Cálculo I
Prof. Rafael B. de R. Borges

Lista de exercícios - Derivada

Questão 1. Definimos as funções trigonométricas hiperbólicas *seno hiperbólico* ($\operatorname{senh} x$) e *cosseno hiperbólico* ($\cosh x$) por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{1}$$

Definimos as demais funções hiperbólicas de maneira análoga às funções circulares, isto é,

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \tag{2}$$

e etc.

a) Use as igualdades (1) para mostrar que $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$. Ou seja, essas funções podem ser usadas para parametrizar a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ (daí o nome).

b) Calcule a derivada de e^{-x} usando a regra

(i) do inverso multiplicativo; (ii) da cadeia.

c) Use (1) e a letra (b) para mostrar que $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$ e $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$.

d) Use as definições das funções hiperbólicas (isto é, (2) e etc.) e a letra (c) para calcular as derivadas de:

(i) $\operatorname{tgh} x$
(ii) $\operatorname{cotgh} x$
(iii) $\operatorname{sech} x$
(iv) $\operatorname{cossech} x$

Questão 2. Calcule as seguintes derivadas, usando a regra da função inversa:

a) $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$
b) $\operatorname{arccosh} x$
c) $\operatorname{arctgh} x$
d) $\operatorname{arcsech} x$

Questão 3. Calcule a derivada das seguintes funções, usando a regra do produto:

a) e^{2x}
b) $\operatorname{sen} x \cos x$
c) $x^2 e^x$
d) $\sqrt{x} \cosh x$
e) $(1 + x^2) \operatorname{arctg} x$
f) $x^2 \operatorname{senh} x \operatorname{sen} x$
g) $\dfrac{\sec x}{x^3}$
h) $\operatorname{tg}^2 x$

Questão 4. Calcule a derivada das seguintes funções, usando a regra do inverso multiplicativo ou da divisão:

a) $\dfrac{4}{x^4}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $\dfrac{\cos x}{x^2}$

d) $\dfrac{x}{\ln x}$

e) $\dfrac{\cos x}{\cosh x}$

f) $\dfrac{e^x + x}{x+1}$

g) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

h) $\dfrac{x^4}{x^2-1}$

Questão 5. Calcule a derivada das seguintes funções, usando a regra da cadeia:

a) e^{kx}, onde k é uma constante

b) $\ln(x^4 + x)$

c) $(x^3 + 2x - 1)^{100}$

d) 2^x (*dica:* $2^x = (e^{\ln 2})^x$)

e) x^x (*dica:* $x^x = (e^{\ln x})^x$)

f) $\sec^2 x$

g) $\operatorname{sen}(1/x)$

h) $\sqrt{\cosh x^2}$

Questão 6. Repare que a resposta da questão 3h é a mesma da questão 5f. Tente explicar o porquê.

Questão 7. Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $\sqrt[10]{x} + 2\ln 2$

b) $\dfrac{e^{x^2} - x^2}{\sqrt{\ln x}}$

c) $(x \ln x - x)^{\pi}$

d) $\dfrac{e^{\sec(\operatorname{tg} x)} + 1}{\cosh 5}$

Questão 8. Ache a equação da reta tangente a $f(x)$ no ponto x_0:

a) $f(x) = e^{2x}$ (questão 3a), $x_0 = 1$

b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (q. 4g), $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \ln(x^4 + x)$ (q. 5b), $x_0 = 1$

d) $f(x) = (x^3 + 2x - 1)^{100}$ (q. 5c), $x_0 = 0$

Questão 9. Seja $f(x) = x^3 + x + 1$ e $g(x) = f^{-1}(x)$.

a) Explique por que $g(1) = 0$.

b) Calcule $g'(1)$.

Questão 10. Considere $f(x)$ derivável. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

Dica do Mestre: use o velho truque sujo da Matemática de somar e subtrair um termo conveniente.

Gabarito

1a)

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1\end{aligned}$$

1b) $\left(\dfrac{1}{e^x}\right)' = -\dfrac{(e^x)'}{e^{2x}} = -\dfrac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$

1b) $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$

1c) $(\operatorname{senh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

1d) $(\operatorname{tgh} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right)' = \dfrac{\cosh x \cdot \cosh x - \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$

1d) $(\operatorname{sech} x)' = \left(\dfrac{1}{\cosh x}\right)' = -\dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} = -\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{sech} x$

2a)

$g(x) = \sqrt[n]{x}, \quad f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}, \quad g'(x) = \dfrac{1}{n(g(x))^{n-1}} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

2b) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

2c) Como $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, temos

$\dfrac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \dfrac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x} \quad \therefore \quad 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x.$

Assim,

$g(x) = \operatorname{arctgh} x, \quad f(x) = \operatorname{tgh} x, \quad f'(x) = \operatorname{sech}^2 x,$
$g'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sech}^2(\operatorname{arctgh} x)} = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2(\operatorname{arctgh} x)} = \dfrac{1}{1 - x^2}.$

2d) $-\dfrac{1}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$

3a) $(e^x \cdot e^x)' = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$

3b) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

3c) $2x\,e^x + x^2 e^x = (x^2+2x)\,e^x$

3d) $\dfrac{\cosh x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,\operatorname{senh} x$

3e) $2x\ \operatorname{arctg} x + \dfrac{1+x^2}{x^2+1} = 2x\ \operatorname{arctg} x + 1$

3f) $2x \operatorname{senh} x \operatorname{sen} x + x^2 \cosh x \operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{senh} x \cos x$

3g) $\dfrac{\operatorname{tg} x \sec x}{x^3} - 3\,\dfrac{\sec x}{x^4}$

3h) $2\sec^2 x \operatorname{tg} x$

4a) $-4\dfrac{(x^4)'}{(x^4)^2} = -16\dfrac{x^3}{x^8} = -\dfrac{16}{x^5}$

4b) $-\dfrac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = -\dfrac{1/2\sqrt{x}}{x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

4c) $\dfrac{(\cos x)'x^2 - \cos x (x^2)'}{x^4} = \dfrac{-x^2 \operatorname{sen} x - 2x\cos x}{x^4}$

4d) $\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

4e) $\dfrac{-\operatorname{sen} x \cosh x - \cos x \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x}$

4f) $\dfrac{(e^x+1)(x+1) - (e^x+x)}{(x+1)^2}$

4g) $\dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

4h) $\dfrac{4x^3(x^2-1) - 2x^5}{(x^2-1)^2}$

5a) $u = kx, (e^u)' = e^u u' = ke^{kx}$

5b) $u = x^4 + x, (\ln u)' = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{4x^3+1}{x^4+x}$

5c) $100(x^3+2x-1)^{99}(3x^2+2)$

5d) $u = (\ln 2)x, (e^u)' = \ln 2 \cdot e^{(\ln 2)x} = \ln 2 \cdot 2^x$

5e) $(\ln x + 1)\, x^x$

5f) $u = \sec x, (u^2)' = 2uu' = 2\sec x(\operatorname{tg} x \sec x) = 2\operatorname{tg} x \sec^2 x$

5g) $-\dfrac{\cos(1/x)}{x^2}$

5h) $\dfrac{1}{2\sqrt{\cosh x^2}} \cdot \operatorname{senh} x^2 \cdot 2x$

7a) $\dfrac{1}{10\sqrt[10]{x^9}}$

7b) $\dfrac{(2xe^{x^2} - 2x)\sqrt{\ln x} - (e^{x^2} - x^2)/2x\sqrt{\ln x}}{\ln x}$

7c) $\pi(x\ln x - x)^{\pi-1}\ln x$

7d) $\dfrac{e^{\sec(\operatorname{tg} x)}\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)\sec(\operatorname{tg} x)\sec^2 x}{\cosh 5}$

8a) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = e^2 + 2e^2(x-1)$

8b) $y = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

8c) $y = \ln 2 + \dfrac{5}{2}(x-1)$

8d) $y = 1 - 200x$

9b) $g'(1) = \dfrac{1}{f'(g(1))} = \dfrac{1}{3\cdot 0^2 + 1} = 1$