Equações Diferenciais

Interesse: Muitas leis e relações físicas podem ser formuladas matematicamente através de equações diferenciais.

Ex1 – Deslocamento horizontal de uma massa ligada a uma mola (2ª lei de Newton e Lei de Hooke).

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\ ;$$

Ex2 – Circuito elétrico em série: $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$;

Terminologia e definições básicas

Definição – Equação Diferencial

Equação que contém derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes...

1) $y=f(x)$ → $\frac{dy}{dx}+11y=0$; → x (por dx) :

2) $dy+11ydx=0$

3) $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}=x$ → onde: $u=f(x)$ e $v=g(x)$;

u e v → variáveis dependentes e x → variável independente;

4) $\frac{\partial^3u}{\partial x^3}+\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=0$ onde: $u=f(x)$ e $v=g(t)$ → variáveis dependentes, e

x e t → variáveis independentes;

Equações diferenciais são classificadas pelo *TIPO*, *ORDEM* e LINEARIDADE.

1) Classificação pelo *TIPO*: EDO ou EDP

EDO→ contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a UMA ÚNICA variável independente.

$y = f(x)$ → $\frac{dy}{dx} + 11y = 0$; x→ independente.

$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = x$ → onde: $u = f(x)$ e $v = g(x)$. x→ independente.

EDP→ contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a DUAS ou MAIS variáveis independentes.

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ onde: $u = f(x)$ e $v = g(t)$ → variáveis dependentes, e

x e t → variáveis independentes;

----

2) Classificação pela *ORDEM*: → Ordem de uma Eq. Diferencial é

indicada pela MAIS ALTA DERIVADA da equação.

EXEMPLOS: Classificar: EDO ou EDP ?

Qual a Ordem ?

a) $\frac{dy}{dt} - 5y = 1$;

b) $(y - x)dx + 4xdy = 0$; se $y = f(x)$ → $(y - x) + 4x\frac{dy}{dx} = 0$;

SE $x = f(y)$ → $(y - x)\frac{dx}{dy} + 4x = 0$;

c) $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = x$;

d) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$;

e) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$;

f) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$;

g) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$;

h) $a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$;

3) Classificação pela *LINEARIDADE*: →

Equação linear de ordem n: para $y = f(x)$ →

FORMA GERAL:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

1

LINEARIDADE significa:

a) **todos** coeficientes (a_n) são função da variável independente (x , nesse caso);

b) $y = f(x)$ e todas suas derivadas devem estar elevados a primeira potência.

EXEMPLOS: Classificar: equação Linear ou não-linear?

a) $xdy + ydx = 0$ → $x\frac{dy}{dx} + y = 0$;

b) $y'' - 2y' + y = 0$ é o mesmo que: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$;

c) $x^3\frac{d^3 y}{dx^3} - x^2\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$;

d) $y.y'' - 2y' = x$; é mesmo que: $y\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = x$;

e) $\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$;

Definição – Equação Diferencial Linear de 1ª ordem

É toda equação na forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$;

→ Forma útil:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x).$$

Problema: dada uma equação $\frac{dy}{dx} - 5y = 1$;

Ou:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

encontrar, de alguma forma, uma solução $y = f(x)$.

Definição – Solução para uma equação diferencial:

É toda função $y = f(x)$....... quando substituída na equação diferencial reduz a equação a uma identidade.

<u>Ex1</u> – Verifique que $y = \frac{x^4}{16}$ é uma solução para a eq. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$.

Ex2 – Verifique que $y = xe^x$ é uma solução para a eq. $y'' - 2y' + y = 0$.

Ex3 – Considerando a eq. $y'' - 5y' + 6y = 0$, verifique se $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{3x}$ são ambas soluções da equação.

Verifique ainda se $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ também é solução da eq. dada. (c_1, c_2 são constantes).

Definição – *Soluções explícitas e implícitas*

Soluções explícitas → $y = f(x)$

- $y = \dfrac{x^4}{16}$ é solução EXPLÍCITA da equação $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$.
- $y = x.e^x$ é uma solução EXPLÍCITA da equação $y'' - 2y' + y = 0$.

Soluções implícitas → Relação *G(x,y)=0* →

é solução implícita → SE define <u>DUAS</u> ou <u>MAIS</u> soluções explícitas.

Ex1 – $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é solução implícita da equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad ???$$

<u>Solução:</u>

a) <u>Verifica a equação?</u>

$D_x[x^2 + y^2 - 4] = D_x[0]$ → $2x + 2yy' - 0 = 0$ → $2yy' - 0 = -2x$ →

$y' = -\frac{x}{y}$ ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ → verifica a equação (é solução)

Note que:

$$D_x[y]^n = n[y]^{n-1}y' \;;$$

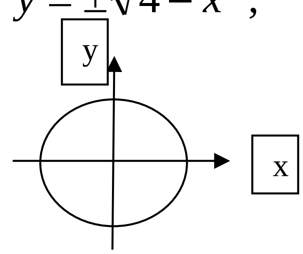
$$D_x[Cos(x)]^n = n[Cos(x)]^{n-1}[Cos(x)]';$$

$$D_x[Cos(x)]^4 = 4[Cos(x)]^3(-1)Sen(x);$$

b) <u>(a relação dada) Define uma ou mais soluções explícitas?</u>

Temos que: $x^2 + y^2 - 4 = 0$ → $y^2 = 4 - x^2;$ → $y = \pm\sqrt{4 - x^2};$

para $-2 \le x \le 2;$



Portanto, a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é solução implícita da equação: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

Ex2– A relação $x^2 + y^2 + 25 = 0$ é solução implícita de $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$?

$x^2 + y^2 + 25 = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{-25 - x^2};$???????

Outras considerações:

Equação linear de ordem *n*: *FORMA GERAL*:

a) $y = f(x)$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad ; \qquad (1)$$

SE: $n=3$

$$\rightarrow \quad a_3(x)\frac{d^3 y}{dx^3} + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)\,; \qquad (2)$$

Ex:

$$x^2\frac{d^3 y}{dx^3} + \ln(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + \sqrt[3]{x}\,\frac{dy}{dx} + y = e^x \qquad (3)$$

b) $s = f(t)$

Passo 1) onde está: $x \rightarrow t$ e

Passo 2) onde está: y $\rightarrow s$

Passo 1) $$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots\dots\dots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t); \quad (4)$$

Passo 2) $$a_n(t)\frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}} + \dots\dots\dots + a_1(t)\frac{ds}{dt} + a_0(t)s = g(t)\ ; \quad (5)$$

SE: $n=2$

$\rightarrow$ $$a_2(t)\frac{d^2 s}{dt^2} + a_1(t)\frac{ds}{dt} + a_0(t)s = g(t); \quad (6)$$

Ex: $$t^5\frac{d^2 s}{dt^2} + \sqrt{t}\frac{ds}{dt} + \ln(t)s = t^{-2}; \quad (7)$$