CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
LABORATÓRIO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

Limites Assintóticos
Propriedades

Disciplina: Estrutura de dados II

Prof. Fermín Alfredo Tang Montané

Curso: Ciência da Computação
Universidade Estadual do Norte Fluminense

Limite Assintótico Superior

Propriedades do O(.)

- **Teorema I:**
- Sejam duas funções com comportamento assintótico conhecido:

$$f_1(n) = O(g_1(n))$$

$$f_2(n) = O(g_2(n))$$

- então temos: $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(\ g_1(n), g_2(n)\ ))$

- **Interpretação:**
- As funções podem representar tempo computacional ou consumo de memória de 2 blocos de código consecutivos.
- A soma das funções representaria então, o tempo total ou consumo total de ambos blocos.
- O resultado afirma que a complexidade de pior caso, do código inteiro, equivale a complexidade de pior caso do bloco de maior complexidade.

Limite Assintótico Superior
Propriedades de O(.)

- **Exemplo Teor. 1:**
- O resultado do teorema pode ser generalizado para mais de duas funções (Blocos de código).
- A complexidade de pior caso, do código inteiro, equivale a complexidade de pior caso do bloco de maior complexidade.

Tempo de Execução

$f_1(n) = 2n \ln n + 50$	Bloco 1	$O(n \ln n)$
$f_2(n) = 3n^3 + 25$	Bloco 2	$O(n^3)$
$f_3(n) = 10n + 50$	Bloco 3	$O(n)$
$f_4(n) = 2n + 10$	Bloco 4	$O(n)$

$O(n^3)$

Limite Superior

Limite Assintótico Superior
Propriedades de O(.)

- **Prova Teor.1:** Aplica-se a definição do O(.) as duas funções.
- Temos assim, dois inteiros n_1 e n_2 e duas constantes c_1 e c_2 tais que:

$$f_1(n) \le c_1 g_1(n) \ \text{ para } n \ge n_1,$$

$$f_2(n) \le c_2 g_2(n) \ \text{ para } n \ge n_2$$

- Considera-se a soma de f_1 e f_2, valida apenas para $n_0 = \max(n_1,n_2)$:

$$f_1(n) + f_2(n) \le c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) \ \text{ para } n \ge n_0,$$

- Fazendo $c_0 = \max(c_1,c_2)$, temos:

$$f_1(n) + f_2(n) \le c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) \le c_0(g_1(n) + g_2(n)) \ \text{ para } n \ge n_0,$$

$$f_1(n) + f_2(n) \le c_0(g_1(n) + g_2(n)) \ \text{ para } n \ge n_0,$$

Limite Assintótico Superior
Propriedades de O(.)

- **Prova Teor. I (Continuação):**

$$f_1(n) + f_2(n) \leq 2c_0(g_1(n) + g_2(n))/2 \quad \text{para } n \geq n_0,$$

- Considerando o fato de que:

$$\boxed{(g_1(n) + g_2(n))/2 \leq \max(g_1(n), g_2(n)) \leq g_1(n) + g_2(n)}$$

- Temos que:

$$f_1(n) + f_2(n) \leq 2c_0 \max(g_1(n), g_2(n)) \quad \text{para } n \geq n_0,$$

- Finalizamos a prova fazendo $c=2c_0$, onde $c_0=2\max(c_1,c_2)$

$$f_1(n) + f_2(n) \leq c \max(g_1(n), g_2(n)) \quad \text{para } n \geq n_0,$$

$$\boxed{f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))}$$

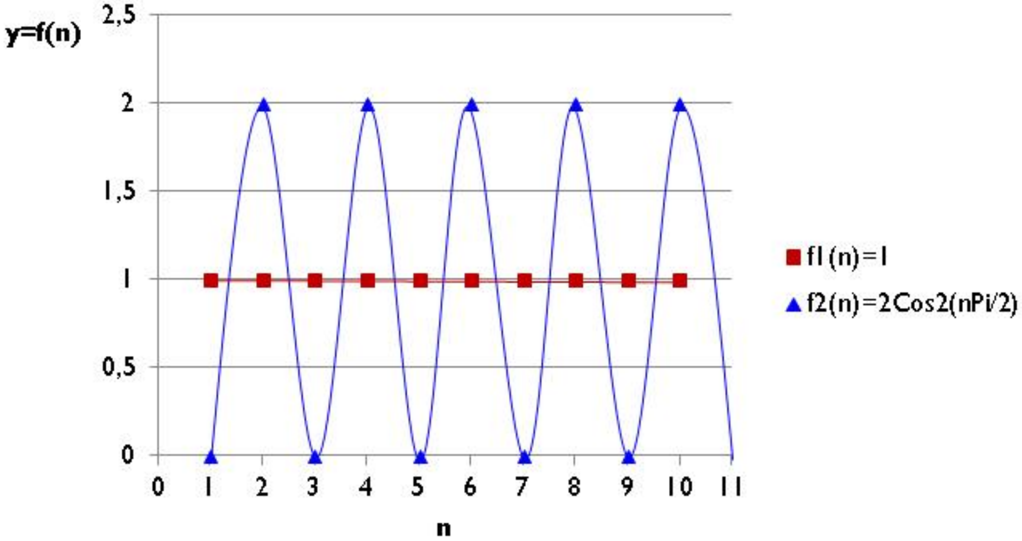
Limite Assintótico Superior
Propriedades de O(.)

- **Exemplo Teor. 1 (Máximo de funções):**
- Considere: $g_1(n) = 1 \qquad g_2(n) = 2\cos^2(n\pi / 2)$

O exemplo mostra que o máximo de duas funções não corresponde necessariamente a uma delas.

$$h(n) = \max(g_1(n), g_2(n)) = \max(1, 2\cos^2(\mathrm{n}\pi/2))$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{n é par} \\ 2, & \text{n é ímpar} \end{cases}$$



Limite Assintótico Superior

Propriedades de O(.)

- **Teorema 2:**
- Sejam duas funções não negativas $f_1(n)$ e $f_2(n)$ para n>0,

Se for verificado que: $$\lim_{n\to\infty}\frac{f_2(n)}{f_1(n)} = L, \text{ onde } L \geq 0$$

então: $$f_1(n) + f_2(n) = O(f_1(n))$$

- **Prova Teor. 2:** Aplica-se a definição de limite de funções.

O limite existe se, para um valor ε>0 suficientemente pequeno, é possível achar um n_0, tal que:

$$\left|\frac{f_2(n)}{f_1(n)} - L\right| \leq \varepsilon, \text{ para } n>n_0$$

Limite Assintótico Superior
Propriedades de O(.)

- **Prova Teor. 2 (cont.):**

Escolhendo um valor $\varepsilon = \varepsilon_0$, temos:

$$\frac{f_2(n)}{f_1(n)} - L \leq \varepsilon_0, \text{ para } n > n_0$$

Re-escrevendo: $f_2(n) \leq (\varepsilon_0 + L) f_1(n)$

Por outro lado, temos: $f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$

Substituindo $f_2(n)$: $\leq c_1 f_1(n) + c_2 (\varepsilon_0 + L) f_1(n)$

Fatorando: $c_1 f_1(n) + c_2 (\varepsilon_0 + L) f_1(n) = \left(c_1 + c_2(\varepsilon_0 + L)\right) f_1(n)$

Finalizamos a prova fazendo $c = c_1 + c_2(\varepsilon_0 + L)$: $f_1(n) + f_2(n) \leq c f_1(n)$

$$\boxed{f_1(n) + f_2(n) = O(f_1(n))}$$

Limite Assintótico Superior

Propriedades de O(.)

- **Interpretação:**
- O resultado mostra que é possível calcular o limite assintótico de $f_1 + f_2$ sem não conhecer os limites assintóticos de f_1 e f_2.

- **Exemplo Teor. 2:**

$$f_2(n) = 3n^2 \quad \text{Bloco 1}$$

$$f_1(n) = 6n^3 \quad \text{Bloco 2}$$

$$O(6n^3)$$

Como: $$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n^3} = 0$$

Limite Assintótico Superior

Propriedades de O(.)

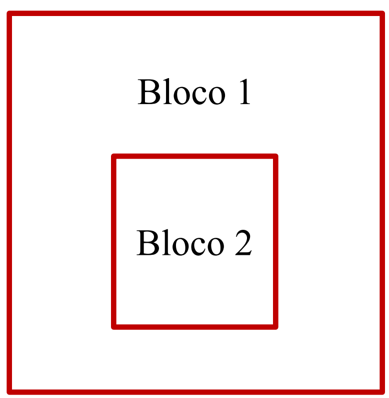
- **Teorema 3:**
- Sejam duas funções com comportamento assintótico conhecido:

$$f_1(n) = O(g_1(n))$$

$$f_2(n) = O(g_2(n))$$

- então temos: $f_1(n) \times f_2(n) = O(g_1(n) \times g_2(n))$

- **Obs:** Lembre que o produto de funções acontece em blocos aninhados ou recursivos.



Limite Assintótico Superior

Propriedades de O(.)

- **Exemplo Teor. 3:**
- Considere: $f_1(n) = n^3 + n^2 + n + 1$ $\quad f_2(n) = n^2 + n + 1$

Sabe-se que: $f_1(n) = O(n^3)$ $\quad f_2(n) = O(n^2)$

Pelo Teor. 3: $\boxed{f_1(n) \times f_2(n) = O(n^3 \times n^2) = O(n^5)}$

Limite Assintótico Superior

Propriedades de O(.)

- **Prova Teor. 3:** Aplica-se a definição de O(.).
- Temos assim, dois inteiros n_1 e n_2 e duas constantes c_1 e c_2 tais que:

$$f_1(n) \leq c_1 g_1(n) \text{ para } n \geq n_1,$$

$$f_2(n) \leq c_2 g_2(n) \text{ para } n \geq n_2$$

- Considere o produto de f_1 e f_2, que é válido para $n_0 = \max(n_1, n_2)$:

$$f_1(n) \times f_2(n) \leq c_1 g_1(n) \times c_2 g_2(n) \text{ para } n \geq n_0,$$

- Finaliza-se a prova fazendo, $c = c_1 c_2$:

$$f_1(n) \times f_2(n) \leq c \; (g_1(n) \times g_2(n)) \text{ para } n \geq n_0,$$

$$\boxed{f_1(n) \times f_2(n) = O(g_1(n) \times g_2(n))}$$

Notação Assintótica
Propriedades de O(.)

- **Teorema 4:**
- Seja uma função com comportamento assintótico conhecido:

$$f_1(n) = O(g_1(n))$$

e outra função $f_2(n) \geq 0$, para todo $n \geq 0$, sem conhecimento de O(.)

- prova-se que: $$f_1(n) \times f_2(n) = O(g_1(n) \times f_2(n))$$

- **Prova Teor. 4:** Aplica-se a definição do O(.).
- Temos assim, uma constante c e um inteiro n_0, tal que:

$$f_1(n) \leq c g_1(n) \;\; \text{para } n \geq n_0,$$

- Multiplicando a ambos lados da desigualdade por $f_2(n)$, temos:

$$f_1(n) \times f_2(n) \leq c g_1(n) \times f_2(n) \;\; \text{para } n \geq n_1,$$

$$\boxed{f_1(n) \times f_2(n) = O(g_1(n) \times f_2(n))}$$

Notação Assintótica

Propriedades de O(.)

- **Teorema 5 (Propriedade Transitiva):**
- Sejam duas funções com comportamento assintótico conhecido:

$$f(n) = O(g(n))$$

$$g(n) = O(h(n))$$

- prova-se que: $f(n) = O(h(n))$

Notação Assintótica
Propriedades de O(.)

- **Prova Teor. 5:** Aplica-se a definição do O(.).
- Temos assim, duas constantes c_1 e c_2 e dois inteiros n_1 e n_2, tais que:

$$f(n) \le c_1 g(n) \text{ para } n \ge n_1,$$

$$g(n) \le c_2 h(n) \text{ para } n \ge n_2$$

- Substituindo g(n), a relação resultante é válida para $n_0 = \max(n_1, n_2)$:

$$f(n) \le c_1 c_2 h(n) \text{ para } n \ge n_0$$

- Finaliza-se a prova fazendo, $c = c_1 c_2$, assim:

$$f(n) \le c\ h(n) \text{ para } n \ge n_0$$

$$\boxed{f(n) = O(h(n))}$$

Limite Assintótico Superior
Propriedades de O(.)

- **Exemplo Teor. 2 e 5:**
- Considere: $f_1(n) = 5n^3$ $\quad f_2(n) = 3n^2$

onde: $f_1(n)\ \acute{e}\ O(n^3)$ $\quad f_2(n)\ \acute{e}\ O(n^2)$

Como verifica-se que:

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{f_2(n)}{f_1(n)} = \frac{3n^2}{5n^3} = \frac{3}{5n} = 0$$

Pelo Teor. 2, do limite:

$$f_1(n) + f_2(n) = O(f_1(n)) = O(5n^3)$$

Pela prop. transitiva, Teor. 5:

$$\boxed{f_1(n) + f_2(n) = O(5n^3) = O(n^3)}$$

Notação Assintótica
Convenções

- As seguintes convenções são adotadas quanto a notação O(.):

1. Os termos menos significantes (menor ordem) são desconsiderados.

$O(n^2 + n\log n + n)$ é escrito como O(n)

2. Os coeficientes constantes são desconsiderados.

$O(3n^2)$ é escrito como $\mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$

No caso de funções constantes considera-se O(1).

$O(1024)$ é escrito como O(1)

Referências

- Bruno R. **Preiss**. Estrutura de Dados e Algoritmos. Capítulo 3. 3ª Edição. 2001. Editora Elsevier