A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos a função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região $D$, obteremos a área de $D$:

**10**
$$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

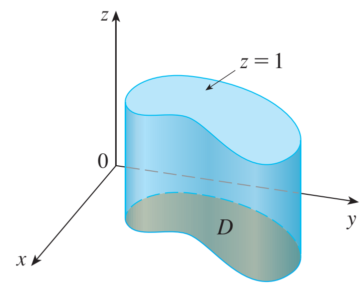



**FIGURA 19**
Cilindro com base $D$ e altura 1

A Figura 19 ilustra por que a Equação 10 é verdadeira: um cilindro sólido, cuja base é $D$ e a altura é 1, tem volume $A(D) \cdot 1 = A(D)$, mas sabemos que também podemos escrever seu volume como $\iint_D 1\, dA$.

Finalmente, podemos combinar as Propriedades 7, 8 e 10 para demonstrar a seguinte propriedade. (Veja o Exercício 61.)

**11** Se $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todo $(x, y)$ em $D$, então

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

**EXEMPLO 6** Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$, onde $D$ é o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \cos y \leqslant 1$ e, portanto,

$$e^{-1} \leqslant e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leqslant e^1 = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$ e $A(D) = \pi(2)^2$ na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA \leqslant 4\pi e$$

## 15.3 Exercícios

**1–6** Calcule a integral iterada.

1. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2\, dx\, dy$
2. $\int_0^1 \int_{2x}^2 (x - y)\, dy\, dx$
3. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 + 2y)\, dy\, dx$
4. $\int_0^2 \int_y^{2y} xy\, dx\, dy$
5. $\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3)\, dt\, ds$
6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

**7–10** Calcule a integral dupla.

7. $\iint_D y^2\, dA$, $D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1, -y - 2 \leqslant x \leqslant y\}$
8. $\iint_D \frac{y}{x^5 + 1}\, dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$
9. $\iint_D x\, dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x\}$
10. $\iint_D x^3\, dA$, $D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant e,\ 0 \leqslant y \leqslant \ln x\}$

11. Desenhe um exemplo de uma região que seja
    (a) do tipo I, mas não do tipo II
    (b) do tipo II, mas não do tipo I
12. Desenhe um exemplo de uma região que seja
    (a) tanto do tipo I quanto do tipo II
    (b) nem do tipo I nem do tipo II

**13–14** Expresse $D$ como a região do tipo I e também como uma região do tipo II. Em seguida, calcule a integral dupla de duas maneiras.

13. $\iint_D x\, dA$, $D$ é limitada pelas retas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$
14. $\iint_D xy\, dA$, $D$ é limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 3x$

**15–16** Defina as integrais iteradas para ambas as ordens de integração. Então, calcule a integral dupla usando a ordem mais fácil e explique por que ela é mais fácil.

15. $\iint_D y\, dA$, $D$ é limitada por $y = x - 2$, $x = y^2$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**16.** $\iint_D y^2 e^{xy}\,dA$, $D$ é limitada por $y = x$, $y = 4$, $x = 0$

**17–22** Calcule a integral dupla.

**17.** $\iint_D x \cos y\,dA$, $D$ é limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

**18.** $\iint_D (x^2 + 2y)\,dA$, $D$ é limitada por $y = x$, $y = x^3$, $x \geqslant 0$

**19.** $\iint_D y^2\,dA$, $D$ é a região triangular com vértices $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 1)$

**20.** $\iint_D xy^2\,dA$, $D$ é limitada por $x = 0$ e $x = \sqrt{1 - y^2}$

**21.** $\iint_D (2x - y)\,dA$, $D$ é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2

**22.** $\iint_D 2xy\,dA$, $D$ é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 3)$

**23–32** Determine o volume do sólido dado.

**23.** Abaixo do plano $x - 2y + z = 1$ e acima da região limitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$

**24.** Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$

**25.** Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo e vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$

**26.** Limitado pelo paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$

**27.** Limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$

**28.** Limitado pelos planos $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ e $z = 0$

**29.** Limitado pelos cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 4$

**30.** Limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

**31.** Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

**32.** Limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$

**33.** Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para estimar a coordenada $x$ dos pontos de intersecção da curva $y = x^4$ e $y = 3x - x^2$. Se $D$ é a região limitada por essas curvas, estime $\iint_D x\,dA$.

**34.** Encontre o volume aproximado do sólido no primeiro octante limitado pelos planos $y = x$, $z = 0$ e $z = x$ e pelo cilindro $y = \cos x$. (Utilize uma ferramenta gráfica para estimar os pontos de intersecção.)

**35–36** Determine o volume do sólido por subtração de dois volumes.

**35.** O sólido limitado pelos cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ e pelos planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$

**36.** O sólido limitado pelo paraboloide cilíndrico $y = x^2$ e pelos planos $z = 3y$, $z = 2 + y$

**37–38** Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

**37.** $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy\,dx$

**38.** $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x)\,dy\,dx$

**39–42** Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.

SCA **39.** Abaixo da superfície $z = x^2y^4 + xy^2$ e acima da região limitada pelas curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ para $x \geqslant 0$

**40.** Entre os paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - 2y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

**41.** Limitado por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$

**42.** Limitado por $z = x^2 + y^2$ e $z = 2y$

**43–48** Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

**43.** $\int_0^1 \int_0^y f(x, y)\,dy\,dx$

**44.** $\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y)\,dy\,dx$

**45.** $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y)\,dy\,dx$

**46.** $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-2}} f(x, y)\,dx\,dy$

**47.** $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\,dy\,dx$

**48.** $\int_0^1 \int_{\operatorname{arctg} x}^{\pi/4} f(x, y)\,dy\,dx$

**49–54** Calcule a integral trocando a ordem de integração.

**49.** $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$

**50.** $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\,dx\,dy$

**51.** $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \dfrac{1}{y^3 + 1}\,dy\,dx$

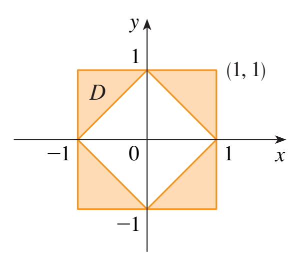
**52.** $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\,dy\,dx$

**53.** $\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx\,dy$

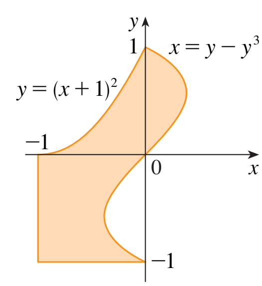
**54.** $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dx\,dy$

**55–56** Expresse $D$ como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

**55.** $\iint_D x^2\,dA$




**52.** $\iint_D y\,dA$




**57–58** Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

**57.** $\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\,dA$, $Q$ é o quarto de círculo com centro na origem e raio $\frac{1}{2}$ no primeiro quadrante

**58.** $\iint_T \operatorname{sen}^4(x + y)\,dA$, $T$ é o triângulo limitado pelas retas $y = 0$, $y = 2x$ e $x = 1$

**59–60** Encontre o valor médio de $f$ na região $D$

**59.** $f(x, y) = xy$, $D$ é o triângulo com vértices, $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 3)$

**60.** $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, $D$ é limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$

**61.** Demonstre a Propriedade 11.

**62.** No cálculo de uma integral dupla sobre uma região $D$, obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que segue:

$$\iint_D f(x, y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\,dx\,dy$$

Esboce a região $D$ e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

**63–67** Use a geometria ou simetria, ou ambas, para calcular a integral dupla.

**63.** $\displaystyle\iint_D (x + 2)\, dA, \quad D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9 - x^2}\right\}$

**64.** $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dA$, $D$ é o disco com centro na origem e raio $R$

**65.** $\displaystyle\iint_D (2x + 3y)\, dA$, $D$ é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$

**66.** $\displaystyle\iint_D (2 + x^2y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)\, dA, \quad D = \left\{(x, y) \mid |x| \leqslant |y| \leqslant 1\right\}$

**67.** $\displaystyle\iint_D (ax^3 + by^3 + \sqrt{a^2 - x^2})\, dA, \quad D = [-a, a] \times [-b, b]$

SCA **68.** Desenhe o sólido limitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e determine seu volume exato. (Utilize seu SCA para fazer esse desenho, para achar as equações dos limites da região de integração e para calcular a integral dupla.)

## 15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$, onde $R$ é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos, a descrição de $R$ é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de $R$ fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

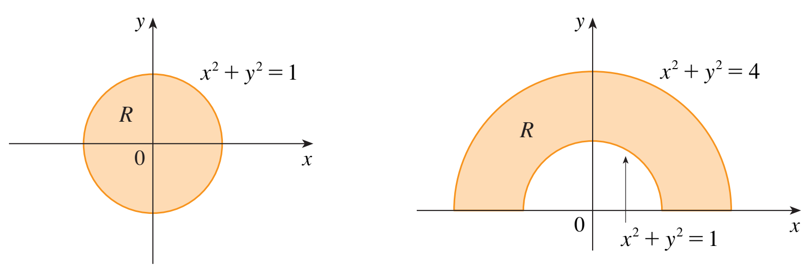



**FIGURA 1** (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Lembre-se, a partir da Figura 2, de que as coordenadas polares $(r, \theta)$ de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares $(x, y)$ pelas equações

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta}$$

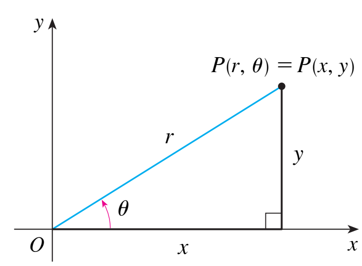



**FIGURA 2**

(Veja a Seção 10.3.)

As regiões da Figura 1 são casos especiais de um **retângulo polar**

$$R = \left\{(r, \theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\right\}$$

que é apresentado na Figura 3. Para calcularmos a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$, onde $R$ é um retângulo polar, dividimos o intervalo $[a, b]$ em $m$ subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b - a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em $n$ subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Então, os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar $R$ nos retângulos polares menores $R_{ij}$ mostrados na Figura 4.

## CAPÍTULO 14 REVISÃO

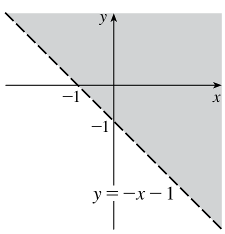
### Teste Verdadeiro-Falso

**1.** Verdadeiro **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadeiro **9.** Falso

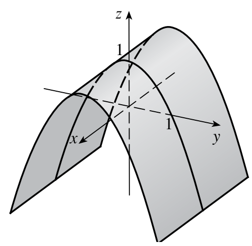
**11.** Verdadeiro

### Exercícios

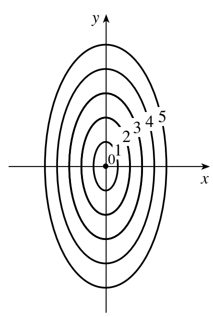
**1.** $\{(x, y) \mid y > -x - 1\}$



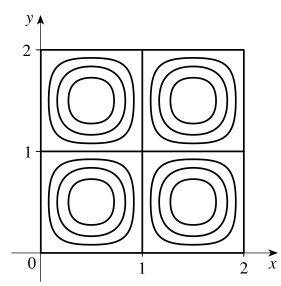

**3.**




**5.**




**7.**




**9.** $\frac{2}{3}$

**11.** (a) $\approx 3{,}5$°C/m, $-3{,}0$°C/m (b) $\approx 0{,}35$°C/m pela Equação 14.6.9 (A Definição 14.6.2 dá $\approx 1{,}1$°C/m.)
(c) $-0{,}25$

**13.** $f_x = 32xy(5y^3 + 2x^2y)^7, f_y = (16x^2 + 120y^2)(5y^3 + 2x^2y)^7$

**15.** $F_\alpha = \dfrac{2\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2} + 2\alpha \ln(\alpha^2 + \beta^2), F_\beta = \dfrac{2\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$

**17.** $S_u = \operatorname{arctg}(v\sqrt{w}), S_v = \dfrac{u\sqrt{w}}{1 + v^2w}, \quad S_w = \dfrac{uv}{2\sqrt{w}\,(1 + v^2w)}$

**19.** $f_{xx} = 24x, f_{xy} = -2y = f_{yx}, f_{yy} = -2x$

**21.** $f_{xx} = k(k-1)x^{k-2}y^lz^m, f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx},$
$f_{xz} = kmx^{k-1}y^lz^{m-1} = f_{zx}, f_{yy} = l(l-1)x^ky^{l-2}z^m,$
$f_{yz} = lmx^ky^{l-1}z^{m-1} = f_{zy}, f_{zz} = m(m-1)x^ky^lz^{m-2}$

**25.** (a) $z = 8x + 4y + 1$ (b) $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$

**27.** (a) $2x - 2y - 3z = 3$ (b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-1}{-6}$

**29.** (a) $x + 2y + 5z = 0$
(b) $x = 2 + t, y = -1 + 2t, z = 5t$

**31.** $(2, \frac{1}{2}, -1), (-2, -\frac{1}{2}, 1)$

**33.** $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z - 120$; 38,656

**35.** $2xy^3(1 + 6p) + 3x^2y^2(pe^p + e^p) + 4z^3(p\cos p + \operatorname{sen} p)$

**37.** $-47, 108$

**43.** $\langle 2xe^{yz^2}, x^2z^2e^{yz^2}, 2x^2yze^{yz^2}\rangle$ **45.** $-\frac{4}{5}$

**47.** $\sqrt{145}/2, \langle 4, \frac{9}{2}\rangle$ **49.** $\approx \frac{5}{8}$ nós/mi

**51.** Mínimo $f(-4, 1) = -11$

**53.** Máximo $f(1, 1) = 1$; pontos de sela $(0, 0), (0, 3), (3, 0)$

**55.** Máximo $f(1, 2) = 4$, mínimo $f(2, 4) = -64$

**57.** Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimos $f(1, \pm 1) = -3$, pontos de sela $(-1, \pm 1), (1, 0)$

**59.** Máximo $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$, mínimo $f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$

**61.** Máximo 1, mínimo $-1$

**63.** $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4}), (\pm 3^{-1/4}, -3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$

**65.** $P(2 - \sqrt{3}), P(3 - \sqrt{3})/6, P(2\sqrt{3} - 3)/3$

## PROBLEMAS QUENTES

**1.** $L^2W^2, \frac{1}{4}L^2W^2$ **3.** (a) $x = w/3$, base $= w/3$ (b) Sim

**7.** $\sqrt{3}/2, 3\sqrt{2}$

# CAPÍTULO 15

## EXERCÍCIOS 15.1

**1.** (a) 288 (b) 144 **3.** (a) 0,990 (b) 1,151

**5.** (a) 4 (b) $-8$ **7.** $U < V < L$

**9.** (a) $\approx 248$ (b) $\approx 15{,}5$ **11.** 60 **13.** 3

**15.** 1,141606, 1,143191, 1,143535, 1,143617, 1,143637, 1,143642

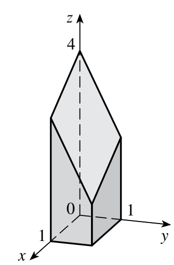
## EXERCÍCIOS 15.2

**1.** $500y^3, 3x^2$ **3.** 222 **5.** 2 **7.** 18

**9.** $\frac{21}{2}\ln 2$ **11.** $\frac{31}{30}$ **13.** $\pi$ **15.** 0

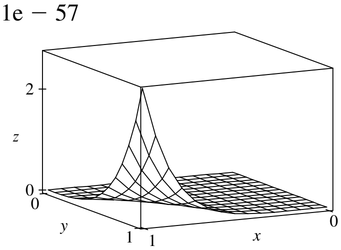
**17.** $9\ln 2$ **19.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{12}\pi$ **21.** $\frac{1}{2}e^{-6} + \frac{5}{2}$

**23.**




**25.** 51 **27.** $\frac{166}{27}$ **29.** 2 **31.** $\frac{64}{3}$

**33.** $21e - 57$



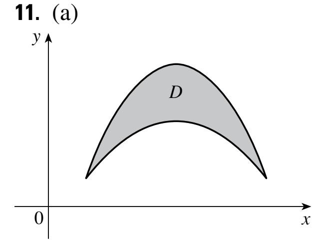

**35.** $\frac{5}{6}$ **37.** 0

**39.** O Teorema de Fubini não se aplica. O integrando tem uma descontinuidade infinita na origem.

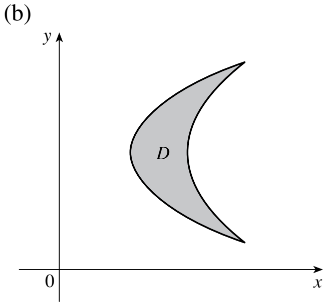
## EXERCÍCIOS 15.3

**1.** 32 **3.** $\frac{3}{10}$ **5.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 1$ **7.** $\frac{4}{3}$ **9.** $\pi$

**11.** (a)




(b)



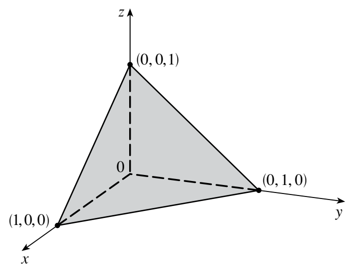

**13.** Tipo I: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$, tipo II: $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1\}$; $\frac{1}{3}$

**15.** $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} y\,dx\,dy = \frac{9}{4}$

**17.** $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ **19.** $\frac{11}{3}$ **21.** 0 **23.** $\frac{17}{60}$ **25.** $\frac{31}{8}$

**27.** 6 **29.** $\frac{128}{15}$ **31.** $\frac{1}{3}$ **33.** 0, 1,213; 0,713 **35.** $\frac{64}{3}$

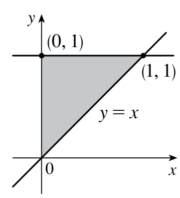
**37.**



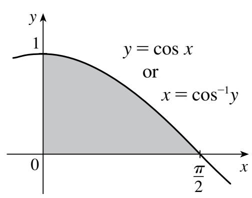

**39.** 13 984 735 616/14 549 535

**41.** $\pi/2$

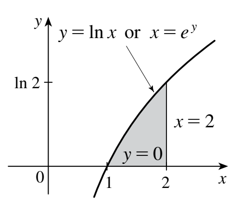
**43.** $\int_0^1 \int_x^1 f(x, y)\, dy\, dx$




**45.** $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} f(x, y)\, dx\, dy$




**47.** $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 f(x, y)\, dx\, dy$




**49.** $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ **51.** $\frac{1}{3}\ln 9$ **53.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ **55.** 1

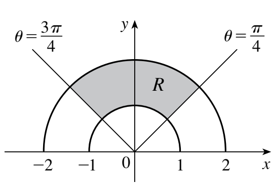
**57.** $(\pi/16)e^{-1/16} \leqslant \iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA \leqslant \pi/16$ **59.** $\frac{3}{4}$ **63.** $9\pi$

**65.** $a^2b + \frac{3}{2}ab^2$ **67.** $\pi a^2 b$

## EXERCÍCIOS 15.4

**1.** $\int_0^{3\pi/2} \int_0^4 f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$ **3.** $\int_{-1}^1 \int_0^{(x+1)/2} f(x, y)\, dy\, dx$

**5.** $3\pi/4$




**7.** $\frac{1250}{3}$ **9.** $(\pi/4)(\cos 1 - \cos 9)$

**11.** $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ **13.** $\frac{3}{64}\pi^2$ **15.** $\pi/12$

**17.** $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **19.** $\frac{16}{3}\pi$ **21.** $\frac{4}{3}\pi$ **23.** $\frac{4}{3}\pi a^3$

**25.** $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})]$ **27.** $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

**29.** $\frac{1}{2}\pi(1 - \cos 9)$ **31.** $2\sqrt{2}/3$ **33.** 4,5951

**35.** $37{,}5\pi$ m$^3$ **37.** $2/(a+b)$ **39.** $\frac{15}{16}$

**41.** (a) $\sqrt{\pi}/4$ (b) $\sqrt{\pi}/2$

## EXERCÍCIOS 15.5

**1.** 285 C **3.** $42k$, $\left(2, \frac{85}{28}\right)$ **5.** 6, $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ **7.** $\frac{8}{15}k$, $\left(0, \frac{4}{7}\right)$

**9.** $L/4$, $(L/2, 16/(9\pi))$ **11.** $\left(\frac{3}{8}, 3\pi/16\right)$ **13.** $\left(0, 45/14\pi\right)$

**15.** $(2a/5, 2a/5)$ se o vértice é (0, 0) e os lados estão ao longo dos eixos positivos

**17.** $\frac{64}{315}k$, $\frac{8}{105}k$, $\frac{88}{315}k$

**19.** $7ka^6/180$, $7ka^6/180$, $7ka^6/90$ se o vértice é (0, 0) e os lados estão ao longo dos eixos positivos

**21.** $\rho bh^3/3$, $\rho b^3h/3$; $b/\sqrt{3}$, $h/\sqrt{3}$

**23.** $\rho a^4\pi/16$, $\rho a^4\pi/16$; $a/2$, $a/2$

**25.** $m = 3\pi/64$, $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{16384\sqrt{2}}{10395\pi}, 0\right)$,

$$I_x = \frac{5\pi}{384} - \frac{4}{105},\ I_y = \frac{5\pi}{384} + \frac{4}{105},\ I_0 = \frac{5\pi}{192}$$

**27.** (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0,375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0{,}1042$

**29.** (b) (i) $e^{-0,2} \approx 0{,}8187$

(ii) $1 + e^{-1,8} - e^{-0,8} - e^{-1} \approx 0{,}3481$ (c) 2, 5

**31.** (a) $\approx 0{,}500$ (b) $\approx 0{,}632$

**33.** (a) $\iint_D (k/20)[20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}]\, dA$, onde $D$ é o disco com raio de 10 km centralizado no centro da cidade

(b) $200\pi k/3 \approx 209k$, $200\left(\pi/2 - \frac{8}{9}\right)k \approx 136k$, na borda

## EXERCÍCIOS 15.6

**1.** $15\sqrt{26}$ **3.** $3\sqrt{14}$ **5.** $12 \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

**7.** $(\pi/6)(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$ **9.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

**11.** $a^2(\pi - 2)$ **13.** 13,9783 **15.** (a) $\approx 1{,}83$ (b) $\approx 1{,}8616$

**17.** $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln[(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70})]$

**19.** 3,3213 **23.** $(\pi/6)(101\sqrt{101} - 1)$

## EXERCÍCIOS 15.7

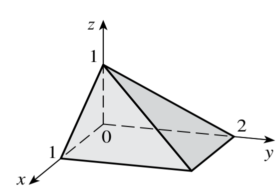
**1.** $\frac{27}{4}$ **3.** $\frac{16}{15}$ **5.** $\frac{5}{3}$ **7.** $-\frac{1}{3}$ **9.** 4 **11.** $9\pi/8$

**13.** $\frac{65}{28}$ **15.** $\frac{1}{60}$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $\frac{16}{3}$ **21.** $\frac{8}{15}$

**23.** (a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$ (b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$

**25.** 0,985

**27.**




**29.** $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{-1}^1 \int_0^{4-4z^2} \int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}/2}^{\sqrt{4-y}/2} \int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2} \int_0^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}} \int_0^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

**31.** $\int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_0^2 \int_0^{4-2z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_0^4 \int_0^{2-y/2} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^2 \int_0^{2-x^2/2} \int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}} \int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$