

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Lógica Matemática



EQUIVALÊNCIA LÓGICA

DEFINIÇÃO

X Diz-se que uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ é logicamente equivalente ou apenas equivalente a uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$, se as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.

X Denota-se que a proposição $P(p, q, r, \dots)$ é equivalente a proposição $Q(p, q, r, \dots)$ da seguinte maneira:

$$P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

X Vale observar que os símbolos \leftrightarrow e \Leftrightarrow são distintos. O primeiro corresponde a operação bicondicional enquanto que o segundo é de relação entre proposições equivalentes.

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

EXEMPLOS

- X Como exemplos de proposições equivalentes, podemos considerar o caso particular em que as proposições $P(p, q, r, \dots)$ e $Q(p, q, r, \dots)$ são ambas tautologias ou são ambas contradições.

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

PROPRIEDADES

- × A relação de equivalência lógica entre proposições goza das propriedades **reflexiva(R)**, **simétrica(S)**, e **transitiva (T)**, denotadas simbolicamente como:

$$(R) \quad P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow P(p, q, r, \dots)$$

$$(S) \quad \text{se } P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots) \text{ então} \\ Q(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow P(p, q, r, \dots)$$

$$(T) \quad \text{se } P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots) \text{ e} \\ Q(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow R(p, q, r, \dots) \text{ então} \\ P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow R(p, q, r, \dots)$$

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

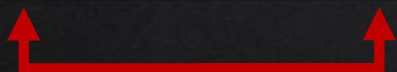
EXEMPLO 1

- × As proposições $\neg\neg p$ e p são equivalentes, isto é, simbolicamente:

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

- × Conhecida como **Regra da dupla negação**.
- × Mostra-se isso com base na sua tabela-verdade:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
V	F	V
F	V	F



- × Observe que as colunas de cada lado da equivalência são idênticas.
- × Portanto, a dupla negação de uma proposição qualquer equivale a proposição em questão e é uma afirmação.

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

EXEMPLO2

× As proposições $(\neg p \rightarrow p)$ e p são equivalentes, isto é, simbolicamente:

$$\neg p \rightarrow p \Leftrightarrow p$$

× Observe que as colunas de cada lado da equivalência são idênticas.

× Conhecida como **Regra de Clavius**.

× Mostra-se isso com base na sua tabela-verdade:

p	$\neg p$	$\neg p \rightarrow p$
V	F	V
F	V	F

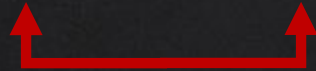


EQUIVALÊNCIA LÓGICA

EXEMPLO 3

× As condicionais $(p \rightarrow p \wedge q)$ e $(p \rightarrow q)$ tem tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V



× Portanto, estas condicionais são equivalentes, verifica-se a equivalência lógica, denominada **regra de absorção**:

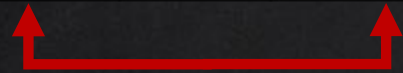
$$p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

EXEMPLO 4

✕ A condicional ($p \rightarrow q$) e a disjunção ($\neg p \vee q$) tem tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V



✕ Portanto, as duas proposições são equivalentes, verifica-se a importante equivalência lógica:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

EXEMPLO 5

× A bicondicional $(p \leftrightarrow q)$ e a conjunção $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ tem tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V



× Portanto, as duas proposições são equivalentes, verifica-se a importante equivalência lógica:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

× Observe que esta relação define a bicondicional como a conjunção de duas condicionais.

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

EXEMPLO 6

× Uma outra equivalência para o bicondicional será mostrada a seguir.

× A bicondicional $(p \leftrightarrow q)$ e a disjunção $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ tem tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V



× Portanto, as duas proposições são equivalentes, verifica-se a importante equivalência lógica:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

× Esta relação define a bicondicional como a disjunção de duas situações possíveis para conseguir o valor verdadeiro; ou ambas as proposições são verdadeiras ou ambas são falsas. Caso contrário, ela será falsa.

TAUTOLOGIAS E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

TEOREMA

X **Teorema.-** A proposição $P(p, q, r, \dots)$ é equivalente a proposição $Q(p, q, r, \dots)$, ou seja:

$$P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

se e somente se a bicondicional:

$$P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

é tautológica.

X Lembre que os símbolos \leftrightarrow e \Leftrightarrow são distintos.

X O primeiro corresponde a operação bicondicional ($P \leftrightarrow Q$), entre duas proposições P e Q .

X O segundo é a relação de equivalência entre as proposições P e Q , que estabelece que a bicondicional $P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica.

TAUTOLOGIAS E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

COROLÁRIO

- x **Corolário.**– Se $P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ então também temos que:

$$P(P_0, Q_0, R_0, \dots) \Leftrightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \dots)$$

quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0, \dots .

- x Este corolário é semelhante ao princípio de substituição apresentado anteriormente.

TAUTOLOGIAS E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

EXEMPLO 1

✕ Considere a seguinte bicondicional:

$$(p \wedge \neg q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \quad (1)$$

✕ onde c é uma proposição cujo valor lógico é F (falsidade). Podemos provar que esta bicondicional é tautológica com base em tabelas-verdade.

p	q	$(p \wedge \neg q \rightarrow c)$	\leftrightarrow	$(p \rightarrow q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

✕ Portanto, as proposições $(p \wedge \neg q \rightarrow c)$ e $(p \rightarrow q)$ são equivalentes. Como denotado simbolicamente:

$$(p \wedge \neg q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$$

✕ Esta equivalência mostra o **Método de demonstração por absurdo**.

✕ Este método estabelece uma forma indireta de provar um resultado. Considerando que queremos $(p \rightarrow q)$, assume-se que tenho p e $\neg q$ e prova-se que isso nos leva a uma contradição.

TAUTOLOGIAS E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

EXEMPLO 2

- ✗ Considere a seguinte bicondicional:

$$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \quad (2)$$

- ✗ Podemos provar que esta bicondicional é tautológica com base em tabelas-verdade.

- ✗ Portanto, as condicionais $(p \wedge q \rightarrow r)$ e $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ são equivalentes.

- ✗ Esta equivalência lógica é denominada **Regra de Exportação-Importação**.

$(p$	\wedge	q	\rightarrow	$r)$	\leftrightarrow	$(p$	\rightarrow	$(q$	\rightarrow	$r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

PROPOSIÇÕES ASSOCIADAS A UMA CONDICIONAL

× Chama-se de proposições associadas a condicional $(p \rightarrow q)$ as seguintes proposições condicionais:

- i) **Recíproca** de $(p \rightarrow q)$: $(q \rightarrow p)$
- ii) **Contrária** de $(p \rightarrow q)$: $(\neg p \rightarrow \neg q)$
- iii) **Contrapositiva** de $(p \rightarrow q)$: $(\neg q \rightarrow \neg p)$

× As tabelas-verdade destas quatro proposições condicionais são:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V



× A tabela-verdade mostra que a condicional é equivalente a sua contrapositiva; e que a recíproca é equivalente a contrária.

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

PROPOSIÇÕES ASSOCIADAS À CONDICIONAL – EXEMPLOS

✕ Sejam as seguintes proposições relativas a um triângulo T:

○ (1) Seja a seguinte condicional: $p \rightarrow q$:

“Se T é equilátero, então T é isósceles”

○ A recíproca desta proposição é: $q \rightarrow p$:

“Se T é isósceles, então T é equilátero”

○ (2) Seja a seguinte condicional: $p \rightarrow q$:

“Se Carlos é professor, então é pobre”

○ A contrapositiva desta proposição é: $\neg q \rightarrow \neg p$

“Se Carlos não é pobre, então não é professor”

OPERADORES DE SCHEFFER

NEGAÇÃO CONJUNTA DE DUAS PROPOSIÇÕES

- X Chama-se **negação conjunta** de duas proposições p e q a proposição resultante das seguintes operações:

$$\neg p \wedge \neg q$$

- X A negação conjunta é denotada usando o **símbolo \downarrow** . De maneira que a negação conjunta de duas proposições p e q é denotada como $p \downarrow q$ e satisfaz a seguinte equivalência:

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

- X A tabela-verdade para esta operação:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

- X A tabela-verdade do operador \downarrow :

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

OPERADORES DE SCHEFFER

NEGAÇÃO DISTJUNTA DE DUAS PROPOSIÇÕES

- X Chama-se **negação disjunta** de duas proposições p e q a proposição resultante das seguintes operações:

$$\neg p \vee \neg q$$

- X A negação disjunta é denotada usando o **símbolo \uparrow** . De maneira que a negação disjunta de duas proposições p e q é denotada como $p \uparrow q$ e satisfaz a seguinte equivalência:

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

- X A tabela-verdade para esta operação:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

- X A tabela-verdade do operador \uparrow :

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

OPERADORES DE SCHEFFER

- X Os símbolos \downarrow e \uparrow são chamados de **conectivos de Scheffer**.
- X Os conectivos de Scheffer são importantes porque mediante eles é possível representar todos os outros operadores lógicos estudados anteriormente.
- X Um operador para representar todos os outros.

OPERADORES DE SCHEFFER

RELAÇÕES ENTRE OS OPERADORES

X Na lógica digital as operações $\neg(p \wedge q)$ e $\neg(p \vee q)$ recebem nomes específicos (negação do “e”) e (negação do “ou”) e possuem as portas lógicas *NAND* e *NOR*, associadas respectivamente.

X Vale observar a relação dessas operações com os conectivos de Scheffer.

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$p \downarrow q$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$p \uparrow q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

X Observe que os operadores *NOR* e *NAND* correspondem aos conectivos de negação conjunta e negação disjunta de Scheffer, respectivamente.

OPERADORES DE SCHEFFER

RELAÇÕES ENTRE OS OPERADORES

- X Observe o uso das regras de DeMorgan para relacionar os conectivos de Scheffer \downarrow e \uparrow as portas NOR e NAND.

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \qquad p \uparrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$



Regras de De Morgan

REFERÊNCIAS

- x De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 6. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.