Cálculo III – 2a Chamada da P1 – 06/07/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Matrícula: ____________________ **Curso:** ____________________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - “x vezes -6” é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. Seja

$$\vec{r}(t) = (2\sqrt{t^3},\ 1,\ -2\sqrt{(1-t)^3}).$$

a) Determine o seu vetor tangente unitário $\vec{T}(t)$.

Solução:

$$(\sqrt{t},\ 0,\ \sqrt{1-t}).$$

b) Demonstre (fazendo as contas corretamente) que o seu vetor normal unitário principal $\vec{N}(t)$ é igual a $(\sqrt{1-t},\ 0,\ -\sqrt{t})$.

c) Determine o seu vetor binormal $\vec{B}(t)$.

Solução:

$$(0,\ 1,\ 0).$$

Dica do Mestre: confie no processo. Se você fizer as contas corretamente, vários termos se cancelam.

2. Calcule o comprimento de arco da curva C parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left(2t,\ t^2,\ \frac{t^3}{3}\right), \qquad 0 \leq t \leq 3.$$

Dica do Mestre: dentro da raiz deverá aparecer um quadrado perfeito.

Solução:

15.

3. Seja $f(x,y) = xy^4$ e considere C a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$. Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C f(x,y)\,ds$.

Solução:

$$\|\vec{r}(\theta)\| = \sqrt{(-4\operatorname{sen}\theta)^2 + (4\cos\theta)^2} = 4,$$

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\cos\theta)(4\operatorname{sen}\theta)^4\, 4\,d\theta = 4^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,\operatorname{sen}^4\theta\,d\theta =$$

$$\underset{u=\operatorname{sen}\theta}{=} 4096 \int_{u(-\pi/2)}^{u(\pi/2)} u^4\,du = 4096\,\frac{\operatorname{sen}^5\theta}{5}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{8192}{5}.$$

4. Seja $\vec{F}(x,y) = (xy^2,\, x^2y)$ e considere C a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (2t^2,\, t + 2\sqrt{t}), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução:

$$\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y) \quad \text{onde} \quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2},$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = f(2,3) - f(0,0) = 18.$$