Cálculo II / Cálculo Diferencial e Integral II

Aula 01 - Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Profs. Cristiane Faria, Maria Hermínia Mello,
Patrícia Nunes e Rafael Borges

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

30 de setembro de 2020

Conteúdo

Referência

Estudem a apostila do IME, volume 1, páginas 33–61.

Produto Cartesiano

Considere dois conjuntos A e B. Definimos o ***produto cartesiano*** entre A e B, denotado por $A \times B$, como

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Ou seja, $A \times B$ é o conjunto de todos os produtos ordenados (x, y) nos quais o primeiro elemento, x, está em A e o segundo elemento, y, está em B.

Exemplo

Seja $A = \{1, 2, 5\}$ *e* $B = \{\heartsuit, \spadesuit\}$. *Portanto,*

$$A \times B = \{(1, \heartsuit), (1, \spadesuit), (2, \heartsuit), (2, \spadesuit), (5, \heartsuit), (5, \spadesuit)\}.$$

Da mesma forma, o ***produto cartesiano*** entre três conjuntos A, B e C, denotado por $A \times B \times C$, é dado por

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A,\, y \in B \text{ e } z \in C\},$$

e temos definições análogas para o produto cartesiano entre quatro, cinco, seis, etc., conjuntos.

Notação

Seja A um conjunto. Denotamos

$$A^2 = A \times A, \qquad A^3 = A \times A \times A, \qquad A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ vezes}}.$$

O conjunto $\mathbb{R}^n$

Assim, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y), nos quais x e y são valores reais. Ou seja, $\mathbb{R}^2$ é um plano (assim como $\mathbb{R}$ é uma reta).

$\mathbb{R}^3$ é o conjunto das triplas ordenadas (x, y, z), nos quais x, y e z são valores reais. Ou seja, $\mathbb{R}^3$ é todo o espaço.

E, de forma geral, $\mathbb{R}^n$ é o conjunto das n-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nos quais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são valores reais.

Pergunta

Vocês conseguem pensar em uma aplicação para $\mathbb{R}^4$?

Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Neste curso, iremos estudar funções que retratam situações onde uma grandeza (um ***resultado observado***) dependerá dos valores de assumidos por duas ou mais outras grandezas (as ***variáveis independentes*** do problema).

Significado dos nomes:

- **Funções Reais**: funções cuja ***imagem*** (ou seja, o ***resultado observado***) é um número real.
- **Funções de Várias Variáveis Reais**: funções cujas ***variáveis independentes*** são números reais. São as chamadas variáveis do domínio da função.

Funções Reais de Duas Variáveis Reais

Notação usual:

$$z = f(x, y)$$

Variáveis independentes (variáveis do domínio da função): x, y
Variável dependente (variável da imagem da função): z

Outra notação:

$$z = f(x_1, x_2)$$

Esta notação é conveniente quando, no domínio, temos muitas variáveis independentes (3 ou mais).

Variáveis independentes: x_1, x_2
Variável dependente: z

Exemplos

1. A produção mensal de um certo produto (que denotaremos por Q) depende do capital investido mensalmente (C) e da quantidade de mão-de-obra (L), medida em trabalhadores-hora:

$$Q = f(C, L).$$

2. A temperatura T em um lugar qualquer na superfície da Terra é função das suas coordenadas (isto é, da sua latitude ϕ e longitude λ):

$$T = f(\phi, \lambda).$$

Pergunta

Você consegue pensar em algum outro exemplo prático de uma grandeza que é função de duas outras? E de três outras?

Domínio de uma Função f

Definição

*O **domínio** de uma função f é o conjunto dos valores que as suas variáveis independentes podem assumir.*

As condições do problema ou a fórmula matemática às vezes impõem algumas restrições às variáveis independentes. Por exemplo, se uma das variáveis independentes é o tempo t, em alguns problemas impõe-se a restrição de que $t \geq 0$.

Notação

O domínio de f será denotado por D, D_f ou $\operatorname{Dom} f$.

Domínio de uma Função $z = f(x, y)$

No caso de uma função real de duas variáveis reais $z = f(x, y)$, $\operatorname{Dom} f$ é o conjunto dos valores (x, y) que as variáveis independentes x e y podem assumir. Como x e y são números reais, $\operatorname{Dom} f$ é portanto um subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Exemplos

1. $z = x - 2y$.

   Não há nenhuma restrição para as variáveis independentes x e y. Portanto, o domínio é todo o plano $\mathbb{R}^2$:

   $$D = \mathbb{R}^2.$$

2. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

   Neste caso, não podemos ter $x = y = 0$, pois isto faria o denominador se anular. Portanto, o domínio de f é o plano $\mathbb{R}^2$, menos a origem $(0, 0)$:

   $$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

3 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

O radicando de uma raiz quadrada tem que ser maior ou igual a zero. Portanto,

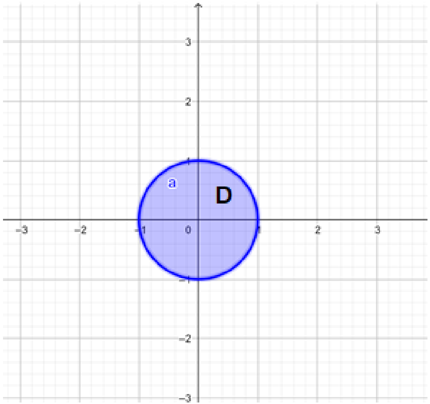
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

Para simplificarmos esta expressão, vamos resolver a inequação $1 - x^2 - y^2 \geq 0$:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \therefore \quad 1 \geq x^2 + y^2$$
$$\therefore \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Assim, temos

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



4. $f(x, y) = \ln(y - 1)$.

A variável independente x não aparece na fórmula da função. Fica subentendido que a variável x pode assumir qualquer valor real.

Já para a variável independente y, há a restrição imposta pela função ln: o logaritmo só está definido para valores estritamente positivos.

Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 1 > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1\}. \end{aligned}$$

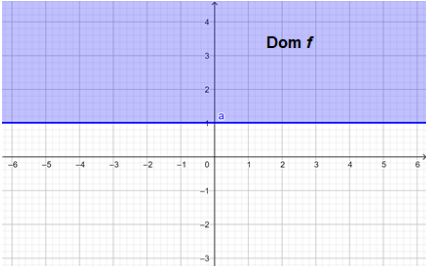


Imagem de uma Função f

Definição

A ***imagem*** *de uma função f é o conjunto dos valores que as suas variáveis dependentes assumem.*

Notação

A imagem de f será denotada por I, I_f ou $\operatorname{Im} f$.

No caso de uma função real de duas variáveis reais $z = f(x, y)$, a imagem de f sempre será um subconjunto de $\mathbb{R}$ (pois z é um número real):

$$\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}.$$

Exemplos

1. $z = x - 2y.$

$$I = \mathbb{R}.$$

2. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}.$

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^*_+ = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}.$$

Exemplos

3. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

   Notemos que, para os valores de x e y tais que $x^2 + y^2 = 1$, teremos $z = 0$. Para $x = 0$ e $y = 0$, teremos $z = 1$. Como já vimos, o domínio de f é o conjunto dos valores de x e y para os quais $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. Assim,

   $$I = \{z \in \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq 1\}.$$

4. $f(x, y) = \ln(y - 1)$.

   Primeiramente, notem que o valor de x não influencia em nada na imagem de f. Como vimos anteriormente, no domínio de f temos sempre $y > 1$. Quando y varia entre 1^+ e $+\infty$, os valores de z variam entre $-\infty$ e $+\infty$. Assim,

   $$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}.$$

Gráfico de uma Função $z = f(x, y)$

Definição

*O **gráfico** de uma função real de duas variáveis reais $z = f(x, y)$ é o conjunto das triplas ordenadas $(x, y, f(x, y))$:*

$$\operatorname{Gra} f = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \operatorname{Dom} f \ \ e \ \ z = f(x, y)\}.$$

Notação

Denotamos o gráfico de f por G, G_f ou $\operatorname{Gra} f$.

Em geral, nos exemplos práticos o gráfico de uma função real de duas variáveis reais $z = f(x, y)$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

Usem sites ou aplicativos para desenharem os gráficos das funções vistas anteriormente.
Exemplos de sites:

Calc Plot 3D: https://www.monroecc.edu/faculty/paulseeburger/calcnsf/CalcPlot3D/

Geogebra: https://www.geogebra.org/3d?lang=pt

Observação

Dado o gráfico de uma função $z = f(x, y)$*:*

- *Fazendo a projeção ortogonal dos pontos do gráfico no plano xy, obtemos o domínio da função.*
- *Fazendo a projeção dos pontos do gráfico da função no eixo z, obtemos a imagem da função.*

Observação

Em geral, o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ *é uma superfície. Mas a recíproca não é verdadeira. Existem superfícies que não são gráficos de funções* $z = f(x, y)$*. As superfícies que não são gráficos de funções definem implicitamente funções do tipo* $z = f(x, y)$*. Isto é, os gráficos dessas superfícies contêm ou podem ser subdivididos em gráficos de funções da forma* $z = f(x, y)$*.*

Curvas de nível

Como vimos, o gráfico de uma função real de duas variáveis reais $z = f(x, y)$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Portanto, é impossível representar tal gráfico numa folha de papel, num slide, numa tela de computador ou em qualquer outro objeto bidimensional sem fazermos algum tipo de concessão.

Uma forma bastante usual de representarmos o gráfico de $z = f(x, y)$ é através das suas curvas de nível.

Definição

*Uma **curva de nível** de uma função real de duas variáveis reais $z = f(x, y)$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) tais que $f(x, y) = k$, para algum valor escolhido k (chamado de **nível**). Ou seja, a curva de nível é o conjunto*

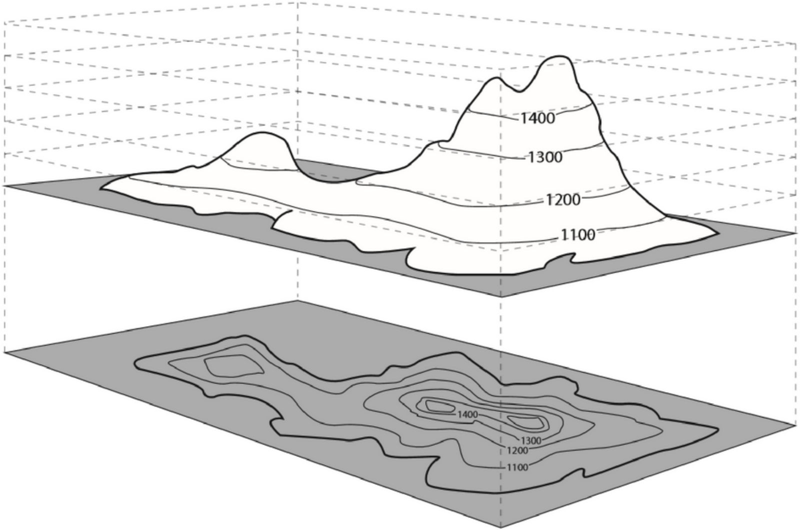
$$\{(x, y) \in \operatorname{Dom} f \mid f(x, y) = k\}.$$

Curvas de nível

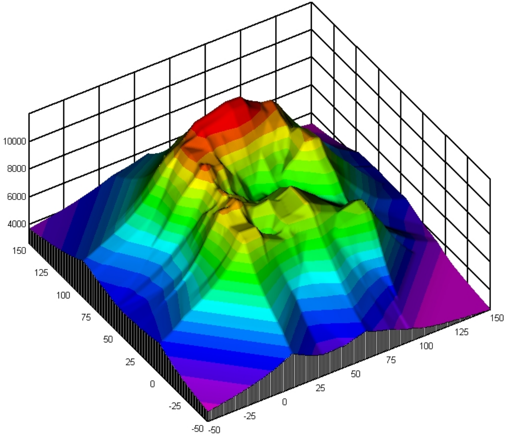
A representação de $z = f(x, y)$ por curvas de nível é feita da seguinte maneira: primeiro, escolhemos um conjunto de níveis de $f(x, y)$. Depois, desenhamos as curvas destes níveis no plano xy, escrevendo o valor do nível ao lado da sua respectiva curva. Desta forma, obtemos uma representação da $f(x, y)$ em um plano — embora esta seja uma representação incompleta, já que nem todos os níveis da $f(x, y)$ são representados no gráfico.

A seguir, veremos alguns exemplos de representação por curvas de nível.

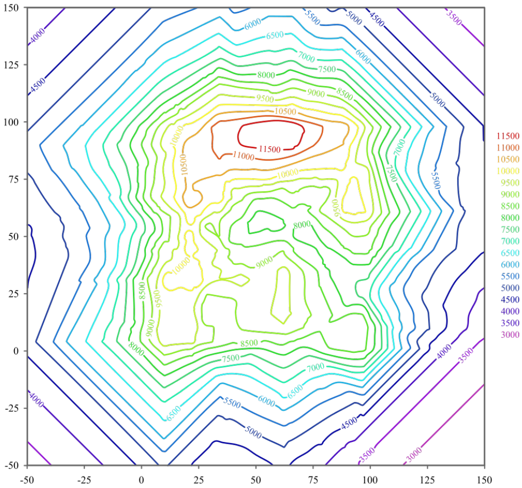
Exemplos



Exemplos



10000
8000
6000
4000
150
125
100
75
50
25
0
-25
-50
-50
-25
0
25
50
75
100
125
150



150
125
100
75
50
25
0
-25
-50
-50
-25
0
25
50
75
100
125
150
11500
11000
10500
10000
9500
9000
8500
8000
7500
7000
6500
6000
5500
5000
4500
4000
3500
3000