Função Polinomial do 2º. grau

1-Definição:

Chama-se função polinomial do 2º. grau toda função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, tem-se a = 3, b = - 4 e c = 1

b) $f(x) = x^2 - 1$, com a = 1, b = 0 e c = -1

c) $f(x) = -x^2 + 8x$, tal que a = -1, b = 8 e c = 0

d) $f(x) = -\frac{3x^2}{2}$, com a = $-\frac{3}{2}$, b = 0 e c = 0

2 - **Gráfico:**

O gráfico de uma função polinomial do 2º. grau, y = ax^2 + bx + c, com a ≠ 0, é uma curva chamada **parábola**.

A parábola que representa uma função polinomial do 2º. grau tem sempre a concavidade voltada para baixo ou para cima e possui um eixo de simetria vertical, passando pelo vértice *V*, cuja equação é x = x_V.

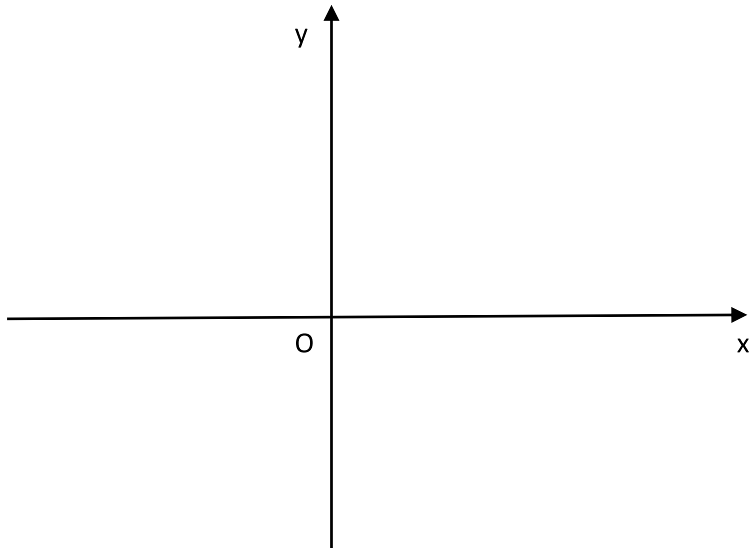
As coordenadas do vértice V da parábola são dadas pelas fórmulas:

$$\mathbf{V} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

2.1 – Exemplos:

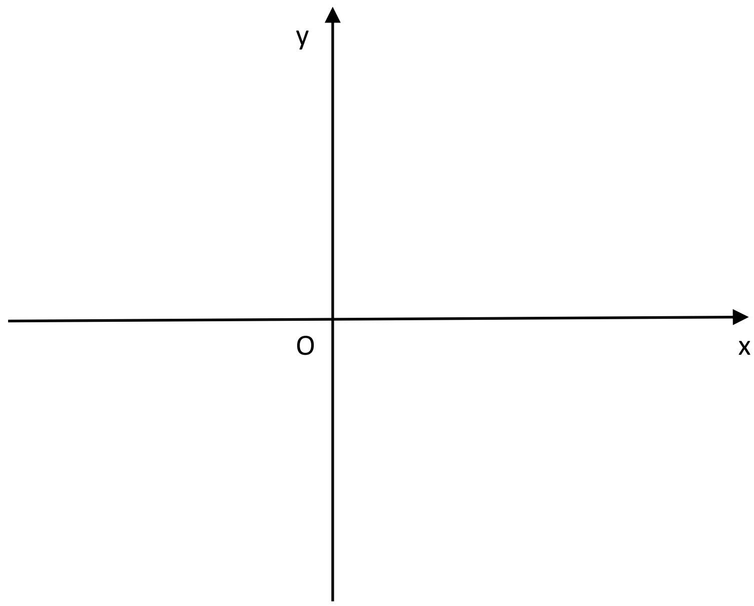
a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

					Vérti				
X	...								...
Y	...								



b) $y = -x^2 + 4x + 5$

				Vértice				
x	...							...
y	...							



2.2- Observação:

2.2.1 - A parábola sempre corta o eixo y no ponto (0,c).

2.2.2 - Ao construir o gráfico de uma função polinomial do 2º. grau, notaremos sempre que:

- se **a > 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**;

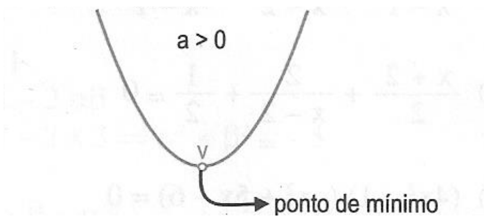


Fig. 1

- se **a < 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**;

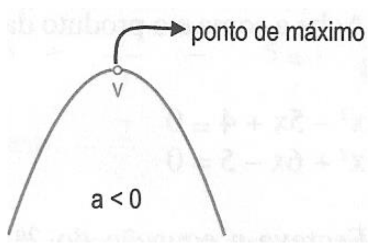


Fig.2

3 - **Zeros (ou raízes) de uma função polinomial do 2º. grau:**

Os zeros (ou raízes) da função polinomial do 2º. grau são os valores reais x tais que f(x) = 0. Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º. grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. As raízes são determinadas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante, a saber:

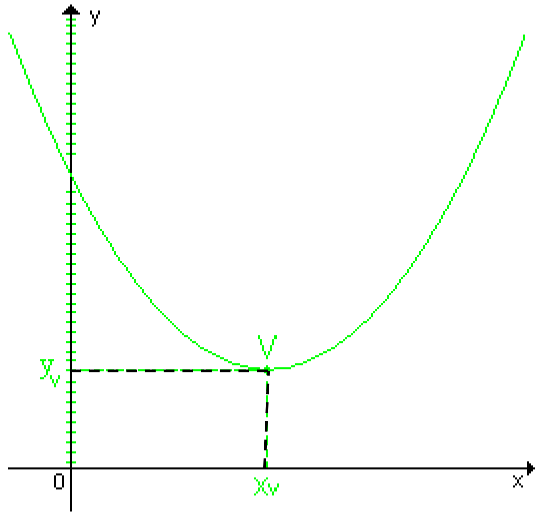
$\Delta > 0 \rightarrow$ as duas raízes são números reais distintos.
$\Delta = 0 \rightarrow$ as duas raízes são números reais iguais.
$\Delta < 0 \rightarrow$ não existem raízes reais.

4 – **Conjunto Imagem:**

O conjunto imagem I_m da função $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, é o conjunto dos valores reais que y pode assumir. Há duas possibilidades:

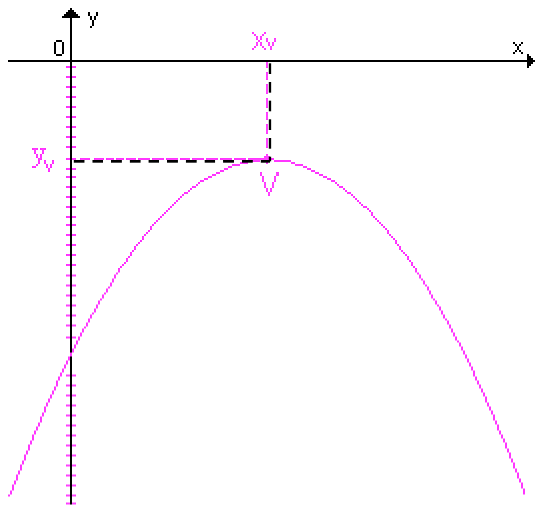
1ª.) Quando a > 0

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y \geq y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$



2ª.) Quando $a < 0$

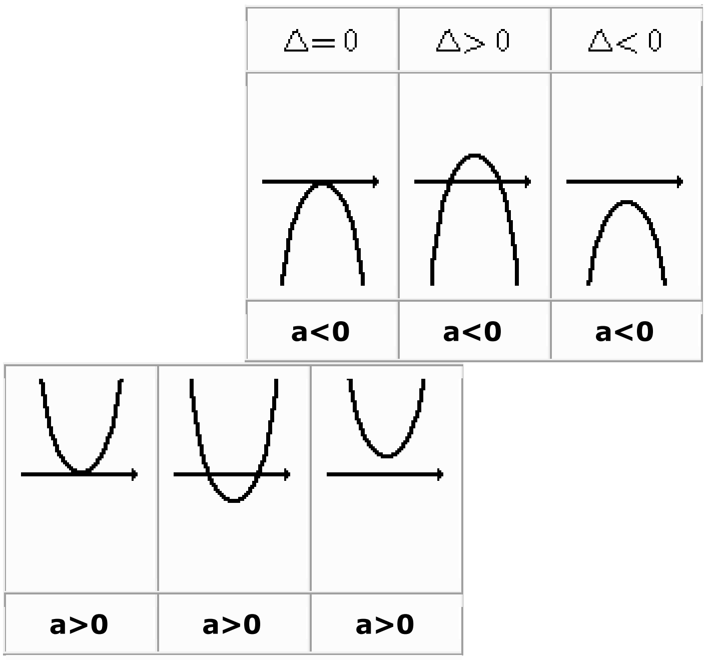
$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y \leq y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$



5 – **Resumindo:**

Observando os valores de Δ e a tem-se que o gráfico de uma função polinomial do 2º. grau tem um dos seguintes aspectos:

$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$



6 - **Exercícios:**

6.1 - Resolva em IR:

a) $x^2 + 5x = 0$

b) $x^2 - \frac{x}{3} = 0$

c) $x^2 - 36 = 0$

d) $2x^2 + 18 = 0$

e) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

f) $-\frac{x^2}{3} - x + 6 = 0$

g) $\frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \leq 0$

h) $x^2 + 3x - 10 > 0$

i) $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$

6.2 - Num retângulo, cuja área é 65 m², a base é 3 m menor que o dobro da sua altura. Obtenha a medida da base do retângulo.

6.3 - Para que valores reais da constante **m** a equação $2x^2 - mx + 8 = 0$ admite raízes reais e iguais?

6.4 - Para que valores reais de x a expressão $\frac{1}{x^2 - 6x + 8}$ representa um número real?

6.5 - Esboce os gráficos das funções abaixo e determine o conjunto imagem de cada uma delas.

a) $f(x) = -x^2 + 4x$

b) $f(x) = x^2 - 49$

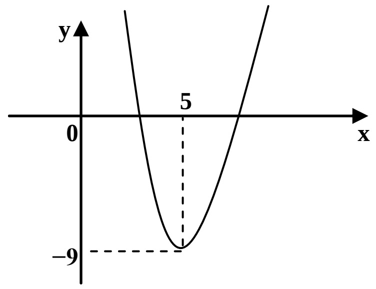
c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

6.6 - Para que valores de m o gráfico de $f(x) = (m - 4)x^2 - 2x + m$ é uma parábola com concavidade voltada para cima?

6.7 - Determine os valores de m para que o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + m$ não "corte" o eixo x.

6.8 - Calcule m de modo que o valor máximo da função $f(x) = mx^2 + (m - 1)x + (m + 2)$ seja 2.

6.9 - O gráfico abaixo representa a curva de equação $y = ax^2 - 10x + c$.



Determine os valores de *a* e *c*.

6.10 – O Instituto de Meteorologia de uma cidade no sul do país registrou a temperatura local nas doze primeiras horas de um dia de inverno. Uma lei que pode representar a temperatura (y), em graus Celsius, em função da hora (x) é:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + k, com\ 0 \leq x \leq 12$$

e *k* uma constante real.

a) Determine o valor de k, sabendo que às 3 horas da manhã a temperatura indicou 0 ºC.
b) Qual foi a temperatura mínima registrada no período?