Segunda Prova de Cálculo III – 13/06/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. Calcule

$$\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} 30x - 15y \, dx \, dy \, dz.$$

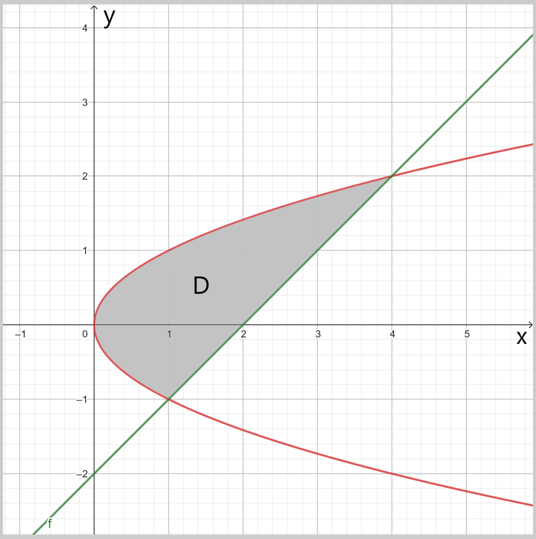
Solução:

16.

2. Seja D a região do plano xy delimitada por $y = x - 2$ e $x = y^2$.

a) Esboce D.

Solução:



b) Arme (mas não calcule) a integral de $f(x, y)$ em D. Isto é, determine os intervalos de integração correspondentes à integral em D.

Solução:

$$\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) \, dx \, dy$$

ou

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx \; + \; \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

c) Calcule $\displaystyle\iint_D y \, dA$.

Solução:

$\dfrac{9}{4}$.

3. Calcule

$$\iint_D e^{x^2} e^{y^2}\, dA,$$

onde D é o disco com centro na origem e raio 1.

Solução:

$$\iint_D e^{x^2} e^{y^2}\, dA = \iint_D e^{x^2+y^2}\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} r\, dr\, d\theta = \pi(e-1).$$

4. Calcule o Jacobiano da transformação

$$x = uv, \qquad y = \frac{u}{v}.$$

Solução:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1/v & -u/v^2 \end{vmatrix} = -\frac{2u}{v}, \qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{2u}{v}.$$

5. Calcule

$$\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2\, dV,$$

onde B é a bola com centro na origem e raio 2.

Dica do Mestre: use coordenadas esféricas.

Solução:

$$\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 (\rho^2)^2\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 \rho^6 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{512\pi}{7}.$$

O objetivo da próxima questão é que você demonstre que o volume do cone com base circular de raio R e altura H é

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

Justifique a sua resposta calculando corretamente a integral abaixo.

6. Calcule o volume do cone com base circular de raio R e altura H usando coordenadas cilíndricas.

Dica do Mestre: use semelhança de triângulos para determinar r em função de z. Desenhar ajuda muito.