$$\boxed{5} \quad \iint_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy \qquad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EXEMPLO 5 Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então, pela Equação 5,

$$\iint_R \text{sen}\, x \cos y\, dA = \int_0^{\pi/2} \text{sen}\, x\, dx \int_0^{\pi/2} \cos y\, dy$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} \Big[\text{sen}\, y\Big]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$

A função $f(x, y) = \text{sen}\, x \cos y$ do Exemplo 5 é positiva em R, assim, a integral representa o volume do sólido que está acima de R e entre o gráfico de f, como mostrado na Figura 6.

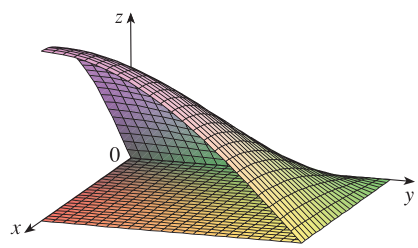


FIGURA 6

15.2 Exercícios

1–2 Determine $\int_0^5 f(x, y)\,dx$ e $\int_0^1 f(x, y)\,dy$.

1. $f(x, y) = 12x^2y^3$

2. $f(x, y) = y + xe^y$

3–14 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x)\,dy\,dx$

4. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2)\,dy\,dx$

5. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \,\text{sen}\, y\,dy\,dx$

6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y\,dx\,dy$

7. $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2 \cos x)\,dx\,dy$

8. $\int_0^1 \int_1^2 \dfrac{xe^x}{y}\,dy\,dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) dy\,dx$

10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\,dx\,dy$

11. $\int_0^1 \int_0^1 v(u - v^2)^4\,du\,dv$

12. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

13. $\int_0^2 \int_0^\pi r\,\text{sen}^2\theta\,d\theta\,dr$

14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s + t}\,ds\,dt$

15–22 Calcule a integral dupla.

15. $\iint_R \text{sen}(x + y)\,dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$

16. $\iint_R (y + xy^{-2})\,dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

17. $\iint_R \dfrac{xy^2}{x^2 + 1}\,dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

18. $\iint_R \dfrac{1 + x^2}{1 + y^2}\,dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

19. $\iint_R x\,\text{sen}(x + y)\,dA$, $R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint_R \dfrac{x}{1 + xy}\,dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint_R ye^{-xy}\,dA$, $R = [0, 2] \times [0, 3]$

22. $\iint_R \dfrac{1}{1 + x + y}\,dA$, $R = [1, 3] \times [1, 2]$

23–24 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dx\,dy$

24. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

25. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 2,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

26. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do paraboloide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

27. Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

28. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = 1 + e^x\,\text{sen}\, y$ e pelos planos $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$ e $z = 0$.

29. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sec^2 y$ e pelos planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = \pi/4$.

30. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 16 - x^2$ e pelo plano $y = 5$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

31. Determine o volume do sólido limitado pelo paraboloide $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ e pelos planos $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ e $y = 4$.

32. Desenhe o sólido que está entre a superfície $z = 2xy/(x^2 + 1)$ e o plano $z = x + 2y$ e é limitado pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$. A seguir, determine seu volume.

SCA **33.** Utilize um sistema de computação algébrica para determinar o valor exato da integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\, dA$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Em seguida, use o SCA para desenhar o sólido cujo volume é dado pela integral.

SCA **34.** Desenhe o sólido contido entre as superfícies $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Utilize um sistema de computação algébrica para aproximar o volume desse sólido até a quarta casa decimal.

35–36 Determine o valor médio de f sobre o retângulo dado.

35. $f(x, y) = x^2 y$, R possui vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

36. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}$, $\quad R = [0, 4] \times [0, 1]$

37–38 Utilize a simetria para calcular a integral dupla.

37. $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{1 + x^4}\, dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

38. $\displaystyle\iint_R (1 + x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x)\, dA$, $\quad R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

SCA **39.** Utilize seu SCA para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\, dy$$

Suas respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique o que acontece.

40. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes?

(b) Se $f(x, y)$ é contínuo em $[a, b] \times [c, d]$ e

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\, dt\, ds$$

para $a < x < b$, $c < y < d$, mostre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Porém, para integrais duplas, queremos integrar a função f não somente sobre retângulos, como também sobre uma região D de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1. Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D pode estar contida em uma região retangular R como na Figura 2. Definimos, então, uma nova função F, com domínio R, por

$$\boxed{1} \qquad F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases}$$

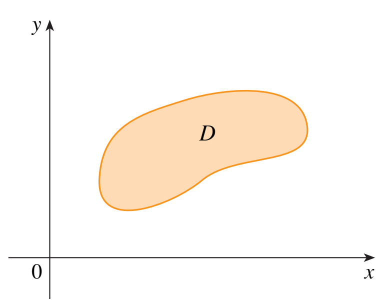


FIGURA 1

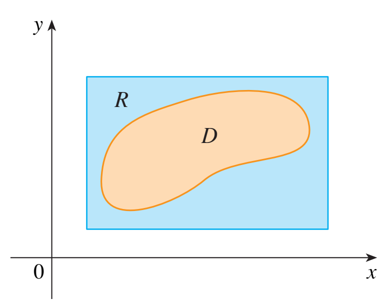


FIGURA 2

Se F for integrável em R, então definimos a **integral dupla de f em D** por

$$\boxed{2} \qquad \iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1}$$

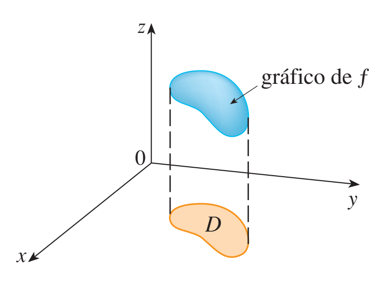


FIGURA 3

A Definição 2 faz sentido porque R é um retângulo e, portanto, $\iint_R F(x, y)\, dA$ já foi definida na Seção 15.1. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $F(x, y)$ são 0 quando

CAPÍTULO 14 REVISÃO

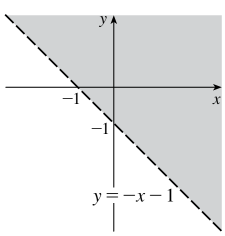
Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadeiro **9.** Falso

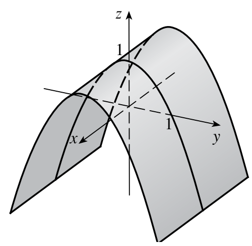
11. Verdadeiro

Exercícios

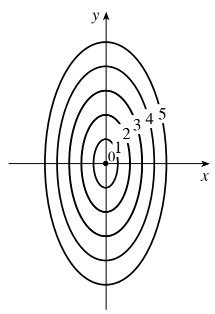
1. $\{(x, y) \mid y > -x - 1\}$



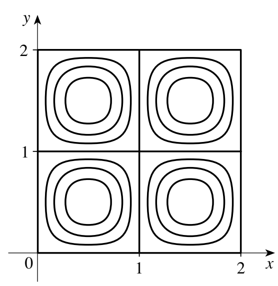
3.



5.



7.



9. $\frac{2}{3}$

11. (a) $\approx 3{,}5$°C/m, $-3{,}0$°C/m (b) $\approx 0{,}35$°C/m pela Equação 14.6.9 (A Definição 14.6.2 dá $\approx$1,1°C/m.)
(c) $-0{,}25$

13. $f_x = 32xy(5y^3 + 2x^2y)^7$, $f_y = (16x^2 + 120y^2)(5y^3 + 2x^2y)^7$

15. $F_\alpha = \dfrac{2\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2} + 2\alpha \ln(\alpha^2 + \beta^2)$, $F_\beta = \dfrac{2\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$

17. $S_u = \operatorname{arctg}(v\sqrt{w})$, $S_v = \dfrac{u\sqrt{w}}{1 + v^2w}$, $S_w = \dfrac{uv}{2\sqrt{w}\,(1 + v^2w)}$

19. $f_{xx} = 24x$, $f_{xy} = -2y = f_{yx}$, $f_{yy} = -2x$

21. $f_{xx} = k(k - 1)x^{k-2}y^lz^m$, $f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx}$,
$f_{xz} = kmx^{k-1}y^lz^{m-1} = f_{zx}$, $f_{yy} = l(l - 1)x^ky^{l-2}z^m$,
$f_{yz} = lmx^ky^{l-1}z^{m-1} = f_{zy}$, $f_{zz} = m(m - 1)x^ky^lz^{m-2}$

25. (a) $z = 8x + 4y + 1$ (b) $\dfrac{x - 1}{8} = \dfrac{y + 2}{4} = \dfrac{z - 1}{-1}$

27. (a) $2x - 2y - 3z = 3$ (b) $\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y + 1}{-4} = \dfrac{z - 1}{-6}$

29. (a) $x + 2y + 5z = 0$
(b) $x = 2 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = 5t$

31. $(2, \frac{1}{2}, -1)$, $(-2, -\frac{1}{2}, 1)$

33. $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z - 120$; 38,656

35. $2xy^3(1 + 6p) + 3x^2y^2(pe^p + e^p) + 4z^3(p\cos p + \operatorname{sen} p)$

37. -47, 108

43. $\langle 2xe^{yz^2}, x^2z^2e^{yz^2}, 2x^2yze^{yz^2}\rangle$ **45.** $-\frac{4}{5}$

47. $\sqrt{145}/2$, $\langle 4, \frac{9}{2}\rangle$ **49.** $\approx \frac{5}{8}$ nós/mi

51. Mínimo $f(-4, 1) = -11$

53. Máximo $f(1, 1) = 1$; pontos de sela (0, 0), (0, 3), (3, 0)

55. Máximo $f(1, 2) = 4$, mínimo $f(2, 4) = -64$

57. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimos $f(1, \pm 1) = -3$, pontos de sela $(-1, \pm 1)$, (1, 0)

59. Máximo $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$,
mínimo $f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$

61. Máximo 1, mínimo -1

63. $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$, $(\pm 3^{-1/4}, -3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$

65. $P(2 - \sqrt{3})$, $P(3 - \sqrt{3})/6$, $P(2\sqrt{3} - 3)/3$

PROBLEMAS QUENTES

1. L^2W^2, $\frac{1}{4}L^2W^2$ **3.** (a) $x = w/3$, base $= w/3$ (b) Sim

7. $\sqrt{3}/2$, $3\sqrt{2}$

CAPÍTULO 15

EXERCÍCIOS 15.1

1. (a) 288 (b) 144 **3.** (a) 0,990 (b) 1,151

5. (a) 4 (b) -8 **7.** $U < V < L$

9. (a) $\approx$ 248 (b) $\approx$ 15,5 **11.** 60 **13.** 3

15. 1,141606, 1,143191, 1,143535, 1,143617, 1,143637, 1,143642

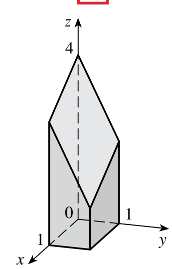
EXERCÍCIOS 15.2

1. $500y^3$, $3x^2$ $\boxed{\textbf{3.}}$ 222 **5.** 2 **7.** 18

$\boxed{\textbf{9.}}$ $\frac{21}{2}\ln 2$ **11.** $\frac{31}{30}$ $\boxed{\textbf{13.}}$ π **15.** 0

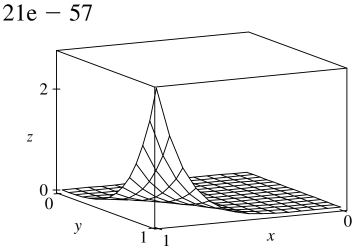
$\boxed{\textbf{17.}}$ $9\ln 2$ $\boxed{\textbf{19.}}$ $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{12}\pi$ **21.** $\frac{1}{2}e^{-6} + \frac{5}{2}$)

23.



25. 51 **27.** $\frac{166}{27}$ **29.** 2 **31.** $\frac{64}{3}$

33. $21e - 57$



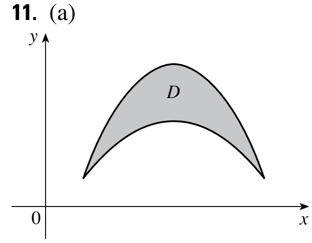
35. $\frac{5}{6}$ **37.** 0

39. O Teorema de Fubini não se aplica. O integrando tem uma descontinuidade infinita na origem.

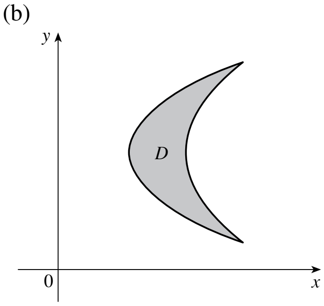
EXERCÍCIOS 15.3

1. 32 **3.** $\frac{3}{10}$ **5.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 1$ **7.** $\frac{4}{3}$ **9.** π

11. (a)



(b)



13. Tipo I: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$,
tipo II: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1\}$; $\frac{1}{3}$

15. $\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx + \int_1^4\int_{x-2}^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx = \int_{-1}^2\int_{y^2}^{y+2} y\,dx\,dy = \frac{9}{4}$

17. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ **19.** $\frac{11}{3}$ **21.** 0 **23.** $\frac{17}{60}$ **25.** $\frac{31}{8}$