Álgebra Linear
Profa. Elba Bravo
Semestre: 2022 - 1

Lista de Exercícios 6

1. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \quad a\mathbf{u} = (0, au_2)$$

(a) Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$, com $\mathbf{u} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$ e $a = 3$.

(b) Explique por que V é fechado na adição e multiplicação por escalar.

(c) Como a adição de V é a operação de adição padrão de R^2, certos axiomas de espaço vetorial valem para V por valerem em R^2. Quais são esses axiomas?

(d) Mostre que valem os Axiomas 7, 8 e 9.

(e) Mostre que o Axioma 10 falha e que, portanto, V não é um espaço vetorial com as operações dadas.

2. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1), \quad a\mathbf{u} = (au_1, au_2)$$

(a) Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$, com $\mathbf{u} = (0, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -3)$ e $a = 2$.

(b) Mostre que $(0, 0) \neq \mathbf{0}$.

(c) Mostre que $(-1,-1) = \mathbf{0}$.

(d) Mostre que vale o Axioma 5 fornecendo um par ordenado $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, com $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$.

(e) Encontre dois axiomas de espaço vetorial que não sejam válidos.

Respostas:

1. (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 6)$, $3\mathbf{u} = (0, 6)$ (c) Axiomas 1 a 5.

1. Determinar quais dos seguintes são subespaços de R^3.

(a) Todos os vetores da forma $(a, 0, 0)$.

(b) Todos os vetores da forma $(a, 1, 1)$.

(c) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c$.

(d) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c + 1$.

(e) Todos os vetores da forma $(a, b, 0)$.

7. Quais dos seguintes são combinações lineares de

$\mathbf{u} = (0, -2, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$?

(a) $(2, 2, 2)$ (b) $(3, 1, 5)$

(c) $(0, 4, 5)$ (d) $(0, 0, 0)$

9. Quais dos seguintes são combinações lineares de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}?$$

(a) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

Respostas:

1. (a), (c), (e) **7.** (a), (b), (d) **9.** (a), (b), (c)