

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

Lógica Matemática



ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

- x Estudaremos algumas propriedades dos operadores lógicos que são semelhantes a algumas propriedades dos operadores aritméticos.
- x Também estudaremos outras propriedades dos operadores lógicos que são importantes para a definição de implicações e equivalências lógicas, assim como para a transformação e simplificação das expressões lógicas.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADES DA LÓGICA

✕ Começaremos estudando algumas propriedades fundamentais:

- Idempotente;
- Comutativa;
- Associativa;
- Identidade;
- Nulidade.

✕ Vamos usar um operador fictício, denotado como \odot , e um elemento neutro N , e outro absorvente A , para ilustrar a ideia em cada caso:

- Idempotente: $p \odot p \Leftrightarrow p$
- Comutativa: $p \odot q \Leftrightarrow q \odot p$
- Associativa: $(p \odot q) \odot r \Leftrightarrow p \odot (q \odot r)$
- Identidade: $p \odot N \Leftrightarrow p$
- Nulidade: $p \odot A \Leftrightarrow A$

✕ Onde, p e q são proposições.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADES DA ARITMÉTICA

✕ Podemos usar a aritmética para ilustrar algumas dessas propriedades nos operadores lógicos:

○ **Idempotente:**

○ **Comutativa:**

Soma: $p + q = q + p$

Multiplicação: $p \times q = q \times p$

○ **Associativa:**

Soma: $(p + q) + r = p + (q + r)$

Multiplicação: $(p \times q) \times r = p \times (q \times r)$

○ **Identidade:**

Soma: $p + 0 = p$ Onde, 0 é elemento neutro para a soma.

Multiplicação: $p \times 1 = p$ Onde, 1 é elemento neutro para a multiplicação.

○ **Nulidade**

Multiplicação: $p \times 0 = 0$ Onde, 0 é elemento absorvente para a multiplicação.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADE IDEMPOTENTE

- Os operadores de **conjunção** \wedge e **disjunção** \vee possuem a propriedade **idempotente**, conforme mostrado mediante as tabelas-verdade:

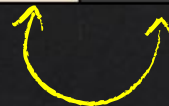
i) $p \wedge p \Leftrightarrow p$

p	$p \wedge p$	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V



ii) $p \vee p \Leftrightarrow p$

p	$p \vee p$	$(p \vee p) \Leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V



- Em ambos casos, as equivalências são verificadas dado que as bicondicionais correspondentes são **tautologias**. Observe que as colunas de cada lado da bicondicional são idênticas.
- Por outro lado, pode ser verificado que os operadores condicional \rightarrow e bicondicional \leftrightarrow não possuem a propriedade idempotente.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADE COMUTATIVA

- Os operadores de **conjunção** \wedge e **disjunção** \vee possuem a propriedade **comutativa**, conforme mostrado mediante as tabelas-verdade:

i) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F



ii) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F



- Em ambos casos, as equivalências são verificadas dado que as bicondicionais correspondentes são **tautologias**. Observe que as colunas de cada lado da bicondicional são idênticas.
- O operador condicional \rightarrow não goza da propriedade comutativa.
- Já o operador bicondicional \leftrightarrow sim goza da propriedade comutativa.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADE ASSOCIATIVA

- ✗ O operador de **conjunção** \wedge goza da propriedade **associativa**, conforme mostrado na tabela-verdade.

$$i) (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F



- ✗ Observa-se que a equivalência é verificada dado que as colunas de cada lado da bicondicional correspondente são idênticas.
- ✗ Portanto, a bicondicional correspondente é tautológica.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADE ASSOCIATIVA

- ✗ O operador de **disjunção** \vee goza da propriedade **associativa**, conforme mostrado na tabela-verdade:

$$\text{ii) } (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

- ✗ Observa-se que a equivalência é verificada dado que as colunas de cada lado da bicondicional correspondente são idênticas.
- ✗ Portanto, a bicondicional correspondente é tautológica.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F



ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADE ASSOCIATIVA

- x Por outro lado, pode ser verificado que o operador condicional \rightarrow não goza da propriedade associativa.
- x Também, pode ser verificado que o operador bicondicional \leftrightarrow sim goza da propriedade associativa.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADE DE IDENTIDADE

✕ Os operadores de **conjunção** \wedge e **disjunção** \vee gozam da propriedade de **identidade**, sempre que se considerem como elementos neutros t e c , respectivamente, onde t representa uma tautologia e c uma contradição.

✕ Em ambos casos, as equivalências são verificadas dado que as bicondicionais correspondentes são **tautologias**. Observe que as colunas de cada lado da bicondicional são idênticas.

i) $p \wedge t \Leftrightarrow p$

p	t	$p \wedge t$	$(p \wedge t) \Leftrightarrow p$
V	V	V	V
F	V	F	V



ii) $p \vee c \Leftrightarrow p$

p	c	$p \vee c$	$(p \vee c) \Leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	F	F	V



ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADE DE NULIDADE

✕ Os operadores de **conjunção** \wedge e **disjunção** \vee gozam da propriedade de **nulidade**, sempre que se considerem como elementos absorventes c e t , respectivamente, onde c uma contradição e t representa uma tautologia.

✕ Em ambos casos, as equivalências são verificadas dado que as bicondicionais correspondentes são **tautologias**. Observe que as colunas de cada lado da bicondicional são idênticas.

i) $p \wedge c \Leftrightarrow c$

p	c	$p \wedge c$	$(p \wedge c) \Leftrightarrow c$
V	F	F	V
F	F	F	V



ii) $p \vee t \Leftrightarrow t$

p	t	$p \vee t$	$(p \vee t) \Leftrightarrow t$
V	V	V	V
F	V	V	V



ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADES DISTRIBUTIVAS

✕ Sejam p, q e r proposições simples quaisquer, as propriedades **distributivas** são as seguintes:

$$\text{i)} \quad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\text{ii)} \quad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

✕ Essas regras estabelecem o seguinte:

- i) A conjunção é distributiva em relação à disjunção.
- ii) A disjunção é distributiva em relação à conjunção.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADES DISTRIBUTIVAS – EXEMPLOS

✕ Considerando a primeira equivalência:

$$\text{i) } p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

✕ Temos que a proposição:

“Carlos estuda e Jorge ouve música ou lê”

seria equivalente à seguinte proposição:

“Carlos estuda e Jorge ouve música” ou
“Carlos estuda e Jorge lê”

✕ Considerando a segunda equivalência:

$$\text{ii) } p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

✕ Temos que a proposição:

“Chove ou faz vento e frio”

seria equivalente à seguinte proposição:

“Chove ou faz vento ” e “Chove ou faz frio”

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

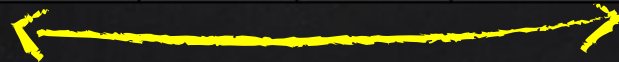
PROPRIEDADES DISTRIBUTIVAS

✕ Mostra-se a equivalência da primeira regra distributiva usando tabelas-verdade:

$$i) p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

✕ Na tabela-verdade, observe que as proposições de cada lado da equivalência possuem colunas idênticas, portanto elas são equivalentes.



ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADES DISTRIBUTIVAS

- x Mostra-se a equivalência da segunda regra distributiva usando tabelas-verdade:

$$\text{ii) } p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

- x Na tabela-verdade, observe que as proposições de cada lado da equivalência possuem colunas idênticas, portanto elas são equivalentes.



ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADES DE ABSORÇÃO

- x As regras de **absorção** estabelecem que certas proposições que combinam operadores \wedge e \vee tem valor de verdade definido por apenas um único termo. Tais proposições possuem a seguinte estrutura:

$$\text{i) } p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

$$\text{ii) } p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

- x Em ambos casos, o primeiro termo determina o valor de verdade de toda a proposição. Esse termo também faz parte do segundo termo.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADES DE ABSORÇÃO

✗ Mostra-se a equivalência das propriedades de absorção usando tabelas-verdade:

i) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F



ii) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F



✗ Em ambos casos, as colunas das proposições relacionadas são idênticas, portanto essas proposições são equivalentes.

✗ Com isso, as seguintes bicondicionais são tautológicas:

i) $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$

ii) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADES DE DE MORGAN

✕ As propriedades de **De Morgan** relacionam os operadores \wedge e \vee , da seguinte maneira:

$$\text{i)} \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\text{ii)} \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

✕ Segundo as propriedades de De Morgan podemos afirmar que a negação permite transformar a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.

✕ As regras referem-se as **negação de uma conjunção** e **negação de uma disjunção**, respectivamente. Essas regras estabelecem o seguinte:

- i. Negar que duas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que pelo menos uma delas é falsa.
- ii. Negar que ao menos uma de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

PROPRIEDADES DE DE MORGAN – EXEMPLOS

× Com base na primeira propriedade de DeMorgan:

$$\text{i) } \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

× A negação da proposição:

“É inteligente e estuda”

seria a seguinte proposição:

“**Não** é inteligente **ou não** estuda”

× Com base na segunda propriedade de DeMorgan:

$$\text{ii) } \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

× A negação da proposição:

“É médico ou professor”

seria a seguinte proposição:

“**Não** é médico **e não** é professor”

PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO E DISTJUNÇÃO

PROPRIEDADES DE DE MORGAN

- x Mostra-se a equivalência da primeira regra de De Morgan usando tabelas-verdade:

$$i) \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V



- x Na tabela-verdade, observe que as proposições de cada lado da equivalência possuem colunas idênticas, portanto elas são equivalentes.

PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO E DISTUNÇÃO

PROPRIEDADES DE DE MORGAN

- x Mostra-se a equivalência da segunda regra de De Morgan usando tabelas-verdade:

$$\text{ii) } \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V



- x Na tabela-verdade, observe que as proposições de cada lado da equivalência possuem colunas idênticas, portanto elas são equivalentes.

PROPRIEDADES DA CONJUNÇÃO E DISTUNÇÃO

PROPRIEDADES DE DE MORGAN

✕ Com base nas regras de De Morgan:

$$\text{i)} \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\text{ii)} \quad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

✕ Mostra-se que:

i. É possível definir a conjunção a partir da disjunção e da negação;

$$\text{i)} \quad (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

✕ Mostra-se que:

i. É possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação.

$$\text{ii)} \quad (p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

NEGAÇÃO DA CONDICIONAL

- Anteriormente, foi mostrada que a seguinte equivalência para a condicional:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

- Mostraremos uma equivalência para sua negação, usando as propriedades:

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg q \quad (\text{De Morgan})$$

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q \quad (\text{Dupla Negação})$$

- Mostramos a equivalência usando a tabela-verdade de cada proposição:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F



- As tabelas-verdade das duas proposições são idênticas, portanto elas são equivalentes.

NEGAÇÃO DA BICONDICIONAL

- ✕ Anteriormente, foi mostrada que a seguinte equivalência para a condicional:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

- ✕ A partir da equivalência acima, e com base na equivalência da condicional, temos uma outra expressão para a bicondicional:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

- ✕ Mostraremos uma equivalência para a negação da bicondicional:

$$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \quad (\text{Negação})$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \quad (\text{De Morgan})$$

$$\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \quad (\text{De Morgan})$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \quad (\text{Dupla Negação})$$

NEGAÇÃO DA BICONDICIONAL

- ✕ Mostraremos a equivalência para a negação da bicondicional usando tabelas-verdade.
- ✕ Considere a equivalência:

$$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

$$P \Leftrightarrow Q$$

p	q	$p \leftrightarrow q$	P	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	Q
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	F

- ✕ As tabelas-verdade das duas proposições são idênticas, portanto elas são equivalentes.



REFERÊNCIA

- x De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 7. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.