

16.4 Teorema de Green

O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região do plano D delimitada por C . (Veja a Figura 1. Assumimos que D é constituído por todos os pontos dentro de C , bem como todos os pontos de C .) Ao enunciarmos o Teorema de Green, usamos a convenção de que a **orientação positiva** de uma curva fechada simples C refere-se ao *sentido anti-horário* de C , percorrido uma só vez. Assim, se C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região D está sempre do lado esquerdo quando $\mathbf{r}(t)$ percorre C . (Veja a Figura 2.)

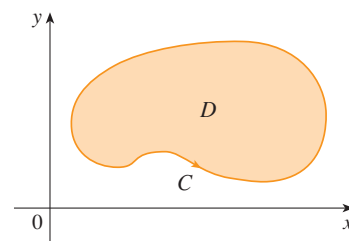


FIGURA 1

Lembre-se de que o lado esquerdo desta equação é outra forma de escrever $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

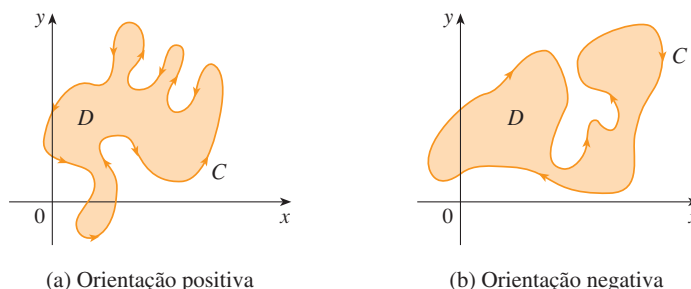


FIGURA 2

(a) Orientação positiva

(b) Orientação negativa

Teorema de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

OBSERVAÇÃO A notação

$$\oint_C P dx + Q dy \quad \text{ou} \quad \oint_C P dx + Q dy$$

é algumas vezes usada para indicar que a integral de linha é calculada usando a orientação positiva da curva fechada C . Outra notação para a curva na fronteira de D , positivamente orientada e ∂D , dá a equação do Teorema de Green pode ser escrita como

$$\boxed{1} \quad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

O Teorema de Green pode ser olhado como o correspondente do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais duplas. Compare a Equação 1 com o enunciado da segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, na seguinte equação:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Em ambos os casos existe uma integral envolvendo as derivadas (F' , $\partial Q/\partial x$ e $\partial P/\partial y$) do lado esquerdo da equação. E em ambos os casos, o lado direito envolve os valores das funções originais (F , Q e P) apenas na fronteira do domínio. (No caso unidimensional, o domínio é um intervalo $[a, b]$ cuja fronteira consiste em apenas dois pontos, a e b .)

O Teorema de Green não é fácil de demonstrar no caso geral apresentado no Teorema 1, mas faremos uma demonstração para o caso especial onde a região é tanto de tipo I como de tipo II (veja a Seção 15.3). Chamamos tais regiões de **regiões simples**.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE GREEN NOS CASOS ONDE D É UMA REGIÃO SIMPLES Observe que o Teorema de Green estará demonstrado se mostrarmos que

$$\boxed{2} \quad \int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

e

$$\boxed{3} \quad \int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

George Green

O teorema de Green tem esse nome por causa do cientista autodidata inglês George Green (1793-1841). Ele trabalhou em tempo integral na padaria de seu pai a partir dos 9 anos de idade e aprendeu sozinho a matemática em livros da biblioteca. Em 1828, Green publicou *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, contudo, somente foram impressas 100 cópias, a maioria presenteada a seus amigos. Esse panfleto continha um teorema equivalente ao que conhecemos como Teorema de Green hoje, mas não se tornou conhecido na época. Finalmente, aos 40 anos, Green entrou para a Universidade de Cambridge como aluno de graduação, porém morreu quatro anos após ter se formado. Em 1846, William Thompson (lorde Kelvin) encontrou uma cópia dos ensaios de Green, percebeu sua importância e os reimprimiu. Green foi a primeira pessoa a tentar formular uma teoria matemática da eletricidade e do magnetismo. Seu estudo serviu de base para os trabalhos de teoria do eletromagnetismo subsequentes de Thomson, Stokes, Rayleigh e Maxwell.

Vamos demonstrar a Equação 2 exprimindo D como uma região do tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são funções contínuas. Isso nos permite calcular a integral dupla do lado direito da Equação 2, como segue:

$$\boxed{4} \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

onde o último passo segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

Vamos agora calcular o lado esquerdo da Equação 2, quebrando C como a união das quatro curvas C_1 , C_2 , C_3 e C_4 mostradas na Figura 3. Sobre C_1 tomamos x como parâmetro e escrevemos as equações paramétricas como $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \leq x \leq b$. Logo,

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Observe que C_3 vai da direita para a esquerda, mas $-C_3$ vai da esquerda para a direita, então podemos escrever as equações paramétricas de $-C_3$ como $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \leq x \leq b$. Portanto,

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = -\int_{-C_3} P(x, y) dx = -\int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

Sobre C_2 ou C_4 (qualquer uma delas pode se reduzir a um único ponto), x é constante e, assim, $dx = 0$ e

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y) dx$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \end{aligned}$$

Comparando essa expressão com a da Equação 4, vemos que

$$\int_C P(x, y) dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

A Equação 3 pode ser demonstrada de forma semelhante, exprimindo D como região do tipo II (veja o Exercício 30). Então, somando as Equações 2 e 3, obtemos o Teorema de Green. ■

EXEMPLO 1 Calcule $\int_C x^4 dx + xy dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$, e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

SOLUÇÃO Apesar desta integral poder ser calculada pelos métodos usuais da Seção 16.2, isto envolveria o cálculo de três integrais separadas sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe que a região D englobada por C é simples e que C tem orientação positiva (veja a Figura 4). Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então teremos

$$\begin{aligned} \int_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule $\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUÇÃO A região D delimitada por C é o círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, então vamos mudar para coordenadas polares depois de aplicar o Teorema de Green:

$$\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$$

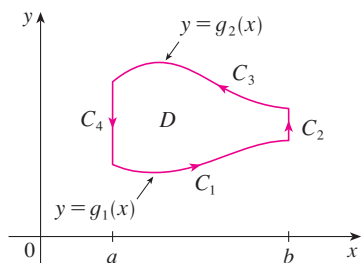


FIGURA 3

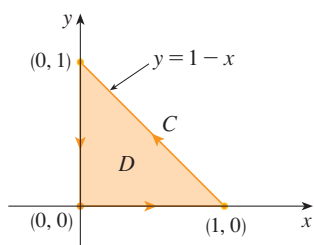


FIGURA 4

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (7x + \sqrt{y^4 + 1}) - \frac{\partial}{\partial y} (3y - e^{\sin x}) \right] dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3) r \, dr \, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r \, dr = 36\pi
\end{aligned}$$

Nos Exemplos 1 e 2, consideramos que a integral dupla era mais fácil de calcular que a integral de linha. (Tente configurar a integral de linha no Exemplo 2 e em breve você vai ser convencido!) Mas às vezes é mais simples calcular a integral de linha, e, nesses casos, usaremos o Teorema de Green na ordem inversa. Por exemplo, se sabemos que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre uma curva C , então o Teorema de Green fornece

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P \, dx + Q \, dy = 0$$

não importando quais os valores das funções P e Q em D .

Outra aplicação da direção inversa do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região D é $\iint_D 1 \, dA$, desejamos escolher P e Q tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$$\begin{array}{lll}
P(x, y) = 0 & P(x, y) = -y & P(x, y) = -\frac{1}{2}y \\
Q(x, y) = x & Q(x, y) = 0 & Q(x, y) = \frac{1}{2}x
\end{array}$$

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D :

5

$$A = \oint_C x \, dy = -\oint_C y \, dx = \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx$$

EXEMPLO 3 Determine a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUÇÃO A elipse tem equações paramétricas $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$. Usando a terceira fórmula da Equação 5 temos

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) \, dt - (b \sin t)(-a \sin t) \, dt \\
&= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab
\end{aligned}$$

A fórmula 5 pode ser usada para explicar como planímetros trabalham. Um **planímetro** é um instrumento mecânico usado para medir a área de uma região, traçando a curva limite. Esses dispositivos são úteis em todas as ciências: em biologia para medir a área de folhas ou asas, na medicina para medir o tamanho da seção transversal de órgãos ou tumores, em silvicultura, para estimar o tamanho das regiões florestais a partir de fotografias.

A Figura 5 mostra o funcionamento de um planímetro polar: o polo é fixo e, como o traçador é movido ao longo da curva limite da região, a roda desliza parcialmente e parcialmente rola perpendicular ao braço do traçador. O planímetro mede a distância a que a roda gira e é proporcional à área da região fechada. A explicação como consequência de Fórmula 5 pode ser encontrada nos seguintes artigos:

- R. W. Gatterman, “The planimeter as an example of Green’s Theorem”. *Amer. Mat. Monthly*, Vol. 88 (1981), p. 701–4.
- Tanya Leise, “As the planimeter wheel turns”. *College Math. Journal*, Vol. 38 (2007), p. 24–31.

Em vez de utilizarmos as coordenadas polares, podemos simplesmente usar o fato de que D é um círculo de raio 3 e escrever

$$\iint_D 4 \, dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

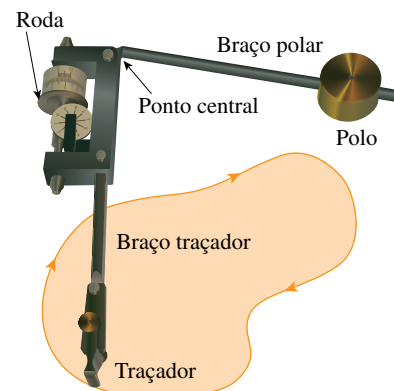


FIGURA 5

Um planímetro polar Keuffel e Esser

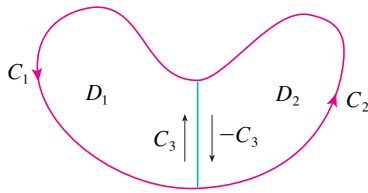


FIGURA 6

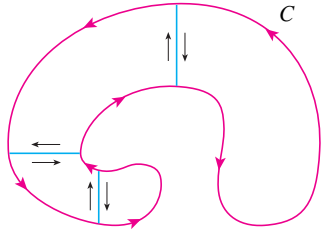


FIGURA 7

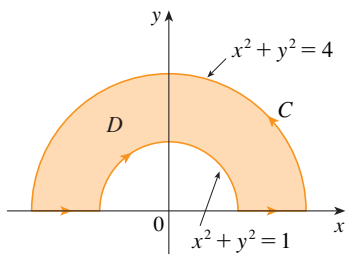


FIGURA 8

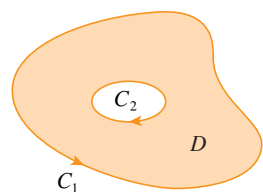


FIGURA 9

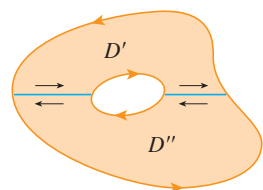


FIGURA 10

Versões estendidas do Teorema de Green

Apesar de termos demonstrado o Teorema de Green somente para o caso particular onde D é simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que D é a união finita de regiões simples. Por exemplo, se D é uma região como a mostrada na Figura 6, então podemos escrever $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são ambas simples. A fronteira de D_1 é $C_1 \cup C_3$ e a fronteira de D_2 é $C_2 \cup (-C_3)$; portanto, aplicando o Teorema de Green em D_1 e D_2 separadamente, obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_3} P dx + Q dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P dx + Q dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Se somarmos essas duas equações, as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam e obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_2} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que é o Teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$ uma vez que sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$.

O mesmo tipo de argumentação nos permite estabelecer o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples que não se sobreponham (veja a Figura 7).

EXEMPLO 4 Calcule $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$, onde C é o limite da região semianular D contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO Observe que, apesar de D não ser simples, o eixo y divide em duas regiões simples (veja a Figura 8). Em coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (3xy) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \right] dA \\ &= \iint_D y dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_1^2 r^2 dr = [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_1^2 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Observe que a fronteira C da região D na Figura 9 é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2 . Nós assumimos que estas curvas de contorno são orientadas de modo que a região D está sempre do lado esquerdo enquanto a curva C é percorrida. Assim, o sentido anti-horário é positivo para a curva exterior C_1 , mas no sentido horário para o interior da curva C_2 . Se dividirmos D em duas regiões D' e D'' , pela introdução das retas mostradas na Figura 10, e então aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'' , obteremos

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_{\partial D'} P dx + Q dy + \int_{\partial D''} P dx + Q dy \end{aligned}$$

Como as integrais de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy$$

que é o Teorema de Green para a região D .

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

SOLUÇÃO Como C é um caminho fechado *arbitrário* contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente. Então, vamos considerar um círculo anti-horário orientado C' com origem no centro e raio a , onde a é escolhido para ser pequeno o suficiente para que C' esteja contido em C (ver Figura 11). Seja D a região limitada por C e C' . Então a orientação positiva do limite é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy + \int_{-C'} P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0 \end{aligned}$$

Logo,
$$\int_C P dx + Q dy = \int_{C'} P dx + Q dy$$

isto é,
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

Terminaremos esta seção utilizando o Teorema de Green para discutir um resultado enunciado na seção anterior.

ESBOÇO DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 16.3.6 Assumimos que $\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ é um campo vetorial em uma região simplesmente conexa D , que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em todo o } D$$

Se C é um caminho fechado simples qualquer em D e R é a região envolvida por C , o Teorema de Green nos dá

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0 dA = 0$$

Uma curva que não seja simples se autointercepta em um ou mais pontos e pode ser dividida em diversas curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de \mathbf{F} sobre essas curvas simples são todas 0 e, somando essas integrais, podemos ver que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C . Portanto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D pelo Teorema 16.3.3. Segue então que \mathbf{F} é um campo vetorial conservativo.

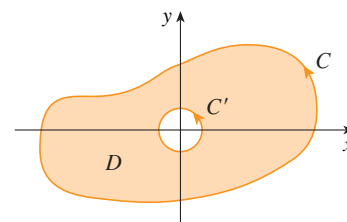


FIGURA 11

16.4 Exercícios

1–4 Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C (x - y) dx + (x + y) dy$,
 C é o círculo com centro na origem e raio 2

2. $\oint_C xy dx + x^2 dy$,
 C é o retângulo com vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$ e $(0, 1)$

3. $\oint_C xy dx + x^2 y^3 dy$,
 C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$

4. $\oint_C x^2 y^2 dx + xy dy$, C consiste no arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e os segmentos de reta de $(1, 1)$ a $(0, 1)$ e de $(0, 1)$ a $(0, 0)$

5–10 Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

5. $\int_C xy^2 dx + 2x^2 y dy$,
 C é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(2, 2)$ e $(2, 4)$

6. $\int_C \cos y \, dx + x^2 \sin y \, dy$,
 C é o retângulo com vértices $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(5, 2)$ e $(0, 2)$
7. $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) \, dx + (2x + \cos y^2) \, dy$,
 C é o limite da região englobada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$
8. $\int_C xe^{-2x} \, dx + (x^4 + 2x^2y^2) \, dy$, C é o limite da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$
9. $\int_C y^3 \, dx - x^3 \, dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$
10. $\int_C (1 - y^3) \, dx + (x^3 + e^{y^2}) \, dy$, C é o limite da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$

11–14 Use o teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y \cos x - xy \sin x, xy + x \cos x \rangle$,
 C é o triângulo de $(0, 0)$ a $(0, 4)$ a $(2, 0)$ a $(0, 0)$
12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^{-x} + y^2, e^{-y} + x^2 \rangle$,
 C consiste no arco da curva $y = \cos x$ de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ e o segmento de reta de $(\pi/2, 0)$ a $(-\pi/2, 0)$
13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y, x \sin y \rangle$,
 C é o círculo $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ orientado no sentido horário
14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x^2 + 1}, \operatorname{tg}^{-1} x \rangle$, C é o triângulo de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ a $(0, 1)$ a $(0, 0)$

SCA 15–16 Verifique o Teorema de Green usando um sistema de computação algébrica para calcular tanto a integral de linha como a integral dupla.

15. $P(x, y) = y^2 e^x$, $Q(x, y) = x^2 e^y$,
 C consiste no segmento de reta de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ seguido pelo arco da parábola $y = 2 - x^2$ de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$
16. $P(x, y) = 2x - x^3 y^5$, $Q(x, y) = x^3 y^8$,
 C é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$
17. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y) \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x para $(1, 0)$, em seguida ao longo de um segmento de reta até $(0, 1)$, e então de volta à origem ao longo do eixo y .
18. Uma partícula inicialmente no ponto $(-2, 0)$ se move ao longo do eixo x para $(2, 0)$, e então ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, x^3 + 3xy^2 \rangle$.
19. Use uma das fórmulas em [5] para achar a área sob um arco da cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.
20. Se uma circunferência C de raio 1 rola ao longo do interior da circunferência $x^2 + y^2 = 16$, um ponto fixo P de C descreve uma curva chamada *epicicloide*, com equações paramétricas $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \sin t - \sin 5t$. Faça o gráfico da epicicloide e use [5] para calcular a área da região que ela envolve.
21. (a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) , mostre que

$$\int_C x \, dy - y \, dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(b) Se os vértices de um polígono, em sentido anti-horário, são (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_n, y_n) mostre que a área do polígono é

$$A = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)]$$

(c) Encontre a área do pentágono com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$.

22. Seja D a região limitada por um caminho fechado simples C no plano xy . Utilize o Teorema de Green para demonstrar que as coordenadas do centroide (\bar{x}, \bar{y}) de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 \, dy \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2 \, dx$$

onde A é a área de D .

23. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide de um quarto de uma região circular de raio a .
24. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide da região triangular de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ e (a, b) , onde $a > 0$ e $b > 0$.
25. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C . Mostre que seus momentos de inércia em relação aos eixos são

$$I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3 \, dx \quad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^3 \, dy$$

26. Utilize o Exercício 25 para achar o momento de inércia de um círculo de raio a com densidade constante ρ em relação a um diâmetro. (Compare com o Exemplo 4 da Seção 15.5.)
27. Use o método do Exercício 5 para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2xy \mathbf{i} + (y^2 - x^2) \mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$$

e C é qualquer curva fechada simples positivamente orientada que envolve a origem.

28. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y, 3x - y^2 \rangle$ e C é a fronteira positivamente orientada de uma região D que tem área 6.
29. Se \mathbf{F} é o campo vetorial do Exemplo 5, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado simples que não passe pela origem e nem a circunde.
30. Complete a demonstração do Teorema de Green demonstrando a Equação 3.
31. Utilize o Teorema de Green para demonstrar a fórmula de mudança de variáveis para as integrais duplas (Fórmula 15.10.9) para o caso onde $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx \, dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv$$

Aqui, R é a região do plano xy que corresponde à região S no plano uv sob a transformação dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$. [Dica: Observe que o lado esquerdo é $A(R)$ e aplique a primeira parte da Equação 5. Converta a integral de linha sobre ∂R para uma integral sobre ∂S e aplique o Teorema de Green no plano uv .]