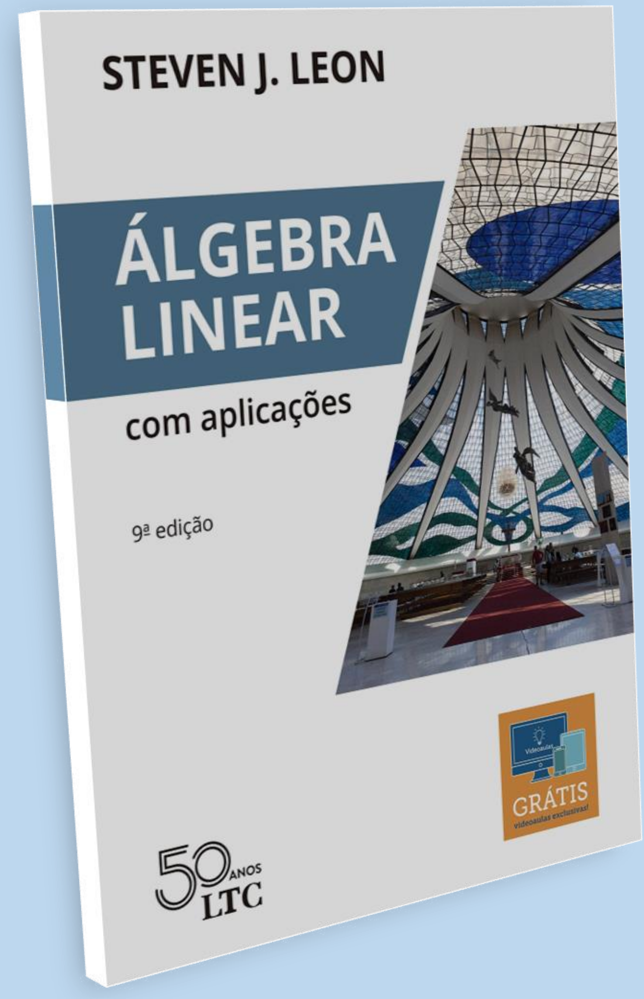
UENF

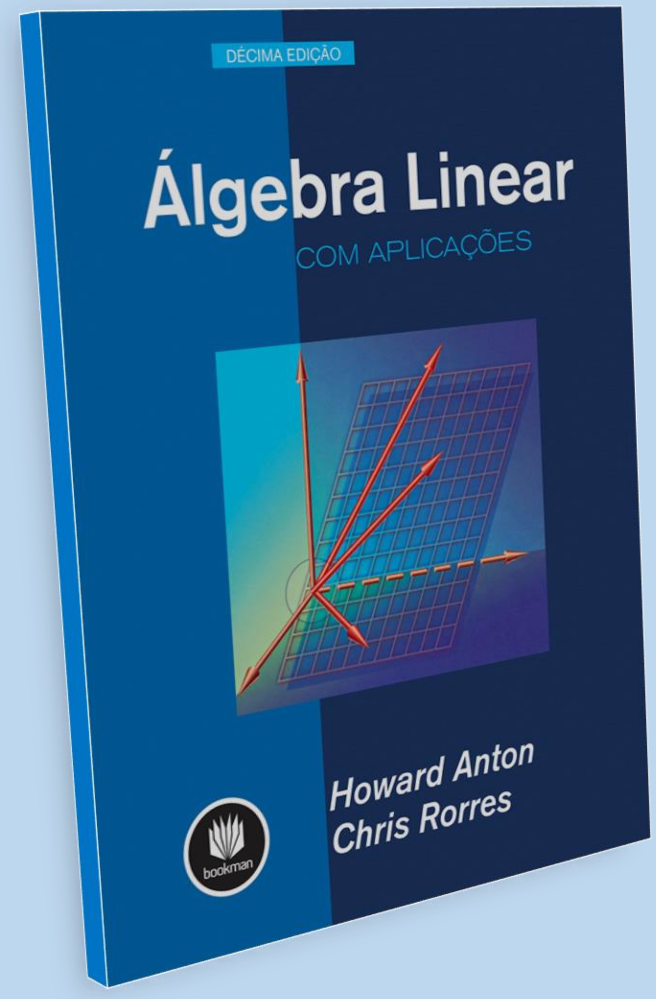
Álgebra Linear

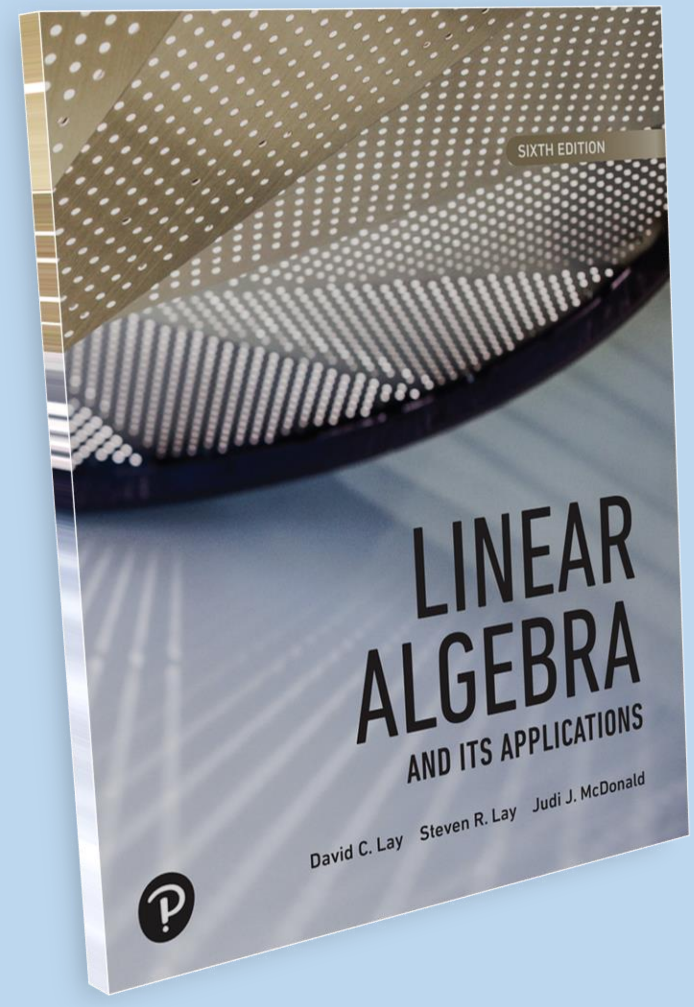
Determinantes

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







O determinante de uma matriz

A cada matriz n x n, A, é possível associar um escalar, ***det*(*A*)** , cujo valor dirá se a matriz é não singular (diferente de zero).

Caso 1. Matrizes 1 x 1

Se A = $[a_{11}]$ é uma matriz 1x1, então det(A) = a_{11}

Caso 2. Matrizes 2x2

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ então $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Cálculo de determinantes

Exemplos.

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 3.8 - 4.6 = 24 - 24 = 0$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 8 - (-15) = 23$

3. $A = \begin{bmatrix} sen\,\alpha & -cos\,\alpha \\ cos\,\alpha & sen\,\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

4. $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 6 - 12 = -6$

Matrizes 3x3 – Regra de Sarrus

Caso 3. Matrizes 3x3

Seja $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ então

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Regra de Sarrus

Exemplo. Calcular o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Resposta: det(A) = -2

Menores e Cofatores

Definição. Se A for uma matriz quadrada, então o ***menor da entrada*** $\boldsymbol{a_{ij}}$ é denotado por $\boldsymbol{M_{ij}}$ e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O número $(-1)^{i+j}\boldsymbol{M_{ij}}$ é denotado por $\boldsymbol{C_{ij}}$ e é denominado ***cofator da entrada*** $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Exemplo. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

O menor da entrada $\boldsymbol{a_{11}}$ é dado por

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-4} \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

e o cofator da entrada $\boldsymbol{a_{11}}$ é dado por

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

Menores e Cofatores

Analogamente, o menor da entrada $\boldsymbol{a_{32}}$ é

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

e o cofator de $\boldsymbol{a_{32}}$ é dado por

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

Determinantes por Expansão em Cofatores

Teorema. *Se A for uma matriz* ***n x n****, então independentemente de qual linha ou coluna escolhermos, sempre obteremos o mesmo número multiplicando as entradas daquela linha ou coluna pelos cofatores correspondentes e somando os produtos obtidos.*

Definição. Se A for uma matriz de tamanho ***n x n***, então o número obtido multiplicando as entradas de uma linha ou coluna qualquer de A pelos cofatores correspondentes e somando os produtos assim obtidos é denominado ***determinante de A***. As próprias somas são denominadas ***expansões em cofatores de* det(*A*)**, ou seja,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} \quad \text{[expansão em cofatores ao longo da coluna } j\text{]}$$

e

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} \quad \text{[expansão em cofatores ao longo da linha } i\text{]}$$

Cálculo de determinantes

Exemplo 1. Encontre o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

expandindo em cofatores ao longo da primeira linha.

Solução

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

Cálculo de determinantes

Exemplo 2. Seja a matriz do Exemplo 1. Calcule $\mathbf{det}(A)$ expandindo em cofatores ao longo da primeira coluna de A.

Solução

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1$$

Cálculo de determinantes

<u>Observação</u>. Sinais dos Cofatores (de acordo com o padrão de tabuleiro de xadrez)

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Propriedades dos Determinantes

Teorema. Seja A uma matriz quadrada.

a) Se A tem uma linha ou uma coluna de Zeros, então det (A) = 0.

b) det (A) = det (A^T).

c) Se A é uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então det (A) = 0.

d) Se **A** for uma matriz triangular n x n (triangular superior, inferior ou diagonal), então det(**A**) é o produto das entradas na diagonal principal da matriz, ou seja, det(A) = $a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}$.

Propriedades dos Determinantes

Exemplo 1. Considere
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Observar que a segunda linha é 2 vezes a primeira,
portanto, somamos –2 vezes a primeira linha à segunda para introduzir uma linha de zeros, isto é $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

Exemplo 2. O determinante de cada uma das seguintes matrizes é zero.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

$L_2 = 2L_1$, $C_2 = -2C_1$, $L_4 = -3L_1$

Propriedades dos Determinantes

Teorema. Seja A uma matriz n x n.

a) Se B for a matriz que resulta quando uma única linha ou coluna de A é multiplicada por um escalar k, então det (B) = k det (A).

b) Se B for a matriz que resulta quando duas linhas ou colunas de A são permutadas, então det (B) = − det (A).

c) Se B for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha, ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então det (B) = det (A).

Exemplo.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{11} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = k\det(A)$$

A primeira linha de A é multiplicada por k

Propriedades dos Determinantes

Exemplo 2.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = -\det(A)$$

A primeira e a segunda linhas de A são permutadas

Exemplo 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = \det(A)$$

Um múltiplo da segunda linha de A é somado a primeira linha.

Propriedades dos Determinantes

Teorema.

a) Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

b) Suponha que A e B sejam matrizes n x n, em geral

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

c) Seja A uma matriz n x n e seja k um escalar qualquer, então

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

Exemplo 1. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = -23, \quad \text{e} \quad \det(AB) = -23$$

Propriedades dos Determinantes

Exemplo 2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Temos $\det(A) = 1$, $\det(B) = 8$ e $\det(A + B) = 23$;
assim, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Exemplo 3. Considere

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinantes usando redução por linhas

Exemplo 1. Usando redução por linhas para calcular um determinante. Calcular det(A), sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução. Vamos reduzir A a uma forma escalonada (que é triangular superior)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

← A primeira e segunda linhas de A foram permutadas.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

← Um fator comum de 3 da primeira linha foi trazido para fora do determinante.

Cálculo de determinantes

Exemplo 1. Continuação:

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \longleftarrow$$

-2 vezes a primeira linha foi somado à terceira linha.

$$L_3 \leftarrow L_3 - 10L_2$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \longleftarrow$$

-10 vezes a segunda linha foi somado à terceira linha.

Determinantes usando Redução por linhas

Exemplo 1. Continuação:

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Um fator comum de -55 da última linha foi trazido para fora do determinante.

$$= (-3)(-55)(1) \;=\; 165$$

Logo det(A) = 165

Determinantes – Operações com Colunas

Exemplo 2. Usando operações com colunas para calcular um determinante.

Calcular o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Solução. Vamos colocar ***A*** em forma Triangular Inferior

$$C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

Operações com Linhas e Expansão em Cofatores

Exemplo 3. Calcular det(A) de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução.

Somando múltiplos convenientes da segunda linha às demais linhas, obtemos

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \longleftarrow \text{Expansão em cofatores ao longo da primeira coluna.}$$

Operações com Linhas e Expansão em Cofatores

Exemplo 3. Continuação:

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Somamos a primeira linha à terceira.

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Expansão em cofatores ao longo da primeira coluna.

$$= -18$$