Lógica Digital

Aula 02: Sistemas de Numeração – conversão de base

- O Sistema Hexadecimal de Numeração
- Conversão do Sistema Hexadecimal para o Sistema Decimal
- Conversão do Sistema Decimal para o Sistema Hexadecimal
- Conversão do Sistema Hexadecimal para o Sistema Binário
- Conversão do Sistema Binário para o Sistema Hexadecimal
- Operações Aritméticas no Sistema Binário
  - Adição no Sistema Binário, Hexadecimal e Octal
  - Subtração no Sistema Binário, Hexadecimal e Octal
  - Multiplicação no Sistema Binário
- Notação dos Números Binários Positivos e Negativos
- Utilização do Complemento de 2 em Operações Aritméticas

Lógica Digital

O Sistema Hexadecimal de Numeração

DECIMAL	HEXADECIMAL
0	**0**
1	**1**
2	**2**
3	**3**
4	**4**
5	**5**
6	**6**
7	**7**
8	**8**
9	**9**
10	**A**
11	**B**
12	**C**
13	**D**
14	**E**
15	**F**
16	10

O Sistema Hexadecimal possui 16 algarismos, sendo sua base igual a 16. Os algarismos são assim numerados:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Exemplo de utilização: área de microprocessadores e também no mapeamento de memórias em sistemas digitais, tratando-se de um sistema numérico muito importantes, sendo aplicado em projetos de **software** e **hardware**.

Conversão do Sistema Hexadecimal para o Sistema Decimal

$3F_{16} = ?_{10}$

16^1	16^0
3	$\boxed{F}$

$\boxed{F} \longrightarrow = 15_{10}$

$$3 \times 16^1 + F \times 16^0 =$$

$$3 \times 16^1 + 15 \times 16^0 =$$

$$3 \times 16 + 15 \times 1 = 63_{10}$$

$$\mathbf{3F_{16} = 63_{10}}$$

Conversão do Sistema Hexadecimal para o Sistema Decimal

Exercícios

$1C3_{16} = ?_{10}$

$238_{16} = ?_{10}$

$1FC9_{16} = ?_{10}$

Conversão do Sistema Decimal para o Sistema Hexadecimal

$1000_{10} = ?_{16}$

Métodos das divisões sucessivas

1000 | 16

1º resto ← 8   62 | 16

2º resto ← 14   3 → último quociente

$14_{10} = E_{16}$

$$\mathbf{1000_{10} = 3E8_{16}}$$

Conversão do Sistema Decimal para o Sistema Hexadecimal

Exercícios

$134_{10} = ?_{16}$

$384_{10} = ?_{16}$

$3882_{10} = ?_{16}$

Conversão do Sistema Hexadecimal para o Sistema Binário

$C13_{16} = ?_2$

$C_{16} = 12_{10}$

$$\underbrace{C}_{1100}\quad \underbrace{1}_{0001}\quad \underbrace{3}_{0011}$$

1100 0001 0011 → Necessita-se de **4** bits

$$\mathbf{C13_{16} = 110000010011_2}$$

Conversão do Sistema Hexadecimal para o Sistema Binário

Exercícios

$1ED_{16} = ?_2$

$6CF9_{16} = ?_2$

$3A7_{16} = ?_8$

Conversão do Sistema Binário para o Sistema Hexadecimal

$10011000_2 = ?_{16}$

$$\underbrace{1001}_{9} \quad \underbrace{1000}_{8}$$

$$\mathbf{10011000_2 = 98_{16}}$$

Conversão do Sistema Binário para o Sistema Hexadecimal

Exercícios

$1100011_2 = ?_{16}$

$1100011100011100_2 = ?_{16}$

Operações Aritméticas no Sistema Binário

ADIÇÃO

$$
\begin{array}{r} 0 \\ +\ 0 \\ \hline 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 0 \\ +\ 1 \\ \hline 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1 \\ +\ 0 \\ \hline 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 10 \end{array}
\longrightarrow 2_{10} = 10_2
$$

Pela operação realizada, notamos a regra de transporte para a próxima coluna: 1 + 1 = 0 e transporta 1 “vai um”.

A operação de transporte também é denominada **carry**.

Ex.: $11_2 + 10_2$

$110_2 + 111_2$

Lógica Digital

Operações Aritméticas no Sistema Binário

ADIÇÃO

Exercícios

$11001_2 + 1011_2 = ?$

$101101_2 + 11100011_2 = ?$

$11111_2 + 111111_2 = ?$

$100111_2 + 1110_2 + 1011_2 = ?$

Operações Aritméticas no Sistema Binário

SUBTRAÇÃO

$$\begin{array}{r} 0 \\ -\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ -\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Observamos que para o caso 0 – 1, o resultado será igual a 1, porém haverá um **transporte** para a coluna seguinte que deve ser acumulado no subtraendo e, obviamente, subtraído do minuendo.

Ex.: $111_2 - 100_2$

$1000_2 + 111_2$

Operações Aritméticas no Sistema Binário

SUBTRAÇÃO

$1010_2 - 1000_2 = ?$

$10010_2 + 10001_2 = ?$

$11000_2 + 111_2 = ?$

Operações Aritméticas no Sistema Binário

MULTIPLICAÇÃO

Procede-se como em uma multiplicação no sistema decimal:

$0 \times 0 = 0$

$0 \times 1 = 0$

$1 \times 0 = 0$

$1 \times 1 = 1$

Ex.: $11010_2 \times 10_2$

Operações Aritméticas no Sistema Binário

MULTIPLICAÇÃO

Exercícios

$1100_2 \times 001_2 = ?$

$11010_2 \times 101_2 = ?$

$100101_2 \times 1001_2 = ?$

Notação dos Números Binários Positivos e Negativos

- Pode ser feita utilizando- se os sinais “+” e “-”.
- Na prática, porém, em hardware dos sistemas digitais que processam operações aritméticas, microprocessadores por exemplo, estes sinais não podem ser utilizados, pois tudo deve ser codificado em 0 ou 1.
- Uma forma de representar em alguns casos utilizada, é a de acrescentar ao número um **bit de Sinal** colocado à esquerda, na posição do algarismo mais significativo.
  - ✓ O bit de sinal positivo é **0**
  - ✓ O bit de sinal negativo é **1**

Sinal-módulo

Notação dos Números Binários Positivos e Negativos

NOTAÇÃO MÓDULO

- $35_{10} = 100011_2$

$$\therefore +\ 100011_2 = \mathbf{0}100011_2$$

bit de sinal (0 indica número positivo)

- $73_{10} = 1001001_2$

$$\therefore -\ 1001001_2 = \mathbf{1}100011_2$$

bit de sinal (1 indica número negativo)

Notação dos Números Binários Positivos e Negativos

NOTAÇÃO MÓDULO

- Uma outra forma para representar números binários negativos bastante utilizada é a notação do **complemento de 2**
- Mas para obtê-la, devemos primeiramente converter o número na notação do **complemento de 1**

Notação dos Números Binários Positivos e Negativos

NOTAÇÃO MÓDULO

- **Complemento de 1** : se dá pela troca de cada bit do número pelo seu inverso ou complemento.

Número Binário ⟶ **1 0 0 1 1 0 1 1**

Complemento de 1 ⟶ **0 1 1 0 0 1 0 0**

Notação dos Números Binários Positivos e Negativos

Complemento de 2

- **Complemento de 2** : se dá somando-se 1 ao complemento de 1 do número binário inicial.

Número Binário → 1 1 0 0 1 1 0 1

Complemento de 1 → 0 0 1 1 0 0 1 0

\+ 1

Complemento de 2 → 0 0 1 1 0 0 1 1

Notação dos Números Binários Positivos e Negativos

- Tabelas representativas da sequência de números binários positivos e negativos. Representação dos números -9_{10} a $+9_{10}$ no sistema binário em 4 bits utilizando a notação do completo de 2:

Decimal	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
Binário	-1001	-1000	-0111	-0110	-0101	-0100	-0011	-0010	-0001
Comp. De 2	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Decimal	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
Binário	0000	+0001	+0010	+0011	+0100	+0101	+0110	+0111	+1000	+1001
Comp. De 2	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

Notação dos Números Binários Positivos e Negativos

Complemento de 2: Inverso

- **Passagem do número na notação do complemento de 2 para a notação binária normal:** basta determinar o complemento de 2 novamente.

	1 0 1 1
Complemento de 1 ⟶	0 1 0 0
	+ 1
Complemento de 2 ⟶	0 1 0 1

Notação dos Números Binários Positivos e Negativos

Exercícios

Determine o complemento d 1 de 101010_2.
Determine o complemento de 2 do número -10010110_2.
Qual o equivalente positivo do número 0110_2, aqui representado em complemento de 2?

Lógica Digital

Utilizando do Complemento de 2 em Operações

- Basta determinar o complemento de 2 do número negativo envolvido, com o mesmo número de bits do outro membro da operação e realizar a soma, desconsiderando, se houver, o estouro de bits no resultado.

- Ex.: $11010111_2 - 100101_2$

Complemento de 1 de 00100101: 11011010

Complemento de 2:

$$\begin{array}{r} 11011010 \\ +\quad 1 \\ \hline 11011011 \end{array}$$

Operação $\Longrightarrow$

$$\begin{array}{r} 11010111 \\ +11011011 \\ \hline \cancel{1}10110010 \end{array}$$

Estouro de bits desconsiderado

Utilizando do Complemento de 2 em Operações

- Efetue as subtrações, utilizando o complemento de 2:
- $10101011_2 - 1000100_2$
- $10011_2 - 100101_2$

ARITMÉTICA HEXADECIMAL ADIÇÃO

Ex.: $3A943B_{16}$ + $23B7D5_{16}$

Da direita para a esquerda, temos para cada um dos seis algarismos:

1) B = 11_{10} + 5_{16} = 16_{10}

Como 16_{10} não é algarismo válido da base 16 (o maior algarismo F, tem valor = 15_{10}, então usa-se o princípio posicional, substituindo 16 unidades da ordem da direita por 1 unidade da ordem da esquerda.

B + 5 = 0 e vai 1

2) 1 (vai 1 vindo da ordem à direita) + 3 + D = 1 + 3 + 13 = 17_{10}.

17_{10} = 16 (vai 1 para a esquerda) + 1.

3) 1 (vai 1) + 4 + 7 = 12_{10}

12_{10} equivale ao algarismo C_{16}. Coloca-se C no resultado e não há "vai 1".

4) 9 + B = 9 + 11 = 20_{10}

20 = 16 (vai um para a esquerda) + 4. Coloca-se 4 como resultado e "vai 1" para a esquerda.

5) 1 + A + 3 = 1 + 10 + 3 = 14_{10}

14_{10} equivale ao algarismo E_{16}. Coloca-se E no resultado e não há "vai 1".

6) 3 + 2 = 5. Coloca-se 5 como resultado e não há "vai 1".

ARITMÉTICA HEXADECIMAL ADIÇÃO

Ex.: $3A943B_{16} + 23B7D5_{16}$

```
 1   11     ← "vai 1"
 3A943B     ← 1ª parcela
+23B7D5     ← 2ª parcela
 5E4C10
```

SUBTRAÇÃO HEXADECIMAL ADIÇÃO

Ex.: $4C7BE8_{16} - 1E927A_{16}$

4-1=3	C-1 = B+16 = 27			E-1=D	8+16=24
$\cancel{4}$	$\cancel{C}$	7+16=23	B	$\cancel{E}$	8
-1	E	9	2	7	A
2	D	E	9	6	E

SUBTRAÇÃO HEXADECIMAL ADIÇÃO

Ex.: $4C7BE8_{16} – 1E927A_{16}$

Da direita para a esquerda, temos para cada um dos seis algarismos:

1) 8 – A não é possível. Retira-se, então, 1 unidade da ordem à esquerda (E -1 = D), passando 16 unidades (valor igual ao da base) para a direita, as quais são somadas ao valor existente, 8.

   $16 + 8 = 24 – A = 24 – 10 = 14$, equivalente ao algarismo E_{16}

2) D - 7 = 13 - 7 = 6
3) B – 2 = 11 – 2 = 9
4) 7 - 9 não é possível. Retira-se uma unidade da ordem à esquerda (C-1 = B), passando 16 unidades para a direita, as quais são somadas ao valor existente, 7

   $16 + 7 = 23 – 9 = 14_{10}$, equivalente ao algarismo E_{16}

5) C – E não é possível. Retira-se uma unidade da ordem à esquerda (4-1 = 3), passando 16 unidades para a direita, as quais são somadas ao valor existente, $B_{16} = 11_{10}$
6) 3 - 1 = 2.

Resultado : $2DE96E_{16}$

DIVISÃO - Sistema Binário

Ex.: 1001_2 / 101_2

Na divisão binária cada algarismo do quociente só pode ser 1 (quando o divisor é menor – apenas 1 vez – que o dividendo ou parte dele) ou zero (caso contrário).
No exemplo, 101 é menor e cabe apenas 1 vez em 1001. O quociente é, então, 1 e

$$\begin{array}{r} 1001 \\ \underline{-\ 101} \\ 0100 \end{array}$$

O resto é 100_2

DIVISÃO - Sistema Binário

Ex.: 101010_2 / 110_2

a) Em primeiro lugar, verifica-se que valor (que quantidade de algarismos) é suficiente maior que o divisor, de modo que o primeiro algarismo do quociente seja 1.

No exemplo o valor 1010 (quatro primeiros algarismos da esquerda para a direita) é maior uma vez que o divisor.

b) Em seguida, subtrai-se de 1010 (parte utilizada do dividendo) o valor 110 (que é 1 x 110), ou seja, quociente, 1, vezes divisor, 110, encontra-se como resto parcial 100.

$$
\begin{array}{r|l}
101010 & 110 \\ \cline{2-2}
\underline{-110} & 1 \\
100 &
\end{array}
$$

DIVISÃO - Sistema Binário

Ex.: $101010_2 / 110_2$

c) Efetua-se nova divisão, utilizando-se como novo dividendo o valor do resto parcial 100 acrescido de um algarismo do dividendo completo, sendo, no caso, o algarismo 1.

O novo dividendo será 1001, que contém 1 vez o divisor, 110. E assim teremos nova divisão parcial:

$$\begin{array}{r|l} 1001 & 110 \\ \cline{2-2} \underline{-110} & \quad 1 \\ 011 & \end{array}$$

d) Repete-se pela terceira vez o processo, dividindo-se 110 (novo dividendo, formado pelo resto parcial 11 acrescido do último algarismo do dividendo completo 0) por 110.

Encontra-se quociente 1 e resto parcial 000. A divisão está completa.

$$\begin{array}{r|l} 110 & 110 \\ \cline{2-2} \underline{-110} & \quad 1 \\ 000 & \end{array}$$

DIVISÃO - Sistema Binário

Ex.: $101010_2 / 110_2$

A operação completa fica assim:

$$
\begin{array}{l|l}
101010 & 110 \\ \cline{2-2}
\underline{-110} & 111 \\
\;1001 & \\
\;\underline{-110} & \\
\;\;0110 & \\
\;\;\underline{-110} & \\
\;\;\;000 &
\end{array}
$$

Exercício:

$11001110_2 / 1101_2$

Lógica Digital

ARITMÉTICA OCTAL - ADIÇÃO

Ex.: $3657_8 + 1741_8$

$$\begin{array}{r} 3657 \\ +1741 \\ \hline 5620 \end{array}$$

Da direita para a esquerda, temos para cada um do quatro algarismos:

1) 7+1=8

Como não há algarismo 8 na base 8, emprega-se o conceito posicional, isto é, 8 unidades de uma ordem valem 1 unidade de ordem imediatamente à esquerda. Então fica: 0 = 8 – 8 e "vai 1" para a esquerda.

2) 1 (vai 1 vindo da ordem à direita) + 5 + 4 = 10. Temos: 10 – 8 = 2 e "vai 1" (que é igual a 8).
3) 1 (vai 1) + 6 + 7 = 14 Temos: 14 – 8 = 6 e "vai 1"
4) 1 + 3 + 1 = 5 Não há "vai 1" porque não excede 7.

Resultado: 5620_8

ARITMÉTICA OCTAL - ADIÇÃO

Ex.: $3657_8 + 1741_8$

$$
\begin{array}{r l}
111 & \text{“vai 1”} \\
3657 & \leftarrow \text{1ª parcela} \\
\underline{+1741} & \leftarrow \text{2ª parcela} \\
5620 &
\end{array}
$$

Exercício:

$443_8 + 653_8$

ARITMÉTICA OCTAL - SUBTRAÇÃO

Ex.: 7312_8 - 3465_8

$$\begin{array}{r} 88 \\ 6208 \\ 7312 \\ \underline{-3465} \\ 3625 \end{array}$$

Da direita para a esquerda, temos para cada um do quatro algarismos:

1) 2 – 5 não é possível. Então retira-se 1 unidade da ordem à esquerda, a qual vale uma base de unidades (no caso base = 8) da direita, somando-se ao valor 2.
   8 + 2 = 10 – 5 = 5
2) 1 – 1 = 0 não é possível. Então retira-se 1 unidade da ordem à esquerda (que fica com 3 – 1 = 2 unidades), passando para 8 para a direita, o que fica 8 + 0 = 8.
   8 – 6 = 2
3) 3 – 1 = 2 -4 não é possível. Então retira-se 1 da esquerda (7 – 1 = 6), passando 8 unidades para a direita.
   8 + 2 = 10 – 4 = 6
4) 7 – 1 = 6 – 3 = 3

Resultado: 3625_8

ARITMÉTICA OCTAL - SUBTRAÇÃO

Ex.: $7312_8 - 3465_8$

88	
6208	← empréstimos
7312	← 1ª parcela
-3465	← 2ª parcela
3625	

Exercício:

$37425_8 - 14766_8$

Exercícios

1. Converter os seguintes valores decimais em valores hexadecimais:

a) 447_{10}

b) 622_{10}

2. Converter os seguintes valores hexadecimais em valores decimais

a) $3A2_{16}$

b) $33B_{16}$

3. A partir do valor hexadecimal 2BEF9, escreva os 12 números que se seguem em sequência.

Exercícios

4. A partir do valor hexadecimal 3A57, escreva os 10 números subsequentes, saltando de quatro em quatro valores (por exemplo, o primeiro subsequente é 3A5B).

5. Efetue as seguintes operações aritméticas:

a) $1011101_2 + 1111001_2 = (\quad)_2$

b) $100000_2 - 11100_2 = (\quad)_2$

c) $101_2 \times 111_2 = (\quad)_2$

d) $(1101101)_2 / (100)_2 = (\quad)_2$

e) $31752_8 + 6735_8 = (\quad)_2$

f) $43DAB_{16} - 3EFFA_{16} = (\quad)_2$

Exercícios

6. Qual é o equivalente em decimal do número 10110111_2, aqui representado em complemento de 2?

7. Efetue as operações utilizando o complemento de 2:

a) $111100_2 - 11101011_2$
b) $-10010011_2 - 11011010_2$