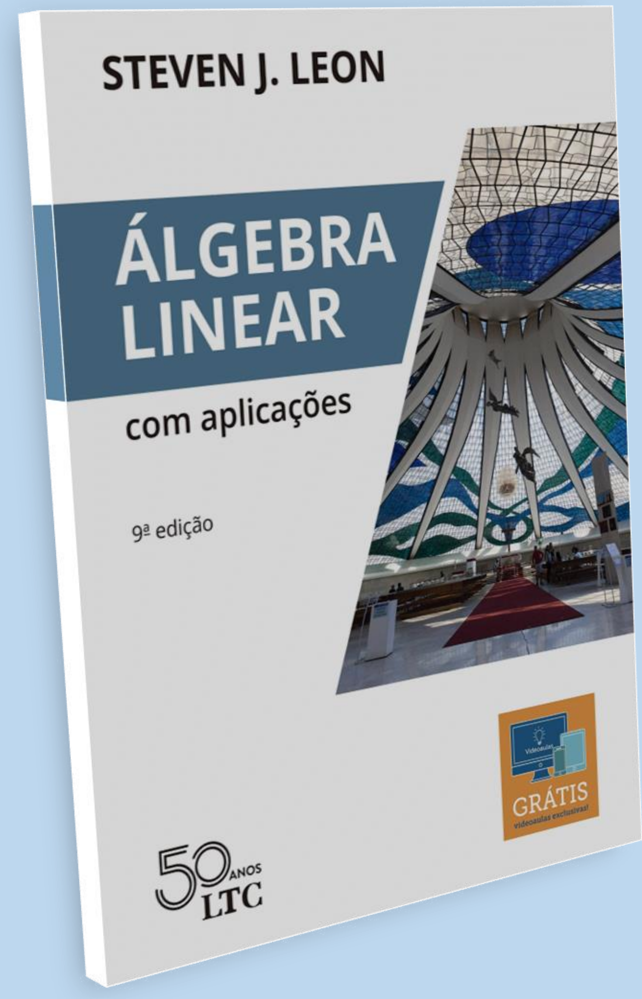
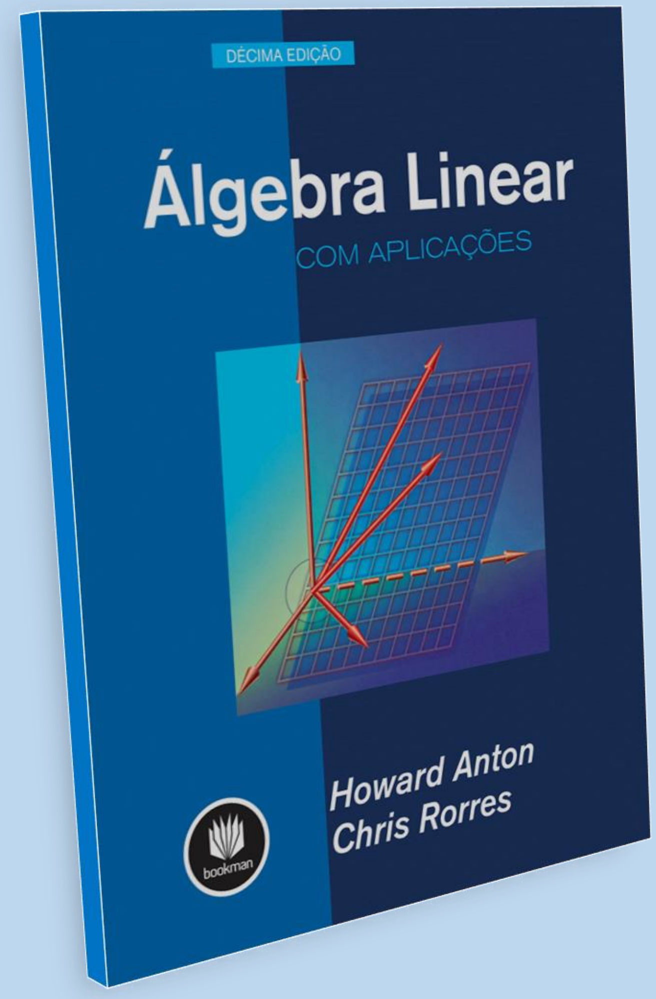
Álgebra Linear

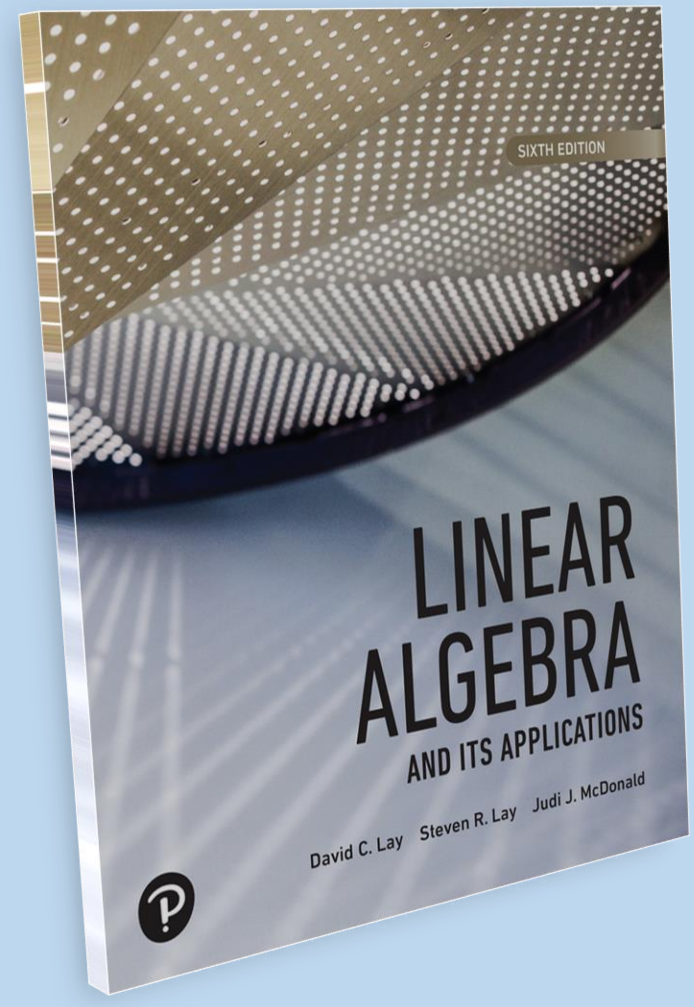
Transformações Lineares

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







Transformações Lineares

Definição. Se $T : V \to W$ for uma função de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, então T é denominada ***transformação linear*** de V em W se as duas propriedades seguintes forem válidas com quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V e qualquer escalar k.

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ [Aditividade]

(ii) $T(k\,\mathbf{v}) = k\,T(\mathbf{v})$ [Homogeneidade]

No caso especial em que $V = W$, a transformação linear é denominada ***operador linear*** do espaço vetorial V.

As propriedades (i) e (ii) são equivalentes à seguinte propriedade:

$$T(\mathbf{u} + \mathrm{k}\,\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + \mathrm{k}\,T(\mathbf{v})$$

para quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V e qualquer escalar k.

© 2021 Profa. Elba Bravo Asenjo - Álgebra Linear: Espaços Vetoriais

A homogeneidade e a aditividade de uma transformação linear $T : V \to W$ podem ser usadas em combinação para mostrar que, se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ forem vetores em $\boldsymbol{V}$ e k_1 e k_2 escalares quaisquer, então

$$T(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2)$$

Mais geralmente, se v_1 , v_2 , . . . , v_r forem vetores em V e k_1 , k_2 , . . . , k_r forem escalares quaisquer, então

$$T(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r) = k_1T(\mathbf{v}_1) + k_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_rT(\mathbf{v}_r)$$

Teorema. Se $T : V \to W$ for uma transformação linear, então

(a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(b) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$, quaisquer que sejam **u** e **v** em V.

Prova.

(a) Seja **u** um vetor qualquer em V. Como $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, segue da homogeneidade na Definição que
$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(b) Podemos provar a parte (*b*) reescrevendo $T(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ como

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= T\big(\mathbf{u}+(-1)\mathbf{v}\big) \\ &= T(\mathbf{u})+(-1)T(\mathbf{v}) \\ &= T(\mathbf{u})-T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Observação. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ com qualquer **v** em V.

Exemplos de Transformações Lineares

Exemplo 1. A transformação nula

Sejam V e W dois espaços vetoriais quaisquer. A aplicação

$$T : V \longrightarrow W \quad \text{tal que} \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

qualquer que seja o vetor **v** em V, é a transformação linear denominada ***transformação nula*** ou ***zero***.

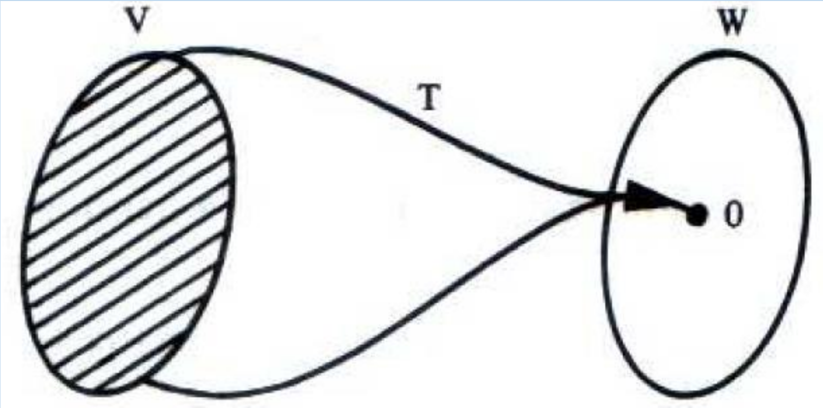
Para ver que T é linear, observe que

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad T(k\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Portanto,

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0 = 0 + 0 = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ e

(ii) $T(k\mathbf{v}) = 0 = \text{k} .0 = k\, T(\mathbf{v})$



Exemplos de Transformações Lineares

Exemplo 2. O operador identidade

Seja V um espaço vetorial qualquer. A aplicação

$$I : V \rightarrow V \qquad \text{definida por} \qquad I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

é denominada ***operador identidade*** de V.

I é uma transformação linear. De fato:

(i) $I(u + v) = u + v = I(u) + I(v)$

(ii) $I(\alpha\, u) = \alpha\, u = \alpha\, I(u)$

Exemplos de Transformações Lineares

Exemplo 3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por T(x , y) = (3x , -2y , x – y).
T é uma transformação linear. De fato:

I) Sejam u = (x_1 , y_1) e v = (x_2 , y_2) vetores genéricos de $\mathbb{R}^2$.
Então:

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1 + x_2 , y_1 + y_2) \\
&= (3(x_1 + x_2) , -2(y_1 + y_2) , (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\
&= (3x_1 + 3x_2 , -2y_1 - 2y_2 , x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\
&= (3x_1 , -2y_1 , x_1 - y_1) + (3x_2 , -2y_2 , x_2 - y_2) = T(x_1 , y_1) + T(x_2 , y_2) = \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}
$$

II) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para qualquer u = $(x_1 , y_1) \in \mathbb{R}^2$, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
T(\alpha u) &= T(\alpha x_1 , \alpha y_1) \\
&= (3 \alpha x_1 , -2 \alpha y_1 , \alpha x_1 - \alpha y_1) \\
&= \alpha (3 x_1 , -2 y_1 , x_1 - y_1) = \alpha T(x_1 , y_1) = \\
&= \alpha T(u)
\end{aligned}
$$

Exemplo 4. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por T(x , y , z) = (3x + 2 , - 2y – z).

T não é uma transformação linear, pois T(0 , 0 , 0) = (2 , 0) $\neq$ (0 , 0)

Observação. Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, então T(0) = 0. No entanto, a recíproca dessa propriedade não é verdadeira, pois existe transformação com T(0) = 0 e T não é linear. É o caso da transformação

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por T(x , y) = (x^2 , 3y)

De fato:

Se u = (x_1 , y_1) e v = (x_2 , y_2) são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$, tem-se

T (u + v) = T $(x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$ = ($(x_1 + x_2)^2$, $3(y_1 + y_2)$)

= (${x_1}^2 + 2\, x_1\, x_2 + {x_2}^2$, $3y_1 + 3y_2$)

enquanto:

T(u) + T (v) = $(x_1{}^2 \, , 3y_1) \; + \; (x_2{}^2 \, , 3y_2)$

Isto é:

$$T(u + v) \neq T(u) \; + \; T(v)$$

Exemplo 5. Uma transformação linear de P_n em P_{n+1}

Seja $\mathbf{p} = p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ um polinômio em P_n e defina a transformação

$T : P_n \rightarrow P_{n+1}$ por $$T(\mathbf{p}) = T(p(x)) = xp(x) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{n+1}$$

Essa transformação é linear, pois, dado qualquer escalar k e quaisquer polinômios $\boldsymbol{p_1}$ e $\boldsymbol{p_2}$, temos

$$T(k\mathbf{p}) = T(kp(x)) = x(kp(x)) = k(xp(x)) = kT(\mathbf{p})$$

e

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) &= T(p_1(x) + p_2(x)) = x(p_1(x) + p_2(x)) \\ &= xp_1(x) + xp_2(x) = T(\mathbf{p}_1) + T(\mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

Teorema. Se $T: V \rightarrow W$ for uma transformação linear, V um espaço vetorial de dimensão finita e $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ uma base de V, então a imagem de qualquer vetor **v** em V pode ser escrita como

$$T(\mathbf{v}) = c_1 T(\mathbf{v_1}) + c_2 T(\mathbf{v_2}) + \cdots + c_n T(\mathbf{v_n})$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são os coeficientes que expressam **v** como uma combinação linear dos vetores em S.

Exemplo 6.

Considere a base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de R^3 com

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$$

Seja $T: R^3 \to R^2$ a transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = (1, 0), \quad T(\mathbf{v}_2) = (2, -1), \quad T(\mathbf{v}_3) = (4, 3)$$

Encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2, x_3)$ e use essa fórmula para calcular $T(2, -3, 5)$.

Solução

Inicialmente precisamos escrever o vetor $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ como uma combinação linear de $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$. Escrevendo

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0)$$

e equacionando componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= x_1 \\ c_1 + c_2 \qquad &= x_2 \\ c_1 \qquad\qquad &= x_3 \end{aligned}$$

que dá $c_1 = x_3$, $c_2 = x_2 - x_3$, $c_3 = x_1 - x_2$, portanto,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_3(1, 1, 1) + (x_2 - x_3)(1, 1, 0) + (x_1 - x_2)(1, 0, 0) \\ &= x_3\mathbf{v}_1 + (x_2 - x_3)\mathbf{v}_2 + (x_1 - x_2)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= x_3 T(\mathbf{v}_1) + (x_2 - x_3)T(\mathbf{v}_2) + (x_1 - x_2)T(\mathbf{v}_3) \\ &= x_3(1, 0) + (x_2 - x_3)(2, -1) + (x_1 - x_2)(4, 3) \\ &= (4x_1 - 2x_2 - x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3) \end{aligned}$$

A partir dessa fórmula, obtemos

$$T(2, -3, 5) = (9, 23)$$

Núcleo e Imagem

Definição. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores em que T transforma em 0 é denominado ***núcleo*** de T e é denotado por Nuc(T), ou seja,

$$\text{Nuc(T)} = \{\, v \in V;\ \ \mathrm{T}(v) = 0 \,\}$$

O conjunto de todos os vetores em W que são imagem por T de pelo menos um vetor em V é denominado ***imagem*** de T e é denotado por Im(T), ou seja,

$$\text{Im (T)} = \mathrm{T}\,(\,\mathrm{V}\,)$$

Teorema. Seja T : V → W uma transformação linear.
(a) O núcleo de T é um subespaço de V.
(b) A imagem de T é um subespaço de W.

Prova de (a).

Note que Nuc(T) é um subconjunto não-vazio de V, já que T(0) = 0.

Sejam $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ vetores em Nuc(T) e k um escalar quaisquer. Então

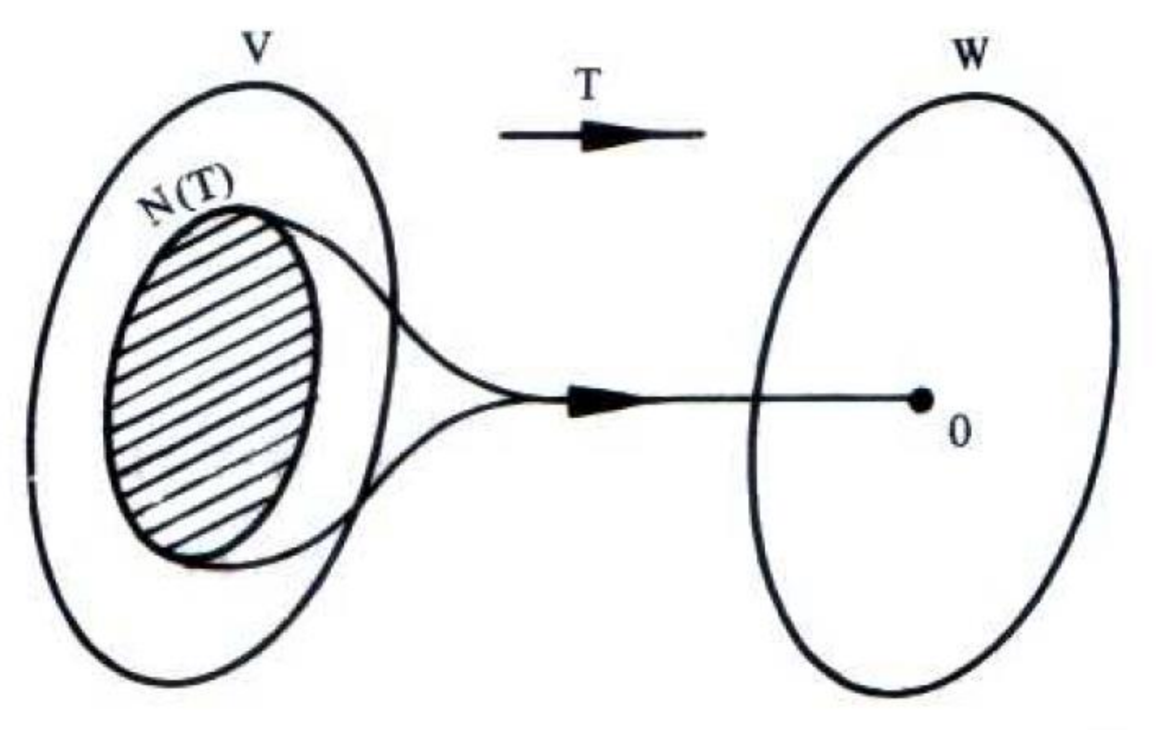
$$T(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = T(\mathbf{v_1}) + T(\mathbf{v_2}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de modo que $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ está em Nuc(T). Também

$$T(k\,\mathbf{v_1}) = k\,T(\mathbf{v_1}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de modo que $k\,\mathbf{v_1}$ está em Nuc(T).

Núcleo de uma Transformação Linear



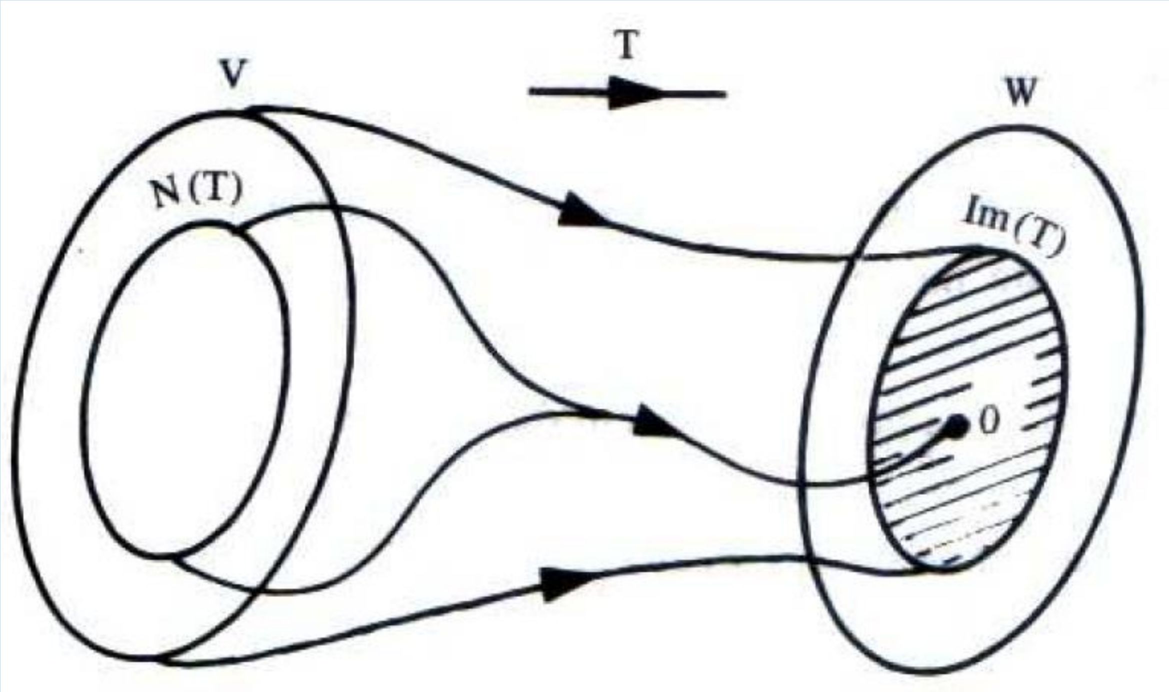
Observemos que Nuc(T) $\subset$ V e

Nuc(T) $\neq \emptyset$ pois 0 $\in$ Nuc(T) ,

tendo em vista que T(0) = 0

Nuc(T) = $\{ v \in V; \quad \mathbf{T}(v) = \mathbf{0} \}$

Imagem de T



Observemos que $Im(T) \subset W$ e $Im(T) \neq \emptyset$ pois $0 = T(0) \in Im(T)$.

Se $Im(T) = W$, T diz-se *sobrejetiva*, isto é, para todo $w \in W$ existe pelo menos um $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

$$\textbf{Im T} = \{ w \in W \; ; \; T(v) = w \text{ para algum } v \in V \}$$

Núcleo e Imagem - Exemplos

Exemplo 7. Seja $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$T(x , y , s , t) = (x - y + s + t \ , \ x + 2s - t \ , \ x + y + 3s - 3t)$

Para determinar Nuc(T), devemos resolver em (x , y , s , t) a equação

$T(x , y , s , t) = (x - y + s + t \ , \ x + 2s - t \ , \ x + y + 3s - 3t) = (0 \ , \ 0 \ , \ 0)$

Equivalentemente, Nuc(T) é o conjunto solução do seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{aligned} x - y + s + t &= 0 \\ x + 2s - t &= 0 \\ x + y + 3s - 3t &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos

© 2021 Profa. Elba Bravo Asenjo - Álgebra Linear: Espaços Vetoriais

$\text{Nuc}(T) = \{ (-2s + t \ , \ -s + 2t \ , \ s , t) \ ; \ s , t \in \mathbb{R} \}$

Note que Nuc(T) é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2.

Teorema. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Temos que

T é injetiva se, e somente se Nuc(T) = { 0 }.

Por exemplo, a transformação linear do Exemplo 7 não é injetiva, pois

$\text{Nuc}(T) \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Já a transformação linear dada por T(x , y) = (x – y , x + y), (x , y) ∈ $\mathbb{R}^2$, é injetiva, pois

$\text{Nuc}(T) = \{(0, 0)\}$. Verificar!!!

© 2021 Profa. Elba Bravo Asenjo - Álgebra Linear: Espaços Vetoriais

Teorema 1. Seja T: V → W uma transformação linear. Se $\{v_1 , v_2 , . . . , v_n\}$ é um conjunto de geradores de V, então $\{T(v_1) , T(v_2) , . . . , T(v_n)\}$ é um conjunto de geradores de ImT. Em particular, dim ImT ≤ dim V.

Teorema 2. As linhas não nulas de uma matriz R, na forma escalonada e equivalente a uma matriz A, formam uma base para o espaço linha de A.

Imagem de T

Exemplo 8. Seja $T:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x , y , s , t) = (x – y + s + t \ , \ x + 2s – t \ , \ x + y + 3s – 3t)$$

Calcular a imagem da transformação linear.

Solução

Pelo Teorema 1, devemos determinar o espaço gerado pela imagem de um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^4$. Vamos calcular, então, o espaço gerado por,

$T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $T(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$
$T(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 3)$, $T(0, 0, 0, 1) = (1, -1, -3)$

Pelo Teorema 2, basta reduzir a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

à forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $\{(1, 1, 1) , (0, 1, 2)\}$ é uma base de Im T, ou seja,

Im T = $\{ x (1, 1, 1) + y (0, 1, 2);\ x, y \in \mathbb{R} \} = \{ (x , x + y , x + 2y);\ x, y \in \mathbb{R} \}$.

Por outro lado, o conjunto $\{ (1, 0, -1), (0, 1, 2) \}$ também é uma base de Im T e portanto o conjunto imagem de T pode também ser dado por

$$\text{Im } T = \{ x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2) ;\ x, y \in \mathbb{R} \} = \{ (x, y, -x + 2y) ;\ x, y \in \mathbb{R} \}$$

Imagem de T usando a definição

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

Im T = { $w \in$ W ; T(v) = w para algum $v \in$ V, }

Vamos resolver o Exemplo 8 utilizando a definição de conjunto imagem.

Exemplo 9. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x , y , s , t) = (x - y + s + t \ , \ x + 2s - t \ , \ x + y + 3s - 3t)$$

Calcular a imagem da transformação linear.

Solução

$T(v) = w$; $v = (x , y, s, t)$, $w = (a , b , c)$

$(x - y + s + t \ , \ x + 2s - t \ , \ x + y + 3s - 3t) = (a , b , c)$

Igualando componentes correspondentes temos o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{aligned} x - y + s + t &= a \\ x \quad + 2s - t &= b \\ x + y + 3s - 3t &= c \end{aligned}$$

Reduzindo a matriz aumentada à forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & -1 & b \\ 1 & 1 & 3 & -3 & c \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 2 & 2 & -4 & c-a \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{bmatrix}$$

O sistema é consistente se, e somente se, $a - 2b + c = 0$. Logo

$\text{Im } T = \{ w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3;\ a - 2b + c = 0 \}$

Vamos determinar uma base para o conjunto Im T, Isolamos uma das variáveis da equação $a - 2b + c = 0$

Seja $c = -a + 2b$ então,

$$(a , b , c) = (a , b , - a + 2b) = (a , 0 , - a) + (0 , b , 2b) = a (1 , 0 , -1) + b (0 , 1 , 2)$$

Assim, uma base para Im T é dada por

$$\beta = \{ (1, 0 , -1) , (0 , 1, 2)\}$$

Portanto

$$\text{Im } T = \{ x (1 , 0 , -1) + y (0 , 1 , 2) ; x , y \in \mathbb{R} \} = \{ (x , y , -x + 2y) ; x , y \in \mathbb{R} \}$$

© 2021 Profa. Elba Bravo Asenjo - Álgebra Linear: Espaços Vetoriais

Teorema 3. Teorema do Núcleo e da Imagem

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear, onde V tem dimensão finita. Então

$$\dim \mathrm{Nuc}(T) + \dim \mathrm{Im}\, T = \dim V$$

Teorema 4. Seja $T: V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Se $\dim V = \dim W$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) T é injetiva;

(ii) T é sobrejetiva.

Exemplo 10. Verificar que a transformação linear $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^4$, dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b,\ b + c,\ c,\ a + b + d)$$

é uma função bijetiva.

Solução

Como $\dim M(2,2) = \dim \mathbb{R}^4$, segue, do Teorema 4, que basta verificarmos que T é uma função injetiva.
Como a igualdade

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (0,0,0,0); \quad \text{isto é,} \quad (a + b,\ b + c,\ c,\ a + b + d) = (0,0,0,0)$$

Só ocorre quando $a = b = c = d = 0$, temos que $Nuc(T) = \{0\}$, Logo T é injetiva.

Isomorfismo

Uma transformação linear bijetiva é chamada ***isomorfismo***. Dois espaços vetoriais que possuem um isomorfismo entre eles serão ditos ***isomorfos***, o que, em grego, significa que possuem mesma forma.

Teorema 5. Se V e W são espaços vetoriais de dimensão ***n***, então V e W são isomorfos.

Observação. Dois espaços vetoriais V e W isomorfos são essencialmente o "*mesmo espaço vetorial*", exceto que seus elementos e suas operações de adição e de multiplicação por escalar são escritas diferentemente. Assim qualquer propriedade de V que dependa apenas de sua estrutura de espaço vetorial permanece válida em W, e vice-versa. Por exemplo, se T: V → W é um isomorfismo de V em W, então $\{T(v_1)\,,\ T(v_2)\,, \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de W se, e somente se, $\{v_1\,,\ v_2\,, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.

© 2021 Profa. Elba Bravo Asenjo - Álgebra Linear: Espaços Vetoriais

Isomorfismo - Exemplo

Exemplo 11. Seja W o subespaço de M(2,2) gerado por

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrar uma base e a dimensão de W.

Solução

Como $T(x,y,t,z) = \begin{bmatrix} x & y \\ t & z \end{bmatrix}$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ em M(2,2), temos que W é isomorfo ao espaço G(v_1, v_2, v_3, v_4), onde v_1 = (1, -5, -4 , 2), v_2= (1, 1, -1, 5), v_3 = (2, -4, -5, 7) e v_4= (1, -7, -5, 1). Temos que a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & -5 & 7 \\ 1 & -7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

se reduz, pelas transformações elementares, à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $\alpha = \{(1, 3, 0, 6) \ , \ (0, 2, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathrm{G}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ e, consequentemente

$\alpha' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de W, mostrando que dim W = 2.

Observação. Note que, como consequência do Teorema 5, temos que *todo espaço vetorial não nulo de dimensão finita* n *é isomorfo ao* $\mathbb{R}^n$. Dessa forma, o estudo de espaços vetoriais de dimensão finita pode se reduzir ao estudo dos espaços $\mathbb{R}^n$, incluindo a escolha de algum isomorfismo.