

Cálculo III – Primeira Avaliação – 18/04/2024
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: _____

Matrícula: _____ Curso: _____

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:

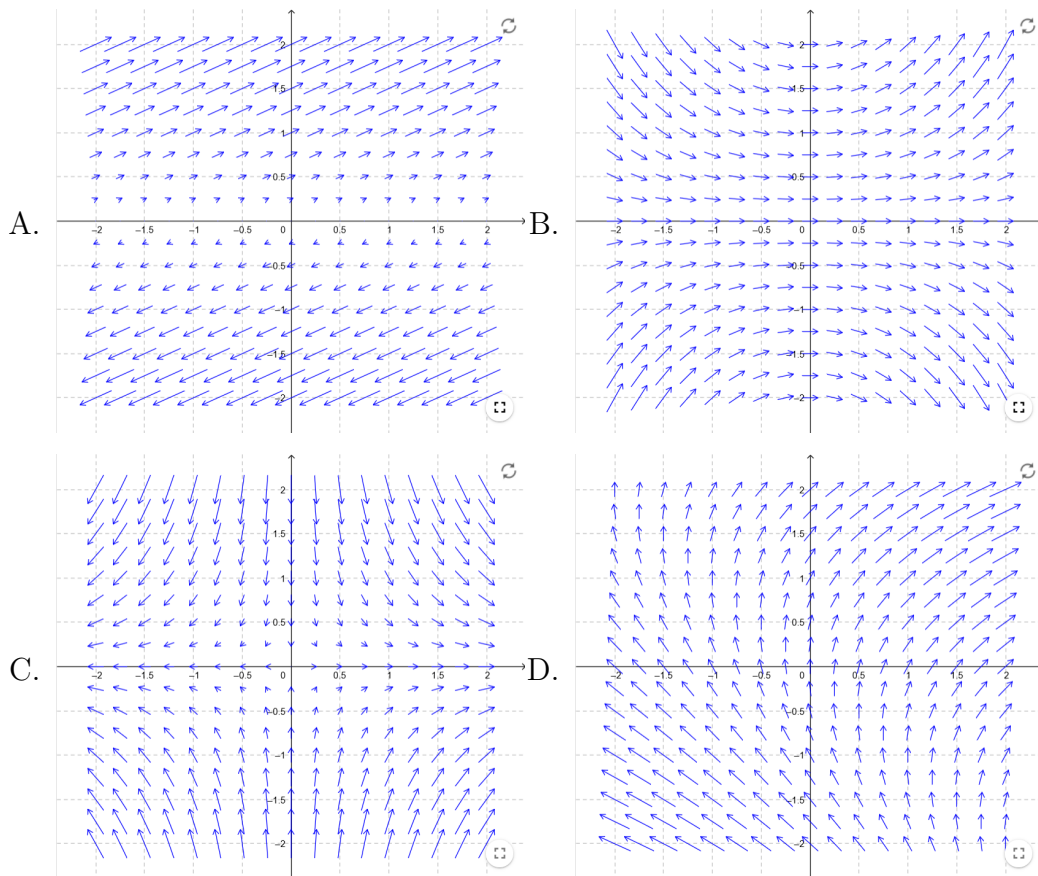
■ “ x vezes -6 ” é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.

■ $x - \frac{1}{y+2}$ é $\frac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\frac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.

- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\sin 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

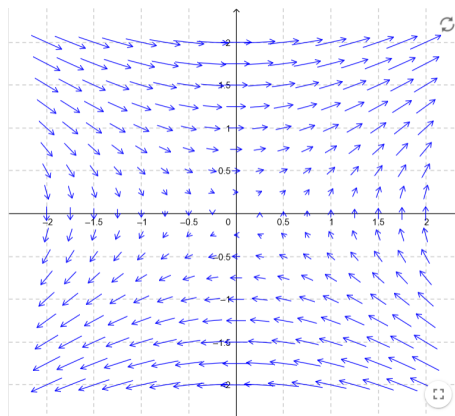
1. (1 ponto) Assinale a figura que corresponde ao campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (x + y, 2)$. Justifique a sua resposta.



Solução:

Alternativa correta: D

2. (1 ponto) Assinale a função que corresponde à figura abaixo. Justifique.



A. $\vec{F}(x, y) = (x^2, y)$

B. $\vec{F}(x, y) = (e^x, y)$

C. $\vec{F}(x, y) = (-x, y)$

D. $\vec{F}(x, y) = (2y, x)$

Solução:

Alternativa correta: D

3. (1 ponto) Assinale a única alternativa correta:

A. Se $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ em uma dada curva fechada C , então $\vec{F}(x, y)$ é um campo conservativo.

B. Se $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ é um campo conservativo, então $P_x = Q_y$.

C. Se $\vec{F}(x, y)$ é um campo conservativo e C é uma curva fechada, então

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

D. Se $\vec{F}(x, y) = \nabla f$, então $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(y) - f(x)$.

Solução:

Alternativa correta: C

4. (2 pontos) Seja $f(x, y) = x^2y$ e seja C o segmento de reta que vai de $A = (0, 2)$ a $B = (2, -1)$. Calcule

$$\int_C f \, ds.$$

Solução:

Temos

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \cdot t = (2t, 2 - 3t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \vec{r}'(t) &= (2, -3), \quad \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_C f \, ds &= \int_0^1 [x(t)]^2 y(t) \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \int_0^1 (2t)^2 (2 - 3t) \sqrt{13} \, dt \\ &= 4\sqrt{13} \int_0^1 2t^2 - 3t^3 \, dt = 4\sqrt{13} \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{3t^4}{4} \right]_{t=0}^1 = -\frac{\sqrt{13}}{3}. \end{aligned}$$

5. Seja $\vec{F}(x, y) = (2x + y, x + 4y)$ e considere C a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (t^2, t^3), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$:

a) (2 pontos) Diretamente.

Solução:

Temos

$$\vec{r}'(t) = (2t, 3t^2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (2x(t) + y(t), x(t) + 4y(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 (2t^2 + t^3, t^2 + 4t^3) \cdot (2t, 3t^2) dt \\ &= \int_0^1 (4t^3 + 2t^4) + (3t^4 + 12t^5) dt = t^4 + t^5 + 2t^6 \Big|_{t=0}^1 = 4. \end{aligned}$$

b) (2 pontos) Usando o Teorema Fundamental das Integrais de Linha.

Solução:

Denote $P = 2x + y$ e $Q = x + 4y$, de forma que $\vec{F} = (P, Q)$. Vamos verificar que \vec{F} é conservativo pelo teste das derivadas cruzadas:

$$P_y = 1 = Q_x. \quad (\text{OK})$$

Portanto, há uma função potencial $f(x, y)$ tal que $\vec{F} = \nabla f = (f_x, f_y)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int f_x dx = \int P dx = \int 2x + y dx = x^2 + yx + g(y), \\ f_y &= \frac{\partial}{\partial y} [x^2 + yx + g(y)] = x + g'(y) \\ &= Q = x + 4y, \\ \therefore g'(y) &= 4y \quad \therefore g(y) = 2y^2 \\ \therefore f(x, y) &= x^2 + yx + 2y^2. \end{aligned}$$

Logo, pelo TFIL,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) \\ &= f(1^2, 1^3) - f(0^2, 0^3) = f(1, 1) - f(0, 0) \\ &= (1^2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2) - (0^2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2) = 4. \end{aligned}$$