Demonstração Condicional e Demonstração Indireta

Lógica Matemática

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UENF

Prof. Fermín A. Tang

Regra de Exportação-Importação

Lembrete

- 10. Exportação-Importação (EI) : $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Demonstração Condicional

Definição

- A demonstração condicional é outro método útil para demonstrar a validade de um argumento. No entanto, ele somente pode ser usado se a conclusão do argumento tem a forma condicional.

- Considere o seguinte argumento, cuja conclusão se encontra na forma condicional:

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n\ \vdash\ (A \rightarrow B)$$

- Sabe-se que este argumento é válido, se e somente se, a sua condicional associada:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge\ \ldots \wedge P_n\ \rightarrow\ (A \rightarrow B)$$

- É uma tautologia.

- Pela regra de equivalência Exportação-Importação (de fato importação) a condicional é equivalente à seguinte:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge\ \ldots \wedge P_n \wedge\ A\ \rightarrow B$$

Demonstração Condicional

Definição

- Com isso, qualquer argumento, cuja conclusão se encontra na forma condicional:

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n\ \vdash (A \rightarrow B)$$

- Será válido, se e somente se, o argumento associado, pela regra de importação também é válido:

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ A\ \vdash\ B$$

- Em resumo, a demonstração condicional (DC) estabelece que para demonstrar a validade de um argumento, cuja conclusão tem a forma condicional, $A \rightarrow B$, basta introduzir A como premissa adicional e deduzir B.

Demonstração Condicional

Exemplo 1

- 1) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \vee (q \to r), \qquad \neg r \ \vdash \ q \to p$$

- Demonstração: Pela regra DC, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento:

$$p \vee (q \to r), \qquad \neg r, \qquad q \ \vdash \ p$$

- Logo:

1.	$p \vee (q \to r)$	Por premissa
2.	$\neg r$	Por premissa
3.	q	Por premissa adicional
4.	$p \vee (\neg q \vee r)$	De (1) por EQ. COND
5.	$(p \vee \neg q) \vee r$	De (4) por EQ. ASSOC
6.	$(p \vee \neg q)$	De (5) e (2) por SD
7.	$\neg\neg q$	De (3) por DN
8.	p	De (6) e (7) por SD

Demonstração Condicional

Exemplo 2

- 2) Demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \to \neg q \vee r, \quad s \vee (r \to t), \quad \neg p \vee s, \quad \neg s \;\vdash\; q \to t$$

- Demonstração: Pela regra DC, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \to \neg q \vee r, \quad s \vee (r \to t), \quad \neg p \vee s, \quad \neg s, \quad q \;\vdash\; t$$

- Logo:

1.	$\neg p \to \neg q \vee r$	Por premissa
2.	$s \vee (r \to t)$	Por premissa
3.	$\neg p \vee s$	Por premissa
4.	$\neg s$	Por premissa
5.	q	Por premissa Adicional
6.	$(r \to t)$	De (2) e (4) por SD
7.	$\neg p$	De (3) e (4) por SD
8.	$\neg q \vee r$	De (1) e (7) por MP
9.	r	De (8) e (5) por SD
10.	t	De (6) e (9) por MP

Demonstração Condicional

Exemplo 3

- 3) Demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \to (q \to r), \quad s \vee (r \to t), \quad p \to s \;\vdash\; \neg s \to (q \to t)$$

- Demonstração: Pela regra DC, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \to (q \to r), \quad s \vee (r \to t), \quad p \to s, \quad \neg s \;\vdash\; (q \to t)$$

- Aplicando novamente a regra DC, temos que demonstrar o argumento:

$$\neg p \to (q \to r), \quad s \vee (r \to t), \quad p \to s, \quad \neg s, \quad q \;\vdash\; t$$

- Logo:

1. $\neg p \to (q \to r)$ Por premissa
2. $s \vee (r \to t)$ Por premissa
3. $p \to s$ Por premissa
4. $\neg s$ Por premissa adicional
5. q Por premissa adicional

Demonstração Condicional
Exemplo 3

- Logo:

1.	$\neg p \to (q \to r)$	Por premissa
2.	$s \lor (r \to t)$	Por premissa
3.	$p \to s$	Por premissa
4.	$\neg s$	Por premissa adicional
5.	q	Por premissa adicional
6.	$\neg p$	De (3) e (4) por MT
7.	$q \to r$	De (1) e (6) por MP
8.	$r \to t$	De (2) e (4) por SD
9.	r	De (7) e (5) por MP
10.	t	De (8) e (9) por MP

Demonstração Condicional

Exemplo 4

- 4) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \to q, \quad q \leftrightarrow s, \quad t \vee (r \wedge \neg s) \ \vdash \ (p \to t)$$

- Demonstração: Pela regra DC, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento:

$$p \to q, \quad q \leftrightarrow s, \quad t \vee (r \wedge \neg s), \quad p \ \vdash \ t$$

- Logo:

1.	$p \to q$	Por premissa
2.	$q \leftrightarrow s$	Por premissa
3.	$t \vee (r \wedge \neg s)$	Por premissa
4.	p	Por premissa adicional
5.	q	De (1) e (4) por MP
6.	$(q \to s) \wedge (s \to q)$	De (2) por EQ. BICOND
7.	$(q \to s)$	De (6) por SIMP
8.	s	De (7) e (5) por MP
9.	$(t \vee r) \wedge (t \vee \neg s)$	De (3) por EQ. DIST
10.	$(t \vee \neg s)$	De (9) por SIMP
11.	t	De (8) e (10) por SD

Demonstração Condicional

Exemplo 5

- 5) Demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \rightarrow \neg q, \qquad (r \rightarrow s), \qquad (\neg p \wedge t) \vee (r \wedge u) \;\vdash\; q \rightarrow s$$

- Demonstração: Pela regra DC, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \rightarrow \neg q, \qquad (r \rightarrow s), \qquad (\neg p \wedge t) \vee (r \wedge u), \qquad q \;\vdash\; s$$

- Logo:

1.	$\neg p \rightarrow \neg q$	Por premissa
2.	$r \rightarrow s$	Por premissa
3.	$(\neg p \wedge t) \vee (r \wedge u)$	Por premissa
4.	q	Por premissa adicional

Demonstração Condicional

Exemplo 6

- 6) Demonstrar a validade do argumento:

1. $(y = 4 \rightarrow x > y) \wedge x > z$
2. $x > y \vee z > y \rightarrow y < 4 \wedge y \neq 3$
3. $y = 2 \rightarrow z > y$

$\therefore \quad y = 2 \vee y = 4 \rightarrow y < 4 \vee y > 3$

- Demonstração: Pela regra DC, devemos demonstrar:

1. $(y = 4 \rightarrow x > y) \wedge x > z$ Por Premissa
2. $x > y \vee z > y \rightarrow y < 4 \wedge y \neq 3$ Por Premissa
3. $y = 2 \rightarrow z > y$ Por Premissa
4. $y = 2 \vee y = 4$ Por Premissa adicional

$\therefore \quad y < 4 \vee y > 3$

Demonstração Condicional

Exemplo 6

1. $(y = 4 \rightarrow \ x > y\ ) \wedge x > z$ Por Premissa
2. $x > y \ \vee z > y \ \rightarrow y < 4 \wedge y \neq 3$ Por Premissa
3. $y = 2 \rightarrow z > y$ Por Premissa
4. $y = 2 \ \vee \ y = 4$ Por Premissa adicional

$\therefore \quad y < 4 \vee y > 3$

✘ Neste caso, devemos converter as expressões matemáticas em proposições utilizando símbolos proposicionais.

p: $y = 4$ $\quad$ r: $x > z$ $\quad$ t: $y < 4$ $\quad$ w: $y = 2$

q: $x > y$ $\quad$ s: $z > y$ $\quad$ u: $y = 3$ $\quad$ y: $y > 3$

✘ Substituindo temos:

1. $(p \rightarrow q) \wedge r$ Por premissa
2. $q \vee s \rightarrow t \wedge \neg u$ Por premissa
3. $w \rightarrow s$ Por premissa
4. $w \vee p$ Por premissa

$\therefore \quad t \vee y$

Demonstração Indireta

Definição

- A demonstração indireta (ou demonstração pelo absurdo) é outro método empregado para demonstrar a validade de um dado argumento:

$$P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n \ \vdash Q$$

- Consiste em admitir a negação $\neg Q$ (da conclusão Q) como verdadeira e a partir dela e das premissas $P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n$ deduzir uma contradição qualquer C.
- A demonstração indireta procura demostrar que o seguinte argumento é válido:

$$P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n,\ \neg Q \vdash C$$

- Observe que pela demonstração condicional (DC), se o argumento anterior é válido temos que também é válido:

$$P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n \ \vdash \neg Q \rightarrow C$$

- Pela regras de equivalência temos que: $\neg Q \rightarrow C \ \Leftrightarrow \neg\neg Q \vee C \Leftrightarrow Q \vee C \Leftrightarrow Q$

- Com isso, também é válido: $P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n \ \vdash Q$

Demonstração Indireta

Definição

- Com isso, qualquer argumento:

$$P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n\ \vdash Q$$

- será válido, se e somente se, o seguinte argumento associado a demonstração indireta é válido:

$$P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_n,\ \neg Q \vdash C$$

- onde C representa uma contradição qualquer.

- Em resumo, a demonstração indireta (DI) estabelece que para demonstrar a validade de um argumento cuja conclusão é Q, basta introduzir $\neg Q$ como premissa adicional e deduzir uma contradição qualquer C.

Demonstração Indireta

Exemplo 1

- 1) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \to \neg q, \qquad r \to q \quad \vdash \quad \neg(p \land r)$$

- Demonstração: Pela regra DI, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento, onde C é qualquer contradição:

$$p \to \neg q, \qquad r \to q, \qquad p \land r \quad \vdash \quad C$$

- Logo:

1.	$p \to \neg q$	Por premissa
2.	$r \to q$	Por premissa
3.	$p \land r$	Por premissa adicional
4.	p	De (3) por SIMP
5.	r	De (3) por SIMP
6.	$\neg q$	De (1) e (4) por MP
7.	q	De (2) e (5) por MP
8.	$\neg q \land q$	De (6) e (7) por CONJ

Contradição!

Demonstração Indireta

Exemplo 2

- ✘ 2) Demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \to q, \quad \neg q \vee r, \quad \neg r \ \vdash \ p \vee s$$

- ✗ Demonstração: Pela regra DI, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento, onde C é qualquer contradição:

$$\neg p \to q, \quad \neg q \vee r, \quad \neg r, \quad \neg(p \vee s) \ \vdash \ C$$

- ✘ Logo:

1.	$\neg p \to q$	Por premissa
2.	$\neg q \vee r$	Por premissa
3.	$\neg r$	Por premissa
4.	$\neg(p \vee s)$	Por premissa adicional
5.	$\neg p \wedge \neg s$	De (4) por DM
6.	$\neg p$	De (5) por SIMP
7.	q	De (1) e (6) por MP
8.	r	De (2) e (7) por SD
9.	$\neg r \wedge r$	De (3) e (8) por CONJ

Contradição!

Demonstração Indireta

Exemplo 3

- 3) Demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q \vee r, \quad \neg r \quad \vdash \quad p \rightarrow q$$

- Demonstração: Pela regra DC, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento:

$$p \rightarrow q \vee r, \quad \neg r, \quad p \quad \vdash \quad q$$

- Pela regra DI, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento, onde C é qualquer contradição:

$$p \rightarrow q \vee r, \quad \neg r, \quad p, \quad \neg q \vdash \quad C$$

- Logo:

1.	$p \rightarrow q \vee r$	Por premissa
2.	$\neg r$	Por premissa
3.	p	Por premissa adicional
4.	$\neg q$	Por premissa adicional
5.	$q \vee r$	De (1) e (3) por MP
6.	q	De (5) e (2) por SD
7.	$\neg q \wedge q$	De (4) e (6) por CONJ

Contradição!

Demonstração Indireta

Exemplo 4

- 4) Demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \vee q, \quad \neg q, \quad \neg r \to s, \quad \neg p \to (s \to \neg t) \quad \vdash \quad t \to r$$

- Demonstração: Pela regra DC, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento:

$$\neg p \vee q, \quad \neg q, \quad \neg r \to s, \quad \neg p \to (s \to \neg t), \quad t \quad \vdash \quad r$$

- Pela regra DI, demonstrar a validade do argumento acima equivale a demonstrar a validade do argumento, onde C é qualquer contradição:

$$\neg p \vee q, \quad \neg q, \quad \neg r \to s, \quad \neg p \to (s \to \neg t), \quad t\,, \quad \neg r \quad \vdash \quad C$$

- Logo:

1. $\neg p \vee q$ Por premissa
2. $\neg q$ Por premissa
3. $\neg r \to s$ Por premissa
4. $\neg p \to (s \to \neg t)$ Por premissa
5. t Por premissa adicional
6. $\neg r$ Por premissa adicional

Demonstração Indireta

Exemplo 4

- Logo:

1.	$\neg p \vee q$	Por premissa
2.	$\neg q$	Por premissa
3.	$\neg r \rightarrow s$	Por premissa
4.	$\neg p \rightarrow (s \rightarrow \neg t)$	Por premissa
5.	t	Por premissa adicional
6.	$\neg r$	Por premissa adicional
7.	$\neg p$	De (1) e (2) por SD
8.	$s \rightarrow \neg t$	De (4) e (7) por MP
9.	s	De (3) e (6) por MP
10.	$\neg t$	De (8) e (9) por MP
11.	$t \wedge \neg t$	De (5) e (10) por CONJ

Contradição!

Demonstração Indireta

Exemplo 5

✘ 5) Demonstrar a validade do argumento:

1. $\neg(y \neq 1 \lor z \neq -1)$
2. $(x < y \land x > z) \land z = -1 \rightarrow x = 0$
3. $\neg(y = 1 \lor x = 0) \lor (x < y \land x > z)$

$\therefore \quad x = 0$

✗ Demonstração: Pela regra DI, devemos demonstrar a validade do argumento onde C é qualquer contradição:

1. $\neg(y \neq 1 \lor z \neq -1)$ Premissa
2. $(x < y \land x > z) \land z = -1 \rightarrow x = 0$ Premissa
3. $\neg(y = 1 \lor x = 0) \lor (x < y \land x > z)$ Premissa
4. $x \neq 0$ Premissa adicional

Demonstração Indireta

Exemplo 5

1. $\neg(y \neq 1 \lor\ z \neq -1\,)$ Premissa
2. $(x < y \land x > z) \land z = -1 \rightarrow x = 0$ Premissa
3. $\neg(y = 1 \lor\ x = 0\,) \lor (x < y \land x > z)$ Premissa
4. $x \neq 0$ Premissa adicional

- Neste caso, devemos converter as expressões matemáticas em proposições utilizando símbolos proposicionais.

$p\!:\ y = 1$ $r\!:\ x < y$ $t\!:\ x = 0$

$q\!:\ z = -1$ $s\!:\ x > z$

- Substituindo temos:

1. $\neg(\neg p \lor \neg q)$ Por premissa
2. $(r \land s) \land q \rightarrow t$ Por premissa
3. $\neg(p \lor t) \lor (r \land s)$ Por premissa
4. $\neg t$ Por premissa

Demonstração Indireta

Exemplo 6

- 6) Demonstrar a validade do argumento:

$$\begin{array}{l} 1.\ x = 1 \vee \neg(x + y = y \vee x \ngtr y) \\ 2.\ x > y \rightarrow x^2 > xy \wedge y = 1 \\ 3.\ x \neq 1 \\ \hline \therefore\ \neg(y = 1 \rightarrow x^2 \ngtr xy) \end{array}$$

- Demonstração: Pela regra DI, devemos demonstrar a validade do argumento onde C é qualquer contradição:

$$\begin{array}{ll} 1.\ x = 1 \vee \neg(x + y = y \vee x \ngtr y) & \text{Premissa} \\ 2.\ x > y \rightarrow x^2 > xy \wedge y = 1 & \text{Premissa} \\ 3.\ x \neq 1 & \text{Premissa} \\ 4.\ y = 1 \rightarrow x^2 \ngtr xy & \text{Premissa adicional} \\ \hline \end{array}$$

Demonstração Indireta

Exemplo 7

- 7) Demonstrar a validade do argumento:

$$
\begin{array}{l}
1.\ x < y \rightarrow xy = x \\
2.\ x \neq y\ \wedge\ xy \neq x \\
3.\ x \nless y\ \vee y = 1 \rightarrow\ x = 2 \\
\hline
\therefore \quad \neg(x = 2 \leftrightarrow x = y)
\end{array}
$$

- Demonstração: Pela regra DI, devemos demonstrar a validade do argumento onde C é qualquer contradição:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ x < y \rightarrow xy = x & \text{Premissa} \\
2.\ x \neq y\ \wedge\ xy \neq x & \text{Premissa} \\
3.\ x \nless y\ \vee y = 1 \rightarrow\ x = 2 & \text{Premissa} \\
4.\ x = 2 \leftrightarrow x = y & \text{Premissa adicional} \\
\hline
\end{array}
$$

Referências

- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 13. Demonstração Condicional e Demonstração Indireta. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015