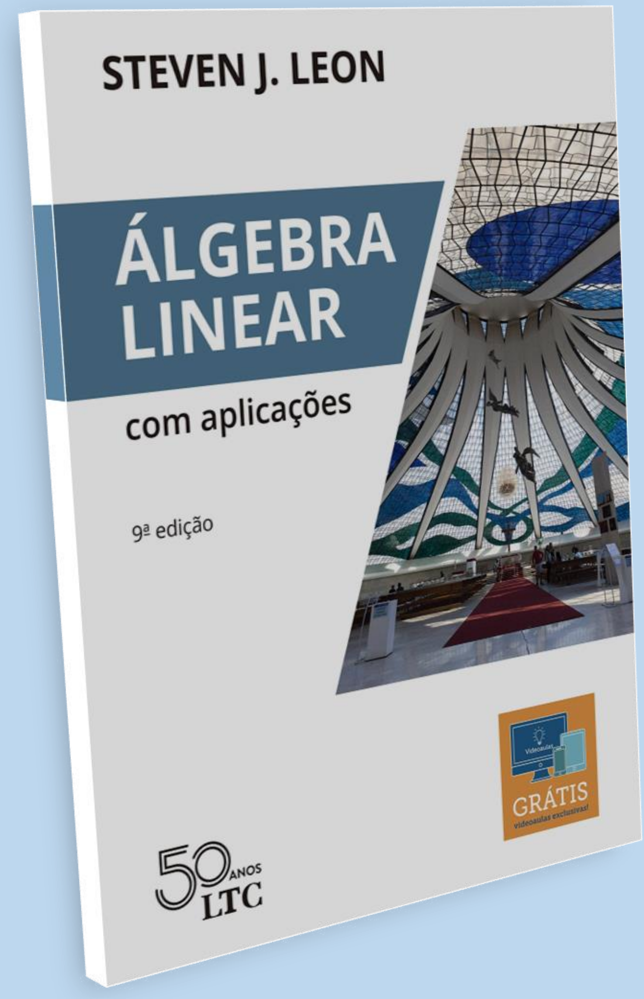
Álgebra Linear

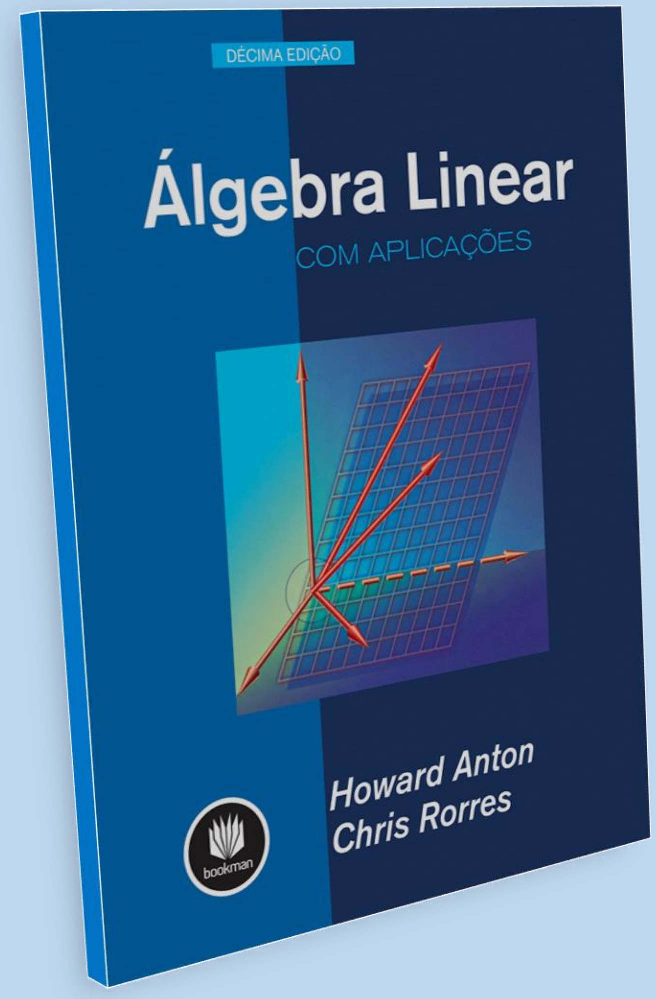
Sistemas de Equações Lineares

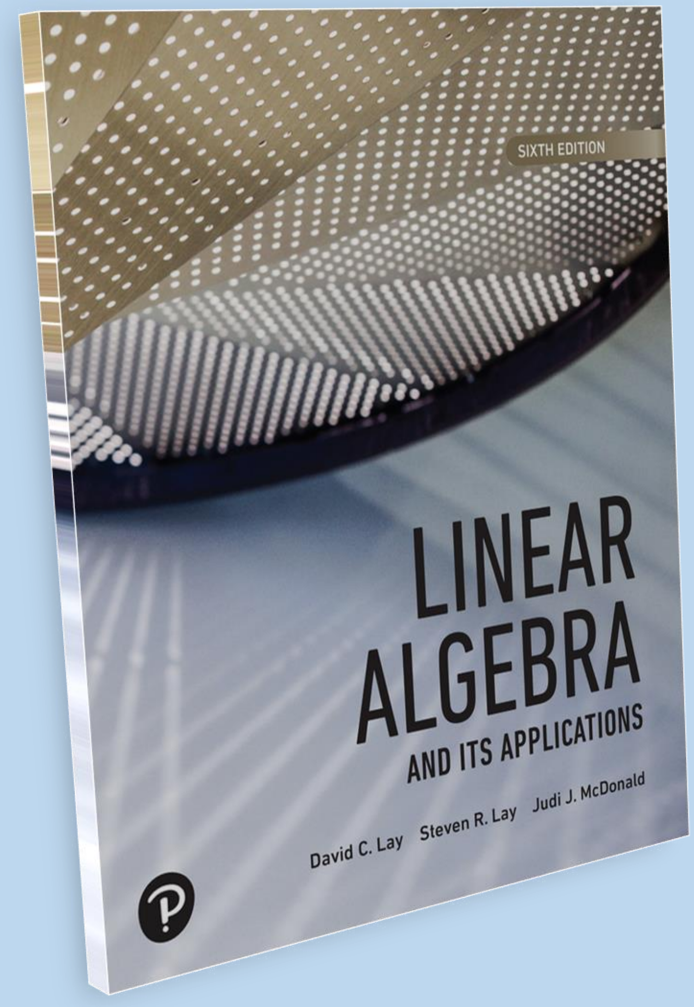
Profa. Elba O. Bravo Asenjo

eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







Sistema de Equações Lineares

Seja o sistema de ***m*** equações lineares e ***n*** incógnitas,

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

O sistema linear poderá ter:

- Uma única solução (sistema possível ou consistente e determinado),
- Infinitas soluções (sistema possível e indeterminado),
- Nenhuma solução (sistema impossível)

Matriz Aumentada do Sistema

Seja o Sistema Linear de equações

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matriz Aumentada do Sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Operações Elementares com Linhas

Exemplo 1. A matriz aumentada do sistema de equações dado

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{é} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução do sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_2$$

Operações Elementares com Linhas

Exemplo 1. Continuação.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow -2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{11}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7}{2}L_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Logo a solução é dada por: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, e $x_3 = 3$

Eliminação Gaussiana

Formas Escalonada e Escalonada Reduzida por Linhas

As matrizes a seguir estão em forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes a seguir estão em forma escalonada, mas não reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma Escalonada Reduzida por Linhas

Propriedades.

1) Se uma linha não consistir inteiramente em zeros, então o primeiro número não nulo da linha é um 1. Dizemos que esse número 1 é um ***pivô***.

2) Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz.

3) Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só em zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior.

4) Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.

Eliminação Gaussiana

Exemplo 2. Suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas x, y e z tenha sido reduzida por operações com linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução.
O sistema linear correspondente à matriz aumentada dada é

$$\begin{aligned} x \qquad + 3z &= -1 \\ y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

Como ***x*** e ***y*** correspondem a pivôs na matriz aumentada, dizemos que essas são as ***variáveis líderes***. As demais variáveis (nesse caso, só **z**) são ditas ***variáveis livres***.

Resolvendo para as variáveis líderes em termos das variáveis livres, obtemos

$$x = -1 - 3z$$
$$y = 2 + 4z$$

Seja **$z = t$**, **t** parâmetro. Assim, o conjunto de soluções pode ser representado pelas equações paramétricas x = -1- 3t, y = 2 + 4t, $z = t$

Infinitas soluções!

Para t = 0 temos a solução: x = -1, y = 2, z = 0

para t =1 temos a solução: x = *-4*, y = *6*, z = *1*

Eliminação Gaussiana

Exemplo 3. Suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas x, y e z tenha sido reduzida por operações com linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução.

Temos $x - 5y + z = 4$. Isolamos a variável Lider x em termos das variáveis livres y e z

Assim: $x = 4 + 5y - z$ Sejam $y = s$ e $z = t$ onde s e t são parâmetros

Logo, a **Solução Geral do Sistema** será dada por:

Solução Paramétrica $\begin{cases} x = 4 + 5s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$

Eliminação Gaussiana

Exemplo 4. Suponha que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas x, y e z tenha sido reduzida por operações com linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução.

A equação que corresponde à última linha da matriz aumentada é

$$\mathbf{0}\,x + \mathbf{0}\,y + \mathbf{0}\,z = \mathbf{1}$$

O sistema é **inconsistente**, porque essa equação não é satisfeita por valor algum de x, y e z.

Eliminação Gaussiana

Exemplo 5. Reduzir a seguinte matriz à forma escalonada reduzida por linhas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2$$

Eliminação Gaussiana

Exemplo 5. Continuação,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -23/2 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2\,L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -23/2 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{23}{2} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7}{2} L_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz Escalonada Reduzida por linhas

Observação. O procedimento (ou algoritmo) que acabamos de descrever, que reduz uma matriz à forma escalonada reduzida por linhas, é denominado ***eliminação de Gauss-Jordan***.