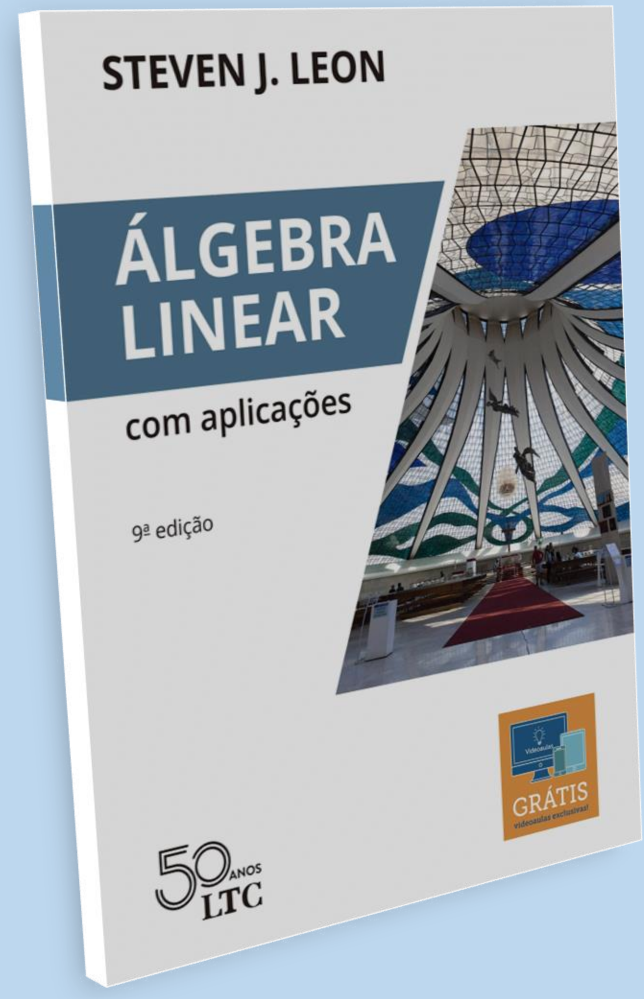
UENF

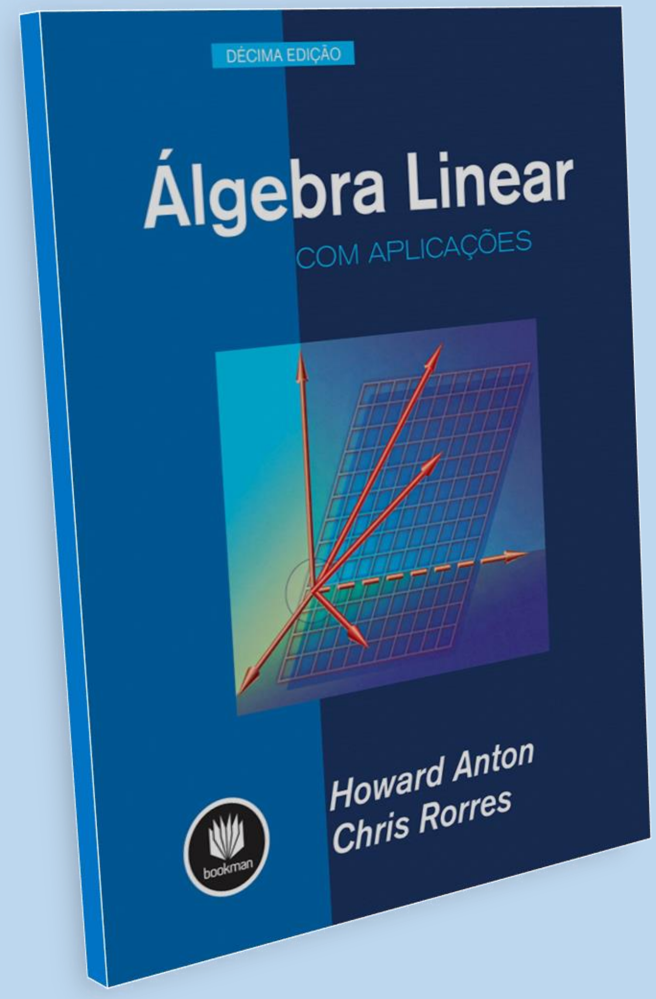
Álgebra Linear

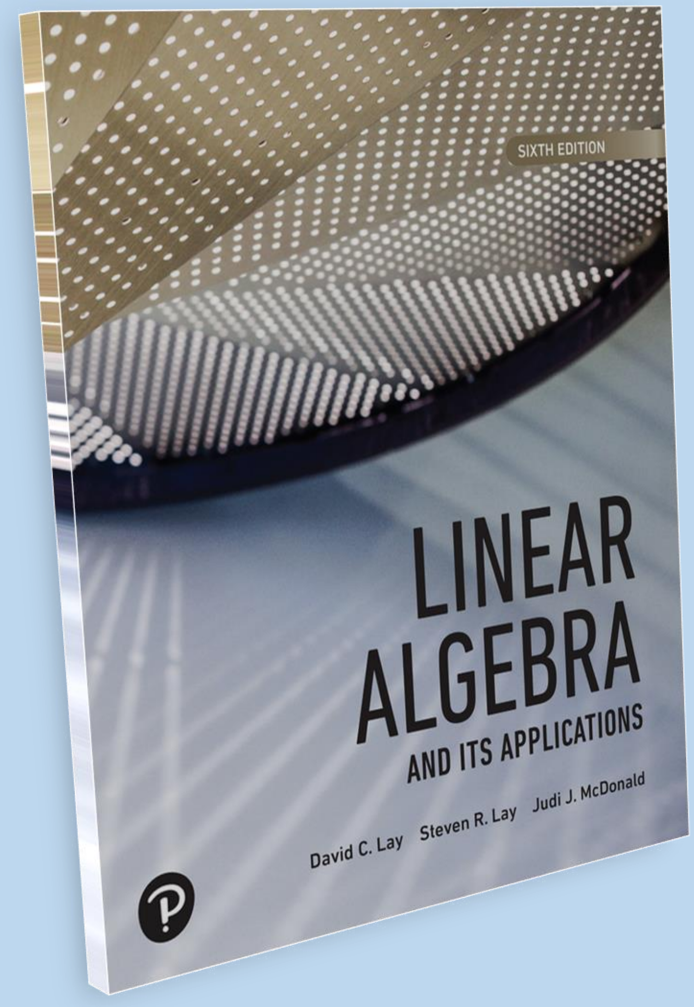
Espaços Vetoriais – Parte 2

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







Independência e Dependência Linear

Definição. Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial *V*, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \ldots, \quad k_r = 0$$

Dizemos que essa é a solução trivial. Se essa for a única solução, dizemos que *S* é um ***conjunto linearmente independente***. Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que *S* é um ***conjunto linearmente dependente***.

Independência e Dependência Linear - Exemplos

Exemplo1. O conjunto linearmente independente mais básico de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto dos vetores unitários canônicos

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

Para simplificar a notação, vamos provar a independência linear em $\mathbb{R}^3$ dos vetores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Seja a equação vetorial

$$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Em termos de componentes, obtemos $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$

De onde segue que $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

Logo, os vetores são linearmente independentes.

Independência e Dependência Linear - Exemplos

Exemplo 2. Determine se os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

são linearmente independentes ou dependentes em $\mathbb{R}^3$.

Solução

Seja a combinação linear

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \qquad (1)$$

ou, equivalentemente,

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

Igualando componentes correspondentes dos dois lados, obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Independência e Dependência Linear - Exemplos

Assim, o problema se reduz a determinar se esse sistema tem soluções não triviais.
Resolvemos o sistema utilizando Eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{16} L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema tem infinitas soluções não triviais.
variáveis líderes: k_1 e k_2
variável livre: k_3

Independência e Dependência Linear - Exemplos

A partir da última matriz (forma escalonada reduzida por linhas) obtemos:

k_1 = - ½ k_3 e k_2 = - ½ k_3

Fazendo $k_3 = t$ obtemos a solução geral do sistema homogêneo dada por ,

k_1 = - ½ t , k_2 = - ½ t e k_3 = t

Se t = -2 então k_1 = 1 , k_2 = 1 e k_3 = -2

Logo os vetores são linearmente dependentes.

Substituindo esses valores na Equação (1) obtém-se,

$$\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} - 2\,\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

Independência e Dependência Linear - Exemplos

Observações. Seja A, a matriz dos coeficientes do sistema homogêneo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe-se que, as colunas da matriz A são as componentes dos vetores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, dados

1) Se o determinante da matriz A é **diferente de zero** então a única solução do sistema homogêneo é a trivial $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ e portanto o conjunto de vetores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ é Linearmente Independente LI

2) Se o determinante da matriz A é **igual a zero,** ***det*(A) = 0**, então o sistema homogêneo tem soluções não triviais e que, portanto, os vetores são Linearmente Dependentes LD

Independência e Dependência Linear - Exemplos

Exemplo 3. Determine se os polinômios

$$\mathbf{p}_1 = 1 - x, \quad \mathbf{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \mathbf{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

são linearmente dependentes ou independentes em $\boldsymbol{P_2}$

Solução

Seja a combinação linear

$$k_1\mathbf{p}_1 + k_2\mathbf{p}_2 + k_3\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$$

Essa equação vetorial pode ser rescrita como

$$k_1(1 - x) + k_2(5 + 3x - 2x^2) + k_3(1 + 3x - x^2) = 0$$

ou, equivalentemente, como

$$(k_1 + 5k_2 + k_3) + (-k_1 + 3k_2 + 3k_3)x + (-2k_2 - k_3)x^2 = 0$$

Independência e Dependência Linear - Exemplos

Igualando cada coeficiente a zero obtém-se o seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + k_3 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Seja A a matriz dos coeficiente do sistema homogêneo $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + (-3) = 0$$

Como $\det(A) = 0$ então o conjunto de vetores $\{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}\}$ é linearmente dependente.

Independência e Dependência Linear

Observação. Os termos *linearmente dependente* e *linearmente independente* pretendem indicar se os vetores de um dado conjunto estão inter-relacionados de alguma maneira.

Teorema 1. Um conjunto S de dois ou mais vetores é

(a) linearmente dependente se, e só se, pelo menos um dos vetores de S pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores em S.

(b) linearmente independente se, e só se, nenhum vetor em S pode ser expresso como uma combinação linear dos outros vetores em S.

Exemplo. No Exemplo 2 vimos que os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (5, 6, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 2, 1)$$

São linearmente dependentes.
Assim, segue do Teorema 1, que pelo menos um desses vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros dois
Resolvendo o sistema homogêneo obtivemos que esses vetores satisfazem a equação

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

do que decorre, por exemplo, que

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 + 2\,\mathbf{v}_3 \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_3 \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$$

Independência e Dependência Linear

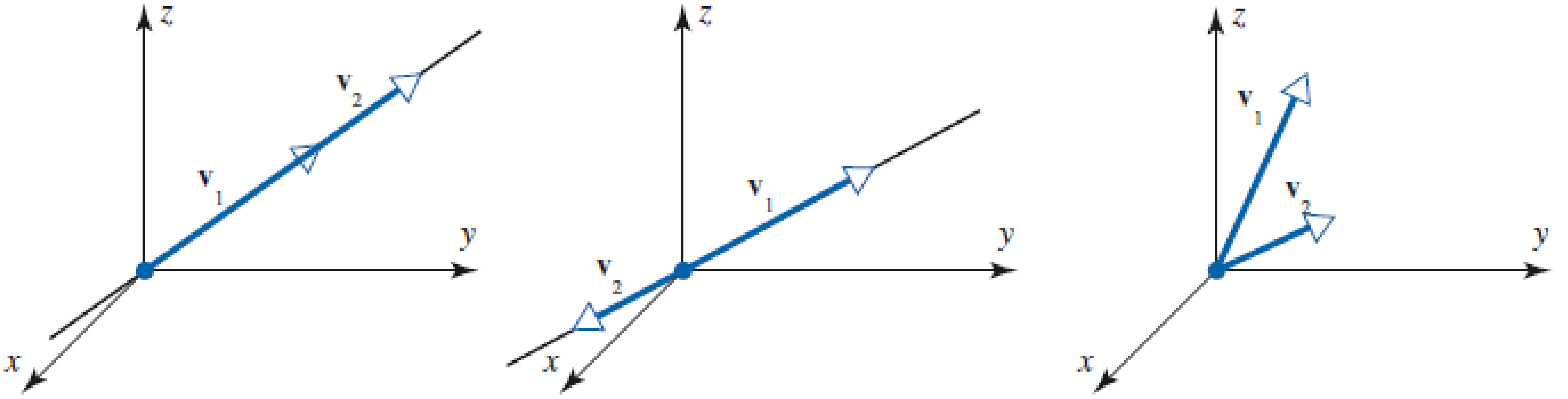
Teorema 2.

(a) Um conjunto finito que contenha $\mathbf{0}$ é linearmente dependente.

(b) Um conjunto de exatamente um vetor é linearmente independente se, e só se, esse vetor não é $\mathbf{0}$.

(c) Um conjunto de exatamente dois vetores é linearmente independente se, e só se, nenhum dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro.

Independência e Dependência Linear



(*a*) Linearmente dependentes (*b*) Linearmente dependentes (*c*) Linearmente independentes

Bases de um Espaço Vetorial

Definição. Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma ***base*** de V se valerem as duas condições a seguir.

(i) S é linearmente independente.

(ii) S gera V.

Exemplo 1. A base Canônica de $\mathbb{R}^n$

Os vetores unitários canônicos

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

formam uma base de $\mathbb{R}^n$ que denominamos ***base canônica de*** $\mathbb{R}^n$.

Bases - Exemplos

Em particular

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. De fato, seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ det(A) = 1, logo o conjunto } \{i\,,j\,,k\} \text{ é LI}$$

O conjunto de vetores $\{i\,, j\,, k\}$ gera $\mathbb{R}^3$ pois todo vetor $v = (a\,, b\,, c\,) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear desses vetores; isto é,

$v = (a\,, b\,, c\,) = a\,i + b\,j + c\,k.$

Bases

Teorema 3. Afirmações equivalentes

Se A for uma matriz n x n, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) A é invertível.

(b) A**x** = **0** tem somente a solução trivial.

(c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é $\boldsymbol{I_n}$.

(d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

(e) A**x** = **b** é consistente com cada matriz **b** de tamanho n x 1.

(f) A**x** = **b** tem exatamente uma solução com cada matriz **b** de tamanho n x 1.

(g) det(A) $\neq$ 0.

Bases - Exemplos

Exemplo 2. Mostre que os vetores

$\boldsymbol{v_1}$ = (1, 2, 1), $\boldsymbol{v_2}$= (2, 9, 0) e $\boldsymbol{v_3} = (3, 3, 4)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Solução

(i) Independência linear

Seja a combinação linear $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ (1)

Devemos mostrar que essa equação vetorial só tem a solução trivial.

(ii) Para provar que esses vetores geram $\mathbb{R}^3$, devemos mostrar que cada vetor $\mathbf{b} = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3})$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b} \quad (2)$$

Bases - Exemplos

Igualando componentes correspondentes dos dois lados, essas duas equações podem ser expressas como os sistemas lineares

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b_1 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= b_2 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

Os dois sistemas em (3) têm a mesma matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \quad \det(A) = -1$$

Pelo Teorema 3, podemos provar ambos resultados simultaneamente mostrando que $\det(A) \neq 0$.
Logo os vetores $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Bases - Exemplos

Resolvendo o sistema não homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 9 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 4 & b_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 5 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - b_1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - 4b_1 + 2b_3 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - b_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 9b_1 - 2b_2 - 4b_3 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - 4b_1 + 2b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 5b_3 - 9b_1 + 2b_2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow -L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 9b_1 - 2b_2 - 4b_3 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - 4b_1 + 2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 9b_1 - 2b_2 - 5b_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -36b_1 + 8b_2 + 21b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 5b_1 - b_2 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 9b_1 - 2b_2 - 5b_3 \end{bmatrix}$$

Bases - Exemplos

Assim

$$c_1 = -36\, b_1 \;+ 8\, b_2 \;+ 21\, b_3$$
$$c_2 = \;5\, b_1 \;- b_2 \;-3\, b_3$$
$$c_3 = \;9\, b_1 \;- 2b_2 \;-5\, b_3$$

Pela Equação 2, b = $c_1\, v_1$ + $c_2\, v_2$ + $c_3\, v_3$ onde b = $(b_1, b_2\,, b_3)$ é um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$. Logo

b = $(-36\, b_1$+ 8 b_2+ 21 $b_3)\, v_1$ + $(5\, b_1 - b_2\; -3\, b_3)\, v_2$ + $(9\, b_1 - 2b_2 -5\, b_3)\, v_3$

Exemplo: Seja b = (1 , 0 , 1) então $\boldsymbol{c_1}$ **= -15 ,** $\boldsymbol{c_2}$**= 2 e** $\boldsymbol{c_3}$ **= 4** e portanto

b = -15 $\boldsymbol{v_1}$ **+ 2**$\boldsymbol{v_2}$ **+ 4** $\boldsymbol{v_3}$ = -15 (1, 2, 1) + 2 (2, 9, 0) + 4 (3, 3, 4) = (1 , 0 , 1)

Bases - Exemplos

Exemplo 3. O conjunto $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma base do espaço vetorial $\boldsymbol{P_n}$ dos polinômios de grau menor ou igual que n.

Exemplo 4. **Base Canônica de** $\boldsymbol{M_{mn}}$

As matrizes

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Formam uma base do espaço vetorial $\boldsymbol{M_{22}}$ de matrizes 2x2.

Mais geralmente, a ***base canônica*** de $\boldsymbol{M_{mn}}$ consiste nas mn matrizes distintas com uma única entrada 1 e todas as demais entradas iguais a zero.

Coordenadas de um vetor

Definição. Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial ***V*** e se

$$\mathbf{v} = c_1\, v_1 + c_2\, v_2 + \ldots + c_n\, v_n$$

é a expressão de um vetor **v** em termos da base S, então os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são denominados *coordenadas* de v em relação à base S. O vetor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ em $\mathbb{R}^n$ construído com essas coordenadas é denominado ***vetor de coordenadas de* v *em relação a S*** e é denotado por

$$(\mathrm{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Ou

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

*Matriz de coordenadas de **v** em relação a S*

Coordenadas - Exemplos

Exemplo 1. Sejam o vetor $b = (1 , 0 , 1) \in \mathbb{R}^3$

Pelo Exemplo 2 (Bases de um Espaço Vetorial), o conjunto de vetores
S ={ $\boldsymbol{v_1}$ = $(1, 2, 1)$, $\boldsymbol{v_2}$= $(2, 9, 0)$, $\boldsymbol{v_3} = (3, 3, 4)$ } formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Nessa base temos que

$$\mathbf{b = -15\, \boldsymbol{v_1} + 2\boldsymbol{v_2} + 4\, \boldsymbol{v_3}}$$

Logo

$$(\mathrm{b})_S = (-15 ,\ 2 ,\ 4)$$

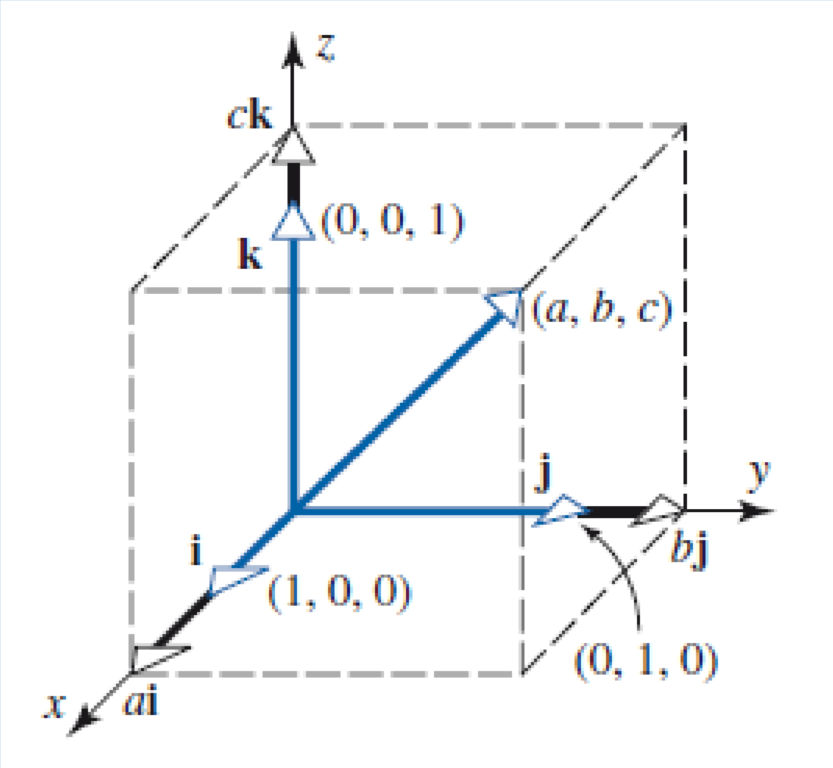
Coordenadas - Exemplos

Exemplo 2. No caso especial em que $V = \mathbb{R}^n$ e S for a *base canônica*, o vetor de coordenadas $(\mathrm{v})_S$ é igual ao vetor **v**,

$$\mathbf{v} = (\mathrm{v})_S$$

Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, a representação $\mathbf{v} = (a, b, c)$ de um vetor como combinação linear dos vetores na base canônica $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$



de modo que o vetor de coordenadas em relação a essa base é

$$(\mathrm{v})_S = (a, b, c),$$

que é igual ao vetor **v**.

Coordenadas - Exemplos

Exemplo 3.

a) O conjunto de vetores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 9, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$$

forma uma base de $\mathbb{R}^3$.

Encontre o vetor de coordenadas de **v** = (5, -1, 9) em relação à base $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Encontre o vetor em $\mathbb{R}^3$ cujo vetor de coordenadas em relação à base S é

$$(v)_S = (-1, 3, 2).$$

Solução

a) Escrevemos a combinação linear

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

Ou, em termos de componentes,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Igualando os componentes correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 \qquad\quad + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$.

Portanto,

$$(v)_S = (1, -1, 2)$$

Coordenadas - Exemplos

b) Usando a definição de $(\mathrm{v})_S$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7)\end{aligned}$$

Dimensão de um Espaço Vetorial

Definição. A ***dimensão*** de um espaço vetorial de dimensão finita V é denotada por $\dim(V)$ e é definida como o número de vetores numa base de V. Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

Exemplo 1. Dimensões de alguns espaços vetoriais familiares

$\dim(R^n) = n$	A base canônica tem n vetores.
$\dim(P_n) = n + 1$	A base canônica tem $n + 1$ vetores.
$\dim(M_{mn}) = mn$	A base canônica tem mn vetores.

Dimensão - Exemplos

Exemplo 2. Encontre uma base e a dimensão do espaço solução do sistema homogêneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\quad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Solução

Resolvemos o sistema homogêneo utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

Dimensão - Exemplos

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_4 \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow -\frac{1}{3}L_3$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Matriz reduzida por linhas

Dimensão - Exemplos

O sistema homogêneo tem infinitas soluções.

Variáveis líderes: x_1 , x_3 e x_4

Variáveis livres: x_2 e x_5

A matriz reduzida por linhas está associada ao sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -x_2 - x_5 \\ x_3 &= -x_5 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo $x_2 = s$ e $x_5 = t$ obtemos a solução geral do sistema:

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0 \quad \text{e} \quad x_5 = t$$

Dimensão - Exemplos

que pode ser escrita em forma vetorial como

$$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5) = (- s - t , \quad s , \quad -t , \quad 0 , \quad t)$$

ou, alternativamente, como

$$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5) = (- s , s , 0 , 0 , 0) + (- t , 0 , - t , 0 , t)$$
$$= s (-1 , 1 , 0 , 0 , 0) + t (- 1 , 0 , - 1 , 0 , 1)$$

Isso mostra que o *espaço solução* do sistema homogêneo é gerado pelos vetores

$v_1 = (-1 , 1 , 0 , 0 , 0)$ e $v_2 = (-1 , 0 , -1 , 0 , 1)$

Como nenhum desses vetores é um múltiplo escalar do outro, também são linearmente independentes e, portanto, formam uma base do espaço solução. Assim, o espaço solução tem dimensão 2.