Portanto,

15 $$W = \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(a)|^2$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2}\,m\,|\mathbf{v}(t)|^2$, ou seja, a metade da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade escalar, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto, podemos reescrever a Equação 15 como

16 $$W = K(B) - K(A)$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nas extremidades de C.

Agora vamos admitir que $\mathbf{F}$ seja um campo de forças conservativo, ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto de (x, y, z) é definida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, portanto temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

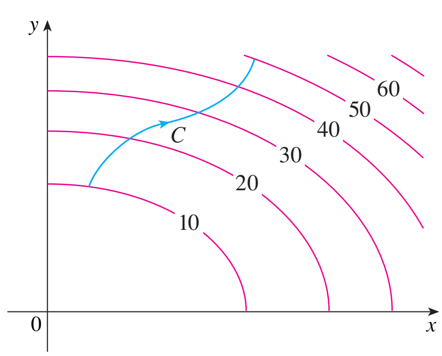
Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e sua energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei da Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

16.3 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde C tem equações paramétricas

$$x = t^2 + 1, \qquad y = t^3 + t, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

x \ y	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3–10 Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservador. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\,\mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\,\mathbf{i} + (4xy + 3)\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y^{-2})\,\mathbf{i} + (x^2 - 2xy^{-3})\,\mathbf{j},\ y < 0$

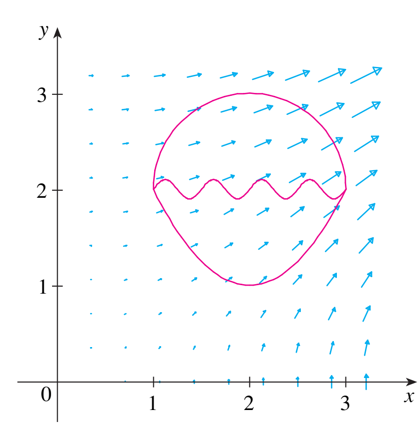
9. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 + x/y)\,\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (xy\cosh xy + \operatorname{senh} xy)\,\mathbf{i} + (x^2\cosh xy)\,\mathbf{j}$

11. A figura mostra o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2\rangle$ e três curvas que começam em (1, 2) e terminam em (3, 2).

(a) Explique por que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tem o mesmo valor para as três curvas.

(b) Qual é esse valor comum?



12–18 (a) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$,
C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \langle t + \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t,\ t + \cos \frac{1}{2}\pi t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{i} + x^2e^{xy}\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$,
C é o segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z + 2xz^2)\,\mathbf{i} + 2xyz\,\mathbf{j} + (xy^2 + 2x^2z)\,\mathbf{k}$,
C: $x = \sqrt{t}$, $y = t + 1$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xz}\,\mathbf{i} + e^{xz}\,\mathbf{j} + xye^{xz}\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (x \cos y + \cos z)\,\mathbf{j} - y \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

19–20 Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C \operatorname{tg} y\,dx + x \sec^2 y\,dy$,
C é qualquer caminho de $(1, 0)$ a $(2, \pi/4)$

20. $\int_C (1 - ye^{-x})\,dx + e^{-x}\,dy$,
C é qualquer caminho de $(0, 1)$ a $(1, 2)$

21. Suponha que você seja solicitado a determinar a curva que exige o mínimo de trabalho para um campo de força $\mathbf{F}$ para mover uma partícula de um ponto a outro ponto. Você decide verificar primeiro se $\mathbf{F}$ é conservativo, e de fato verifica-se que ela é. Como você responde à solicitação?

22. Suponhamos que uma experiência determine que a quantidade de trabalho necessária para um campo de força $\mathbf{F}$ para mover uma partícula do ponto $(1, 2)$ para o ponto de $(5, -3)$ ao longo de uma curva C_1 é de 1,2 J e do trabalho realizado por $\mathbf{F}$ em mover a partícula ao longo de outra curva C_2 entre os mesmos dois pontos é de 1,4 J. O que você pode dizer sobre $\mathbf{F}$? Por quê?

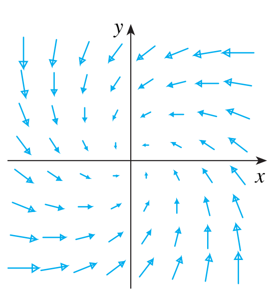
23–24 Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}$ ao mover um objeto de P para Q.

23. $\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2}\,\mathbf{i} + 3x\sqrt{y}\,\mathbf{j}$; $P(1, 1)$, $Q(2, 4)$

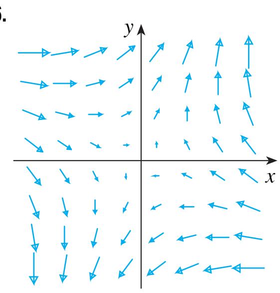
24. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\,\mathbf{i} - xe^{-y}\,\mathbf{j}$; $P(0, 1)$, $Q(2, 0)$

25–26 A partir do gráfico de $\mathbf{F}$ você diria que o campo é conservativo? Explique.

25.



26.



SCA **27.** Se $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (1 + x \cos y)\,\mathbf{j}$, use um gráfico para conjecturar se $\mathbf{F}$ é conservativo. Então, determine se sua conjectura estava correta.

28. Seja $\mathbf{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Encontre curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.
(a) $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ (b) $\displaystyle\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$

29. Mostre que, se um campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é conservativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

30. Use o Exercício 29 para mostrar que a integral de linha $\int_C y\,dx + x\,dy + xyz\,dz$ não é independente do caminho.

31–34 Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo por caminhos e (c) simplesmente conexo.

31. $\{(x, y) \mid 0 < y < 3\}$

32. $\{(x, y) \mid 1 < |x| < 2\}$

33. $\{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0\}$

34. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (2, 3)\}$

35. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Mostre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.
(b) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho. [*Dica*: Calcule $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 e C_2 são as metades superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] Isto contradiz o Teorema 6?

36. (a) Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial inverso do quadrado, ou seja,

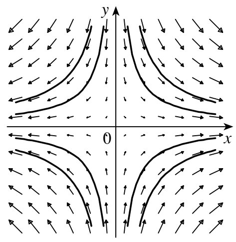
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos à origem.

(b) Um exemplo de um campo de quadrado inverso é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 4 na Seção 16.1. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1{,}52 \times 10^8$ km do Sol) ao periélio (em uma distância mínima de $1{,}47 \times 10^8$ km). (Use os valores $m = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg e $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².)

(b) Outro exemplo de campo inverso do quadrado é o campo elétrico $\mathbf{F} = \varepsilon qQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 5 da Seção 16.1. Suponha que um elétron com carga de $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada à distância de 10^{-12} m do elétron e se move para uma posição que está à metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor $\varepsilon = 8{,}985 \times 10^9$.)

35. (a)



(b) $y = 1/x$, $x > 0$

EXERCÍCIOS 16.2

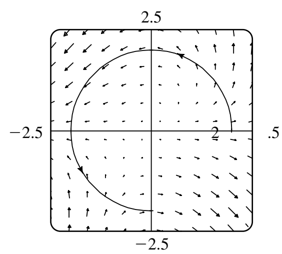
1. $\frac{1}{54}(145^{3/2} - 1)$ **3.** 1638,4 **5.** $\frac{243}{8}$ **7.** $\frac{5}{2}$

9. $\sqrt{5}\,\pi$ **11.** $\frac{1}{12}\sqrt{14}\,(e^6 - 1)$ **13.** $\frac{2}{5}(e - 1)$ **15.** $\frac{35}{3}$

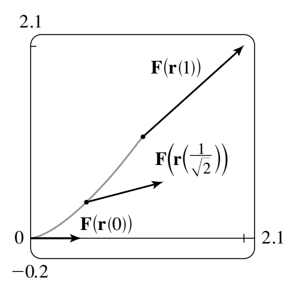
17. (a) Positiva (b) Negativa **19.** 45

21. $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ **23.** 1,9633 **25.** 15,0074

27. $3\pi + \frac{2}{3}$



29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$ (b)



31. $\frac{172\,704}{5\,632\,705}\sqrt{2}(1 - e^{-14\pi})$ **33.** $2\pi k$, $(4/\pi, 0)$

35. (a) $\bar{x} = (1/m)\int_C x\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{y} = (1/m)\int_C y\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{z} = (1/m)\int_C z\rho(x, y, z)\,ds$, onde $m = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$
(b) $(0, 0, 3\pi)$

37. $I_x = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\right)$, $I_y = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)$ **39.** $2\pi^2$ **41.** $\frac{7}{3}$

43. (a) $2ma\,\mathbf{i} + 6mbt\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (b) $2ma^2 + \frac{9}{2}mb^2$

45. $\approx 1{,}67 \times 10^4$ pés-lb **47.** (b) Sim **51.** ≈ 22 J

EXERCÍCIOS 16.3

1. 40 **3.** $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$

5. Não conservativo **7.** $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$

9. $f(x, y) = x \ln y + x^2y^3 + K$

11. (b) 16 **13.** (a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ (b) 2

15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a) $f(x, y, z) = ye^{xz}$ (b) 4 **19.** 2

21. Não importa qual curva é escolhida.

23. 30 **25.** Não **27.** Conservativo

31. (a) Sim (b) Sim (c) Sim

33. (a) Não (b) Sim (c) Sim

EXERCÍCIOS 16.4

1. 8π **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** 12 **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** -24π **11.** $-\frac{16}{3}$

13. 4π **15.** $-8e + 48e^{-1}$ **17.** $-\frac{1}{12}$ **19.** 3π **21.** (c) $\frac{9}{2}$

23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ se a região é a porção do disco $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro quadrante

27. 0

EXERCÍCIOS 16.5

1. (a) $-x^2\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz

3. (a) $ze^x\,\mathbf{i} + (xye^z - yze^x)\,\mathbf{j} - xe^z\,\mathbf{k}$ (b) $y(e^z + e^x)$

5. (a) $\mathbf{0}$ (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7. (a) $\langle -e^y \cos z, -e^z \cos x, -e^x \cos y \rangle$
(b) $e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} z + e^z \operatorname{sen} x$

9. (a) Negativa (b) rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

11. (a) Zero (b) rot $\mathbf{F}$ pontos na direção negativa de z

13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ **15.** Não conservativo

17. $f(x, y, z) = xe^{yz} + K$ **19.** Não

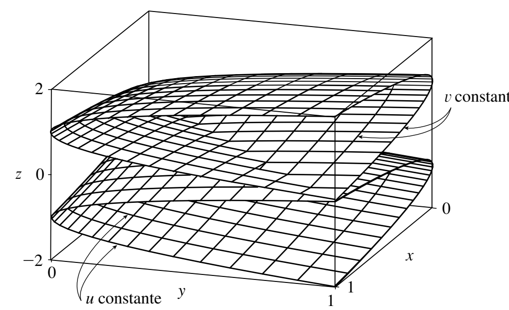
EXERCÍCIOS 16.6

1. P: não; Q: sim

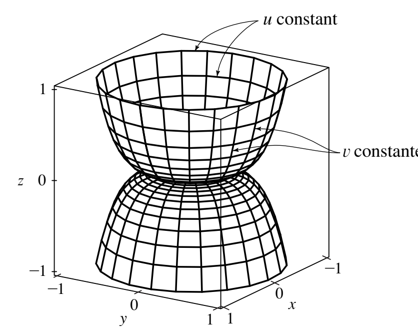
3. Plano por $(0, 3, 1)$ contendo os vetores $\langle 1, 0, 4\rangle$, $\langle 1, -1, 5\rangle$

5. Paraboloide hiperbólico

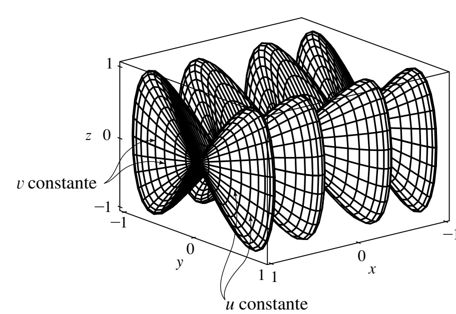
7.



8.



11.



13. IV **15.** II **17.** III

19. $x = u$, $y = v - u$, $z = -v$

21. $y = y$, $z = z$, $x = \sqrt{1 + y^2 + \frac{1}{4}z^2}$

23. $x = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$,
$z = 2 \cos \phi$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
[ou $x = x$, $y = y$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 2$]

25. $x = x$, $y = 4 \cos \theta$, $z = 4 \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

29. $x = x$, $y = e^{-x} \cos \theta$,
$z = e^{-x} \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant x \leqslant 3$,
$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$