53. Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = xyz$ no cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante, com um vértice na origem e arestas paralelas aos eixos coordenados.

54. Encontre o valor médio da função $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$ na região limitada pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

55. (a) Determine a região E para a qual a integral tripla

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

é máxima.

SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para calcular o valor máximo exato da integral tripla na parte (a)

PROJETO DE DESCOBERTA **VOLUMES DE HIPERESFERAS**

Neste projeto, determinaremos as fórmulas para o volume limitado por uma hiperesfera em um espaço n-dimensional.

1. Utilize uma integral dupla e substituições trigonométricas, juntamente com a Fórmula 64 da Tabela de Integrais, para determinar a área do círculo de raio r.
2. Use uma integral tripla e substituições trigonométricas para determinar o volume da esfera de raio r.
3. Utilize uma integral quádrupla para determinar o hipervolume limitado pela hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ em $\mathbb{R}^4$. (Use somente substituição trigonométrica e fórmulas de redução para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ ou $\int \cos^n x\, dx$.)
4. Use uma integral n-upla para determinar o volume limitado por uma hiperesfera de raio r no espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$. [*Sugestão:* As fórmulas são diferentes para n par e n ímpar.]

15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

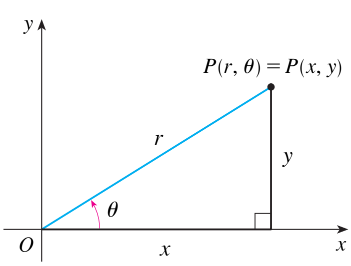

FIGURA 1

Em geometria plana, o sistema de coordenadas polares é usado para dar uma descrição conveniente de certas curvas e regiões. (Veja a Seção 10.3.) A Figura 1 nos permite relembrar a ligação entre coordenadas polares e cartesianas. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então, a partir da figura,

$$x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

Em três dimensões, há um sistema de coordenadas, chamado *coordenadas cilíndricas*, que é análogo às coordenadas polares e dá descrições convenientes de algumas superfícies e sólidos que ocorrem usualmente. Como veremos, algumas integrais triplas são muito mais fáceis de calcular em coordenadas cilíndricas.

Coordenadas Cilíndricas

No **sistema de coordenadas cilíndricas**, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r, θ, z), onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z é a distância orientada do plano xy a P. (Veja a Figura 2.)

Para convertermos de coordenadas cilíndricas para retangulares, usamos as equações

1 $$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z}$$

enquanto que para converter de coordenadas retangulares para cilíndricas, usamos

2 $$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z}$$

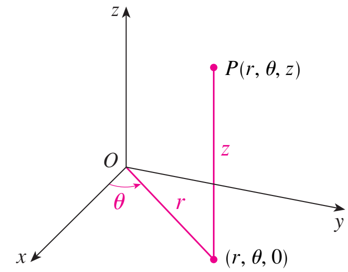

FIGURA 2
As coordenadas cilíndricas de um ponto P

EXEMPLO 1
(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.
(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

SOLUÇÃO
(a) O ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ está marcado na Figura 3. Das Equações 1, suas coordenadas retangulares são

$$x = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

Logo, o ponto é $(-1, \sqrt{3}, 1)$ em coordenadas retangulares.
(b) Das Equações 2 temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \text{logo} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

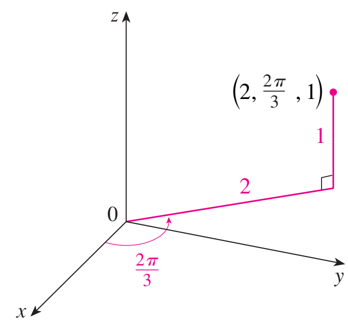

FIGURA 3

Portanto, um conjunto de coordenadas cilíndricas é $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$. Outro é $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$. Como no caso das coordenadas polares, existem infinitas escolhas.

Coordenadas cilíndricas são úteis em problemas que envolvem simetria em torno de um eixo e o eixo z é escolhido de modo a coincidir com o eixo de simetria. Por exemplo, o eixo do cilindro circular com equação cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ é o eixo z. Em coordenadas cilíndricas, este cilindro tem a equação muito simples $r = c$. (Veja a Figura 4.) Esta é a razão para o nome coordenadas "cilíndricas".

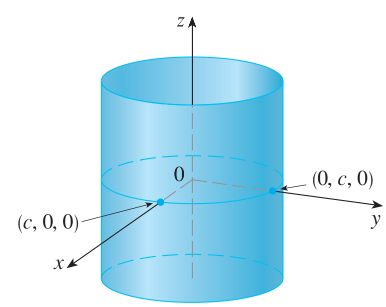

FIGURA 4
$r = c$, um cilindro

EXEMPLO 2 Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = r$.

SOLUÇÃO A equação diz que o valor z, ou altura, de cada ponto da superfície é o mesmo que r, a distância do ponto ao eixo z. Como θ não aparece, ele pode variar. Assim, qualquer corte horizontal no plano $z = k$ $(k > 0)$ é um círculo de raio k. Esses cortes sugerem que a superfície é um cone. Essa previsão pode ser confirmada convertendo a equação para coordenadas retangulares. Da primeira equação em $\boxed{2}$, temos

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

Reconhecemos a equação $z^2 = x^2 + y^2$ (pela comparação com a Tabela 1 na Seção 12.6) como o cone circular cujo eixo é o eixo z. (Veja a Figura 5.)

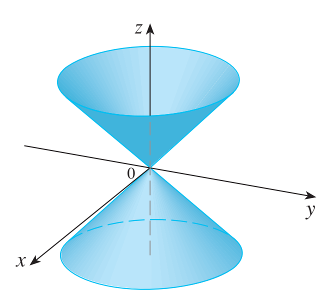

FIGURA 5
$z = r$, um cone

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

Suponha que E seja uma região do tipo 1, cuja projeção D no plano xy tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 6). Em particular, suponha que f seja contínua e

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

onde D é dado em coordenadas polares por

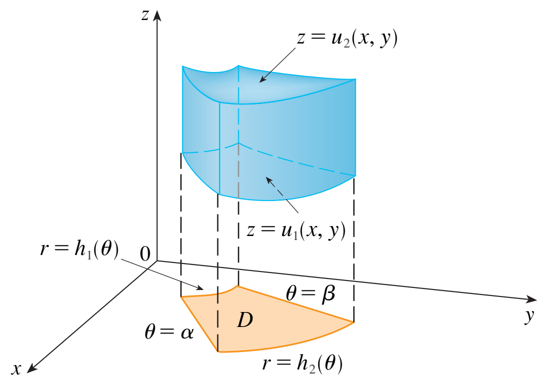

FIGURA 6

Sabemos da Equação 15.7.6 que

$$\boxed{3} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, combinando a Equação 3 com a Equação 15.4.3, obtemos

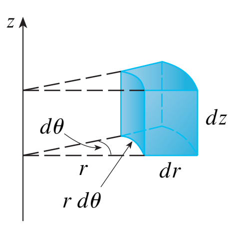

FIGURA 7
Elemento de volume em coordenadas cilíndricas: $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$

$$\boxed{4} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r \operatorname{sen}\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

A Fórmula 4 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ e deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z, r e θ, e trocando dV por $r\, dz\, dr\, d\theta$. (A Figura 7 mostra como lembrar disto.) É recomendável a utilização dessa fórmula quando E for uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas e, especialmente, quando a função $f(x, y, z)$ envolver a expressão $x^2 + y^2$.

EXEMPLO 3 Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$ e acima do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Veja a Figura 8.) A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.

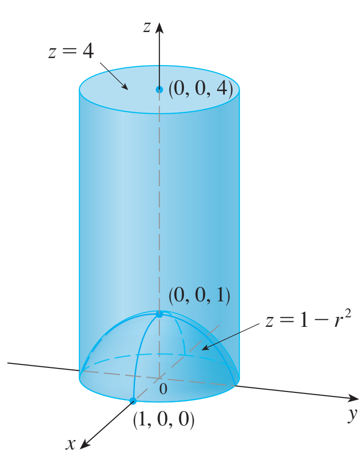

FIGURA 8

SOLUÇÃO Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o paraboloide é $z = 1 - r^2$ e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 1 - r^2 \leqslant z \leqslant 4\}$$

Como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z, a função densidade é

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Portanto, da Fórmula 15.7.13, a massa de E é

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta$$

$$= K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr$$

$$= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

EXEMPLO 4 Calcule $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2},\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$. A superfície inferior de E é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a superfície superior é o plano $z = 2$. (Veja a Figura 9.) Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 2,\ r \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

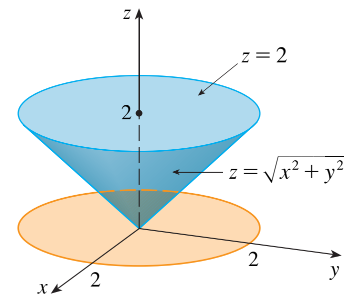

FIGURA 9

Portanto, temos

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx = \iiint_E (x^2 + y^2)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2 - r)\,dr$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi$$

15.8 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$

2. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$ (b) $(1, 1, 1)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para cilíndricas.

3. (a) $(-1, 1, 1)$ (b) $\left(-2, 2\sqrt{3}, 3\right)$

4. (a) $\left(2\sqrt{3}, 2, -1\right)$ (b) $(4, -3, 2)$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\theta = \pi/4$ **6.** $r = 5$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $z = 4 - r^2$ **8.** $2r^2 + z^2 = 1$

9–10 Escreva as equações em coordenadas cilíndricas.

9. (a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ (b) $z = x^2 - y^2$

10. (a) $3x + 2y + z = 6$ (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

11–12 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $0 \leqslant r \leqslant 2,\quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\quad 0 \leqslant z \leqslant 1$

12. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\quad r \leqslant z \leqslant 2$

13. Uma casca cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno 6 cm e raio externo 7 cm. Escreva desigualdades que descrevam a casca em um sistema de coordenadas adequado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas em relação à casca.

14. Use uma ferramenta gráfica para desenhar o sólido limitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 5 - x^2 - y^2$.

15–16 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

15. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$ **16.** $\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^r r\,dz\,d\theta\,dr$

17–28 Utilize coordenadas cilíndricas.

17. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\,dV$, onde E é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

18. Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.

19. Calcule $\iiint_E (x + y + z)\,dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

20. Calcule $\iiint_E x\,dV$, onde E é limitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

21. Calcule $\iiint_E x^2\,dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com   É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador