8ª Lista de Cálculo Diferencial e Integral I - 2021-1

1. Utilize a Regra da cadeia para derivar as seguintes funções:

a. $y = \tan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

b. $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$

c. $y = \sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

d. $y = \text{sen}(\sqrt{1+x^2})$

e. $y = \sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

f. $y = \cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$

g. $f(x) = \cos(\text{sen}(\cos(1-x^2)))$

h. $f(x) = \tan^3(\text{sen}^2(4ax+b))$

i. $g(x) = \text{sen}(x^2 + \text{sen}(x^2 + \text{sen}(x^2)))$

j. $f(x) = \text{sen}((x+1)^2(x+2))$

2. Seja $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$, determine $(f^{-1})'(3/5)$. Considere $D(f) = [0,\infty) - \{2\}$.

3. Determine as derivadas das funções trigonométricas inversas.

4. Determine as seguintes derivadas:

a. $f'''(x)$ para $f(x) = 7x^3 - 6x^5$

b. $f''(x)$ para $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

c. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ para $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$

d. $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ para $y = ax^4$

e. $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ para $y = (1+2x)^3$

f. $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ para $y = (1+5x)^2$

g. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

h. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)$

i. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$

j. $\dfrac{d}{dx}\left[x\,\dfrac{d}{dx}(1+x^2)\right]$

k. $\dfrac{d}{dx}\left[x\,\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right]$

l. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{ax^2-b}{cx^2-d}\right)$

m. $\dfrac{d^{100}}{dx^{100}}(x^9 - 20x^7 + x^5 + 1)$

n. $\dfrac{d^5}{dx^5}(x^5 + c^5)$

o. $f'''(x)$ para $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{1} + 1$

p. $f'''(x)$ para $f(x) = (7x^2 - x)^{-1}$

q. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\left(\dfrac{6-x}{x^2-1}\right)^2\right]$

r. $\dfrac{d^4}{dx^4}[(1-x)^4]$

s. $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ para $y = (1+x)^n$

t. $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ para $y = \dfrac{1}{x+1}$

5. Mostre que a derivada de ordem n da função $y = e^{ax}$ é dada por $y^{(n)} = a^n e^{ax}$.

6. Seja $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$, $x \in [0, 1/4]$. Calcule $(f^{-1})''(e^{-\frac{1}{8}})$.

7. Encontre dy/dx, usando derivação implícita.

a. $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 20 = 0$

b. $x^2 + xy - 3y^2 - 2x + 6y = 0$

c. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 y$

d. $y^2(1 - x) = x^3$

e. $(y - 2)^2(x^2 + y^2) = y^2$

f. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

g. $x^{1/2} + y^{1/2} = 9$

h. $\sqrt{xy} = x - 2y$

i. $\operatorname{sen} x + 2\cos 2y = 1$

j. $(\operatorname{sen} \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

k. $\operatorname{sen} x = x(1 + \tan y)$

l. $\cot y = x - y$

m. $y = \operatorname{sen}(xy)$

n. $x = \sec \frac{1}{y}$

8. Use derivação implícita para encontrar dy/dx e calcule a derivada no ponto indicado.

a. $xy = 4$, $P = (-4, -1)$

b. $x^2 - y^3 = 0$, $(1, 1)$

c. $y^2 = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, $(0, -1)$

d. $(x + y)^3 = x^3 + y^3$, $(-1, 1)$

e. $\tan(x + y) = x$, $(0, 0)$

f. $x \cos y = 1$, $(2, \frac{\pi}{3})$

9. Calcule dy/dx de maneira implícita e determine o intervalo da forma $-a < y < a$ ou $0 < y < a$, onde y seja uma função diferenciável.

a. $\tan y = x$

b. $\cos y = x$

10. Use derivação implícita para encontrar a equação da reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ no ponto $(1, 2)$. Verifique que a equação da reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0) é $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

11. Em cada caso: **(i)** derive y em relação a x, **(ii)** derive x e y em relação a t.

a. $2x^2 - 3x^4 = 0$

b. $x^2 - 3xy^2 + y^3 = 10$

c. $\cos \pi y - 3 \operatorname{sen} \pi x = 1$

d. $4 \operatorname{sen} x \cos y = 1$