UENF

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Curso: Ciência de Computação **Data:** 10 /.06./2024
Prova: L5 **Período:** **3º** **Disciplina:** Estatística e Probabilidades
Professor: Fermín Alfredo Tang **Turno:** Diurno
Nome do Aluno: ....Matrícula: ....

Lista de exercícios 5 – Distribuições Continuas

1. No processo de fabricação de uma peça, verificou-se que a tolerância de especificação enquadra-se entre a média mais ou menos duas vezes o desvio padrão desse processo. Que porcentagem de peças será rejeitada?

   Resposta 1.-

   Da curva normal sabe-se que, entre a média e mais ou menos dois desvios padrões, situam-se 95,45 % das observações. Logo, o percentual de peças rejeitadas é de 4,55 %. ✓

2. Impostos pagos por uma comunidade distribuem-se de tal forma que o coeficiente de variação vale 25 %. Sabendo-se que para um contribuinte que paga $ 1200 corresponde um escore reduzido Z = −1, determine o escore reduzido para um contribuinte que paga $ 2100.

   Resposta 2.-

   Temos:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} \quad \therefore \quad -1 = \frac{1200}{\sigma} - \frac{\bar{X}}{\sigma} \qquad \textbf{(I)}$$

Contudo, o coeficiente de variação é igual a:

$$0{,}25 = \frac{\sigma}{\bar{X}} \quad \therefore \quad \frac{\bar{X}}{\sigma} = 4 \qquad \textbf{(II)}$$

Substituindo (II) em (I) temos:

$$-1 = \frac{1200}{\sigma} - 4 \quad \therefore \quad \sigma = 400$$

Portanto,

$$\frac{\bar{X}}{400} = 4 \quad \therefore \quad \bar{X} = 1600$$

Desse modo, $ 2100 em unidades padronizadas será:

$$Z = \frac{2100 - 1600}{400} = +1{,}25 \checkmark$$

3. Na empresa Mandacaru, têm-se as seguintes informações sobre os salários de dois empregados:

Nome do empregado	Salário mensal	
	Em \$	Padronizado (Z)
Tita	700	2
Niki	450	−0,5

Baseado nos dados acima, determine a média e o desvio padrão para os salários da empresa.

Resposta 3.-

Temos:

$$2 = \frac{700 - \bar{X}}{\sigma} \quad \therefore \quad 2\sigma + \bar{X} = 700 \qquad \textbf{(I)}$$

$$-0{,}5 = \frac{450 - \bar{X}}{\sigma} \quad \therefore \quad -0{,}5\sigma + \bar{X} = 450 \qquad \textbf{(II)}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II) obtemos:

$\bar{X}$ = \$ 500 e σ = \$ 100 ✓

4. Pela experiência de anos anteriores, verificou-se que o tempo médio gasto por um candidato a supervisor de vendas, em determinado teste, é aproximadamente normal com média de 60 minutos e desvio padrão de 20 minutos.

   a) Que porcentagem de candidatos levará menos de 60 minutos para concluir o teste?
   b) Que porcentagem não terminará o teste se o tempo máximo concedido é de 90 minutos?
   c) Se 50 candidatos fazem o teste, quantos podemos esperar que o terminem nos primeiros 40 minutos?

Resposta 4.-

Seja a variável aleatória X = tempo gasto pelo candidato para resolver o teste, com μ = 60 minutos e σ = 20 minutos.

a. Para $X = 60 \quad \rightarrow \quad Z = \dfrac{60-60}{20} = 0$

$$P(X < 60) = P(Z < 0) = 0{,}50 = 50\ \% \checkmark$$

b. Para $X = 90 \quad \rightarrow \quad Z = \dfrac{90-60}{20} \cong 1{,}5$

$$P(X > 90) = P(Z > 1{,}5)$$

$$P(X > 90) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 1{,}5) = 0{,}5000 - 0{,}4332 = 0{,}0668 \checkmark$$

c. Para $X = 40 \quad \rightarrow \quad Z = \dfrac{40-60}{20} \cong -1$

$$P(X < 40) = P(Z < -1) = P(Z < 0) - P(-1 < Z < 0) = 0{,}5000 - 0{,}3413 = 0{,}1587$$

Logo, em 50 candidatos esperamos que aproximadamente 8 ($0{,}1587 \times 50$) candidatos terminem o teste nos 40 minutos iniciais. ✓

5. A vida útil de lavadoras de pratos automáticas é de 1,5 ano, com desvio padrão de 0,3 ano. Se os defeitos se distribuírem normalmente, que porcentagem das lavadoras vendidas necessitará de conserto antes de o período de garantia de um ano expirar?

Resposta 5.-

Seja a variável aleatória X = tempo de uso em anos com μ = 1,5 ano e σ = 0,5 ano.

Para $X = 1 \quad \rightarrow \quad Z = \dfrac{1-1{,}5}{0{,}3} \cong -1{,}67$

$$P(X < 1) = P(Z < -1{,}67) = P(Z < 0) - P(0 < Z < -1{,}67)$$

$$P(X < 1) = P(Z < -1{,}67) = 0{,}5000 - 0{,}4525 = 0{,}0475 = 4{,}75\ \% \checkmark$$

6. A Empresa Mandacaru S.A. produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de seis meses. Ela produz televisores do tipo A (comum) e do tipo B (luxo), com um lucro respectivo de \$ 100 e \$ 200 caso não haja restituição, e com um prejuízo de \$ 300 e \$ 800 caso haja restituição. Suponha que o tempo para a ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma variável aleatória com distribuição normal, respectivamente, com médias de nove e doze meses, e desvios padrões de dois e três meses. Se tivesse de planejar uma estratégia de marketing para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?

Resposta 6.-

Aparelho do tipo A:

$\mu = 9$ meses e $\sigma = 2$ meses.

Para $X = 6 \quad \rightarrow \quad Z = \dfrac{6-9}{2} \cong -1{,}50$

$P(X < 6) = P(Z < -1{,}50) = 0{,}5000 - 0{,}4332 = 0{,}0668$ ✓

que é a probabilidade de um aparelho apresentar defeito no prazo de seis meses.

Consequentemente, a probabilidade de um aparelho não apresentar defeito é de 0,9332.

Portanto, o lucro esperado para o tipo A será:

$E(X) = 100 \times 0{,}9332 - 300 \times 0{,}0668 = \$\ 73{,}28$ ✓

De modo análogo, temos:

Aparelho do tipo B:

$\mu = 12$ meses e $\sigma = 3$ meses.

Para $X = 6 \quad \rightarrow \quad Z = \dfrac{6-12}{3} \cong -2$

$P(X < 6) = P(Z < -2) = 0{,}5000 - 0{,}4772 = 0{,}0228$ e, do contrário, 0,9772.

Desse modo, o lucro esperado para o tipo B será:

$E(X) = 200 \times 0{,}9772 - 800 \times 0{,}00228 \cong \$\ 193{,}61$ ✓

Com base nos lucros esperados de vendas, pode-se sugerir um plano de marketing para os aparelhos do tipo B. ✓

7. Determinado produto possui peso médio igual a 800 g e desvio padrão 10 g. É embalada uma caixa com 24 unidades de tal produto, que pesa, em média, 1850 g e desvio padrão de 12 g. Determine, nessas condições, a probabilidade de que uma caixa cheia pese mais que 21.200 g.

Resposta 7.-

Seja a variável aleatória X = peso de uma caixa cheia expresso em gramas.

Temos então:

Média da caixa cheia:

$$\mu = 800 \times 24 + 1850 = 21.050 \text{ g}$$

Variância da caixa cheia:

$$\text{Var}(X) = 24 \times 10^2 + 12^2 = 2544 \text{ g}^2$$

Segue-se:

$$Z = \frac{21.200 - 21.050}{\sqrt{2544}} \cong 2{,}97$$

$$P(X > 21.200) = P(Z > 0) - P(0 < Z < 2{,}97)$$

$$P(Z > 21.200) = 0{,}5000 - 0{,}4985 = 0{,}0015 \checkmark$$

8. O peso médio das esferas metálicas produzidas pela Indústria Zepelin Ltda. é de 39 kg, com desvio padrão de 11 kg. Supondo-se que os pesos seguem uma distribuição aproximadamente normal, estimar a proporção de esferas com peso:

a) entre 33 e 45 kg;
b) superior a 50 kg.

Resposta 8.-

Seja a variável aleatória X = peso das esferas metálicas de média e desvio padrão iguais a μ = 39 kg e σ = 11 kg, respectivamente.

Portanto,

a. Para $X = 33 \rightarrow Z = \frac{33 - 39}{11} \cong -0{,}545$

Para $X = 45 \rightarrow Z = \frac{45 - 39}{11} \cong +0{,}545$

Logo, $P(33 < X < 45) = P(-0{,}545 < Z < +\ 0{,}0545)$

$$P(33 < X < 45) = 2\ P(0 < Z < +\ 0{,}545) = 2 \times 0{,}212 = 0{,}424 \checkmark$$

b. Para $X = 50 \rightarrow Z = \frac{50 - 39}{11} \cong +1$

Então, $P(X > 50) = P(Z > 1)$

$$P(X > 50) = 1 - P(0 < Z < 1)$$

$$P(X > 50) = 1 - 0{,}3413 = 0{,}1587 \checkmark$$

9. O Prof. Pi Rado aplica uma prova de Estatística Geral com 10 questões, atribuindo notas que variam de 0 a 10, de acordo com o número de questões respondidas corretamente pelo aluno. Sabe-se que a nota média foi de 6,7 e o desvio padrão de 1,2. Admitindo distribuição normal das notas, determine:

   a) a porcentagem de estudantes com seis pontos;
   b) a maior nota entre os 10 % mais baixos da classe;
   c) a menor nota entre os 10 % mais altos da classe.

   Resposta 9.-

   a. Para aplicar a distribuição normal a dados discretos, é necessário tratá-los como se fossem contínuos. Portanto, um escore de seis pontos é considerado como 5,5 a 6,5.

   Assim:

Para $X = 5,5 \quad \rightarrow \quad Z = \dfrac{5,5 - 6,7}{1,2} \cong -1,0$

Para $X = 6,5 \quad \rightarrow \quad Z = \dfrac{6,5 - 6,7}{1,2} \cong -0,17$

   Logo, $P(33 < X < 45) = P(-1,0 < Z < -0,17) = 0,2738 = 27,38\ \%$ ✓

   b. Seja X_1 a nota máxima procurada e Z_1 seu equivalente em unidades padronizadas. Assim, a área à esquerda de Z_1 é 10 % = 0,10; logo a área entre Z_1 e 0 é 40 % e Z_1 aproximadamente igual a $-1,28$.

$$Z_1 = \frac{X_1 - 6,7}{1,2} \cong -1,28 \quad \therefore \quad X_1 = 5,2 \checkmark$$

   c. Considere X_2 a nota máxima procurada e Z_2 seu equivalente em unidades padronizadas. Do item (b), por simetria, temos $Z_2 = 1,28$.

   Portanto:

$$Z_2 = \frac{X_2 - 6,7}{1,2} \cong 1,28 \quad \therefore \quad X_2 \cong 8,2 \checkmark$$

10. Sabe-se que os hotéis e companhias aéreas sempre garantem reservas além de sua capacidade para assegurar lotação. Suponha que as estatísticas feitas por um hotel mostrem que, em média, 10 % não respondem às reservas feitas. Se esse hotel aceitar 250 reservas e tiver somente 230 leitos, qual será a probabilidade de todos os hóspedes que tiverem feito reservas conseguirem quarto quando chegarem ao hotel?

   Resposta 10.-

Seja a variável aleatória X = número de hóspedes que respondem às reservas. Temos então:

Valor esperado:

$$\mu = np = 0,9 \times 250 = 225 \text{ hóspedes.}$$

Desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{0,9 \times 0,1 \times 250} \cong 4,74$$

$$\text{Para } X = 230 \quad \rightarrow \quad Z = \frac{230 - 225}{4,74} \cong 1,05$$

$$P(X < 230) = P(Z < 0) + P(1,05 < Z < 0) = 0,5 + 0,3531 = 0,8531 \checkmark$$

11. Latas de conservas são fabricadas por uma indústria com média de 990 g e desvio padrão de 10 g. Uma lata é rejeitada pelo controle de qualidade dessa indústria se possuir peso menor que 975 g. Se for observada uma sequência casual destas latas, qual a probabilidade de que em 12 dessas latas, duas sejam rejeitadas?

Resposta 11.-

Primeiramente deveremos encontrar a probabilidade de uma lata de conserva ser rejeitada pelo controle de qualidade.

Seja a variável aleatória X: peso das latas de conserva normalmente distribuídas com média $\mu = 990$ e desvio padrão $\sigma = 10$.

$$\text{Para } X = 975 \quad \rightarrow \quad Z = \frac{975 - 990}{10} = -1,5$$

$$P(X < 975) = P(Z < -1,50) = 0,5000 - 0,4332 = 0,0668$$

que é a probabilidade de uma lata ser rejeitada pelo controle de qualidade.

Consideremos a variável aleatória Y: número de latas rejeitadas pelo controle de qualidade com parâmetros $n = 12$ e $p = 0,0668$.

Assim,

$$P(Y = 2) = \binom{12}{2}(0,0668)^2(0,9332)^{10} \cong 0,1475 \cong 14,75\ \%. \checkmark$$

12. A variável aleatória j é normalmente distribuída apresentando amplitude total igual a 48. Pede-se estimar o desvio padrão.

Resposta 12.-

Como seis desvios padrões cobrem quase totalmente a distância que vai desde o menor valor até o maior, ou seja, de -3σ a $+3\sigma$, podemos estimar (*mas não calcular*) o desvio padrão σ^* dividindo a amplitude total A_t por 6:

$$\sigma^* = \frac{A_t}{6} = \frac{48}{6} = 8 \checkmark$$

Essa regra é de fundamental importância aos olhos do aluno que deseja testar se o cálculo do desvio padrão σ está correto. Por exemplo, se a amplitude total for 42, é de se esperar que o desvio padrão σ deva estar próximo do desvio padrão estimado $\sigma^* = 7$.

Convém salientar ainda que:

- a regra de um sexto só deve ser aplicada para distribuições normais composta por um grande número de observações;
- o desvio padrão é sempre menor que a amplitude total.

13. Os alunos de Física Geral II do Prof. Alan Din distribuem-se de acordo com uma distribuição normal com média 6,0 e desvio padrão 0,5. O Prof. Alan Din atribui graus A, B e C da forma seguinte:

Nota maior ou igual a 7	A
Nota entre 5 e 7	B
Nota menor ou igual C	C

Determine o número esperado de alunos com grau A, B e C em uma classe com 90 alunos.

Resposta 13.-

Inicialmente deveremos calcular as probabilidades $P(X \leq 5)$, $P(5 < X < 7)$ e $P(X \geq 7)$, em que X representa as notas obtidas pelos alunos do Prof. Alan Din.

Temos que:

$$Z = \frac{X - 6}{0{,}5}$$

Para $X = 5 \quad \rightarrow \quad Z = \frac{5 - 6}{0{,}5} = -2$

Para $X = 7 \quad \rightarrow \quad Z = \frac{7 - 6}{0{,}5} = 2$

$$P(X \leq 5) = P(Z \leq -2) = 0{,}07275$$

$$P(X \geq 7) = P(Z \geq 2) = 0{,}07275$$

$$P(5 < X < 7) = P(-2 < Z < 2) = 0{,}8545$$

Os valores esperados de alunos serão:

Grau A: 0,07275 × 90 = 7 ✓

Grau B: 0,8545 × 90 = 76 ✓

Grau C: 0,07275 × 90 = 7 ✓