Precedência dos Operadores Lógicos e Árvore de Decomposição

Lógica Matemática

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UENF

Prof. Fermín A. Tang

Precedência dos Operadores Lógicos

Definição

- A precedência dos operadores lógicos refere-se a importância de um tipo de operação frente a outro. Sendo que a operação de maior precedência deverá ser realizada primeiro.
- Embora o parêntese não seja um operador lógico, ele outorga a qualquer operação embutida dentro dele maior precedência sobre as outras.
- Parênteses mais internos tem maior precedência que parênteses mais externos.
- Os operadores lógicos possuem as seguintes relações de precedência:

Maior

Menor

Operador	Símbolos
Parêntese	( ) ou { } ou [ ]
Negação	~ ou ¬
Conjunção	$\wedge$
Disjunção	$\vee$
Condicional	$\longrightarrow$
Bicondicional	$\longleftrightarrow$

Precedência dos Operadores Lógicos

Exemplo 1

Maior

Operador	Símbolos
Parêntese	( ) ou { } ou [ ]
Negação	~ ou ¬
Conjunção	$\wedge$
Disjunção	$\vee$
Condicional	$\longrightarrow$
Bicondicional	$\longleftrightarrow$

Menor

- Considere a seguinte proposição:

$$\sim p \leftrightarrow q \wedge \sim r$$

- De acordo com as regras de precedência dos operadores, devemos realizar primeiro as negações, depois a conjunção e finalmente a bicondicional. O número acima do operador indica a ordem de execução.

$$\overset{1}{\sim} p \overset{3}{\leftrightarrow} q \overset{2}{\wedge} \overset{1}{\sim} r$$

- Embora não sejam necessários neste caso, introduzir parênteses pode ajudar a entender melhor as partes da fórmula resultantes de cada operação .

$$(\sim p) \leftrightarrow (q \wedge (\sim r))$$

Precedência dos Operadores Lógicos

Exemplo 2

Maior

Operador	Símbolos
Parêntese	( ) ou { } ou [ ]
Negação	$\sim$ ou $\neg$
Conjunção	$\wedge$
Disjunção	$\vee$
Condicional	$\rightarrow$
Bicondicional	$\leftrightarrow$

Menor

- Considere a proposição:

$$p \rightarrow q \vee r \wedge p$$

- Neste caso, a ordem das operações é a seguinte:

$$p \overset{3}{\rightarrow} q \overset{2}{\vee} r \overset{1}{\wedge} p$$

- Introduzindo parênteses para facilitar a identificação das subfórmulas temos:

$$p \rightarrow \big(q \vee (r \wedge p)\big)$$

Precedência dos Operadores Lógicos

Exemplo 3

- Os parênteses podem mudar a ordem em que as operações são realizadas.
- Por exemplo, as duas expressões lógicas possuem valores lógicos diferentes:

$$(p \to q) \vee (r \wedge p)$$

$$p \to (q \vee r) \wedge p$$

- No primeiro caso, a ordem das operações é determinada apenas pelos parênteses.
- No segundo caso, o parêntese determina a ordem da primeira operação, e as regras de precedência a ordem das duas operações restantes.

$$\underset{1}{(p \to q)} \overset{2}{\vee} \underset{1}{(r \wedge p)}$$

$$p \overset{3}{\to} (q \overset{1}{\vee} r) \overset{2}{\wedge} p$$

Precedência dos Operadores Lógicos

Exemplo 4

- ✘ Os parênteses mais internos sempre tem maior precedência que os mais externos.
- ✘ Por exemplo, considere a seguinte expressão lógica:

$$(p \to q) \leftrightarrow \big((r \to (\sim s)) \to (\sim t)\big)$$

- ✘ A ordem das operações seria o seguinte:

$$(p \overset{3}{\to} q) \overset{4}{\leftrightarrow} \big((r \overset{2}{\to} (\overset{1}{\sim} s)) \overset{3}{\to} (\overset{2}{\sim} t)\big)$$

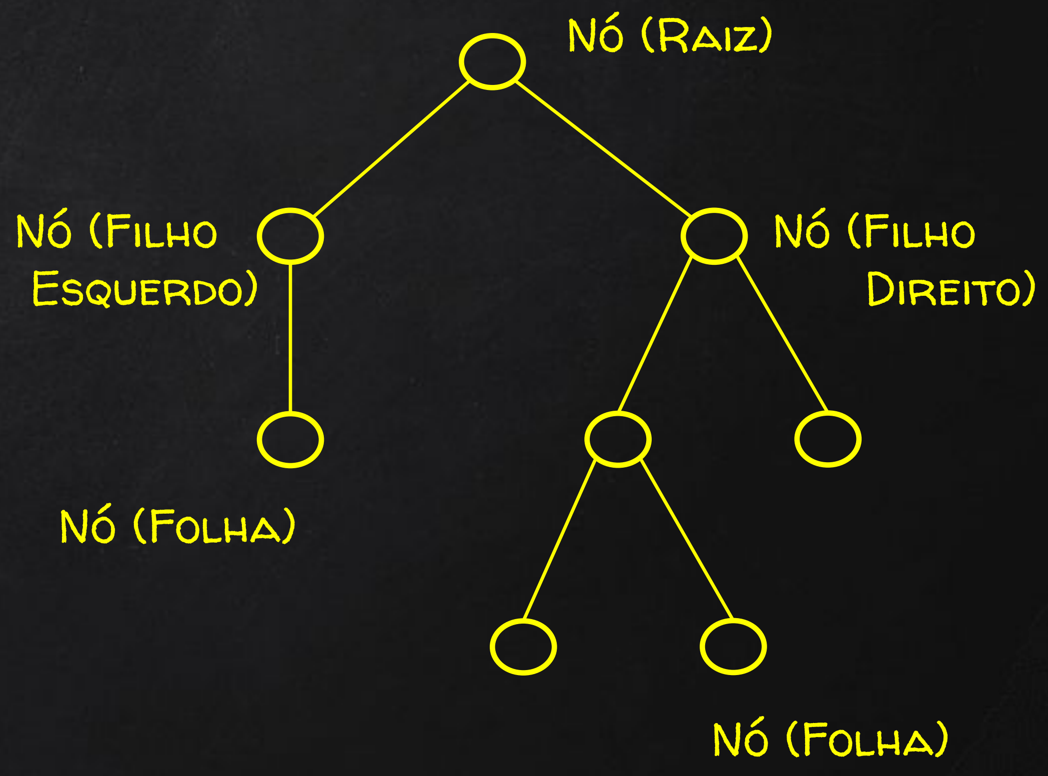
- ✘ A bicondicional é a última operação a ser realizada.

- ✘ Outra forma de identificar a ordem das operações consiste em realizar marcações nas subfórmulas das mais internas até atingir a fórmula toda.

$$\underline{\underline{(p \to q)} \leftrightarrow \underline{\big(\underline{(r \to (\underline{\sim s}))} \to \underline{(\sim t)}\big)}}$$

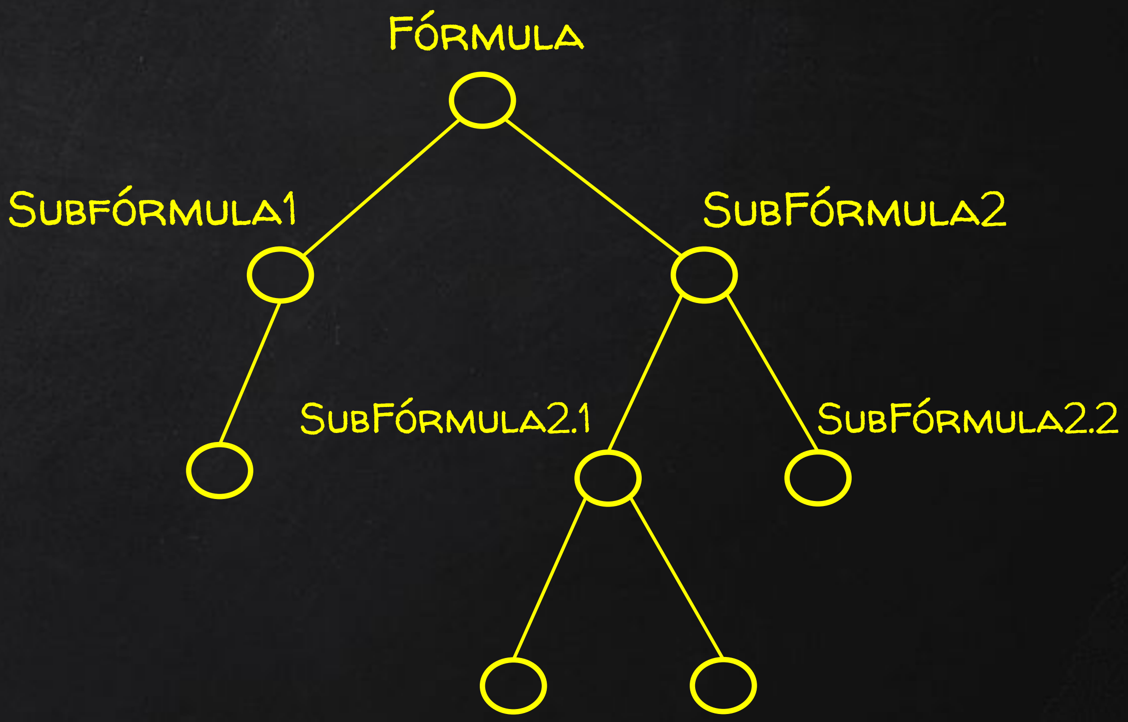
ÁRVORES BINÁRIAS
DEFINIÇÃO

- Apresentaremos brevemente uma estrutura que será útil na decomposição de expressões lógicas, mas que também é utilizada na organização de informações, na ciência da computação, as Arvores Binárias.
- Uma árvore binaria é um estrutura que organiza elementos de maneira hierárquica. No topo da hierarquia temos o nó raiz. A partir do nó raiz cada nó pode ter até dois ramos ou filhos.
- Os nós no fim da hierarquia são chamados de folhas.
- A figura ilustra uma árvore binária.



Árvores Binárias
Definição

- Uma árvore binária pode ser usada para mostrar a decomposição de uma proposição lógica composta (Fórmula).
- Neste contexto, o nó raiz representa a expressão lógica completa (Fórmula), enquanto os filhos representam partes destas expressão lógica (Subfórmulas).
- Mostraremos que:
  - Enquanto o operador $\neg$ é um operador unário que produz uma subfórmula.
  - Os operadores $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ são operadores binários que permitem a decomposição em duas subfórmulas.



Árvore de decomposição

Negação

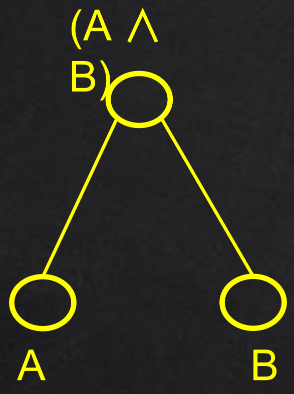
- Utilizaremos a estrutura de árvore binária do seguinte modo:
- 1.- Dada uma formula qualquer S, esta será a raiz da árvore de subfórmulas de S.

  - 2.- Se S é uma formula do tipo negação, então ela é composta por uma fórmula A, de modo que $S = (\neg A)$, logo teremos:

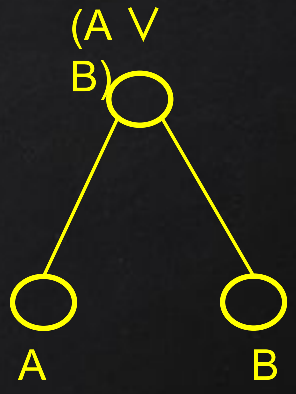
Árvore de decomposição

Conjunção e Disjunção

- 3.- Se S é uma formula do tipo conjunção, então ela é composta por duas fórmulas A e B de tal modo que $S = (A \wedge B)$, logo teremos:



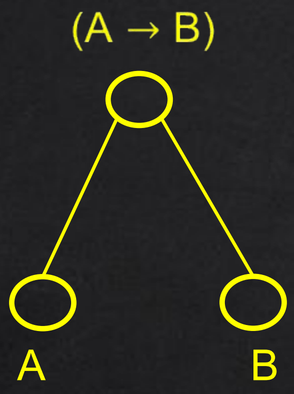
- 4.- Se S é uma formula do tipo disjunção, então ela é composta por duas fórmulas A e B de tal modo que $S = (A \vee B)$, logo teremos:



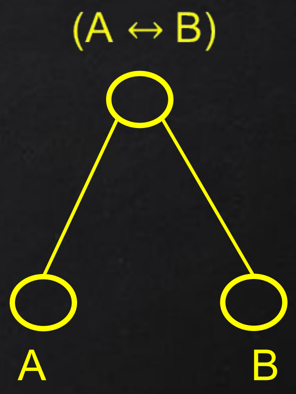
Árvore de decomposição

Condicional e Bicondicional

- 5.- Se S é uma formula do tipo condicional, então ela é composta por duas fórmulas A e B de tal modo que $S = (A \rightarrow B)$, logo teremos:



- 6.- Se S é uma formula do tipo bicondicional, então ela é composta por duas fórmulas A e B de tal modo que $S = (A \leftrightarrow B)$, logo teremos:



Árvore de decomposição

Procedimento

- É possível decompor uma fórmula exibindo todas as formulas que a compõem.
- A decomposição de uma fórmula leva a construção de uma árvore de subfórmulas, que termina quando as folhas tem proposições simples ou fórmulas atômicas.
- Observe que cada nó da árvore pode ser considerada a raiz de uma árvore menor. A árvore formada por subárvores.

Árvore de decomposição

Exemplo 5

- Considere a seguinte fórmula:

$$[A \rightarrow (B \vee C)]$$

- Precisamos identificar a ordem de precedência das operações, de maior para menor.
  - Os "( )" mais internos dão maior precedência a qualquer operação. Dessa forma, o operador "$\vee$" tem maior precedência que o operador "$\rightarrow$". Assim, o operador "$\vee$" será o primeiro a ser aplicado e o operador "$\rightarrow$" será o último a ser aplicado.

$$[A \overset{2}{\rightarrow} (B \overset{1}{\vee} C)]$$

Árvore de decomposição

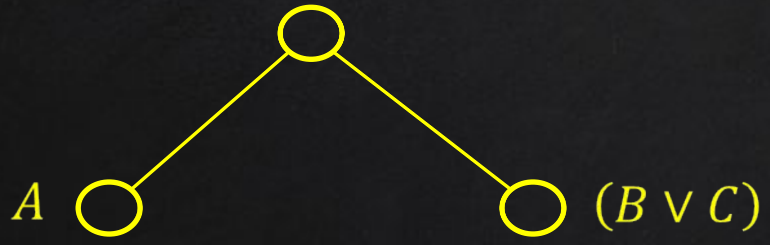
Exemplo 5

- Para decompor a fórmula usaremos os operadores na ordem de menor para maior precedência.

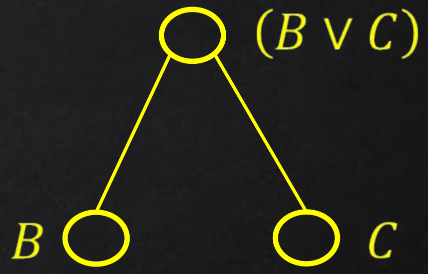
$$\overset{2}{[A \to} \overset{1}{(B \vee C)]}$$

- Assim podemos verificar que a fórmula pode ser decomposta em A e $(B \vee C)$.

$$[A \to (B \vee C)]$$



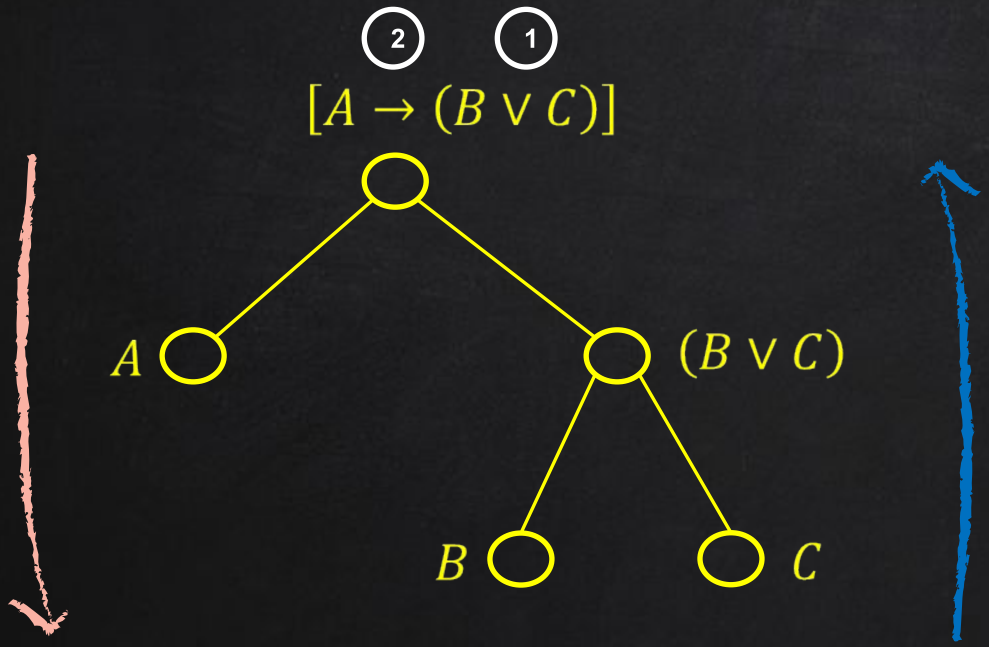
- Já a formula $(B \vee C)$ será decomposta nas fórmulas atômicas B e C.



Árvore de decomposição

Exemplo 5

- A árvore de decomposição resultante é a seguinte:



- Observe que ao decompor a fórmula utilizamos os operadores na ordem inversa, de menor para maior precedência.
- Já para calcular o valor lógico da formula usamos os operadores na ordem certa, de maior para menor precedência.
- Observe que as setas mostram processos opostos, decomposição vs composição de uma fórmula.

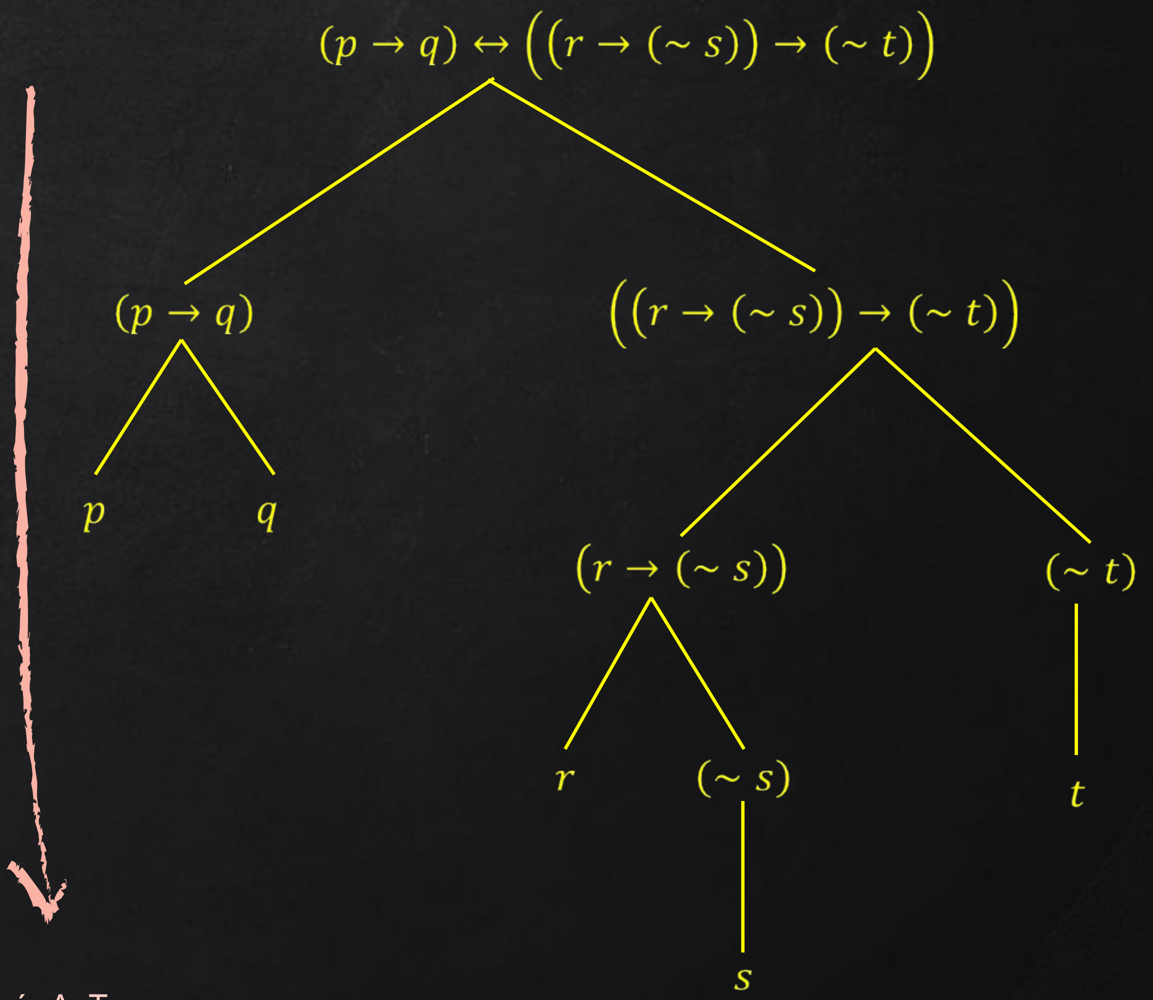
Árvore de decomposição

Exemplo 6

- No caso da seguinte expressão lógica:

$$(p \overset{3}{\rightarrow} q) \overset{4}{\leftrightarrow} \Big((r \overset{2}{\rightarrow} (\overset{1}{\sim} s)) \overset{3}{\rightarrow} (\overset{2}{\sim} t)\Big)$$

- Temos a árvore de decomposição mostrada ao lado.



Referências

- Abe, J.M.; Scalzitti, A. e da Silva Filho, J.I. Introdução à Lógica para Ciência da Computação. Capítulo 2. Editora Arte e Ciência. São Paulo. 2001.
- Barbieri Filho, P.; Hetem Junior, A. Lógica para Computação. Capítulo 2. Editora LTC. 2013.