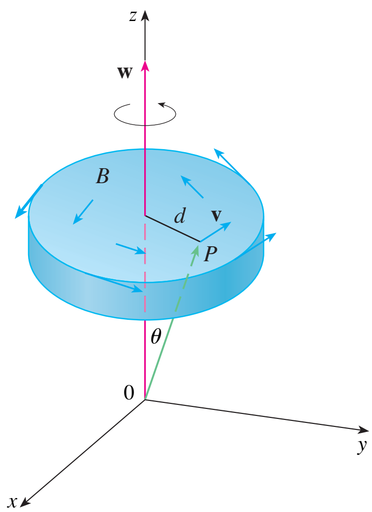
pode ser descrita pelo vetor $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$, onde ω é a velocidade angular de B, ou seja, a velocidade tangencial de qualquer ponto P em B dividida pela distância d do eixo de rotação. Seja $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ o vetor posição de P.

(a) Considerando o ângulo θ da figura, mostre que o campo de velocidade de B é dado por $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.

(b) Mostre que $\mathbf{v} = -\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j}$.

(c) Mostre que rot $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



38. As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico $\mathbf{E}$ e o campo magnético $\mathbf{H}$, quando eles variam com o tempo em uma região que não contenha carga nem corrente, como segue:

$$\text{div}\,\mathbf{E} = 0 \qquad\qquad \text{div}\,\mathbf{H} = 0$$

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad\qquad \text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

onde c é a velocidade da luz. Use essas equações para demonstrar o seguinte:

(a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

(b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

(c) $\nabla^2 \mathbf{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ [*Sugestão:* Use o Exercício 29.]

(d) $\nabla^2 \mathbf{H} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

39. Vimos que todos os campos vetoriais da forma $\mathbf{F} = \nabla g$ satisfazem a equação rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e que todos os campos vetoriais da forma $\mathbf{F} = \text{rot}\,\mathbf{G}$ satisfazem a equação div $\mathbf{F} = 0$ (supondo a continuidade das correspondentes derivadas parciais). Isto sugere a pergunta: existe alguma equação que todas as funções da forma $f = \text{div}\,\mathbf{G}$ devam satisfazer? Mostre que a resposta para essa pergunta é "Não" demonstrando que *toda* função contínua f em $\mathbb{R}^3$ é a divergência de algum campo de vetores. [*Dica*: Seja $\mathbf{G}(x, y, z) = \langle g(x, y, z), 0, 0\rangle$, onde $g(x, y, z) = \int_0^x f(t, y, z)\,dt$.]

16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas

Até agora temos considerado tipos especiais de superfícies: cilindros, superfícies quádricas, gráficos de funções de duas variáveis e superfícies de nível de funções de três variáveis. Aqui, usaremos funções vetoriais para descrever superfícies mais gerais, chamadas *superfícies parametrizadas* e calcularemos suas áreas. A seguir, tomaremos a fórmula para a área de superfícies gerais e veremos como se aplica a superfícies especiais.

Superfícies Parametrizadas

De modo muito semelhante à nossa descrição de curvas espaciais por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ de um único parâmetro t, podemos descrever uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v. Suponhamos que

$$\boxed{1} \qquad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

seja uma função a valores vetoriais definida sobre uma região D do plano uv. Então x, y e z, os componentes de funções de $\mathbf{r}$, serão funções das duas variáveis u e v com domínio D. O conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\boxed{2} \qquad x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

e (u, v) varia ao longo de D, é chamado de **superfície parametrizada** S e Equações 2 são chamados **equações parametrizadas** de S. Cada escolha de u e v resulta um ponto em S; fazendo todas as escolhas, temos todos os pontos de S. Em outras palavras, a superfície é traçada pela ponta do vetor posição $\mathbf{r}(u, v)$ enquanto (u, v) se move ao longo da região D. (Veja a Figura 1.)

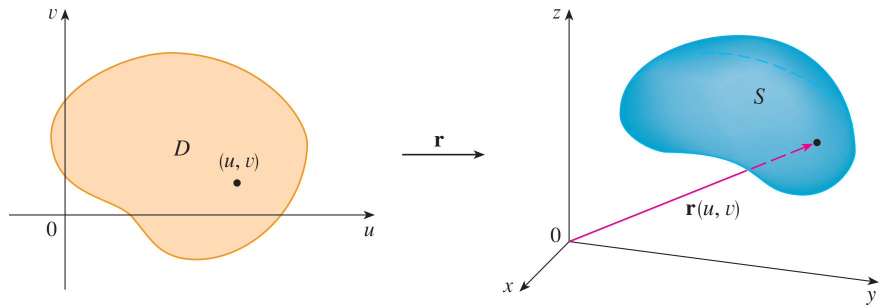


FIGURA 1
Uma superfície parametrizada

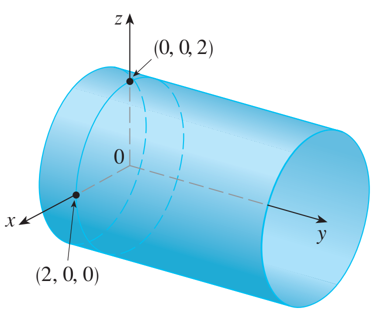


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\, \mathbf{i} + v\, \mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} u\, \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2 \cos u \qquad y = v \qquad z = 2 \operatorname{sen} u$$

então, para qualquer ponto (x, y, z) da superfície, temos

$$x^2 + z^2 = 4 \cos^2 u + 4 \operatorname{sen}^2 u = 4$$

Isso significa que todas as seções transversais paralelas ao plano xz (isto é, com y constante) são circunferências de raio 2. Como $y = v$ e não existe restrição ao valor de v, a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo y (veja a Figura 2).

No Exemplo 1 não existiam restrições quanto aos parâmetros u e v e assim obtivemos o cilindro inteiro. Se, por exemplo, restringíssemos u e v, escrevendo o domínio dos parâmetros como

$$0 \leqslant u \leqslant \pi/2 \qquad 0 \leqslant v \leqslant 3$$

Então $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 3$ e obteríamos o quarto do cilindro de comprimento 3 ilustrado na Figura 3.

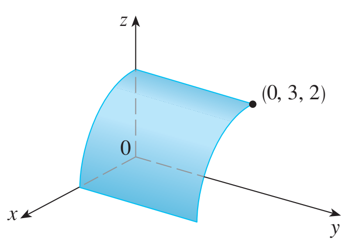


FIGURA 3

Se uma superfície parametrizada S é dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então existem duas famílias de curvas úteis contidas em S, uma família com u constante e outra com v constante. Essas famílias correspondem a retas verticais e horizontais no plano uv. Se mantivermos u constante, impondo $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial com um único parâmetro v que define uma curva C_1 sobre S. (Veja a Figura 4.)

TEC *Visual 16.6* mostra versões animadas de Figuras 4 e 5, com o movimento das curvas de grade, para diversas superfícies parametrizadas.

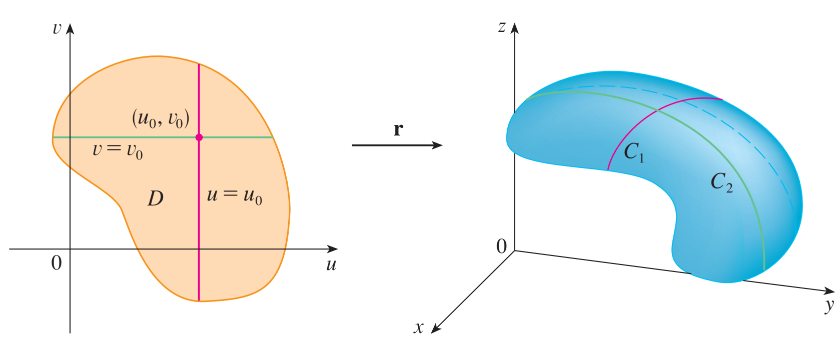


FIGURA 4

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S. Chamamos essas curvas **curva da grade**. (No Exemplo 1, por exemplo, as curvas da grade obtidas tornando u constante são linhas horizontais, enquanto as curvas da grade obtidas com v constante são circunferências.) Na verdade, quando um computador elabora em gráfico uma superfície parametrizada, que normalmente apresenta a superfície traçando as curvas da grade, como podemos ver no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Use um sistema de computação algébrica para traçar o gráfico da superfície

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \text{sen } v) \cos u, (2 + \text{sen } v) \text{ sen } u, u + \cos v \rangle$$

Quais são as curvas da grade com u constante? Quais têm v constante?

SOLUÇÃO Traçamos o pedaço da superfície com os parâmetros delimitados por $0 \leqslant u \leqslant 4\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ na Figura 5. Esse gráfico tem a aparência de um tubo espiral. Para identificarmos as curvas da grade, escrevemos as equações paramétricas correspondentes:

$$x = (2 + \text{sen } v) \cos u \qquad y = (2 + \text{sen } v)\text{sen } u \qquad z = u + \cos v$$

Se v é constante, então sen v e cos v são constantes, portanto, as equações paramétricas se assemelham às da hélice no Exemplo 4 na Seção 13.1. Assim, as curvas de grade com v constante são as curvas em espiral na Figura 5. Deduzimos que as curvas de grade com u constante devem ser curvas que parecem círculos na figura. Maior evidência dessa afirmação é que, se mantivermos u constante, $u = u_0$, então as equações $z = u_0 + \cos v$ mostram que os valores de z variam de $u_0 - 1$ até $u_0 + 1$.

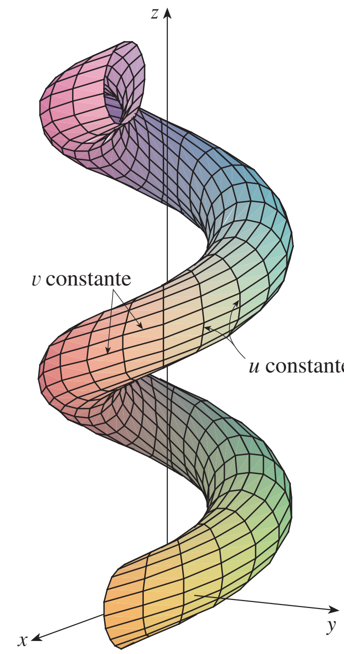


FIGURA 5

Nos Exemplos 1 e 2 nos foi dada uma equação vetorial e pedido o gráfico da superfície parametrizada correspondente. Nos exemplos seguintes, entretanto, teremos o problema mais desafiador de achar a função vetorial que representa uma superfície dada. No restante deste capítulo, teremos de fazer exatamente isso muitas vezes.

EXEMPLO 3 Determine a função vetorial que representa o plano que passa pelo ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}_0$ e que contenha dois vetores não paralelos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$

SOLUÇÃO Se P é qualquer ponto no plano, podemos ir de P_0 até P movendo uma certa distância na direção de $\mathbf{a}$ e uma outra distância na direção de $\mathbf{b}$. Então, existem escalares u e v tais que $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. (A Figura 6 ilustra como isto funciona, por meio da lei do paralelogramo, para o caso em que u e v são positivos. Veja também o Exercício 46 na Seção 12.2.) Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de P, então

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

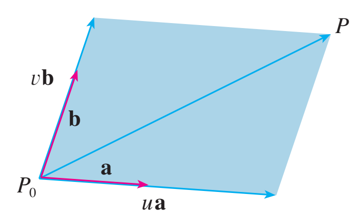


FIGURA 6

Assim, a equação vetorial do plano pode ser escrita como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

onde u e v são números reais.

Se escrevermos $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, podemos escrever as equações paramétricas do plano pelo ponto (x_0, y_0, z_0) como segue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \qquad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \qquad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$

EXEMPLO 4 Determine uma representação parametrizada da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

SOLUÇÃO A esfera tem uma representação simples $\rho = a$ em coordenadas esféricas, então vamos escolher os ângulos ϕ e θ das coordenadas esféricas como parâmetros (veja a Seção 15.9). Tomando $\rho = a$ nas equações para conversão de coordenadas esféricas para coordenadas retangulares (Equação 15.9.1), obtemos

$$x = a \text{ sen } \phi \cos \theta \qquad y = a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \qquad z = a \cos \phi$$

como equações parametrizadas da esfera. A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \text{ sen } \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \, \mathbf{j} + a \cos \phi \, \mathbf{k}$$

Temos $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. As curvas da grade com ϕ constante são as circunferências de latitude constante (incluindo o equador). As curvas da grade com θ constante são os meridianos (semicircunferências), que ligam os Polos Norte e Sul (veja a Figura 7).

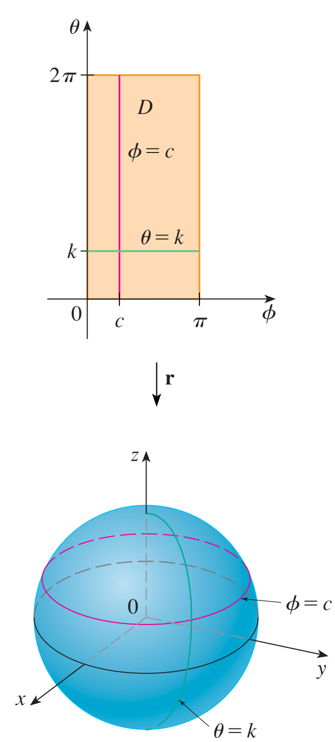


FIGURA 7

OBSERVAÇÃO Vimos no Exemplo 4 que as curvas de grade para uma esfera são curvas de latitude e longitude constantes. Para uma superfície parametrizada geral, estamos realmente fazendo um mapa e as curvas da grade são semelhantes a linhas de latitude e longitude. Descrever um ponto sobre uma superfície parametrizada (como o da Figura 5) dando valores específicos de u e v é como dar a latitude e a longitude de um ponto.

Um dos usos de superfícies parametrizadas é na computação gráfica. A Figura 8 mostra o resultado de tentar traçar a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ resolvendo a equação para z e traçando os hemisférios de cima e de baixo separadamente. Parte da esfera parece estar ausente por causa do sistema de grade retangular utilizado pelo computador. A imagem, muito melhor na Figura 9, foi produzida por um computador, utilizando as equações parametrizadas encontradas no Exemplo 4.

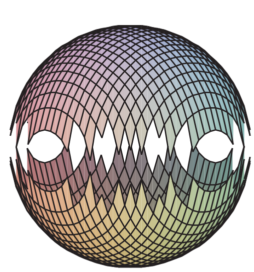


FIGURA 8

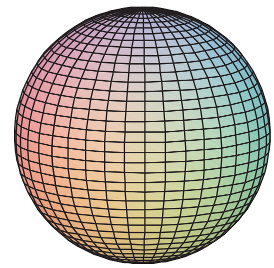


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Determine uma representação parametrizada do cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

SOLUÇÃO O cilindro tem representação $r = 2$ em coordenadas cilíndricas; assim escolhemos como parâmetros θ e z das coordenadas cilíndricas. Então as equações paramétricas do cilindro são

$$x = 2 \cos \theta \qquad y = 2 \operatorname{sen} \theta \qquad z = z$$

onde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$.

EXEMPLO 6 Determine uma função vetorial que represente o paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$.

SOLUÇÃO Se olharmos para x e y como parâmetros, as equações paramétricas ficam simplesmente

$$x = x \qquad y = y \qquad z = x^2 + 2y^2$$

e a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2)\mathbf{k}$$

TEC Em *Module 16.6* você pode investigar várias famílias de superfícies parametrizadas.

Em geral, uma superfície dada como o gráfico de uma função de x e y, ou seja, com equação da forma $z = f(x, y)$, pode sempre ser olhada como uma superfície parametrizada, tomando x e y como parâmetros e escrevendo as equações paramétricas como

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

Representações parametrizadas (também chamadas parametrizações) de superfícies não são únicas. O próximo exemplo mostra dois modos de parametrizar um cone.

EXEMPLO 7 Determine uma representação parametrizada para a superfície $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a metade superior do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

SOLUÇÃO 1 Uma possível representação é obtida escolhendo-se x e y como parâmetros:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim, a equação vetorial é

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$$

Para alguns propósitos, as representações parametrizadas das Soluções 1 e 2 são igualmente boas, mas a Solução 2 pode ser preferível em certas situações. Se estivermos interessados somente na parte do cone que está abaixo do plano $z = 1$, por exemplo, tudo que devemos fazer na Solução 2 é mudar o domínio do parâmetro para

$$0 \leqslant r \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

SOLUÇÃO 2 Outra representação resulta da escolha das coordenadas polares r e θ. Um ponto (x, y, z) sobre o cone satisfaz $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ e $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Assim, uma equação vetorial para o cone é

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}$$

onde $r \geqslant 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Superfícies de Revolução

As superfícies de revolução podem ser representadas na forma parametrizada e, portanto, seus gráficos podem ser traçados usando-se um computador. Por exemplo, vamos considerar a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, sobre o eixo x, onde $f(x) \geqslant 0$. Seja θ o ângulo de rotação, como mostrado na Figura 10. Se (x, y, z) é um ponto em S, então

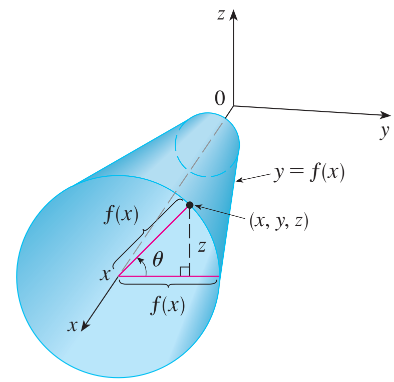


FIGURA 10

3 $$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\text{sen}\,\theta$$

Portanto, tomamos x e θ como parâmetros e olhamos as Equações 3 como equações paramétricas de S. O domínio do parâmetro é dado por $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

EXEMPLO 8 Encontre equações paramétricas para a superfície gerada pela rotação da curva $y = \text{sen}\,x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ sobre o eixo x. Use essas equações para o gráfico da superfície de revolução.

SOLUÇÃO Das Equações 3, as equações paramétricas são

$$x = x \qquad y = \text{sen}\,x\cos\theta \qquad z = \text{sen}\,x\,\text{sen}\,\theta$$

e o domínio do parâmetro é $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Usando um computador para traçar essas equações e girar a imagem, obtemos o gráfico da Figura 11.

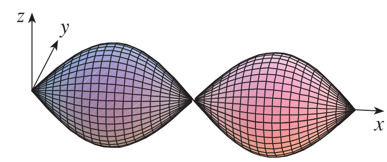


FIGURA 11

Podemos adaptar as Equações 3 para representar uma superfície obtida pela revolução em torno do eixo y ou do eixo z (veja o Exercício 30).

Planos Tangentes

Agora vamos determinar o plano tangente a uma superfície parametrizada determinada por uma função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

em um ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Se mantivermos u constante usando $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ torna-se uma função vetorial do parâmetro único v e define uma curva de grade C_1 em S. (Veja a Figura 12.) O vetor tangente a C_1 em P_0 é obtido tomando-se a derivada parcial de $\mathbf{r}$ em relação a v:

4 $$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

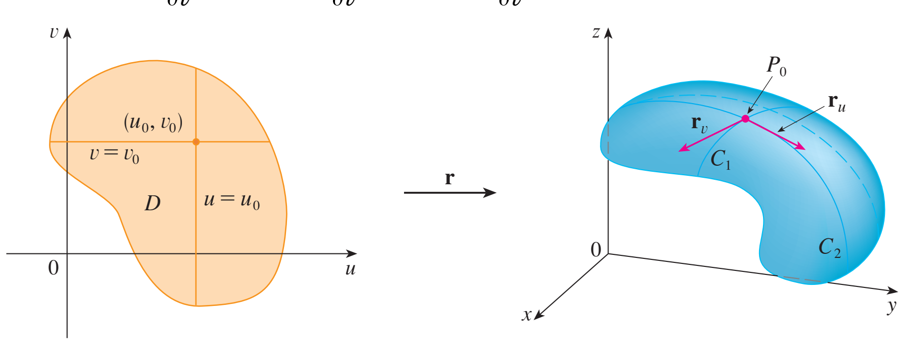


FIGURA 12

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva da grade C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S, e cujo vetor tangente em P_0 é

5 $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

Se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ não é $\mathbf{0}$, então a superfície S é dita **suave** (sem "bicos"). Para uma superfície suave, o **plano tangente** é o que contém os vetores tangentes $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ e $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é o vetor normal ao plano tangente.

A Figura 13 mostra a superfície que se autointercepta no Exemplo 9 e seu plano tangente em (1, 1, 3).

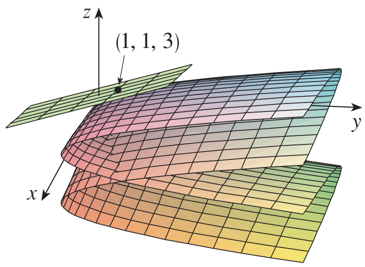


FIGURA 13

EXEMPLO 9 Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ no ponto (1, 1, 3).

SOLUÇÃO Primeiro, vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k} = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

Observe que o ponto (1, 1, 3) corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$, de forma que o vetor normal ali é

$$-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

Portanto, uma equação do plano tangente em (1, 1, 3) é

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

ou $$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Área da Superfície

Definiremos agora a área de uma superfície parametrizada geral dada pela Equação 1. Para simplificar, vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros D é um retângulo, que dividiremos em sub-retângulos R_{ij}. Vamos escolher (u_i^*, v_j^*) como o canto

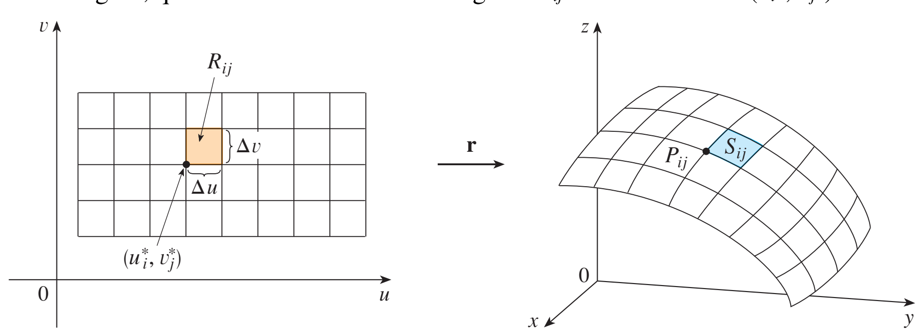


FIGURA 14
A imagem do sub-retângulo R_{ij} é o retalho S_{ij}

inferior esquerdo do retângulo R_{ij}. (Veja a Figura 14.)

A parte S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamada de *retalho* e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ como um de seus cantos. Sejam

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

os vetores tangentes em P_{ij} calculados pelas Equações 5 e 4.

A Figura 15(a) mostra como os dois lados do retalho que se encontram em P_{ij} podem ser aproximados por vetores. Esses vetores, por sua vez, podem ser aproximados pelos vetores $\Delta u\,\mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v\,\mathbf{r}_v^*$ porque as derivadas parciais podem ser aproximadas pelos quocientes de diferenças. Assim, aproximamos S_{ij} pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u\,\mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v\,\mathbf{r}_v^*$. Esse paralelogramo está representado na Figura 15(b) e está contido no plano tangente a S em P_{ij}. A área desse paralelogramo é

$$|(\Delta u\,\mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\,\mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\,\Delta u\,\Delta v$$

e então uma aproximação da área de S é

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \, \Delta u \, \Delta v$$

A intuição nos diz que essa aproximação fica melhor à medida que aumentamos o número de sub-retângulos e reconhecemos a soma dupla como a soma de Riemann para a integral dupla $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv$. Isso justifica a seguinte definição:

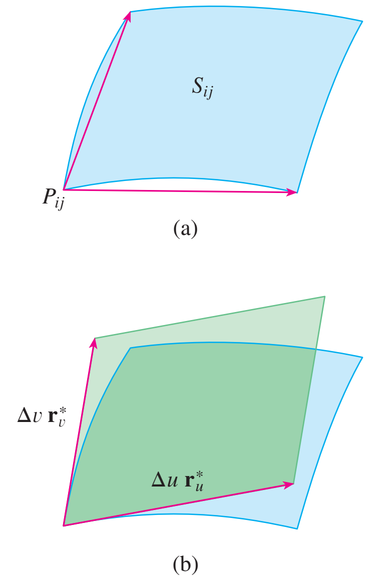


FIGURA 15
Aproximando um retalho por um paralelogramo

6 Definição Se uma superfície parametrizada suave S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) abrange todo o domínio D dos parâmetros, então a **área da superfície** de S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA$$

onde $\quad \mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$

EXEMPLO 10 Determine a área da esfera de raio a.

SOLUÇÃO No Exemplo 4 encontramos a representação parametrizada

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leqslant \phi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

Vamos calcular primeiro o produto cruzado dos vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_f \times \mathbf{r}_u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{sen} \phi \\ -a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, \mathbf{k}$$

Logo,

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi \cos^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^4\phi \operatorname{sen}^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\phi}$$
$$= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2 \operatorname{sen} \phi$$

uma vez que $\operatorname{sen} \phi \geqslant 0$ para $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Portanto, pela Definição 6, a área da esfera é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| \, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$
$$= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi \, d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2$$

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Para o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D e f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

assim, $\quad \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$

e

$$\boxed{7} \qquad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Então temos

$$\boxed{8} \qquad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

e a fórmula de área da superfície na Definição 6 fica

Observe a semelhança entre a fórmula da área da superfície da Equação 9 e a fórmula do comprimento do arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

da Seção 8.1, no Volume I.

$$\boxed{9} \qquad \boxed{A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA}$$

EXEMPLO 11 Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO O plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto, a superfície dada fica acima do disco D com centro na origem e raio 3. (Veja a Figura 16.) Usando a Fórmula 9, temos

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

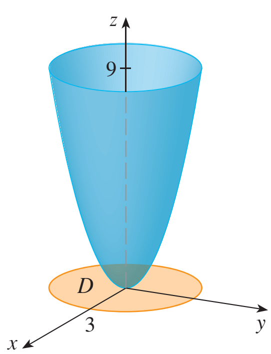


FIGURA 16

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$

Precisamos ainda verificar se nossa definição da área de superfície $\boxed{6}$ é coerente com a fórmula da área de superfície obtida no cálculo com uma única variável (8.2.4).

Consideremos a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, em torno do eixo x, onde $f(x) \geqslant 0$ e f' é contínua. Da Equação 3, sabemos que as equações paramétricas de S são

$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Para calcularmos a área da superfície S, precisamos dos vetores tangentes

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + f'(x)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -f(x)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + f(x)\cos\theta\,\mathbf{k}$$

Logo,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & -f(x)\,\mathrm{sen}\,\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= f(x)f'(x)\,\mathbf{i} - f(x)\cos\theta\,\mathbf{j} - f(x)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

E também

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{[f(x)]^2[f'(x)]^2 + [f(x)]^2\cos^2\theta + [f(x)]^2\,\mathrm{sen}^2\theta}$$

$$= \sqrt{[f(x)]^2[1 + [f'(x)]^2]} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

porque $f(x) \geqslant 0$. Portanto, a área de S é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| \, dA = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \, d\theta$$
$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

Isso é precisamente a fórmula que usamos para definir a área de uma superfície de revolução no cálculo com uma única variável (8.2.4).

16.6 Exercícios

1–2 Determine se os pontos P e Q estão na superfície dada.

1. $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v \rangle$
$P(7, 10, 4)$, $Q(5, 22, 5)$

2. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2 - v, u + v^2 \rangle$
$P(3, -1, 5)$, $Q(-1, 3, 4)$

3–6 Identifique a superfície que tem a equação paramétrica dada.

3. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\,\mathbf{i} + (3 - v)\,\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(u, v) = 2 \text{ sen } u\,\mathbf{i} + 3 \cos u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

5. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, t, t^2 - s^2 \rangle$

6. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, \text{sen } 2t, s^2, s \cos 2t \rangle$

7–12 Use um computador para traçar o gráfico da superfície parametrizada. Imprima o resultado e indique sobre essa impressão quais são as curvas da grade que têm u constante e quais têm v constante.

7. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2, v^2, u + v \rangle$, $\quad -1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1$

8. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v^3, -v \rangle$, $\quad -2 \leqslant u \leqslant 2, -2 \leqslant v \leqslant 2$

9. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \text{ sen } v, u^5 \rangle$, $\quad -1 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

10. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, \text{sen}(u + v), \text{sen } v \rangle$,
$-\pi \leqslant u \leqslant \pi, -\pi \leqslant v \leqslant \pi$

11. $x = \text{sen } v$, $\; y = \cos u \text{ sen } 4v$, $\; z = \text{sen } 2u \text{ sen } 4v$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, -\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2$

12. $x = \text{sen } u$, $\quad y = \cos u \text{ sen } v$, $\quad z = \text{sen } v$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

13–18 Faça uma correspondência entre as equações e os gráficos identificados por I-VI e justifique sua resposta. Determine quais famílias de curvas da grade têm u constante e quais têm v constante.

13. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \text{ sen } v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$

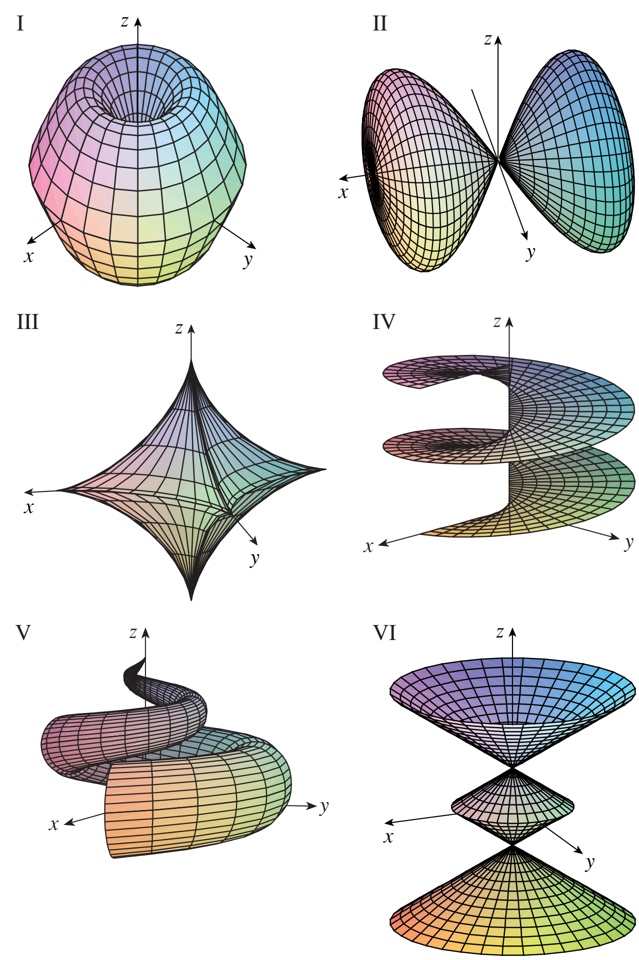
14. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \text{ sen } v\,\mathbf{j} + \text{sen } u\,\mathbf{k}$, $\quad -\pi \leqslant u \leqslant \pi$

15. $\mathbf{r}(u, v) = \text{sen } v\,\mathbf{i} + \cos u \text{ sen } 2v\,\mathbf{j} + \text{sen } u \text{ sen } 2v\,\mathbf{k}$

16. $x = (1 - u)(3 + \cos v) \cos 4\pi u$,
$y = (1 - u)(3 + \cos v) \text{ sen } 4\pi u$,
$z = 3u + (1 - u) \text{ sen } v$

17. $x = \cos^3 u \cos^3 v$, $y = \text{sen}^3 u \cos^3 v$, $z = \text{sen}^3 v$

18. $x = (1 - |u|) \cos v$, $y = (1 - |u|) \text{ sen} v$, $z = u$



19–26 Determine uma representação parametrizada para a superfície.

19. O plano que passa pela origem que contém os vetores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} - \mathbf{k}$

20. O plano que passa pelo ponto $(0, -1, 5)$ e contém os vetores $(2, 1, 4)$ e $(-3, 2, 5)$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

21. A parte do hiperboloide $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$ que está em frente do plano yz

22. A parte do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ que se encontra à esquerda do plano xz

23. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se situa acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

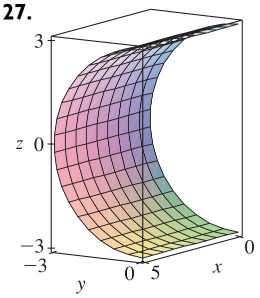
24. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $z = -2$ e $z = 2$

25. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $x = 0$ e $x = 5$

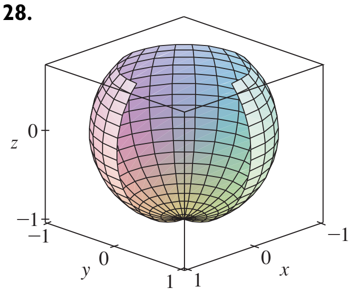
26. A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

SCA **27–28** Use um sistema de computação algébrica para produzir um gráfico semelhante ao das figuras.

27.



28.



29. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $y = e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, em torno do eixo x e use-as para traçar o gráfico da superfície.

30. Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $x = 4y^2 - y^4$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, em torno do eixo y e use-as para traçar o gráfico da superfície.

31. (a) O que acontecerá com o tubo espiral do Exemplo 2 (veja a Figura 5) se substituirmos $\cos u$ por $\text{sen}\, u$ e $\text{sen}\, u$ por $\cos u$?
(b) O que acontece se substituirmos $\cos u$ por $\cos 2u$ e $\text{sen}\, u$ por $\text{sen}\, 2u$?

32. A superfície com as equações paramétricas

$$x = 2\cos\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$y = 2\,\text{sen}\,\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$z = r\,\text{sen}(\theta/2)$$

onde $-\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, é chamada **Faixa de Möbius**. Trace o gráfico dessa superfície sob vários pontos de vista. O que há de estranho nela?

33–36 Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado.

33. $x = u + v, \quad y = 3u^2, \quad z = u - v; \qquad (2, 3, 0)$

34. $x = u^2 + 1, \quad y = v^3 + 1, \quad z = u + v; \qquad (5, 2, 3)$

35. $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}; \quad u = 1, v = \pi/3$

36. $\mathbf{r}(u, v) = \text{sen}\,u\,\mathbf{i} + \cos u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + \text{sen}\,v\,\mathbf{k}; \quad u = \pi/6, v = \pi/6$

SCA **37–38** Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado. Desenhe a superfície e o plano tangente.

37. $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + u\cos v\,\mathbf{k}; \ u = 1, v = 0$

38. $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u^2 - v^2)\,\mathbf{i} - v\,\mathbf{j} - u\,\mathbf{k}; \ (-1, -1, -1)$

39–50 Determine a área da superfície.

39. A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante

40. A parte do plano com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, 2 - 3u, 1 + u - v\rangle$ que é dada por $0 \leqslant u \leqslant 2$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$

41. A parte do plano $x + 2y + 3z = 1$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 3$

42. A parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que se encontra entre o plano $y = x$ e o cilindro $y = x^2$

43. A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

44. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 3y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$

45. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

46. A parte do paraboloide $x = y^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = 9$

47. A parte da superfície $y = 4x + z^2$ que se encontra entre os planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $z = 1$

48. O helicoide (ou rampa em espiral) com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\,\text{sen}\,v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

49. A superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

50. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $0 < a < b$

51. Se a equação de uma superfície S é $z = f(x, y)$, onde $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, e você sabe que $|f_x| \leqslant 1$ e $|f_y| \leqslant 1$, o que você pode dizer sobre $A(S)$?

52–53 Encontre a área da superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando-a em termos de uma integral unidimensional e usando sua calculadora para estimar a integral.

52. A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

53. A parte da superfície $z = e^{-x^2-y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$

SCA **54.** Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está acima do quadrado $|x| + |y| \leqslant 1$. Ilustre, traçando o gráfico dessa parte de superfície.

55. (a) Use a Regra do Ponto Médio para integrais duplas (veja a Seção 15.1) com seis quadrados para estimar a área da superfície $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.
SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta para a parte (a).

SCA **56.** Determine a área da superfície de equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \text{sen}^3 u \cos^3 v, \text{sen}^3 v\rangle$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$,

$0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Dê sua resposta com precisão de quatro casas decimais.

SCA **57.** Determine a área exata da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

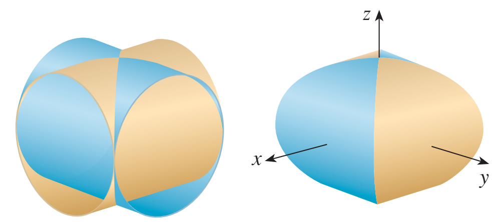
58. (a) Determine, mas não calcule, a integral dupla da área da superfície com as equações paramétricas $x = au \cos v$, $y = bu \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.
(b) Elimine os parâmetros para mostrar que a superfície é um paraboloide elíptico e escreva outra integral dupla que forneça sua área.
(c) Use as equações paramétricas da parte (a) com $a = 2$ e $b = 3$ para traçar o gráfico da superfície.
SCA (d) Para o caso $a = 2$, $b = 3$, use um sistema de computação algébrica para achar a área da superfície com precisão de quatro casas decimais.

59. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = c \cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$, representam um elipsoide.
(b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do elipsoide para o caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
(c) Determine, mas não calcule, uma integral dupla que dá a área de superfície da parte do elipsoide da parte (b).

60. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{senh} u$ representam um hiperboloide de uma folha.
(b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do hiperboloide para o caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
(c) Determine, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da porção do hiperboloide da parte (b) que está entre os planos $z = -3$ e $z = 3$.

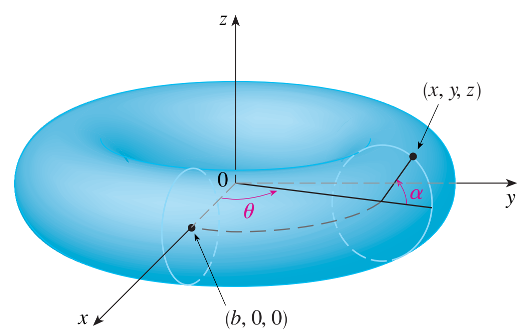
61. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do paraboloide $z = x^2 + y^2$.

62. A figura mostra a superfície criada quando o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Encontre a área desta superfície.



63. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

64. (a) Determine a representação parametrizada do toro obtido ao girar pelo eixo z o círculo no plano xz com centro $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$. [*Dica*: Tome-se como parâmetros os ângulos θ e α mostrados na figura.]
(b) Use as equações paramétricas encontradas na parte (a) para traçar o gráfico do toro para diversos valores de a e b.
(c) Use a representação parametrizada da parte (a) para achar a área do toro.



16.7 Integrais de Superfície

A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco. Suponha que f seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S. Definiremos a integral de superfície de f sobre S de tal forma que, no caso em que $f(x, y, z) = 1$, o valor da integral de superfície seja igual à área da superfície de S. Começamos com superfícies parametrizadas e trataremos em seguida o caso especial onde S é o gráfico de uma função de duas variáveis.

Superfícies parametrizadas

Suponha que a superfície S tenha equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

Vamos admitir inicialmente que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos R_{ij} com dimensões Δu e Δv. Então, a superfície S é dividida em retalhos correspondentes S_{ij}, como na Figura 1. Calculamos f em um ponto P_{ij}^* de cada retalho, multiplicamos pela área ΔS_{ij} do retalho e formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$