3. I. Grattan-Guinness. "Por que George Green escrever seu ensaio de 1828 sobre eletricidade e magnetismo?" *Amer. Mat. mensal*, Vol. 102 (1995), p. 387–96.
4. J. Gray. "Houve um moleiro alegre". *The New Scientist*, Vol. 139 (1993), p. 24–27.
5. G. E. Hutchinson. *The Enchanted Voyage and Other Studies*. Westport, CT: Greenwood Press, 1978.
6. Victor Katz. *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 678–80.
7. Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 683–85.
8. Sylvanus P. Thompson. *The Life of Lord Kelvin*. Nova York: Chelsea, 1976.

16.9 O Teorema do Divergente

Na Seção 16.5, reescrevemos o Teorema de Green na versão vetorial

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

onde C é a fronteira positivamente orientada da região do plano D. Se quisermos estender esse teorema para campos de vetores em $\mathbb{R}^3$, podemos fazer a suposição de que

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dV$$

onde S é a superfície fronteira da região sólida E. A Equação 1 é verdadeira sob hipóteses apropriadas e é chamada Teorema do Divergente. Observe sua semelhança com os Teoremas de Green e de Stokes, pois ele relaciona a integral da derivada de uma função (div $\mathbf{F}$, nesse caso) sobre uma região com a integral da função original $\mathbf{F}$ sobre a fronteira da região.

Nesta fase você pode querer rever os vários tipos de regiões sobre as quais calculamos integrais triplas na Seção 15.7. Enunciaremos e demonstraremos o Teorema do Divergente para regiões E que são, simultaneamente, dos tipos 1, 2 e 3 e que chamamos de **regiões sólidas simples**. (Por exemplo, as regiões delimitadas por elipsoides ou caixas retangulares são simples regiões sólidas.) A fronteira de E é uma superfície fechada e usaremos a convenção, introduzida na Seção 16.7, de que a orientação positiva é para fora, ou seja, o vetor normal unitário $\mathbf{n}$ apontará para fora de E.

O Teorema do Divergente é às vezes chamado Teorema de Gauss, em homenagem ao grande matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777 –1855), que descobriu esse teorema durante suas pesquisas sobre eletrostática. Em muitos países da Europa, o Teorema do Divergente é conhecido como Teorema de Ostrogradsky, em homenagem ao matemático russo Mikhail Ostrogradsky (1801-1862), que publicou esse resultado em 1826.

O Teorema do Divergente Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Portanto, o Teorema do Divergente afirma que, sob as condições dadas, o fluxo de $\mathbf{F}$ pela fronteira de E é igual à integral tripla da divergência de $\mathbf{F}$ em E.

DEMONSTRAÇÃO Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

assim,

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

Se $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário para fora de S, então a integral de superfície do lado esquerdo do Teorema do Divergente é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_S P\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S Q\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Portanto, para demonstrar o Teorema do Divergente, é suficiente demonstrar as três seguintes equações:

$$\boxed{2} \qquad \iint_S P\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV$$

$$\boxed{3} \qquad \iint_S Q\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV$$

$$\boxed{4} \qquad \iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

Para demonstrarmos a Equação 4, usamos o fato de que E é uma região do tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

onde D é a projeção de E sobre o plano xy. Pela Equação 15.7.6, temos

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\,dz\right] dA$$

e, portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\boxed{5} \qquad \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \left[R\big(x, y, u_2(x, y)\big) - R\big(x, y, u_1(x, y)\big)\right] dA$$

A fronteira S é constituída por três partes: a superfície inferior S_1, a superfície superior S_2, e, possivelmente, uma superfície vertical S_3, que se situa acima da curva fronteira de D. (Veja a Figura 1. S_3 pode não aparecer, tal como no caso de uma esfera.) Observe que em S_3 temos $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$, porque $\mathbf{k}$ é vertical e $\mathbf{n}$ é horizontal, e assim

$$\iint_{S_3} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_3} 0\,dS = 0$$

Logo, independentemente da existência de uma superfície vertical, podemos escrever

$$\boxed{6} \qquad \iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_2} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

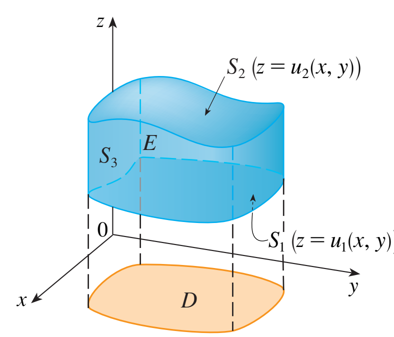


FIGURA 1

A equação de S_2 é $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, e o vetor normal que sai de $\mathbf{n}$ aponta para cima. Da Equação 16.7.10 (com $\mathbf{F}$ substituído por $R\,\mathbf{k}$), temos

$$\iint_{S_2} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D R\big(x, y, u_2(x, y)\big)\,dA$$

Sobre S_1 temos $z = u_1(x, y)$, mas aqui a normal $\mathbf{n}$ aponta para baixo, então multiplicamos por -1:

$$\iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_D R\big(x, y, u_1(x, y)\big)\,dA$$

Portanto, a Equação 6 fornece

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \left[R\big(x, y, u_2(x, y)\big) - R\big(x, y, u_1(x, y)\big)\right] dA$$

Comparando com a Equação 5, temos que

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

As Equações 2 e 3 são demonstradas de modo análogo, usando as expressões para E como uma região do tipo 2 ou do tipo 3.

Observe que o método de demonstração do Teorema do Divergente é muito semelhante ao do Teorema de Green.

EXEMPLO 1 Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ sobre a unidade esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO Primeiro calcularemos o divergente de $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

A esfera unitária S é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Então, o Teorema do Divergente dá o fluxo como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_B 1\, dV = V(B) = \tfrac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$

A solução do Exemplo 1 deve ser comparada com a solução do Exemplo 4 na Seção 16.7.

EXEMPLO 2 Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\, \mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\, \mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy)\, \mathbf{k}$$

E S é a superfície da região E delimitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e os planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$. (Veja a Figura 2.)

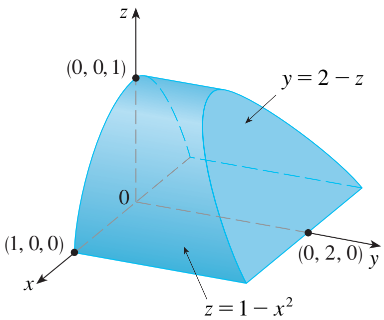


FIGURA 2

SOLUÇÃO Seria extremamente difícil calcular a integral de superfície determinada diretamente (teríamos de calcular quatro integrais de superfícies correspondentes às quatro partes de S). Além disso, o divergente de $\mathbf{F}$ é muito menos complicado que o próprio $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + e^{xz^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy) = y + 2y = 3y$$

Portanto, usamos o Teorema do Divergente para transformar a integral da superfície dada em uma integral tripla. O modo mais fácil de calcular a integral tripla é escrever E como uma região do tipo 3:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - z\}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E 3y\, dV \\
&= 3 \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y\, dy\, dz\, dx = 3 \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\, dz\, dx \\
&= \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx = -\tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} [(x^2+1)^3 - 8]\, dx \\
&= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)\, dx = \frac{184}{35}
\end{aligned}$$

Apesar de termos demonstrado o Teorema do Divergente somente para o caso de regiões sólidas simples, ele pode ser demonstrado para regiões que são a união finita de regiões sólidas simples. (O procedimento é semelhante ao usado na Seção 16.4 para estender o Teorema de Green.)

Por exemplo, vamos considerar a região E que está entre as superfícies fechadas S_1 e S_2, onde S_1 está dentro de S_2. Sejam $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ as normais apontando para fora de S_1 e S_2. Então, a fronteira de E é $S = S_1 \cup S_2$ e a sua normal $\mathbf{n}$ é dada por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ em S_1 e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ em S_2 (veja a Figura 3). Aplicando o Teorema do Divergente para S, obtemos

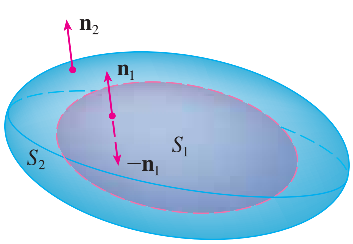


FIGURA 3

$$\boxed{7} \qquad \begin{aligned}
\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1)\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, dS \\
&= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 No exemplo 5 na Seção 16.1 consideramos o campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\, \mathbf{x}$$

onde a carga elétrica Q está localizada na origem e $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é um vetor posição. Use o Teorema do Divergente para mostrar que o fluxo elétrico de $\mathbf{E}$ através de qualquer superfície fechada S_2 que inclui a origem é

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\varepsilon Q$$

SOLUÇÃO A dificuldade é que não temos uma equação explícita para S_2 porque S_2 é *qualquer* superfície fechada envolvendo a origem. O exemplo mais simples de tal superfície seria uma esfera. Seja então S_1 uma pequena esfera de raio a e centrada à origem. Você pode verificar que div $\mathbf{E} = 0$. (Veja a Exercício 23.) Portanto, a Equação 7 dá

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

O ponto importante nesse cálculo é que podemos calcular a integral de superfície sobre S_1 porque S_1 é uma esfera. O vetor normal em $\mathbf{x}$ é $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Portanto,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

uma vez que a equação de S_1 é $|\mathbf{x}| = a$. Assim, temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q$$

Isso mostra que o fluxo elétrico de $\mathbf{E}$ é $4\pi\varepsilon Q$ através de *qualquer* superfície fechada S_2 que contenha a origem. [Esse é um caso especial da Lei de Gauss (Equação 16.7.11) para uma única carga. A relação entre ε e ε_0 é $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.]

Outra aplicação do Teorema do Divergente aparece no escoamento de fluidos. Seja $\mathbf{v}(x, y, z)$ o campo de velocidade de um fluido com densidade constante ρ. Então $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ é a taxa de vazão do fluido por unidade de área. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto no fluido e B_a é uma bola com centro em P_0 e raio muito pequeno a, então div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ para todos os pontos em B_a uma vez que div $\mathbf{F}$ é contínuo. Aproximamos o fluxo sobre a fronteira esférica S_a como segue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \approx \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)\, dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) V(B_a)$$

Essa aproximação se torna melhor à medida que $a \to 0$ e sugere que

8 $$\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

A Equação 8 diz que div $\mathbf{F}(P_0)$ é a taxa líquida de fluxo para o exterior por unidade de volume em P_0. (Esta é a razão para o nome *divergente*). Se div $\mathbf{F}(P) > 0$, o fluxo líquido é exteriormente perto de P e P é chamado uma **fonte**. Se div $\mathbf{F}(P) < 0$, o escoamento total perto de P é para dentro e P é denominado **sorvedouro**.

Para o campo vetorial da Figura 4, parece que os vetores que terminam próximo de P_1 são menores que os vetores que iniciam perto do mesmo ponto P_1. Então, o fluxo total é para fora perto de P_1, assim, div $\mathbf{F}(P_1) > 0$ e P_1 é uma fonte. Por outro lado, perto de P_2, os vetores que chegam são maiores que os que saem. Aqui o fluxo total é para dentro, assim div $\mathbf{F}(P_2) < 0$ e P_2 é um sorvedouro. Podemos usar a fórmula para $\mathbf{F}$ para confirmar essa impressão. Uma vez que $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, temos div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, que é positivo quando $y > -x$. Assim, os pontos acima da linha $y = -x$ são fontes e os que estão abaixo são sorvedouros.

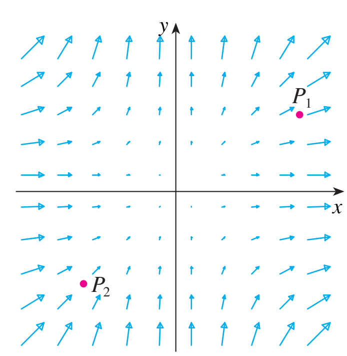


FIGURA 4
Campo vetorial $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$

16.9 Exercícios

1–4 Verifique se o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}$ na região E.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$, E é o cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, E é o sólido delimitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle z, y, x\rangle$,
E é a bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x^2, -y, z\rangle$,
E é o cilindro sólido $y^2 + z^2 \leqslant 9$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

5–15 Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; ou seja, calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^{z}\,\mathbf{i} + xy^2z^3\,\mathbf{j} - ye^z\,\mathbf{k}$,
S é a superfície da caixa delimitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$,
S é a superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ e $z = c$, onde a, b e c são números positivos

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e os planos $x = -1$ e $x = 2$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y^3)\,\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\,\mathbf{j} + (z^3 + x^3)\,\mathbf{k}$,
S é a esfera com origem no centro e raio 2

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j} - xz \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$,
S é a "esfera gorda" $x^8 + y^8 + z^8 = 8$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - zx\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

onde a, b e c são números positivos

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2)\,\mathbf{i} + xe^{-z}\,\mathbf{j} + (\operatorname{sen} y + x^2z)\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4\,\mathbf{i} - x^3z^2\,\mathbf{j} + 4xy^2z\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = x + 2$ e $z = 0$

13. $\mathbf{F} = \mathbf{r}|\mathbf{r}|$, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S consiste no hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ no plano xy

14. $\mathbf{F} = |\mathbf{r}|^2\,\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S é a esfera com raio R e origem no centro

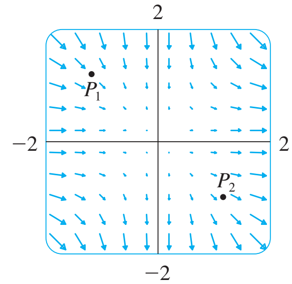
SCA **15.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \operatorname{tg} z\,\mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2}\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

SCA **16.** Use um sistema de computação algébrica para traçar o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos^2 y\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 y \cos^4 z\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^5 z \cos^6 x\,\mathbf{k}$ no cubo obtido cortando o primeiro octante pelos planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ e $z = \pi/2$. Em seguida, calcule o fluxo através da superfície do cubo.

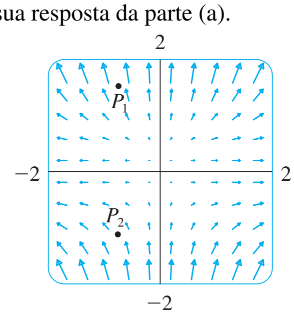
17. Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2x\,\mathbf{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \operatorname{tg} z)\,\mathbf{j} + (x^2z + y^2)\,\mathbf{k}$
e S é a metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [*Dica*: Note que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro as integrais sobre S_1 e S_2, onde S_1 é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, orientado para baixo, e $S_2 = S \cup S_1$.]

18. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = z \operatorname{tg}^{-1}(y^2)\,\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através da parte do paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e tem orientação descendente.

19. Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é mostrado. Use a interpretação do Divergente deduzida nesta seção para determinar se div $\mathbf{F}$ é positivo ou negativo em P_1 e em P_2.



20. (a) Os pontos P_1 e P_2 são fontes ou sorvedouros no campo vetorial $\mathbf{F}$ mostrado na figura? Dê uma explicação baseada exclusivamente na figura.
(b) Dado que $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2\rangle$, use a definição de divergente para verificar sua resposta da parte (a).



SCA **21–22** Trace o campo do vetor e adivinhe onde div $\mathbf{F} > 0$ e onde div $\mathbf{F} < 0$. Então calcule div $\mathbf{F}$ para verificar o seu palpite.

21. $\mathbf{F}(x, y) = \langle xy, x + y^2\rangle$ **22.** $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2, y^2\rangle$

23. Verifique se div $\mathbf{E} = 0$ para o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$.

24. Use o Teorema do Divergente para avaliar

$$\iint_S (2x + 2y + z^2)\, dS$$

onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

25–30 Demonstre cada identidade, supondo que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

25. $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$, onde $\mathbf{a}$ é um vetor constante

26. $V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

27. $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$

28. $\iint_S D_{\mathbf{n}} f\, dS = \iiint_E \nabla^2 f\, dV$

29. $\iint_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$

30. $\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV$

31. Suponha que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que f seja uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Demonstre que

$$\iint_S f\mathbf{n}\, dS = \iiint_E \nabla f\, dV$$

Estas integrais de superfície e triplos de funções vetoriais são vetores definidos por meio da integração de cada função do componente. [*Dica*: Comece por aplicar o Teorema do Divergente para $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.]