EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

EM MUITOS PROBLEMAS FÍSICOS IMPORTANTES EXISTEM DUAS OU MAIS VARIÁVEIS INDEPENDENTES E O MODELO MATEMÁTICO CORRESPONDENTE ENVOLVE EQS. DIFERENCIAIS PARCIAIS, EDP.

MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS ⇒ É O MÉTODO PARA RESOLVER EDP.

CARACTERÍSTICA ⇒ SUBSTITUIR A EDP POR UM CONJUNTO DE EDO's

DADA UMA EDP COM n VARIÁVEIS INDEPENDENTES SUPÕE-SE QUE A SOLUÇÃO (DA EDP) SEJA O PRODUTO DE n FUNÇÕES, E CADA UMA DESSA FUNÇÕES DEPENDE DE UMA VARIÁVEL INDEPENDENTE.

EX 1: RESOLVA $\boxed{x\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}}$ (1) ⇒ EQ. 1ª ORDEM

OBTER $\boxed{z = z(x,y)}$ (2)

ENTÃO: $\boxed{z = X(x) \cdot Y(y)}$ (3) NOTE: $\begin{cases} X = f(x) \\ Y = g(y) \end{cases}$

(3) EM (1):

$$x \frac{\partial}{\partial x}[X(x) \cdot Y(y)] = \frac{\partial}{\partial y}[X(x) \cdot Y(y)] \quad ; \quad (4)$$

$$x \cdot Y(y) \frac{\partial}{\partial x} X(x) = X(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y} Y(y) \quad ; \quad (5)$$

$$\frac{x \cdot Y(y)}{X(x) \cdot Y(y)} \frac{\partial}{\partial x} X(x) = \frac{X(x)}{X(x) \cdot Y(y)} \frac{\partial}{\partial y} Y(y) \quad ; \quad (6)$$

$\boxed{\div \text{ POR } X(x) \cdot Y(y)}$

$$\frac{x}{X(x)} \cdot \frac{\partial X(x)}{\partial x} = \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \quad ; \quad (7)$$

$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{d}{dx} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \to \frac{d}{dy}}$

$$\underbrace{\frac{x}{X(x)} \frac{d}{dx} X(x)}_{\text{SÓ DEPENDE DE } x} = \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{d}{dy} Y(y)}_{\text{SÓ DEPENDE DE } y} \quad ; \quad (8)$$

$\Rightarrow$ A IGUALDADE SÓ SE VERIFICA SE FOREM IGUAL A UMA CONSTANTE

$$\begin{cases} \dfrac{x}{X} \dfrac{dX}{dx} = c \Rightarrow \text{É EDO } (9) \Rightarrow X = f(x) \\[2ex] \dfrac{1}{Y} \dfrac{dY}{dy} = c \Rightarrow \text{É EDO } (10) \Rightarrow Y = g(y) \end{cases}$$

REESCREVENDO (9) E (10):

$$\boxed{\frac{1}{X} dX = c \cdot \frac{1}{x} dx} \quad (11)$$

$$\boxed{\frac{1}{Y} dY = c \cdot dy} \quad (12)$$

RESOLVENDO EQ. 11

$$\int \frac{1}{X} dX = c \int \frac{1}{x} dx \rightarrow \ln|X| = c \{ \ln|x| + \ln|A| \} ; \quad (13)$$

$\to$ CONSTANTE

$$\ln|X| = c \ln|x \cdot A| = \ln|A \cdot x|^c ; \quad (14)$$

$$|X| = \underbrace{|A|^c}_{D} \cdot |x|^c \Rightarrow \boxed{X_{(x)} = D \cdot x^c} ; \quad (15)$$

$c, D \Rightarrow$ CONSTANTES

RESOLVENDO 12

$$\frac{1}{Y} dY = c \cdot dy \Rightarrow \int \frac{1}{Y} dY = c \int dy ; \quad (16)$$

$$\ln|Y| = c \cdot \{ y + d \} = c y + \underbrace{c \cdot d}_{ctes} \quad (17)$$

$c \cdot d \equiv E$

$$\ln|Y| = E + c y ; \quad (18)$$

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x}$$

$$|Y| = e^{E + c y} = \underbrace{e^E}_{F} \cdot e^{c \cdot y} ; \quad (19)$$

$F \Rightarrow cte$

$$\boxed{Y_{(y)} = F \cdot e^{c \cdot y}} ; \quad (20)$$

$c, F \Rightarrow$ CONSTANTE

SOLUÇÃO

$$Z_{(x,y)} = X_{(x)} \cdot Y_{(y)} \quad ; \qquad (21)$$

$$Z_{(x,y)} = D \cdot x^{c} \cdot F \cdot e^{c \cdot y} \quad ; \qquad (22)$$

$D \cdot F \equiv G \Rightarrow$ CONSTANTES

$$\boxed{Z_{(x,y)} = G \cdot x^{c} \cdot e^{c \cdot y}} \qquad (23)$$

$C, G \Rightarrow$ CONSTANTES.

NOTE:

EDP

$$\boxed{x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}} \Rightarrow \text{OBTIVEMOS:}$$

DUAS EDO's

$$\boxed{\frac{1}{X} dX = c \cdot \frac{1}{x} dx}$$

$$\boxed{\frac{1}{Y} dY = c \cdot dy}$$

EX 2 : RESOLVA $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$ (1) $\Rightarrow$ EQ. 2ª ORDEM

OBTER $\boxed{u = u_{(y,t)}}$ (2)

$\boxed{u = Y_{(y)} \cdot T_{(t)}}$ (3) ; (3) EM (1) :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[Y_{(y)} \cdot T_{(t)}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[Y_{(y)} \cdot T_{(t)}\right] \; ; \quad (4)$$

$$T_{(t)} \frac{\partial^2 Y_{(y)}}{\partial y^2} = Y_{(y)} \cdot \frac{\partial^2 T_{(t)}}{\partial t^2} \; ; \quad (5)$$

$$\frac{T_{(t)}}{Y_{(y)} \cdot T_{(t)}} \frac{d^2 Y_{(y)}}{dy^2} = \frac{Y_{(y)}}{Y_{(y)} T_{(t)}} \frac{d^2 T_{(t)}}{dt^2} \; ; \quad (6)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \; ; \quad (7)$$

IGUALDADE $\downarrow$ CONSTANTE

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 Y = 0} \quad (8)$$

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 T = 0} \quad (9)$$

EQS. (8) E (9) SÃO EDO's, 2ª ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES : $y'' + by' + cy = 0$

- SOLUÇÃO DA EQ. 8 :

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 Y = 0 \quad \rightarrow \text{OBTER} \quad Y = f(y)$$

$$\boxed{Y = e^{m \cdot y}} \Rightarrow \boxed{Y' = m \cdot e^{m \cdot y}} \Rightarrow \boxed{Y'' = m^2 \cdot e^{m \cdot y}}$$

- ENTÃO TEMOS :

$$m^2 \cdot e^{m \cdot y} + k^2 e^{m \cdot y} = 0 \,, \qquad (10)$$

$$(m^2 + k^2) \cdot e^{m \cdot y} = 0 \Rightarrow \boxed{m^2 + k^2 = 0} \qquad (11)$$

- EM 11 É CONVENIENTE ESCREVER :

$$m^2 = -k^2 \Longrightarrow m^2 = i^2 \cdot k^2 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = ik \,, \\ m_2 = -ik \,. \end{cases} \qquad (12)$$

- OBTEMOS:

$$Y_1 = e^{m_1 \cdot y} \Rightarrow Y_1 = e^{i \cdot k \cdot y} \,, \qquad (13)$$

$$Y_2 = e^{m_2 \cdot y} \Rightarrow Y_2 = e^{-ik \cdot y} \,, \qquad (14)$$

SOLUÇÃO EQ. 8

$$\boxed{Y(y) = A \cdot e^{ik \cdot y} + B e^{-iky}} \qquad (15)$$

$A, B \Rightarrow$ CONSTANTES

- SOLUÇÃO DA EQ. 9

$$\frac{d^2T}{dt^2} + k^2 T = 0 \Rightarrow \text{OBTER } T = g(t)$$

$$\boxed{T = e^{m.t}} \Rightarrow \left.\boxed{T' = m.e^{m.t}}\right\} \Rightarrow \boxed{T = m^2 . e^{m.t}}$$

- ANÁLOGO AO ITEM ANTERIOR:

$$T_1 = e^{ikt} \quad , \quad (16)$$

$$T_2 = e^{-ik.t} \quad , \quad (17)$$

SOLUÇÃO EQ. 9

$$\boxed{T(t) = C e^{ik.t} + D e^{-ik.t}} \quad (18)$$

C, D ⇒ CONSTANTES

- SOLUÇÃO DA EDP ⇒ EX 2 → EQ. 1

$$\boxed{u(r,t) = Y(r) . T(t)}$$

$$Y(r) \downarrow (15) \qquad T(t) \downarrow (18)$$

PARA POSTERIOR APLICAÇÃO É CONVENIENTE EXPRESSAR AS SOLUÇÕES 15 E 18 EM TERMOS DE SENO / COSSENO.

TEMOS :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{E} \qquad 19$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

DE 15 $\Upsilon = A e^{iky} + B e^{-iky}$;

PARA: $\boxed{A = B = \frac{1}{2}} \Rightarrow \Upsilon = \frac{e^{i(ky)} + e^{-i(k.y)}}{2}$;

ENTÃO : $\boxed{\Upsilon = \cos(k.y)}$ 20

↳ É UMA SOLUÇÃO.

PARA $\boxed{A = -B = \frac{1}{2i}} \Rightarrow \Upsilon = \frac{e^{i(ky)} - e^{-i(k.y)}}{2i}$;

$$\boxed{\Upsilon = \operatorname{SEN}(ky)} \quad 21$$

↳ É OUTRA SOLUÇÃO.

DE 20 E 21 TEMOS A SOLUÇÃO GERAL:

$$\boxed{\Upsilon(y) = C_1 \cos(k.y) + C_2 \operatorname{SEN}(k.y)} \quad 22$$

$C_1\ C_2 \Rightarrow$ CONSTANTES