

Portanto,

$$15 \quad W = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(b)|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(a)|^2$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}(t)|^2$, ou seja, a metade da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade escalar, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto, podemos reescrever a Equação 15 como

$$16 \quad W = K(B) - K(A)$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nas extremidades de C .

Agora vamos admitir que \mathbf{F} seja um campo de forças conservativo, ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto de (x, y, z) é definida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, portanto temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

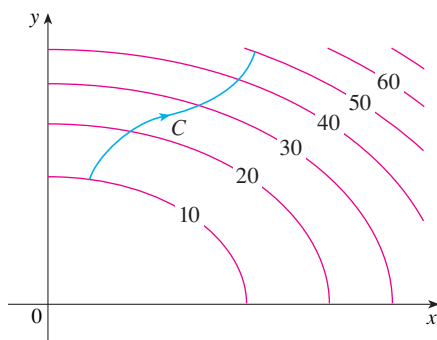
Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e sua energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei da Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

16.3 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde C tem equações paramétricas

$$x = t^2 + 1, \quad y = t^3 + t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$x \backslash y$	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3–10 Determine se \mathbf{F} é ou não um campo vetorial conservador. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \sin y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y \mathbf{i} + e^x \sin y \mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\mathbf{i} + (4xy + 3)\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \sin y)\mathbf{i} + (e^x + x \cos y)\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y^{-2})\mathbf{i} + (x^2 - 2xy^{-3})\mathbf{j}, y < 0$

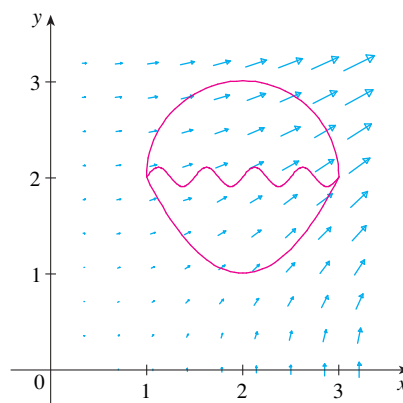
9. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\mathbf{i} + (3x^2y^2 + x/y)\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cosh xy + \sinh xy)\mathbf{i} + (x^2 \cosh xy)\mathbf{j}$

11. A figura mostra o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$ e três curvas que começam em $(1, 2)$ e terminam em $(3, 2)$.

(a) Explique por que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tem o mesmo valor para as três curvas.

(b) Qual é esse valor comum?



12–18 (a) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$,
 C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2 \mathbf{i} + x^2y \mathbf{j}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = \langle t + \sin \frac{1}{2}\pi t, t + \cos \frac{1}{2}\pi t \rangle, 0 \leq t \leq 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy} \mathbf{i} + x^2e^{xy} \mathbf{j}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}, 0 \leq t \leq \pi/2$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 2z) \mathbf{k}$,
 C é o segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z + 2xz^2) \mathbf{i} + 2xyz \mathbf{j} + (xy^2 + 2xz^2) \mathbf{k}$,
 $C: x = \sqrt{t}, y = t + 1, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xz} \mathbf{i} + e^{xz} \mathbf{j} + xye^{xz} \mathbf{k}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = (t^2 + 1) \mathbf{i} + (t^2 - 1) \mathbf{j} + (t^2 - 2t) \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin y \mathbf{i} + (x \cos y + \cos z) \mathbf{j} - y \sin z \mathbf{k}$,
 $C: \mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}, 0 \leq t \leq \pi/2$

19–20 Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C \tan y \, dx + x \sec^2 y \, dy$,
 C é qualquer caminho de $(1, 0)$ a $(2, \pi/4)$

20. $\int_C (1 - ye^{-x}) \, dx + e^{-x} \, dy$,
 C é qualquer caminho de $(0, 1)$ a $(1, 2)$

21. Suponha que você seja solicitado a determinar a curva que exige o mínimo de trabalho para um campo de força \mathbf{F} para mover uma partícula de um ponto a outro ponto. Você decide verificar primeiro se \mathbf{F} é conservativo, e de fato verifica-se que ela é. Como você responde à solicitação?

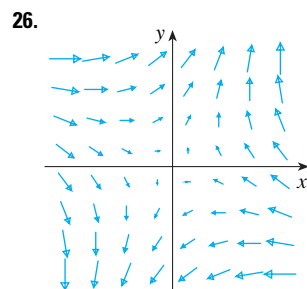
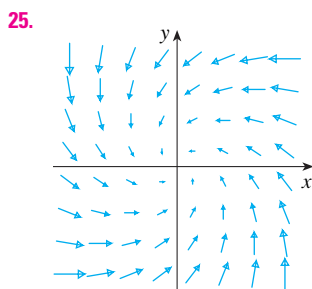
22. Suponhamos que uma experiência determine que a quantidade de trabalho necessária para um campo de força \mathbf{F} para mover uma partícula do ponto $(1, 2)$ para o ponto de $(5, -3)$ ao longo de uma curva C_1 é de $1,2 \mathbf{J}$ e do trabalho realizado por \mathbf{F} em mover a partícula ao longo de outra curva C_2 entre os mesmos dois pontos é de $1,4 \mathbf{J}$. O que você pode dizer sobre \mathbf{F} ? Por quê?

23–24 Determine o trabalho realizado pelo campo de força \mathbf{F} ao mover um objeto de P para Q .

23. $\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2} \mathbf{i} + 3x\sqrt{y} \mathbf{j}$; $P(1, 1), Q(2, 4)$

24. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y} \mathbf{i} - xe^{-y} \mathbf{j}$; $P(0, 1), Q(2, 0)$

25–26 A partir do gráfico de \mathbf{F} você diria que o campo é conservativo? Explique.



27. Se $\mathbf{F}(x, y) = \sin y \mathbf{i} + (1 + x \cos y) \mathbf{j}$, use um gráfico para conjecturar se \mathbf{F} é conservativo. Então, determine se sua conjectura estava correta.

28. Seja $\mathbf{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = \sin(x - 2y)$. Encontre curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.

(a) $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ (b) $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$

29. Mostre que, se um campo vetorial $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k}$ é conservativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

30. Use o Exercício 29 para mostrar que a integral de linha $\int_C y \, dx + x \, dy + xyz \, dz$ não é independente do caminho.

31–34 Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo por caminhos e (c) simplesmente conexo.

31. $\{(x, y) | 0 < y < 3\}$ **32.** $\{(x, y) | 1 < |x| < 2\}$

33. $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

34. $\{(x, y) | (x, y) \neq (2, 3)\}$

35. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Mostre que $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$.

(b) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho. [Dica: Calcule $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 e C_2 são as metades superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] Isto contradiz o Teorema 6?

36. (a) Suponha que \mathbf{F} seja um campo vetorial inverso do quadrado, ou seja,

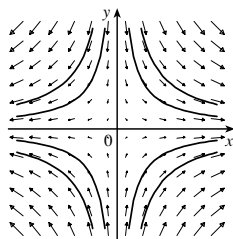
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguma constante c , onde $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por \mathbf{F} ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos à origem.

(b) Um exemplo de um campo de quadrado inverso é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 4 na Seção 16.1. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1,52 \times 10^8$ km do Sol) ao periélio (em uma distância mínima de $1,47 \times 10^8$ km). (Use os valores $m = 5,97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1,99 \times 10^{30}$ kg e $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².)

(b) Outro exemplo de campo inverso do quadrado é o campo elétrico $\mathbf{F} = eqQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 5 da Seção 16.1. Suponha que um elétron com carga de $-1,6 \times 10^{-19}$ C esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada à distância de 10^{-12} m do elétron e se move para uma posição que está à metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor $\epsilon = 8,985 \times 10^9$.)

35. (a)

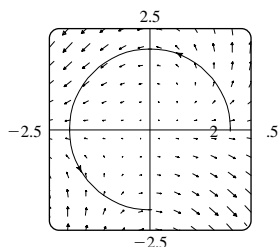


$$y = C/x$$

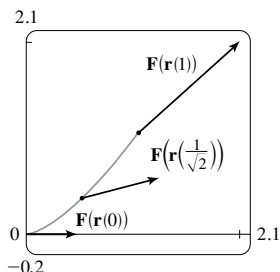
 (b) $y = 1/x, x > 0$

EXERCÍCIOS 16.2

1. $\frac{1}{54}(145^{3/2} - 1)$ 3. 1638,4 5. $\frac{243}{8}$ 7. $\frac{5}{2}$
 9. $\sqrt{5}\pi$ 11. $\frac{1}{12}\sqrt{14}(e^6 - 1)$ 13. $\frac{2}{5}(e - 1)$ 15. $\frac{35}{3}$
 17. (a) Positiva (b) Negativa 19. 45
 21. $\frac{6}{5} - \cos 1 - \sin 1$ 23. 1,9633 25. 15,0074
 27. $3\pi + \frac{2}{3}$


 29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$

(b)



31. $\frac{172\,704}{5\,632\,705}\sqrt{2}(1 - e^{-14\pi})$ 33. $2\pi k, (4/\pi, 0)$
 35. (a) $\bar{x} = (1/m) \int_C xp(x, y, z) ds$,
 $\bar{y} = (1/m) \int_C yp(x, y, z) ds$,
 $\bar{z} = (1/m) \int_C zp(x, y, z) ds$, onde $m = \int_C \rho(x, y, z) ds$
 (b) $(0, 0, 3\pi)$
 37. $I_x = k(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3})$, $I_y = k(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})$ 39. $2\pi^2$ 41. $\frac{7}{3}$
 43. (a) $2ma\mathbf{i} + 6mbt\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$ (b) $2ma^2 + \frac{9}{2}mb^2$
 45. $\approx 1,67 \times 10^4$ pés-lb 47. (b) Sim 51. $\approx 22\text{ J}$

EXERCÍCIOS 16.3

1. 40 3. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$
 5. Não conservativo 7. $f(x, y) = ye^x + x \sin y + K$
 9. $f(x, y) = x \ln y + x^2y^3 + K$
 11. (b) 16 13. (a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ (b) 2
 15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77
 17. (a) $f(x, y, z) = ye^{xz}$ (b) 4 19. 2
 21. Não importa qual curva é escolhida.
 23. 30 25. Não 27. Conservativo
 31. (a) Sim (b) Sim (c) Sim
 33. (a) Não (b) Sim (c) Sim

EXERCÍCIOS 16.4

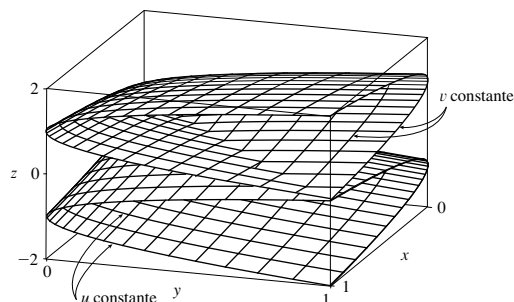
1. 8π 3. $\frac{2}{3}$ 5. 12 7. $\frac{1}{3}$ 9. -24π 11. $-\frac{16}{3}$
 13. 4π 15. $-8e + 48e^{-1}$ 17. $-\frac{1}{12}$ 19. 3π 21. (c) $\frac{9}{2}$
 23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ se a região é a porção do disco $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro quadrante
 27. 0

EXERCÍCIOS 16.5

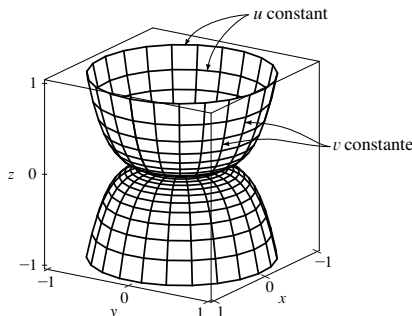
1. (a) $-x^2\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ (b) yz
 3. (a) $ze^x\mathbf{i} + (xye^z - yze^x)\mathbf{j} - xe^z\mathbf{k}$ (b) $y(e^z + e^x)$
 5. (a) 0 (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 7. (a) $\langle -e^y \cos z, -e^z \cos x, -e^x \cos y \rangle$
 (b) $e^x \sin y + e^y \sin z + e^z \sin x$
 9. (a) Negativa (b) $\text{rot } \mathbf{F} = 0$
 11. (a) Zero (b) $\text{rot } \mathbf{F}$ pontos na direção negativa de z
 13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ 15. Não conservativo
 17. $f(x, y, z) = xe^{yz} + K$ 19. Não

EXERCÍCIOS 16.6

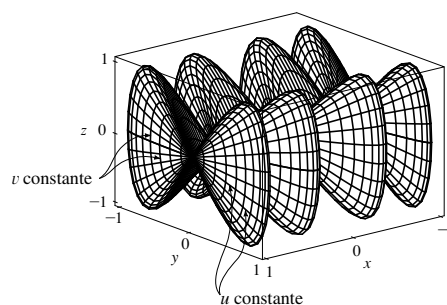
1. P : não; Q : sim
 3. Plano por $(0, 3, 1)$ contendo os vetores $\langle 1, 0, 4 \rangle, \langle 1, -1, 5 \rangle$
 5. Parabolóide hiperbólico
 7.



8.



11.



13. IV 15. II 17. III

$$19. x = u, y = v - u, z = -v$$

$$21. y = y, z = z, x = \sqrt{1 + y^2 + \frac{1}{4}z^2}$$

$$23. x = 2 \sin \phi \cos \theta, y = 2 \sin \phi \sin \theta,$$

$$z = 2 \cos \phi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$[\text{ou } x = x, y = y, z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 2]$$

$$25. x = x, y = 4 \cos \theta, z = 4 \sin \theta, 0 \leq x \leq 5, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$29. x = x, y = e^{-x} \cos \theta,$$

$$z = e^{-x} \sin \theta, 0 \leq x \leq 3,$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

