EQ. DIFERENCIAIS EXATAS

FORMAS:

A • $\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$ (1) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{e^x + 5y}_{f(x,y)}$ (2) $\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y)}$ (3).

AINDA (DE (2)): $dy = (e^x + 5y)\,dx$ (4) $\Rightarrow \boxed{dy = f(x,y)\,dx}$ (5).

B • $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 5y}{3y^2 - 5y}$ (6) $\Rightarrow (3y^2 - 5y)\,dy = (-2x + 5y)\,dx$, (7)

$\underbrace{(2x - 5y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(3y^2 - 5y)}_{N(x,y)}dy = 0$ (8) $\Rightarrow \boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$ (9)

→ ÚTIL AGORA

DIFERENCIAL TOTAL - (DEFINIÇÃO)

$z = f(x,y)$ → FUNÇÃO COM DERIVADAS PARCIAIS;

$\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy}$ $\forall (x,y) \in D(z)$ (10)

→ DIFERENCIAL TOTAL DE $z = f(x,y)$

EX: $z = x \cdot y^2 + 2x^3 y$, ENTÃO:

$$dz = (y^2 + 6x^2 y)\,dx + (2xy + 2x^3)\,dy$$ (11)

OBS 1: SE $f(x,y) = c$ SEGUE-SE QUE

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0} \quad (1)$$

OU

$$\boxed{df = 0 \Leftrightarrow f = \overset{\boxed{A}}{C}} \quad (2)$$

* DADA UMA FAMÍLIA DE CURVAS $f = c$, PODEMOS GERAR UMA EDO, CALCULANDO A DIFERENCIAL TOTAL.

EX 1 - SE $\boxed{x^2 - 5xy + y^3 = C} \rightarrow \boxed{f(x,y) = c}$, ENTÃO

$$(2x - 5y)\,dx + (-5x + 3y^2)\,dy = 0, \quad (3)$$

OU: $(-5x + 3y^2).dy = -(2x - 5y).dx$; $\quad \div dx \quad (4)$

$$(-5x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = (5y - 2x); \quad (5)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{3y^2 - 5x}} \quad (6).$$

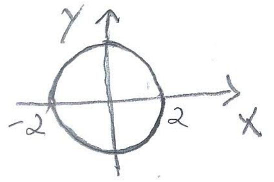
NESSE EX:

FOI DADA A FAMÍLIA DE CURVAS $\boxed{x^2 - 5xy + y^3 = C}$, "GERAMOS" A EDO $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{3y^2 - 5x}} \rightarrow$ Eq. (6)

$x^2 + y^2 - 4 = 0$,

$x^2 + y^2 = 4$,

$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$



— " —

$x^2 + y^2 = 4$,

$x^2 + y^2 = 9$,

$\wr$

$x^2 + y^2 = C$

$f(x,y) = C$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

OBS 2 MAIS IMPORTANTE INVERTER O PROBLEMA, OU SEJA:

DADA UMA EDO $\Rightarrow$ TENTA OBTER A FAMÍLIA DE CURVAS $f = C \Rightarrow$ (SOLUÇÃO) $\Rightarrow$ CALCULANDO DIFERENCIAL TOTAL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{3y^2 - 5x} \Rightarrow \underbrace{x^2 - 5xy + y^3}_{f(x,y)} = C \Rightarrow \text{DIF. TOTAL}$$

EQ. DIF. EXATA

A EXPRESSÃO DIFERENCIAL $M\,dx + N\,dy$ $\Rightarrow$ É UMA DIFERENCIAL EXATA SE ESSA EXPRESSÃO DIFERENCIAL CORRESPONDE A DIFERENCIAL TOTAL DE ALGUMA FUNÇÃO $z = f(x,y)$

A EQ. DIFERENCIAL $M\,dx + N\,dy = 0$ $\Rightarrow$ É UMA EDO EXATA, SE O LADO ESQUERDO É UMA DIFERENCIAL EXATA (i.e., SE A EXPRESSÃO DIFERENCIAL (L.E.) CORRESPONDE A DIFERENCIAL TOTAL DE UMA FUNÇÃO $z = f(x,y)$)

EX 3 A EQ. $y\,dx + x\,dy = 0$ É EXATA?

É SE A EXPRESSÃO DIFERENCIAL $y\,dx + x\,dy$ CORRESPONDE (VEM) À DIF. TOTAL DE ALGUMA FUNÇÃO.

PARA: $\boxed{f(x,y) = x.y}$ (1) $\Rightarrow$ $\boxed{df = y\,dx + x\,dy}$ (2)

ASSIM: A EDO $\underbrace{y\,dx + x\,dy}_{} = 0$ É EXATA!

↳ VEM DO DIFERENCIAL TOTAL DA FUNÇÃO $\boxed{f = x.y}$

CRITÉRIO PARA UMA EDO EXATA

DADA EQ. $\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$ (3)

→ CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA EDO SER EXATA: $\boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}}$ (4)

EX 4 A EDO, DO EX 3 É EXATA?

I $\quad y\,dx + x\,dy = 0$

II $\quad M.dx + N.dy = 0$

$\Rightarrow$ $M = y$ e $N = x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ A EDO É EXATA

EX - VERIFIQUE SE AS EQS. SÃO EXATAS.

(a) $y^2 dx + 2xy\, dy = 0$,

$M\, dx + N\, dy = 0$,

$M = y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$

$N = 2xy \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

EDO É EXATA!

(b) $\left[2x \cdot \mathrm{sen}(y) + y^3 \cdot e^x\right] dx + \left[x^2 \cos(y) + 3y^2 e^x\right] dy = 0$

É EXATA!

MÉTODO DE SOLUÇÃO – EDO EXATA

EDO EXATA $\Rightarrow$ SE $\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}}$ → CRITÉRIO (1)

EDO DADA $\Rightarrow M \cdot dx + N dy = 0$, (2)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = dz \, , \quad (3)$$

$\boxed{M = \dfrac{\partial f}{\partial x}}$ (4)

$\boxed{N = \dfrac{\partial f}{\partial y}}$ (5)

EDO EXATA: "LADO ESQUERDO" VEM DO CÁLCULO DO DIFERENCIAL TOTAL DE ALGUMA FUNÇÃO $z = f(x,y)$.

EX (1) – RESOLVA A EQ. $2xy\,dx + (x^2-1)\,dy = 0$.

$$M \cdot dx + N \cdot dy = 0$$

(6) $\boxed{M = 2xy} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x}$ (7)

(8) $\boxed{N = x^2 - 1} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x}$ (9)

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$.

EDO EXATA!

DE (4) $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = M$;

ENTÃO $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$; (10)

(6)

ANÁLOGO:

$\dfrac{dy}{dx} = 5x \Rightarrow dy = 5x\,dx$,

$\int dy = 5\int x\,dx$,

$y = \dfrac{5x^2}{2} + C$

E $\Rightarrow f(x,y) = \int 2xy \cdot dx + g(y)$, (11) OBS:

DE 10
$$\left\{\begin{aligned} \partial f &= 2xy\,\partial x \\ \int \partial f &= 2y\int x\,\partial x + C \end{aligned}\right\} \text{ ERRADO}$$

(REPETINDO A EQ. 11)

$$f(x,y) = \int 2xy\,dx + g(y) \quad , 11 \Longrightarrow \text{PROCURAR } z = f(x,y).$$

$$f(x,y) = 2y\int x\,dx + g(y) \quad , 12$$

$$f(x,y) = \cancel{2}y\,\frac{x^2}{\cancel{2}} + g(y) \quad , 13$$

$$\boxed{f(x,y) = x^2 \cdot y + g(y)} \quad 14 \Longrightarrow \text{FALTA OBTER } \underline{g(y)}$$

DE 5 TEMOS QUE: $N = \dfrac{\partial f}{\partial y}$,

ENTÃO DERIVA 14 EM RELAÇÃO A y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 \cdot y + g(y)\right] \quad , 15$$

5

$$N = x^2 + \frac{dg(y)}{dy} \quad , 16$$

8

$$x^2 - 1 = x^2 + \frac{dg}{dy} \quad , 17 \Rightarrow \text{SIMPLIFICANDO:}$$

$$\frac{dg}{dy} = -1 \Longrightarrow \underbrace{dg = -1\,dy}_{\text{OBTER } g(y)} \quad , 18$$

$$\int dg = -\int dy \Longrightarrow \boxed{g(y) = -y} \quad (19)$$

OBTIDO $g(y)$, SUBSTITUI: (19) $\longrightarrow$ (14):

$$f(x,y) = x^2 \cdot y - y \quad , (20)$$

$$\boxed{df = 0 \Leftrightarrow f = C}$$

$$\boxed{x^2 \cdot y - y = C} \quad (21)$$

$\rightarrow$ SOLUÇÃO DA EDO EXATA.

OBS:

A EDO $(2xy)\,dx + (x^2-1)\,dy = 0$ É EQUIVALENTE (GERADA)

A DIF. TOTAL DE $x^2 \cdot y - y = C$.

DE FATO: $f(x,y) = x^2 \cdot y - y$, (A) $\quad \boxed{z = f(x,y)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = df \quad , (B)$$

$$(2xy)\,dx + (x^2-1)\,dy = df \quad , (C)$$

$$(2xy)\,dx + (x^2-1)\,dy = 0 \quad , (D)$$

$$\boxed{df = 0 \Leftrightarrow f = C}$$