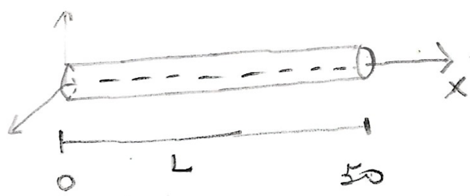
EX 1 - ENCONTRE A TEMPERATURA $u(x,t)$ EM QUALQUER INSTANTE, NUMA BARRA DE METAL COM 50 CM DE COMPRIMENTO E ISOLADA NAS EXTREMIDADES E QUE TEM UMA TEMPERATURA INICIALMENTE DE 20°C E UNIFORME EM TODA A BARRA E CUJAS EXTREMIDADES SÃO MANTIDAS A 0°C PARA TODO $t > 0$.

SOLUÇÃO



DADOS:

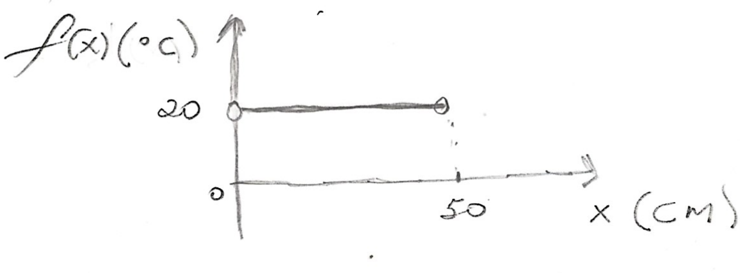
- $L = 50$ CM
- $T_1 = T_2 = 0 \Rightarrow$ TEMPERATURA NAS EXTREMIDADES
- TEMPERATURA INICIAL: 20°C
  $\hookrightarrow f(x) = u(x,0) = 20$

EM QUALQUER INSTANTE t TEMOS:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cdot e^{-\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot \alpha^2}{L^2} \cdot t} \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

$$\hookrightarrow \boxed{C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}$$

CALCULANDO C_n para $f(x) = 20$:



$$C_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{50}\right)dx \quad ; \Rightarrow \text{JÁ CALCULADA (PRÓXIMA FOLHA)}$$

$$C_n = \frac{4}{5}\int_0^{50} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{50}\right)dx \quad ; \Rightarrow C_n = \begin{cases} \dfrac{80}{n\cdot\pi}, & n \to \text{IMPAR} \\ 0, & n \to \text{PAR} \end{cases}$$

ASSIM, A TEMPERATURA EM QUALQUER INSTANTE É DADA POR:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n\ \text{IMPAR}} \frac{80}{n\cdot\pi} \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 \cdot t}{(50)^2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{50}\right)}$$ ou

$$\boxed{u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n}\, e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 \cdot t}{2500}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{50}\right)}$$

CALCULAR $c_n = \frac{4}{5}\int_0^{50} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx$

$$\frac{5}{4} c_n = \frac{50}{n\pi}\int_0^{n\pi} \operatorname{sen}(u)\, du \quad ;$$

$$u = \frac{n\pi x}{50}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{n\pi}{50}$$

$$\frac{50}{n\pi} du = dx$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = 50 \Rightarrow u = n\pi$$

$$'' = \frac{50}{n\pi}\Big[-\cos u\Big]_0^{n\pi} = \frac{50}{n\pi}\Big[\cos(u)\Big]_{n\pi}^{0} \quad ;$$

$$'' = \frac{50}{n\pi}\Big[\cos(0) - \cos(n\pi)\Big] \quad ;$$

$$c_n = \frac{4}{5}\cdot\frac{50}{n\pi}\Big[1 - (-1)^n\Big] \quad ;$$

$$c_n = \frac{40}{n\pi}\Big[1 - (-1)^n\Big] \Rightarrow c_n = \begin{cases} \frac{40}{n\pi}[1+1] , & n \to \text{IMPAR} \\ \frac{40}{n\pi}[1-1] , & n \to \text{PAR} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n = \frac{80}{n\pi} , & n \to \text{IMPAR} \\ c_n = 0 , & n \to \text{PAR} \end{cases}$$