

FORMAS NORMAIS

Lógica Matemática



ALFABETO SIMPLIFICADO

DEFINIÇÃO

- ✗ Com a definição de **conjuntos completos**, sabemos que os conectivos definidos no alfabeto da lógica proposicional $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ são redundantes.
- ✗ Assim, é possível redefinir o alfabeto da lógica proposicional de maneira simplificada utilizando um conjunto completo.
- ✗ Esta simplificação não muda em nada a linguagem da lógica proposicional do ponto de vista semântico.
- ✗ Há varias definições possíveis para o alfabeto da lógica proposicional, todas equivalentes expressando a mesma linguagem.

- ✗ Definição.- (**Alfabeto simplificado**) Um alfabeto simplificado da Lógica Proposicional é constituído por:
 - ✗ 1.- Símbolos de pontuação: $(,)$;
 - ✗ 2.- Símbolos proposicionais: $P, Q, R, S, P1, Q1, R1, S1, P2, Q2, \dots$;
 - ✗ 3.- Conectivos proposicionais: \neg, \vee .

LITERAL

DEFINIÇÃO

- ✗ Definição.– (Literal) Um literal, na lógica proposicional, é um símbolo proposicional ou a sua negação.
- ✗ **Exemplo.**– Veja os exemplos de literais:
 $\neg P, Q,$
 $\neg R, \neg Q,$
 P, S

FORMAS NORMAIS

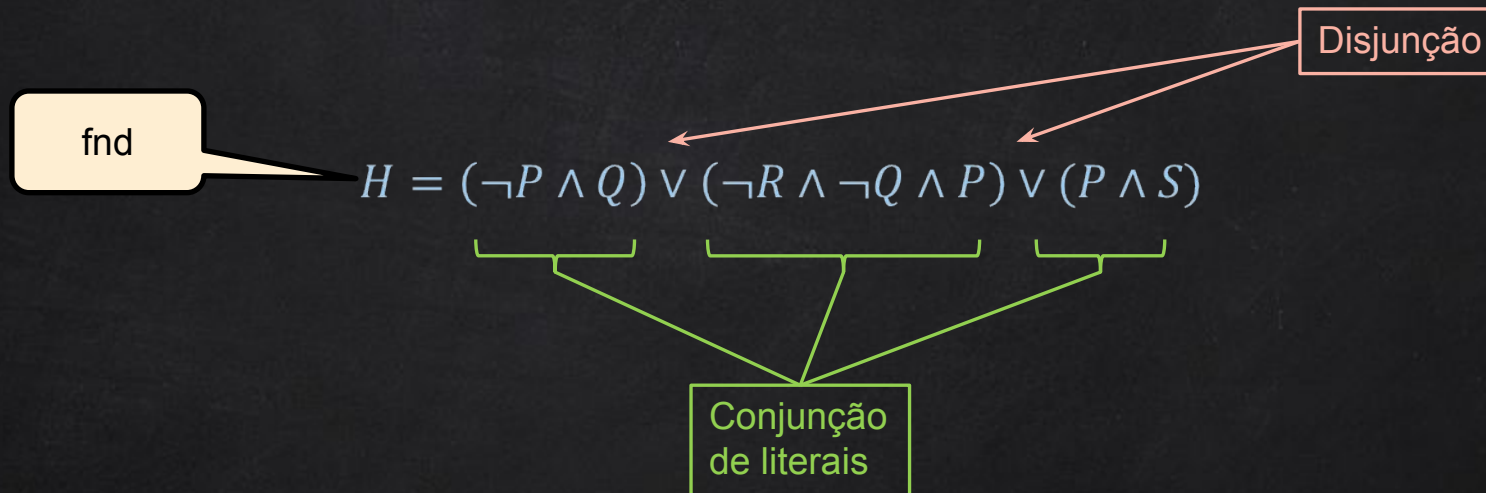
DEFINIÇÃO

- x Definição.– (Formas Normais) Há dois tipos de formas normais:
- x 1.– Uma fórmula H está na forma normal disjuntiva (fnd) se é uma disjunção de conjunção de literais.
- x 2.– Uma fórmula H está na forma normal conjuntiva (fnc) se é uma conjunção de disjunção de literais.

FORMA NORMAL DISJUNTIVA

DEFINIÇÃO

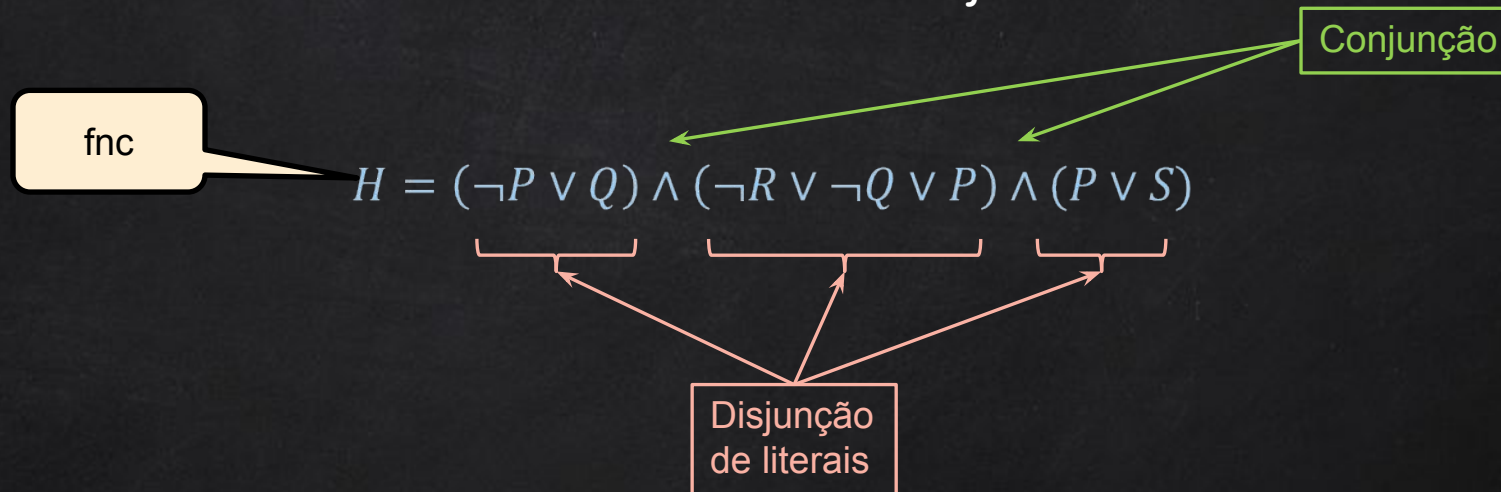
- × Exemplo.– (Forma Normal Disjuntiva)
- × A fórmula H, está na forma normal disjuntiva (fnd):



FORMA NORMAL CONJUNTIVA

DEFINIÇÃO

- × **Exemplo.-** (Forma Normal Conjuntiva)
- × A fórmula H, está na forma normal conjuntiva (fnc):



FORMAS NORMAIS

PROPOSIÇÃO

- x Proposição.- (Formas Normais) Seja H uma fórmula qualquer da lógica proposicional.
- x 1.- Existe uma fórmula H_{fnd} na forma normal disjuntiva que é equivalente a H ;
- x 2.- Existe uma fórmula H_{fnc} na forma normal conjuntiva que é equivalente a H .
- x Apresenta-se algoritmos para a transformação de uma fórmula H qualquer nas formas normais disjuntiva e conjuntiva, respectivamente usando tabelas-verdade.

TRANSFORMAÇÃO DE FÓRMULAS PARA A FND

ALGORITMO

- ✗ Converter uma fórmula H na forma fnd, significa expressar H como uma **disjunção de componentes**. Cada componente é uma conjunção de literais que representa um caso em que a fórmula H assume valor **verdadeiro**. Como cada componente é uma conjunção de literais, então essa componente será verdadeira se os literais forem todos verdadeiros.
- ✗ A fórmula H_{fnd} será verdadeira se **uma das componentes** da disjunção for verdadeira. Caso contrário, a fórmula H_{fnd} será falsa, uma vez que **todas as componentes** sejam falsas.
- ✗ Observe que a ocorrência de um caso exclui os outros, sejam eles casos em que a fórmula é verdadeira ou falsa. Temos um exemplo de FND:

$$H = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (P \wedge S)$$

TRANSFORMAÇÃO DE FÓRMULAS PARA A FND

ALGORITMO

- ✕ Algoritmo para a fnd.– (Transformação de H para fnd)
 - Passo 1.– Construa a tabela-verdade associada a H;
 - Passo 2.– Extrair as linhas da tabela-verdade que interpretam H como verdadeiro;
 - Passo 3.– Utilizando as informações de cada linha extraída, construir uma **conjunção de literais** que represente o caso verdadeiro representado pela linha;
 - Passo 4.– Construir a fórmula H_{fnd} como a **disjunção** das expressões obtidas no passo 3.

TRANSFORMAÇÃO DE FÓRMULAS PARA A FND

EXEMPLO

✗ **Exemplo.**– Considere a fórmula H: $H = (P \rightarrow Q) \wedge R$

✗ Executamos os passos do algoritmo fnd.

Passo 1.–

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Passo 2.–

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Passo 3.–

$(P \wedge Q \wedge R),$
 $(\neg P \wedge Q \wedge R),$
 $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

Formar uma
conjunção com
os literais

Passo 4.– $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

✗ Explicação: No passo 2, cada linha da tabela-verdade representa uma **condição** na forma de uma conjunção para a expressão lógica ser **verdadeira**. Temos assim, três formas alternativas de satisfazer a expressão lógica.

TRANSFORMAÇÃO DE FÓRMULAS PARA A FNC

ALGORITMO

- ✗ Converter uma fórmula H na forma fnc, significa expressar H como uma **conjunção de componentes**. Cada componente é uma disjunção de literais que representa um caso em que a fórmula H assume valor **falso**. Como cada componente é uma disjunção de literais, então essa componente será falsa se os literais forem todos falsos.
- ✗ A fórmula H_{fnc} será falsa se **uma das componentes** da conjunção for falsa. Caso contrário, a fórmula H_{fnd} será verdadeira, uma vez que **todas as componentes** sejam verdadeiras.
- ✗ Observe que a ocorrência de um caso exclui os outros, sejam eles casos em que a fórmula é verdadeira ou falsa. Temos um exemplo:

$$H = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q \vee P) \wedge (P \vee S)$$

TRANSFORMAÇÃO DE FÓRMULAS PARA A FNC

ALGORITMO

- ✕ Algoritmo para a fnc.– (Transformação de H para fnc)
 - Passo 1.– Construa a tabela-verdade associada a H;
 - Passo 2.– Extrair as linhas da tabela-verdade que interpretam H como **falso**;
 - Passo 3.– Utilizando as informações de cada linha extraída, construir uma **disjunção de literais** que represente o caso falso representado pela linha. Para isso inverta os literais presentes em cada linha extraída;
 - Passo 4.– Construir a fórmula H_{fnc} como a **conjunção** das expressões obtidas no passo 3.

TRANSFORMAÇÃO DE FÓRMULAS PARA A FNC

EXEMPLO

- ✗ **Exemplo.**– Considere a fórmula H: $H = (P \rightarrow Q) \wedge R$
- ✗ Executamos os passos do algoritmo fnc.

Passo 1.–

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Passo 2.–

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

Passo 3.–

$(\neg P \vee \neg Q \vee R),$
 $(\neg P \vee Q \vee \neg R),$
 $(\neg P \vee Q \vee R),$
 $(P \vee \neg Q \vee R),$
 $(P \vee Q \vee R)$

Inverter os literais e formar uma disjunção

Passo 4.– $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

TRANSFORMAÇÃO DE FÓRMULAS PARA A FNC

EXEMPLO-EXPLICAÇÃO

Passo 2.-

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

Passo 3.-

$(\neg P \vee \neg Q \vee R),$
 $(\neg P \vee Q \vee \neg R),$
 $(\neg P \vee Q \vee R),$
 $(P \vee \neg Q \vee R),$
 $(P \vee Q \vee R)$

- ✕ Explicação: No passo 2, cada linha da tabela-verdade representa uma condição verdadeira na **forma de conjunção** para a expressão lógica ser falsa. Precisamos converter cada condição na **forma de disjunção**, para isso aplicamos Dupla Negação e De Morgan, conforme ilustrado no exemplo:

Verdadeiro

$$\begin{aligned} & \overbrace{(P \wedge Q \wedge \neg R)}^{\text{Verdadeiro}} \Leftrightarrow \neg \neg (P \wedge Q \wedge \neg R) \\ & \Leftrightarrow \neg (\underbrace{\neg P \vee \neg Q \vee R}_{\text{Falso}}) \end{aligned}$$

Dupla Negação

De Morgan

Falso

TRANSFORMAÇÃO DE FÓRMULAS PARA A FNC

EXEMPLO-EXPLICAÇÃO

- ✗ Temos assim, que a expressão:

$$H = (P \rightarrow Q) \wedge R$$

- ✗ Na forma normal disjuntiva FND:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

- ✗ Pode ser escrita para a falsidade conforme a tabela:

$$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

- ✗ Negando a expressão e aplicando De Morgan temos:

$$\neg(P \wedge Q \wedge \neg R) \wedge \neg(P \wedge \neg Q \wedge R) \wedge \neg(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \wedge \neg(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

- ✗ Aplicando De Morgan a cada termos a forma normal conjuntiva FNC:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

REFERÊNCIAS

- ✕ De Souza, João Nunes. Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins. Capítulo 3. 3ª Edição. Editora Campus. São Paulo. 2015.