Sentenças Abertas (ou Funções Proposicionais)

Lógica Matemática

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UENF

Prof. Fermín A. Tang

Sentenças Abertas com 1 variável

Definição

- ✗ Uma sentença aberta com uma variável em um conjunto A é uma expressão $p(x)$, tal que $p(a)$ é verdadeira ou falsa, para todo $a \in A$.
- ○ Observe que $p(x)$ é uma expressão que depende de x, que se tornará uma proposição, quando x for substituído por um elemento específico $a \in A$ $(x = a)$. Por isso se diz que é uma sentença aberta.

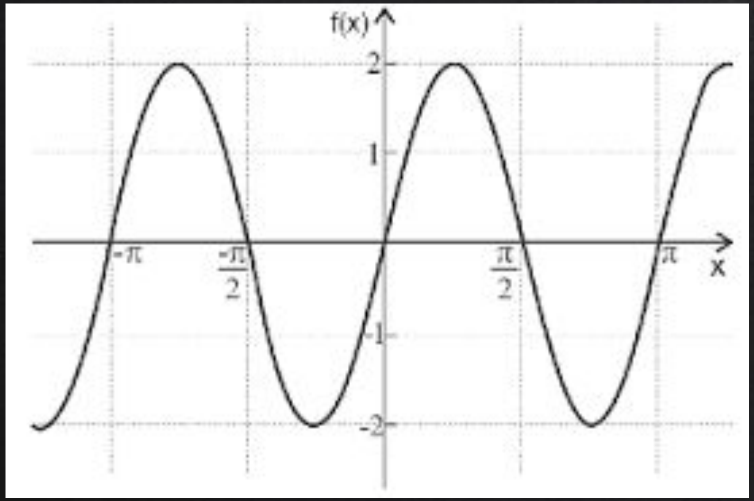
- ✗ O conjunto A recebe o nome de conjunto-universo (universo ou domínio) da variável x. Já qualquer elemento $a \in A$ é chamado valor da variável x.

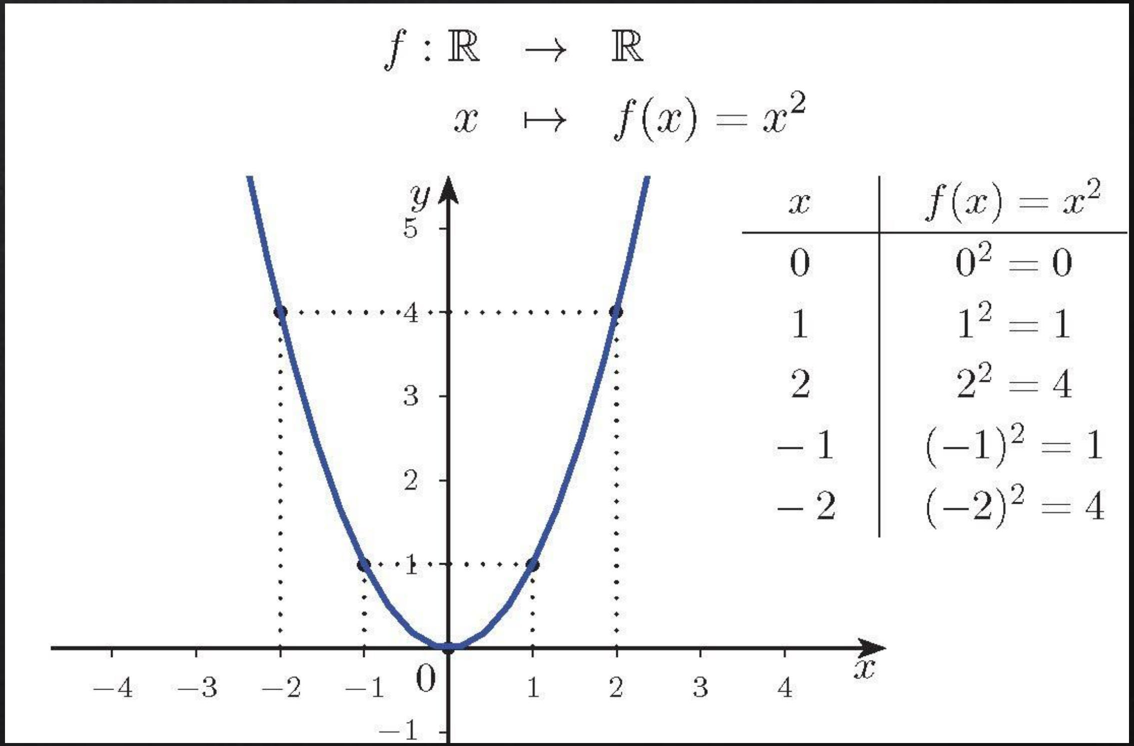
- ✗ Uma sentença aberta com uma variável em A, também é chamada de função proposicional com uma variável em A (ou, função proposicional em A, ou condição em A).

Sentenças Abertas com 1 variável

Exemplos de Funções

- Ilustramos o conceito de função $f(x)$ em uma variável x.





Sentenças Abertas com 1 variável

Exemplos

- ✗ Considere o universo $\mathbb{N} = \{1,\ 2, \ldots ,\ n, \ldots\}$, o conjunto dos números naturais. As seguintes expressões são exemplos de sentenças abertas em $\mathbb{N}$:

i) $x + 1 > 8$, para todo $x \in \mathbb{N}$

ii) $x^2 - 5x + 6 = 0$, para todo $x \in \mathbb{N}$

iii) $x + 5 = 9$, para todo $x \in \mathbb{N}$

iv) x é divisor de 10, para todo $x \in \mathbb{N}$

v) x é primo, para todo $x \in \mathbb{N}$

vi) x é múltiplo de 3, para todo $x \in \mathbb{N}$

Sentenças Abertas com 1 variável

Conjunto-Verdade

- Chama-se conjunto-verdade de uma sentença aberta $p(x)$ em A, ao conjunto de todos os elementos $a \in A$ tais que $p(a)$ é uma proposição verdadeira. Este conjunto pode ser denotado como V_p e definido como:

$$V_p = \{x | x \in A \text{ e } p(x) \text{ é } V\}$$

- Ou, de maneira simplificada:

$$V_p = \{x | x \in A \ \wedge \ p(x)\}$$

$$V_p = \{x \in A | \ p(x)\}$$

- O conjunto-verdade V_p de uma sentença aberta $p(x)$ em A é sempre um subconjunto de A:

$$V_p \subset A$$

Conjunto-Verdade de Sentenças Abertas

Exemplos

- ✘ 1) Seja a sentença aberta: $x + 1 > 8,\;$ para todo $x \in \mathbb{N}$

  O conjunto-verdade é: $$V_p = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 > 8\} \\ = \{8, 9, 10, \dots\}$$

- ✘ 2) Seja a sentença aberta: $x + 7 < 5,\;$ para todo $x \in \mathbb{N}$

  O conjunto-verdade é: $$V_p = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 7 < 5\} \\ = \emptyset$$

- ✘ 3) Seja a sentença aberta: $x + 5 > 3,\;$ para todo $x \in \mathbb{N}$

  O conjunto-verdade é: $$V_p = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 5 > 3\} \\ = \mathbb{N}$$

Conjunto-Verdade de Sentenças Abertas

Exemplos

- ✘ 4) Seja a sentença aberta: x é divisor de 10, para todo $x \in \mathbb{N}$

  O conjunto-verdade é:

  $$V_p = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisor de } 10\} = \{1, 2, 5, 10\}$$

- ✘ 5) Seja a sentença aberta: $x^2 - 2x > 0$, para todo $x \in \mathbb{Z}$

  O conjunto-verdade é:

  $$V_p = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 2x > 0\} = \mathbb{Z} - \{0, 1, 2\}$$

Classificação de Sentenças Abertas

- Os exemplos anteriores mostram que para uma sentença aberta $p(x)$ em A, três casos podem ocorrer:

  1) $p(x)$ é verdadeira para todo $x \in A$. Ou seja: $V_p = A$.

     Diz-se neste caso que $p(x)$ expressa uma condição universal no conjunto A (ou uma propriedade universal).

  2) $p(x)$ é verdadeira somente para alguns $x \in A$. Ou seja: $V_p \subset A$.

     Diz-se neste caso que $p(x)$ expressa uma condição possível no conjunto A (ou uma propriedade possível).

  3) $p(x)$ não é verdadeira para nenhum $x \in A$. Ou seja: $V_p = \emptyset$.

     Diz-se neste caso que $p(x)$ expressa uma condição impossível no conjunto A (ou uma propriedade impossível).

Classificação de Sentenças Abertas

Exemplos

- ✗ Considere as seguintes condições no universo $\mathbb{R}$ (números reais):

  i) $x + 1 > x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

  ii) $x + 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

- ✘ A primeira condição é universal, uma vez que é verificada por todos os números reais.
- ✘ Já a segunda condição é impossível, uma vez que não pode ser verificadas por nenhum número real.

Classificação de Sentenças Abertas

Exemplos

- Considere a seguinte condição no universo $\mathbb{R}$ (números reais):

  iii) $9x^2 - 1 = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

- Neste universo, a condição iii) é uma condição possível, uma vez que somente pode ser verificada pelos números reais ${}^1/_3$ e $-{}^1/_3$.

- Já se consideramos a condição iii) no universo $\mathbb{N}$ (números naturais), esta condição se torna impossível, uma vez que não existe nenhum número natural que verifique essa condição.

Classificação de Sentenças Abertas

Exemplos

- Considere agora a condição no universo $\mathbb{N}$ (números naturais):

  iv) $3x > 1,$ para todo $x \in \mathbb{N}$

- Neste universo, a condição iv) é uma condição universal, uma vez que o triplo de um número natural e sempre maior que 1.

- Já se consideramos a condição iv) no universo $\mathbb{R}$ (números reais), esta condição é apenas possível, mas não é universal, uma vez que não é verificada para $x = {}^{1}/_{3}$ e $x < {}^{1}/_{3}$.

Classificação de Sentenças Abertas

Observação

- ✘ Como foi observado nos exemplos, a classificação de uma sentença aberta como universal, possível ou impossível depende geralmente do universo adotado.

- ✘ No entanto, existem casos de condições que independem do universo:

  - Por exemplo, a condição: $x = x$ é universal.

  - Em consequência, a condição: $x \neq x$ é impossível.

Sentenças Abertas com 2 variáveis

Definição

- ✗ Dados dois conjuntos A e B, define-se uma sentença aberta com duas variáveis em $A \times B$, a expressão $p(x, y)$, tal que $p(a, b)$ é verdadeira ou falsa, para todo par ordenado $(a, b) \in A \times B$.

  - ○ Com isso, $p(x, y)$ é uma expressão que depende de x e y, que se tornará uma proposição, quando as variáveis x e y forem substituídas por elementos específicos a e b de um par ordenado (a, b) que pertence ao produto cartesiano $A \times B$ ($(a, b) \in A \times B$).

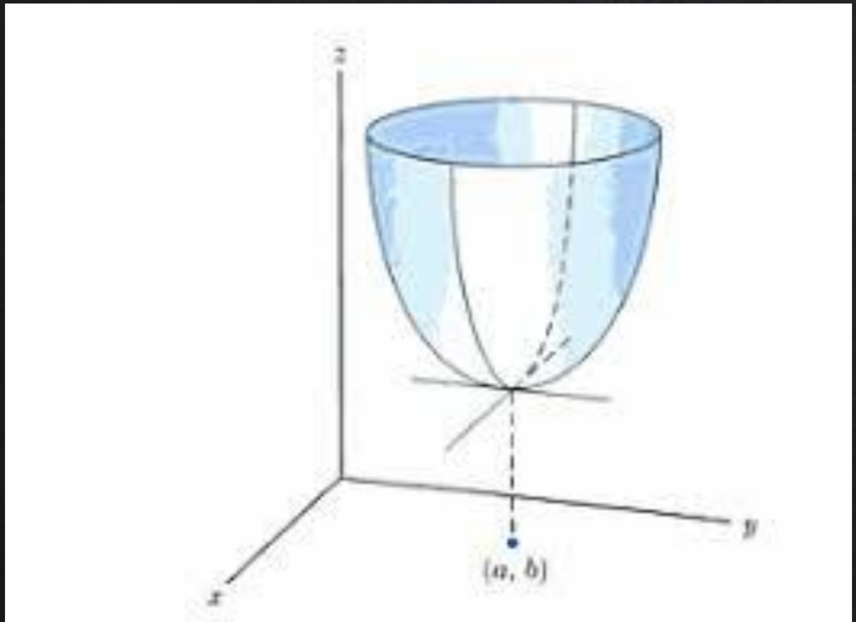
- ✗ O conjunto $A \times B$ recebe o nome de conjunto-universo (universo ou domínio) das variáveis x e y. Já qualquer par de elementos $(a, b) \in A \times B$ é chamado par de valores das variáveis x e y.

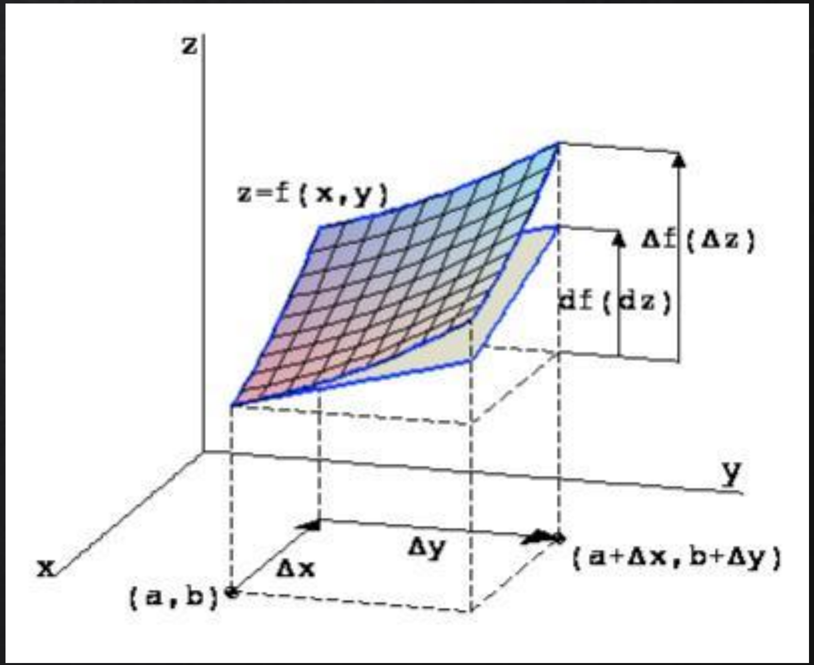
- ✗ Uma sentença aberta com duas variáveis em $A \times B$, também é chamada de função proposicional com duas variáveis em $A \times B$ (ou, função proposicional em $A \times B$, ou condição em $A \times B$).

Sentenças Abertas com 2 variáveis

Exemplos de Funções

- Ilustramos o conceito de função $f(x, y)$ em duas variáveis x e y.





Sentenças Abertas com 2 variáveis

Exemplos

- ✗ Considere os conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{5,\ 6\}$, de maneira a definir o conjunto-universo $A \times B$. As seguintes expressões são exemplos de sentenças abertas em $A \times B$:

i) x é menor que y, para todo $x \in A \times B$

ii) x é divisor de y, para todo $x \in A \times B$

iii) x é o dobro de y, para todo $x \in A \times B$

iv) $mdc(x, y) = 1$, para todo $x \in A \times B$

Sentenças Abertas com 2 variáveis

Conjunto-Verdade

- Chama-se conjunto-verdade de uma sentença aberta $p(x,y)$ em $A \times B$, ao conjunto de todos os elementos $(a,b) \in A \times B$ tais que $p(a,b)$ é uma proposição verdadeira. Este conjunto pode ser denotado como V_p e definido de maneira simbólica como:

$$V_p = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge p(x,y)\}$$

- Ou, de maneira simplificada: $V_p = \{(x,y) \in A \times B \mid p(x,y)\}$

- O conjunto-verdade V_p de uma sentença aberta $p(x,y)$ em $A \times B$ é sempre um subconjunto de $A \times B$:

$$V_p \subset A \times B$$

Conjunto-Verdade de Sentenças Abertas

Exemplos

- 1) Considere os conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $B = \{1,\ 3,\ 5\}$, de maneira a definir o conjunto-universo $A \times B$.

  Seja a sentença aberta: $x < y$, para todo $(x, y) \in A \times B$

  O conjunto-verdade é:
  $$V_p = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$$
  $$= \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5), (4,5)\}$$

- 2) Considere os conjuntos $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $B = \{3,\ 6,\ 7,\ 10\}$, de maneira a definir o conjunto-universo $A \times B$.

  Seja a sentença aberta: x divide y, para todo $(x, y) \in A \times B$

  O conjunto-verdade é:
  $$V_p = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ divide } y\}$$
  $$= \{(2,6), (2,10), (3,3), (3,6), (5,10)\}$$

Conjunto-Verdade de Sentenças Abertas

Exemplos

- 3) Considere os conjuntos $\mathrm{A} = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $\mathrm{B} = \{\ 3,\ 4\}$, de maneira a definir o conjunto-universo $A \times B$.

  Seja a sentença aberta: $x + 1 < y$, para todo $(x, y) \in A \times B$

  O conjunto-verdade é:

  $$V_p = \{(x, y) \in A \times B \mid x + 1 < y\}$$
  $$= \{(1{,}3), (1{,}4), (2{,}4)\}$$

- 4) Considere os conjuntos $\mathrm{A} = \{2,\ 3,\ 4\}$ e $\mathrm{B} = \{1,\ 2,\ 6\}$, de maneira a definir o conjunto-universo $A \times B$.

  Seja a sentença aberta: $mdc(x, y) = 2$, para todo $(x, y) \in A \times B$

  O conjunto-verdade é:

  $$V_p = \{(x, y) \in A \times B \mid mdc(x, y) = 2\}$$
  $$= \{(2{,}2), (2{,}6), (4{,}2), (4{,}6)\}$$

Conjunto-Verdade de Sentenças Abertas

Exemplos

- 5) Considere o conjunto-universo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

  Seja a sentença aberta: $2x + y = 10$, para todo $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

  O conjunto-verdade é:
  $$V_p = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y = 10\}$$
  $$= \{(1,8), (2,6), (3,4), (4,2)\}$$

- 6) Considere o conjunto-universo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

  Seja a sentença aberta: $x^2 + y^2 = 1$, para todo $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

  O conjunto-verdade é:
  $$V_p = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
  $$= \{(-1,0), (0,-1), (0,1), (1,0)\}$$

Sentenças Abertas com N variáveis

Definição

- Considere os n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ e o seu produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Denomina-se sentença aberta com $\boldsymbol{n}$ variáveis em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ a uma expressão $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tal que $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é verdadeira ou falsa, para toda n–upla $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

- O conjunto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ recebe o nome de conjunto-universo (universo ou domínio) das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$. Já qualquer elemento $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é chamado de uma n–upla de valores das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$.

- Uma sentença aberta com n variáveis em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, também é chamada de função proposicional com n variáveis em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ (ou, função proposicional em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, ou condição em $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$).

Sentenças Abertas com N variáveis

Exemplo

- Considere o conjunto-universo $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

- A expressão: $x + 2y + 3z < 18$ é uma sentença aberta em $\mathbb{N}^3$

Sendo que, a tripla: $(1, 2, 4) \in \mathbb{N}^3$

satisfaz essa sentença aberta:

$$1 + 2(2) + 3(4) < 18$$
$$17 < 18$$

Sentenças Abertas com N variáveis

Conjunto-Verdade

- Chama-se conjunto-verdade de uma sentença aberta $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, ao conjunto de todas as n-uplas $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ tais que $p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é uma proposição verdadeira. Este conjunto pode ser denotado como V_p e definido de maneira simbólica

$$V_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \dots \wedge x_n \in A_n \wedge p(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

- Ou, de maneira simplificada:

$$V_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \mid p(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

- O conjunto-verdade V_p de uma sentença aberta $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é sempre um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$:

$$V_p \subset A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Conjunto-Verdade de Sentenças Abertas

Exemplo

- 1) Considere o conjunto-universo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto de números inteiros.

  Seja a sentença aberta: $18x - 7y + 13z = 39$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$

  O conjunto-verdade é:

$$\begin{aligned} V_p &= \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 18x - 7y + 13z = 39\} \\ &= \{(1, -3, 0), (4, 1, -2), (3, 4, 1), (6, 8, -1), \dots\} \end{aligned}$$

- Observação: As equações e inequações são casos particulares de sentenças abertas que expressam uma relação de igualdade ou desigualdade entre duas expressões com várias variáveis.
- Resolver uma equação ou inequação, em um dado conjunto-universo, é determinar o seu conjunto-verdade (ou conjunto solução).

Sentenças Abertas

Observação

✘ O conceito de sentença aberta é muito mais amplo que o de equação ou inequação. Temos por exemplo:

$$x \text{ divide } y, \quad \text{para todo } (x,y) \in A \times B$$

$$x \text{ é primo com } y, \quad \text{para todo } (x,y) \in A \times B$$

$$x \text{ é filho de } y, \quad \text{para todo } (x,y) \in A \times B$$

Referências

- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 14. Sentenças Abertas. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.