Implicação Lógica

Lógica Matemática

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO UENF

Prof. Fermín A. Tang

Implicação Lógica

Definição

- Diz-se que uma proposição $P(p,q,r,\dots)$ implica logicamente ou apenas implica uma proposição $Q(p,q,r,\dots)$, se $Q(p,q,r,\dots)$ é verdadeira (V) todas as vezes que $P(p,q,r,\dots)$ é verdadeira (V).
- Dito de forma equivalente, uma proposição $P(p,q,r,\dots)$ implica uma proposição $Q(p,q,r,\dots)$, se não ocorrem $P(p,q,r,\dots)$ e $Q(p,q,r,\dots)$ com valores lógicos simultâneos V e F, respectivamente, em uma mesma linha da tabela-verdade.
- Denota-se que a proposição $P(p,q,r,\dots)$ implica a proposição $Q(p,q,r,\dots)$ da seguinte maneira:

$$\boxed{P(p,q,r,\dots) \Rightarrow Q(p,q,r,\dots)}$$

- Vale observar que os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ são distintos. O primeiro corresponde a operação lógica condicional enquanto que o segundo é de relação de implicação.

Implicação Lógica

Exemplos

- Com base na definição de implicação lógica podemos deduzir algumas implicações:
  - Qualquer proposição implica em uma tautologia.
  - Somente uma contradição pode implicar outra contradição.

Implicação Lógica

Propriedades

- A implicação lógica é uma relação entre proposições (diferente do operador condicional) que goza das propriedades reflexiva (R) e transitiva (T), denotadas simbolicamente como:

$$(R) \qquad P(p,q,r,\dots) \Rightarrow P(p,q,r,\dots)$$

$$(T) \quad \text{se } P(p,q,r,\dots) \Rightarrow Q(p,q,r,\dots) \text{ e}$$
$$Q(p,q,r,\dots) \Rightarrow R(p,q,r,\dots) \text{ então}$$
$$P(p,q,r,\dots) \Rightarrow R(p,q,r,\dots)$$

- Apenas para ilustrar o significado de relações reflexivas, simétricas e transitivas, podemos pensar nas relações entre pessoas.
  - Uma relação de parentesco do tipo: "É parente de" pode ser considerada reflexiva, simétrica e transitiva.
  - Já uma relação de afeto do tipo: "Gosta de" pode ser reflexiva, costuma não ser simétrica, nem transitiva.

Implicação Lógica

Exemplo 1A

- Considere as seguintes proposições:

$$(p \wedge q), \quad (p \vee q), \quad (p \leftrightarrow q) \qquad (1)$$

- E as suas tabelas-verdade correspondentes:

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

- Observe que $(p \wedge q)$ é verdadeira (V) somente na linha 1, onde $(p \vee q)$ e $(p \leftrightarrow q)$ também são verdadeiras.

- Com isso, pode-se concluir que:

$$\boxed{(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)}$$

$$\boxed{(p \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)}$$

- Podemos interpretar isso, da seguinte maneira:
  - Sempre que $(p \wedge q)$ é verdadeira, temos que $(p \vee q)$ é verdadeira.
  - Sempre que $(p \wedge q)$ é verdadeira, temos que $(p \leftrightarrow q)$é verdadeira.

- No entanto, observe que neste caso não existe implicação no sentido inverso:

$$(p \vee q) \nRightarrow (p \wedge q)$$

$$(p \leftrightarrow q) \nRightarrow (p \wedge q)$$

Implicação Lógica

Exemplo 1B

- Observando novamente a tabela anterior:

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

- Podemos também mostrar as seguintes implicações lógicas que são conhecidas regras de inferência:

$$\boxed{i) \quad p \wedge q \Rightarrow p \quad \text{e} \quad p \wedge q \Rightarrow q}$$ (Simplificação)

$$\boxed{ii) \quad p \Rightarrow p \vee q \quad \text{e} \quad q \Rightarrow p \vee q}$$ (Adição)

Implicação Lógica

Exemplo 2

- Considere as seguintes proposições:

$$(p \leftrightarrow q), \quad (p \rightarrow q), \quad (q \rightarrow p) \qquad (2)$$

- E as suas tabelas-verdade correspondentes:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

- Observe que $(p \leftrightarrow q)$ é verdadeira(V) nas linhas 1 e 4, e nestas linhas $(p \rightarrow q)$ e $(q \rightarrow p)$ também são verdadeiras. Com isso, pode-se concluir que:

$$(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (q \rightarrow p)$$

Implicação Lógica

Exemplo 3

- Considere a seguinte proposição:

$$(p \vee q) \wedge \neg p \qquad (3)$$

- E a sua tabela-verdade correspondente:

p	q	$(p \vee q)$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

- Observe que $(p \vee q) \wedge \neg p$ é verdadeira (V) somente na linha 3, onde a proposição q também é verdadeira (V). Com isso, temos a seguinte implicação lógica, denominada de Regra do Silogismo Disjuntivo:

$$\boxed{(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q}$$

- Uma outra implicação semelhante a anterior que não aparece na tabela verdade é:

$$(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$$

- Ambas implicações podem ser usadas como regras de inferência.

Implicação Lógica

Exemplo 4

- Considere a seguinte proposição:

$$(p \to q) \wedge p \qquad (4)$$

- E a sua tabela-verdade correspondente:

p	q	$(p \to q)$	$(p \to q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

- Observe que $(p \to q) \wedge p$ é verdadeira (V) somente na linha 1, onde a proposição q também é verdadeira (V). Com isso, temos a seguinte implicação lógica, denominada de Regra Modus ponens:

$$\boxed{(p \to q) \wedge p \Rightarrow q}$$

- Outras implicações que podem ser observadas a partir da tabela-verdade são dois casos de simplificação:

$$(p \to q) \wedge p \Rightarrow (p \to q)$$

$$(p \to q) \wedge p \Rightarrow p$$

Implicação Lógica

Exemplo 5

- Considere as seguintes proposições:

$$(p \to q) \wedge \neg q \quad \text{e} \quad \neg p \qquad (5)$$

- E a suas tabelas-verdade correspondentes:

p	q	$(p \to q)$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

- Observe que $(p \to q) \wedge \neg q$ é verdadeira (V) somente na linha 4, onde a proposição $\neg p$ também é verdadeira (V). Com isso, temos a seguinte implicação lógica, denominada de Regra Modus tollens:

$$\boxed{(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p}$$

- A mesma tabela-verdade também mostra a seguinte implicação:

$$\neg p \Rightarrow (p \to q)$$

- Observe que basta ter a negação do antecedente de uma condicional para provar que essa condicional é verdadeira sem importar o que é o consequente.

Tautologias e Implicação Lógica

Teorema

- **Teorema.-** A proposição $P(p,q,r,\ldots)$ implica a proposição $Q(p,q,r,\ldots)$, ou seja:

  $$P(p,q,r,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,r,\ldots)$$

  se e somente se a condicional:

  $$P(p,q,r,\ldots) \rightarrow Q(p,q,r,\ldots)$$

  é tautológica.

Tautologias e Implicação Lógica

Colorario

- Corolário.- Se $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ então também temos que:

$$P(P_0, Q_0, R_0, \dots) \Rightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, \dots)$$

quaisquer que sejam as proposições $P_0, Q_0, R_0, \dots$.

- Este colorário é semelhante ao princípio de substituição apresentado anteriormente.

Tautologias e Implicação Lógica

Exemplo 1

- Considere a seguinte condicional:

$$(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r) \qquad (1)$$

- Podemos provar que esta condicional é tautológica com base em tabelas-verdade.

$(p$	$\to$	$q)$	$\land$	$(q$	$\to$	$r)$	$\to$	$(p$	$\to$	$r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

- Com isso, temos a seguinte implicação lógica, denominada de Regra do Silogismo hipotético.

$$\boxed{(p \to q) \land (q \to r) \Rightarrow (p \to r)}$$

Tautologias e Implicação Lógica

Exemplo 2

- Considere a seguinte proposição:

$$p \wedge \neg p \to q \qquad (2)$$

- Podemos provar que esta condicional é tautológica com base em tabelas-verdade.

p	q	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \wedge \neg p \to q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- Com isso, temos a seguinte implicação lógica:

$$\boxed{p \wedge \neg p \Rightarrow q}$$

- Podemos concluir que de uma contradição como $p \wedge \neg p$ se deduz qualquer proposição q (Princípio da inconsistência).

- Colocado de outra forma, a partir de uma contradição podemos concluir qualquer coisa. Por isso, assume-se que partimos de uma afirmação sempre verdadeira.

Tautologias e Implicação Lógica

Exemplo 3

- Podemos provar que $(p \leftrightarrow q) \wedge p$ implica a proposição q.
- Basta mostrar que a condicional $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ é tautológica. Mostra-se isso na seguinte tabela-verdade:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

- Com isso, temos a seguinte implicação lógica:

$$\boxed{(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q}$$

Referências

- De Alencar Filho, Edgar. Iniciação à Lógica Matemática. Capítulo 5. Editora Nobel. São Paulo. 1975. Reimpresso em 2015.