

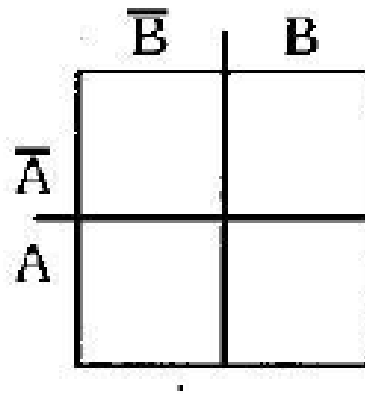
Aula 06

Aula 06: Simplificação de Expressões Booleanas através dos Diagramas de Veitch-Karnaugh

- Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2, 3, 4 e 5 variáveis.
- Diagramas com Condições Irrelevantes
- Casos que não Admitem Simplificação
- Agrupamentos de Zeros
- Outra Forma de Apresentação do Diagrama de Veitch-Karnaugh

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

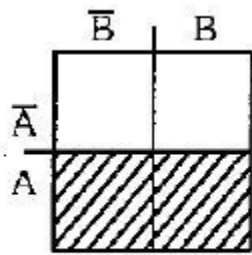
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis



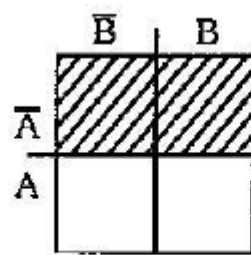
Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis

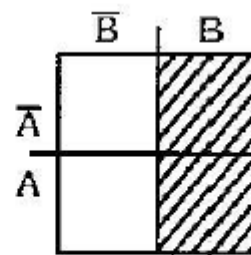
- Todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A e B:



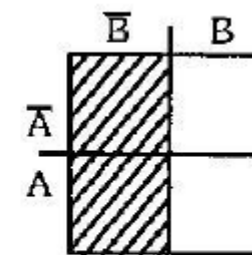
(a)



(b)



(c)



(d)

(a) região onde $A = 1$.

(b) região onde $A = 0$ ($\bar{A} = 1$).

(c) região onde $B = 1$.

(d) região onde $B = 0$ ($\bar{B} = 1$).

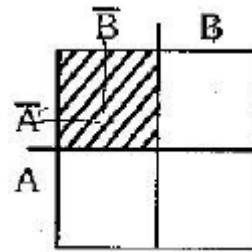
Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis

- Podemos obter 4 possibilidades

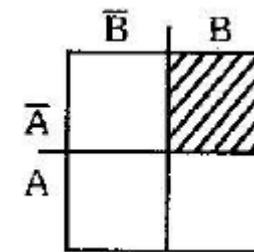
A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

→ caso 0
→ caso 1
→ caso 2
→ caso 3



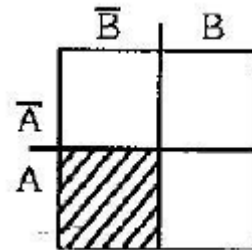
Caso 0:

$A=0$ e $B=0$
 $\overline{A}\overline{B}$



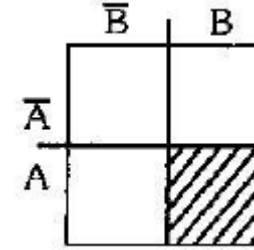
Caso 1:

$A=0$ e $B=1$
 $\overline{A}B$



Caso 2:

$A=1$ e $B=0$
 $A\overline{B}$



Caso 3:

$A=1$ e $B=1$
 AB

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis

- Podemos obter 4 possibilidades

	\overline{B}	B
\overline{A}	Caso 0 $\overline{A} \overline{B}$ 0 0	Caso 1 $\overline{A} B$ 0 1
A	Caso 2 $A \overline{B}$ 1 0	Caso 3 $A B$ 1 1

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

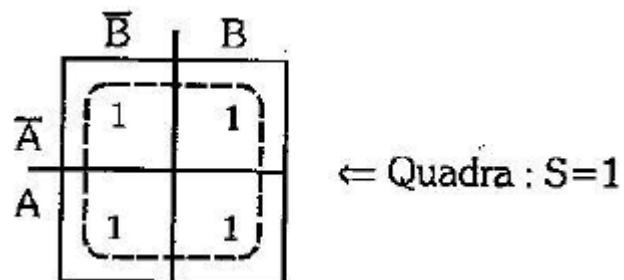
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis

Para obter a expressão simplificada do diagrama utiliza-se o seguinte método:

- Tentamos agrupar as regiões onde S é igual a 1, no menor número possível de agrupamentos. As regiões onde S é 1, que não puderam ser agrupadas, serão consideradas isoladamente.

- Agrupamentos de S possíveis:

a) Quadra



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

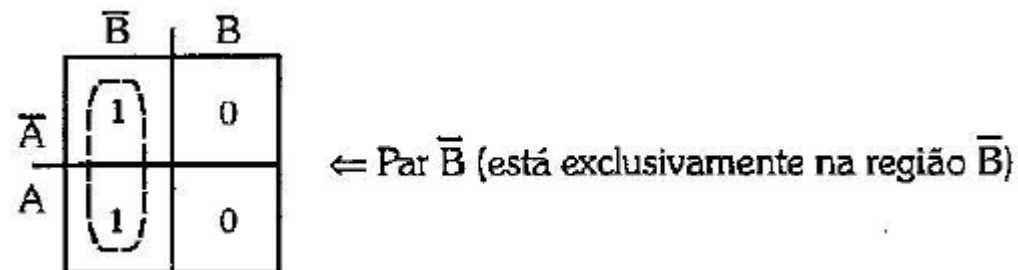
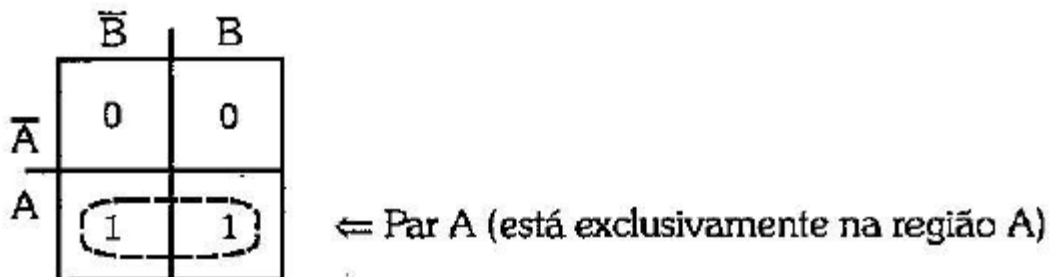
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis

Para obter a expressão simplificada do diagrama utiliza-se o seguinte método:

- Tentamos agrupar as regiões onde S é igual a 1, no menor número possível de agrupamentos. As regiões onde S é 1, que não puderam ser agrupadas, serão consideradas isoladamente.

- Agrupamentos de S possíveis:

b) Pares



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis

Para obter a expressão simplificada do diagrama utiliza-se o seguinte método:

- Tentamos agrupar as regiões onde S é igual a 1, no menor número possível de agrupamentos. As regiões onde S é 1, que não puderam ser agrupadas, serão consideradas isoladamente.

- Agrupamentos de S possíveis:

c) Termos isolados

	\bar{B}	B	
\bar{A}	0	①	\leftarrow Termo $\bar{A}B$
A	①	0	\leftarrow Termo $A\bar{B}$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis

○ Exemplo:

A	B	S	
0	0	0	→ caso 0
0	1	1	→ caso 1
1	0	1	→ caso 2
1	1	1	→ caso 3

$$S = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis

Exemplo:

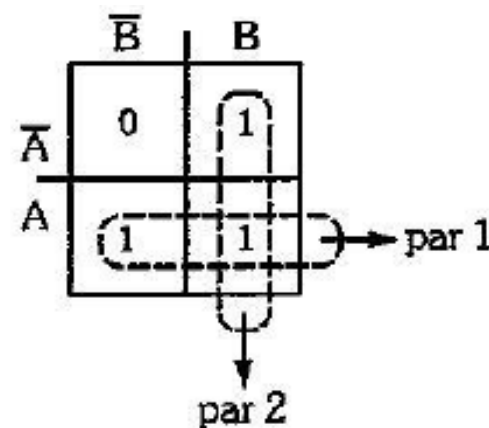
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

→ caso 0
→ caso 1
→ caso 2
→ caso 3

$$S = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

O par 1 ocupa a região onde A é igual a 1, então, sua expressão será: Par 1 = A.

O par 2 ocupa a região onde B é igual a 1, então, sua expressão será: Par 2 = B.



$$S = \text{Par 1} + \text{Par 2} \quad \therefore \quad S = A + B$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis

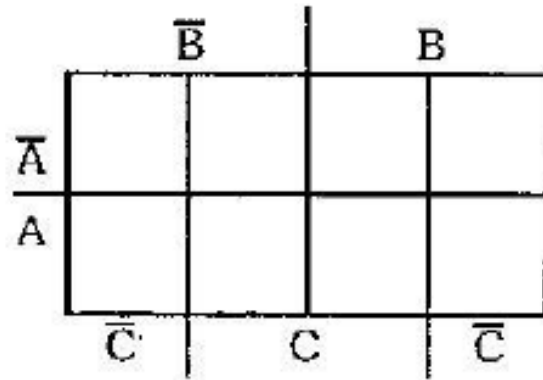
Exercício:

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$S = \overline{A} \overline{B} + \overline{A} B + A \overline{B}$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

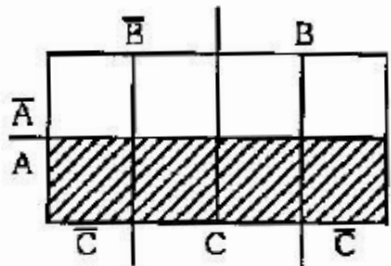
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis



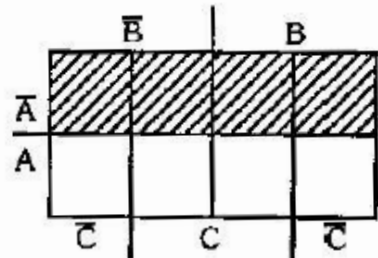
Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

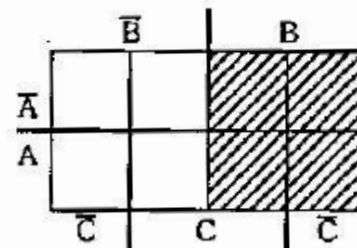
- Todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A, B e C:



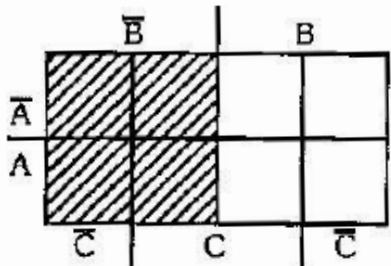
(a)



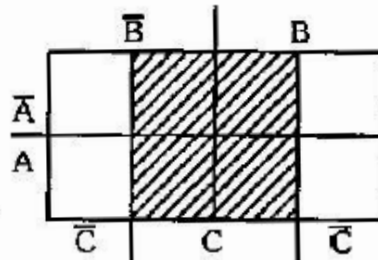
(b)



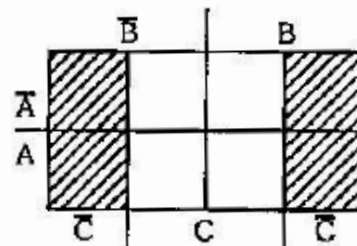
(c)



(d)



(e)



(f)

(a) Região na qual $A = 1$.

(b) Região na qual $\bar{A} = 1$ ($A = 0$).

(c) Região na qual $B = 1$.

(d) Região na qual $\bar{B} = 1$ ($B = 0$).

(e) Região na qual $C = 1$.

(f) Região na qual $\bar{C} = 1$ ($C = 0$).

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

- Região para cada caso da tabela:

Caso	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

	\overline{B}		B	
\overline{A}	Caso 0 0 0 0 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	Caso 1 0 0 1 $\overline{A}\overline{B}C$	Caso 3 0 1 1 $\overline{A}B C$	Caso 2 0 1 0 $\overline{A}B\overline{C}$
	\overline{C}	C	C	\overline{C}
A	Caso 4 1 0 0 $A\overline{B}\overline{C}$	Caso 5 1 0 1 $A\overline{B}C$	Caso 7 1 1 1 ABC	Caso 6 1 1 0 $AB\overline{C}$
	\overline{C}	C	C	\overline{C}

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

- Região para cada caso da tabela:

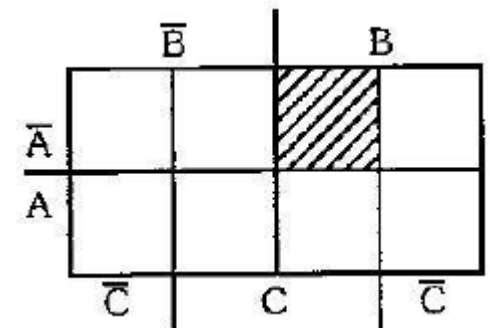
Caso	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

	\bar{B}	B
\bar{A}	Caso 0 0 0 0 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	Caso 1 0 0 1 $\bar{A}\bar{B}C$
A	Caso 4 1 0 0 $A\bar{B}\bar{C}$	Caso 5 1 0 1 $A\bar{B}C$
	\bar{C}	C

Caso 3:

$A=0$ ($\bar{A}=1$) $B=1$ $C=1$

$\bar{A}BC$

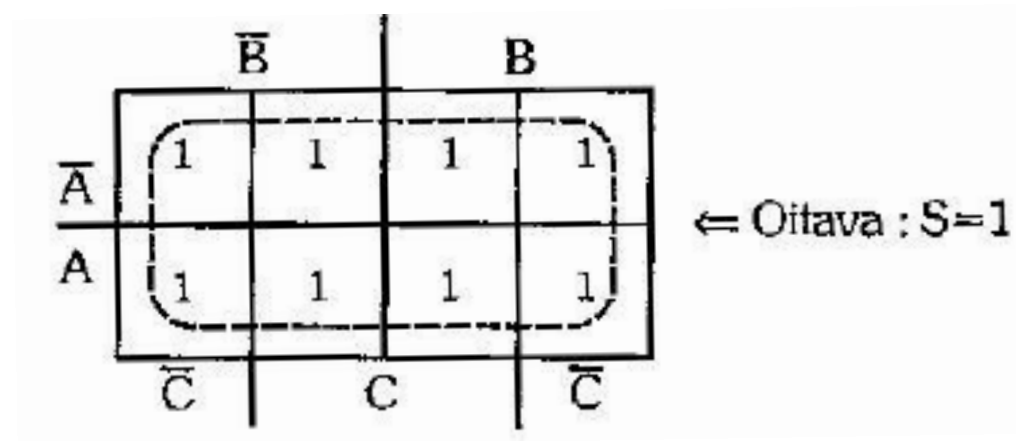


Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

- Agrupamentos possíveis:

a) Oitava



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

- Agrupamentos possíveis:

b) Quadras

	\bar{B}		B
\bar{A}	1	1	1
A	0	0	0
	\bar{C}	C	\bar{C}

(a)

	\bar{B}		B
\bar{A}	1	1	0
A	1	1	0
	\bar{C}	C	\bar{C}

(b)

	\bar{B}		B
\bar{A}	1	0	0
A	1	0	0
	\bar{C}	C	\bar{C}

(c)

(a) Quadra \bar{A} .

(b) Quadra \bar{B} .

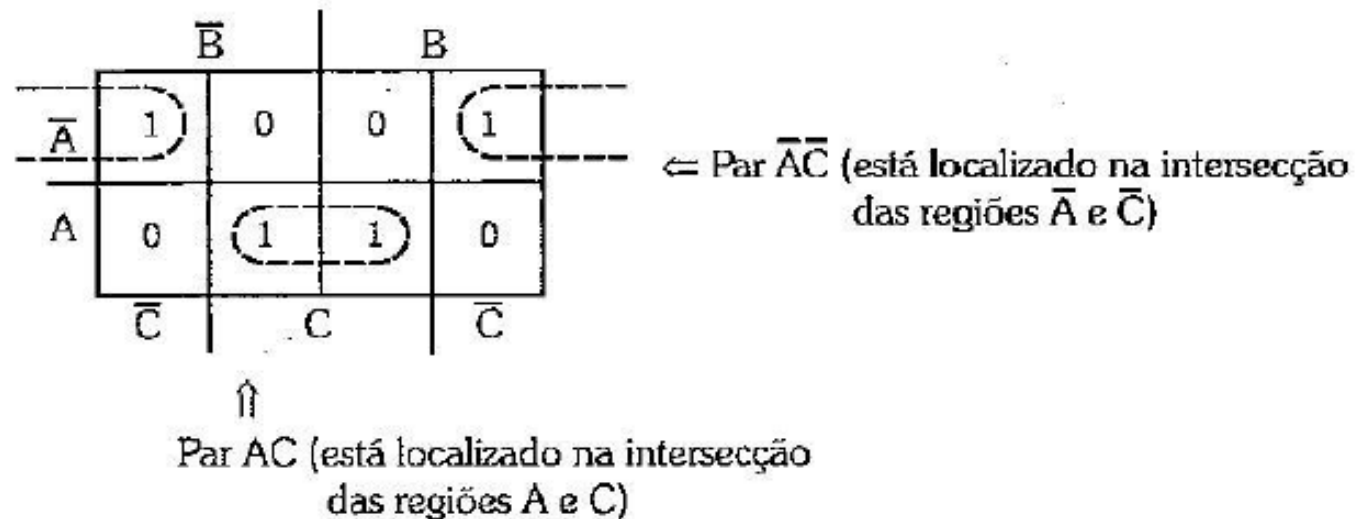
(c) Quadra \bar{C} .

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

- Agrupamentos possíveis:

c) Pares

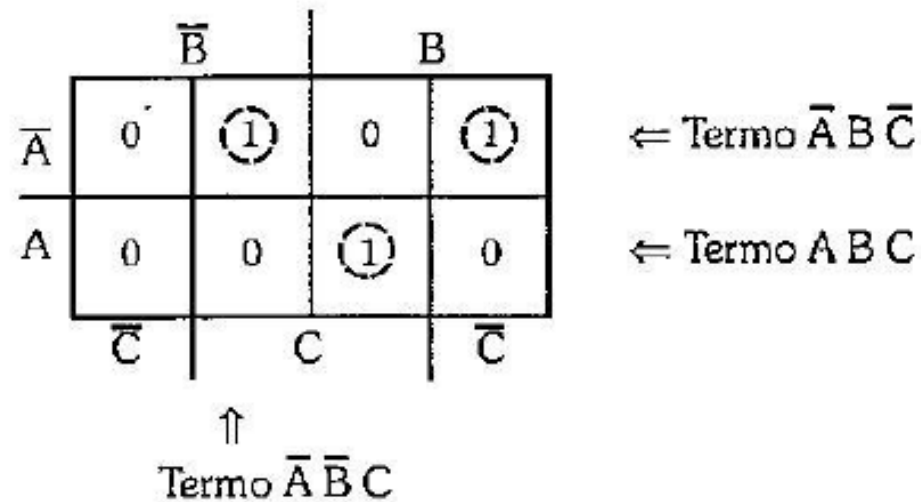


Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

- Agrupamentos possíveis:

d) Termos isolados



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

○ Exemplo:

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

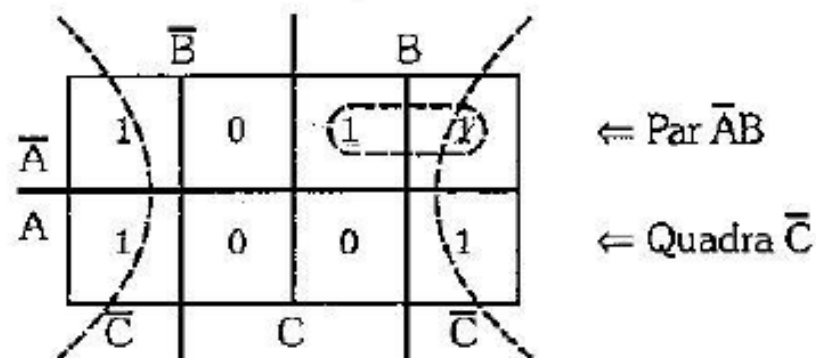
$$S = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

- Exemplo:

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



$$S = \overline{A}B + \overline{C}.$$

$$S = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

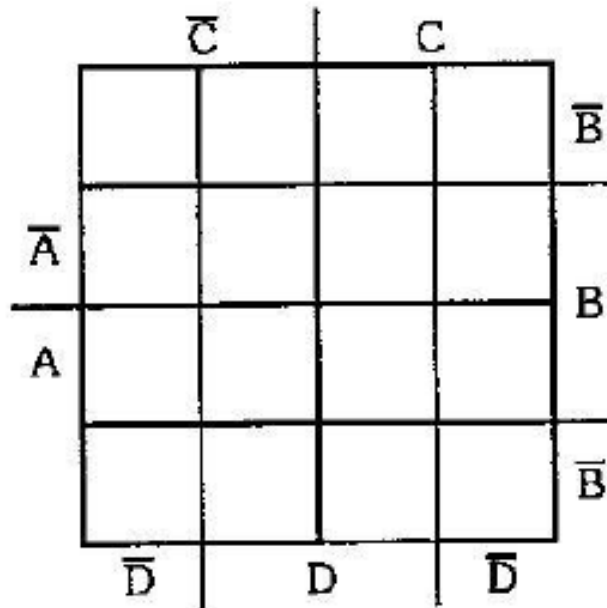
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 3 variáveis

Exercício:

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

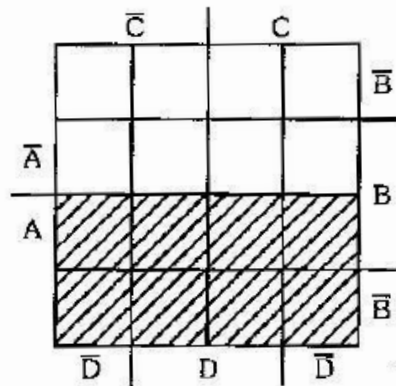
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis



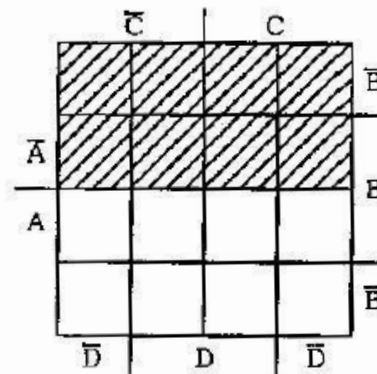
Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

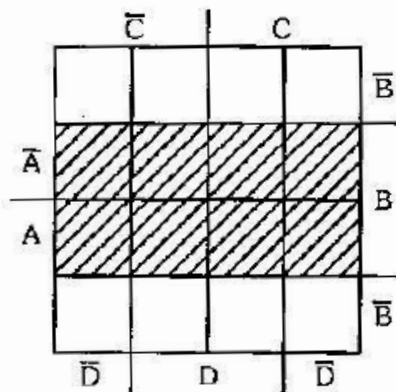
- Todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A, B, C e D:



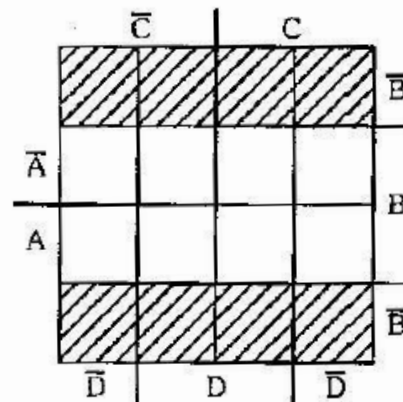
(a) Região onde $A = 1$.



(b) Região onde $\bar{A} = 1$ ($A = 0$).



(c) Região onde $B = 1$.

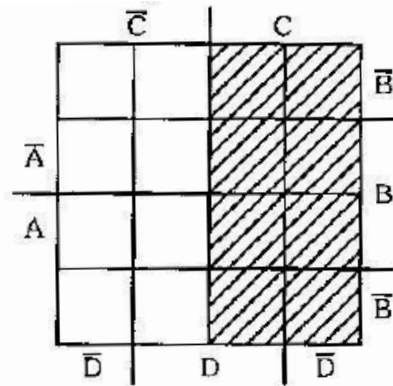


(d) Região onde $\bar{B} = 1$ ($B = 0$).

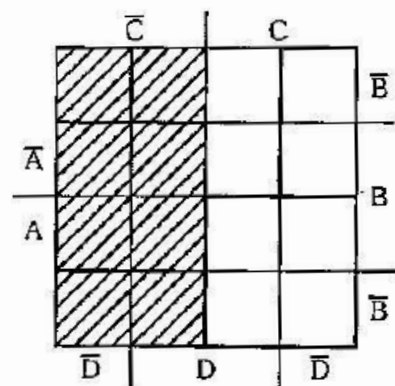
Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

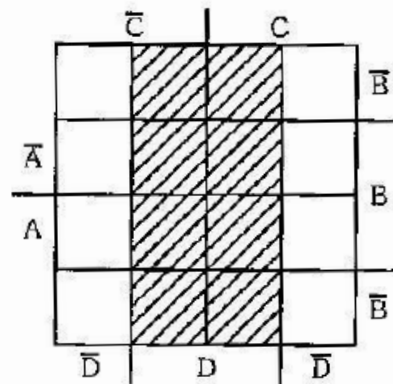
- Todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A, B, C e D:



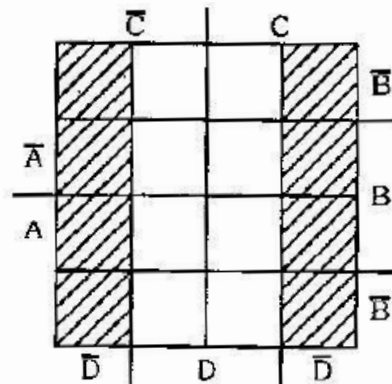
(e) Região onde $C = 1$.



(f) Região onde $\bar{C} = 1$ ($C = 0$).



(g) Região onde $D = 1$.



(h) Região onde $\bar{D} = 1$ ($D = 0$).

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

- Região para cada caso da tabela:

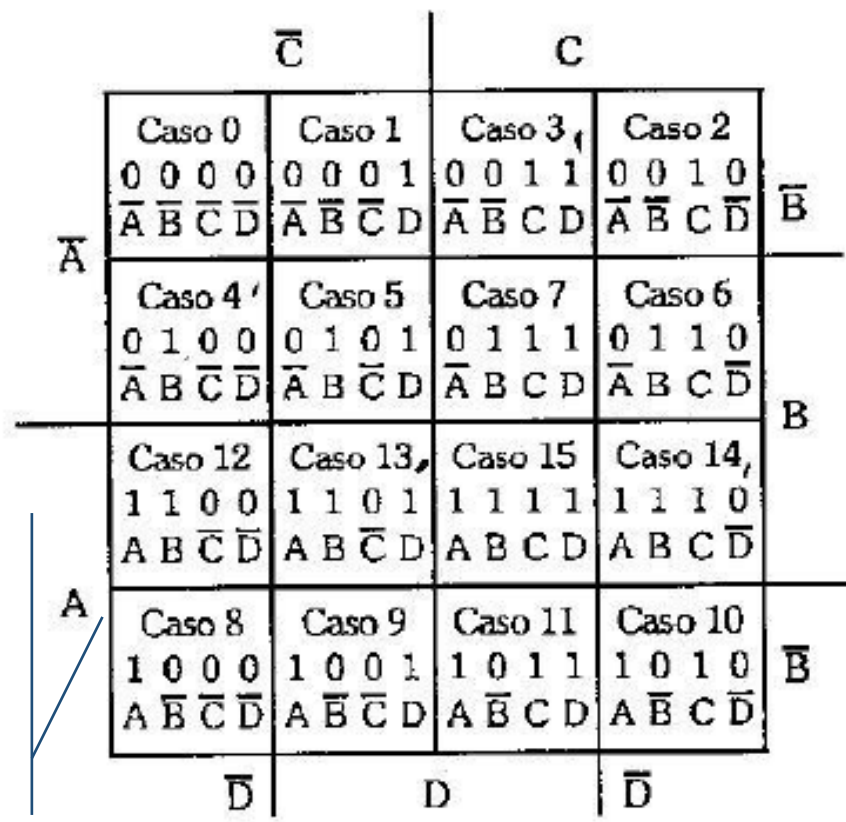
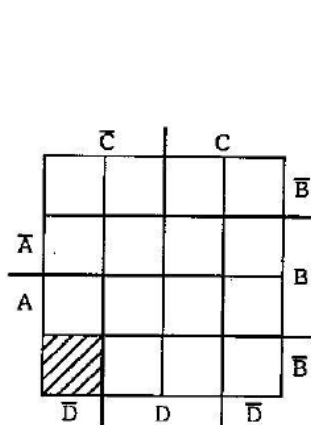
\bar{C}		C		
Caso 0 0 0 0 0 $\bar{A} \bar{B} \bar{C} \bar{D}$	Caso 1 0 0 0 1 $\bar{A} \bar{B} \bar{C} D$	Caso 3 0 0 1 1 $\bar{A} \bar{B} C D$	Caso 2 0 0 1 0 $\bar{A} \bar{B} C \bar{D}$	
Caso 4 0 1 0 0 $\bar{A} B \bar{C} \bar{D}$	Caso 5 0 1 0 1 $\bar{A} B \bar{C} D$	Caso 7 0 1 1 1 $\bar{A} B C D$	Caso 6 0 1 1 0 $\bar{A} B C \bar{D}$	\bar{B}
Caso 12 1 1 0 0 $A B \bar{C} \bar{D}$	Caso 13 1 1 0 1 $A B \bar{C} D$	Caso 15 1 1 1 1 $A B C D$	Caso 14 1 1 1 0 $A B C \bar{D}$	B
Caso 8 1 0 0 0 $A \bar{B} \bar{C} \bar{D}$	Caso 9 1 0 0 1 $A \bar{B} \bar{C} D$	Caso 11 1 0 1 1 $A \bar{B} C D$	Caso 10 1 0 1 0 $A \bar{B} C \bar{D}$	\bar{B}
\bar{D}	D	\bar{D}	D	

Casos	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

- Região para cada caso da tabela:



Casos	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Caso 8:
A=0 B=0 ($\bar{B}=1$)
C=0 ($\bar{C}=1$) D=0 ($\bar{D}=1$)
 $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

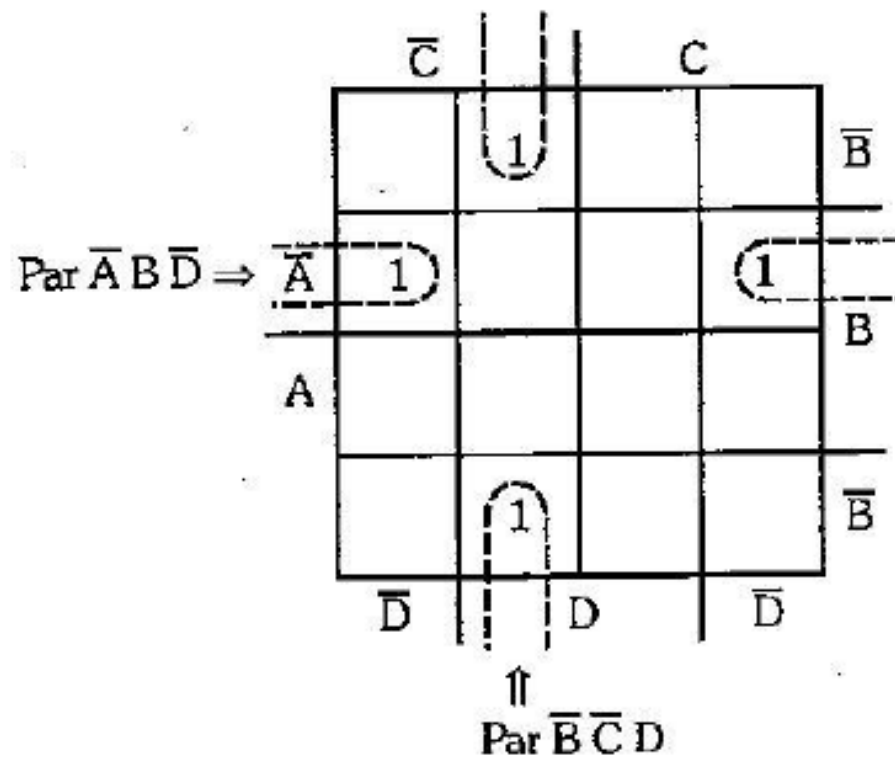
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

- Para efetuarmos a simplificação, seguimos o mesmo processo para os diagramas de 3 variáveis, somente que neste caso, o principal agrupamento será a oitava.
- Devemos ressaltar aqui, que no diagrama, os lados extremos opostos se comunicam, ou seja, podemos formar oitavas, quadras e pares com os termos localizados nos extremos opostos.

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

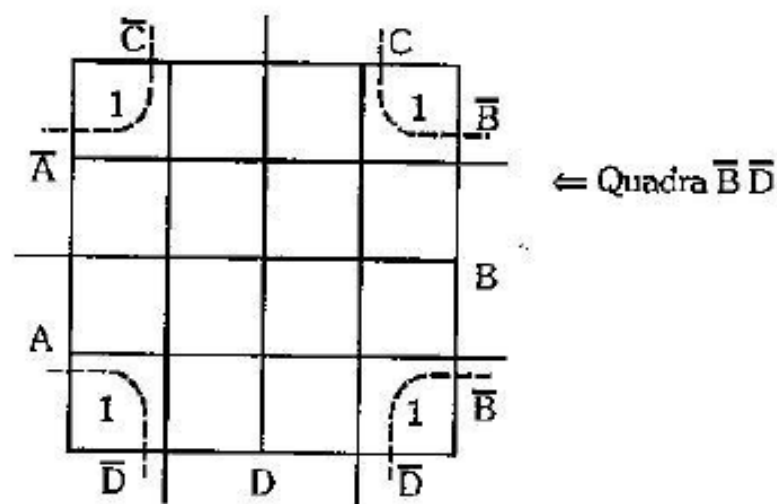
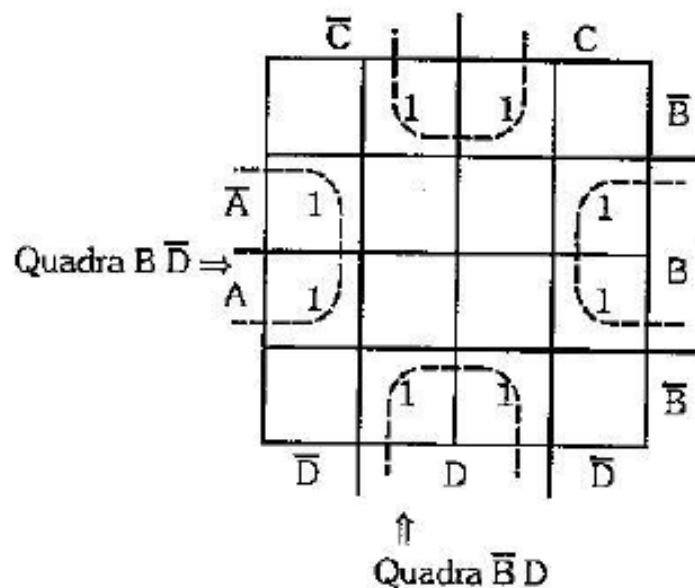
a) Exemplos de pares



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

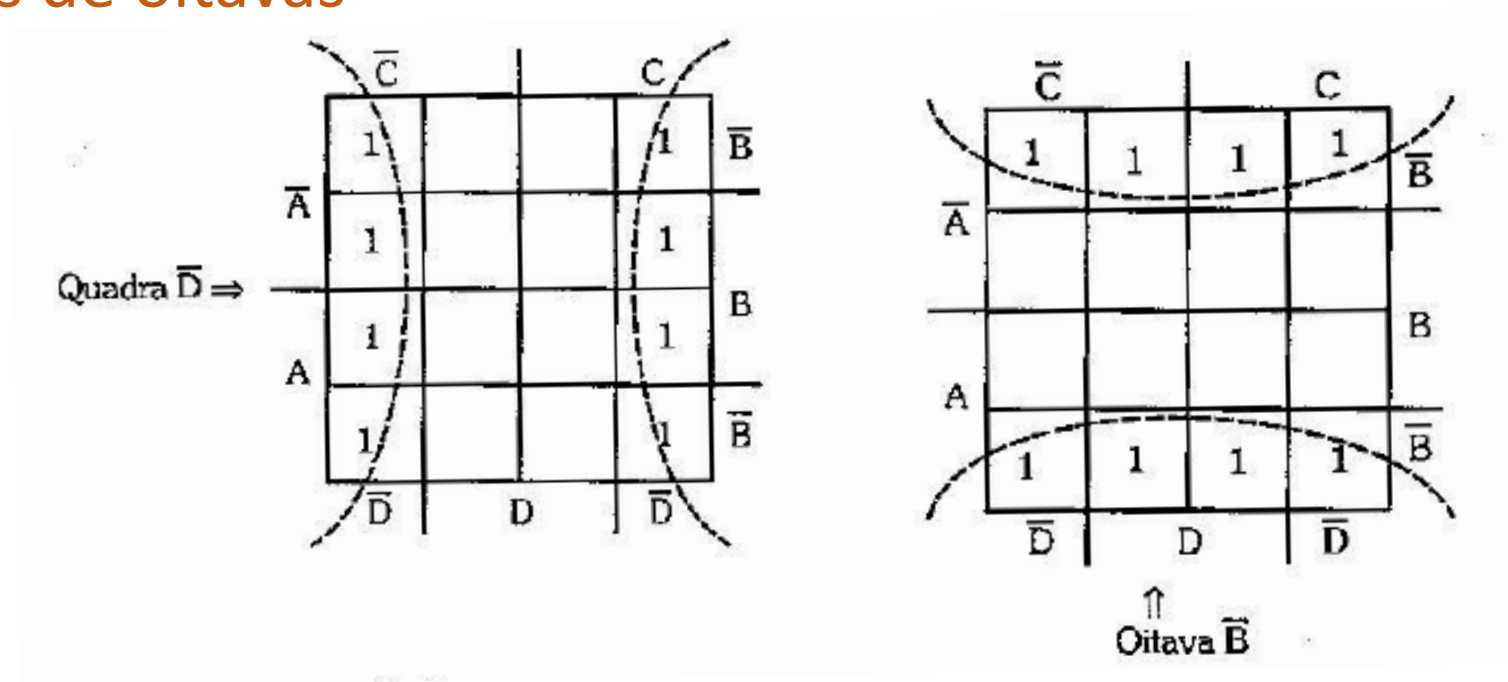
b) Exemplos de quadras



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

b) Exemplos de oitavas



Convém observar que, neste mapa, as oitavas representam as próprias regiões A, \bar{A} , B, \bar{B} , C, \bar{C} , D e \bar{D} e que o agrupamento máximo (mapa totalmente preenchido com 1) constitui-se uma hexa, ou seja, agrupamento com 16 regiões valendo 1.

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

- Exemplo: $S = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D} + ABC\overline{D} + ABCD$

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

- Exemplo: $S = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D$

	\bar{C}	C	
\bar{B}	0	1	1
B	0	1	0
\bar{B}	1	1	0
B	1	1	0
	\bar{D}	D	\bar{D}

	\bar{C}	C	
\bar{B}	0	1	1
B	0	1	0
\bar{B}	1	1	0
B	1	1	0
	\bar{D}	D	\bar{D}

quadra

oitava

par

oitava: D

quadra: $A\bar{C}$

par: $\bar{A}\bar{B}C$

$$S = D + A\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$$

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

○ Exemplo:

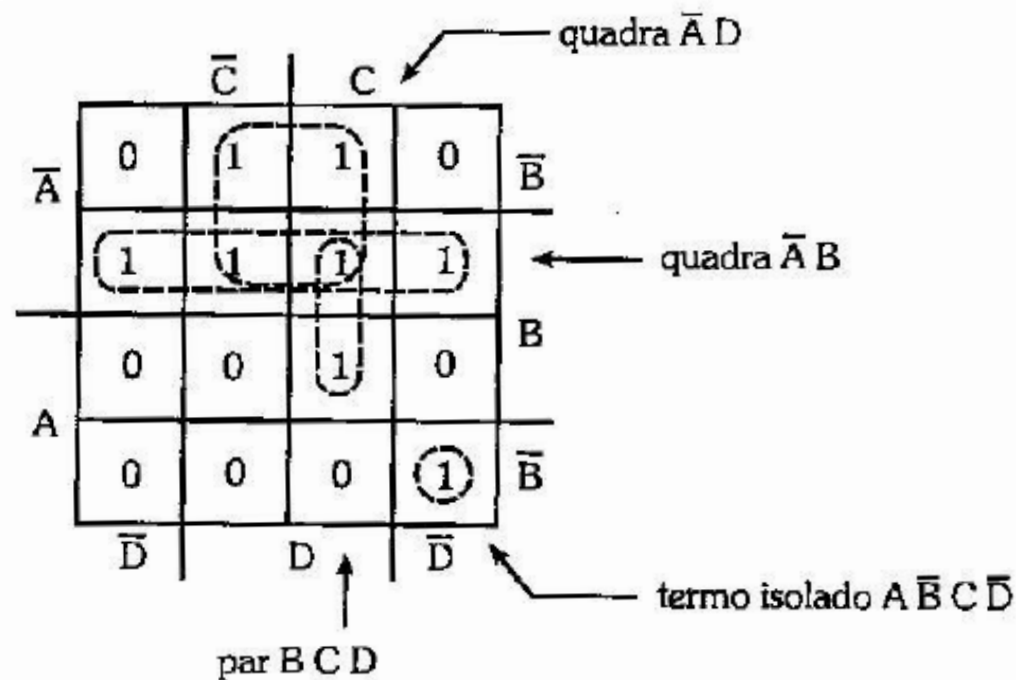
A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

○ Exemplo:

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



$$S = A \bar{B} C \bar{D} + B C D + \bar{A} B + \bar{A} D$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

Exercício:

1. Simplifique as expressões obtidas das tabelas verdade a seguir utilizando os diagramas de Veitch-Karnaugh:

a)

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

b)

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

Exercício:

1. Simplifique as expressões obtidas das tabelas verdade a seguir utilizando os diagramas de Veitch-Karnaugh:

c)

A	B	C	D	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

d)

A	B	C	D	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 variáveis

Exercício:

2. Minimize as expressões a seguir, utilizando os diagramas de Veitch-Karnaugh:

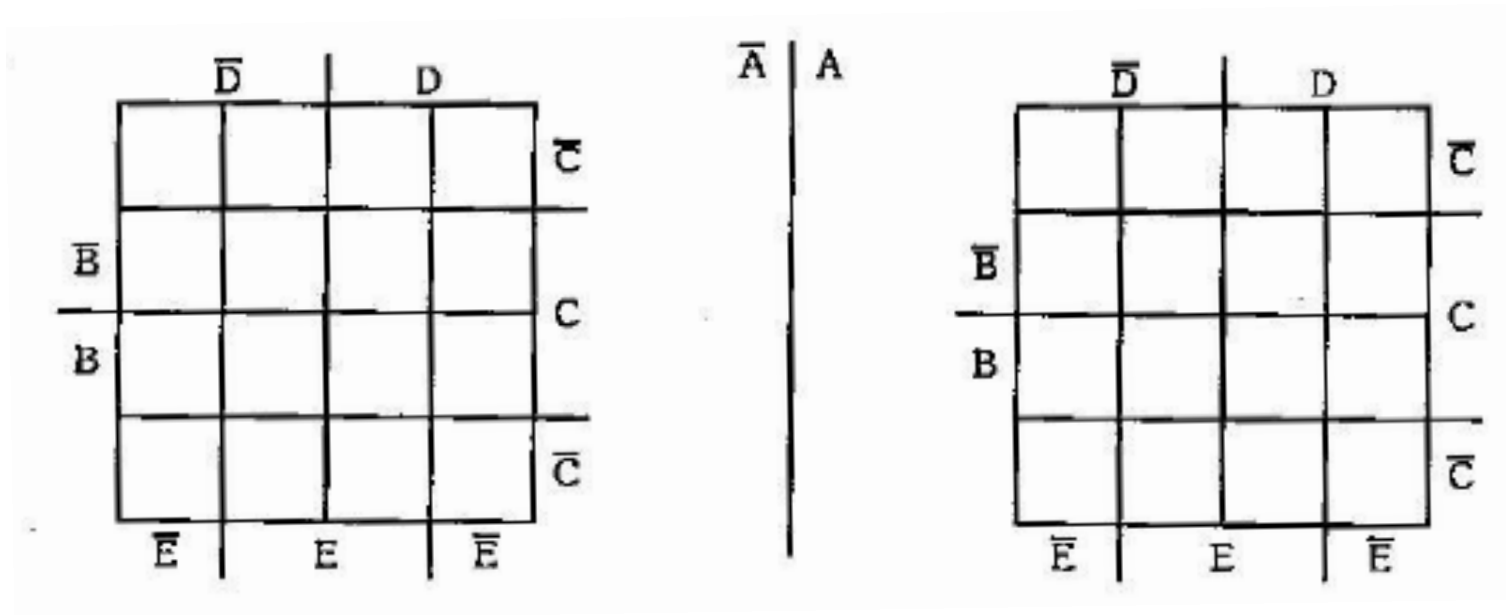
a) $S = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$

b) $S = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + ABCD$

c) $S = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}CD + ABC\overline{D} + ABCD + ABC\overline{D} + ABCD$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

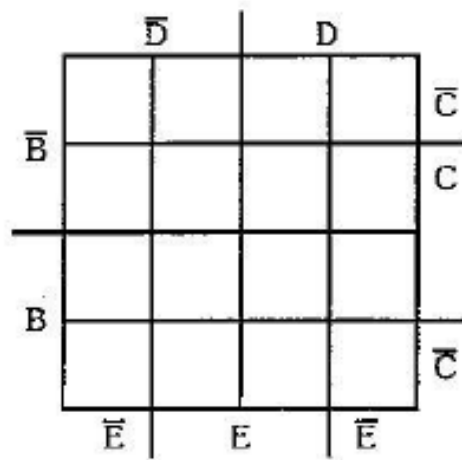


Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

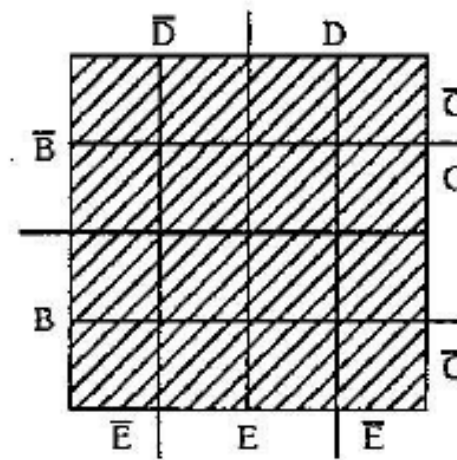
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

- Regiões do diagrama:

a) Região onde $A = 1$:



\bar{A} | A

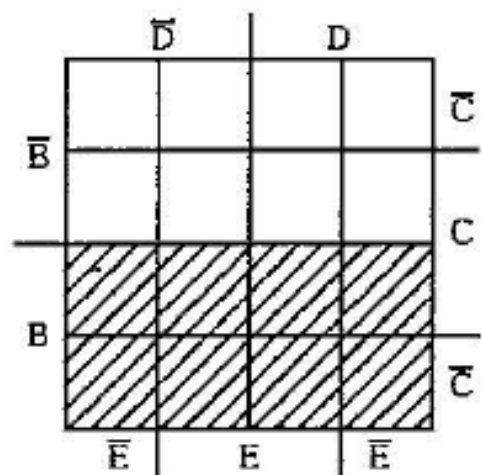


Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

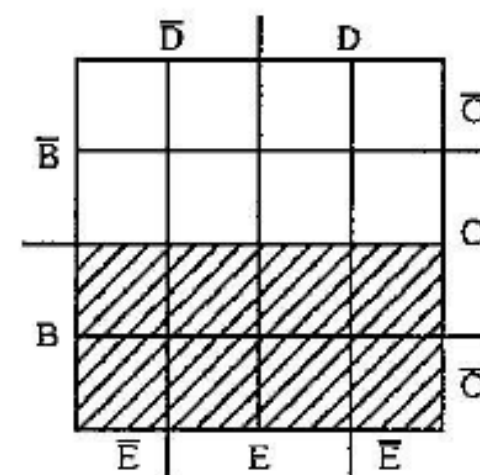
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

- Regiões do diagrama:

b) Região onde $B = 1$:



\bar{A} | A

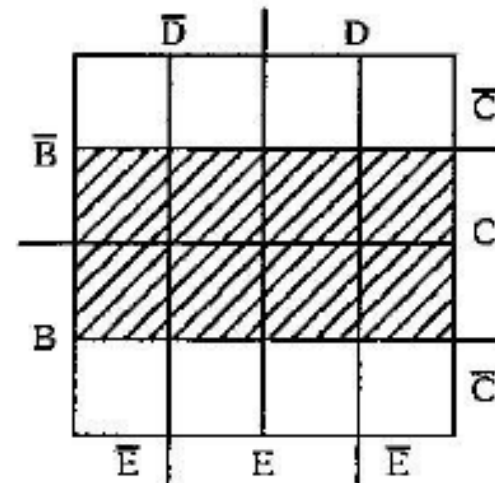
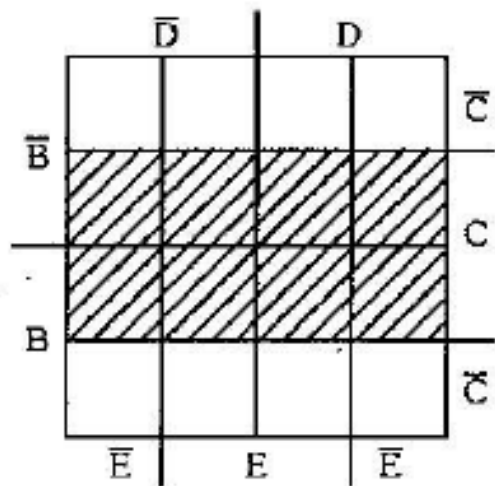


Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

- Regiões do diagrama:

c) Região onde $C = 1$:

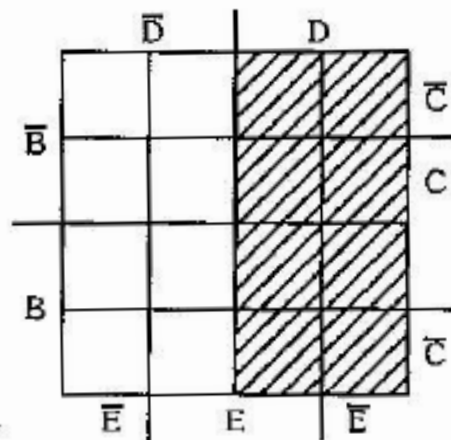


Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

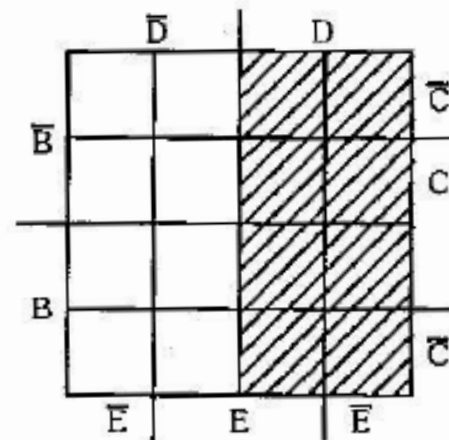
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

- Regiões do diagrama:

d) Região onde $D = 1$:



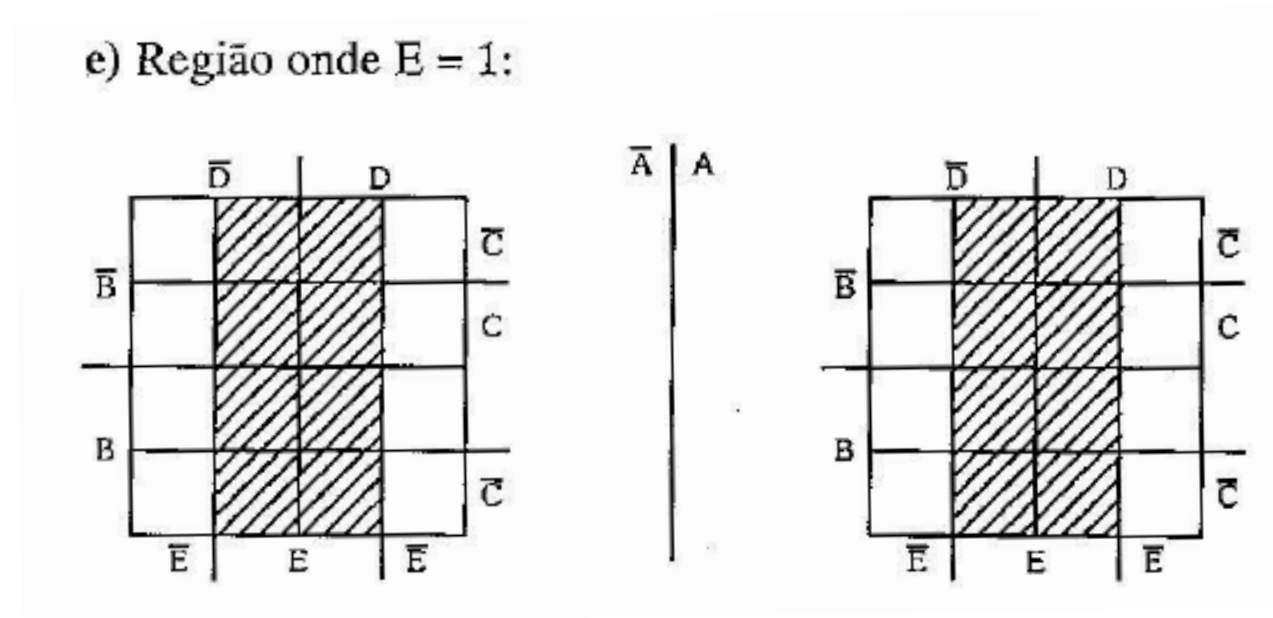
\bar{A} | A



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

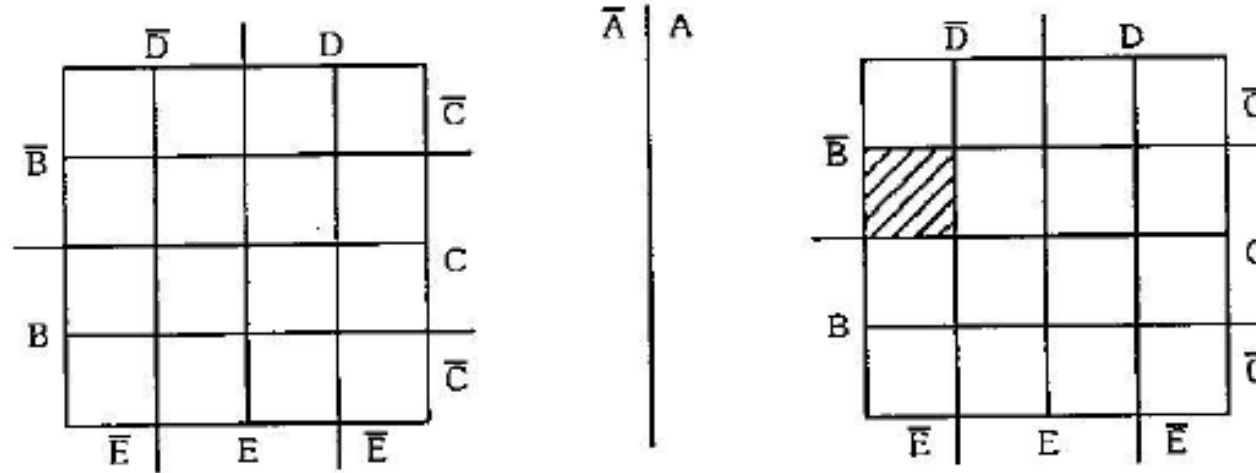
- Regiões do diagrama:



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

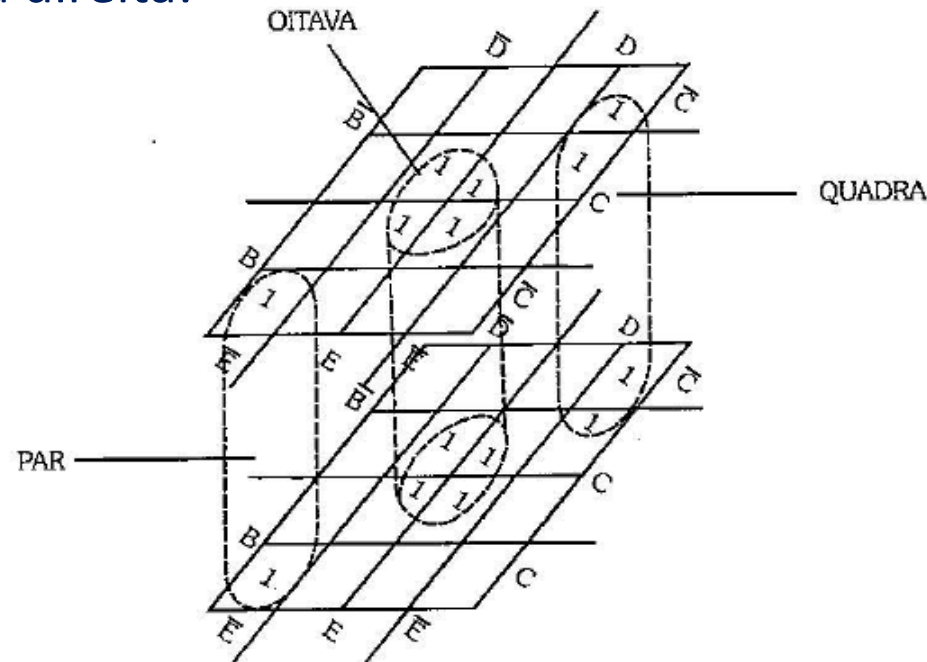
- Regiões onde: $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=0$ e $E=0$, ou seja, $A \bar{B} C \bar{D} \bar{E}$



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

- Para efetuarmos a simplificação num diagrama de 5 variáveis, devemos tentar primeiramente em hexas, em seguida em oitavas, em quadras, em pares e por último em termos isolados.
- Para visualizarmos melhor as hexas, oitavas, quadras e pares, devemos enxergar o diagrama da esquerda sobreposto ao da direita:



Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

Exemplo

A	B	C	D	E	S
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

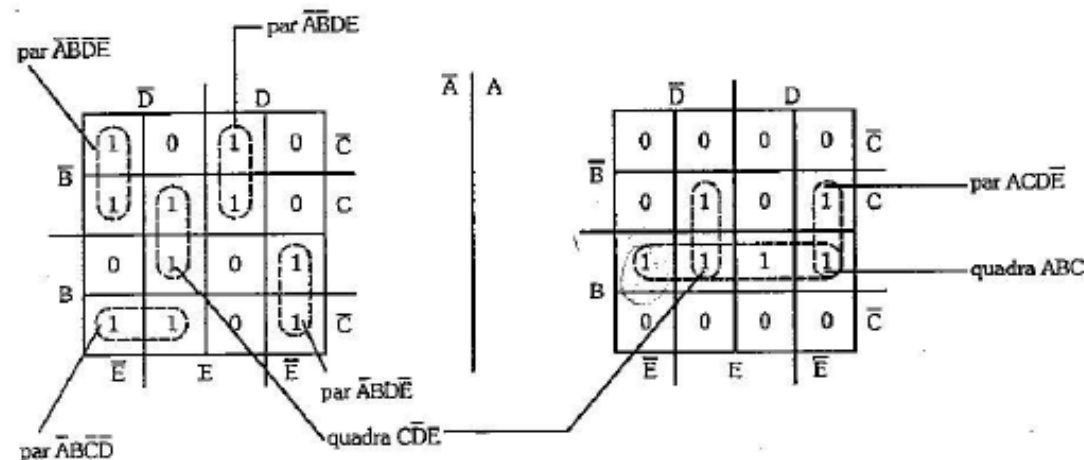
Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

Exemplo

A	B	C	D	E	S
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Transpondo para o diagrama, temos:



Resumindo os agrupamentos obtidos, temos:

2 quadras: $\begin{cases} C\bar{D}E \\ ABC \end{cases}$

5 pares: $\begin{cases} \bar{A}\bar{B}\bar{D}\bar{E} \\ \bar{A}B\bar{C}\bar{D} \\ \bar{A}B\bar{D}\bar{E} \\ \bar{A}\bar{B}DE \\ AC\bar{D}\bar{E} \end{cases}$

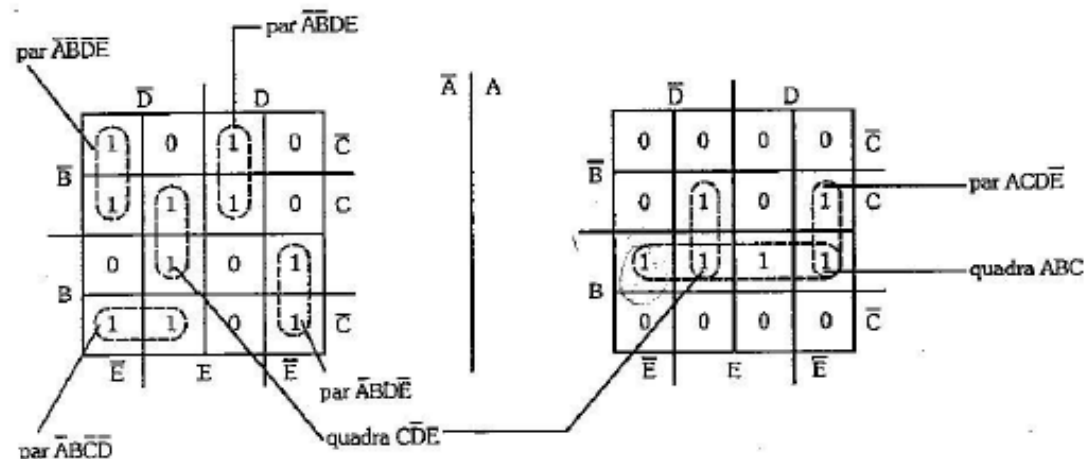
Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

Exemplo

A	B	C	D	E	S
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Transpondo para o diagrama, temos:



Resumindo os agrupamentos obtidos, temos:

2 quadras: $\begin{cases} C\bar{D}\bar{E} \\ ABC \end{cases}$

A expressão minimizada será:

5 pares: $\begin{cases} \bar{A}\bar{B}\bar{D}\bar{E} \\ \bar{A}B\bar{C}\bar{D} \\ \bar{A}B\bar{D}\bar{E} \\ \bar{A}BDE \\ AC\bar{D}\bar{E} \end{cases}$

$$S = C\bar{D}\bar{E} + ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{D}\bar{E} + \bar{A}BDE + AC\bar{D}\bar{E}$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 5 variáveis

Exercício

A	B	C	D	E	S
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagramas com Condições Irrelevantes

- Chamamos de condição irrelevante (X) a situação de entrada onde a saída pode assumir 0 ou 1 indiferentemente. Essa condição ocorre principalmente pela impossibilidade prática do caso de entrada acontecer.

A	B	C	S
0	0	0	X
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagramas com Condições Irrelevantes

- Chamamos de condição irrelevante (X) a situação de entrada onde a saída pode assumir 0 ou 1 indiferentemente. Essa condição ocorre principalmente pela impossibilidade prática do caso de entrada acontecer.
- Para sua utilização em diagramas de Karnaugh, devemos, para cada condição irrelevante, adotar 0 ou 1, dos dois, aquele que possibilitar melhor agrupamento e consequentemente maior simplificação:

A	B	C	S
0	0	0	X
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

		\bar{B}	B	
\bar{A}	X	1	1	1
A	0	0	0	0
	\bar{C}	C	\bar{C}	C

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagramas com Condições Irrelevantes

Exemplo

A	B	C	D	S
0	0	0	0	X
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	X
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	X
1	1	1	0	0
1	1	1	1	X

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagramas com Condições Irrelevantes

Exemplo

A	B	C	D	S
0	0	0	0	X
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	X
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	X
1	1	1	0	0
1	1	1	1	X

\bar{C}		C		\bar{B}
\bar{A}	X	0	X	1
A	1	0	1	1
	0	X	X	0
\bar{D}	0	1	0	X
		D		\bar{D}

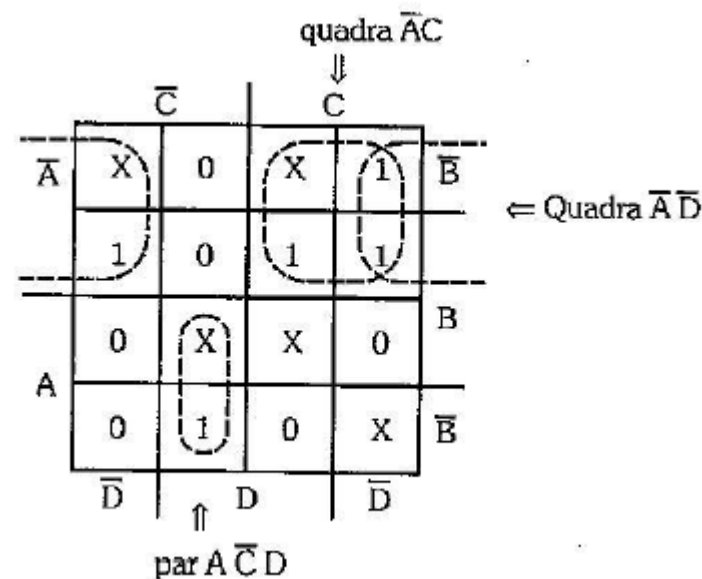
Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagramas com Condições Irrelevantes

Exemplo

A	B	C	D	S
0	0	0	0	X
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	X
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	X
1	1	1	0	0
1	1	1	1	X

	\bar{C}	C	
\bar{A}	X 0	X 1	\bar{B}
	1 0	1 1	
A	0 X	X 0	B
	0 1	0 X	\bar{B}
	\bar{D}	D	\bar{D}



$$S = \bar{A}C + \bar{A}\bar{D} + A\bar{C}D.$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Diagramas com Condições Irrelevantes

Exercícios

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	X
1	0	1	1
1	1	0	X
1	1	1	X

A	B	C	D	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	X
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	X
1	0	1	1	1
1	1	0	0	X
1	1	0	1	1
1	1	1	0	X
1	1	1	1	0

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Casos que não Admitem Simplificação

OU Exclusivo e Coincidência

	\bar{B}	B
\bar{A}	0	1
A	1	0

(a)

	\bar{B}	B
\bar{A}	1	0
A	0	1

(b)

(a) $S = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$

(b) $S = A \odot B = \bar{A}\bar{B} + AB$

As expressões se encontram na forma de **máxima** simplificação!

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Casos que não Admitem Simplificação

OU Exclusivo e Coincidência

	\bar{B}	B
\bar{A}	0	1
A	1	0

(a)

	\bar{B}	B
\bar{A}	1	0
A	0	1

(b)

(a) $S = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$

(b) $S = A \odot B = \bar{A}\bar{B} + AB$

As expressões se encontram na forma de **máxima** simplificação!

Caso de 3 variáveis:

$$S = A \oplus B \oplus C \text{ e } S = A \odot B \odot C.$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Casos que não Admitem Simplificação

OU Exclusivo e Coincidência

Para levantarmos suas tabelas verdade, devemos tomar as variáveis de 2 em 2, ou seja, efetuar primeiro as operações entre 2 das variáveis e com o resultado obtido efetuar a operação com a terceira variável.

A	B	C	$(A \oplus B) \oplus C$	$A \oplus (B \oplus C)$	$(A \oplus C) \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

A	B	C	$(A \odot B) \odot C$	$A \odot (B \odot C)$	$(A \odot C) \odot B$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Casos que não Admitem Simplificação

OU Exclusivo e Coincidência

	\overline{B}		B	
\overline{A}	0	1	0	1
A	1	0	1	0
	\overline{C}	C	\overline{C}	C

Extraíndo a expressão da tabela inicial ou do diagrama, temos:

$$S = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC.$$

Evidenciando \overline{A} e A , temos:

$$S = \overline{A}(\overline{B}C + B\overline{C}) + A(\overline{B}\overline{C} + BC)$$

Substituindo-se os parênteses respectivamente por: $B \oplus C$ e $B \odot C$, temos:

$$S = \overline{A}(B \oplus C) + A(B \odot C)$$

Como $B \odot C = \overline{B \oplus C}$, reescrevemos:

$$S = \overline{A}(B \oplus C) + A(\overline{B \oplus C})$$

Chamando $(B \oplus C)$ de X , temos:

$$S = \overline{A}X + A\overline{X} = A \oplus X$$

Substituindo X , temos:

$$S = A \oplus B \oplus C$$

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Agrupamentos Zeros

- Podemos, alternativamente, agrupar as células que valem 0 para obtermos a expressão simplificada em diagramas de Karnaugh, porém obtemos o complemento da função, ou seja, a saída \bar{S} .

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	\bar{B}	B	
\bar{A}	0	1	1
A	1	1	1
	\bar{C}	C	\bar{C}

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Agrupamentos Zeros

- Podemos, alternativamente, agrupar as células que valem 0 para obtermos a expressão simplificada em diagramas de Karnaugh, porém obtemos o complemento da função, ou seja, a saída \bar{S} .

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	\bar{B}	B	
\bar{A}	0	1	0
A	1	1	1
	\bar{C}	C	\bar{C}

$$\bar{S} = \bar{A} \bar{C}, \text{ sendo } S = \overline{(\bar{A} \bar{C})}$$

Aplicando o teorema De Morgan a esta expressão, temos:

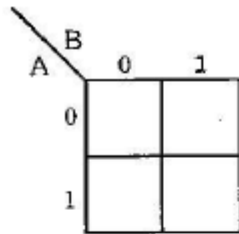
$$S = \overline{(\bar{A} \bar{C})} = A + C.$$

$$\therefore S = A + C$$

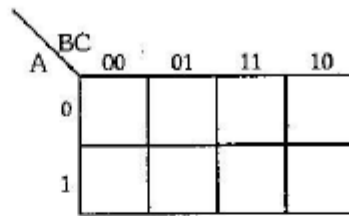
Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Outra forma de Apresentação do Diagrama de Veitch-Karnaugh

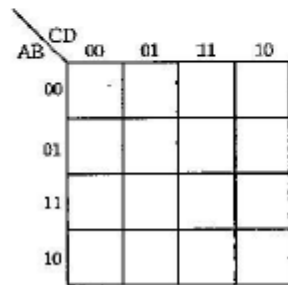
- Ao invés de representarmos o diagrama dividindo-o em regiões, como visto até aqui, podemos representá-lo de forma análoga, conforme:



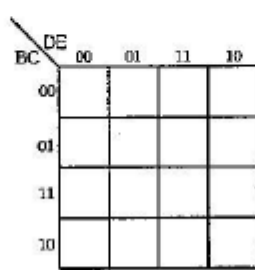
(a)



(b)



(c)



(d)



(a) 2 variáveis.

(b) 3 variáveis.

(c) 4 variáveis.

(d) 5 variáveis.

Simplificação de Expressões Booleanas: karnaugh

Outra forma de Apresentação do Diagrama de Veitch-Karnaugh

- Ao invés de representarmos o diagrama dividindo-o em regiões, como visto até aqui, podemos representá-lo de forma análoga, conforme:

