Cálculo III – Prova Substitutiva da P3 – 07/12/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Matrícula: ____________________ **Curso:** ____________________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. (2½ pontos) Calcule

$$\iint_S x^2 + y^2 \, dS,$$

onde S é a superfície parametrizada por

$$\vec{r}(u,v) = (2uv,\ u^2 - v^2,\ u^2 + v^2), \qquad u^2 + v^2 \leq 1.$$

Dica do Mestre: primeiro arme a integral em função de u e v, depois transforme para coordenadas polares para calcular a integral resultante.

Solução:

Temos

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_u = 2\,(v,\ u,\ u), \quad \vec{r}_v = 2\,(u,\ -v,\ v),\\
&\vec{r}_u \times \vec{r}_v = 4\,\big(2uv,\ u^2 - v^2,\ -(u^2+v^2)\big),\\
&\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = 4\,\sqrt{(2uv)^2 + (u^2-v^2)^2 + (u^2+v^2)^2}\\
&\quad = 4\,\sqrt{4u^2v^2 + (u^4 - 2u^2v^2 + v^4) + (u^4 + 2u^2v^2 + v^4)}\\
&\quad = 4\,\sqrt{2(u^4 + 2u^2v^2 + v^4)} = 4\,\sqrt{2(u^2+v^2)^2} = 4\sqrt{2}(u^2+v^2).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2 + y^2 \, dS &= \iint\limits_{u^2+v^2 \leq 1} \left[(2uv)^2 + (u^2-v^2)^2\right] \left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\| \, du\, dv\\
&= \iint\limits_{u^2+v^2 \leq 1} \left(4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4\right)\left[4\sqrt{2}(u^2+v^2)\right] du\, dv\\
&= 4\sqrt{2} \iint\limits_{u^2+v^2 \leq 1} (u^4 + 2u^2v^2 + v^4)(u^2+v^2)\, du\, dv\\
&= 4\sqrt{2} \iint\limits_{u^2+v^2 \leq 1} (u^2+v^2)^2\,(u^2+v^2)\, du\, dv\\
&= 4\sqrt{2} \iint\limits_{u^2+v^2 \leq 1} (u^2+v^2)^3\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de coordenadas $u = r\cos\theta$, $v = r\operatorname{sen}\theta$, temos

$$\iint_S x^2 + y^2 \, dS = 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2)^3\, r \, dr\, d\theta = 4\sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \left.\frac{r^8}{8}\right|_0^1 = \sqrt{2}\pi.$$

2. (2½ pontos) Considere S a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ no primeiro octante, com orientação para fora. Seja

$$\vec{F}(x,y,z)=(x,-z,y).$$

Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

Solução:

S pode ser parametrizada por

$$\vec{r}(\varphi,\theta)=(2\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ 2\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le\pi/2,\quad 0\le\theta\le\pi/2.$$

Temos

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_\varphi=2\,(\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\operatorname{sen}\theta,\ -\operatorname{sen}\varphi),\\
&\vec{r}_\theta=2\,(-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ 0),\\
&\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta=4\operatorname{sen}\varphi\,(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ \cos\varphi).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(x,-z,y)\cdot(\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta)\,d\varphi d\theta\\
&\quad=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\big[2\,(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ -\cos\varphi,\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta)\big]\\
&\qquad\qquad\cdot\big[4\operatorname{sen}\varphi\,(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ \cos\varphi)\big]\,d\varphi\,d\theta\\
&\quad=8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\varphi\cos^2\theta\,d\varphi\,d\theta=\frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

3. (2½ pontos) Seja $\vec{F}(x,y)=(y^3,\ -x^3)$ e C o círculo de raio 2 centrado na origem. Use o Teorema de Green para calcular

$$\oint_{\partial C}\vec{F}\cdot d\vec{r},$$

onde a circunferência ∂C é percorrida no sentido trigonométrico.

Solução:

$$\oint_{\partial C}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_C\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dA=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}-3x^2-3y^2\,dx\,dy.$$

Passando para coordenadas polares, temos

$$\oint_{\partial C}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\int_0^2-3r^2\cdot r\,dr\,d\theta=-3\cdot 2\pi\cdot\frac{r^4}{4}\bigg|_0^2=-24\pi.$$

4. ($2\frac{1}{2}$ pontos) Seja $\vec{F}(x,y,z) = (yz,\ 2xz,\ e^{xy})$ e C a circunferência dada pelas equações

$$x^2 + y^2 = 16, \qquad z = 5.$$

Use o Teorema de Kelvin–Stokes para calcular a integral de linha de $\vec{F}$ em C,

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde C é percorrida no sentido trigonométrico.

Solução:

Temos

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = (xe^{xy} - 2x,\ y - ye^{xy},\ z).$$

Ademais, C é a fronteira de um círculo que pode ser parametrizado por

$$\begin{aligned}
&\vec{s}(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta,\ 5), \quad 0 \le r \le 4, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\\
&\vec{s}_r = (\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ 0),\\
&\vec{s}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta,\ r\cos\theta,\ 0),\\
&\vec{s}_r \times \vec{s}_\theta = (0,\ 0,\ r).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \le 16,\\ z=5}} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot (\vec{s}_r \times \vec{s}_\theta)\, dS\\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^4 (xe^{xy} - 2x,\ y - ye^{xy},\ z) \cdot (0,\ 0,\ r)\, dr\, d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^4 zr\, dr\, d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^4 5r\, dr\, d\theta \quad \text{(pois, na nossa parametrização, } z = 5\text{)}\\
&= 5 \cdot 2\pi \cdot \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^4 = 80\pi.
\end{aligned}$$