2a Prova de Cálculo III – 30/01/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Instruções para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- Resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas absurdas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **São proibidos:** folha própria de rascunho, calculadora, e celular. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.
- **Não desgrampeie o caderno de provas.**

Boa prova!

1. Determine o valor da área da parte da superfície $y = 4x + z^2$ que se encontra entre os planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

Solução:

Temos $\vec{r}(x, z) = (x,\, 4x + z^2,\, z)$, com $0 \le x \le 1$ e $0 \le z \le 1$. Assim,

$$A = \iint_S |\vec{r}_x \times \vec{r}_z|\, dS = \int_0^1 \int_0^1 \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} \right| dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 |(4,\, -1,\, 2z)|\, dx\, dz = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{16 + 1 + 4z^2}\, dx\, dz$$

(A integral saiu mais difícil do que eu imaginava 😅. Quem acertou até aqui, vou considerar bastante.)

$$A = \int_0^1 \sqrt{17 + 4z^2}\, dz = \frac{z\sqrt{4z^2 + 17}}{2} + \frac{17}{4} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{2z}{\sqrt{17}} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{17}{4} [\ln(2 + \sqrt{21}) - \ln(\sqrt{17})].$$

2. Calcule

$$\iint_D x + y + z\, dS,$$

onde D é o paralelogramo com equações paramétricas

$$x = u + v, \qquad y = u - v, \qquad z = 1 + 2u + v, \qquad 0 \le u \le 2, \qquad 0 \le v \le 1.$$

Solução:

Temos $\vec{r}(u, v) = (u + v,\, u - v,\, 1 + 2u + v)$ e

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3,\, 1,\, -2).$$

Assim,

$$\iint_D x + y + z\, dS =$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 \big[(u + v) + (u - v) + (1 + 2u + v)\big]\, |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, dv\, du$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 (1 + 4u + v)\sqrt{14}\, dv\, du = \sqrt{14} \int_0^2 1 + 4u + \frac{1}{2}\, du$$

$$= \sqrt{14}(3 + 8) = 11\sqrt{14}.$$

3. Seja $\vec{F} = (xy,\, 4x^2,\, yz)$. Calcule $\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S}$, onde D é a superfície

$$z = xe^y, \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1,$$

com orientação positiva.

Solução:

Temos $\vec{r}(x, y) = (x,\, y,\, xe^y)$ e

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & e^y \\ 0 & 1 & xe^y \end{vmatrix} = (-e^y,\, -xe^y,\, 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^1 (xy,\, 4x^2,\, yz) \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (xy,\, 4x^2,\, xye^y) \cdot (-e^y,\, -xe^y,\, 1)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 -4x^3 e^y\, dx\, dy = -x^4 \Big|_0^1 e^y \Big|_0^1 = 1 - e. \end{aligned}$$

4. Seja R o retângulo de vértices $(0,\, 0)$, $(2,\, 0)$, $(0,\, 3)$ e $(2,\, 3)$. Calcule

$$\oint_{\partial R} e^y\, dx + xy^2\, dy,$$

onde ∂R tem orientação positiva

Solução:

Temos $F = (P,\, Q) = (e^y,\, xy^2)$. Portanto, pelo Teorema de Green,

$$\begin{aligned} &\oint_{\partial R} e^y\, dx + xy^2\, dy = \iint_R \frac{\partial}{\partial x} xy^2 - \frac{\partial}{\partial y} e^y\, dA \\ &= \int_0^3 \int_0^2 y^2 - e^y\, dx\, dy = 2 \int_0^3 y^2 - e^y\, dy \\ &= 2 \left[\frac{y^3}{3} - e^y \right]_0^3 = 2(9 - e^3 + 1) = 20 - 2e^3. \end{aligned}$$

5. Seja R o paralelepípedo delimitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$. Calcule $\iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, onde

$$\vec{F} = (4xye^z,\, 12xy^2z^3,\, -2ye^z)$$

e ∂R tem orientação positiva.

Solução:

Pelo Teorema de Ostrogradski–Gauss, temos

$$\iint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_R \frac{\partial}{\partial x} 4xye^z + \frac{\partial}{\partial y} 12xy^2z^3 + \frac{\partial}{\partial z}(-2ye^z)\, dV$$
$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 2ye^z + 24xyz^3 \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^2 6ye^z + 108yz^3 \, dy\, dz$$
$$= \int_0^1 12e^z + 216z^3 \, dz = 12e - 12 + 54 = 12e + 42.$$