Cálculo III – 2a Chamada da P3 – 06/07/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Matrícula: ____________________ **Curso:** ____________________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. Determine a área da superfície S parametrizada por

$$\vec{r}(u,v) = (u+v,\ 2-3u,\ 1+u-v), \qquad 0 \le u \le 2, \qquad -1 \le v \le 1.$$

Solução:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (3,\ 2,\ 3),$$

$$A = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, du\, dv = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} \sqrt{22}\, du\, dv = 4\sqrt{22}.$$

2. Seja S a superfície definida pela equação

$$x = y + 2z^2, \qquad 0 \le y \le 1, \qquad 0 \le z \le 1.$$

Calcule a integral de superfície de $f(x,y,z) = z$ em S.

Solução:

$$\vec{r}(y,z) = (y+2z^2,\ y,\ z), \quad \vec{r}_y \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 4z & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,\ -1,\ -4z),$$

$$\iint_S f\, dS = \int_0^1\int_0^1 z\,\|\vec{r}_y \times \vec{r}_z\|\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^1 z\sqrt{2+16z^2}\, dy\, dz = \frac{13\sqrt{2}}{12}.$$

3. Considere C a circunferência definida pelas equações

$$x^2 + y^2 = 16, \qquad z = 5$$

e seja

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz,\ 2xz,\ e^{xy}).$$

Calcule $\displaystyle\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é percorrido no sentido trigonométrico.

Solução:

C é a fronteira do círculo D

$$x^2 + y^2 \leq 16, \qquad z = 5,$$

que é parametrizado por

$$\vec{s}(r,\, \theta) = (r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta,\, 5), \quad 0 \leq r \leq 4, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Pelo Teorema de Kelvin–Stokes,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot (\vec{s}_r \times \vec{s}_\theta)\, dS.$$

Temos

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{F} &= (xe^{xy} - 2x,\, y - ye^{xy},\, z), \\ \vec{s}_r \times \vec{s}_\theta &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,\, 0,\, r). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi}\int_0^4 (xe^{xy} - 2x,\, y - ye^{xy},\, z) \cdot (0,\, 0,\, r)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^4 zr\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4 5r\, dr\, d\theta = 80\pi. \end{aligned}$$

4. Considere P o paralelepípedo delimitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$. Seja

$$\vec{F} = (xye^z,\ xy^2z^3,\ -ye^z).$$

Calcule $\displaystyle\oiint_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, onde ∂P é tomado com orientação positiva.

Solução:

Pelo teorema de Ostrogradsky–Gauss:

$$\oiint_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_P \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \cancel{ye^z} + 2xyz^3 - \cancel{ye^z}\, dx\, dy\, dz = \frac{9}{2}.$$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$