1a Prova de Cálculo III – 14/12/2022
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Instruções para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- Resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas absurdas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **São proibidos:** folha própria de rascunho, calculadora, e celular. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.
- **Não desgrampeie o caderno de provas.**

Boa prova!

1. Seja C a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$.

a) (1 ponto) Esboce a curva usando as equações paramétricas para marcar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

Solução:
https://www.geogebra.org/m/cAsHbXEU

b) (1 ponto) Elimine o parâmetro t para encontrar uma equação cartesiana da curva.

Solução:
$x^3 = y^2$.
(Note que isto é diferente de $y = x^{3/2}$, pois só a equação acima permite $x < 0$.)

2. (2 pontos) Calcule o comprimento de arco da curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (3t^2, 1 - 4t^2)$$

no domínio $t \in [1, 2]$.

Solução:

$$\vec{r}'(t) = (6t, -8t),$$
$$L = \int_C \|\vec{r}'(t)\|\, dt = \int_1^2 \sqrt{36t^2 + 64t^2}\, dt = \int_1^2 10t\, dt = 10.$$

3. (2 pontos) Seja

$$\vec{r}(t) = (t^2,\ \operatorname{sen}(t) - t\cos(t),\ \cos(t) + t\operatorname{sen}(t)).$$

Calcule $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ e $\vec{B}(t)$.

Solução:

$$\vec{r'}(t) = (2t, t\,\mathrm{sen}(t), t\cos(t)),$$
$$\|\vec{r'}(t)\| = \sqrt{4t^2 + t^2\,\mathrm{sen}^2(t) + t^2\cos^2(t)} = \sqrt{5}t,$$
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{\|\vec{r'}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}t}(2t, t\,\mathrm{sen}(t), t\cos(t)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, \mathrm{sen}(t), \cos(t)),$$
$$\vec{T'}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, \cos(t), -\mathrm{sen}(t)),$$
$$\|\vec{T'}(t)\| = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t)} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T'}(t)}{\|\vec{T'}(t)\|} = (0, \cos(t), -\mathrm{sen}(t)),$$
$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\, 2\,\mathrm{sen}(t),\, 2\cos(t)).$$

4. Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde:

a) (2 pontos) $\vec{F}(x,y) = (x, y+2)$, $\quad \vec{r}(t) = (t - \mathrm{sen}\, t, 1 - \cos t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$.

Solução:

$$\vec{r}'(t) = (1 - \cos t,\, \mathrm{sen}\, t)$$
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (x,\, y+2) \cdot (1 - \cos t,\, \mathrm{sen}\, t)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (t - \mathrm{sen}\, t,\, 1 - \cos t + 2) \cdot (1 - \cos t,\, \mathrm{sen}\, t)\, dt$$
$$= \frac{t^2}{2} - \cos t - t\,\mathrm{sen}\, t - 2\cos t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

b) (2 pontos) $\vec{F}(x,y) = (2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y})$, $\quad \vec{r}(t) = (t^2, \ln(t+1))$, $\quad 0 \le t \le 1$.

Solução:

Seja $f(x,y) = e^{x^2y}$. Observe que $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$. Assim, pelo Teorema Fundamental das Integrais de Linha,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x(t), y(t))\Big|_{t=0}^{t=1} = e^{x^2(t)y(t)}\Big|_0^1 = e^{t^4\ln(t+1)}\Big|_0^1 = 2 - 1 = 1.$$