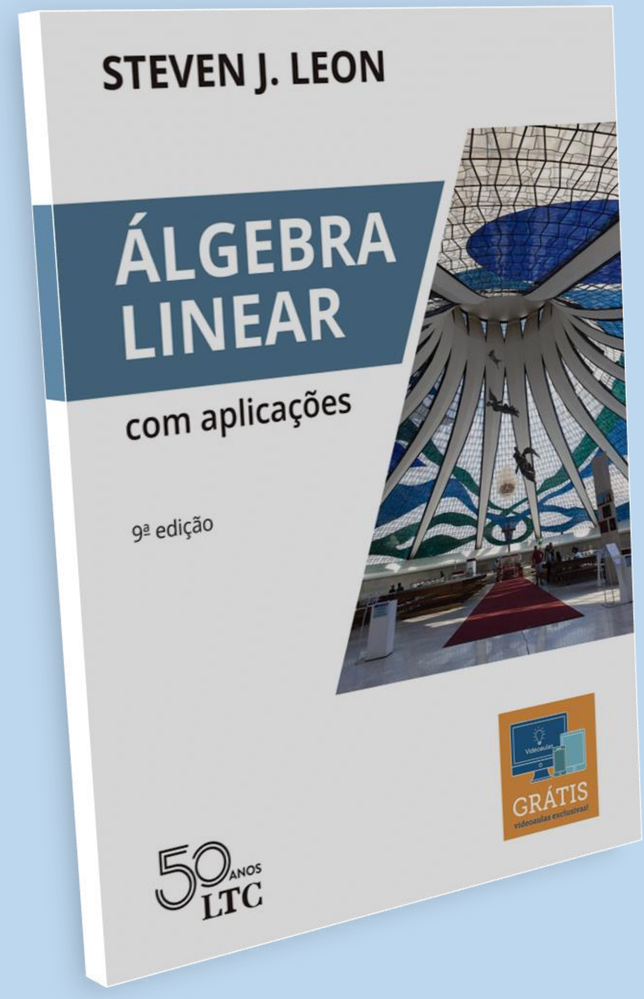
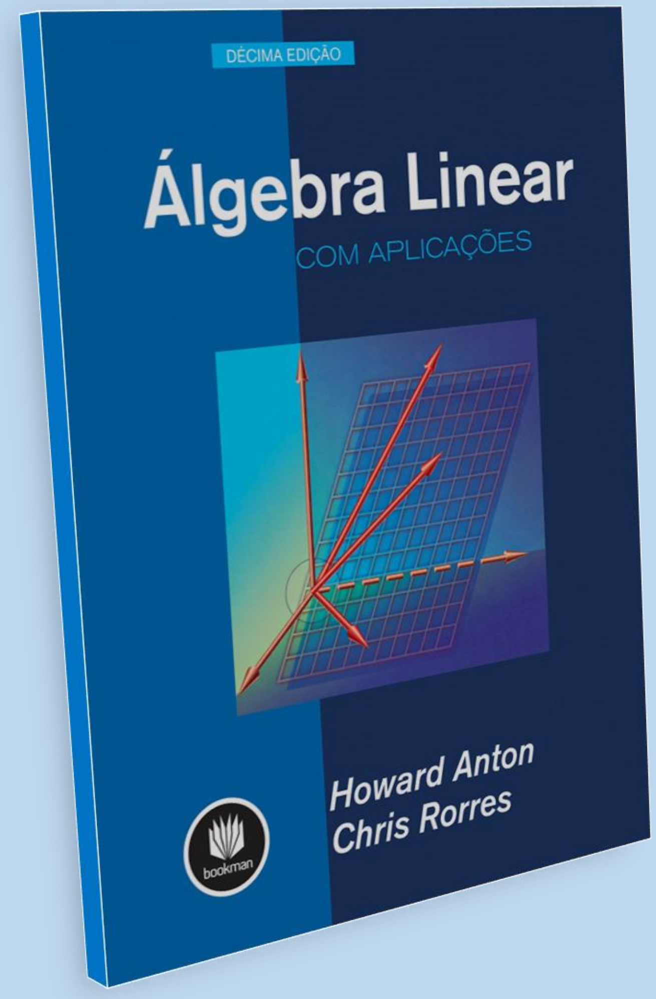
Álgebra Linear

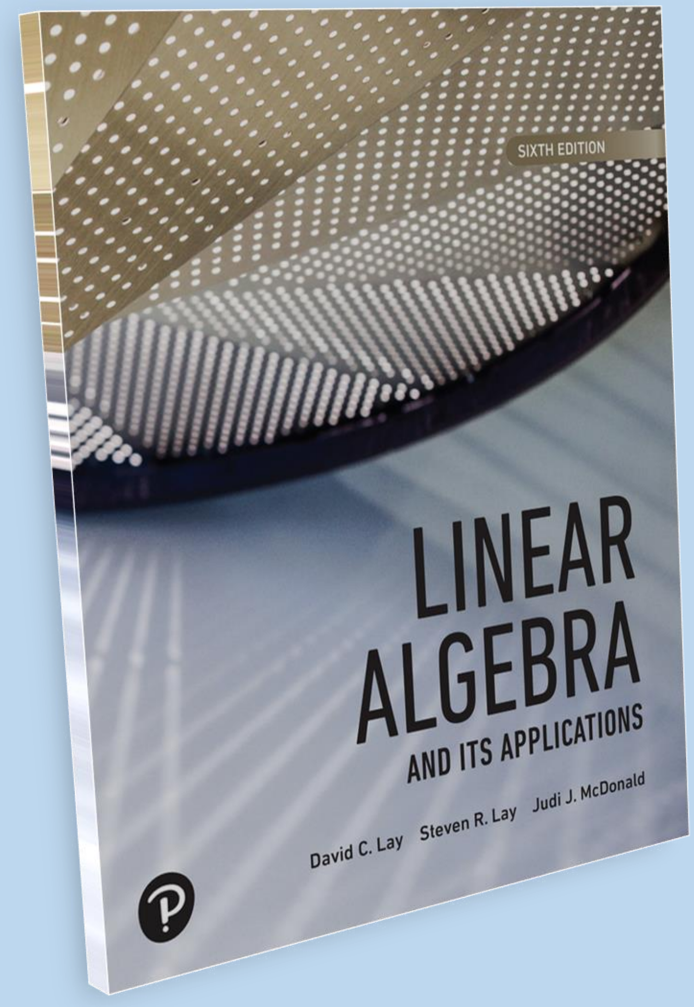
Espaços com Produto Interno

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







Produto Interno

Definição. Seja V um espaço Vetorial. Um ***produto interno*** em V é uma função que a cada par de vetores u e v em V associa um número real, denotado por $< u , v >$, que satisfaz as seguintes condições:

Para quaisquer vetores u , v e w de V e qualquer número real k,

1) $< v , v > \; \geq \; 0$;
2) $< v , v > \; = 0$ se, e somente se, $v = 0$;
3) $< u , v > \; = \; < v , u >$;
4) $< u + v , w > \; = \; < u , w > + < v , w >$;
5) $< k u , v > \; = k < u , v >$

Um espaço vetorial com um produto interno é chamado, abreviadamente, de ***espaço com produto interno***.

Produto Interno - Exemplo

Exemplo 1. Sejam $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$.
Definimos

$$< u , v > = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \qquad (1)$$

Note que

$$< u , u > = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$$

e que

$$< u , v > = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n = < v , u >,$$

Mostrando que as condições (1) e (3) da definição de produto interno são satisfeitas.
A condição (2) também é satisfeita já que

$$< u , u > = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \iff u = 0$$

Se $\mathrm{w} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, então

$$< u + v , w > = (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + \ldots + (x_n + y_n)z_n$$
$$= x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n + y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n$$
$$= < u , w > + < v , w >$$

mostrando que a condição (4) é satisfeita. A condição (5) também é satisfeita, pois se $k \in \mathbb{R}$, então

$$< k u , v > = (k\, x_1)y_1 + (k\, x_2)y_2 + \ldots + (k\, x_n)y_n$$
$$= k\,(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)$$
$$= k < u , v >$$

Assim, a fórmula (1) define um produto interno em $\mathbb{R}^n$, chamado ***produto interno usual*** de $\mathbb{R}^n$ ou ***produto escalar*** de $\mathbb{R}^n$, generalizando a noção de produto escalar de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$.

Propriedades do Produto Interno

Seja V um espaço com produto interno. Se u, v, $w \in V$ e se $k \in \mathbb{R}$, então:

(1) $< 0 , u > \; = \; < u , 0 > \; = 0$

(2) $< u , v + w > \; = \; < u , v > + < u , w >$

(3) $< u , k v > \; = k < u , v >$

(4) $< u , v - w > \; = \; < u , v > - < u , w >$

Norma de um vetor

Definição. Seja V um espaço com produto interno. Definimos a ***norma*** do vetor v de V, ou comprimento de v, denotado por $\| v \|$, como o número real

$$\| v \| = < v , v >^{1/2}$$

Se $\| v \| = 1$, dizemos que v é um vetor unitário.

A ***distância*** $d(u , v)$ entre dois vetores u e v de V é definida como

$$d(u , v) = \| u - v \| = \sqrt{< u - v \ , \ u - v >}$$

Norma de um vetor - Exemplo

Exemplo. Se $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, então

$$\| \mathrm{u} \| = < u, u >^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

e

$$\mathrm{d(u\,,\,v)} = \| \mathrm{u - v} \| = \sqrt{< u - v \ , \ \ u - v >}$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Observe-se que, no caso de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, $\| u \|$ e $d(u , v)$ são precisamente a norma e a distância usuais de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$.

Bases Ortogonais e Ortonormais

Definição. Vetores Ortogonais

Dizemos que dois vetores u e v em V são ***ortogonais*** quando $< u , v > = 0$

Definição. Conjunto Ortogonal

Um conjunto de vetores em V é chamado ***conjunto ortogonal*** se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais.

Por exemplo, o conjunto $\{(1, 2, 1), (2, 1, -4), (3, -2, 1)\}$ é um conjunto ortogonal em $\mathbb{R}^3$ com seu produto interno usual.

Definição. Conjunto ortonormal

Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem norma 1 é chamado ***conjunto ortonormal***.

Normalização de um vetor

Se v é um vetor não nulo em um espaço com produto interno, então o vetor

$$u = \frac{v}{||v||} = ||v||^{-1}v \qquad \text{tem norma 1.}$$

O processo de multiplicar um vetor não nulo pelo inverso da sua norma para obter um vetor de norma 1 é chamado de ***normalização***.

Assim, um conjunto ortogonal de vetores não nulos pode ser sempre transformado em um conjunto ortonormal, normalizando-se cada um de seus vetores.

Teorema. Todo conjunto ortogonal de vetores não nulos de V é linearmente independente.

A recíproca do Teorema acima é obviamente falsa, pois, por exemplo o conjunto $\{(1,1)\,,(1,0)\}$ de vetores em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual é linearmente independente, mas não é um conjunto ortogonal.

Se $\alpha = \{v_1\,, v_2\,,\ \ldots\,, v_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos de V, segue do Teorema anterior que α é uma base de V.

Uma base consistindo de vetores ortogonais é chamada ***base ortogonal*** e uma base consistindo de vetores ortonomais é chamada ***base ortonormal***.

Por exemplo, a base canônica de $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual é uma base ortonormal.

Teorema. Um espaço vetorial V com produto interno possui uma base ortogonal.

Ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Tomemos

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{<v_2, w_1>}{||w_1||^2} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{<v_3, w_1>}{||w_1||^2} w_1 - \frac{<v_3, w_2>}{||w_2||^2} w_2$$

$$\vdots$$

$$w_n = v_n - \frac{<v_n, w_1>}{||w_1||^2} w_1 - \ldots - \frac{<v_n, w_{n-1}>}{||w_{n-1}||^2} w_{n-1}$$

O conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal e é uma base Ortogonal de V.

Exemplo. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Aplicar o processo de Gram-Schmidt ao conjunto {(1,0,0) , (1,1,1) , (0,0,1)} para obter uma base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solução

w_1 = (1,0,0)

$$w_2 = (1,1,1) - \frac{<(1,1,1),(1,0,0)>}{||(1,0,0)||^2}(1,0,0) = (0,1,1)$$

$$w_3 = (0,0,1) - \frac{<(0,0,1),(1,0,0)>}{||(1,0,0)||^2}(1,0,0) - \frac{<(0,0,1),(0,1,1)>}{||(0,1,1)||^2}(0,1,1) = (0, -1/2 , ½)$$

Assim, {(1,0,0) , (0,1,1) , (0, -1/2 , ½)} é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

A partir da base ortogonal obtida $\{w_1, w_2, w_3\}$ pode-se obter a base ortormal $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, normalizando cada vetor w_i da base ortogonal.

$$\mu_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{(1,0,0)}{||(1,0,0)||} = (1,0,0)$$

$$\mu_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{(0,1,1)}{||(0,1,1)||} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\mu_3 = \frac{w_3}{||w_3||} = \frac{(0, -\frac{1}{2}, 1/2)}{||(0, -\frac{1}{2}, 1/2)||} = \frac{(0, -\frac{1}{2}, 1/2)}{\sqrt{0^2+(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}} = \frac{(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sqrt{1/2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Calculando a norma dos vetores $\{\mu_1 , \mu_2 , \mu_3\}$

$|| \mu_1 || = || (1,0,0) || = 1$

$|| \mu_2 || = || (0 , \frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2}) || = \sqrt{0^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$

$|| \mu_3 || = || (0 , -\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2}) || = \sqrt{0^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$

Logo, o conjunto $\{\mu_1 , \mu_2 , \mu_3\}$ é uma ***base ortonormal*** de $\mathbb{R}^3$.