SISTEMAS DE EDO DE 1º ORDEM

- MÉTODO AUTOVALORES/AUTOVETORES (SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES).

→ OPERAÇÕES COM MATRIZES

⇒ AUTOVALORES E AUTOVETORES

⇒ SISTEMA DE EQS. LINEARES

OPERAÇÕES COM MATRIZES

• IGUALDADE

DUAS MATRIZES SÃO IGUAIS QUANDO SÃO DO MESMO TIPO E TÊM OS ELEMENTOS CORRESPONDENTES IGUAIS:

EX: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ENTÃO: $\begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \\ c = -3, \\ d = 7. \end{cases}$

• ADIÇÃO

$A + B \Rightarrow$ SOMAM-SE OS ELEMENTOS DE MATRIZ CORRESPONDENTES:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+2) & (-1+7) \\ (-3-3) & (4+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

• MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

• PRODUTO DE DUAS MATRICES

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\times 3} - B_{3\times 2}$$

$$L \ \boxed{C} = \boxed{L} \ C$$

$$P_{2\times 2}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4-3+12) & (0+6-8) \\ (2+0-3) & (0+0+2) \end{pmatrix};$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

FAÇA O PRODUTO $A.X$, ONDE:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A_{2\times 2} - X_{2\times 1} \quad P_{2\times 1}$$

$$A.X = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$$P_{2\times 1}$$

AUTOVALORES E AUTOVETORES

PROBLEMA: ENCONTRE OS AUTOVALORES E AUTOVETORES DA MATRIZ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

- OS AUTOVALORES λ E OS AUTOVETORES X SATISFAZEM A EQUAÇÃO:

$$\boxed{(A - \lambda I) \cdot X = 0} \quad (1)$$

, QUE EQUIVALE À EQUAÇÃO:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{É A MATRIZ } (A - \lambda I)} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- $\boxed{\text{AUTOVALORES}}$

SÃO AS RAÍZES DA EQ. $\det(A - \lambda I) = 0$, OU SEJA:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

• AUTOVETORES

NOTAÇÃO: $X_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

PARA ENCONTRAR AUTOVETORES: SUBSTITUI, NA EQ. 2, λ POR CADA UM DOS VALORES ENCONTRADOS.

PARA $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ 4 & -2-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 ,$$

$\underbrace{2 \times 2 - 2 \times 1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_1 - x_2 = 0} , \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 - x_2 = 0} . \end{cases}$$

CADA LINHA DESSA EQ. VETORIAL LEVA À CONDIÇÃO $x_1 - x_2 = 0$.

SE $x_1 = c$ ENTÃO $x_2 = c \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$

EM GERAL, NÃO USA A CONSTANTE C PARA AUTOVETORES, ENTÃO:

$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$, X_1 É O AUTOVETOR CORRESPONDENTE AO AUTOVALOR $\lambda_1 = 2$.

OBS: QUALQUER MÚLTIPLO DESSE VETOR TAMBÉM É UM AUTOVETOR.

$\boxed{\text{PARA } \lambda = -1}$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$ NA EQ. 2 :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 \\ 4x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x_1 = x_2 \Rightarrow \boxed{X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

AUTOVETOR CORRESPONDENTE AO AUTOVALOR $\lambda_2 = -1$.

CONSIDERAÇÕES GERAIS

EQS. LINEARES

- $x - 2y = 4 \Rightarrow$ EQ. LINEAR, 2 INCÓGNITAS (x, y)
- $2x + y + 3z = 4 \Rightarrow$ " " , 3 INCÓGNITA (x, y, z)

FORMA GERAL

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b} \quad (b \to cte)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow$ INCÓGNITAS

$a_1, a_2, \dots, a_n \Rightarrow$ COEFICIENTES DAS INCÓGNITAS

$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n \Rightarrow$ ESSE CONJUNTO DE VALORES É SOLUÇÃO DE (1) SE:

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_n \alpha_n = b.$$

OBS: $\boxed{2x.y + x.z + y = 5}$; $\boxed{3x^2 + xz + y^2 = 3}$

NÃO SÃO EQS. LINEARES

SISTEMAS DE EQS. LINEARES

DADA AS EQS.

- $2x - y = 2 \Rightarrow$ SOLUÇÕES: $(2,2)$ $(3,4)$ $(0,-2)$ $(1,0)$
- $x + y = 1 \Rightarrow$ SOLUÇÕES: $(2,-1)$ $(3,-2)$ $(-1,2)$ $(1,0)$

O PAR $(1,0)$ É SOLUÇÃO COMUM DAS DUAS EQS.,

OU SEJA, É SOLUÇÃO DO <u>SISTEMA</u> <u>LINEAR</u>
A DUAS INCÓGNITAS:

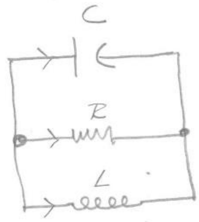
$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ x + y = 1, \end{cases} \quad \text{SOLUÇÃO } (1,0)$$

ASSIM, <u>RESOLVER UM SISTEMA</u> $\Rightarrow$ É OBTER AS n-UPLAS QUE VERIFICAM TODAS AS EQS. DO SISTEMA.

APLICAÇÃO

MOSTRA-SE QUE A DIFERENÇA DE TENSÃO V E A CORRENTE I SÃO DESCRITAS PELO SISTEMA DE EQS.:

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{V}{L} \\[2ex] \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{I}{C} - \dfrac{V}{RC} \end{cases} \Rightarrow$$



C → CAPACITOR

R → RESISTOR

L → INDUTOR

CIRCUITO LRC PARALELO

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}}_{\text{MATRIZ } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}}_{\text{VETOR SOLUÇÃO } X} \Rightarrow X' = A \cdot X$$

⇒ SISTEMAS DE EDO 1ª ORDEM

↳ FORMA MATRICIAL

⇒ VETOR SOLUÇÃO

⇒ PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO DE SOLUÇÕES

⇒ CRITÉRIO PARA SOLUÇÕES L.I.

⇒ CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES

↳ SOLUÇÃO GERAL

⇒ MÉTODO DE AUTOVALORES/AUTOVETORES PARA RESOLVER SISTEMAS DE EDO

SISTEMAS DE EDO - 1ª ORDEM

EQS:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x = 5y + e^{t} - 2.t \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} + 3y = 4x + 10.t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 5y + e^{t} - 2.t \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y + 10.t \end{cases} \quad (1)$$

O SISTEMA (1) É ESCRITO NA FORMA MATRICIAL:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t} - 2.t \\ 10.t \end{pmatrix} \quad ; \quad (2)$$

$2\times2 - 2\times1$; $R_{2\times1}$

VETOR SOLUÇÃO: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; (3) , REESCREVE (2):

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} e^{t} - 2.t \\ 10.t \end{pmatrix} \quad ; \quad (4)$$

DEFININDO:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{DEPOIS}} A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{t} - 2.t \\ 10.t \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{DEPOIS}} F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

ENTÃO (4) RESULTA:

$$\boxed{X' = A.X + F(t)} \quad (5)$$

$$\text{SE } F(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X = A.X} \quad (6)$$

↳ DIZ: SISTEMA HOMOGÊNEO

OBS:

A MATRIZ $F(t)$ EM (2) PODE SER REESCRITA:

$$\begin{pmatrix} e^t - 2t \\ 10t \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}_{2\times 1} + \begin{pmatrix} -2t \\ 10t \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{2\times 1} \cdot e^t + \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}_{2\times 1} \cdot t \quad ; \quad (7)$$

EX: ESCREVA A FORMA MATRICIAL DO SISTEMA:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 2\vec{X} = -3.Y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} - 5.\vec{Y} = 6.X \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \overset{\downarrow x}{2X} - \overset{\downarrow y}{3Y} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 6X + 5Y \end{array}\ {}_{2\times 1} \quad ; \quad (8)$$

$$\underbrace{2\times 2 - 2\times 1}_{R_{2\times 1}}$$

ENTÃO:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot X \qquad \text{(HOMOGÊNEO)}$$

(10)

EX - VERIFIQUE SE $x(t) = e^{-2t}$ E $y = -e^{-2.t}$ SÃO SOLUÇÕES DO SISTEMA:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, & \text{I} \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y. & \text{II} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ SE x E y SÃO SOLUÇÕES DEVEM VERIFICAR AS EQS. I E II

SOLUÇÃO:

PARA EQ. I:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-2.t} + 3\left(-e^{-2t}\right) = [1-3]e^{-2.t} = -2.e^{-2t};$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\right) = -2.e^{-2.t};$$

$$\boxed{-2e^{-2t} = -2.e^{-2.t}}.$$ $\therefore$ VERIFICAM EQ. I

PARA EQ. II:

$$\frac{dy}{dt} = 5.e^{-2.t} + 3\left(-e^{-2.t}\right) = [5-3]e^{-2.t} = 2.e^{-2t};$$

$$\frac{d}{dt}\left(-e^{-2.t}\right) = 2.e^{-2.t};$$

$$\boxed{2.e^{-2.t} = 2.e^{-2.t}}$$ VERIFICAM, TAMBÉM, A EQ. II

ENTÃO x E y SÃO SOLUÇÕES DO SISTEMA. NO INTERVALO $(-\infty, +\infty)$

• SE O SISTEMA ESTIVER NA FORMA MATRICIAL, COMO VERIFICAR SE X E Y SÃO SOLUÇÕES?

FORMA MATRICIAL $\Rightarrow \boxed{X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X}$ (1) $, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ (2)

$\Rightarrow$ DEVEMOS VERIFICAR A IGUALDADE DAS MATRIZES:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2.t} \\ -e^{-2.t} \end{pmatrix}_{2\times 1}}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2.t} \\ 5e^{-2.t} - 3e^{-2.t} \end{pmatrix}_{2\times 1} ; \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2.t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} ; \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} -2e^{-2.t} \\ 2e^{-2.t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2.t} \\ 2e^{-2.t} \end{pmatrix} ; \quad (5)$$

$\therefore$ x, y SÃO SOLUÇÕES NO INTERVALO $(-\infty, +\infty)$.

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} e^{-2.t} \\ -e^{-2.t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2.t}} \quad (6)$$

, É CHAMADO <u>VETOR SOLUÇÃO</u>

DAS CONSIDERAÇÕES ANTERIORES, ESCREVEMOS FORMALMENTE QUE:

O SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 1º ORDEM:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n + f_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n + f_n(t) \qquad (1)$$

$x_1 \equiv x$

$x_2 \equiv y$

$\vdots$

PODE SER ESCRITO COMO:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

OU SIMPLESMENTE:

$$\boxed{\frac{d\bar{X}}{dt} = A(t).\bar{X} + F(t)} \qquad (2)$$

COM AS MATRIZES:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{E}$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

OBS:

A EQ. 2 $\boxed{\dfrac{dX}{dt} = A(t).X + F(t)}$

TAMBÉM É ESCRITA NA FORMA $\boxed{X' = A(t).X + F(t)}$ 3

SE $F(t) = 0$ EM 2/3 DIZEMOS QUE O SISTEMA É HOMOGÊNEO, OU SEJA $\boxed{X' = AX}$

(TAMBÉM DAS CONSIDERAÇÕES ANTERIORES, SEGUE QUE:)

DEFINIÇÃO - VETOR SOLUÇÃO

UM VETOR SOLUÇÃO, NUM INTERVALO I, É QUALQUER MATRIZ X, CUJOS ELEMENTOS VERIFICAM O SISTEMA $\boxed{\dfrac{d}{dt}X = A(t)X + F(t)}$, ONDE:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}$$

PARTE DA TEORIA DOS SISTEMAS LINEARES DE n EQS. DIFERENCIAIS LINEARES DE 1ª ORDEM É ANÁLOGA À TEORIA DAS EQS. DE 2ª ORDEM. (ABORDAMOS SÓ SISTEMAS HOMOGÊNEOS)

• PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

SEJA $X_1, X_2, \ldots, X_k$ UM CONJUNTO DE VETORES SOLUÇÃO DO SISTEMA $X' = AX$ NUM INTERVALO I. ENTÃO $\boxed{X = C_1 X_1 + C_2 X + \ldots + C_k X_k}$ TAMBÉM É UMA SOLUÇÃO NO INTERVALO I. $C_1, C_2, \ldots, C_k$ SÃO CONSTANTES.

EXEMPLO:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\operatorname{Sen}(t) \\ -\cos(t) - \operatorname{Sen}(t) \end{pmatrix} \quad \text{E} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$ SÃO SOLUÇÕES

DO SISTEMA $$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ENTÃO, PELO PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO, A COMBINAÇÃO LINEAR

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\operatorname{Sen}(t) \\ -\cos(t) - \operatorname{Sen}(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

É <u>OUTRA</u> <u>SOLUÇÃO</u>.

INDEPENDÊNCIA LINEAR - LI

$X_1, X_2, \ldots, X_k \Rightarrow$ VETORES SOLUÇÃO DO SISTEMA $\boxed{X' = A.X}$

SE $\boxed{C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_k X_k = 0}$, PARA $C_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$

ENTÃO $X_1, X_2, \ldots, X_k$ SÃO L.D.

SE NÃO SÃO L.D. SÃO L.I. !

● CRITÉRIO PARA SOLUÇÕES L.I.

SEJAM:
$$X_{1} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} ; \quad X_{2} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} ; \ldots ; \quad X_{n} = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

n VETORES SOLUÇÕES DE $\boxed{X' = A X}$, EM I

CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA $X_1, X_2, \ldots, X_n$ SEREM L.I.:

$$W(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

WRONSKIANO

EXEMPLO:

$X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2.t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ E $X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6.t} \\ 5e^{6.t} \end{pmatrix}$ SÃO SOLUÇÕES DE $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} . X$

$$W(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} e^{-2.t} & 3e^{6.t} \\ -e^{-2.t} & 5e^{6.t} \end{vmatrix} = 5.e^{4t} - (-3.e^{4t}) = 8.e^{4.t} \neq 0$$

COMO $W(X_1, X_2) \neq 0$, X_1 E X_2 SÃO L.I.

CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES

QUALQUER CONJUNTO $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ DE SOLUÇÕES L.I. É CHAMADO CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES

SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA

SE $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ É UM CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES, ENTÃO A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA É:

$$\boxed{X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n}, \quad C_i \text{ CONSTANTES}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

EXEMPLO

VIMOS QUE $X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$ E $X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5 \cdot e^{6t} \end{pmatrix}$ SÃO SOLUÇÕES **L.I.** DO SISTEMA $X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X$. ENTÃO:

- $\{X_1, X_2\}$ É UM CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES
- $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3e^{6.t} \\ 5e^{6.t} \end{pmatrix}$

  É A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA.

- SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EDO LINEARES DE 1ª ORDEM.

$$X' = AX + F \Rightarrow \text{NÃO HOMOGÊNEO}$$

$$X' = AX + 0 \Rightarrow \text{HOMOGÊNEO}$$

- <u>ABORDAR</u>

⇒ MÉTODO AUTOVALOR, AUTOVETOR PARA: (QUALITATIVO)

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

⇒ DEPOIS RESOLVER O SISTEMA

⇒ APLICAÇÃO.

SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES

CONSIDERE O SISTEMA:

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 & (1) \\ x_2' = 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

, ENCONTRE UMA SOLUÇÃO GERAL.

- CONVENIENTE ESCREVER NA FORMA MATRICIAL:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X' = A.X} \quad (2) \qquad \boxed{\begin{matrix} x_1 \equiv x_1(t) \\ x_2 \equiv x_2(t) \end{matrix}}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (3) $\Rightarrow$ VETOR SOLUÇÃO. PROCURA-SE VETOR SOLUÇÃO NA FORMA:

$$\boxed{X = V.e^{\lambda.t}} \quad (4) \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda.t}} \quad (5) \qquad \boxed{V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

- O EXPOENTE λ E O VETOR CONSTANTE V DEVEM SER OBTIDOS.

- SUBSTITUI (4) EM (2):

$$\lambda V.e^{\lambda.t} = A.Ve^{\lambda.t},$$

$$\lambda V = AV \Rightarrow A.V - \lambda V = 0 \quad , \text{ou}$$

$$\boxed{(A - \lambda I).V = 0} \quad (6)$$

A EQ. 6 TEM SOLUÇÃO SOMENTE SE:

$$\boxed{\det(A-\lambda I)=0} \quad (7)$$

$I \Rightarrow$ MATRIZ IDENTIDADE

QUE É UM PROBLEMA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES.

ASSIM:

O VETOR $\vec{X}$, EQ. (4), SERÁ UMA SOLUÇÃO DO SISTEMA (1), SE λ FOR UM AUTOVALOR DA MATRIZ COEFICIENTE A, E $\vec{V}$ UM AUTOVETOR DA MATRIZ A.

EX - RESOLVENDO O SISTEMA:

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\text{FORMA} \\ \text{MATRICIAL}\end{matrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

VETOR SOLUÇÃO: $\boxed{X = V e^{\lambda . t}} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{\lambda . t}} \quad (2)$

$\lambda \Rightarrow$ AUTOVALORES DA MATRIZ A;

$V \Rightarrow$ AUTOVETORES DA " A;

- $\boxed{\text{OBTENDO AUTOVALORES}}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \lambda . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = 0 \;; \quad (4)$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5).(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \quad (5)$$

- $\boxed{\text{OBTENDO AUTOVETORES}}$

PARA $\boxed{\lambda_1 = \lambda = 5}$

DEVEMOS RESOLVER $(A - \lambda I).V = 0$, $\quad (6)$

USANDO (3):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{2\times 2 \, - \, 2\times 1} = 0 \quad (7) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -V_1 + 2V_2 \\ 3V_1 - 6V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -V_1 + 2V_2 = 0 \\ 3V_1 - 6V_2 = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

ENTÃO: $\boxed{V_1 = 2V_2}$ (9)

PARA $V_2 = 1 \Rightarrow V_1 = 1 \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (10)

AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR $\lambda = 5$.

RETORNANDO NA EQ. (2) TEMOS UMA SOLUÇÃO:

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{5.t}} \quad (11)$$

PARA $\boxed{\lambda = -2}$

$$(A - \lambda I) \cdot V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-(-2) & 2 \\ 3 & -1-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6V_1 + 2V_2 \\ 3V_1 + V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$\therefore \boxed{V_1 = -\frac{1}{3} V_2}$ PARA $V_2 = -3 \Rightarrow V_1 = 1$.

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR $\lambda = -2$.

NA EQ. (2):

$$\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot e^{-2.t}} \quad (14)$$

AS SOLUÇÕES 11 E 24 SÃO L.I.?

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5.t} = \begin{pmatrix} 2.e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} \quad ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2.t} = \begin{pmatrix} e^{-2.t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$W(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} 2e^{5.t} & e^{-2.t} \\ e^{5.t} & -3e^{-2t} \end{vmatrix} = -6e^{3t} - e^{3t} = e^{3t}(-6-1) = -7.$$

$\therefore$ SÃO L.I.

15

LIMBRE: $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ É C.S FUNDAMENTAL DE SOLUÇÕES (SÃO L.I.) ENTÃO

$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$ É A SOL. GERAL.

ASSIM:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 \quad , \qquad (16)$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5\,t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2.t} \qquad (17)$$

É A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA.