TRANSFORMADA DE LAPLACE

ESQUEMATICAMENTE:

$$\int_0^{+\infty} e^{-s.x}\left[e^{x}\right]dx = \frac{1}{s-1} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} e^{x} & & \dfrac{1}{s-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{f(x)} & & \boxed{F(s)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{VARIÁVEL: } x & & s \end{array}$$

$$\boxed{f(x) = e^{x}} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \boxed{F(s) = \frac{1}{s-1}} \qquad (2)$$

ESSA TRANSFORMAÇÃO DE VARIÁVEIS

É CHAMADA: TRANSFORMADA DE LAPLACE.

NOTAÇÃO:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s.x}\left[f(x)\right]dx = F(s)} \qquad (3)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{x}\} = \int_0^{+\infty} e^{-s.x}\left[e^{x}\right]dx = \frac{1}{s-1}} \qquad (4)$$

→ EX. ACIMA

OBS: USA-SE $f(x)$ OU $f(t)$

NOTE

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-s.x}\left[f(x)\right] dx = F(s) \qquad (5)$$

FUNÇÕES POLINOMIAIS,

" TRIGONOMÉTRICAS,

" EXPONENCIAIS, ...

GERA: COLEÇÃO DE INTEGRAIS ⇒

⇒ FORMA UMA TABELA.

⇒ TABELAS

QUANTO MAIS FUNÇÕES $f(x)$ FOREM MULTIPLICADAS POR $e^{-s.x}$ E INTEGRADAS, MAIORES AS CHANCES DE ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO PARA A EQ. DIFERENCIAL.

Quadro 6.1 Transformadas de Laplace elementares

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	Notas
1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Ex. 4
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$	Seção 6.1; Ex. 5
sen at	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Ex. 6
t^n, n = inteiro positivo	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 10
t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 10
cos at	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 3
senh at	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Seção 6.1; Prob. 4
cosh at	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Seção 6.1; Prob. 4
e^{at} sen bt	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 5
e^{at} cos bt	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 5
$t^n e^{at}$, n = inteiro positivo	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 6
$u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Seção 6.3
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Seção 6.3
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Seção 6.3
$f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Seção 6.3; Prob. 4
$\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Seção 6.5
$\delta(t-c)$	e^{-cs}	Seção 6.4
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Seção 6.2
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Seção 6.2; Prob. 14

ANALISAR A CONVERGÊNCIA DA INTEGRAL:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t).dt}\ , \text{ ONDE } \boxed{f(t) = e^{c.t}}\ .$$

CONSIDERAR: a) $c > 0$;

b) $c < 0$;

c) $c = 0$.

ENTÃO:

$$\int_0^{+\infty} f(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{c.t}.dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{c.t}.dt \text{ ; ASSIM:}$$

$$\int_0^{\infty} e^{c.t}.dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{c.A} e^{u} \frac{du}{c} \text{ ;}$$

$$u = c.t$$

$$\frac{du}{dt} = c$$

$$\frac{du}{c} = dt$$

$t = 0$

$u = 0$

$t = A$

$u = c.A$

$$\int_0^{\infty} e^{c.t} dt = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{c} e^{u}\right]_0^{c.A} \text{ ;}$$

$$\int_0^{\infty} e^{c.t} dt = \frac{1}{c} \left\{ \lim_{A\to\infty} e^{c.A} - \lim_{A\to\infty} e^{0} \right\} \text{ ;}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \frac{1}{c} \left\{ \lim_{A\to\infty} e^{c.A} - 1 \right\}}$$

a) $\boxed{c > 0}$

$$\int_0^{\infty} e^{c.t}\,dt = \frac{1}{c}\left\{\underbrace{e^{c(\infty)}}_{\infty} - 1\right\} \to +\infty \Rightarrow \text{DIVERGE}$$

b) $\boxed{c < 0}$

$$\int_0^{\infty} e^{c.t}\,dt = \frac{1}{c}\left\{e^{c(\infty)} - 1\right\} = \frac{1}{c}\left\{\underbrace{\frac{1}{e^{c(\infty)}}}_{0} - 1\right\} = -\frac{1}{c}$$

CONVERGE

d) $\boxed{c = 0}$

$$\int_0^{\infty} e^{c.t}\,dt = \frac{1}{c}\left\{\lim_{A\to\infty} \cancel{e^{0}}^{\,1} - 1\right\} = \frac{1-1}{c} = \frac{0}{0}$$

FORMA
INDETERMINADA

DE FORMA MAIS GERAL:

DEFINIÇÃO - TRANSFORMADAS INTEGRAIS

UMA TRANSFORMADA INTEGRAL É UMA RELAÇÃO DA FORMA:

$$\boxed{F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} k(s,t) \cdot f(t) \cdot dt} \quad (6)$$

$\boxed{k(s,t)}$ ⇒ É UMA FUNÇÃO DADA, CHAMADA DE:

NÚCLEO DA TRANSFORMADA

TRANSFORMADA DE LAPLACE

- $\boxed{f(t)}$ ⇒ FUNÇÃO DEFINIDA PARA $t \geq 0$;

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-s.t} [f(t)] \cdot dt = F(s)} \quad (7)$$

- $\boxed{k(s,t) = e^{-s.t}}$ ⇒ NÚLEO DA TRASFORMADA DE LAPLACE (8)

NOTE QUE (7) É UMA INTEGRAL IMPRÓPIA. ENTÃO:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t).dt = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t).dt} \quad (9)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE [T.L.] PARA ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES:

a) $f(t) = 1 \quad ; \quad t \geq 0$

b) $f(t) = e^{a.t} \quad ; \quad t \geq 0 \quad (a > 0)$

c) $y = t \quad ; \quad t \geq 0$

d) $f(t) = \text{sen}\,(a.t) \quad ; \quad t \geq 0.$