Cálculo III – 1a Avaliação – 12/09/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ______________________________

Matrícula: ________________ **Curso:** ________________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

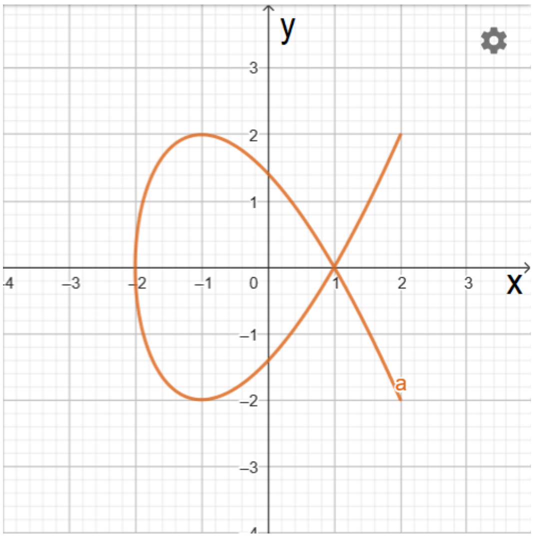
O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. Marque com um X a alternativa que corresponde à parametrização da curva ilustrada abaixo. Justifique sua escolha.



A. $\longrightarrow \vec{r}(t) = (t^2 - 2,\, t^3 - 3t)$**,** $-2 \le t \le 2$

B. $\vec{r}(t) = \big((1 - \operatorname{sen} t)\cos t,\, (1 - \operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t\big),\ 0 \le t \le 2\pi$

C. $\vec{r}(t) = (t + 1,\, t^2 - 2),\ -2 \le t \le 2$

D. $\vec{r}(t) = \big((1 + \cos t)\cos t,\, (1 + \cos t)\operatorname{sen} t\big),\ 0 \le t \le 2\pi$

E. $\vec{r}(t) = (t^3 - 3t,\, t^2 - 2),\ -2 \le t \le 2$

F. Nenhuma das alternativas anteriores

2. Calcule o comprimento de arco da curva C parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (1 + 3t^2,\, 4 + 2t^3), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Solução:

$$L = \int_C \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{36t^2 + 36t^4}\, dt = \int_0^1 6t\sqrt{1 + t^2}\, dt = 4\sqrt{2} - 2.$$

(Faça a substituição $u = 1 + t^2$).

3. Seja C a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (4t,\, 3\cos t,\, 3\,\mathrm{sen}\, t).$$

Determine $\vec{T}(0)$, $\vec{N}(0)$ e $\vec{B}(0)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
&\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \left(\frac{4}{5},\, -\frac{3}{5}\,\mathrm{sen}\, t,\, \frac{3}{5}\cos t\right), \\
&\vec{T}(0) = \left(\frac{4}{5},\, 0,\, \frac{3}{5}\right), \\
&\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = (0,\, -\cos t,\, -\,\mathrm{sen}\, t), \\
&\vec{N}(0) = (0,\, -1,\, 0), \\
&\vec{B}(0) = \vec{T}(0) \times \vec{N}(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5},\, 0,\, -\frac{4}{5}\right).
\end{aligned}$$

4. Seja C a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (t^2,\, 2t), \qquad 0 \le t \le 1$$

e $f(x, y) = xy$. Calcule $\displaystyle\int_C f(x,y)\, ds$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y)\, ds &= \int_0^1 x(t)\, y(t)\, \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_0^1 t^2 \cdot 2t \cdot \sqrt{4t^2+4}\, dt \\
&= 2\int_0^1 (t^2+1-1)\cdot 2t \cdot \sqrt{t^2+1}\, dt \underset{u=t^2+1}{=} 2\int_1^2 (u-1)\sqrt{u}\, du \\
&= \frac{8+8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

5. Considere C o segmento de reta que liga $(-1,2)$ a $(2,8)$ e seja $\vec{F}(x,y) = (x^2, y^2)$. Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

a) Diretamente;

Solução:
Parametrização do segmento de reta:

$$\vec{r}(t) = (3t-1, 6t+2), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Integral de linha:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (x(t)^2,\, y(t)^2) \cdot \vec{r'}(t)\, dt \\
&= \int_0^1 ((3t-1)^2,\, (6t+2)^2) \cdot (3,6)\, dt \\
&= \int_0^1 3(9t^2 - 6t + 1) + 6(36t^2 + 24t + 4)\, dt \\
&= \int_0^1 243t^2 + 126t + 27\, dt = 171.
\end{aligned}$$

b) Usando o Teorema Fundamental das Integrais de Linha.

Solução:
Verificando que $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (x^2, y^2)$ é conservativo:

$$P_y = 0 = Q_x.$$

Achando o potencial f:

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = \int P\, dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + g(y), \\
&Q = y^2 = f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + g(y)\right) = g'(y) \\
&\therefore \qquad g(y) = \frac{y^3}{3} + C \qquad \therefore \qquad f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{3} + C.
\end{aligned}$$

Podemos tomar $C = 0$. Pelo TFIL, temos:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \nabla f(x(t), y(t)) \cdot \vec{r'}(t)\, dt \\
&= f(x(1), y(1)) - f(x(0), y(0)) = f(2,8) - f(-1,2) \\
&= \frac{2^3 + 8^3}{3} - \frac{(-1)^3 + 2^3}{3} = 171.
\end{aligned}$$