$$= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

EXEMPLO 4 Calcule $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$. A superfície inferior de E é o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e a superfície superior é o plano $z = 2$. (Veja a Figura 9.) Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 2,\ r \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

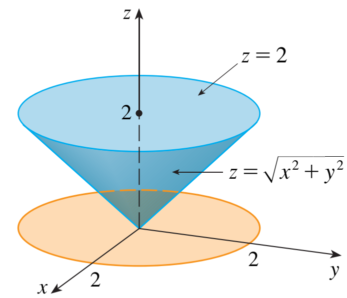


FIGURA 9

Portanto, temos

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx = \iiint_E (x^2+y^2)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r)\,dr$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi$$

15.8 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$

2. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$ (b) $(1, 1, 1)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para cilíndricas.

3. (a) $(-1, 1, 1)$ (b) $\left(-2, 2\sqrt{3}, 3\right)$

4. (a) $\left(2\sqrt{3}, 2, -1\right)$ (b) $(4, -3, 2)$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\theta = \pi/4$ **6.** $r = 5$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $z = 4 - r^2$ **8.** $2r^2 + z^2 = 1$

9–10 Escreva as equações em coordenadas cilíndricas.

9. (a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ (b) $z = x^2 - y^2$

10. (a) $3x + 2y + z = 6$ (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

11–12 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $0 \leqslant r \leqslant 2, \quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$

12. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad r \leqslant z \leqslant 2$

13. Uma casca cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno 6 cm e raio externo 7 cm. Escreva desigualdades que descrevam a casca em um sistema de coordenadas adequado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas em relação à casca.

14. Use uma ferramenta gráfica para desenhar o sólido limitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 5 - x^2 - y^2$.

15–16 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

15. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$ **16.** $\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^r r\,dz\,d\theta\,dr$

17–28 Utilize coordenadas cilíndricas.

17. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, onde E é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

18. Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.

19. Calcule $\iiint_E (x + y + z)\,dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

20. Calcule $\iiint_E x\,dV$, onde E é limitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

21. Calcule $\iiint_E x^2\,dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

22. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

23. Determine o volume do sólido que é limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

24. Determine o volume do sólido que está entre o paraboloide $z = x^2 + y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

25. (a) Encontre o volume da região E limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
(b) Encontre o centroide do E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).

26. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a \cos \theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
(b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.

27. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ $(a > 0)$, se S tem densidade constante K.

28. Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância do eixo z.

29-30 Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas.

29. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz \, dz \, dx \, dy$

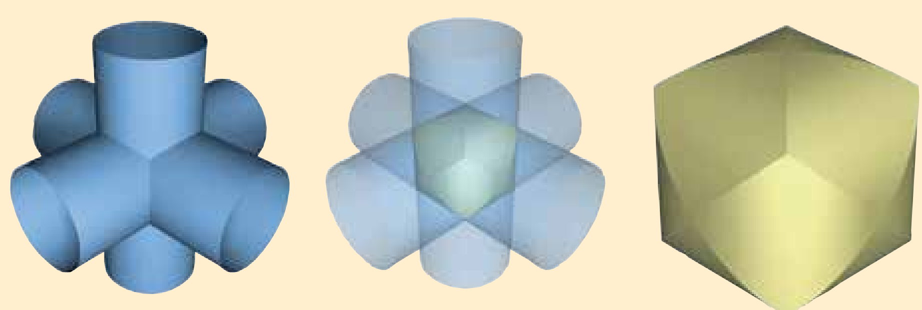
30. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$

31. Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho necessária para erguer uma montanha a partir do nível do mar. Considere uma montanha que tenha essencialmente o formato de um cone circular reto. Suponha que a densidade do material na vizinhança de um ponto P seja $g(P)$ e a altura seja $h(P)$.
(a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.
(b) Assuma que o monte Fuji no Japão tenha o formato de um cone circular reto com raio de 19 000 m, altura de 3 800 m e densidade constante de 3 200 kg/m³. Quanto trabalho foi feito para formar o monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?


S.R. Lee Photo Travaller/Shutterstock

PROJETO DE LABORATÓRIO A INTERSECÇÃO DE TRÊS CILINDROS

A figura mostra o sólido limitado por três cilindros circulares de mesmo diâmetro que se interceptam em ângulos retos. Neste projeto, vamos calcular seu volume e determinar como sua forma varia quando os cilindros têm diâmetros diferentes.



1. Esboce cuidadosamente o sólido limitado pelos três cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$. Indique as posições dos eixos coordenados e rotule as faces com as equações dos cilindros correspondentes.
2. Determine o volume do sólido do Problema 1.
3. SCA Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar as arestas do sólido.
4. O que aconteceria ao sólido do Problema 1 se o raio do primeiro cilindro fosse diferente de 1? Ilustre com um desenho à mão livre ou com um gráfico no computador.
5. Se o primeiro cilindro for $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a < 1$, escreva, mas não calcule, uma integral dupla que forneça o volume do sólido. E se $a > 1$?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

33. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$
$= \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$
$= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$
$= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$
$= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$
$= \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$
$= \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^y \int_y^1 f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$
$= \int_0^1 \int_0^x \int_z^x f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx = \int_0^1 \int_z^1 \int_z^x f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

37. 64π **39.** $\frac{79}{30}, \left(\frac{358}{553}, \frac{33}{79}, \frac{571}{553}\right)$

41. a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$

43. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} kL^5$ **45.** $\frac{1}{2} \pi k h a^4$

47. (a) $m = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$
(b) $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, onde
$\overline{x} = (1/m) \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} x \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$
$\overline{y} = (1/m) \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} y \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$
$\overline{z} = (1/m) \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} z \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$
(c) $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$

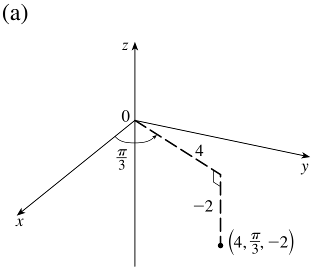
49. (a) $\frac{3}{32} \pi + \frac{11}{24}$
(b) $\left(\dfrac{28}{9\pi + 44}, \dfrac{30\pi + 128}{45\pi + 220}, \dfrac{45\pi + 208}{135\pi + 660}\right)$
(c) $\frac{1}{240}(68 + 15\pi)$

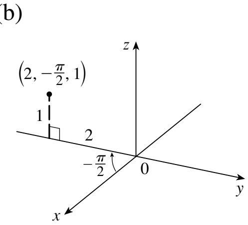
51. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{5760}$ **53.** $L^3/8$

55. (a) A região ligada pelo elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$
(b) $4\sqrt{6}\pi/45$

EXERCÍCIOS 15.8

1. (a) (b)





$(2, 2\sqrt{3}, -2)$ $(0, -2, 1)$

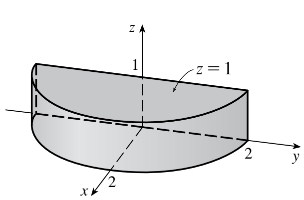
3. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 1)$ (b) $(4, 2\pi/3, 3)$

5. Meio-plano vertical pelo eixo z

7. Paraboloide circular

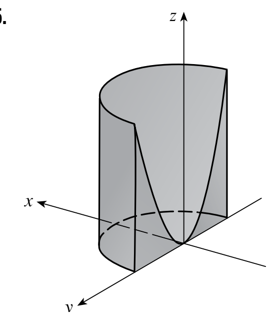
9. (a) $z^2 = 1 + r\cos\theta - r^2$ (b) $z = r^2 \cos 2\theta$

11.



13. Coordenadas cilíndricas: $6 \leqslant r \leqslant 7$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 20$

15.



4π

17 384π **19.** $\frac{8}{3}\pi + \frac{128}{15}$ **21.** $2\pi/5$ **23.** $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2} - 1)$

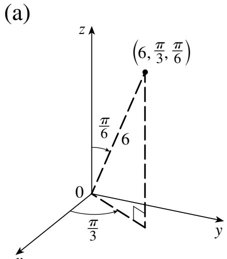
25. (a) 162π (b) $(0, 0, 15)$

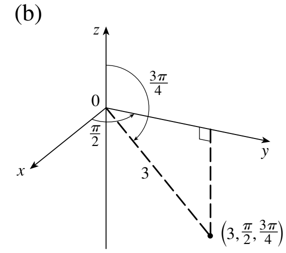
27. $\pi K a^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$ **29.** 0

31. (a) $\iiint_C h(P)g(P)\, dV$, onde C é o cone
(b) $\approx 4{,}4 \times 10^{18}$ **J**

EXERCÍCIOS 15.9

1. (a) (b)





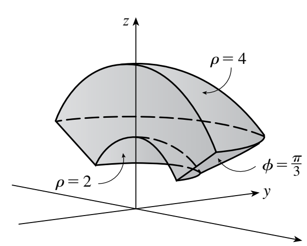
$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3}\right)$ $\left(0, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

3. (a) $(2, 3\pi/2, \pi/2)$ (b) $(2, 3\pi/4, 3\pi/4)$

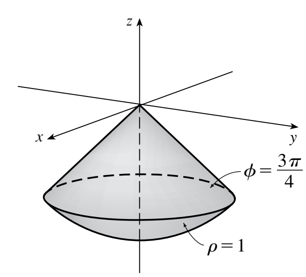
5. Meio-cone **7.** Esfera, raio $\frac{1}{2}$, centro $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

9. (a) $\cos^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi$ (b) $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

11.

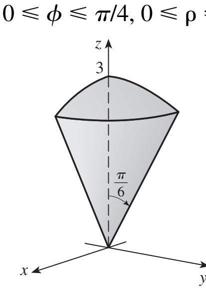


13.



15. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \rho \leqslant \cos\phi$

17.



$(9\pi/4)(2 - \sqrt{3})$

19. $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^2 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$