



CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
LABORATÓRIO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

# **Árvores AVL:**

## **Casos de Balanceamento**

### **Remoção de nós**

***Disciplina: Estrutura de Dados II***

**Prof. Fermín Alfredo Tang Montané**

**Curso: Ciência da Computação**

# Árvores AVL

## Remoção

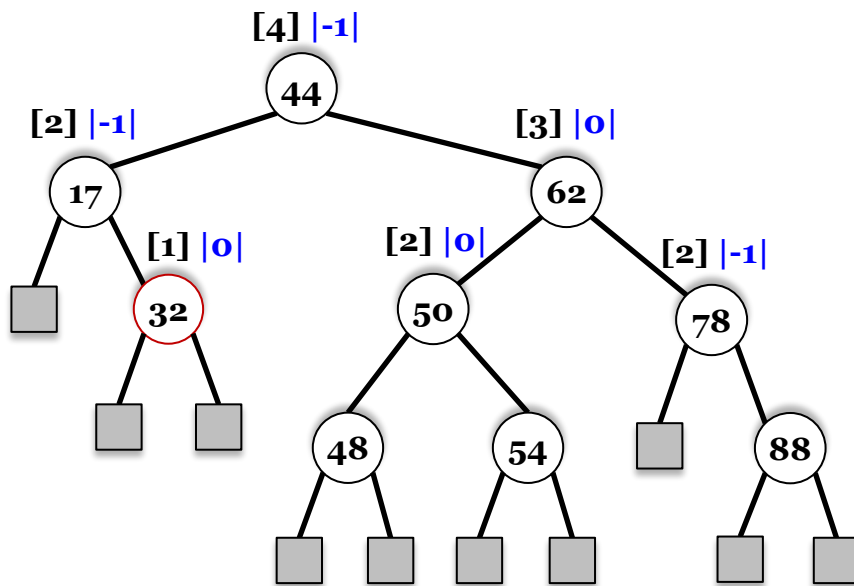
---

- O rebalanceamento de árvores AVL no caso da remoção de nós, pode ser realizado utilizando as mesmas operações de rotação descritas no caso da inserção de nós (rotações simples e duplas).
- No entanto, o rebalanceamento da árvore no caso da remoção requer maior esforço que no caso da inserção.
- Enquanto, no caso da inserção somente é preciso realizar uma rotação (simples ou dupla) no caso da remoção podem ser necessárias várias rotações (simples ou duplas) no caminho ascendente do nó removido até a raiz.

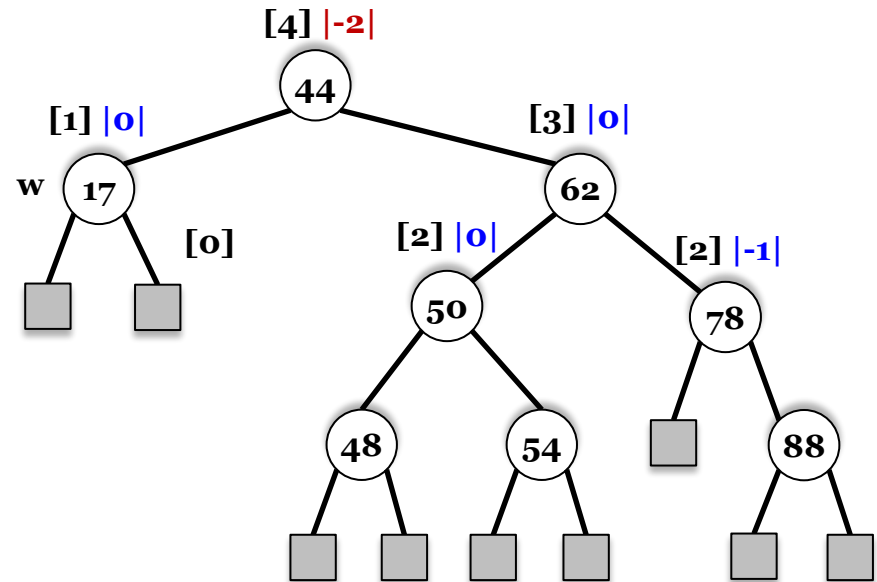
# Árvores AVL

## Remoção – Exemplo 1

- Ilustra-se o caso da remoção do nó 32.



Árvore Inicial

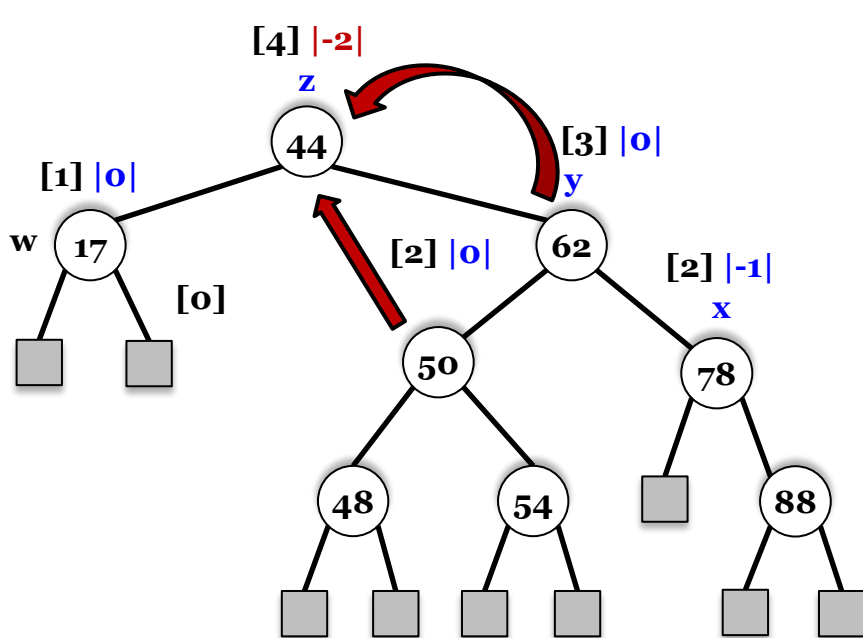


Árvore Após Remoção

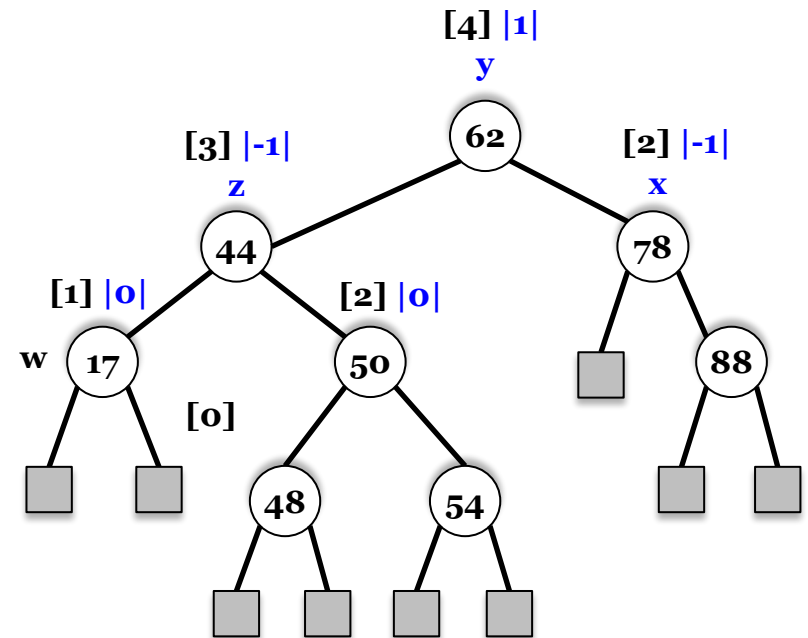
# Árvores AVL

## Remoção – Exemplo 1

- Observe que o desbalanceamento do nó 44 é identificado como caso I, resolvido mediante uma rotação esquerda.
- A altura da árvore balanceada continua igual a da árvore inicial.



**Rotação Esquerda**

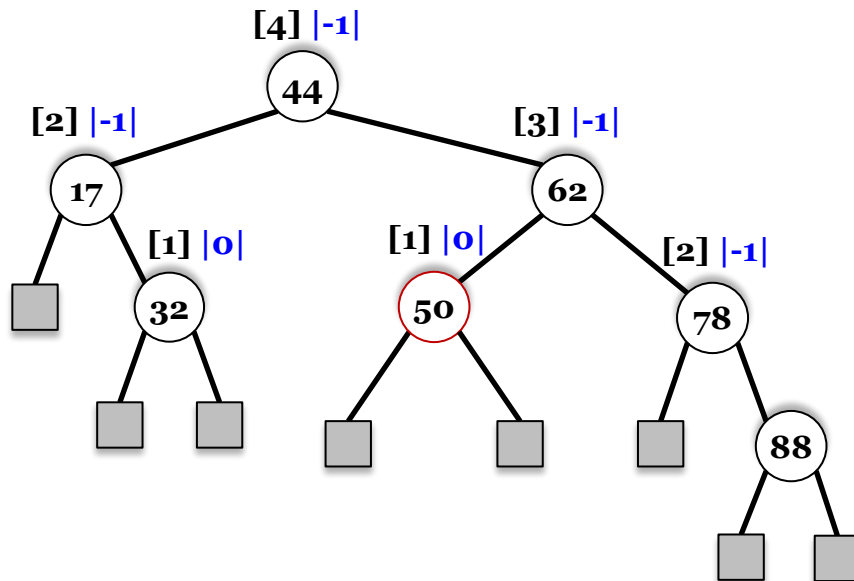


**Árvore Balanceada**

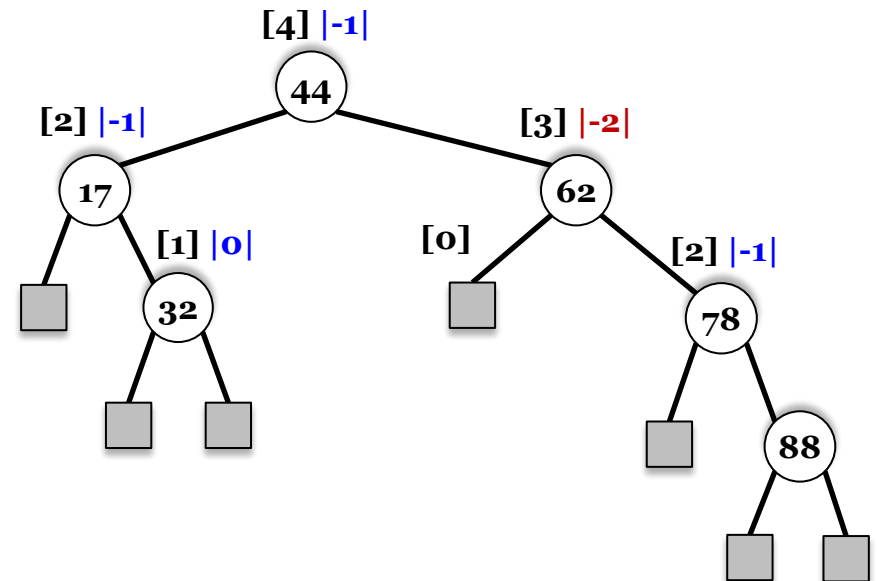
# Árvores AVL

## Remoção – Exemplo 2

- Ilustra-se o caso da remoção do nó 50.



Árvore Inicial

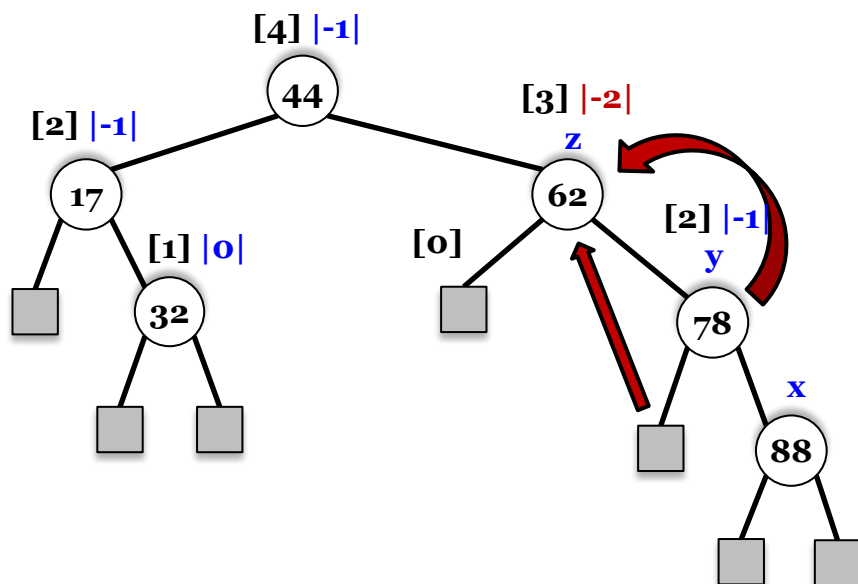


Árvore Após Remoção

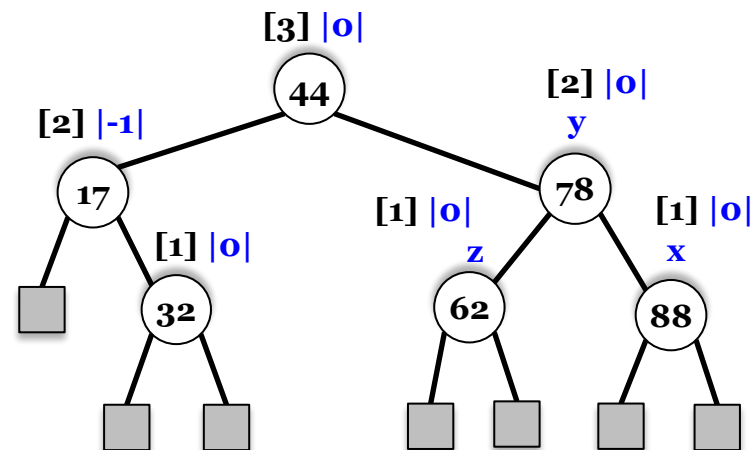
# Árvores AVL

## Remoção - Exemplo 2

- Observe que o desbalanceamento do nó 62 é identificado como caso 1, resolvido mediante uma rotação esquerda.
- A altura da árvore balanceada diminuiu com relação a árvore inicial.



**Rotação Esquerda**

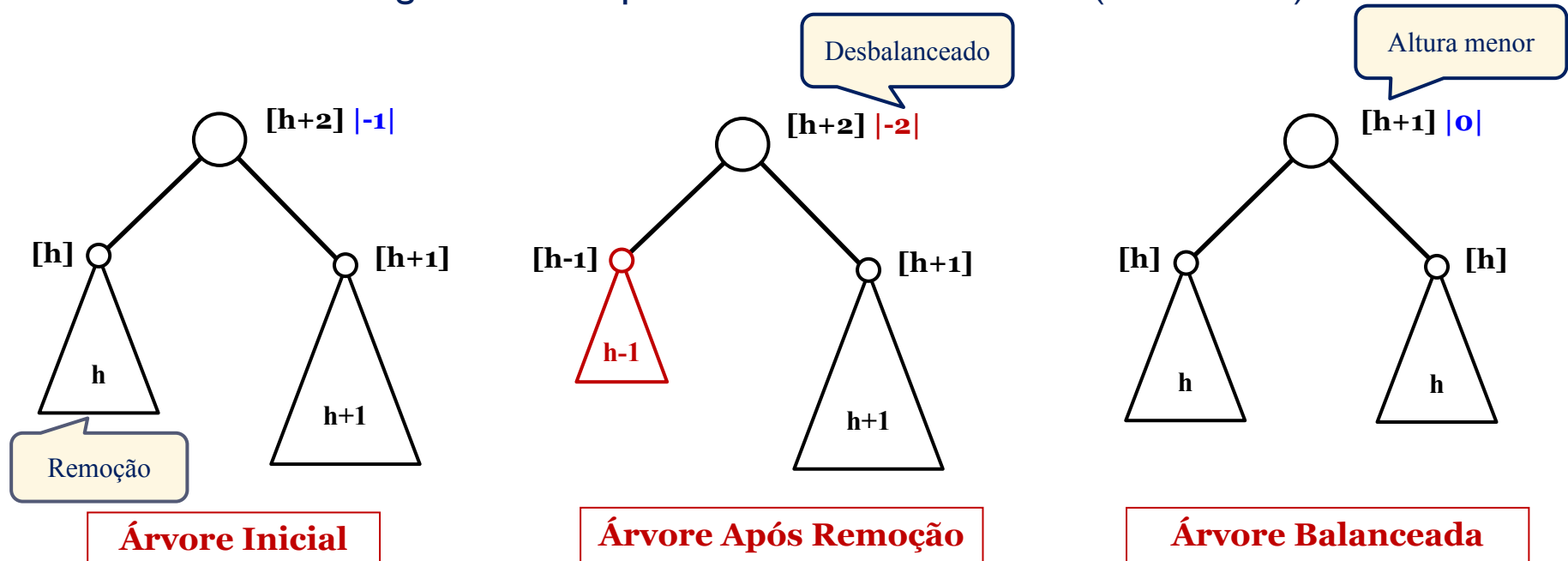


**Árvore Balanceada**

# Árvores AVL

## Remoção – Caso altura diminui

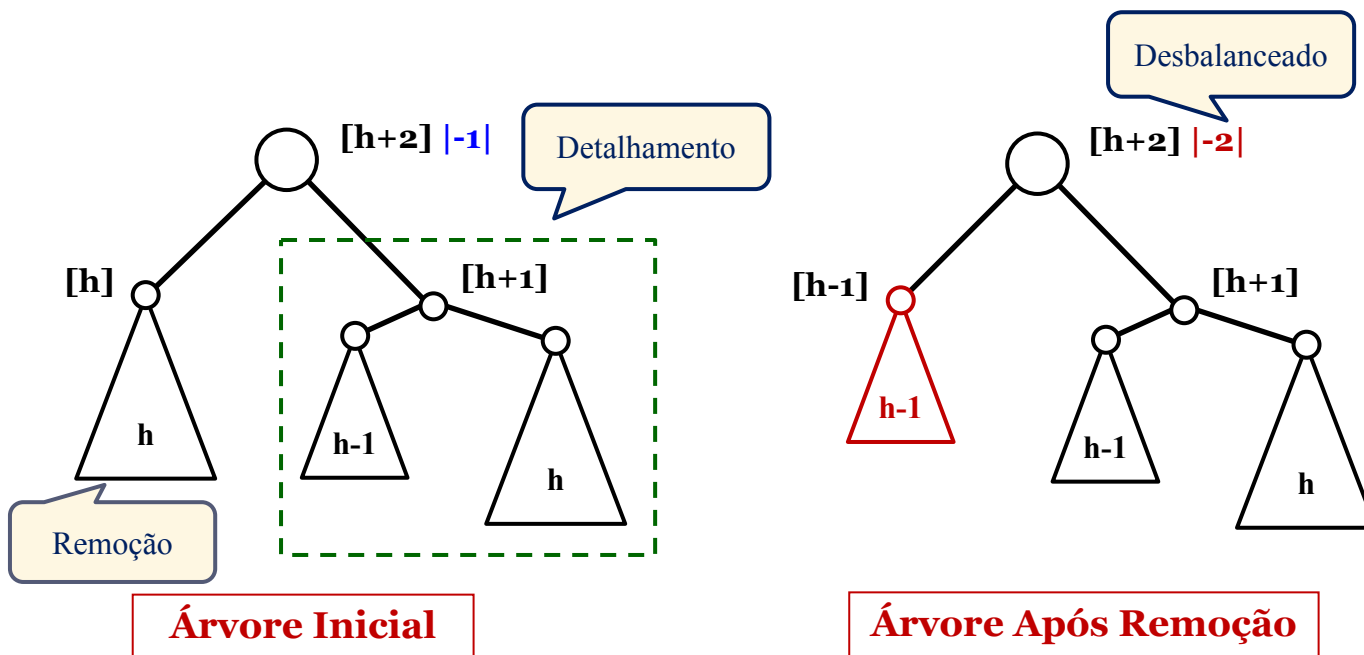
- O balanceamento após uma remoção torna-se mais complexo quando a subárvore resultante após o balanceamento possui **altura menor**. Ilustra-se o caso com um balanceamento e generaliza-se para vários balanceamentos (mais de um).



# Árvores AVL

## Remoção – Caso altura diminui

- Na árvore inicial, detalha-se a sub-árvore direita.

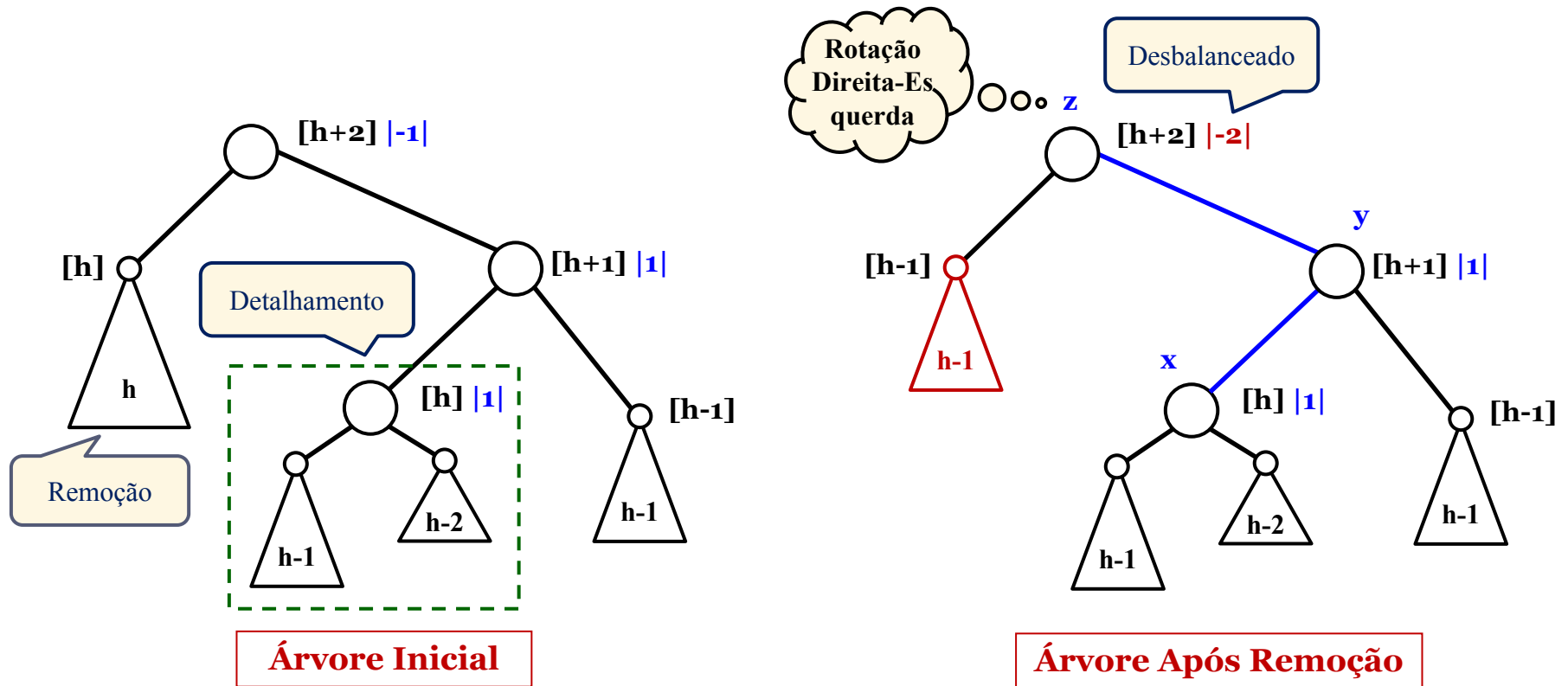




# Árvores AVL

## Remoção – Caso altura diminui

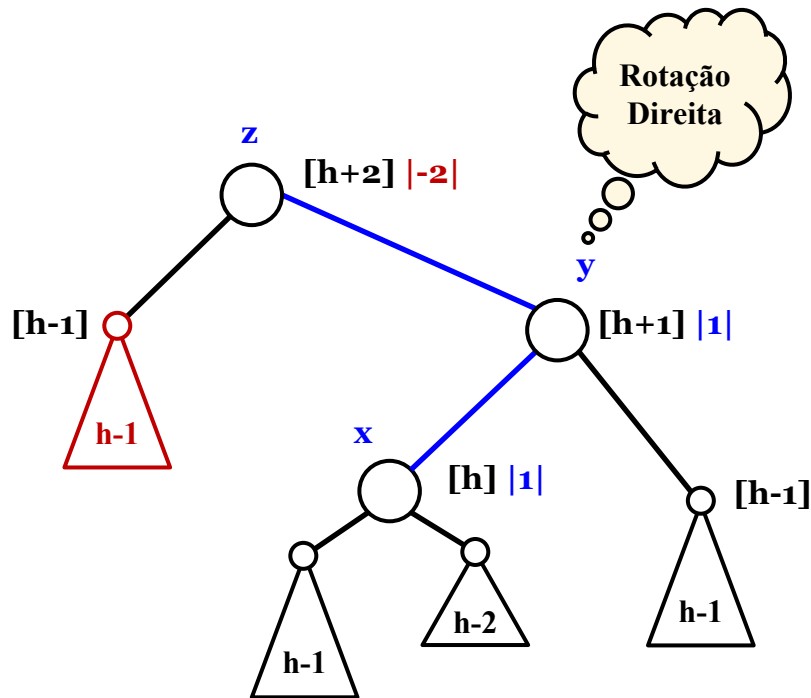
- Novamente, se dá maior detalhe da árvore inicial. Sub-árvore esquerda da sub-árvore direita.



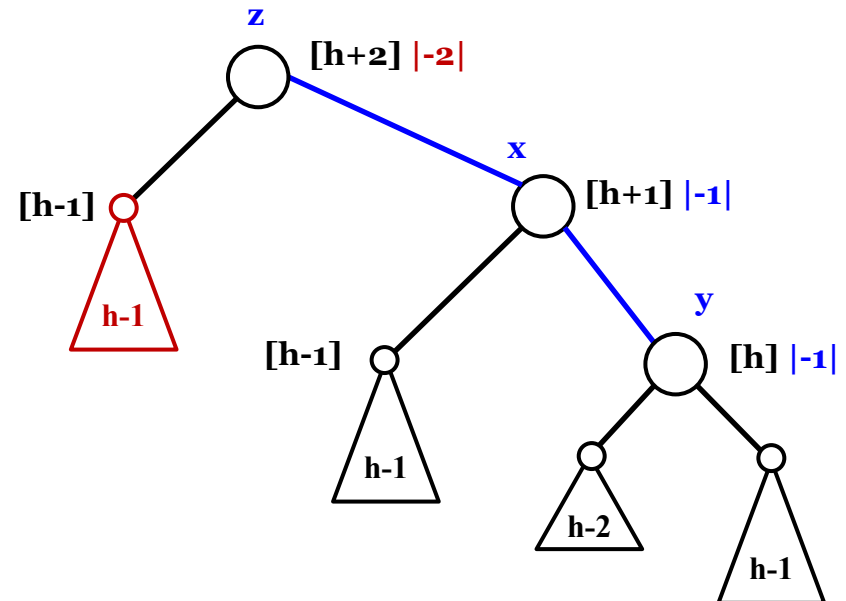
# Árvores AVL

## Remoção – Caso altura diminui

- balanceamento de um nó diminui a altura da subárvore com raiz em esse nó.



Árvore Após Remoção

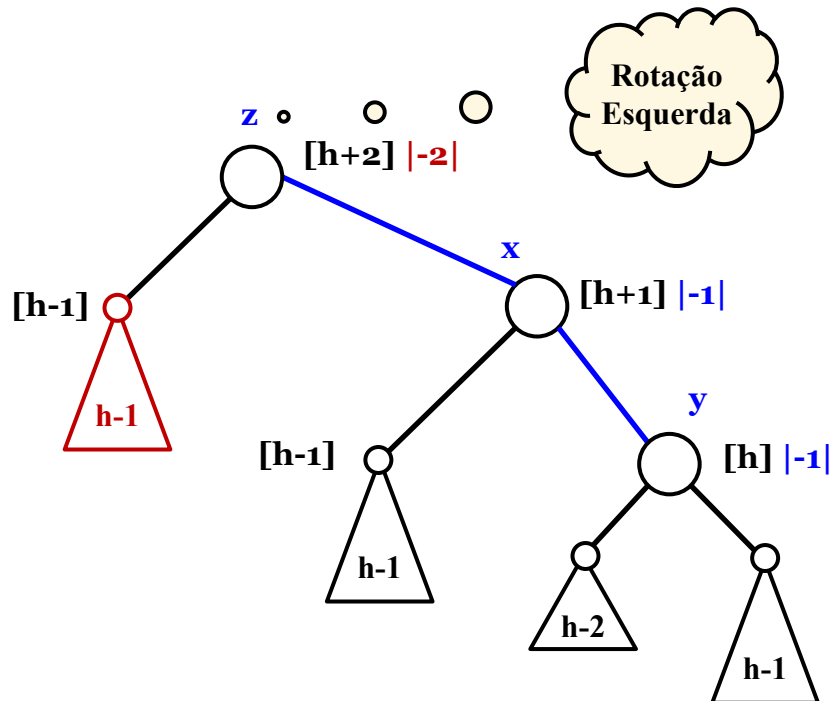


Árvore após rotação Direita

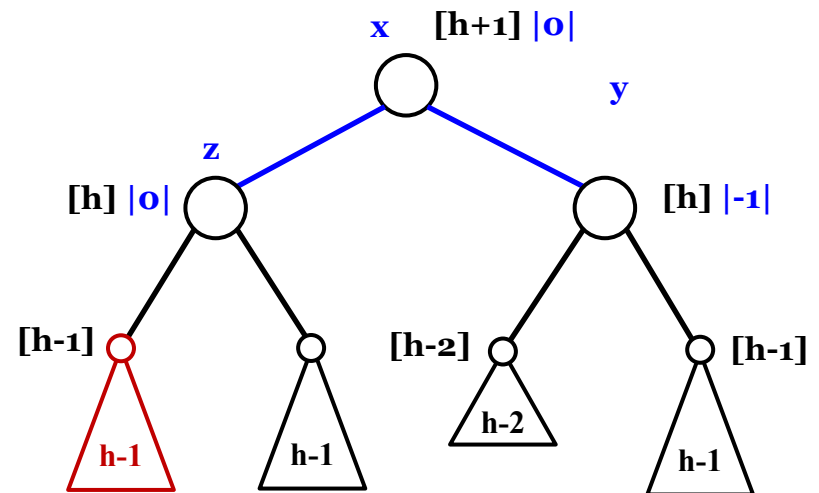
# Árvores AVL

## Remoção – Caso altura diminui

- balanceamento de um nó diminui a altura da subárvore com raiz em esse nó.



**Árvore após rotação  
Direita**



**Árvore Balanceada  
após rotação Esquerda**

# Árvores AVL

## Remoção

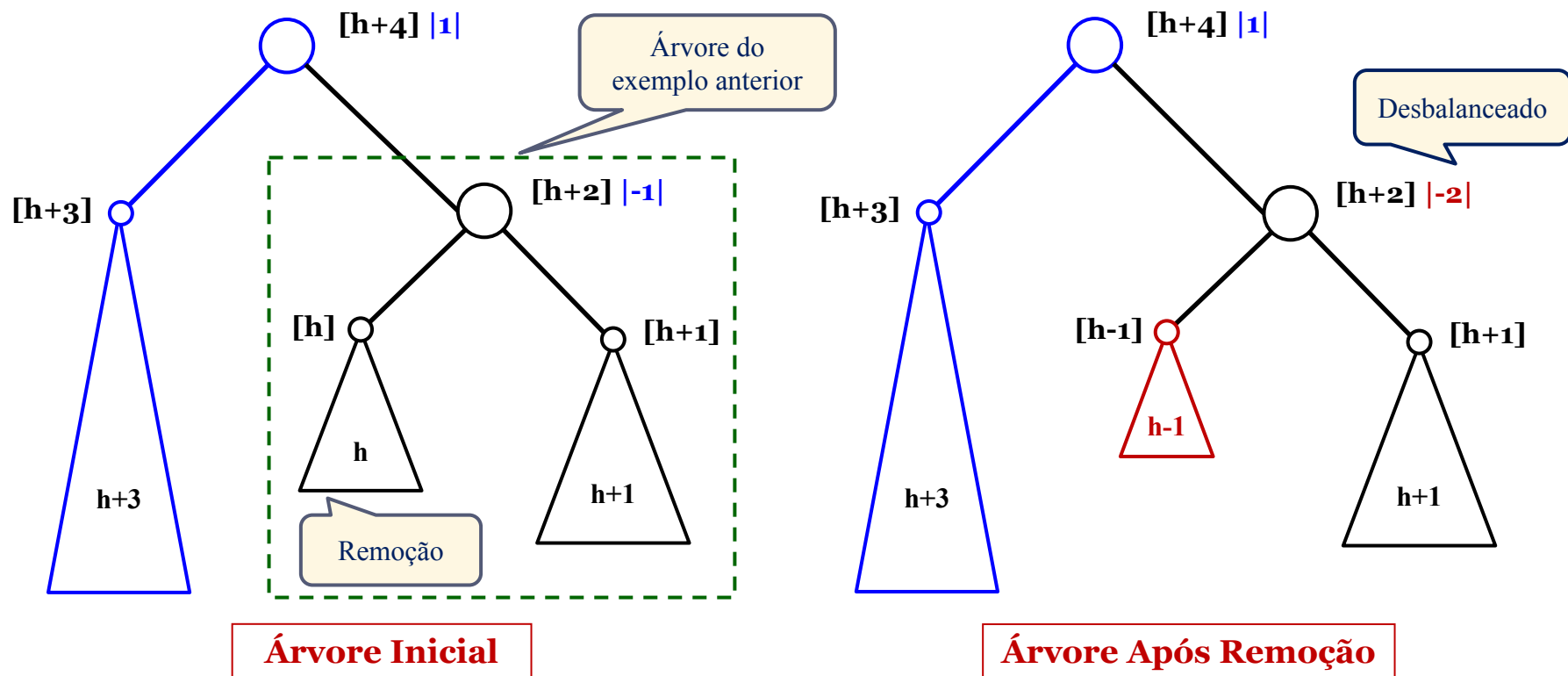
---

- Após a remoção de um nó, se o balanceamento desse nó diminui a altura da árvore com raiz nesse nó. Tal balanceamento pode provocar **desbalanceamento em outros nós da árvore (no caminho ascendente do nó removido até a raiz)**.
- Assim, no pior caso será preciso rebalancear (aplicar **várias** rotações simples ou duplas) a todos os nós desbalanceados no caminho ascendente do nó removido até a raiz.
- Este fato, somente acontece no caso da remoção.
- O balanceamento no caso da inserção somente exige aplicar **uma** rotação simples ou dupla.

# Árvores AVL

## Remoção – Pior Caso – Exemplo 1

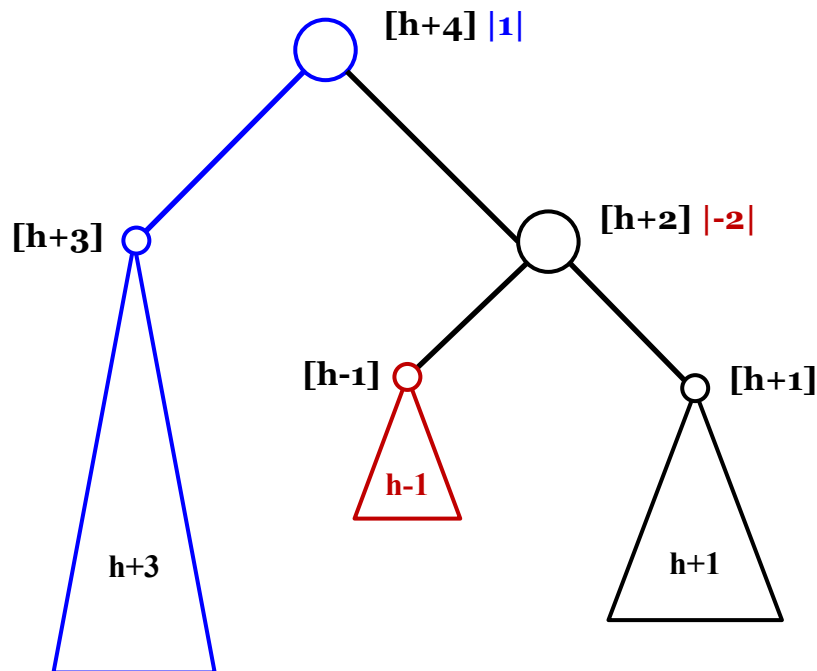
- Considere que a árvore do exemplo anterior é uma subárvore de uma árvore maior. Realiza-se a remoção e o desbalanceamento é detectado.



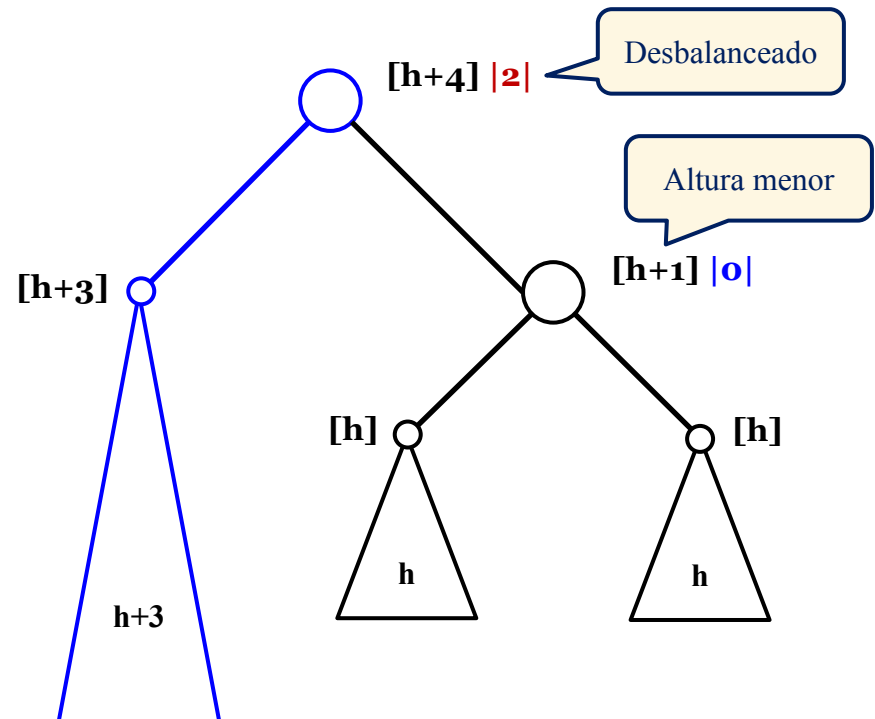
# Árvores AVL

## Remoção – Pior Caso – Exemplo 1

- Aplica-se a rotação correspondente e a subárvore fica balanceada mas com **altura menor**. Um novo nó fica desbalanceado (nó ascendente) precisando-se de uma nova rotação.



**Árvore Após Remoção**



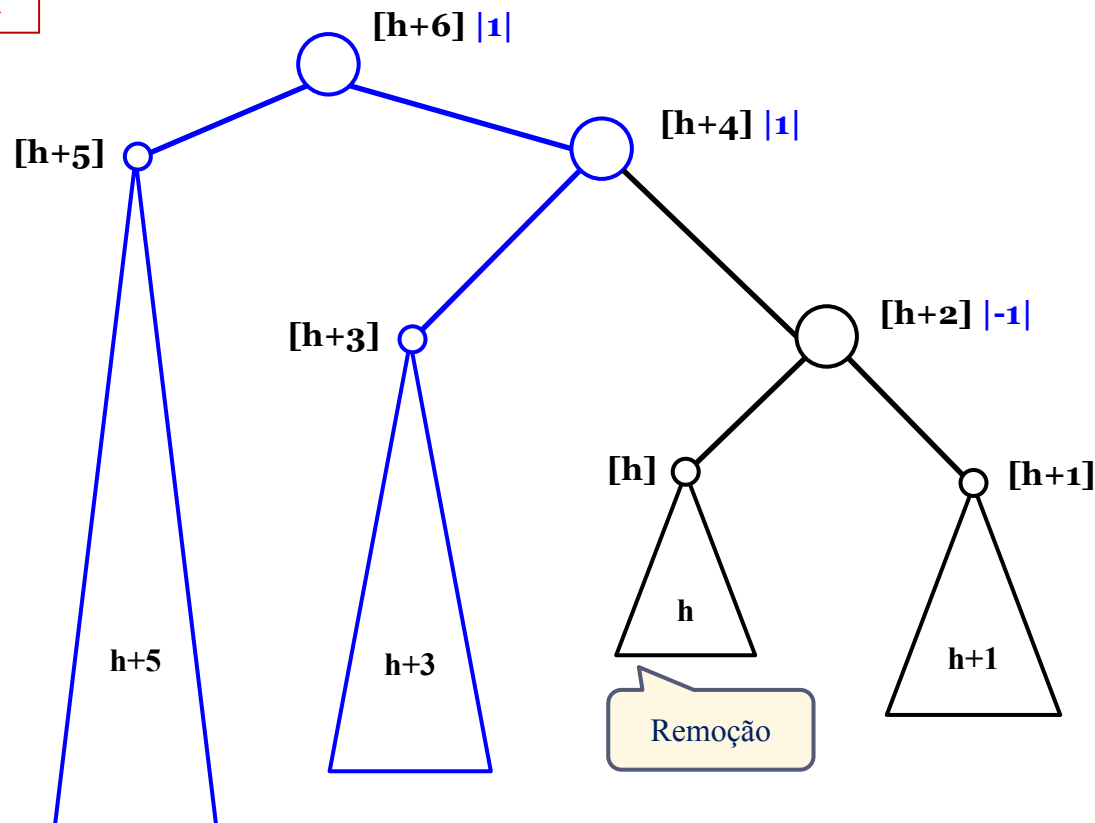
**Árvore Após  
Primeiro Balanceamento**

# Árvores AVL

## Remoção – Pior Caso – Exemplo 2

- O exemplo anterior pode ser generalizado de maneira que sejam requeridas várias rotações no caminho ascendente do nó removido até a raiz.

### Árvore Inicial

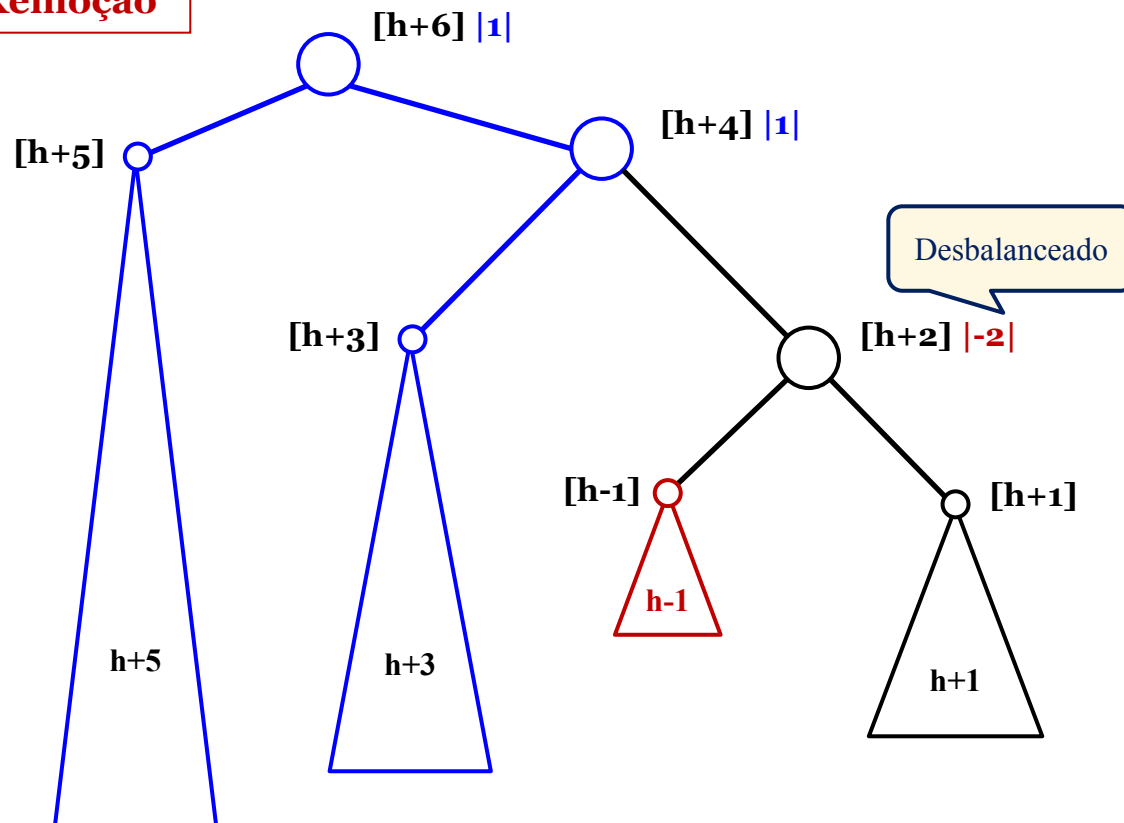


# Árvores AVL

## Remoção – Pior Caso – Exemplo 2

- Neste exemplo espera-se que a remoção produza o desbalanceamento em todos os nós do caminho ascendente do nó removido até a raiz. Tal fato se deve a redução de altura nas respectivas subárvores após cada rebalanceamento.

### Árvore Após Remoção

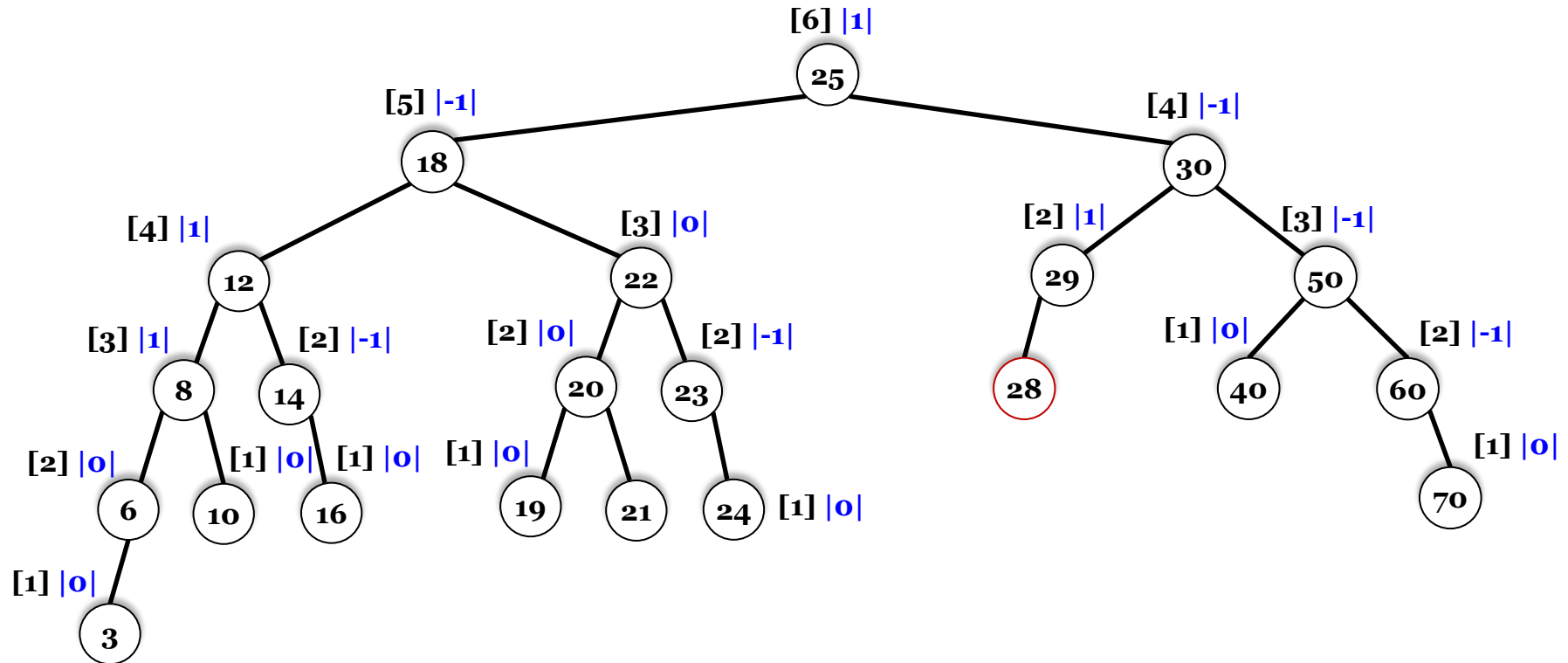




# Árvores AVL

## Remoção – Pior Caso – Exemplo 3

- Ilustra-se o caso da remoção do nó 28.

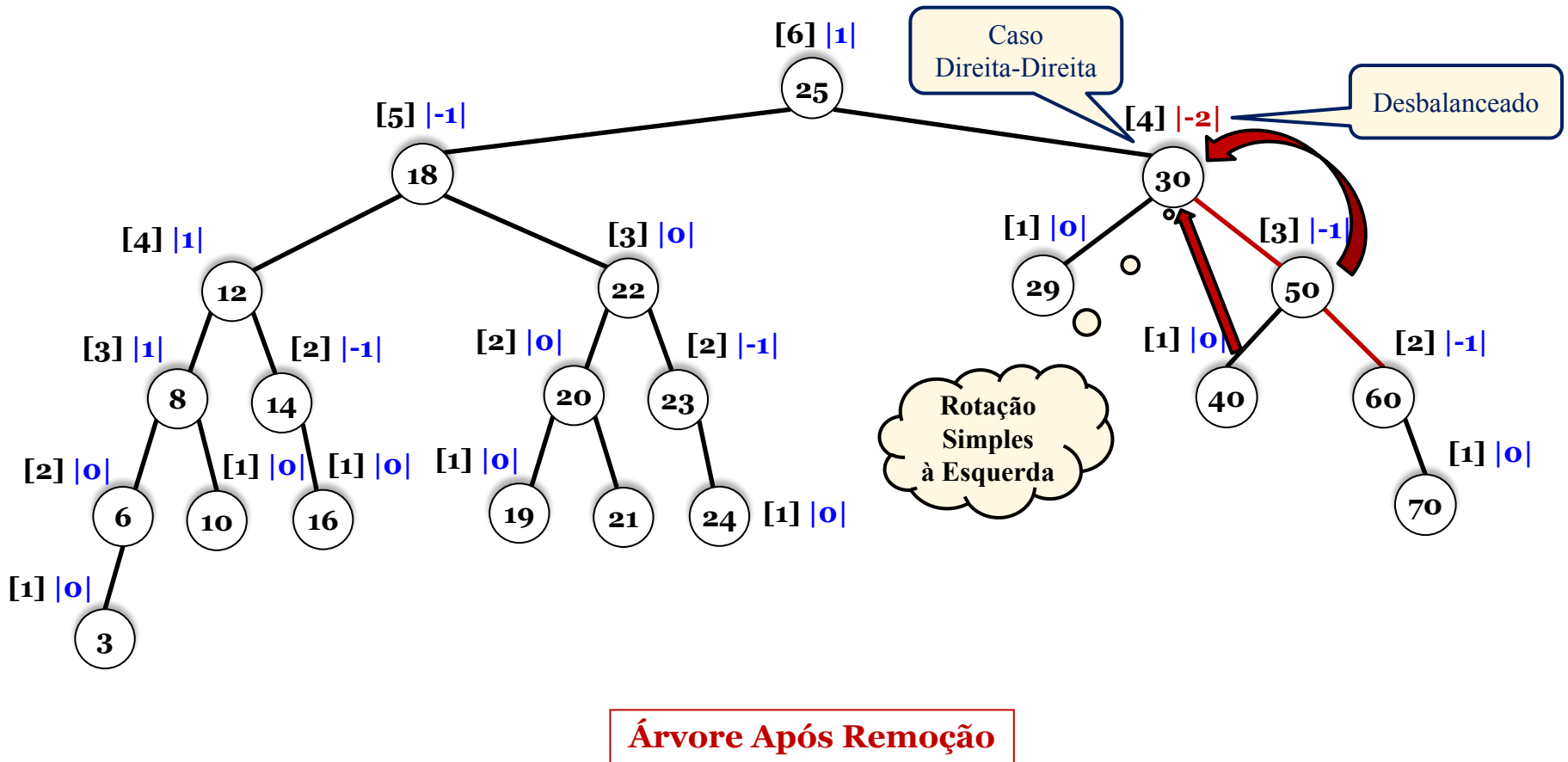


Árvore Inicial

# Árvores AVL

## Remoção – Pior Caso – Exemplo 3

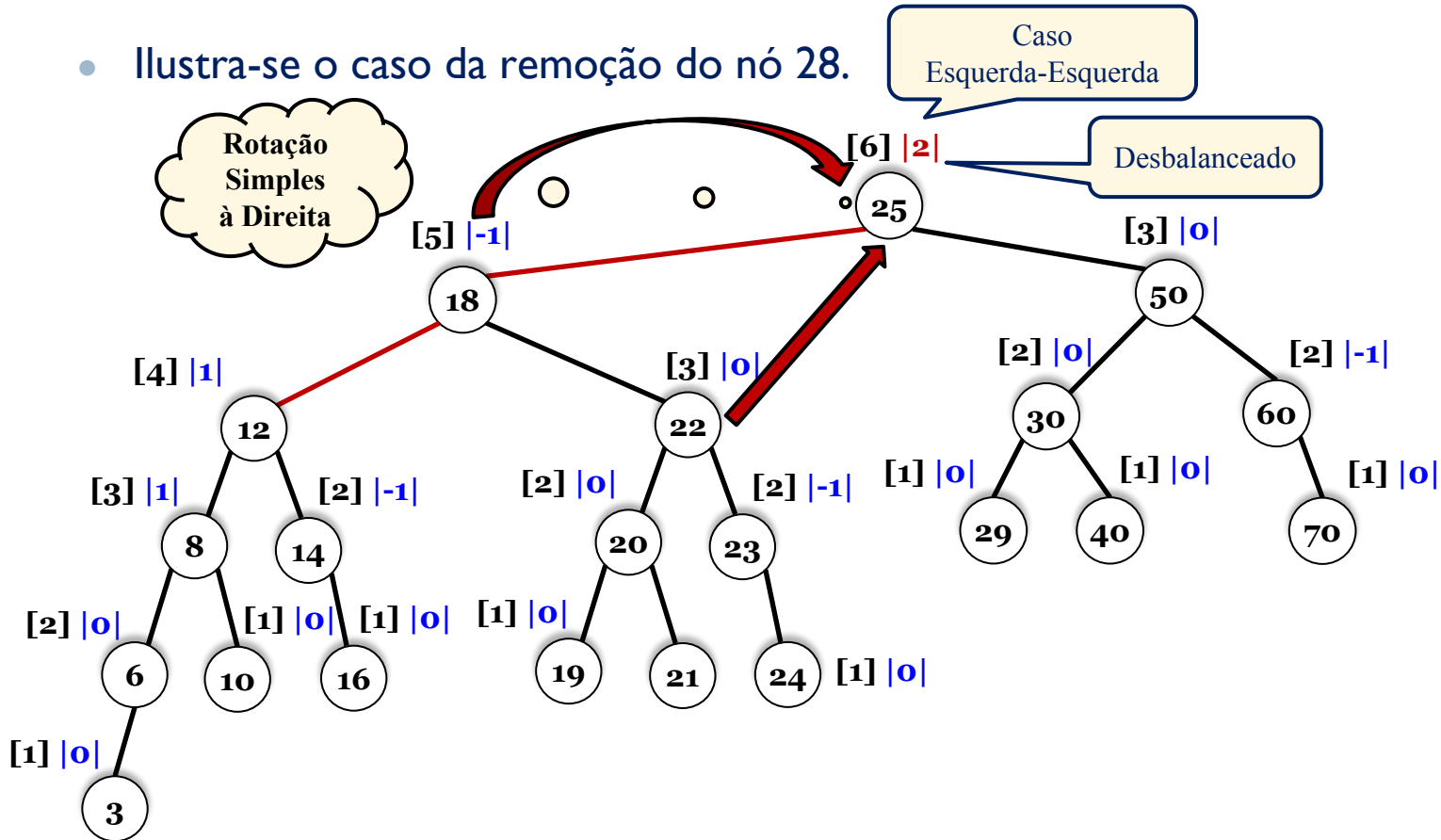
- Ilustra-se o caso da remoção do nó 28.



# Árvores AVL

## Remoção – Pior Caso – Exemplo 3

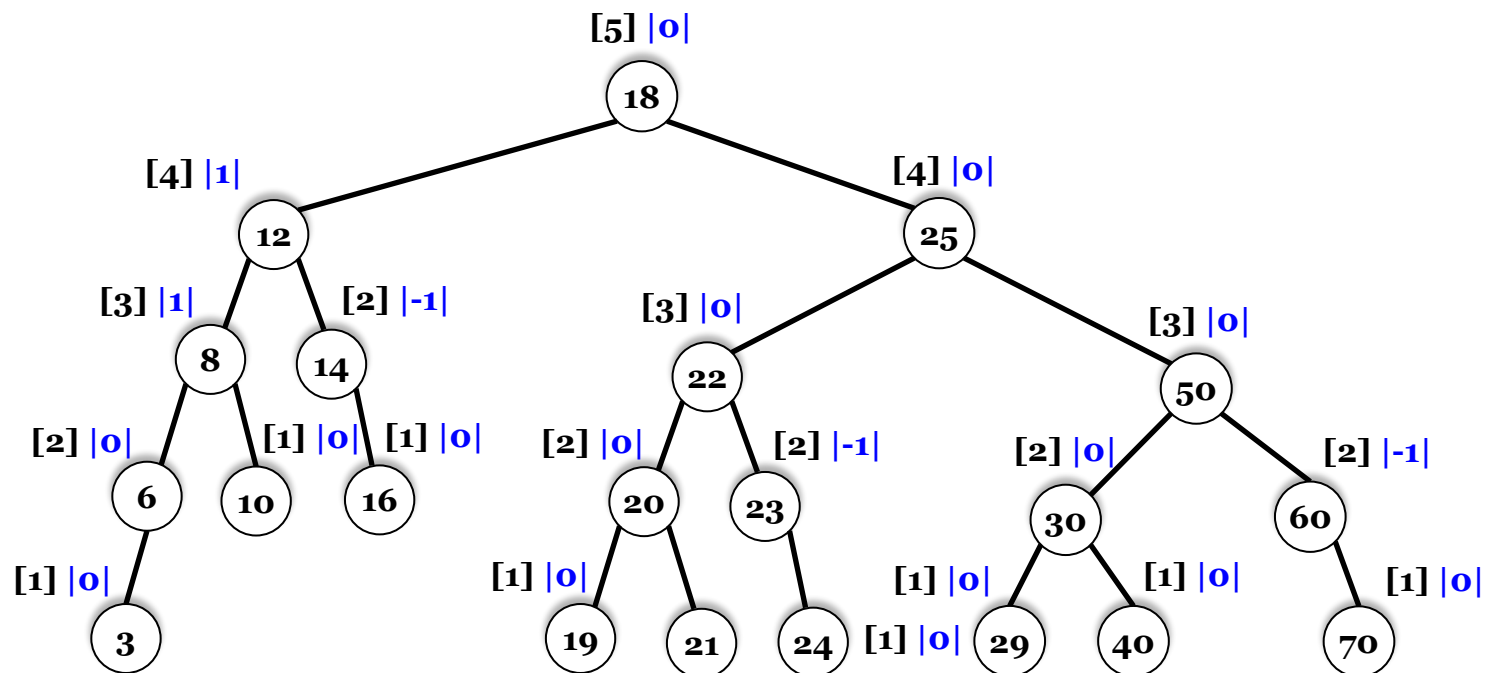
- Ilustra-se o caso da remoção do nó 28.



# Árvores AVL

## Remoção – Pior Caso – Exemplo 3

- Neste exemplo aconteceram dois desbalanceamentos no caminho ascendente do nó removido até a raiz. Foram realizadas duas rotações simples.



**Árvore Balanceada  
Após a Segunda Rotação**

# Referências

---

- Gilberg, R.F. e Forouzan, B. A. Data Structures\_A Pseudocode Approach with C. Capítulo 8. AVL Search. Segunda Edição. Editora Cengage, Thomson Learning, 2005.
- Michael T. Goodrich, Roberto Tamassia, David Mount. Data Structures and Algorithms in C++. Cap10 Search Trees. 2ª Edição. 2011.