Prova de Reposição de Cálculo III – 13/02/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Reposição da P1

Nome: ____

Instruções para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- Resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas absurdas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **São proibidos:** folha própria de rascunho, calculadora, e celular. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.
- **Não desgrampeie o caderno de provas.**

Boa prova!

1. Determine o comprimento de arco da curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\,t, e^t, e^{-t})$, $0 \leq t \leq 1$.

Solução:

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \|(\sqrt{2}, e^t, -e^{-t})\| = \sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t},$$
$$L = \int_0^1 \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^1 e^t + e^{-t}\,dt = e - \frac{1}{e}.$$

2. Seja C a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (t, t^2, 3t)$. Determine $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ e $\vec{B}(t)$.

Solução:

$$\vec{r}\,'(t) = (1, 2t, 3), \quad \vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{10+4t^2}}, \frac{3}{\sqrt{10+4t^2}}\right),$$
$$\vec{T}\,'(t) = \left(-\frac{4t}{(10+4t^2)^{3/2}}, \frac{20}{(10+4t^2)^{3/2}}, -\frac{12t}{(10+4t^2)^{3/2}}\right),$$
$$\|\vec{T}\,'(t)\| = \frac{4\sqrt{10t^2+25}}{(10+4t^2)^{3/2}},$$
$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}\,'(t)}{\|\vec{T}\,'(t)\|} = \left(-\frac{t}{\sqrt{10t^2+25}}, \frac{5}{\sqrt{10t^2+25}}, -\frac{3t}{\sqrt{10t^2+25}}\right),$$
$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{(4t^2+10)(10t^2+25)}}\left(-6t^2 - 15, 0, 2t^2 + 5\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 0, 1).$$

3. Seja C o arco de elipse parametrizado por $\vec{r}(\theta) = (5\cos\theta,\ 4\,\mathrm{sen}\,\theta)$, com $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

a) Calcule a integral de linha da função $f(x, y) = xy$ em C.

Solução:

$$\|\vec{r}\,'(\theta)\| = \sqrt{25\,\mathrm{sen}^2\theta + 16\cos^2\theta} = \sqrt{9\,\mathrm{sen}^2\theta + 16\,\mathrm{sen}^2\theta + 16\cos^2\theta} = $$
$$= \sqrt{9\,\mathrm{sen}^2\theta + 16},$$
$$\int_C xy\, ds = \int_0^{\pi/2} (5\cos\theta)(4\,\mathrm{sen}\,\theta)\|\vec{r}\,'(\theta)\| d\theta =$$
$$= \int_0^{\pi/2} 20\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{9\,\mathrm{sen}^2\theta + 16}\, d\theta$$
$$= \frac{10}{9}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sqrt{u}\, du \qquad (u = 9\,\mathrm{sen}^2\theta + 16,\ du = 18\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta)$$
$$= \frac{10}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{20}{27}(9\,\mathrm{sen}^2\theta + 16)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{20(25^{3/2} - 16^{3/2})}{27}$$
$$= \frac{20(125 - 64)}{27} = \frac{1220}{27}.$$

b) Calcule a integral de linha do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = \left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$ em C.

Solução:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \left(xy, \frac{y}{x}\right)\cdot(-5\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 4\cos\theta)\, d\theta =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left((5\cos\theta)(4\,\mathrm{sen}\,\theta), \frac{4\,\mathrm{sen}\,\theta}{5\cos\theta}\right)\cdot(-5\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 4\cos\theta)\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} -100\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{16}{5}\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta$$
$$= -\frac{100}{3}\,\mathrm{sen}^3\theta - \frac{16}{5}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{100}{3} + \frac{16}{5} = -\frac{452}{15}.$$

4. Seja C a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (\operatorname{sen}(t^2), e^t)$, $0 \leq t \leq 1$. Calcule a integral de linha do campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$$

em C.

Solução:

Note que $\vec{F} = (P, Q)$ é conservativo, pois

$$P_y = \frac{\partial}{\partial y} y^2 = 2y = \frac{\partial}{\partial x} 2xy = Q_x.$$

Determinando o potencial $f(x,y)$:

$$f_x = P = y^2 \quad \therefore \quad f(x,y) = \int y^2\, dx = y^2 x + g(y).$$

Logo,

$$2xy = Q = f_y = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 x + g(y)) = 2xy + g'(y)$$
$$\therefore \quad g'(y) = 0 \quad \therefore \quad g(y) = C \quad \therefore \quad f(x,y) = y^2 x + C.$$

Tomando $C = 0$ e usando o TFIL, temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) =$$
$$= f(\operatorname{sen}(1^2), e^1) - f(\operatorname{sen}(0^2), e^0) = e^2 \operatorname{sen}(1) - 1^2 \cdot 0 = e^2 \operatorname{sen}(1).$$

Errata: No item 3(b), o campo vetorial original era dado por $\vec{F}(x,y) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$.