Quantificadores

Lógica Matemática

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UENF

Prof. Fermín A. Tang

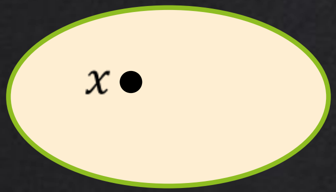
Quantificador Universal

Definição

- Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto A, não vazio $(A \neq \emptyset)$ e seja V_p o seu conjunto-verdade:

$$V_p = \{x | x \in A \ \wedge \ p(x) \}$$

- Quando: $\boxed{V_p = A}$



$A = V_p$

- Temos que, todos os elementos do conjunto A satisfazem a sentença aberta $p(x)$.

- Podemos afirmar que:

i) "Para todo elemento x de A, $p(x)$ é verdadeira (V)"

ii) "Qualquer que seja o elemento x de A, $p(x)$ é verdadeira (V)"

- ou de maneira mais simplificada:

i) "Para todo x de A, $p(x)$"

ii) "Qualquer que seja x de A, $p(x)$"

Quantificador Universal

Definição

- O quantificador universal é o símbolo $\forall$ que permite expressar esta ideia de maneira simbólica, em alguma das seguintes formas:

$$i)\quad (\forall\, x \in A) \quad (p(x))$$

$$ii)\quad \forall\, x \in A, \quad p(x)$$

$$iii)\quad \forall\, x \in A\!: \quad p(x)$$

- Muitas vezes, para simplificar a notação, omite-se a indicação do domínio A da variável x, resultando na seguinte notação simplificada:

$$iv)\quad (\forall\, x) \quad (p(x))$$

$$v)\quad \forall\, x, \quad p(x)$$

$$vi)\quad \forall\, x\!: \quad p(x)$$

- Vale observar a equivalência:

$$(\forall\, x \in A) \quad (p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad V_p = A$$

Quantificador Universal

Definição

- Outra observação muito importante é que:
- Enquanto $p(x)$ é apenas uma sentença aberta, que carece de valor lógico (V) ou (F); a expressão quantificada $(\forall\ x \in A)\left(p(x)\right)$ torna-se uma proposição e portanto possui valor lógico, que é verdade (V) se $V_p = A$ e falsidade (F) se $V_p \neq A$.
- Dada uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A, o símbolo $\forall$, referido à variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme $p(x)$ expressa ou não uma condição universal no conjunto A.
- A esta operação lógica dá-se o nome de quantificação universal e ao seu respectivo símbolo $\forall$ o de quantificador universal.

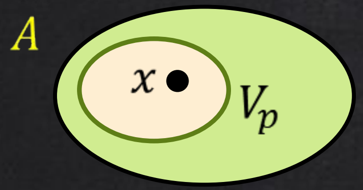
Quantificador Existencial

Definição

- Seja $p(x)$ uma sentença aberta em um conjunto A, não vazio ($A \neq \emptyset$) e seja V_p o seu conjunto-verdade:

$$V_p = \{x | x \in A \wedge p(x)\}$$

- Quando: $\boxed{V_p \neq \emptyset}$



- Temos que, pelo menos um elemento do conjunto A satisfaz a sentença aberta $\boldsymbol{p(x)}$.

- Podemos afirmar que:

i) "Existe pelo menos um elemento x de A tal que $p(x)$ é verdadeira (V)"

ii) "Para algum elemento x de A, $p(x)$ é verdadeira (V)"

- ou de maneira mais simplificada:

i) "Existe $x \in A$ tal que $p(x)$"

ii) "Para algum $x \in A$, $p(x)$"

Quantificador Existencial

Definição

- O quantificador existencial é o símbolo ∃ que permite expressar esta ideia de maneira simbólica, em alguma das seguintes formas:

$$i)\quad (\exists\, x \in A) \quad (p(x))$$

$$ii)\quad \exists\, x \in A, \quad p(x)$$

$$iii)\quad \exists\, x \in A\colon \quad p(x)$$

- Muitas vezes, para simplificar a notação, omite-se a indicação do domínio A da variável x, resultando na seguinte notação simplificada:

$$iv)\quad (\exists\, x) \quad (p(x))$$

$$v)\quad \exists\, x, \quad p(x)$$

$$vi)\quad \exists\, x\colon \quad p(x)$$

- Vale observar a equivalência:

$$(\exists\, x \in A) \quad (p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad V_p \neq \emptyset$$

Quantificador Existencial

Definição

- Outra observação muito importante é que:
- Enquanto $p(x)$ é apenas uma sentença aberta, que carece de valor lógico (V) ou (F); a expressão quantificada $(\exists\, x \in A)\, \big(p(x)\big)$ torna-se uma proposição e portanto possui valor lógico, que é verdade (V) se $V_p \neq \emptyset$ e falsidade (F) se $V_p = \emptyset$.
- Dada uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A, o símbolo $\exists$, referido à variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme $p(x)$ expressa ou não uma condição possível no conjunto A.
- A esta operação lógica dá-se o nome de quantificação existencial e ao seu respectivo símbolo $\exists$ o de quantificador existencial.

Variável Livre e Variável Aparente

Definição

- ✘ Dada uma expressão, chama-se de variável aparente (ou muda) a qualquer variável que é afetada por um quantificador.
- ✘ Caso contrário, a variável é chamada de variável livre.
- ✘ Considere as seguintes sentenças abertas:

$$i)\quad 3x - 1 = 14 \quad \text{(Equação)}$$

$$ii)\quad x + 1 > x \quad \text{(Inequação)}$$

- ✗ A variável x é uma variável livre.

- ✘ Considere agora as seguintes sentenças quantificadas:

$$iii)\quad (\exists\, x)(3x - 1 = 14)$$

$$iv)\quad (\forall\, x)(x + 1 > x)$$

- ✗ Neste caso, a variável x é uma variável aparente.

Quantificador de existência e Unicidade

Definição

- Considere a sentença aberta $x^3 = 27$ em $\mathbb{R}$, e as seguintes proposições:

  $i)$ $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x^3 = 27)$

  $ii)$ $(x^3 = 27) \wedge (y^3 = 27) \Rightarrow (x = y)$

- A primeira proposição, diz que existe pelo menos um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 = 27$. Esta é uma afirmação de existência.
- A segunda proposição, diz que não pode existir mais de um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 = 27$. Esta é uma afirmação de unicidade.
- A conjunção das duas proposições, diz que existe um $x \in \mathbb{R}$ e um só tal que $x^3 = 27$.

- Esta afirmação é representada simbolicamente como:

$$(\exists\,!\; x \in \mathbb{R}) \quad (x^3 = 27)$$

- Onde o símbolo $\exists\,!$ é chamado de quantificador existencial de unicidade e se lê: "Existe um e um só".

Negação de Proposições com Quantificador

Definição

- Tanto o quantificador universal quanto o quantificador existencial podem ser precedidos de um símbolo de negação $\neg$.
- Como mencionado anteriormente, sentenças abertas quantificadas tornam-se proposições, com isso, a negação de um quantificador poderá afetar o valor lógico da proposição.
- Considere o seguintes exemplos:

- Dado o conjunto-universo H que compreende a todos os seres humanos podemos definir as seguintes expressões quantificadas:

  i) $(\forall x \in H)\ (x \text{ fala francês})$

  ii) $(\exists x \in H)\ (x \text{ foi à lua})$

- Podemos negar os quantificadores nas expressões acima de maneira a obter as seguintes expressões:

  iii) $\neg(\forall x \in H)\ (x \text{ fala francês})$

  iv) $\neg(\exists x \in H)\ (x \text{ foi à lua})$

Negação de Proposições com Quantificador

Definição

✘ A expressões anteriores são proposições que podem ser expressadas em linguagem comum da seguinte maneira:

i) $(\forall x \in H)\ (x \text{ fala francês})$

"Todas as pessoas falam francês"

"Todos falam francês"

ii) $(\exists x \in H)\ (x \text{ foi à lua})$

"Existem pessoas que foram à lua"

"Alguém foi à lua"

✘ Enquanto as expressões com o quantificador negado podem ser expressadas em linguagem comum da seguinte maneira:

iii) $\neg(\forall x \in H)\ (x \text{ fala francês})$

"Nem todas as pessoas falam francês"

"Existem pessoas que não falam francês"

iv) $\neg(\exists x \in H)\ (x \text{ foi à lua})$

"Não existem pessoas que foram à lua"

"Ninguém foi à lua"

"Todas as pessoas não foram à lua"

Negação de Proposições com Quantificador

Equivalências

- Nos exemplos anteriores, podemos observar as seguintes equivalências:

iii) $\neg(\forall x \in H)\,(x \text{ fala francês}) \Leftrightarrow (\exists x \in H)\,(\neg x \text{ fala francês})$

iv) $\neg(\exists x \in H)\,(x \text{ foi à lua}) \Leftrightarrow (\forall x \in H)\,(\neg x \text{ foi à lua})$

Negação de Proposições com Quantificador

Equivalências

- De modo geral, a negação da proposição $(\forall x \in A)\ (p(x))$ é equivalente a afirmação de que $(\exists\ x \in A)\ (\neg p(x))$
- De maneira análoga, a negação da proposição $(\exists x \in A)\ (p(x))$ é equivalente a afirmação de que $(\forall\ x \in A)\ (\neg p(x))$
- Temos assim as seguintes equivalências:

$$\neg[(\forall x \in A)\ (p(x))] \Leftrightarrow (\exists x \in A)\ (\neg p(x))$$

$$\neg[(\exists x \in A)\ (p(x))] \Leftrightarrow (\forall x \in A)\ (\neg p(x))$$

- Estas duas importantes equivalências são conhecidas como as segundas regras de negação de De Morgan.
  - A negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial seguido de uma negação.
  - A negação transforma o quantificador existencial em quantificador universal seguido de uma negação.

Negação de Proposições com Quantificador

Exemplos

- 1) A negação da proposição: "Todo aluno da turma A é bem comportado"
  - é a proposição: "Existe pelo menos um aluno da turma A que não é bem comportado"
  - ou "Nem todo aluno da turma A é bem comportado"

- 2) A negação da proposição: "Existe pelo menos um aluno da turma A que está doente"
  - é a proposição: "Qualquer que seja o um aluno da turma A, ele não está doente"
  - ou "Nenhum aluno da turma A está doente"

Negação de Proposições com Quantificador

Exemplos

- ✗ 3) A negação da proposição: "Existe um planeta que é habitável"
  - é a proposição: "Todos os planetas não são habitáveis" ou
  - "Nenhum planeta é habitável"

Considerando P o conjunto de todos os planetas, temos simbolicamente:

$$\neg(\exists x \in P)\ (x \text{ é habitável}) \iff (\forall x \in P)\ (x \text{ não é habitável})$$

- ✗ 4) A negação da proposição: "Para todo número natural n tem-se $\mathrm{n} + 2 > 8$"
  - é a proposição: "Existe pelo menos um número natural n tal que $\mathrm{n} + 2 \ngtr 8$"

Considerando $\mathbb{N}$ o conjunto de números naturais, temos simbolicamente:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N})\ (\mathrm{n} + 2 > 8) \iff (\exists n \in \mathbb{N})\ (\mathrm{n} + 2 \leq 8)$$

Negação de Proposições com Quantificador

Exemplos

- 5) As seguintes proposições são equivalentes:

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R})\ (x^2 < 0) \iff (\forall x \in \mathbb{R})\ (x^2 \geq 0)$$

- 6) As seguintes proposições são equivalentes:

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R})\ (3x - 5 = 0) \iff (\exists x \in \mathbb{R})\ (3x - 5 \neq 0)$$

- 7) As seguintes proposições são equivalentes:

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R})\ (|x| \geq 0) \iff (\exists x \in \mathbb{R})\ (|x| < 0)$$

- 8) As seguintes proposições são equivalentes:

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R})\ (sen\, x = 0) \iff (\forall x \in \mathbb{R})\ (sen\, x \neq 0)$$

Provas por Contra-exemplo

Definição

- Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall x \in A)\big(p(x)\big)$ é falsa (F), basta provar que a sua negação $(\exists x \in A)\big(\neg p(x)\big)$ é verdadeira (V).
- Isso significa, provar que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$ tal que $p(x_0)$ é falsa.
- Diz-se que, o elemento x_0 é um contra-exemplo para a proposição $(\forall x \in A)\big(p(x)\big)$.

Provas por Contra-exemplo

Exemplos

- 1) Prove que a seguinte proposição é falsa:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(2^n > n^2)$$

  - Mostre que existe pelo menos um (contra-exemplo) n_0 tal que $(2^n \ngtr n^2)$

De fato existe mais de um contra-exemplo:

Para $n_0 = 2$ temos que: $2^2 = 2^2$

Para $n_1 = 3$ temos que: $2^3 < 3^2$

Para $n_2 = 4$ temos que: $2^4 = 4^2$

- 2) Prove que a seguinte proposição é falsa:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|x| \neq 0)$$

  - Mostre que existe pelo menos um x_0 tal que: $(|x_0| = 0)$
  - Neste caso $x_0 = 0$ é um contra-exemplo, já que: $(|0| = 0)$

- 3) Prove que a seguinte proposição é falsa:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > x)$$

  - Mostre que existe pelo menos um x_0 tal que: $(x^2 \ngtr x)$
  - Neste caso $x_0 = \frac{1}{3}$ é um contra-exemplo, já que: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)$

Provas por Contra-exemplo

Exemplos

- 4) Prove que a seguinte proposição é falsa: $(\forall x \in \mathbb{R})((x+2)^2 = x^2 + 4)$
  - Mostre que existe pelo menos um x_0 tal que: $((x+2)^2 \neq x^2 + 4)$
  - Neste caso $x_0 = 1$ é um contra-exemplo, já que: $((1+2)^2 \neq 1^2 + 4)$

$$9 \neq 5$$

- 5) Prove que a seguinte proposição é falsa: $(\forall x \in \mathbb{Z}^+)(x^2 + x + 41)$ é primo.
  - Mostre que existe pelo menos um x_0 tal que: $(x^2 + x + 41)$ não é primo.
  - Neste caso $x_0 = 40$ é um contra-exemplo, já que:

$$(40^2 + 40 + 41) =$$
$$40(40+1) + 41 =$$
$$40(41) + 41 =$$
$$41^2$$

  - No es primo.

Referências

- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 16. Quantificadores. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.