$0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Dê sua resposta com precisão de quatro casas decimais.

SCA **57.** Determine a área exata da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

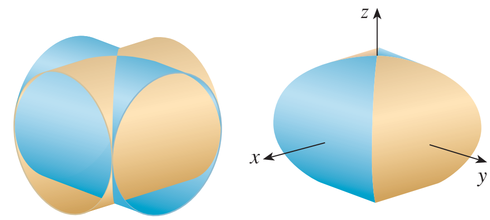
58. (a) Determine, mas não calcule, a integral dupla da área da superfície com as equações paramétricas $x = au \cos v$, $y = bu \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.
(b) Elimine os parâmetros para mostrar que a superfície é um paraboloide elíptico e escreva outra integral dupla que forneça sua área.
(c) Use as equações paramétricas da parte (a) com $a = 2$ e $b = 3$ para traçar o gráfico da superfície.
SCA (d) Para o caso $a = 2$, $b = 3$, use um sistema de computação algébrica para achar a área da superfície com precisão de quatro casas decimais.

59. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = c \cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$, representam um elipsoide.
(b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do elipsoide para o caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
(c) Determine, mas não calcule, uma integral dupla que dá a área de superfície da parte do elipsoide da parte (b).

60. (a) Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{senh} u$ representam um hiperboloide de uma folha.
(b) Use as equações paramétricas da parte (a) para traçar o gráfico do hiperboloide para o caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
(c) Determine, mas não calcule, a integral dupla que dá a área de superfície da porção do hiperboloide da parte (b) que está entre os planos $z = -3$ e $z = 3$.

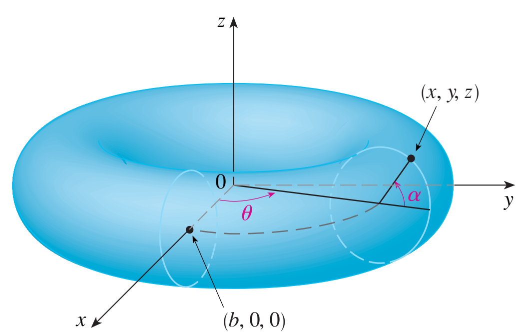
61. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do paraboloide $z = x^2 + y^2$.

62. A figura mostra a superfície criada quando o cilindro $y^2 + z^2 = 1$ intercepta o cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Encontre a área desta superfície.



63. Encontre a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

64. (a) Determine a representação parametrizada do toro obtido ao girar pelo eixo z o círculo no plano xz com centro $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$. [*Dica*: Tome-se como parâmetros os ângulos θ e α mostrados na figura.]
(b) Use as equações paramétricas encontradas na parte (a) para traçar o gráfico do toro para diversos valores de a e b.
(c) Use a representação parametrizada da parte (a) para achar a área do toro.



16.7 Integrais de Superfície

A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco. Suponha que f seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S. Definiremos a integral de superfície de f sobre S de tal forma que, no caso em que $f(x, y, z) = 1$, o valor da integral de superfície seja igual à área da superfície de S. Começamos com superfícies parametrizadas e trataremos em seguida o caso especial onde S é o gráfico de uma função de duas variáveis.

Superfícies parametrizadas

Suponha que a superfície S tenha equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

Vamos admitir inicialmente que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos R_{ij} com dimensões Δu e Δv. Então, a superfície S é dividida em retalhos correspondentes S_{ij}, como na Figura 1. Calculamos f em um ponto P_{ij}^* de cada retalho, multiplicamos pela área ΔS_{ij} do retalho e formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$

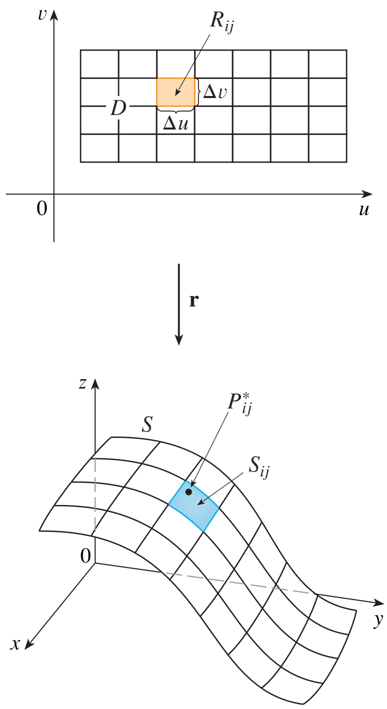


FIGURA 1

A seguir, tomamos o limite quando o número de retalhos aumenta e definimos a **integral de superfície de *f* na superfície *S*** como

1
$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$

Observe a analogia com a definição de integral de linha (16.2.2) e também a analogia com a definição de integral dupla (15.1.5).

Para calcularmos a integral de superfície na Equação 1, aproximamos a área do retalho ΔS_{ij} pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente. Em nossa discussão sobre a área de superfície na Seção 16.6, fizemos a aproximação

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u \Delta v$$

onde $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

são os vetores tangentes em um canto de S_{ij}. Se as componentes são contínuas e $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ são não nulos e não paralelos no interior de D, pode ser mostrado, da Definição 1, mesmo quando D não é retangular, que

2
$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Compare com a fórmula para a integral de linha:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Observe também que

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = A(S)$$

Nós assumimos que a superfície é coberta apenas uma vez quando (u, v) varia ao longo de D. O valor do integral de superfície não depende da parametrização usada.

A Fórmula 2 permite calcular uma integral de superfície, convertendo-a em uma integral dupla sobre o domínio do parâmetro D. Ao usar essa fórmula, lembre-se de que $f(\mathbf{r}(u, v))$ é avaliado ao escrever $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ na fórmula $f(x, y, z)$.

EXEMPLO 1 Calcule a integral de superfície $\iint_S x^2\, dS$, onde S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 4 da Seção 16.6, utilizamos a representação parametrizada

$$x = \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \cos\phi \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

isto é, $$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi \cos\theta\, \mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j} + \cos\phi\, \mathbf{k}$$

Como no Exemplo 10 da Seção 16.6, podemos obter que

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \operatorname{sen}\phi$$

Portanto, pela Fórmula 2,

Aqui, usamos as identidades

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$
$$\operatorname{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi$$

Em vez disso, poderíamos usar as Fórmulas 64 e 67 da Tabela de Integrais.

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2\, dS &= \iint_D (\operatorname{sen}\phi \cos\theta)^2\, |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, dA \\
&= \int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi)\, d\phi \\
&= \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{2\pi} \Big[-\cos\phi + \tfrac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

As integrais de superfície têm aplicações semelhantes àquelas das integrais que estudamos anteriormente. Por exemplo, se uma folha fina (digamos, uma folha de alumínio) tiver a forma de uma superfície S e se a densidade (massa por unidade de área) no ponto (x, y, z) for $\rho(x, y, z)$, então o total da **massa** da folha será

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

e o **centro de massa** será $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z\,\rho(x, y, z)\, dS$$

Os momentos de inércia também podem ser definidos como antes (veja o Exercício 41).

Gráficos

Qualquer superfície S com equação $z = g(x, y)$ pode ser considerada uma superfície parametrizada com equações parametrizadas

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y)$$

e, então, temos $\qquad \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$

de modo que

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e $\qquad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$

Logo, neste caso, a Fórmula 2 se torna

$$\boxed{4} \qquad \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dA$$

Existem fórmulas análogas para quando for mais conveniente projetar S no plano yz ou no plano xz. Por exemplo, se S for a superfície com equação $y = h(x, z)$ e D for sua projeção no plano xz, então

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, h(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\; dA$$

EXEMPLO 2 Calcule $\iint_S y\, dS$, onde S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. (Veja a Figura 2.)

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

a Fórmula 4 dá

$$\iint_S y\, dS = \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\; dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 dx\, \sqrt{2} \int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\, dy$$

$$= \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 2y^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$

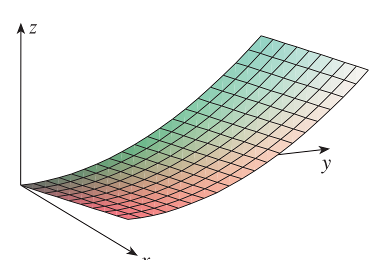


FIGURA 2

Se S é uma superfície suave por partes, ou seja, uma união finita de superfícies suaves S_1, S_2, . . . , S_n que se interceptam somente ao longo de suas fronteiras, então a integral de superfície de f sobre S é definida por

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)\, dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x, y, z)\, dS$$

EXEMPLO 3 Calcule $\iint_S z\,dS$, onde S é a superfície cujo lado S_1 é dado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cujo fundo S_2 é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$ no plano $z = 0$, e cujo topo S_3 é a parte do plano $z = 1 + x$ que está acima de S_2.

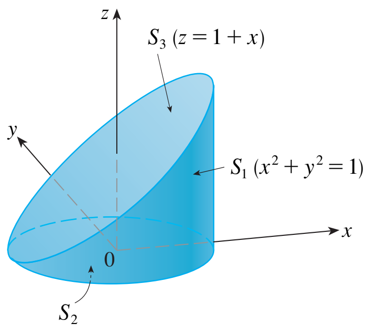


FIGURA 3

SOLUÇÃO A superfície S é mostrada na Figura 3 (trocamos a posição usual dos eixos para enxergar melhor S). Para S_1, usamos como parâmetros θ e z (veja o Exemplo 5 da Seção 16.6) e escrevemos suas equações parametrizadas como

$$x = \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

onde $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad$ e $\quad 0 \leqslant z \leqslant 1 + x = 1 + \cos\theta$

Portanto,

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

e $$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

Então, a integral de superfície em S_1 é

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} z\,dS &= \iint_D z\,|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} z\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Como S_2 está no plano $z = 0$, temos

$$\iint_{S_2} z\,dS = \iint_{S_2} 0\,dS = 0$$

A superfície superior S_3 se encontra acima do disco D e faz parte do plano $z = 1 + x$. Assim, tomando $g(x, y) = 1 + x$ na Fórmula 4 e convertendo para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} z\,dS &= \iint_D (1+x)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r\cos\theta)\sqrt{1+1+0}\;r\,dr\,d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + r^2\cos\theta)\,dr\,d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cos\theta\right)d\theta \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_S z\,dS &= \iint_{S_1} z\,dS + \iint_{S_2} z\,dS + \iint_{S_3} z\,dS \\ &= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\,\pi = \left(\tfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi\end{aligned}$$

Superfícies Orientadas

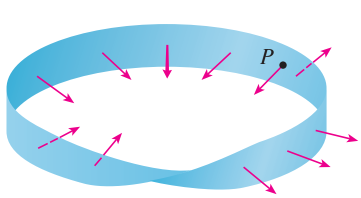


FIGURA 4
Uma faixa de Möbius

Para definir integrais de superfície de campos vetoriais, precisamos descartar superfícies não orientáveis tais como a faixa de Möbius mostrado na Figura 4. [Nomeado assim por causa do geômetra alemão August Möbius (1790–1868).] Você pode construir uma tomando uma faixa retangular longa de papel, dando-lhe uma meia-torção e juntando as arestas curtas, como na Figura 5. Se uma formiga andasse sobre uma faixa de Möbius começando no ponto P, ela acabaria do "outro lado" da faixa (ou seja, com sua parte de cima apontando para o sentido oposto). Então, se a formiga continuasse a andar na mesma direção, ela acabaria de volta no mesmo ponto P sem ter nunca cruzado uma aresta (se você construiu uma faixa de Möbius, tente desenhar uma linha a lápis pelo meio). Portanto, uma fita de Möbius realmente tem apenas um lado. Você pode traçar a faixa de Möbius usando as equações parametrizadas no Exercício 32 da Seção 16.6.

TEC Visual 16.7 mostra uma faixa de Möbius com um vetor normal que pode ser movido ao longo da superfície.

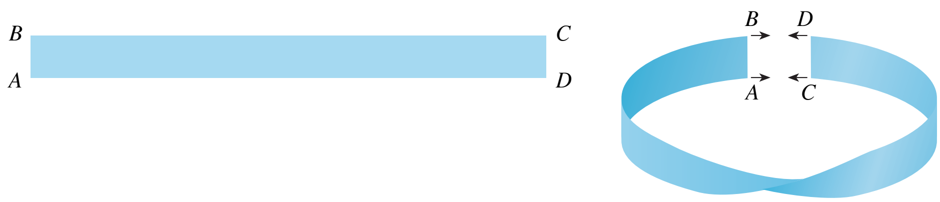


FIGURA 5
Construção de uma faixa de Möbius

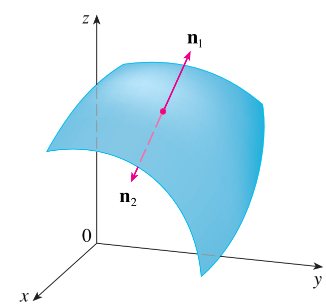


FIGURA 6

Daqui para a frente consideraremos somente as superfícies orientáveis (com dois lados). Começaremos com uma superfície S que tenha um plano tangente em todos os pontos (x, y, z) em S (exceto nos pontos da fronteira). Existem dois vetores normais unitários $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ em (x, y, z) (veja a Figura 6).

Se for possível escolher um vetor normal $\mathbf{n}$ em cada ponto (x, y, z) de modo que $\mathbf{n}$ varie continuamente sobre S, então S é chamada **superfície orientada** e a escolha dada de $\mathbf{n}$ fornece S com uma **orientação**. Existem duas possíveis orientações para qualquer superfície orientada (veja a Figura 7).

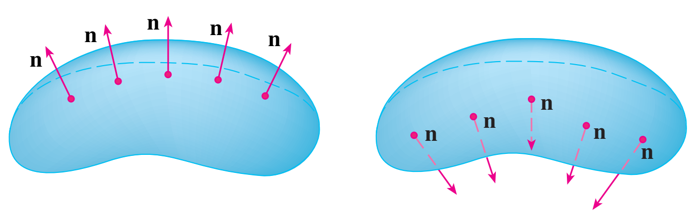


FIGURA 7
As duas orientações de uma superfície orientável

Para uma superfície $z = g(x, y)$ dada como o gráfico de g, usamos a Equação 3 e vemos que a orientação induzida é dada pelo vetor normal unitário

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Como a componente na direção de $\mathbf{k}$ é positiva, isso fornece a orientação ascendente da superfície.

Se S for uma superfície orientada suave dada na forma parametrizada pela equação vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então ela está automaticamente associada à orientação do vetor normal unitário.

$$\boxed{6} \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

e a orientação oposta é dada por $-\mathbf{n}$. Por exemplo, no Exemplo 4 na Seção 16.6 nós encontramos a representação parametrizada

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \,\mathbf{j} + a \cos \phi \,\mathbf{k}$$

para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Então, no Exemplo 10 da Seção 16.6, encontramos que

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos \theta \,\mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen} \theta \,\mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \,\mathbf{k}$$

e $$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \operatorname{sen} \phi$$

Assim, a orientação induzida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ é definida pelo vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \operatorname{sen}\phi\,\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} = \frac{1}{a}\,\mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Observe que $\mathbf{n}$ aponta na mesma direção que o vetor posição, ou seja, para fora da esfera (veja a Figura 8). A orientação oposta (para dentro) poderia ser obtida (veja a Figura 9) se tivéssemos trocado a ordem dos parâmetros, porque $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$.

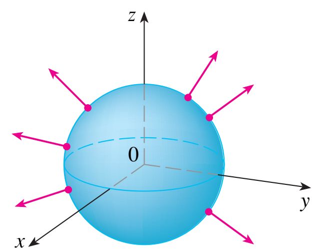


FIGURA 8
Orientação positiva

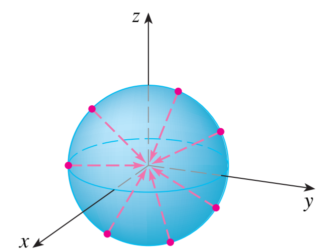


FIGURA 9
Orientação negativa

Para uma **superfície fechada**, isto é, uma superfície que seja a fronteira de uma região sólida E, a convenção é que a **orientação positiva** é aquela para a qual os vetores normais *apontam para fora* de E, e os vetores normais que apontam para dentro correspondem à orientação negativa (veja as Figuras 8 e 9).

Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

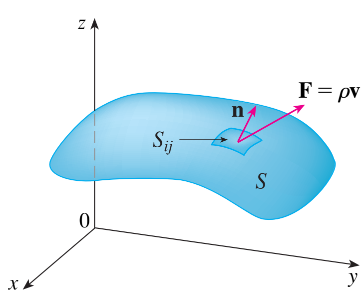


FIGURA 10

Suponha que S seja uma superfície orientada com vetor unitário normal $\mathbf{n}$, e imagine um fluido com densidade $\rho(x, y, z)$ e campo de velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ que flui através de S. (Pense em S como uma superfície imaginária que não impede o fluxo de fluido, tal como uma rede de pesca por um fluxo.) Em seguida, a taxa de fluxo (massa por unidade de tempo) por unidade de área é $\rho\mathbf{v}$. Se dividirmos S em pequenos retalhos S_{ij}, como na Figura 10 (compare com a Figura 1), então S_{ij} é aproximadamente plana, de modo que podemos aproximar a massa de fluido que passa por S_{ij} na direção da normal $\mathbf{n}$ por unidade de tempo pela quantidade

$$(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$$

onde ρ, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ são avaliados em algum ponto em S_{ij}. (Recorde-se de que o componente do vetor de $\rho\mathbf{v}$ na direção da unidade de vetor $\mathbf{n}$ é $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.) Somando essas quantidades e tomando o limite, obtemos, de acordo com a Definição 1, a integral de superfície da função $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ sobre S:

$$\boxed{7} \qquad \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \rho(x, y, z)\,\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, dS$$

e ela é interpretada fisicamente como a vazão através de S.

Se escrevermos $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, então $\mathbf{F}$ também é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e a integral da Equação 7 fica

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Uma integral de superfície dessa forma aparece frequentemente em física, mesmo quando $\mathbf{F}$ não é $\rho\mathbf{v}$, e é denominada *integral de superfície* (ou *integral de fluxo*) de $\mathbf{F}$ em S.

$\boxed{8}$ **Definição** Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário $\mathbf{n}$, então a **superfície integral de F sobre S** é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de $\mathbf{F}$ através de S.

Em palavras, a Definição 8 diz que a integral de superfície de um campo vetorial sobre S é igual à integral de superfície de sua componente normal em S (como definido anteriormente).

Se S é uma função vetorial dada por $\mathbf{r}(u, v)$, então $\mathbf{n}$ é dado pela Equação 6 da Definição 8 e, da Equação 2, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, dS$$

$$= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

onde D é o domínio dos parâmetros. Assim, temos

9
$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA}$$

Compare a Equação 9 com a expressão análoga para o cálculo da integral de linha de campos vetoriais da Definição 16.2.13:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

EXEMPLO 4 Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

A Figura 11 mostra o campo vetorial $\mathbf{F}$ do Exemplo 4 em pontos da esfera unitária

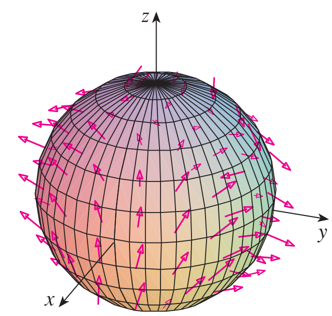


FIGURA 11

SOLUÇÃO Como no Exemplo 1, utilizamos a representação parametrizada

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen}\,\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$

Então $\qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \text{sen}\,\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$

e, do Exemplo 10 da Seção 16.6,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \text{sen}^2\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}^2\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \text{sen}\,\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

Portanto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos\phi\,\text{sen}^2\phi\cos\theta + \text{sen}^3\phi\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta$$

e, pela Fórmula 9, o fluxo é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (2\,\text{sen}^2\phi\,\cos\phi\,\cos\theta + \text{sen}^3\phi\,\text{sen}^2\theta)\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \text{sen}^2\phi\,\cos\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta + \int_0^{\pi} \text{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \text{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} \text{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \text{sen}^2\theta\, d\theta \qquad \left(\text{uma vez que } \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

pelos mesmos cálculos que no Exemplo 1.

Se, por exemplo, o campo vetorial do Exemplo 4 é um campo de velocidade descrevendo o escoamento de um fluido de densidade 1, então a resposta $4\pi/3$ representa a vazão através da esfera unitária em unidade de massa por unidade de tempo.

No caso de uma superfície S dada por um gráfico $z = g(x, y)$, podemos considerar x e y como parâmetros e usar a Equação 3 para escrever

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Logo, a Fórmula 9 se torna

10
$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA}$$

Esta fórmula pressupõe uma orientação ascendente de S; para uma orientação descendente, multiplicamos por -1. Fórmulas semelhantes podem ser trabalhadas se S é dada por $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$. (Veja os Exercícios 37 e 38.)

EXEMPLO 5 Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e S é o limite da região sólida E delimitada pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 0$.

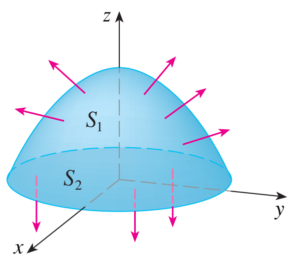


FIGURA 12

SOLUÇÃO A superfície S é constituída pela superfície parabólica superior S_1 e pela superfície circular do fundo S_2 (veja a Figura 12). Como S é uma superfície fechada, usamos a convenção de orientação positiva (para fora). Isso significa que S_1 é orientada para cima e podemos usar a Equação 10 com D sendo a projeção de S_1 sobre o plano xy, ou seja, o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Como

$$P(x, y, z) = y \qquad Q(x, y, z) = x \qquad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

sobre S_1 e
$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

temos

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA \\
&= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2]\,dA \\
&= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2)\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 4r^2\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta - r^2)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3 + 4r^3\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4} + \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\right) d\theta = \tfrac{1}{4}(2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

O disco S_2 é orientado para baixo, então seu vetor normal unitário é $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ e temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\,dS = \iint_D (-z)\,dA = \iint_D 0\,dA = 0$$

uma vez que $z = 0$ em S_2. Finalmente, calculamos, pela definição, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como a soma das integrais de superfície de $\mathbf{F}$ sobre as partes S_1 e S_2:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Embora tenhamos exemplificado a integral de superfície de um campo de vetores com seu uso em mecânica dos fluidos, esse conceito também aparece em outras situações físicas. Por exemplo, se $\mathbf{E}$ é um campo elétrico (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1), então a integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

chama-se a **fluxo elétrico** de $\mathbf{E}$ através da superfície S. Uma importante lei de eletrostática é a **Lei de Gauss**, que diz que a carga total englobada por uma superfície S é

$$\boxed{11} \qquad Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

onde ε_0 é uma constante (denominada permissividade no vácuo) que depende das unidades usadas (no sistema SI, $\varepsilon_0 \approx 8{,}8542 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N{\cdot}m^2}$). Portanto, se o campo vetorial $\mathbf{F}$ do Exemplo 4 representa um campo elétrico, podemos concluir que a carga envolvida por S é $Q = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0$.

Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) em um corpo seja $u(x, y, z)$. Então, o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K\,\nabla u$$

onde K é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** da substância. A taxa de transmissão de calor através da superfície S no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

EXEMPLO 6 A temperatura u em uma bola metálica é proporcional ao quadrado da distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

SOLUÇÃO Tomando o centro da bola como origem, temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde C é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\,\nabla u = -KC(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k})$$

onde K é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera dada no Exemplo 4, observamos que o vetor normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que aponta para fora no ponto (x, y, z) é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

e assim
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mas, sobre S temos $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, então $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. Portanto, a taxa de transmissão de calor através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -2aKC \iint_S dS$$

$$= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3$$

16.7 Exercícios

1. Seja S a superfície que é fronteira da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$ e $z = 6$. Aproxime $\iint_S e^{-0,1(x+y+z)}\, dS$ usando uma soma de Riemann, como na Definição 1, tomando os retalhos S_{ij} como os retângulos que são as faces da caixa S e os pontos P_{ij}^* como os centros destes retângulos.

2. Uma superfície S é formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, e por círculos no fundo e no topo Suponha que você saiba que f é uma função contínua com

$f(\pm 1, 0, 0) = 2 \qquad f(0, \pm 1, 0) = 3 \qquad f(0, 0, \pm 1) = 4$

Estime o valor de $\iint_S f(x, y, z)\, dS$ usando a soma de Riemann, tomando como retalhos S_{ij} os círculos do fundo e do topo e a lateral dividida em quatro partes.

3. Seja H o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geqslant 0$, e suponha que f seja uma função contínua com $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ e $f(-3, -4, 5) = 12$. Ao dividir H em quatro partes, estime o valor de $\iint_H f(x, y, z)\, dS$.

4. Suponha que $f(x, y, z) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, onde g é uma função de uma variável tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x, y, z)\, dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5–20 Calcule a integral de superfície.

5. $\iint_S (x + y + z)\, dS$,
S é o paralelogramo com equações paramétricas $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 + 2u + v$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 1$

6. $\iint_S xyz\, dS$,
S é o cone com equações paramétricas $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$

7. $\iint_S y\, dS$, S é o helicoide com equação vetorial
$\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \operatorname{sen} v, v\rangle$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

8. $\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$,
S é o superfície com equação vetorial
$\mathbf{r}(u, v) = \langle 2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2\rangle$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$

9. $\iint_S x^2yz\, dS$,
S é a parte do plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está acima do retângulo $[0, 3] \times [0, 2]$

10. $\iint_S xz\, dS$,
S é a parte do plano $2x + 2y + z = 4$ que está no primeiro octante

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

11. $\iint_S x\, dS$,
S é a região triangular com vértices (1, 0, 0), (0, −2, 0) e (0, 0, 4)

12. $\iint_S y\, dS$,
S é a superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

13. $\iint_S x^2 z^2\, dS$,
S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$

14. $\iint_S z\, dS$,
S é a superfície $x = y + 2z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

15. $\iint_S y\, dS$,
S é a parte do paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 4$

16. $\iint_S y^2\, dS$,
S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy

17. $\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS$,
S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$

18. $\iint_S xz\, dS$,
S é o limite da região delimitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$ e $x + y = 5$

19. $\iint_S (z + x^2 y)\, dS$,
S é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$ no primeiro octante

20. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$,
S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre os planos $z = 0$ e $z = 2$, juntamente com os discos inferior e superior

21–32 Avalie a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial dado $\mathbf{F}$ e a superfície orientada S. Em outras palavras, localize o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S. Para superfícies fechadas, use a orientação (para o exterior) positiva.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^{xy}\,\mathbf{i} - 3ze^{xy}\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,
S é o paralelogramo do Exercício 5 com orientação ascendente.

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S é o helicoide do Exercício 7 com orientação ascendente.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$,
S é a parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, e com orientação ascendente.

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$ com orientação descendente

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
S é parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, com orientação para a origem

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geqslant 0$, orientado na direção do eixo positivo y

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$,
S é formada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, e pelo disco $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 1$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 4x^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$,
S é a superfície $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, com orientação ascendente

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$,
S é o cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$,
S é o limite da região delimitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
S é o limite do semicilindro sólido $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + (z - y)\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do tetraedro com vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1)

SCA **33.** Calcule $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$ com precisão de quatro casas decimais, quando S é a superfície $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

SCA **34.** Determine o valor exato de $\iint_S x^2 yz\, dS$, onde S é a superfície $z = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

SCA **35.** Determine o valor de $\iint_S x^2y^2z^2\, dS$ correto até a quarta casa decimal, onde S é a parte do paraboloide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está acima do plano xy.

SCA **36.** Determine o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathrm{sen}(xyz)\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + z^2e^{x/5}\,\mathbf{k}$$

através da parte do cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e entre os planos $x = -2$ e $x = 2$ com orientação ascendente. Ilustre, usando um sistema de computação algébrica para desenhar o cilindro e o campo vetorial na mesma tela.

37. Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde S é dada por $y = h(x, z)$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para a esquerda.

38. Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde S é dada por $x = k(y, z)$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para a frente (ou seja, para o observador, quando os eixos estão desenhados na posição usual).

39. Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, se ele tiver densidade constante.

40. Determine a massa de um funil fino com o formato do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 4$, se sua função densidade é $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

41. (a) Dê uma expressão integral para o momento de inércia I_z em torno do eixo z de uma folha fina no formato da superfície S se a função densidade é ρ.
(b) Determine o momento de inércia em torno do eixo z do funil do Exercício 40.

42. Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está acima do plano $z = 4$. Se S tem densidade constante k, determine (a) o centro da massa e (b) o momento de inércia em torno do eixo z.

43. Um fluido tem densidade 870 kg/m³ e escoa com velocidade $\mathbf{v} = z\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, onde x, y e z são medidos em metros e as componentes de $\mathbf{v}$, em metros por segundo. Encontre a taxa de vazão para fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

44. A água do mar tem densidade 1.025 kg/m³ e flui em um campo de velocidade $\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, onde x, y e z são medidos em metros e as componentes de $\mathbf{v}$, em metros por segundo. Encontre a taxa de vazão para fora do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$.

45. Use a Lei de Gauss para achar a carga contida no hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}.$$

46. Use a Lei de Gauss para achar a carga dentro de um cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ se o campo elétrico for

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

47. A temperatura no ponto (x, y, z) em uma substância com uma condutividade $K = 6{,}5$ é $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine a taxa de transmissão de calor nessa substância para dentro superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

48. A temperatura em um ponto de uma bola com condutividade K é inversamente proporcional à distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio a e centro no centro da bola.

49. Seja $\mathbf{F}$ um campo inverso do quadrado, ou seja, $\mathbf{F}(r) = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Mostre que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de uma esfera S com o centro de origem é independente do raio de S.

16.8 Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha em torno de sua curva limite plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral em torno da curva da fronteira S (que é uma curva no espaço). A Figura 1 mostra uma superfície orientada com vetor normal unitário $\mathbf{n}$. A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira *C*** mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de $\mathbf{n}$, então a superfície estará sempre à sua esquerda.

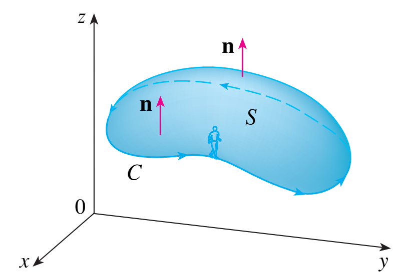


FIGURA 1

Teorema de Stokes Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad \text{e} \qquad \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha em torno da curva fronteira de S da componente tangencial de $\mathbf{F}$ é igual à integral de superfície sobre S da componente normal do rotacional de $\mathbf{F}$.

A curva na fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com frequência denotada por ∂S, de modo que o Teorema de Stokes pode ser escrito como

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Existe uma analogia entre o Teorema de Stokes, o de Green e o Teorema Fundamental do Cálculo. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo derivadas do lado esquerdo da Equação 1 (lembre-se de que rot $\mathbf{F}$ é uma espécie de derivada de $\mathbf{F}$) e do lado direito, envolvendo valores de $\mathbf{F}$ calculados somente na *fronteira* de S.

De fato, no caso especial em que a superfície S é plana e pertence ao plano xy, com orientação ascendente, o vetor normal unitário é $\mathbf{k}$, a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Essa é precisamente a forma vetorial do Teorema de Green dada na Equação 16.5.12. Assim, vemos que o Teorema de Green é realmente um caso especial do Teorema de Stokes.

Apesar de o Teorema de Stokes ser muito difícil de demonstrar no caso geral, podemos fazer uma demonstração quando S for um gráfico e $\mathbf{F}$, S e C forem bem comportados.

George Stokes

O Teorema de Stokes tem seu nome em homenagem ao físico matemático irlandês sir George Stokes (1819-1903). Stokes era professor na Universidade de Cambridge (ele detinha a mesma cadeira de Newton, Lucasian Professor of Mathematics) e se sobressaiu por seus estudos sobre vazão de fluidos e luz. O teorema que hoje chamamos Teorema de Stokes foi, na verdade, descoberto pelo físico escocês sir William Thompson (1824- 1907, conhecido como lorde Kelvin). Stokes soube desse teorema por uma carta de Thomson em 1850 e pediu a seus estudantes que o demonstrassem em um exame em Cambridge, em 1854. Não se sabe se algum de seus estudantes foi capaz de fazê-lo.