Cálculo III – 2a Avaliação – 10/10/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Matrícula: ____________________ **Curso:** ____________________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. (2 pontos) Calcule

$$\int_1^2 \int_0^{1/z} \int_0^{yz} 18x\, dx\, dy\, dz.$$

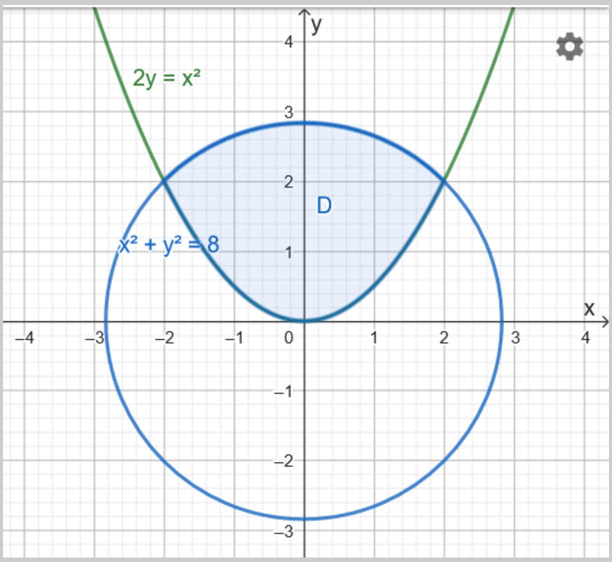
Solução:

$$\int_1^2 \int_0^{1/z} \int_0^{yz} 18x\, dx\, dy\, dz = \int_1^2 \int_0^{1/z} 9x^2\Big|_0^{yz} dy\, dz = \int_1^2 \int_0^{1/z} 9y^2z^2\, dy\, dz$$
$$= \int_1^2 \int_0^{1/z} 9y^2z^2\, dy\, dz = \int_1^2 3y^3z^2\Big|_0^{1/z} dz = \int_1^2 \frac{3}{z}\, dz$$
$$= 3\ln z\Big|_1^2 = 3\ln 2 = \ln 8.$$

2. (2 pontos) Seja D a região compreendida entre a parábola $2y = x^2$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 8$.

a) Esboce D.

Solução:



b) Arme (mas não calcule) a integral de $f(x, y)$ em D.

Solução:

$$\int_{-2}^{2} \int_{x^2/2}^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx$$

3. (2 pontos) Calcule o Jacobiano da transformação de coordenadas $(x, y) \to (u, v)$, onde

$$x = \ln(u - v), \qquad y = (u^2 - v^2)^2.$$

Solução:

$$\left|\frac{\partial x, y}{\partial u, v}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{u-v} & -\dfrac{1}{u-v} \\ 4u(u^2 - v^2) & -4v(u^2 - v^2) \end{vmatrix} = -4v(u+v) + 4u(u+v) = 4(u^2 - v^2).$$

4. (2 pontos) Use coordenadas polares para calcular

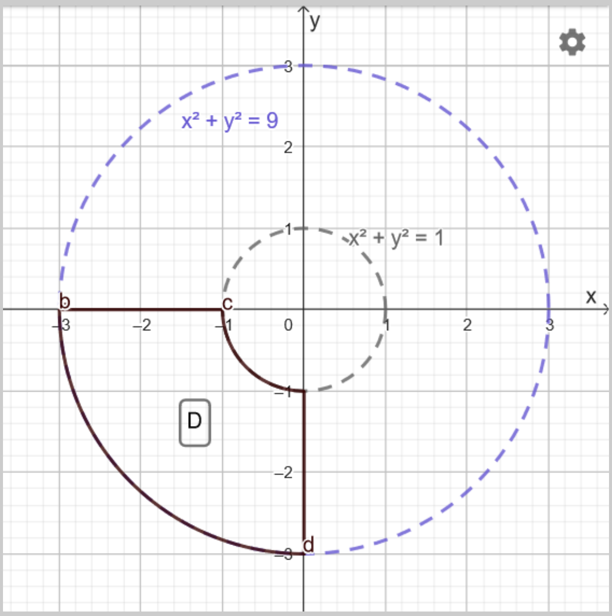
$$\iint_D y^2 + 3x \, dA,$$

onde D é a região no 3o quadrante entre $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$.

Dica do Mestre: use as fórmulas de redução de potências

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

Solução:



$$\iint_D y^2 + 3x \, dA = \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_1^3 \left[(r \operatorname{sen}\theta)^2 + 3(r\cos\theta)\right] r \, dr \, d\theta = 5\pi - 26.$$

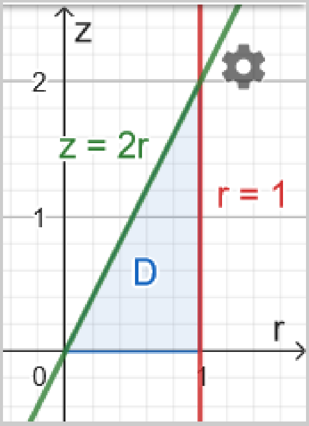
5. (2 pontos) Use coordenadas cilíndricas para calcular

$$\iiint_D x\,dV,$$

onde D é a região no primeiro octante compreendida entre o cilindro $x^2+y^2=1$ e o cone $z=\sqrt{4x^2+4y^2}$.

Dica do Mestre: Esboçar a região D no "plano" rz ajuda.

Solução:



$$\iiint_D x\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^{2r} \left[r\cos\theta\right] r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}.$$