DERIVADA

DEFINIÇÃO: A derivada de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se esse limite existir.

Se f admite derivada em um ponto do seu domínio, então diremos que f é derivável ou diferenciável nesse ponto.

Se y=f(x), sua derivada pode ser representada por:

1) $f'(x)$

2) y'

3) $\frac{d}{dx}[f(x)]$

4) $D_x[f(x)]$

5) $\frac{dy}{dx}$

Observação:

$\frac{dy}{dx}$ é um símbolo para a derivada e não deve ser considerado como uma razão.

Exemplos:

a) $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k - k}{\Delta x} = 0$$

b) $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

c) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = n \cdot x^{n-1}$$

Vimos nos exemplos que:

Se $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.

Se $f(x) = x$ então $f'(x) = 1$.
Se $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Todas as fórmulas para a determinação da derivada de uma função são obtidas do mesmo modo que os exemplos.

ALGUMAS REGRAS DE DERIVAÇÃO

1) $f(x) = \mathrm{k} \rightarrow f'(x) = 0, \mathrm{k} \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

4) $f(x) = a^{g(x)} \rightarrow f'(x) = g'(x) \,.\, \ln a \,.\, a^{g(x)}, a \in \mathbb{R}$

5) $f(x) = [g(x)]^n \rightarrow f'(x) = n \,.\, g'(x).\, [g(x)]^{n-1}, n \in \mathbb{R}$

6) $f(x) = g(x) \,.\, h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \,.\, h(x) + g(x) \,.\, h'(x)$

7) $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x) \,.\, h(x) - g(x) \,.\, h'(x)}{[h(x)]^2}, h(x) \neq 0$

8) $f(x) = \log_a g(x) \rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x) \,.\, \ln a} \quad (0 < a \neq 1)$

9) $f(x) = sen\, x \rightarrow f'(x) = \cos x$

10) $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\, sen\, x$

Exemplos:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 4 \rightarrow f'(x) =$
b) $f(x) = x^3 - 3x - 7 \rightarrow f'(x) =$
c) $f(x) = e^{x^2 - 1} \rightarrow f'(x) =$
d) $f(x) = \sqrt{x - 3} \rightarrow f'(x) =$
e) $f(x) = \dfrac{2 + x}{3 - x} \rightarrow f'(x) =$

EXERCÍCIOS

1) Determine:

a) $\frac{d}{dx}(8\text{-}x^3) =$ b) $D_x\left(\frac{1}{x+1}\right) =$ c) $\frac{d}{dx}(x^3) =$

d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right) =$ e) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) =$ f) $D_x\left(\sqrt{3x+5}\right) =$

2) Determine o valor de $f'(a)$.

a) $f(x) = 2 - x^3,\ a = -2$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}},\ a = 3$

c) $f(x) = x^2 - x + 4,\ a = 4$

d) $f(x) = \sqrt{1+9x},\ a = 7$

3) Derive as funções:

a) $f(x) = \frac{7x-5}{2}$

b) $f(x) = 1 - 2x - x^2$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

d) $f(x) = \frac{-3}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

e) $f(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$

f) $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

g) $f(x) = 4x^4 - \frac{1}{4x^4}$

h) $f(x) = x^4 - 5 + x^{-2} + 4x^{-4}$

i) $f(s) = \sqrt{3}(s^3 - s^2)$

j) $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$

k) $g(y) = y^{10} + 7y^5 - y^3 + 1$

l) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3}$

m) $g(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$

n) $f(x) = (4x^2 + 3)^2$

o) $g(y) = (7 - 3y^3)^2$

p) $f(t) = (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t)$

q) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}\right)$

r) $\frac{d}{dt}\left(\frac{5t}{1+2t^2}\right)$

s) $\frac{d}{dy}\left(\frac{y^3 - 8}{y^3 + 8}\right)$

t) $D_x \left(\dfrac{2x}{x+3}\right)$

u) $f(x) = \log_3 (x^2\text{-}3x)$

v) $f(x) = 5^{2x^3-3x+1}$

w) $g(y) = e^{\frac{1}{2}y^3+7y}$

x) $f(x) = \log_5 (-3x^4+6)$

z) $f(x) = e^{4x^5-2x^2+5}$

DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1) $f(x) = \text{tg}\, x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

2) $f(x) = \text{cotg}\, x \rightarrow f'(x) = -\,\text{cossec}^2\, x$

3) $f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x \,.\, \text{tg}\, x$

4) $f(x) = \text{cossec}\, x \rightarrow f'(x) = -\,\text{cossec}\, x \,.\, \text{cotg}\, x$

4) Determine a derivada das funções a seguir.

a) $f(x) = 3\text{sen}\, x$

b) $g(y) = \text{tg}\, y + \cos y$

c) $f(x) = 4x\ \text{sen}\, x$

d) $f(y) = y^3 - y^2.\cos y + 2y.\text{sen}\, y + 2.\cos y$

e) $f(x) = 3.\sec x\ \text{tg}\, x$

REGRA DE L'HÔSPITAL

Em geral, se tivermos um limite da forma $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ em que $f(x)\to 0$ e $g(x)\to 0$ quando $x \to a$, então esse limite pode ou não existir e é denominado forma indeterminada do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para as funções racionais, podemos cancelar os fatores comuns:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Mas esse método não resolvem limites como: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

Limites como o anterior podem ser resolvidos usando a *Regra de L'Hôspital*.

Outra situação na qual um limite não é óbvio ocorre quando procuramos uma assíntota horizontal de *F* e precisamos calcular o limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x-1}$. Não é óbvio como calcular esse limite, pois tanto o numerador como o denominador tornam-se muito grandes quando $x \to +\infty$. Em geral, se tivermos um limite da forma $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ em que $f(x) \to +\infty$

(ou $-\infty$) e $g(x) \to +\infty$ (ou $-\infty$), então o limite pode ou não existir, e é chamado forma indeterminada do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Esse limite pode ser calculado para certas funções, dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que ocorre no denominador. Por exemplo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$. Esse método não funciona para um limite como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1}$, mas a Regra de L'Hôspital aplica-se também a esse tipo de forma indeterminada.

Regra de L'Hôspital: Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a. Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

Então $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se tal limite existir.

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

EXERCÍCIOS

1) Determine, se existir, os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\ x - x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \frac{\text{sen}\ x}{1-\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 e^{-x^2}$

DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO

VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Se f for uma função dada pela equação $s = f(t)$ e uma partícula se mover ao longo de uma reta de tal forma que s seja o número de unidades da distância orientada da partícula a um ponto fixo na reta em t unidades de tempo, então a **velocidade instantânea** da partícula em t unidades de tempo será v unidades de velocidade, onde $v(t) = f'(t) \Leftrightarrow v(t) = \frac{ds}{dt}$ se a derivada existir.

A velocidade instantânea pode ser positiva ou negativa, conforme o movimento da partícula seja no sentido positivo ou negativo da reta. Quando a velocidade instantânea for zero, a partícula estará em repouso.

A velocidade escalar de uma partícula em qualquer instante é definida como o valor absoluto da velocidade instantânea. Logo, a velocidade escalar é um número não-negativo. Os termos velocidade escalar e velocidade instantânea são frequentemente confundidos. Deve ser notado que a velocidade escalar dá somente uma ideia da rapidez com que a partícula está se movendo, enquanto que a velocidade instantânea também indica o sentido do movimento.

O conceito de aceleração é introduzido de maneira análoga ao de velocidade: ela mede a variação da velocidade em relação ao tempo. A aceleração instantânea é dada por $a(t) = \frac{dv}{dt}$.

EXEMPLO: Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação $s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$. Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também o instante no qual ela inverte o seu sentido.

EXERCÍCIOS

1) Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de 64 m/s. Se o sentido positivo da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será $s = -16t^2 + 64t$. Seja t o número de segundos decorridos desde que a bola foi atirada e s o número de metros da distância percorrida pela bola a partir do ponto inicial em t s.

a) Ache a velocidade instantânea da bola ao fim de 1 s. A bola está subindo ou descendo após 1 s?
b) Ache a velocidade instantânea da bola depois de 3 s. A bola está subindo ou descendo após 3 s?
c) Quantos segundos a bola leva para atingir o seu ponto mais alto?
d) Qual a altura máxima atingida pela bola?
e) Ache as velocidades escalares após 1 e 3 s.

f) Decorridos quantos segundos a bola atinge o solo?
g) Ache a velocidade instantânea da bola quando ela chega ao chão.

2) Uma partícula se move ao longo de um eixo com equação horária $s = t^3 - 9t^2 + 24t + 1$. Calcule suas velocidades e aceleração no instante t = 1. Nesse instante, a partícula se move para a direita ou para a esquerda? Sua velocidade está crescendo ou diminuindo?

REGRA DA CADEIA

Se a função *g* for derivável em *x* e a função *f* for derivável em *g(x)*, então $\left[f\ \left(g\left(x\right)\right)\right]' = f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$.

EXEMPLOS

1) $f(x)$ = sen 2x
$f'(x)$ = (cos 2x). 2

2) $f(x) = \text{sen}(x^2 + 3)$
$f'(x) = (\cos(x^2 + 3))\ .\ 2x = 2x.\cos(x^2 + 3)$

EXERCÍCIOS

1) Determine $f'(x)$ se:

a) $f(t) = \text{tg}(3t^2 + 2t)$
b) $f(t) = \text{sen}^2\,(3t^2 – 1)$
c) $f(t) = 4 \cos 3t – 3\ \text{sen}\ 4t$
d) $f(t) = 4 \cos (\text{sen}\ 3t)$
e) $f(t) = \text{tg}^2\ 5t^3$
f) $f(t) = \text{cotg}\ (at + b)^3$
g) $f(t) = \text{cossec sen}\ \sqrt{x^2 + 3}$
h) $f(t) = \text{cossec}\ 4t^2 – 5$

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Se $f = \{(x,y) / y = 3x^2 + 5x + 1\}$, então a equação $y = 3x^2 + 5x +1$ define a função *f* explicitamente. Mas, nem todas as funções estão definidas dessa forma. Por exemplo, se tivermos a equação $x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$ não poderemos resolver y em termos de x; além disso, podem existir uma ou mais funções *f*, para as quais se $y = f(x)$, a equação estará satisfeita, isto é, tais que a equação $x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$ seja válida para todos os valores de x no domínio de *f*. Nesse caso, a função *f* está definida implicitamente pela equação dada.

Na equação dada, o lado esquerdo é uma função de x e o lado direito é uma função de y. Seja $g(x) = x^6 - 2x$ e $h(y) = 3y^6 + y^5 - y^2$ onde y é uma função de x, digamos $y = f(x)$.

Dessa forma, a equação pode ser escrita como $g(x) = h(f(x))$. Essa equação está satisfeita por todos os valores de x no domínio de f para os quais $h(f(x))$ existe. Daí:

$D_x(x^6 - 2x) = D_x(3y^6 + y^5 - y^2) \rightarrow 6x^5 - 2 = 18y^5 \cdot \frac{dy}{dx} + 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx} \rightarrow$

$$\rightarrow 6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)\,\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$$

Assim, encontramos uma expressão para $\frac{dy}{dx}$.

EXEMPLOS:

1) Determine $\frac{dy}{dx}$ nos seguintes casos:

a) $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$

b) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^4 + y^4$

c) $x\cos y + y\cos x = 1$

2) Indique a equação da reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 9$, no ponto (1,2).

EXERCÍCIOS

1) Determine $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita.

a) $x^3 + y^3 = 8xy$

b) $4x^2 - 9y^2 = 1$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

d) $2x^3y + 3xy^3 = 5$

e) $x^2y^2 = x^2 + y^2$

f) $(2x + 3)^4 = 3y^4$

g) $x^2 \cdot (x - 2y) = x + 2y$

h) $y = \cos(x - y)$

i) $\sec^2 x + \text{cossec}^2\, y = 4$

2) Indique a equação da reta tangente à curva $16x^4 + y^4 = 32$ no ponto (1,2).

TAXAS RELACIONADAS

EXEMPLOS:

1) $y = 2x$, $x = 3t$ e $y = 6t$

$x'(t) = 3$
$y'(t) = 6$

$y'(t) = 2 \,.\, x'(t)$
$$\frac{dy}{dt} = 2 \,.\, \frac{dx}{dt}$$

2) $y = x^2 + 3$ e $x = 3t$

$$\frac{dy}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dy}{dt} = 6t \cdot \frac{dx}{dt}$$

3) $y = 4x^3 + x$ e $x = 2t$

4) $y = 3x^2 + 1$ e $x = 3t$

5) $y = 8x^2$ e $x = 2t$

6) As variáveis x e y são funções diferenciáveis de t e estão relacionadas pela equação $y = x^2 + 3$. Quando $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 2$. Ache $\frac{dy}{dt}$ quando $x = 1$.

EXERCÍCIOS

1) Uma escada com 25 unidades de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 unidades de comprimento da parede?

2) Dada $x.\cos y = 5$ onde x e y são funções de uma terceira variável t. Se $\frac{dx}{dt} = -4$, ache $\frac{dy}{dt}$ quando $y = \frac{1}{3}\pi$.

3) Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16 m de altura e uma base com 4 m de raio. A água "flui" no tanque a uma taxa de $2\ m^3/\min$. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5 m?

4) x e y são funções de uma terceira variável. Encontre $\frac{dx}{dt}$.

a) $2x + 3y = 8$ e $\frac{dy}{dt} = 2$

b) $xy = 20$, $\frac{dy}{dt} = 10$ e $x = 2$

c) $y\,(\operatorname{tg} x + 1) = 4,\ \dfrac{dy}{dt} = -4$ e $x = \pi$

5) Um balão esférico de raio r perde gás à taxa de $v\ \text{m}^3/\text{min}$. A que taxa decresce o raio? Calcular essa taxa quando r = 5 m, se v = 2 m^3.

RETA TANGENTE

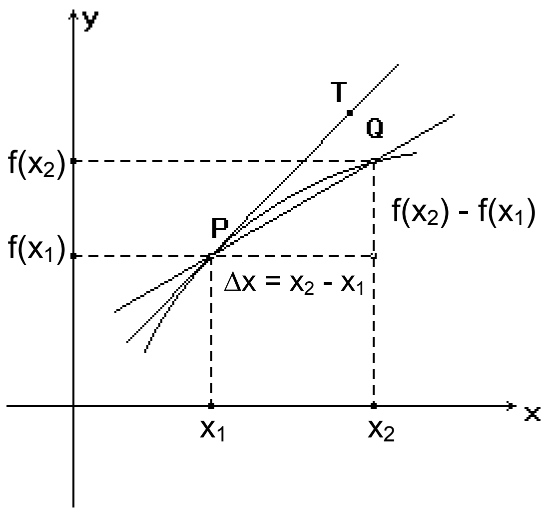
Muitos problemas de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva em um de seus pontos. No caso de uma circunferência, sabemos da Geometria Plana que a reta tangente é perpendicular ao raio da circunferência no ponto de tangência, e isso é suficiente para determiná-la.

No caso de uma curva qualquer, a situação é mais complicada. Deve-se determinar a inclinação dessa reta tangente.

Consideremos a função f contínua em x_1. Queremos definir a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $P(x_1, f(x_1))$. Seja $Q(x_2, f(x_2))$ outro ponto do gráfico de f. tracemos uma reta passando pelos pontos P e Q, que será uma reta secante. Vamos denotar a diferença entre as abscissas de Q e de P por Δx, assim $\Delta x = x_2 - x_1$.

Observe que Δx denota uma variação nos valores de x, quando ele muda de x_1 para x_2 e pode ser positiva ou negativa. Essa variação é chamada de incremento de x.

A inclinação da reta secante PQ é dada por $m_{PQ} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$, desde que a reta PQ não seja vertical. Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, a inclinação de PQ pode ser escrita como $m_{PQ} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.



Quando Δx tende a zero, o ponto Q vai se aproximando cada vez mais de P, e a reta PQ vai *tendendo* para a posição da reta PT tangente ao gráfico de f no ponto P. Assim a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é o $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.

DEFINIÇÃO: Supondo que a função f seja contínua em x_1. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é a reta que passa por P tendo inclinação $m(x_1)$ dada por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Obs.:

- Se $m(x_1)=0$ então a inclinação da reta é zero, ou seja, a reta é paralela ao eixo x.
- Se $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. for $+\infty$ ou $-\infty$, então a inclinação da reta tende para $+\infty$ ou $-\infty$, ou seja, a reta é paralela ao eixo y.

EXEMPLO: Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y=x^2 - 2$ no ponto (1,-1).

EXERCÍCIOS

Seja $r(x) = ax+b$ uma reta tangente à uma curva e $t(x) = a'x+b'$ uma reta normal. A reta normal é uma reta perpendicular à reta tangente em um ponto. Assim, $a.a' = -1$.

Se $s(x) = ax+b$ e $m(x) = a'x+b'$, então as retas s e m são paralelas se $a=a'$.

1) Encontre a equação da reta tangente e da normal ao gráfico de cada uma das funções dadas abaixo no ponto indicado. A seguir, utilize o *software* Winplot para representação gráfica.

$a)\ f(x) = \frac{2}{x} + x$ no ponto (1,3)

$b)\ f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.

c) $f(x) = \sqrt{x} + 2$ no ponto de ordenada 4

2) Dada $f(x) = 1+2\cos(x)$, determine a equação da reta tangente ao gráfico no ponto em que este corta o eixo y.

3) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ que é paralela à reta de equação y-4x+3=0 .

DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Se a função f for derivável, então f' será chamada de **derivada primeira** de f. Se a derivada de f' existir, ela será chamada de **derivada segunda** e é denotada por f''. Da mesma forma, se a derivada de f'' existir, ela será chamada de derivada terceira e denotada por f'''.

EXEMPLO:

1) Ache todas as derivadas da função f definida por $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$

Observação: A notação de Leibniz para a derivada primeira é $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Para a derivada segunda de y em relação a x, a notação de Leibniz é $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$. Outras notações são: $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[f(x)\right]$ e $\mathrm{D}_x^n\ \left[f(x)\right]$.

EXERCÍCIOS

1) Encontre as derivadas primeira e segunda das funções:

a) $\mathrm{g}(t) = t^3 - t^2 + t$

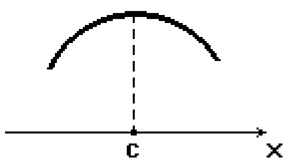
b) $f(t) = 4\cos t^2$

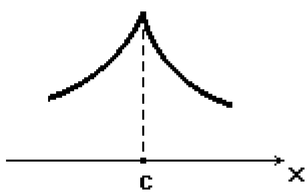
VALOR MÁXIMO E MÍNIMO

A interpretação geométrica da derivada de uma função é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. Esse fato possibilita-nos aplicar derivadas como recurso auxiliar no esboço de gráficos. Por exemplo, podemos usar a derivada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal; esses são os pontos onde a derivada é zero. A derivada também pode ser usada para encontrarmos os intervalos nos quais a função está acima ou abaixo da reta tangente.

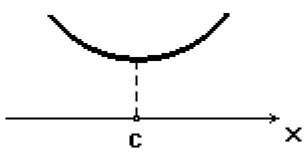
DEFINIÇÃO:

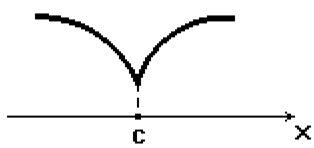
A função f terá um valor máximo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual f(x) esteja definida, tal que f(c) $\geq$ f(x) para todo x nesse intervalo.





A função f terá um valor mínimo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual f(x) esteja definida, tal que f(c) $\leq$ f(x) para todo x nesse intervalo.





Se a função f tiver um máximo ou um mínimo relativo em c, então dizemos que f tem um extremo relativo em c.

O seguinte teorema será usado para localizar os valores possíveis de c para os quais existe um extremo relativo.

TEOREMA: Se f(x) foi definida para todos os valores de x no intervalo aberto (a,b) e se f tiver um extremo relativo em c, onde a< c < b, então f ' (c) = 0, se f ' (c) existir.

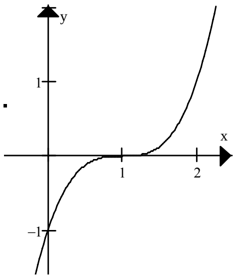
A interpretação geométrica desse teorema é que se f tiver um extremo relativo em c, e se f ' (c) existir, então o gráfico de f precisará ter uma reta tangente horizontal no ponto onde x=c.

Se f for uma função derivável em um intervalo aberto (a,b), então os únicos valores possíveis de x para os quais f pode ter um extremo relativo são aqueles em que f ' (x) = 0; no entanto, f ' (x) pode ser igual a zero para um valor específico de x, sem que f possua um extremo relativo neste ponto. Em outras palavras, para funções deriváveis em um intervalo (a,b), a anulação da derivada em um ponto c é condição necessária mas **não** suficiente para que c seja um extremo relativo, e essa afirmação será comprovada pela ilustração a seguir.

EXEMPLOS

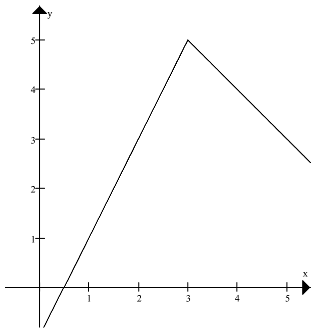
1) Consideremos a função f definida por $f(x) = (x-1)^3$.

$f'(x) = 3(x-1)^2$, e assim f ' (1) = 0. Mas, f (x) < 0 se x < 1 e f(x) > 0 se x > 1. Assim, f não tem um extremo relativo em 1.



2) Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \leq 3 \\ 8 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$.

A função f tem um valor máximo relativo em 3. A derivada à esquerda em 3 é dada por $f'_-(3) = 2$, enquanto que a derivada à direita de 3 é dada por $f'_+(3) = -1$. Concluímos então, que f ' (3) não existe.

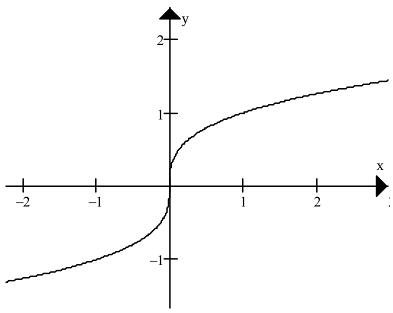


Assim, uma função f pode ter um extremo relativo num número e f ' pode não existir para este número.

É possível que uma função f possa ser definida num número c, onde f ' (c) não exista e ainda f pode não ter um extremo relativo nesse número. Tal função será ilustrada no exemplo a seguir.

3) Seja a função f definida por $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$, se $x \neq 0$. Além disso, f ' (0) não existe. A função não tem extremos relativos.



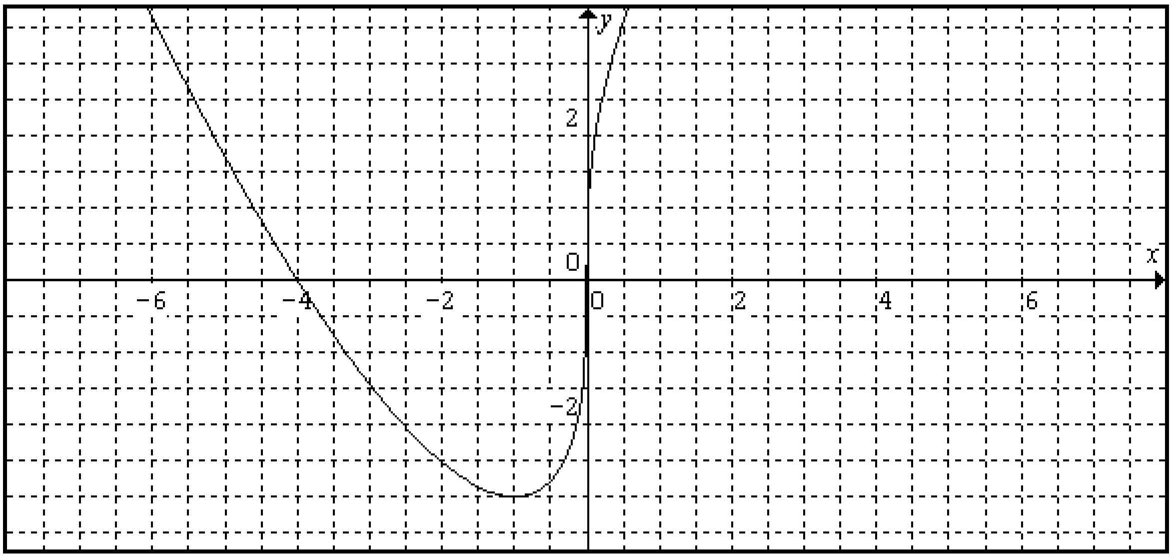
Se uma função f está definida em um número c, uma condição necessária à existência de um extremo relativo para f é que f ' (c) = 0 ou f ' (c) não exista. Porém, essa condição não é suficiente.

DEFINIÇÃO: Se c for um número no domínio da função f e se f ' (c) = 0 ou f ' (c) não existir, então c será chamado de **número crítico** de f.

Dessa definição e da discussão anterior, uma condição necessária (mas não suficiente) à existência de um extremo relativo em c é que c seja um número crítico.

EXEMPLO

1) Ache os números críticos da função f definida por f (x) = $x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$.



Um problema frequente refere-se a uma função dada num certo intervalo, onde queremos encontrar o maior ou o menor valor da função. Esses intervalos podem ser fechados, abertos ou fechados num extremo e abertos no outro. O maior valor da função no intervalo é chamado de **valor máximo absoluto** e o menor valor da função no intervalo é chamado de **valor mínimo absoluto**.

DEFINIÇÃO: A função f terá um **valor máximo absoluto** num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que f (c) $\geq$ f (x) para todo x no intervalo. Em tal caso, f (c) será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

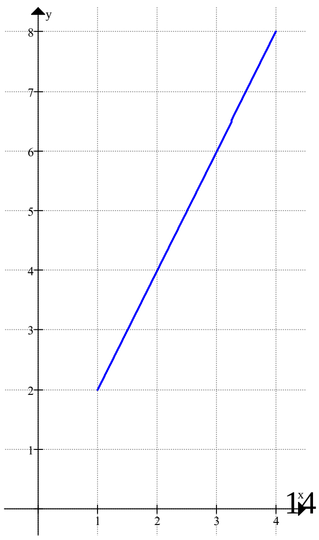
DEFINIÇÃO: A função f terá um **valor mínimo absoluto** num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que f (c) $\leq$ f (x) para todo x no intervalo. Em tal caso, f (c) será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.

Um **extremo absoluto** de uma função num intervalo é um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto da função no intervalo. Uma função pode ou não ter um extremo absoluto num intervalo dado.

EXEMPLOS

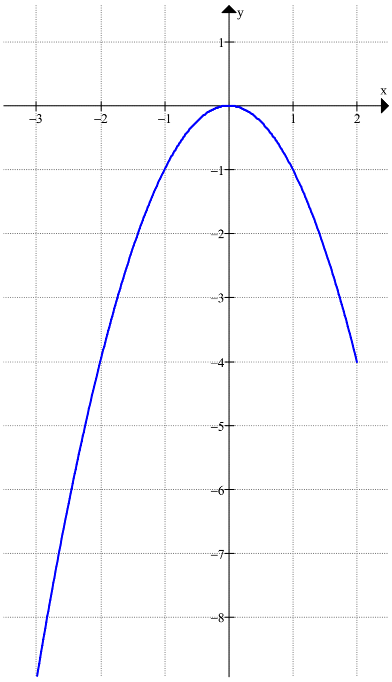
1) Suponha que f seja a função definida por f (x) = 2x num intervalo de [1,4).

A função f tem um valor mínimo absoluto de 2 em [1,4). Não há valor máximo absoluto de f em [1,4), pois $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$, mas f(x) é sempre menor do que 8 no intervalo dado.



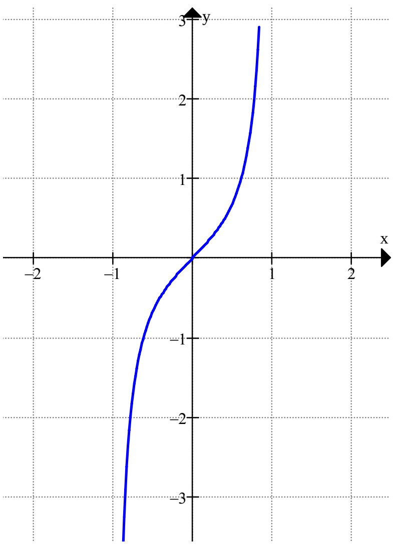
2) Considere a função definida por $f(x) = -x^2$ com domínio (-3,2].

A função f tem um valor máximo absoluto de 0 em (-3,2]. Não há valor mínimo absoluto de f em (-3,2], pois $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -9$, mas f(x) é sempre maior do que -9 no intervalo dado.



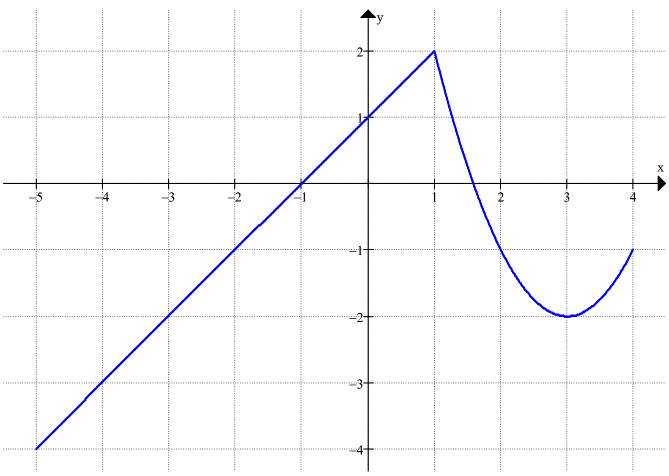
3) A função f definida por $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ num intervalo (-1,1).

Observe que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$. A função não possui nem valor máximo absoluto nem valor mínimo absoluto.



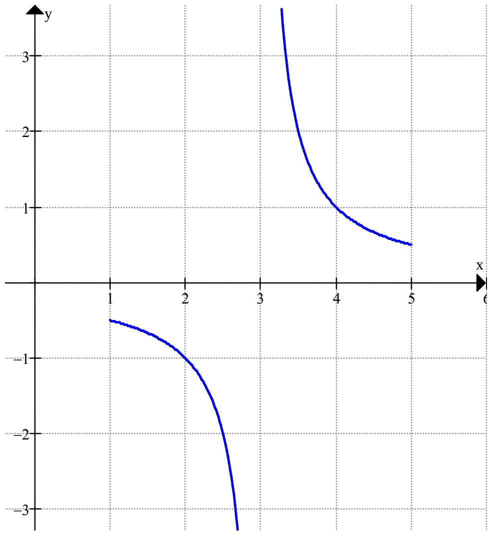
4) Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } 1 \le x \end{cases}$ num intervalo [-5, 4].

O valor máximo absoluto de f em [-5,4] ocorre em 1 e f(1) = 2; o valor mínimo absoluto de f em [-5,4] ocorre em -5 e f(-5) = -4. Note que f tem um valor máximo relativo em 1 e um valor mínimo relativo em 3. Observe também que 1 é um número crítico de f, pois f ' (1) não existe e 3 é um número crítico de f, já que f ' (3) = 0.



5) A função f definida por f(x) = $\dfrac{1}{x-3}$ no intervalo [1,5].

Essa função não possui nem valor máximo nem valor mínimo absolutos em [1,5]. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.



Podemos falar de um extremo absoluto de uma função, mesmo que não seja especificado o intervalo. Em tal caso, estamos nos referindo ao extremo absoluto da função em todo o seu domínio.

DEFINIÇÃO: f(c) será o **valor máximo absoluto** da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

DEFINIÇÃO: f(c) será o **valor mínimo absoluto** da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

Exemplo: O gráfico da função f definida por f(x) = $x^2 - 4x + 8$ é uma parábola. O ponto mais baixo da parábola está em (2,4) e a parábola tem concavidade voltada para cima. A função tem um valor mínimo absoluto de 4 em 2. Não há valor máximo absoluto de f.

Um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um extremo relativo, ou um valor de função num extremo relativo, ou um valor de função num extremo do intervalo. Como uma condição necessária para que uma função tenha um extremo relativo num número c é que c seja um número crítico, o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de uma função contínua f num intervalo fechado [a,b] podem ser determinados pelo seguinte procedimento:

1) Ache os valores da função nos números críticos de f em (a,b).
2) Ache os valores de f(a) e f(b).
3) O maior dentre os valores das etapas 1 e 2 será o valor máximo absoluto e o menor será o valor mínimo absoluto.

EXEMPLOS

1) Indique os extremos absolutos de f em $\left[-2, \dfrac{1}{2}\right]$ se $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

2) Determine os extremos absolutos de f em [1,5] se $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

EXERCÍCIOS

1) Determine os números críticos da função dada.

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$

b) $g(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$

c) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$

d) $f(x) = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$

2) Determine os extremos absolutos da função dada no intervalo indicado, se existirem, e os valores de x nos quais ocorrem os extremos absolutos.

a) $f(x) = 4 - 3x$; $(-1,2]$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $[-2,3]$

c) $f(x) = \sqrt{3 + x}$; $[-3, +\infty)$

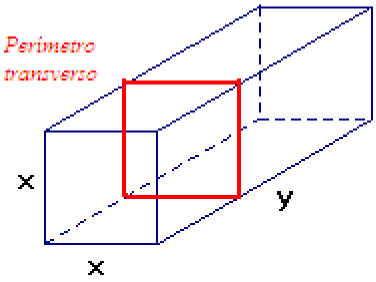
3) Uma fábrica pode vender x milhares de unidades mensais de um determinado artigo por $V = 10x - 2x^2$ reais. Sendo o custo de produção $C = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 10$. Determinar o número ótimo de artigos a vender para maximizar o lucro L = V – C.

4) De uma folha de zinco quadrada de lado 1 metro, pretende-se confeccionar uma caixa prismática. Quatro quadrados de lado x serão jogados fora, dobrando-se em seguida as quatro abas e soldando os quatro cantos da caixa. Qual deve ser o valor de x para que a caixa tenha capacidade máxima.

5) Um fazendeiro planeja cercar um pasto retangular adjacente a um rio. Para proporcionar pastagem suficiente para o gado, o pasto deve ter 180.000 metros quadrados. Não haverá cerca margeando o rio. Que dimensões devem ser usadas para minimizar a quantidade de cerca?

6) Uma empresa apurou que a sua receita total (em reais) com a venda de um produto admite como modelo $R = -x^3 + 450x^2 + 52.500x$, onde x é o número de unidades produzidas (e vendidas). Qual o nível de produção que gera receita máxima?

7) Um pacote retangular, a ser enviado via postal, pode apresentar um total máximo combinado de 108 polegadas para o comprimento e o perímetro transverso. Ache as dimensões do pacote de volume máximo. Conforme mostrado na figura a seguir, admita que as dimensões do pacote sejam *x* por *x* por *y*.



8) Uma página deve conter 30 polegadas quadradas de impressão. As margens superior e inferior da página cada uma 2 polegadas de largura. As margens laterais têm apenas 1 polegada cada. Que dimensões minimizarão a quantidade de papel usada?

FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

DEFINIÇÃO:

- Uma função f definida num intervalo será **crescente** naquele intervalo, se e somente se, $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, onde x_1 *e* x_2 são quaisquer números no intervalo.
- Uma função f definida num intervalo será **decrescente** naquele intervalo, se e somente se, $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, onde x_1 *e* x_2 são quaisquer números no intervalo.

Se uma função for crescente ou decrescente num dado intervalo, então dizemos que ela é **monótona** no intervalo.

TEOREMA: Seja f uma função contínua no intervalo fechado [a,b] e derivável no intervalo aberto (a,b):
i) se f ‘ (x) > 0 para todo x em (a,b), então f será crescente em [a,b];
ii) se f ‘ (x) < 0 para todo x em (a,b), então f será decrescente em [a,b];

Teste da derivada primeira para extremos relativos:

1) Ache f ‘ (x)
2) Ache os números críticos de f, isto é, os valores de x para os quais f ‘ (x) = 0, ou para os quais f ‘(x) não existe.
3) Aplique o teste da derivada primeira.

Exemplo: Dadas as funções, ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente.

$1)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$2)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 3 \\ 8 - x & \text{se } 3 \leq x \end{cases}$

$3)\ f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$

EXERCÍCIOS

1) Determine os extremos relativos de f pelo teste da derivada primeira e determine os intervalos nos quais f é crescente e decrescente.

$a)\ f(x) = x^2 - 4x - 1$

$b)\ f(x) = 4\ \text{sen}\ \frac{1}{2}x$

$c)\ f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

$d)\ f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$e)\ f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{se } x < 3 \\ 3x - 10 & \text{se } 3 \leq x \end{cases}$

CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

TEOREMA: Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c. Então;
i) se f ‘’ (c) > 0, o gráfico de f é côncavo para cima em (c, f(c)).
ii) se f ‘’ (c) < 0, o gráfico de f é côncavo para baixo em (c, f(c)).

C é um ponto de inflexão quando f ‘’ (c) = 0.

Exemplos:

$a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$b)\ f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$c)\ f(x) = (1 - 2x)^3$

Teste da derivada segunda para extremos relativos:

Seja f ’(c) = 0 e suponha que f ’’ exista em um intervalo que contém c.
1) Se f ’’(c) > 0, então f(c) é mínimo relativo.
2) Se f ’’(c) < 0, então f(c) é máximo relativo.
3) Se f ’’(c) = 0, o teste falha. Neste caso, podemos aplicar o teste da derivada Primeira para determinar se f(c) é mínimo relativo ou máximo relativo.

EXERCÍCIOS

1) Encontre os pontos de inflexão do gráfico da função dada, se existirem. Determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo.

a) $f(x) = x^3 + 9x$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

c) $f(x) = (x - 1)^3$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$

ROTEIRO PARA CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

1) O domínio de f.
2) Os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.
3) Os pontos de máximo e de mínimo, caso existam.
4) O intervalo nos quais a função tem concavidade voltada para cima ou para baixo.
5) Os pontos de inflexão, caso existam.
6) Os limites laterais de f nos pontos de descontinuidade, caso tais pontos existam.
7) Os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, caso isso seja possível no domínio de f.
8) Pontos de intersecção do gráfico com o eixo x e eixo y.

EXERCÍCIOS

1) Represente graficamente as funções:

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x - 5}$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

e) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$