UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

CCT
LCMAT

Probabilidade e Estatística

Probabilidades

Prof. Fermín Alfredo Tang Montané

Probabilidade Condicional

- **Definição:**
- Sejam A e B dois eventos quaisquer de uma espaço amostral Ω, com P(B) > 0. A probabilidade de A ocorrer, na hipótese de B já ter ocorrido, denotado por P(A/B), é dada por:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

- De maneira análoga, a probabilidade condicional de B dada a ocorrencia de A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade Condicional

- **Exemplo:**
- Considere:
  - E = " Um dado é lançado e a face é observada"
  - Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - A = "É obtido o valor 3" = {3}
  - B = "É um obtido um valor ímpar" = {1, 3, 5}
  - A $\cap$ B = {3}
- A probabilidade condicional:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{1}{3}$$

Probabilidade Condicional
Eventos Independentes

- Dois eventos A e B são ditos independentes se a probabilidade de ocorrência de um evento não interfere na probabilidade de ocorrência do outro evento.
- Neste caso, a probabilidade condicional fica:

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = P(B)$$

Tipos de Eventos
Dúvida

- **Mutuamente Excludentes (Exclusivos ou disjuntos):** quando não podem ocorrer simultaneamente.
- **Independentes:** se a probabilidade de ocorrência de um evento não interfere na probabilidade de ocorrência do outro evento.

- Eventos disjuntos são sempre independentes?

Tipos de Eventos
Dúvida - Exemplos

- No experimento,
  - E ="lançamento de um dado". Define-se os eventos A e B:
  - A="obtenção de uma face par"
  - B="obtenção de uma face impar"
- Os eventos A e B são claramente disjuntos.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Os eventos A e B são independentes?.

Tipos de Eventos
Dúvida - Exemplos

- Os eventos A e B são independentes?.
- Se fossem independentes teríamos que:

$$P(A/B) = P(A)$$

- Por definição:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\varnothing)}{P(B)} = 0$$

- Mas sabemos que: $P(A) = \frac{1}{2}$
- Logo são eventos dependentes.

Tipos de Eventos
Dúvida - Exemplos

- Quando temos eventos independentes?

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

- E = " Lançar dois dados"
  - A = "Obter um número par no primeiro dado"
  - B = "Obter um número par no segundo dado"
  - A ∩ B = "Obter números pares em ambos dados"

- Os eventos A e B são independentes?
- Os eventos A e B são disjuntos?

Tipos de Eventos
Dúvida - Exemplos

- E = “ Lançar dois dados”
  - A = “Obter um número par no primeiro dado”
  - B = “Obter um número par no segundo dado”
  - A ∩ B = “Obter números pares em ambos dados”

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A/B) = P(A) = \frac{1}{2}$$

Tipos de Eventos
Dúvida - Exemplos

- E = “ Lançar dois dados”
  - A = “Obter um número par no primeiro dado”
  - B = “Obter um número par no segundo dado”
  - $A \cap B$ = “Obter números pares em ambos dados”

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{9/36}{18/36} = \frac{1}{2}$$

Probabilidade Condicional

Regra do Produto

- A regra do produto refere-se a probabilidade da interseção de eventos. É resultado direto da definição de probabilidade condicional.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A / B)P(B)}$$

- No caso de eventos independentes temos o seguinte resultado.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Probabilidade Condicional

- **Exemplo 1:**
- Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Duas peças são retiradas, uma a uma sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam não defeituosas?

  - **Método 1:**
  - Considere cada retirada de uma peça não defeituosa como um evento.
    - A = "A primeira peça retirada é não defeituosa"
    - B = "A segunda peça retirada é não defeituosa"
  - Observe que o evento B depende de A. Pede-se calcular P(A $\cap$ B).

Sabe-se que:

$$P(A) = \frac{8}{12} \qquad P(B/A) = \frac{7}{11}$$

Por definição:

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A)$$

$$= \frac{7}{11}\frac{8}{12} = \frac{14}{33} = 0,4242$$

Probabilidade Condicional

- **Exemplo 1:**
- Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Duas peças são retiradas, uma a uma sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam não defeituosas?

  - **Método 2:**
  - Defina o espaço amostral Ω como e o evento A como:
    - Ω = "Formas de retirar duas peças peças do lote"
    - A = "Retirar duas peças não defeituosas do lote"
  - Pede-se calcular P(A). Aplicar definição de probabilidades classica.

Calcula-se:

$$n(A) = C_2^8 = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

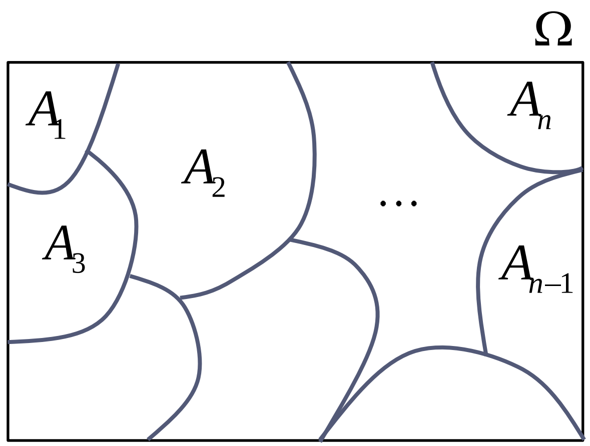
$$n(\Omega) = C_2^{12} = \frac{12!}{2!10!} = 66$$

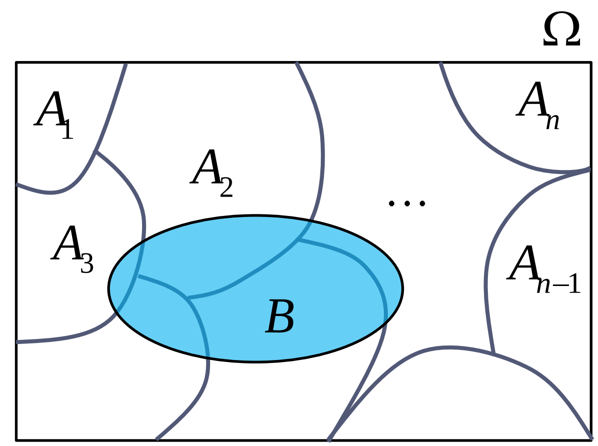
Por definição:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{28}{66} = 0,4242$$

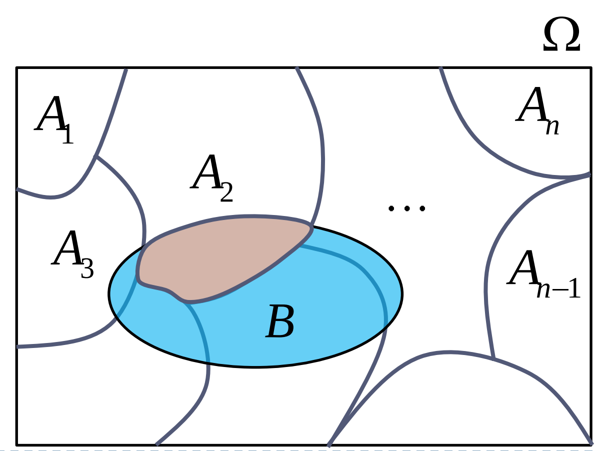
Teorema de Probabilidade Total

- Considere $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e
- seja B um evento qualquer de Ω.





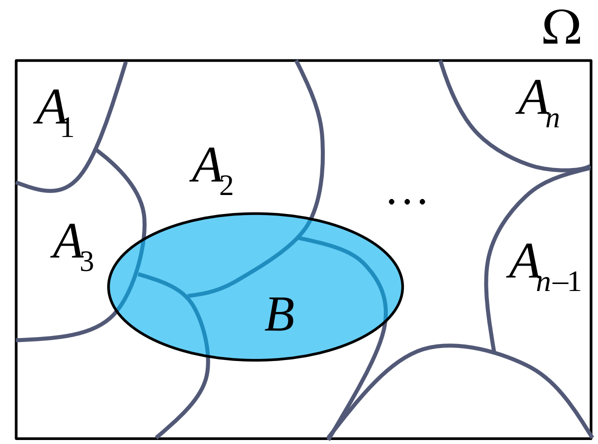
- Observe: $(A_2 \cap B)$



Teorema de Probabilidade Total

- Considere $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer de Ω. A probabilidade de ocorrencia de B é definida como:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$



- **Prova:**
- Observa-se que B pode ser decomposto em partes:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ \cdots \ \cup (A_n \cap B)$$

- Calculando-se a probabilidade de B:

$$P(B) = P\left[\ (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ \cdots \ \cup (A_n \cap B)\ \right]$$

- Como as partes de B são mutuamente excludentes:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ \cdots \ + P(A_n \cap B)$$

Teorema de Probabilidade Total

- Aplicandose a regra do produto:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

- Obtem-se que:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)P(B/A_n)$$

- Re-escrevendo, conclui-se a prova:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

- Na prática, as probabilidades de ocorrência dos eventos A_1, A_2, A_3, ..., A_n que fazem parte da partição Ω, são conhecidas ou podem ser calculadas, por isso as probabilidades $P(A_i)$ são chamadas de probabilidades *à priori* dos eventos A_i.

Teorema de Probabilidade Total

- **Exemplo:**
- Um fabricante de sorvete recebe 20% do todo o leite que utiliza de uma fazenda F1, 30% de uma fazenda F2 e 50% de uma fazenda F3.
- Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas e observou que 20% do leite produzido na fazenda F1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F2 e F3, essa proporção era de 5% e 2 %, respectivamente.
- Na fábrica de sorvete o leite é armazenado dentro de um refrigerador sem identificação das fazendas. Qual a probabilidade de que uma amostra de leite retirada do refrigerador esteja adulterada?

- **Solução:**
- O espaço amostral pode ser particionado nas três fazendas fornecedoras de leite. Define-se assim os seguintes eventos e as suas probabilidades:
  - F_1: O sorvete foi fabricado com leite da fazenda F_1; $P(F_1) = 0{,}20$;
  - F_2: O sorvete foi fabricado com leite da fazenda F_2; $P(F_2) = 0{,}30$;
  - F_3: O sorvete foi fabricado com leite da fazenda F_3; $P(F_3) = 0{,}50$;

Teorema de Probabilidade Total

- **Solução:**
- Por outro lado, define-se o evento B como:
  - B: O leite estava adulterado pela adição de água.
- Isso permite definir as seguinte probabilidades condicionais:
  - $P(B/F_1)$: probabilidade de que o leite este adulterado dado que veio da fazenda F_1;
  - $P(B/F_2)$: probabilidade de que o leite este adulterado dado que veio da fazenda F_2;
  - $P(B/F_3)$: probabilidade de que o leite este adulterado dado que veio da fazenda F_3;
- onde:
  - $P(B/F_1) = 0{,}20$; $P(B/F_2) = 0{,}05$; $P(B/F_3) = 0{,}02$;
- usando o teorema de probabilidade total, pode-se calcular a probabilidade de que o leite este adulterado:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(F_i)P(B/F_i) = (0,20)(0,20) + (0,30)(0,05) + (0,50)(0,02)$$

$$= 0,065$$

Teorema de Bayes

- Considere $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer de Ω. O teorema de Bayes estabelece uma expressão para a probabilidade condicional $P(A_i/B)$:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i)}$$

- Sob a hipótese de que o evento B, já tenha ocorrido, a probabilidade condicional $P(A_i/B)$ é chamada de probabilidade *à posteriori* do evento A_i. Em contraste com a probabilidade *à priori* do evento A_i, $P(A_i)$.

- **Prova:** Obtem-se diretamente da definição de probabilidade condicional, regra do produto e do teorema de probabilidade total.

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B / A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i)}$$

Teorema de Bayes

- **Exemplo 1:**
- Considerando o exemplo do fabricante de sorvete, sabendo-se que a amostra está adulterada, determinar a probabilidade de que o leite tenha sido fornecido pela fazenda F_2.
- **Solução:**
- Pede-se calcular $P(F_2/B)$.
- Por definição:

$$P(F_2 / B) = \frac{P(F_2)P(B / F_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(F_i)P(B / F_i)}$$

- Substituindo os valores das probabilidades à priori e à posteriori.

$$P(F_2 / B) = \frac{(0,30)(0,05)}{(0,20)(0,20) + (0,30)(0,05) + (0,50)(0,02)} = \frac{0,015}{0,065} = 0,2307$$

Teorema de Bayes

- **Exemplo 2:**
- Determinadas peças são produzidas em três fábricas F_1, F_2, e F_3, sendo que a fábrica1 e 2 produzem a mesma proporção de peças e a fábrica 3 produz o dobro das peças que cada uma das outras duas fábricas produzem. Sabe-se também, que 2% das peças produzidas pela fábrica1 são defeituosas e que a proporção para as fábricas 2 e 3 são 3% e 4%, respectivamente. Qual a probabilidade de que uma peça defeituosa tenha origem da fábrica 2?

- **Solução:**
- Define-se o evento B = "A peça fabricada é defeituosa". Enquanto que o processo de fabricação em três fabricas configura uma partição em três eventos:
  - F_1 = "A peça é fabricada na fábrica 1"; $P(F_1) = 0,25$
  - F_2 = "A peça é fabricada na fábrica 2"; $P(F_2) = 0,25$
  - F_3 = "A peça é fabricada na fábrica 3". $P(F_3) = 0,50$

Teorema de Bayes

- **Solução:**
- Os dados referentes à probabilidades condicionais $P(B/F_i)$, que indicam a chance de uma peça ser defeituosa, dado provem de uma fábrica específica, são conhecidos:

$$P(B/F_1) = 0,02$$
$$P(B/F_2) = 0,03$$
$$P(B/F_3) = 0,04$$

- Pede-se a probabilidade $P(F_2/B)$. Para isso aplica-se o teorema de Bayes.

$$P(F_2/B) = \frac{P(F_2)P(B/F_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(F_i)P(B/F_i)}$$

- Substituindo os valores das probabilidades à priori e à posteriori.

$$P(F_2/B) = \frac{(0,25)(0,03)}{(0,25)(0,02)+(0,25)(0,03)+(0,50)(0,04)} = \frac{0,0075}{0,0325} = 0,2307$$