primeira, terceira e quinta colunas de R contêm os pivôs dos vetores linha, temos que os vetores

$$\mathbf{c}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}'_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço coluna de R. Assim, os vetores coluna de A correspondentes, a saber,

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço coluna de *A*.

O espaço nulo de *A* é o espaço solução do sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ que, conforme vimos no Exemplo 2, tem a base

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posto e Nulidade de uma Matriz

Definição. A dimensão comum do espaço linha e do espaço coluna de uma matriz A é denominada ***posto*** de A e denotada por pos(A). A dimensão do espaço nulo de A é denominada ***nulidade*** de A e denotada por nul(A).

Exemplo. Encontre o posto e a nulidade da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Solução. A forma escalonada reduzida por linhas de A é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como essa matriz tem dois pivôs, então pos(A) = 2.

Para encontrar a nulidade de A, devemos encontrar a dimensão do espaço solução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A solução geral do sistema homogêneo Ax = 0 associado à matriz dada é como segue, ou em formato de vetor coluna,

$$\begin{aligned} x_1 &= 4r + 28s + 37t - 13u \\ x_2 &= 2r + 12s + 16t - 5u \\ x_3 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \\ x_6 &= u \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como os quatro vetores do lado direito formam uma base do espaço solução, temos que nul(A) = 4.

Teorema. O teorema da dimensão para matrizes

Se A for uma matriz com n colunas, então

$$\text{pos}(A) + \text{nul}(A) = n$$

Teorema. Se A for uma matriz m x n, então

(a) pos(A) = número de variáveis líderes na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) nul(A) = número de parâmetros (ou variáveis livres) na solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Base de um espaço gerado

Exemplo 5. Base de um espaço vetorial usando operações com linhas

Encontre uma base do subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

Solução. O espaço gerado por esses vetores é o espaço linha da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduzindo essa matriz a uma forma escalonada por linhas, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores linha não nulos nessa matriz são

$$\mathbf{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0), \quad \mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

Esses vetores formam uma base do espaço linha e, consequentemente, formam uma base do subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, $\mathbf{v_4}$.

Exemplo 6. Encontrar o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, -2, -1) \quad \text{e} \quad v_2 = (2, 1, 1).$$

Solução.

Seja W = G(v_1 , v_2). Tomemos $v = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$. Temos que $v \in W$ se, e somente se, existem números reais a_1 e a_2 tais que

$$v = a_1\, v_1 + a_2\, v_2 , \quad \text{isto é,} \quad (x, y, z) = a_1(1, -2, -1) + a_2(2, 1, 1)$$

ou equivalentemente, se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1 + 2\, a_2 &= x \\ -2\, a_1 + a_2 &= y \\ -a_1 + a_2 &= z \end{aligned} \qquad (*)$$

tem solução.

Resolvendo o sistema (*):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 5 & y+2x \\ 0 & 3 & x+z \end{bmatrix} L_2 \leftarrow \tfrac{1}{5} L_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{y+2x}{5} \\ 0 & 3 & x+z \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{2x+y}{5} \\ 0 & 0 & \frac{-x-3y+5z}{5} \end{bmatrix}$$

Portanto, o sistema (*) tem solução se, e somente se, $-x - 3y + 5z = 0$, ou $x + 3y - 5z = 0$. Assim,

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \; x + 3y - 5z = 0 \}$$

Para determinar uma base para o subespaço W, isolamos uma variável na equação
$x + 3y - 5z = 0$,
por exemplo, $x = -3y + 5z$. Logo,

$$(x , y , z) = (-3y + 5z , y , z) = (-3y , y , 0) + (5z , 0 , z) = y (-3 , 1 , 0) + z (5 , 0 , 1)$$

Assim uma base para W é dada por

$$B = \{v_1 = (-3 , 1 , 0) , \quad v_2 = (5 , 0 , 1)\}$$

W pode ser escrito também como segue

$$W = \{y (-3 , 1 , 0) + z (5 , 0 , 1); \quad y , z \in \mathbb{R} \}$$