



**UENF**

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

**CCT**  
**LCMAT**



# Distribuições Discretas de Probabilidade

Prof. Fermín Alfredo Tang Montané

# Distribuições Discretas de Probabilidade

- ▶ Muitas variáveis aleatórias associadas a experimentos aleatórios têm propriedades similares e, portanto, podem ser descritas através de uma mesma distribuição de probabilidade, com pressuposições bem definidas.
- ▶ A escolha da distribuição de probabilidade deve ser criteriosa de modo que descreva corretamente as observações geradas no experimento aleatório.

# Distribuição Uniforme

- ▶ Seja uma variável aleatória  $X$  discreta que assume os valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . A função de probabilidade para a variável aleatória  $X$  com distribuição uniforme é definida por:

$$P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad \forall x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

- A esperança e a variancia neste caso são:

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2}{n}$$

# Distribuição Uniforme

## Função de Densidade e Cumulativa

- Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.



$$P(X = x) = \frac{1}{10} \quad x = 1, 2, \dots, 10$$



$$F(X = x) = \sum_{s=1}^x \frac{1}{10}, \quad x = 1, 2, \dots, 10$$

# Distribuição Uniforme

## Exemplo

- Seja o experimento aleatório em que um dado não viciado é lançado. Considerando a variável aleatória  $X$  sendo a observação da face que ocorre, determine a função de probabilidade.
- **Resposta:**
- A variável aleatória  $X$ , tem 6 valores possíveis com igual probabilidade.

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Assim a função de probabilidade é uniforme.

$$P(X = x) = \frac{1}{n} = \frac{1}{6}, \quad \forall x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

# Distribuição de Bernoulli

## Função de Densidade de Probabilidade

- Considere um experimento aleatório. Seja  $p$  a probabilidade de sucesso do experimento e  $q=1-p$  a probabilidade de fracasso.
- Seja  $X$  uma variável aleatória com dois valores possíveis: 1 se o resultado do experimento for sucesso e 0 se o resultado for um fracasso.
- Esta variável aleatória possui distribuição binomial com a seguinte função de probabilidade:

$$P(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

- Onde  $p$  é parâmetro da distribuição.
- A esperança e a variância neste caso são:

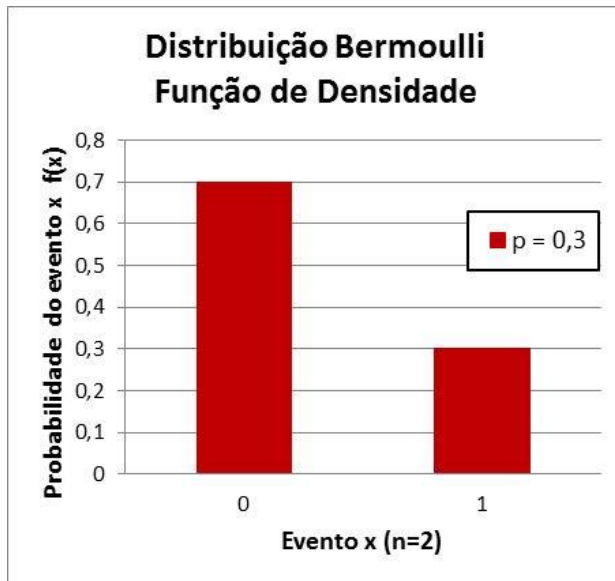
$$E(X) = p$$

$$V(X) = pq$$

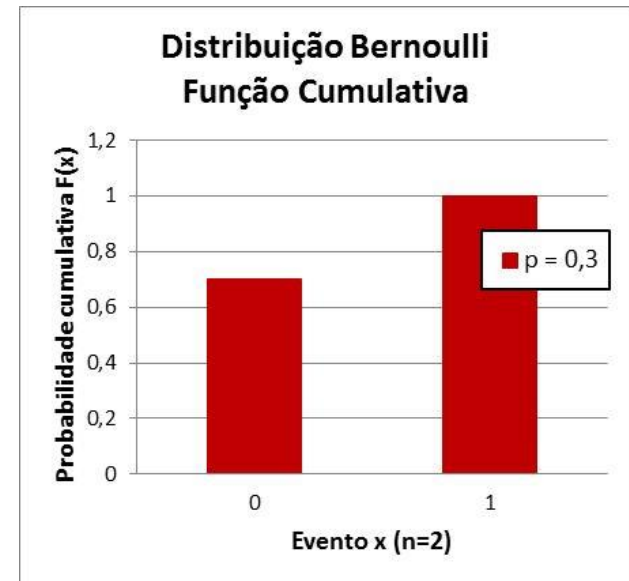
# Distribuição Bernoulli

## Função de Densidade e Cumulativa

- Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.



$$P(X = x) = \left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$



$$F(X = x) = \sum_{s=0}^x \left(\frac{3}{10}\right)^s \left(\frac{7}{10}\right)^{1-s}, \quad x = 0, 1$$

# Distribuição de Bernoulli

## Esperança e Variância

- **Esperança Matemática**

$$E(X) = \mu = 1.p + 0.q = p$$

- **Variância**

$$V(X) = \sigma^2 = (1 - p)^2.p + (0 - p)^2.q = p.q$$

- **Observações:**

- 1ª) Quanto maior a probabilidade de sucesso, maior é a esperança matemática;
- 2ª) A variância será máxima quando  $p=q=0,5$ .



# Distribuição de Bernoulli

## Exemplo

- Considere o seguinte experimento aleatório:
- $E = \text{“um dado é lançado e o resultado é observado”}$ .
- Considere a variável aleatória  $X$ , sendo que:
  - $X=1$ , quando ocorre face 4;
  - $X=0$ , quando não ocorre face 4.
- Determine a função de probabilidade para a variável aleatória  $X$ .
- **Resposta:**
- A ocorrência de uma face 4, corresponde ao sucesso, com probabilidade  $p=1/6$ .

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

# Distribuição de Binomial

## Função de Densidade de Probabilidade

- Esta distribuição recebe seu nome em homenagem à Isaac Newton(1643-1727).
- Considere uma sequência de experimentos independentes (Bernoulli).
- Seja  $p$  a probabilidade de sucesso de um experimento e  $q=1-p$  a probabilidade de fracasso.
- Seja  $X$  uma variável aleatória indicando o número de sucessos em um conjunto de  $n$  experimentos independentes. A variável aleatória  $X$  possui a seguinte função de probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Onde  $n$  e  $p$  são parâmetros da distribuição.
- A esperança e a variância neste caso são:

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

# Distribuição de Binomial

## Descrição

- Considere inicialmente uma sequência qualquer de  $n$  experimentos:

$SSS...SFFFF...F$

- Considerando que  $x$  é o número de sucessos na sequência, então esta sequência tem  $x$  sucessos e  $(n-x)$  fracassos.
- Considerando a independência e que a probabilidade de sucesso  $p$  e a de fracasso  $q$  são constantes para todas as  $n$  repetições do experimento, então a probabilidade de ocorrência desta sequência é:

$$p \cdot p \cdot p \dots p \cdot q \cdot q \cdot q \dots q = p^x q^{n-x}$$

- Pode-se ter  $x$  sucessos e  $(n-x)$  fracassos em  $n$  repetições do experimento mediante diferentes sequências de eventos. Especificamente, existem:

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- sequências possíveis, todas com igual probabilidade de ocorrência:  $p^x q^{n-x}$

# Distribuição de Binomial

## Descrição

- Assim, a probabilidade de ter  $x$  sucessos em  $n$  experimentos Bernoulli é dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Onde:

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- É chamado de número binomial.

# Distribuição de Binomial

## Esperança e Variância

- **Esperança Matemática**

Sendo  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  os experimentos de Bernoulli.

Então:  $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ .

$$E(X) = \mu = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n)$$

$$E(X) = \mu = p + p + p + \dots + p$$

$$E(X) = \mu = n.p$$

- **Variância**

$$V(X) = \sigma^2 = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \dots + V(X_n)$$

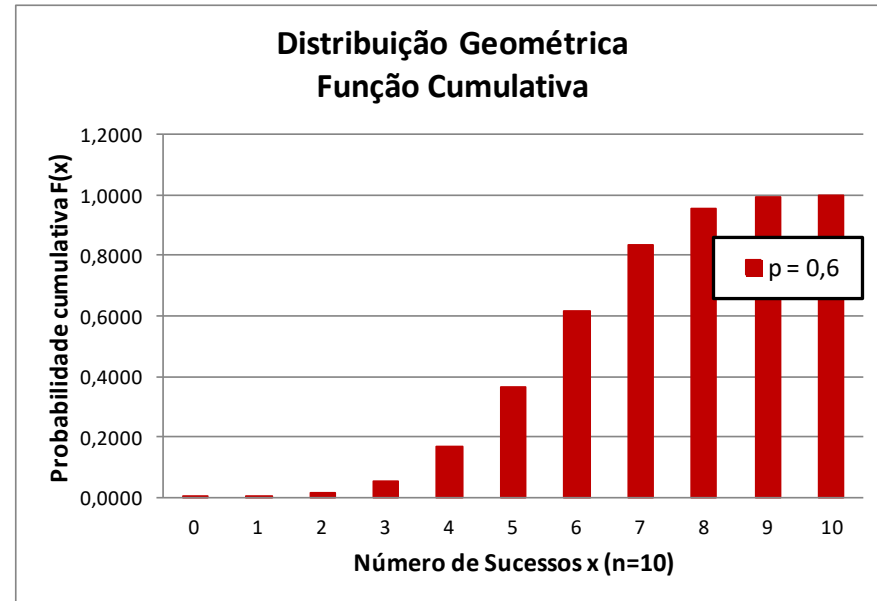
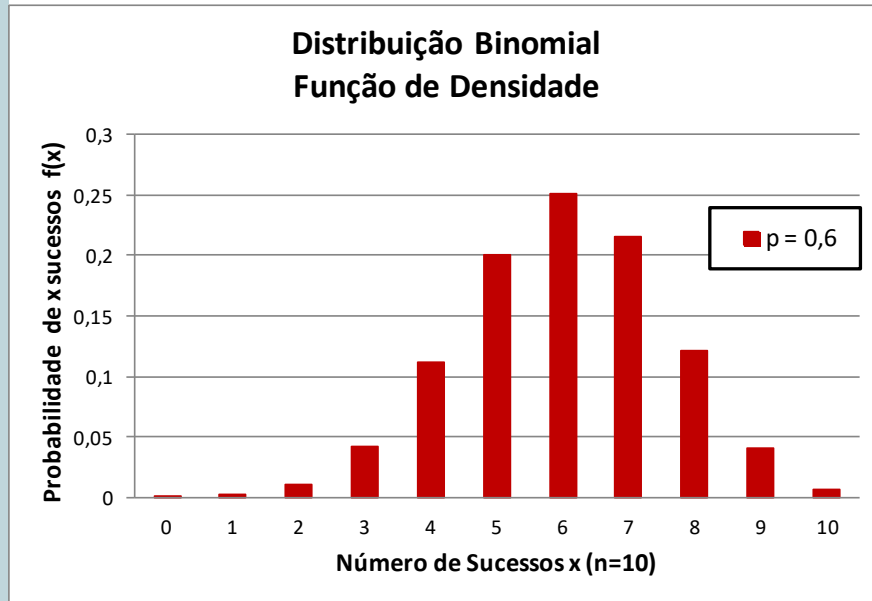
$$V(X) = \sigma^2 = p.q + p.q + p.q + \dots + p.q$$

$$V(X) = \sigma^2 = n.p.q$$

# Distribuição de Binomial

## Função de Densidade e Cumulativa

- Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.



$$P(X = k) = \binom{10}{k} (0,6)^k (0,4)^{10-k}, \quad k = 0, \dots, 10$$

$$F(X = k) = \sum_{s=0}^k \binom{10}{s} (0,6)^s (0,4)^{10-s}, \quad k = 0, \dots, 10$$

# Distribuição de Binomial

## Exemplos

- 1) Um experimento aleatório consiste em lançar 8 moedas não viciadas. Determine a probabilidade de ocorrer exatamente 4 coroas.
- 2) Numa fábrica, 10% dos copos de vidro se quebram ao serem colocados em caixas que comportam 5 copos. Escolhendo ao acaso uma caixa, determine a probabilidade de:
  - i) Haver 3 copos quebrados;
  - ii) Haver algum copo quebrado.
- 3) A probabilidade de sair coroa no lançamento de uma moeda viciada é quatro vezes a probabilidade de sair cara. Qual a probabilidade de sair 4 coroas em 6 lançamentos desta moeda?

# Distribuição de Geométrica

## Função de Densidade de Probabilidade

- Considere uma sequência de experimentos Bernoulli, independentes . Seja  $p$  a probabilidade de sucesso de um experimento e  $q=1-p$  a probabilidade de fracasso.
- Seja  $X$  uma variável aleatória indicando o número de tentativas sucessivas até a ocorrência do primeiro sucesso. Esta variável aleatória possui distribuição geométrica com a seguinte função de probabilidade:

$$P(X = x) = pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

- Onde  $p$  é parâmetro da distribuição.
- A função de probabilidade cumulativa é:

$$F(X = x) = \sum_{s=1}^x pq^{s-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

- A esperança e a variância neste caso são:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$



# Distribuição de Geométrica

## Descrição

- Observe a probabilidade de ter o primeiro sucesso em cada tentativa:

$$P(X = x) = pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

1ª tentativa:  $p$

2ª tentativa:  $pq$

3ª tentativa:  $pq^2$

4ª tentativa:  $pq^3$

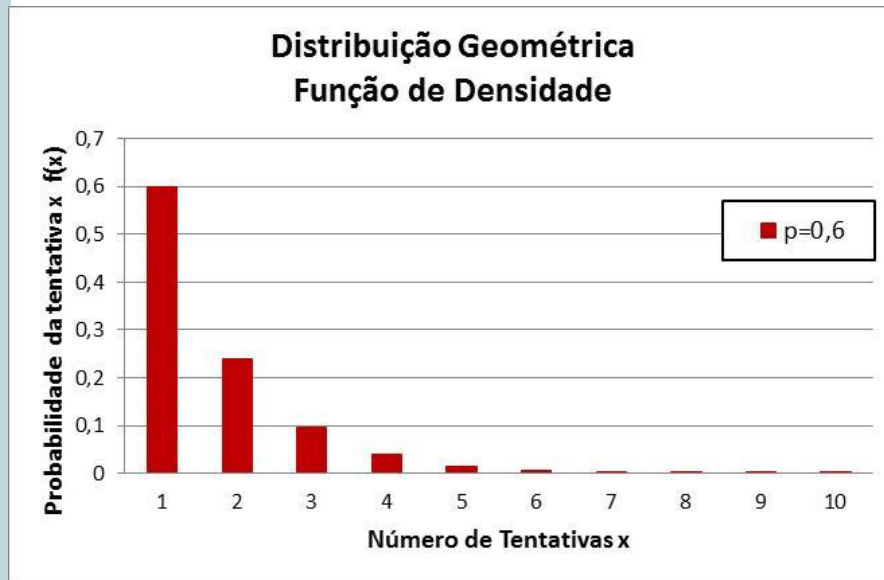
...

$x$ ª tentativa:  $pq^{x-1}$

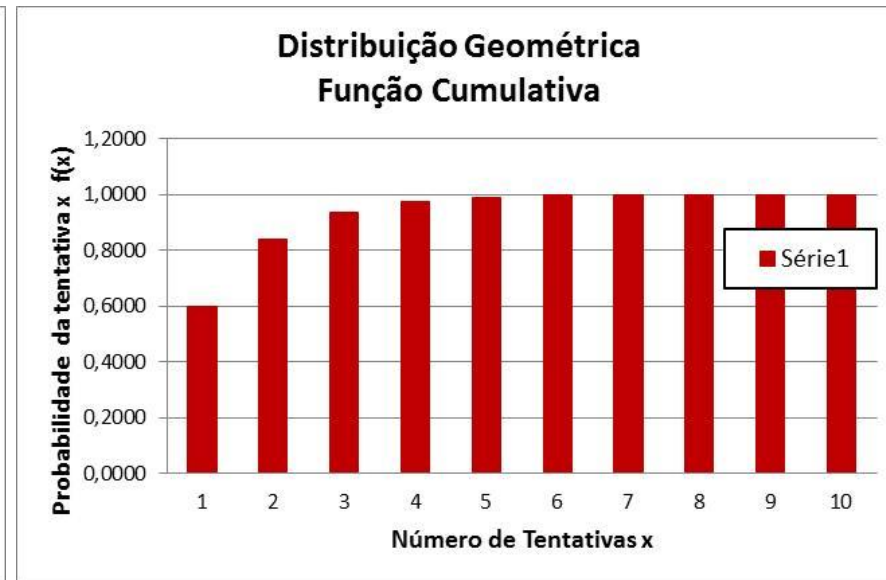
# Distribuição de Geométrica

## Função de Densidade e Cumulativa

- Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.



$$P(X = x) = (0,6)(0,4)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$



$$F(X = x) = \sum_{s=1}^x (0,6)(0,4)^{s-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

# Distribuição de Geométrica

## Exemplos

- 1) Uma urna tem 5 bolas verdes e 4 brancas. Qual a probabilidade que se tenha que tirar 5 bolas com reposição até sair uma branca?
- **Resposta:**
- A probabilidade de sucesso  $p$ , corresponde a tirar uma bola branca, assim  $p=4/9$ .  
Pede-se a probabilidade de se precisar 5 tentativas para ter a primeira bola branca.

$$P(X = 5) = \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{5-1} = 0,04333$$

- 2) Qual a probabilidade de ocorrer a primeira face 2 no 6º lançamento de um dado não viciado?
- **Resposta:**
- A probabilidade de sucesso  $p$ , corresponde a tirar uma face 2 no dado, assim  $p=1/6$ . Pede-se a probabilidade de se precisar 6 tentativas para ter a primeira face 2.

$$P(X = 6) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{6-1} = 0,06697$$

# Distribuição de Pascal

## Função de Densidade de Probabilidade

- A distribuição de Pascal (Blaise Pascal, 1623-1662), é também conhecida por Distribuição Binomial Negativa.
- Considere uma sequência de experimentos independentes (Bernoulli), onde  $p$  é a probabilidade de sucesso de um experimento e  $q=1-p$  a probabilidade de fracasso.
- Seja  $X$  uma variável aleatória que representa o número de tentativas (ou repetições) do experimento necessárias para se ter  $k$  sucessos.
- A variável aleatória possui distribuição de pascal com a seguinte função de probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad \text{onde } x \geq k$$

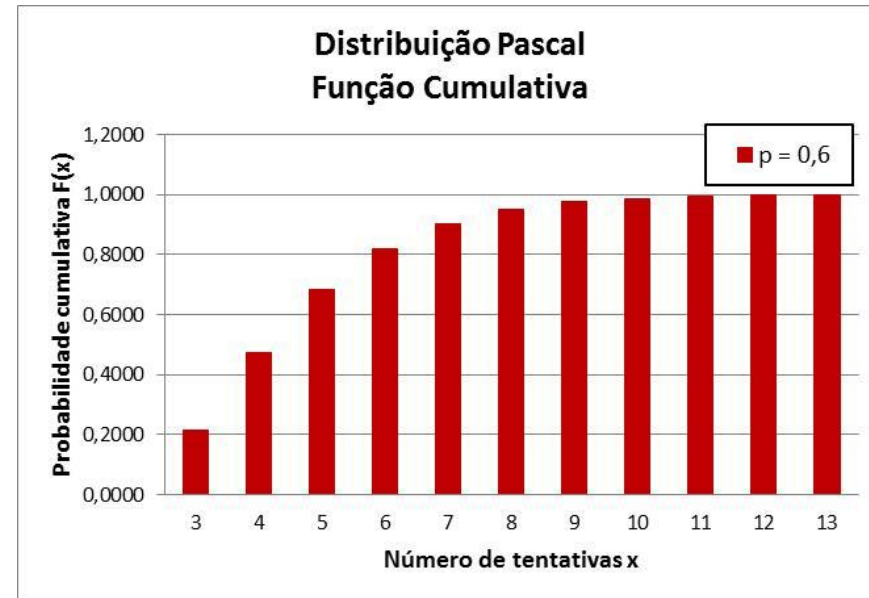
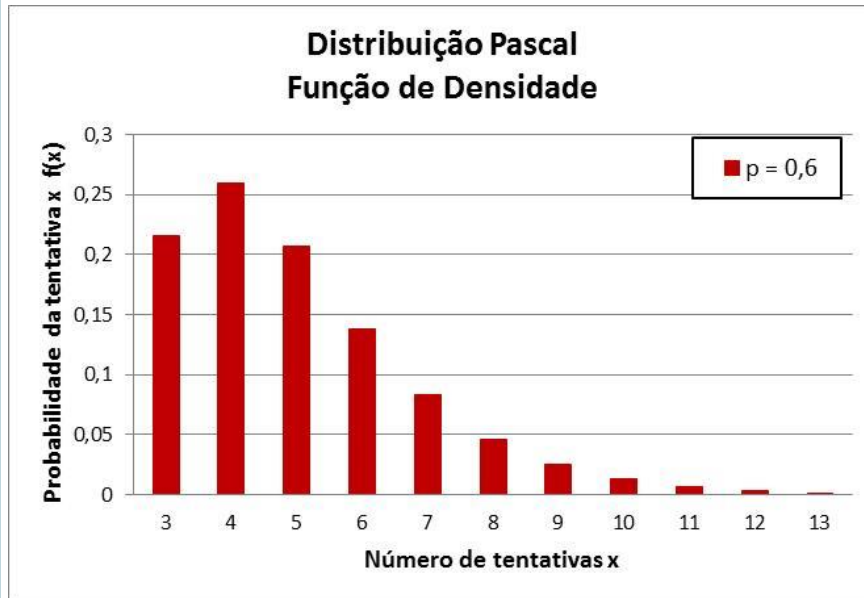
- onde  $p$  e  $k$  são parâmetros da distribuição.
- A esperança e a variância neste caso são:

$$E(X) = \frac{k}{p} \quad V(X) = \frac{kq}{p^2}$$

# Distribuição de Pascal

## Função de Densidade e Cumulativa

- Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.



$$P(X = x) = \binom{x-1}{3-1} p^3 q^{x-3}, \quad \text{onde } x \geq 3$$

$$F(X = x) = \sum_{s=k}^x \binom{s-1}{3-1} p^3 q^{s-3}, \quad \text{onde } x \geq 3$$

# Distribuição de Pascal

## Observações

- 1ª)  $k$  é o número de sucesso desejado e  $x$  é o número de tentativas para que o  $k$ -ésimo sucesso ocorra.
- 2ª) A variável aleatória da Distribuição Binomial representa o número de sucessos em  $n$  realizações do Experimento de Bernoulli enquanto que a variável aleatória da Distribuição de Pascal é o número de tentativas para se ter  $k$  sucessos.
- 3ª) Quando ocorre o  $k$ -ésimo sucesso na  $x$ -ésima tentativa, já ocorreu  $(k-1)$  sucessos e  $(x-k)$  fracassos entre as primeiras  $(x-1)$  tentativas.

# Distribuição de Pascal

## Exemplo 1

- 1) De cada 100 produtos confeccionados, 5 tem defeitos. Qual a probabilidade que o 5º produto inspecionado seja o 2º com defeito?
- **Resposta:**
- Neste caso, a presença do defeito corresponde ao sucesso no experimento Bernoulli. A probabilidade de sucesso  $p$ , corresponde a  $p=5/100$ . Pede-se a probabilidade de se precisar 5 tentativas para se obter 2 produtos com defeito. Esta probabilidade é dada pela distribuição pascal, com:  $x=5, k=2$

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad \text{onde } x \geq k$$

$$P(X = 5) = \binom{4}{1} (0,05)^2 (0,95)^3 = 0,008573$$

# Distribuição de Pascal

## Exemplo 2

- 2) Uma máquina produz 10% de peças defeituosas. Qual a probabilidade que a máquina tenha que fabricar 6 peças para se conseguir 3 sem defeitos?
- **Resposta:**
- Neste caso, a ausência de defeito corresponde ao sucesso no experimento Bernoulli. A probabilidade de sucesso  $p$ , corresponde a  $p=9/10$ . Pede-se a probabilidade de se precisar 6 tentativas para se obter 3 produtos sem defeito. Esta probabilidade é dada pela distribuição pascal, com:  $x=6, k=3$

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, \quad \text{onde } x \geq k$$

$$P(X = 6) = \binom{5}{2} (0,9)^3 (0,1)^3 = 0,00729$$



# Distribuição Hipergeométrica

- Considere um conjunto de  $N$  elementos, dos quais  $k$  elementos tem uma determinada característica ( $k \leq N$ ). São extraídos  $n$  elementos sem reposição deste conjunto ( $n \leq N$ ).
- A variável aleatória discreta  $X$  que representa o número de elementos dentre os  $n$  elementos que terão a referida característica determina uma distribuição de probabilidade denominada hipergeométrica.
- A função de probabilidade para  $X$  é dada por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \leq x \leq \text{Min}(n, k)$$

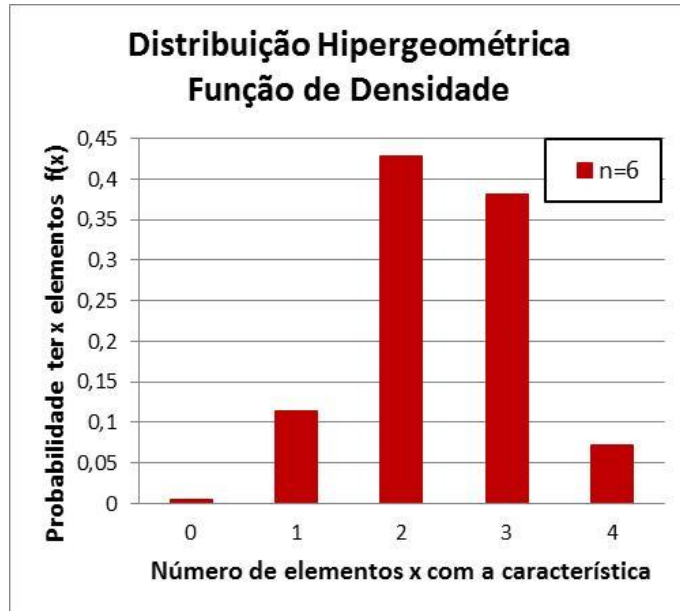
- Onde  $N$ ,  $n$ , e  $k$  são parâmetros da distribuição.
- A esperança e a variância neste caso são:

$$E(X) = np, \text{ onde } p = \frac{k}{N} \quad V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$$

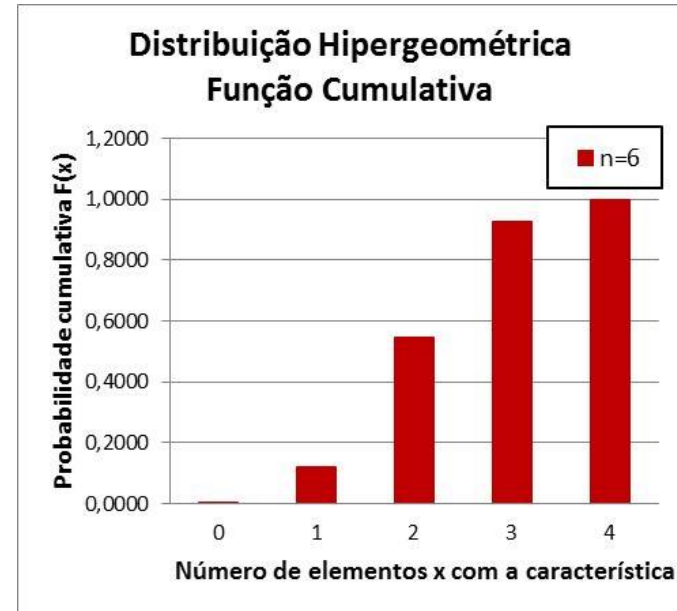
# Distribuição Hipergeométrica

## Função de Densidade e Cumulativa

- Exemplo.-** Considere  $N=10, n=6, k=4$ .



$$P(X = x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{10-4}{6-x}}{\binom{10}{6}}, \quad x \leq 4$$



$$F(X = x) = \sum_{s=0}^x \frac{\binom{4}{s} \binom{10-4}{6-s}}{\binom{10}{6}}, \quad \text{onde } x \leq 4$$

# Distribuição Hipergeométrica

## Observações

- 1ª) Na distribuição hipergeométrica a probabilidade de sucesso não é constante em todas as realizações do experimento, uma vez que os eventos não são independentes, ou seja, as amostras são extraídas sem reposição.
- 2ª) O fator  $(N-n)/(N-1)$  é denominado fator de correção para população finita. A amostragem com reposição (modelo binomial) é equivalente à amostragem de população infinita porque a probabilidade de sucesso permanece constante para as  $n$  realizações do experimento. Na amostragem sem reposição (modelo hipergeométrico) a população é finita.
- 3ª) No modelo hipergeométrico, se  $n$  é pequeno com relação a  $N$ , o fator de correção tende à 1. Neste caso, a distribuição hipergeométrica pode ser aproximada pela distribuição binomial fazendo  $p = k/N$ .

# Distribuição de Hipergeométrica

## Exemplos

- 1) Qual a probabilidade de sair 2 cartas pretas em 5 extrações de um baralho comum, sem reposição.
- Resposta: 32,51%
- 2) Uma caixa tem 12 lâmpadas das quais 5 estão queimadas. São escolhidas aleatoriamente 6 lâmpadas da caixa.
- Qual a probabilidade que duas lâmpadas estejam queimadas?
- Resposta: 37,88%
- 3) Retirou-se 6 cartas de um baralho comum sem reposição. Qual a probabilidade que 4 cartas sejam figuras?
- Resposta: 1,90%

# Distribuição Multinomial

- ▶ A distribuição multinomial (polinomial) é uma extensão da distribuição binomial onde generaliza-se o experimento Bernoulli para mais de um resultado ou evento.
- ▶ Considere um experimento aleatório com  $k$  possíveis resultados, sendo que o experimento é repetido  $n$  vezes.
- ▶ Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  as variáveis aleatórias discretas que representam o total de ocorrências de cada possível resultado. Sejam  $X_1=n_1, X_2=n_2, X_3=n_3, \dots, X_k=n_k$  os resultados obtidos após as  $n$  repetições, onde  $n=n_1+n_2+n_3+\dots+n_k$ .
- ▶ O vetor aleatório  $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$  segue distribuição de probabilidades multinomial dada pela expressão:

$$P(X_1 = n_1; X_2 = n_2; \dots; X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

- Onde  $n, k, p_1, p_2, \dots, p_k$  são parâmetros da distribuição.

# Distribuição Multinomial

- ▶ A esperança e a variância neste caso são:

$$E(X_i) = np_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, k$$

$$V(X_i) = np_i q_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, k$$

# Distribuição Multinomial

## Exemplos

- 1) Um dado não viciado é lançado 8 vezes. Qual a probabilidade de aparecer 1 vez a face 2, 3 vezes a face 5 e 4 vezes a face 6?
- **Resposta:** 0,016%
- 2) Uma caixa tem 6 bolas brancas, 4 verdes e 2 amarelas. São retiradas 6 bolas com reposição. Determine a probabilidade de sair 2 bolas brancas, 3 amarelas e 1 verde.
- **Resposta:** 2,31%

# Distribuição de Poisson

- ▶ Na distribuição de Poisson (Siméon-Denis Poisson) (1781-1840), a variável aleatória discreta  $X$  representa o número de sucessos que ocorrem num certo intervalo contínuo.
- ▶ Por exemplo:
- ▶ 1º) Número de acidentes de carros por dia que ocorrem numa determinada cidade.
- ▶ 2º) Número de chamadas telefônicas recebidas por hora em uma central telefônica.
- ▶ 3º) Número de defeitos de soldagem numa chapa de  $1\text{m}^2$ .



# Distribuição de Poisson

## Função de Densidade de Probabilidade

- A distribuição Poisson modela a ocorrência de um evento particular em um período de tempo unitário ( $t=1$ ).
- Considera-se  $\lambda$  como o número médio de ocorrências do evento durante o período de tempo  $t$ .
- A variável  $X$  representa o número de ocorrências do evento durante uma unidade de tempo  $t$ . Essa variável tem a seguinte distribuição de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

- Onde  $\lambda$  é parâmetro da distribuição.
- A esperança e a variância:

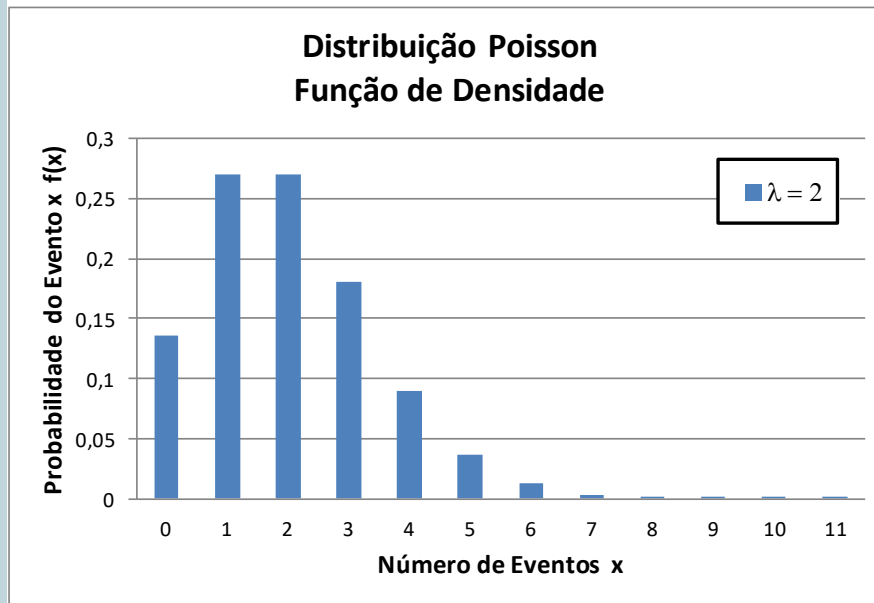
$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

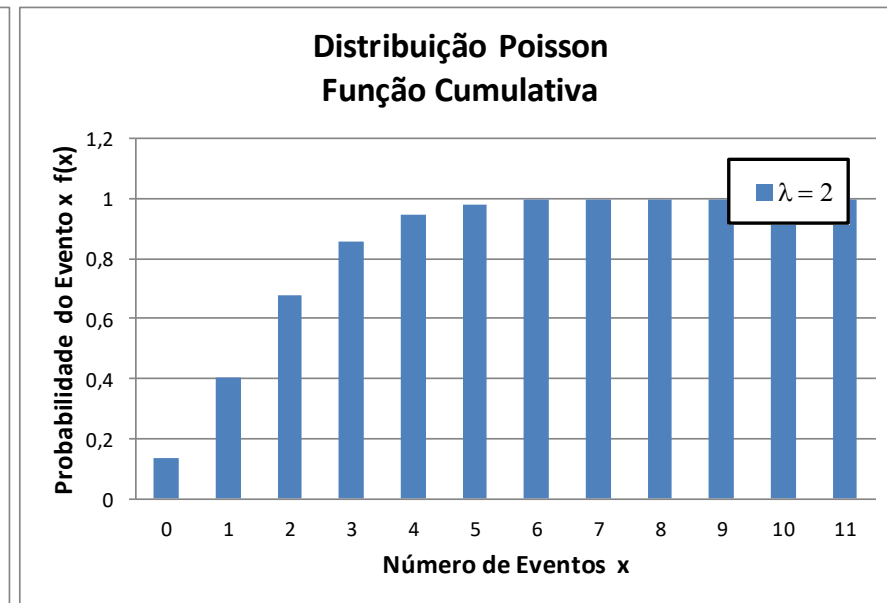
# Distribuição de Poisson

## Função de Densidade e Cumulativa

- Exemplo.-** Ilustram-se as distribuições de densidade e cumulativa.



$$P(X = x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$



$$F(X = x) = \sum_{s=0}^x \frac{2^s e^{-2}}{s!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

# Distribuição de Poisson

- ▶ Um Experimento de Poisson possui as seguintes características:
- ▶ 1ª) O número de sucessos que ocorrem num intervalo ou região específica é independente daquele que ocorre em qualquer outro intervalo ou região disjunto.
- ▶ 2ª) A probabilidade de ocorrência de um único sucesso que ocorre num intervalo pequeno é proporcional ao comprimento do intervalo e não depende do número de sucessos que ocorrem fora deste intervalo.
- ▶ **Observação:** Uma aproximação da Distribuição Binomial pode ser feita pela Distribuição do Poisson fazendo  $\lambda = n.p$ . Quanto maior o valor de  $n$  e menor o valor de  $p$  melhor será a aproximação.

# Distribuição de Poisson

## Função de Densidade Generalizada

- A forma generalizada da distribuição Poisson considera que o intervalo de tempo  $t$ , para a ocorrência dos eventos observados, não é necessariamente unitário.

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

- Onde  $\lambda$  e  $t$  são parâmetros da distribuição.
- A esperança e a variância, neste caso são:

$$E(X) = \lambda t$$

$$V(X) = \lambda t$$

# Distribuição de Poisson

## Exemplos

- 1) Num determinado aeroporto chegam, em média, 6 aviões por dia. Determine a probabilidade de um certo dia chegar dois ou mais aviões.
- Resposta: 98,26%
- 2) O número de telefonemas recebidos numa central telefônica é de 20 por hora. Qual a probabilidade da central receber 8 telefonemas em meia hora?
- Resposta: 11,27%
- 3) Um dado não viciado foi lançado 30 vezes. Qual a probabilidade de sair 10 faces 2?
- Resposta: Binomial = 1,3% e Poisson = 1,8%

## Exercícios

Uma urna contém 3 bolas vermelhas, 2 verdes e 5 brancas. Determine:

- a) A probabilidade que a 7ª bola retirada com reposição seja a 1ª vermelha;
- **Resp.** Geométrica:  $(0,7)^6 \cdot (0,3) = 3,53\%$
- b) A probabilidade que em 10 bolas retiradas com reposição, 3 sejam vermelhas;
- **Resp.** Binomial:  $120 \cdot (0,3)^3 \cdot (0,7)^7 = 26,68\%$
- c) A probabilidade que de 5 bolas extraídas sem reposição, 2 sejam vermelhas;
- **Resp.** Hipergeométrica:  $(3 \cdot 35) / 252 = 13,89\%$
- d) A probabilidade que a 10ª bola retirada com reposição seja a 3ª vermelha.
- **Resp.** Pascal:  $36 \cdot (0,3)^3 \cdot (0,7)^7 = 8\%$