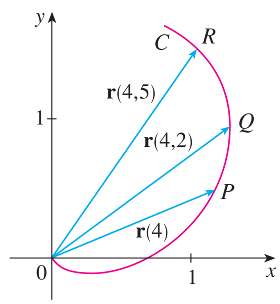
13.2 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
(a) Desenhe os vetores $\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)$ e $\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)$.
(b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)}{0{,}5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)}{0{,}2}$$

(c) Escreva a expressão para $\mathbf{r}'(4)$ e para seu vetor tangente unitário $\mathbf{T}(4)$.
(d) Desenhe o vetor $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, e desenhe os vetores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1{,}1)$ e $\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)$.
(b) Desenhe o vetor $\mathbf{r}'(1)$ começando em $(1, 1)$ e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)}{0{,}1}$$

Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção e sentido.

3–8
(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.
(b) Encontre $\mathbf{r}'(t)$.
(c) Esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1 \rangle, \quad t = -1$
4. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle, \quad t = 1$
5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + 2\cos t\, \mathbf{j}, \quad t = \pi/4$
6. $\mathbf{r}(t) = e^{t}\, \mathbf{i} + e^{-t}\, \mathbf{j}, \quad t = 0$
7. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\, \mathbf{i} + e^{t}\, \mathbf{j}, \quad t = 0$
8. $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\, \mathbf{i} + (2 + \operatorname{sen} t)\, \mathbf{j}, \quad t = \pi/6$

9–16 Determine a derivada da função vetorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t \operatorname{sen} t, t^2, t\cos 2t \rangle$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{tg} t, \sec t, 1/t^2 \rangle$
11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\, \mathbf{k}$
12. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{1+t}\mathbf{i} + \dfrac{t}{1+t}\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{1+t}\boldsymbol{k}$
13. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\, \mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\, \mathbf{k}$
14. $\mathbf{r}(t) = at\cos 3t\, \mathbf{i} + b \operatorname{sen}^3 t\, \mathbf{j} + c\cos^3 t\, \mathbf{k}$
15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\, \mathbf{b} + t^2\, \mathbf{c}$
16. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\, \mathbf{c})$

17–20 Determine o vetor tangente unitário $\mathrm{T}(t)$ no ponto com valor de parâmetro dado t.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{-t}, 2 \operatorname{arctg} t, 2e^{t} \rangle, \quad t = 0$
18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4 \rangle, \quad t = 1$
19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\, \mathbf{i} + 3t\, \mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} 2t\, \mathbf{k}, \quad t = 0$
20. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2 t\, \mathbf{i} + \cos^2 t\, \mathbf{j} + \operatorname{tg}^2 t\, \mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

21. Se $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, encontre $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.
22. Se $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$, encontre $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ e $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23–26 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

23. $x = 1 + 2\sqrt{t}, \quad y = t^3 - t, \quad z = t^3 + t; \quad (3, 0, 2)$
24. $x = e^{t}, \quad y = te^{t}, \quad z = te^{t^2}; \quad (1, 0, 0)$
25. $x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t} \operatorname{sen} t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$
26. $x = \sqrt{t^2 + 3}; \quad y = \ln(t^2 + 3); \quad z = t; \quad (2, \ln 4, 1)$

27. Encontre uma equação para a reta tangente à curva de intersecção dos cilindros $x^2 + y^2 = 25$ e $y^2 + z^2 = 20$ no ponto $(3, 4, 2)$.
28. Encontre o ponto na curva de $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2 \operatorname{sen} t, e^{t} \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, em que a reta tangente é paralela ao plano $\sqrt{3}x + y = 1$.

29–31 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.

29. $x = t, \; y = e^{-t}, \; z = 2t - t^2; \quad (0, 1, 0)$
30. $x = 2\cos t, \; y = 2 \operatorname{sen} t, \; z = 4\cos 2t; \quad (\sqrt{3}, 1, 2)$
31. $x = t\cos t, \; y = t, \; z = t \operatorname{sen} t; \quad (-\pi, \pi, 0)$

32. (a) Determine o ponto de intersecção das retas tangentes à curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, 2 \operatorname{sen} \pi t, \cos \pi t \rangle$ nos pontos $t = 0$ e $t = 0{,}5$.
(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.
33. As curvas de $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ e $\mathbf{r}_2(t) = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t \rangle$ se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.
34. Em que ponto as curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$ e $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$ se cruzam? Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

35–40 Calcule a integral.

35. $\displaystyle\int_0^2 (t\, \mathbf{i} - t^3\, \mathbf{j} + 3t^5\, \mathbf{k})\, dt$
36. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{4}{1 + t^2}\, \mathbf{j} + \frac{2t}{1 + t^2}\, \mathbf{k} \right) dt$
37. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (3 \operatorname{sen}^2 t \cos t\, \mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t \cos^2 t\, \mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} t \cos t\, \mathbf{k})\, dt$
38. $\displaystyle\int_1^2 \left(t^2\, \mathbf{i} + t\sqrt{t - 1}\, \mathbf{j} + t \operatorname{sen} \pi t\, \mathbf{k} \right) dt$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

39. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

40. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

41. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

42. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + te^t\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

43. Demonstre a Fórmula 1 do Teorema 3.

44. Demonstre a Fórmula 3 do Teorema 3.

45. Demonstre a Fórmula 5 do Teorema 3.

46. Demonstre a Fórmula 6 do Teorema 3.

47. Se $\mathbf{u}(t) = \langle \text{sen}\, t, \cos t, t \rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \text{sen}\, t \rangle$, utilize a Fórmula 4 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

48. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções de vetor no Exercício 47, utilize a Fórmula 5 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

49. Determine $f'(2)$, onde $f(t) = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{u}(2) = \langle 1, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{u}'(2) = \langle 3, 0, 4 \rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

50. Se $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}\,(t) \times \mathbf{v}(t)$, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções de vetor no Exercício 49, encontre $\mathbf{r}'(2)$.

51. Mostre que se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial tal que exista $\mathbf{r}''$, então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

52. Determine uma expressão para $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

53. Se $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, mostre que $\dfrac{d}{dt}\,|\,\mathbf{r}(t)\,| = \dfrac{1}{|\,\mathbf{r}(t)\,|}\,\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

[*Dica*: $|\,\mathbf{r}(t)\,|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

54. Se uma curva tem a propriedade de o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ estar sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$, mostre que essa curva está em uma esfera com o centro na origem.

55. Se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

56. Mostre que o vetor tangente a uma curva definida por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ aponta no mesmo sentido da curva com t aumentando. [*Dica:* Consulte a Figura 1 e considere os casos $h > 0$ e $h < 0$ separadamente.]

13.3 Comprimento de Arco e Curvatura

Na Seção 10.2 definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula

1 $$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

O comprimento de uma curva espacial é definido exatamente da mesma forma (veja a Figura 1). Suponha que a curva tenha equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, $a \leqslant t \leqslant b$, ou, o que é equivalente, equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f', g' e h' são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, a partir de a para b, é possível mostrar que

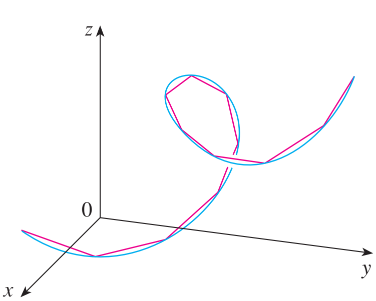


FIGURA 1
O comprimento de uma curva espacial é o limite dos comprimentos das poligonais inscritas.

2 $$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \end{aligned}$$

Observe que os comprimentos dos arcos de curva dados pelas Fórmulas $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ podem ser escritos de forma mais compacta

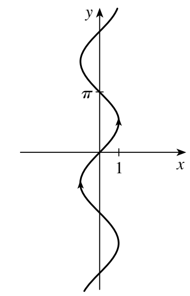
3 $$L = \int_a^b |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$$

porque, para curvas planas $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$,

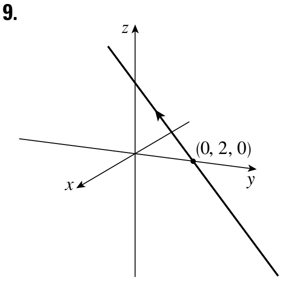
$$|\,\mathbf{r}'(t)\,| = |\,f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j}\,| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

e para as curvas espaciais $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

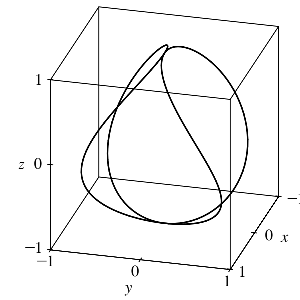
7.



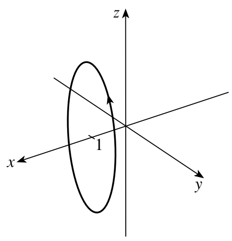
9.



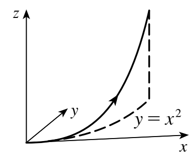
31.



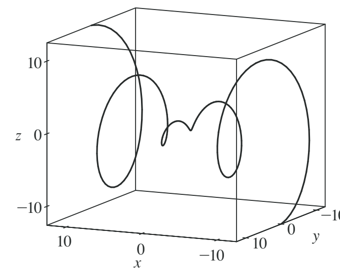
11.



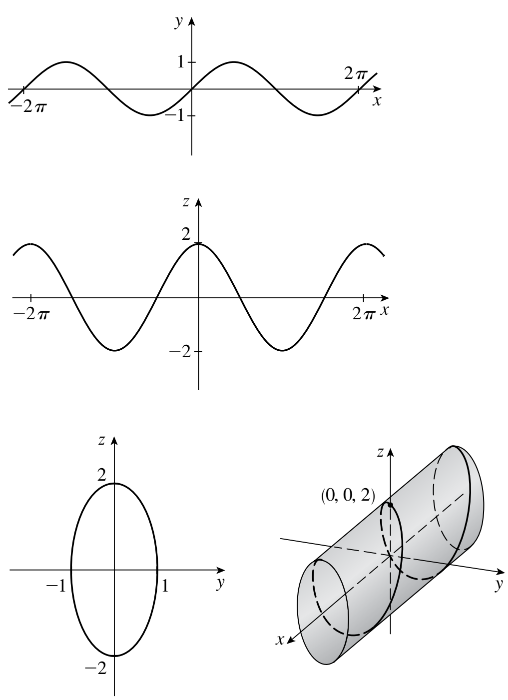
13.



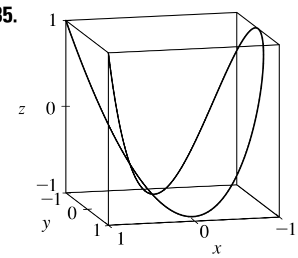
33.



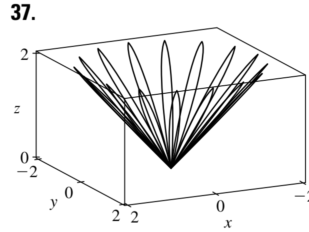
15.



35.



37.

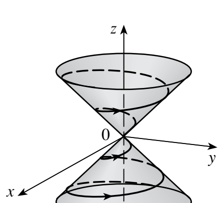


17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t, 3t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{2}t, -1 + \frac{4}{3}t, 1 - \frac{3}{4}t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = \frac{1}{2}t$, $y = -1 + \frac{4}{3}t$, $z = 1 - \frac{3}{4}t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

21. II **23.** V **25.** IV

27.



29. (0, 0, 0), (1, 0, 1)

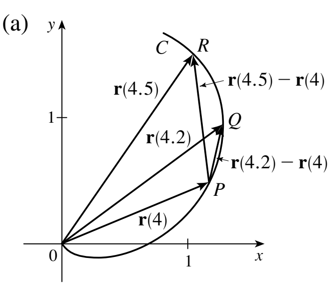
41. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\,\mathbf{k}$

43. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

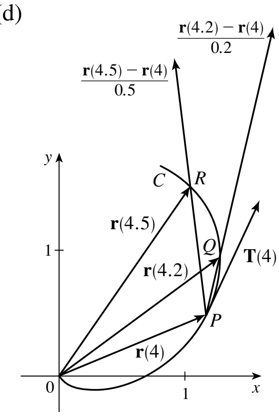
45. $x = 2\cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = 4\cos^2 t$ **47.** Sim

EXERCÍCIOS 13.2

1. (a)

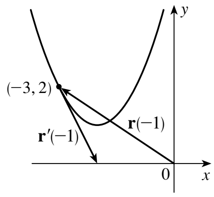


(b), (d)



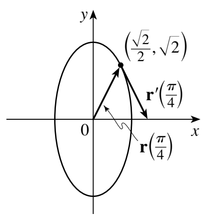
(c) $\mathbf{r}'(4) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\mathbf{r}(4+h) - \mathbf{r}(4)}{h}$; $\mathbf{T}(4) = \dfrac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$

3. (a), (c)



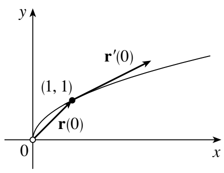
(b) $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t\rangle$

5. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \cos t\, \mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$

7. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = 2e^{2t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{r}'(t) = \langle t\cos t + \operatorname{sen} t, 2t, \cos 2t - 2t \operatorname{sen} 2t\rangle$

11. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{4t}\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}'(t) = 2te^{t^2}\,\mathbf{i} + [3/(1+3t)]\,\mathbf{k}$ **15.** $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$

17. $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ **19.** $\frac{3}{5}\,\mathbf{j} + \frac{4}{5}\,\mathbf{k}$

21. $\langle 1, 2t, 3t^2\rangle$, $\langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}\rangle$, $\langle 0, 2, 6t\rangle$, $\langle 6t^2, -6t, 2\rangle$

23. $x = 3 + t$, $y = 2t$, $z = 2 + 4t$

25. $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 1 - t$

27. $\mathbf{r}(t) = (3 - 4t)\,\mathbf{i} + (4 + 3t)\,\mathbf{j} + (2 - 6t)\,\mathbf{k}$

29. $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$

31. $x = -\pi - t$, $y = \pi + t$, $z = -\pi t$

33. 66° **35.** $2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 32\,\mathbf{k}$ **37.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

39. $e^t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + (t\ln t - t)\mathbf{k} + \mathbf{C}$

41. $t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + \left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3}\right)\mathbf{k}$

47. $2t\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2\cos t \operatorname{sen} t$ **49.** 35

EXERCÍCIOS 13.3

1. $10\sqrt{10}$ **3.** $e - e^{-1}$ **5.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$ **7.** 15,3841

9. 1,2780 **11.** 42

13. $\mathbf{r}(t(s)) = \dfrac{2}{\sqrt{29}}\,s\,\mathbf{i} + \left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \dfrac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

15. $(3\operatorname{sen} 1, 4, 3\cos 1)$

17. (a) $\langle 1/\sqrt{10}, (-3/\sqrt{10})\operatorname{sen} t, (3/\sqrt{10})\cos t\rangle$, $\langle 0, -\cos t, -\operatorname{sen} t\rangle$ (b) $\frac{3}{10}$

19. (a) $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle \sqrt{2}e^t, e^{2t}, -1\rangle$, $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle 1 - e^{2t}, \sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^t\rangle$

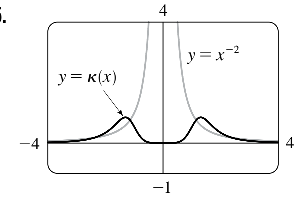
(b) $\sqrt{2}e^{2t}/(e^{2t}+1)^2$

21. $6t^2/(9t^4 + 4t^2)^{3/2}$ **23.** $\frac{4}{25}$ **25.** $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

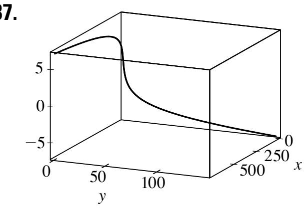
27. $12x^2/(1 + 16x^6)^{3/2}$ **29.** $e^x\,|x + 2|/[1 + (xe^x + e^x)^2]^{3/2}$

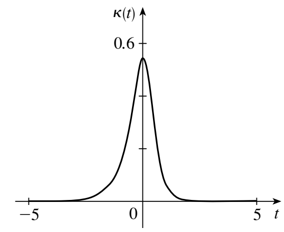
31. $(-\frac{1}{2}\ln 2, 1/\sqrt{2})$; tende a 0 **33.** (a) P (b) 1,3, 0,7

35.



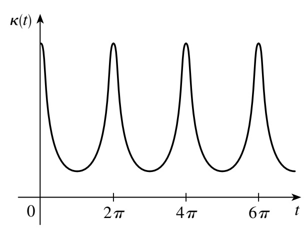
37.





39. a é $y = f(x)$, b é $y = \kappa(x)$

41. $\kappa(t) = \dfrac{6\sqrt{4\cos^2 t - 12\cos t + 13}}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$



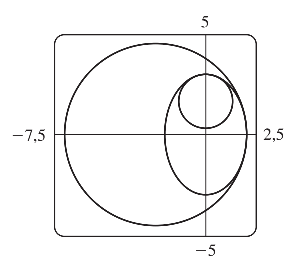
inteiros múltiplos de 2π

43. $6t^2/(4t^2 + 9t^4)^{3/2}$

45. $1/(\sqrt{2}e^t)$ **47.** $\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\rangle$, $\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$, $\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$

49. $y = 6x + \pi$, $x + 6y = 6\pi$

51. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{81}{4}$, $x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



53. $(-1, -3, 1)$

55. $2x + y + 4z = 7$, $6x - 8y - z = -3$

63. $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$ **65.** $2{,}07 \times 10^{10}$ Å $\approx$ 2 m

EXERCÍCIOS 13.4

1. (a) $1{,}8\mathbf{i} - 3{,}8\,\mathbf{j} - 0{,}7\mathbf{k}$, $2{,}0\mathbf{i} - 2{,}4\,\mathbf{j} - 0{,}6\mathbf{k}$, $2{,}8\mathbf{i} + 1{,}8\mathbf{j} - 0{,}3\mathbf{k}$, $2{,}8\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}4\mathbf{k}$

(b) $2{,}4\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}5\mathbf{k}$, 2,58

3. $\mathbf{v}(t) = \langle -t, 1\rangle$
$\mathbf{a}(t) = \langle -1, 0\rangle$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{t^2 + 1}$