Regras de Inferência

Lógica Matemática

Prof. Fermín A. Tang

Modus Ponens (MP)

Regra

- A regra Modus Ponens (MP) afirma que: "se você sabe que a proposição da forma $x \rightarrow y$ é verdadeira e que a parte x também o é, isso o levará a conclusão de que y é igualmente verdadeira".
- A Modus Ponens (MP) usa a ideia do escorregador de maneira direta, uma vez que você sobe no escorregador em x, não tem outra escolha se não chegar até y.

MP: $x \rightarrow y,\ x\ \vdash y$

- Qualquer argumento neste formato é válido.

Modus Ponens (MP)

Exemplos

- Pela mesma regra (MP) os seguintes argumentos são válidos:

$$\neg P \to \neg Q,\ \neg P \ \vdash \ \neg Q$$

$$(P \land Q) \to (R \land S),\ (P \land Q) \ \vdash \ (R \land S)$$

$$\big(P \leftrightarrow \neg(Q \land \neg R)\big) \to \big(\neg S \lor (R \to P)\big),\ \big(P \leftrightarrow \neg(Q \land \neg R)\big) \vdash \big(\neg S \lor (R \to P)\big)$$

Modus Ponens (MP)

Exemplo de Prova de Inferência

- ✘ Uma prova típica começa pelas premissas, deduzindo-se uma sequência de proposições intermediárias até chegar na conclusão do argumento. Cada linha da prova é numerada, ela contêm a proposição, seguida da sua justificativa e as linhas envolvidas na dedução.
- ✘ Considere a prova do seguinte argumento:

$$(P \rightarrow Q),\ (Q \rightarrow R), (R \rightarrow S),\ P \ \vdash\ S$$

- ✘ Primeiro copiamos as premissas:

1.	$(P \rightarrow Q)$	Por premissa
2.	$(Q \rightarrow R)$	Por premissa
3.	$(R \rightarrow S)$	Por premissa
4.	P	Por premissa

- ✘ Depois fazemos as deduções:

5.	Q	De (1) e (4) por MP
6.	R	De (2) e (5) por MP
7.	S	De (3) e (6) por MP

- ✘ A prova termina quando conseguimos deduzir a conclusão.

Modus Tollens (MT)

Regra

- A regra Modus Tollens (MT) afirma que: "se você sabe que a proposição da forma $x \rightarrow y$ é verdadeira e que a parte y é falsa, então pode concluir que x também é falsa".
- A Modus Tollens (MT) usa a ideia do escorregador de maneira diferente da MP, basicamente diz, que se você não chegou ao final do escorregador em y, então não subiu nele em x.

$$\text{MT: } x \rightarrow y,\ \neg y \ \vdash\ \neg x$$

- Qualquer argumento neste formato é válido.

Modus Tollens (MT)

Exemplos

- Pela mesma regra (MP) os seguintes argumentos são válidos:

$$P \rightarrow Q, \ \neg Q \ \vdash \ \neg P$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R, \quad \neg R \quad \vdash \quad \neg(P \wedge Q)$$

$$(P \vee Q) \rightarrow (R \leftrightarrow S), \quad \neg(R \leftrightarrow S) \quad \vdash \quad \neg(P \vee Q)$$

Modus Tollens (MT)

Exemplo de Prova de Inferência

- Considere a prova do seguinte argumento:

$$(P \to Q),\quad (\neg P \to R),\quad \neg Q \quad \vdash \quad R$$

- Primeiro copiamos as premissas:

1.	$(P \to Q)$	Por premissa
2.	$(\neg P \to R)$	Por premissa
3.	$\neg Q$	Por premissa
4.	$\neg P$	De (1) e (3) por MT
5.	R	De (2) e (4) por MP

- Depois fazemos as deduções:

- A prova termina quando conseguimos deduzir a conclusão.

Conjunção (CONJ)

Regra

- A regra de conjunção (CONJ) afirma que: "se você tem duas coisas separadamente, também tem ambas juntas".
- A conjunção (CONJ) é uma forma muito direta: se você tem duas proposições x e y dadas como verdadeiras, então pode concluir que a sua conjunção, $x \wedge y$ também é verdadeira.

$$\text{CONJ: } x,\ y\ \vdash\ x \wedge y$$

- Qualquer argumento neste formato é válido.

Conjunção (CONJ)

Exemplo de Prova de Inferência

- Considere a prova do seguinte argumento:

$$(P \to Q),\quad (R \to S),\quad P,\quad \neg S \quad \vdash \quad (P \land \neg S) \land (Q \land \neg R)$$

- Primeiro copiamos as premissas:

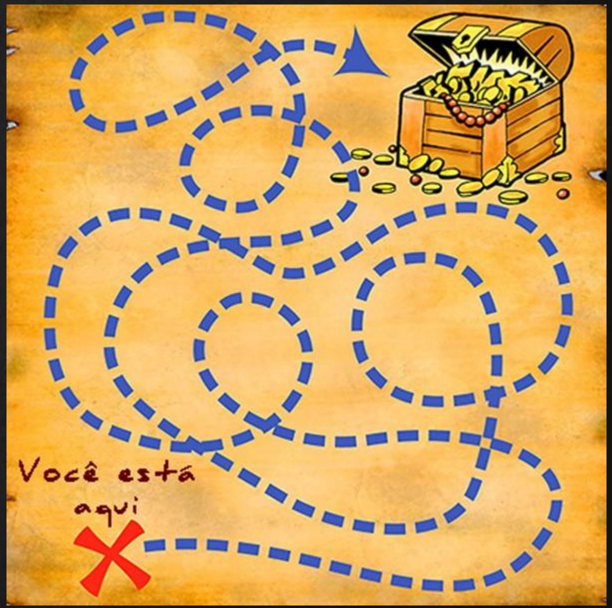
1.	$(P \to Q)$	Por premissa
2.	$(R \to S)$	Por premissa
3.	P	Por premissa
4.	$\neg S$	Por premissa
5.	$(P \land \neg S)$	De (3) e (4) por CONJ
6.	Q	De (1) e (3) por MP
7.	$\neg R$	De (2) e (4) por MT
8.	$(Q \land \neg R)$	De (6) e (7) por CONJ
9.	$(P \land \neg S) \land (Q \land \neg R)$	De (5) e (8) por CONJ

- Depois fazemos as deduções:

- A prova termina quando conseguimos deduzir a conclusão.

Provas de Inferência

- ✘ De modo geral, as conclusões longas tendem a resultar em provas mais fáceis do que as conclusões curtas. A estratégia a seguir consiste em construir a conclusão a partir de suas partes, uma parte de cada vez.
- ✘ Escrever uma prova pode ser parecido com uma caça ao tesouro: tente encontrar o caminho para a próxima pista da forma que puder.
- ✘ Por exemplo, analise a conclusão para saber a onde está tentando chegar. Olhe as suas premissas e veja quais podem ajuda-lo.



Simplificação (SIMP)

Regra

- A regra de simplificação (SIMP) lhe diz: "se você tem duas coisas juntas, também terá uma delas separadamente".
- A SIMP é um tipo avesso da CONJ. Ao invés de começar com as peças para construir o todo, você começa pelo todo e o reduz a uma das suas partes.

SIMP: $x \wedge y \vdash x$ SIMP: $x \wedge y \vdash y$

- Os argumentos com qualquer um destes formatos são válidos.

Simplificação (SIMP)

Exemplo de Prova de Inferência

- ✘ Considere a prova do seguinte argumento:

$$(P \rightarrow Q),\quad (R \rightarrow S),\quad (P \wedge\sim S) \quad \vdash \quad (Q \wedge\sim R)$$

- ✘ Primeiro copiamos as premissas:

1.	$(P \rightarrow Q)$	Por premissa
2.	$(R \rightarrow S)$	Por premissa
3.	$(P \wedge \neg S)$	Por premissa

- ✘ Depois fazemos as deduções:

4.	P	De (3) por SIMP
5.	$\neg S$	De (3) por SIMP
6.	Q	De (1) e (4) por MP
7.	$\neg R$	De (2) e (5) por MT
8.	$(Q \wedge \neg R)$	De (6) e (7) por CONJ

- ✘ A prova termina quando conseguimos deduzir a conclusão.

Adição (AD)

Regra

- A regra de adição (AD) afirma que: “se você tem x, pode concluir tanto x quanto y”.

$$\text{AD: } x \vdash x \vee y$$

- A princípio essa regra pode parecer estranha. Você pode-se perguntar: “Se estou começando apenas com o x, de onde surge o y ?
- Lembre-se que para construir uma proposição do tipo $\vee$ verdadeira, você só precisa que uma das partes seja verdadeira. A outra parte pode ser qualquer coisa.

Adição (AD)

Exemplo de Prova de Inferência

- Considere o seguinte argumento:

$$Q \rightarrow S, Q \vdash ((P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow R) \vee ((P \vee S) \wedge (Q \vee R))$$

- Primeiro copiamos as premissas, observe que temos pouco com que trabalhar:

1.	$Q \rightarrow S$	Premissa
2.	Q	Premissa

Adição (AD)

Exemplo de Prova de Inferência

- A primeira inferência aparece aplicando a regra modus ponens (MP) :

1.	$Q \to S$	Premissa
2.	Q	Premissa
3.	S	De 1 e 2 por MP

- Quando a conclusão de um argumento é uma proposição do tipo ∨ você apenas precisa construir uma das duas subproposições e então usar a regra AD para acrescentar a outra parte.
- Como a conclusão é $\big((P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow R\big) \vee \big((P \vee S) \wedge (Q \vee R)\big)$ temos duas escolhas construir a primeira parte da conclusão ou a segunda.
- Escolhe-se a segunda parte.

Adição (AD)

Dica

- ✘ Uma prova é como uma ponte: quanto maior ela é, mais provável é que tenha que ser construída a partir dos dois lados e não apenas de um.
- ✘ Assim, para provas mais difíceis como esta, uma estratégia a seguir é começar pela conclusão a que está tentando chegar e trabalhar de baixo para cima.

Adição (AD)

Exemplo de Prova de Inferência

- ✘ Neste caso, a conclusão possui dois termos. O segundo termo parece ser mais promissor. Podemos usar a regra da adição (AD) para construir a conclusão a partir desse segundo termo.

6. $((P \vee S) \wedge (Q \vee R))$
7. $((P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow R) \vee ((P \vee S) \wedge (Q \vee R))$ De 6 por AD

Adição (AD)

Exemplo de Prova de Inferência

- Continuamos trabalhando de baixo para cima. Observe a linha 6, a pergunta natural aqui é como cheguei aqui? Observe que a proposição em 6 é uma conjunção, logo ela pode ser construída juntando as duas partes, colocadas em 4 e 5, mediante a regra (CONJ):

4. $(P \vee S)$
5. $(Q \vee R)$
6. $\big((P \vee S) \wedge (Q \vee R)\big)$ De 4 e 5 por CONJ
7. $\big((P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow R\big) \vee \big((P \vee S) \wedge (Q \vee R)\big)$ De 6 por AD

Adição (AD)

Exemplo de Prova de Inferência

- Novamente, a pergunta a fazer é como chegamos aqui? Como construir $(P \vee S)$ e $(Q \vee R)$. Considere os dois lados da ponte:

1.	$Q \to S$	Premissa
2.	Q	Premissa
3.	S	De 1 e 2 por MP
4.	$(P \vee S)$	
5.	$(Q \vee R)$	
6.	$((P \vee S) \wedge (Q \vee R))$	De 4 e 5 por CONJ
7.	$((P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow R) \vee ((P \vee S) \wedge (Q \vee R))$	De 6 por AD

- Observe que as linhas 2 e 3 permitem construir as expressões em 4 e 5 mediante a regra AD. Temos assim:

Adição (AD)

Exemplo de Prova de Inferência

- Finalmente temos a prova completa, que deve mostrar uma sequência de passos para deduzir a conclusão a partir das premissas.

1.	$Q \rightarrow S$	Premissa
2.	Q	Premissa
3.	S	De 1 e 2 por MP
4.	$(P \vee S)$	De 3 por AD
5.	$(Q \vee R)$	De 2 por AD
6.	$\big((P \vee S) \wedge (Q \vee R)\big)$	De 4 e 5 por CONJ
7.	$\big((P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow R\big) \vee \big((P \vee S) \wedge (Q \vee R)\big)$	De 6 por AD

Silogismo Disjuntivo (SD)

Regra

- ✘ A regra de silogismo disjuntivo (SD) afirma que: "se você tem duas opções e pode eliminar uma, pode ter certeza daquela que restou"

SD: $x \vee y,\ \neg x \ \vdash \ y$ SD: $x \vee y,\ \neg y \ \vdash \ x$

- ✗ O silogismo disjuntivo está relacionado com a AD do seguinte modo: Enquanto o SD decompõe uma proposição do tipo $\vee$ a AD a constrói.

Silogismo Disjuntivo (SD)

Exemplo de Prova de Inferência

- ✘ Considere o seguinte argumento:

$$P \to \neg Q,\ P \lor R,\ Q \lor S,\ \neg R \ \vdash\ \neg P \lor S$$

- ✘ Primeiro copiamos as premissas:

1. $P \to \neg Q$ Premissa
2. $P \lor R$ Premissa
3. $Q \lor S$ Premissa
4. $\neg R$ Premissa

Silogismo Disjuntivo (SD)

Exemplo de Prova de Inferência

- Observe que a proposição mais simples $\neg R$ está na linha 4. Além disso, a linha 2 também contém o literal R. As duas proposições permitem aplicar a regra SD, temos assim:

1.	$P \rightarrow \neg Q$	Premissa
2.	$P \vee R$	Premissa
3.	$Q \vee S$	Premissa
4.	$\neg R$	Premissa
5.	P	De 2 e 4, por SD

Silogismo Disjuntivo (SD)

Exemplo de Prova de Inferência

- Agora que temos a proposição P na linha 5, podemos usar ela para fazer outra inferência usando a regra Modus Ponens (MP):

1.	$P \to \neg Q$	Premissa
2.	$P \vee R$	Premissa
3.	$Q \vee S$	Premissa
4.	$\neg R$	Premissa
5.	P	De 2 e 4, por SD
6.	$\neg Q$	De 1 e 5, por MP

Silogismo Disjuntivo (SD)

Exemplo de Prova de Inferência

- Podemos usar novamente a regra de silogismo disjuntivo (SD) nas linhas indicadas, temos assim:

1.	$P \to \neg Q$	Premissa
2.	$P \vee R$	Premissa
3.	$Q \vee S$	Premissa
4.	$\neg R$	Premissa
5.	P	De 2 e 4, por SD
6.	$\neg Q$	De 1 e 5, por MP
7.	S	De 3 e 6, por SD

Silogismo Disjuntivo (SD)

Exemplo de Prova de Inferência

- Finalmente, podemos usar a regra de adição (AD) para construir a conclusão $\neg P \vee S$, temos assim:

1.	$P \rightarrow \neg Q$	Premissa
2.	$P \vee R$	Premissa
3.	$Q \vee S$	Premissa
4.	$\neg R$	Premissa
5.	P	De 2 e 4, por SD
6.	$\neg Q$	De 1 e 5, por MP
7.	S	De 3 e 6, por SD
8.	$\neg P \vee S$	De 7, por AD

Silogismo Hipotético (SH)

Regra

- A regra de Silogismo Hipotético (SH) faz sentido quando você o olha. Ele lhe diz: " Se você sabe que x leva a y e que y leva a z, então x leva a z".

SH: $x \to y,\; y \to z \;\vdash\; x \to z$

- Observe que o SH é a primeira regra até agora que não contém constantes únicas. Ele não constrói nem desconstrói proposições.

Silogismo Hipotético (SH)

Exemplo de Prova de Inferência

- ✘ Considere a prova do seguinte argumento:

$$(P \rightarrow Q),\quad (Q \rightarrow R),\quad (R \rightarrow S)\,,\quad \neg S \quad \vdash \neg P \wedge (P \rightarrow S)$$

- ✘ Primeiro copiamos as premissas:
- ✘ Depois fazemos as deduções:

1.	$(P \rightarrow Q)$	Por premissa
2.	$(Q \rightarrow R)$	Por premissa
3.	$(R \rightarrow S)$	Por premissa
4.	$\neg S$	Por premissa
5.	$(P \rightarrow R)$	De (1) e (2) por SH
6.	$(P \rightarrow S)$	De (5) e (3) por SH
7.	$\neg P$	De (6) e (4) por MT
8.	$\neg P \wedge (P \rightarrow S)$	De (7) e (6) por CONJ

- ✘ A prova termina porque conseguimos deduzir a conclusão.

Dilema Construtivo (DC)

Regra

- A regra de Dilema Construtivo (DC) parece ser menos intuitivo que as outras regras anteriores. No entanto, basta traduzir ao português as suas afirmações para elas fazerem sentido. Ele diz "se você sabe que tem x ou y, e também sabe que x o leva a s e que y o leva a t, então você tem s ou t.

DC: $x \vee y,\ \ x \rightarrow s\ ,\ \ y \rightarrow t\ \ \vdash\ \ s \vee t$

- Observe que esta regra usa três proposições para produzir uma. Com isso, seu uso é mais raro, no entanto, quando aparece a oportunidade de usar é mais fácil de identificar.

Dilema Construtivo (DC)

Exemplo de Prova de Inferência

- Considere a prova do seguinte argumento:

$$(P \to Q),\ (Q \to R), (S \to T), (U \to V), (S \vee U)\ , \neg R\ \vdash\ (\neg P \wedge \neg Q) \wedge (T \vee V)$$

- Primeiro copiamos as premissas:

1.	$(P \to Q)$	Por premissa
2.	$(Q \to R)$	Por premissa
3.	$(S \to T)$	Por premissa
4.	$(U \to V)$	Por premissa
5.	$(S \vee U)$	Por premissa
6.	$\neg R$	Por premissa

- Depois fazemos as deduções:

7.	$(T \vee V)$	De (3), (4) e (5) por DC
8.	$\neg Q$	De (2) e (6) por MT
9.	$\neg P$	De (1) e (8) por MT
10.	$(\neg P \wedge \neg Q)$	De (8) e (9) por CONJ
11.	$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge (T \vee V)$	De (7) e (10) por CONJ

- A prova termina porque conseguimos deduzir a conclusão.

Referências

- Zegarelli, Mark. Lógica para Leigos. Capítulo 9. O que você tem que provar? Editora Alta Books. Rio de Janeiro. 2013.