

Aula 9

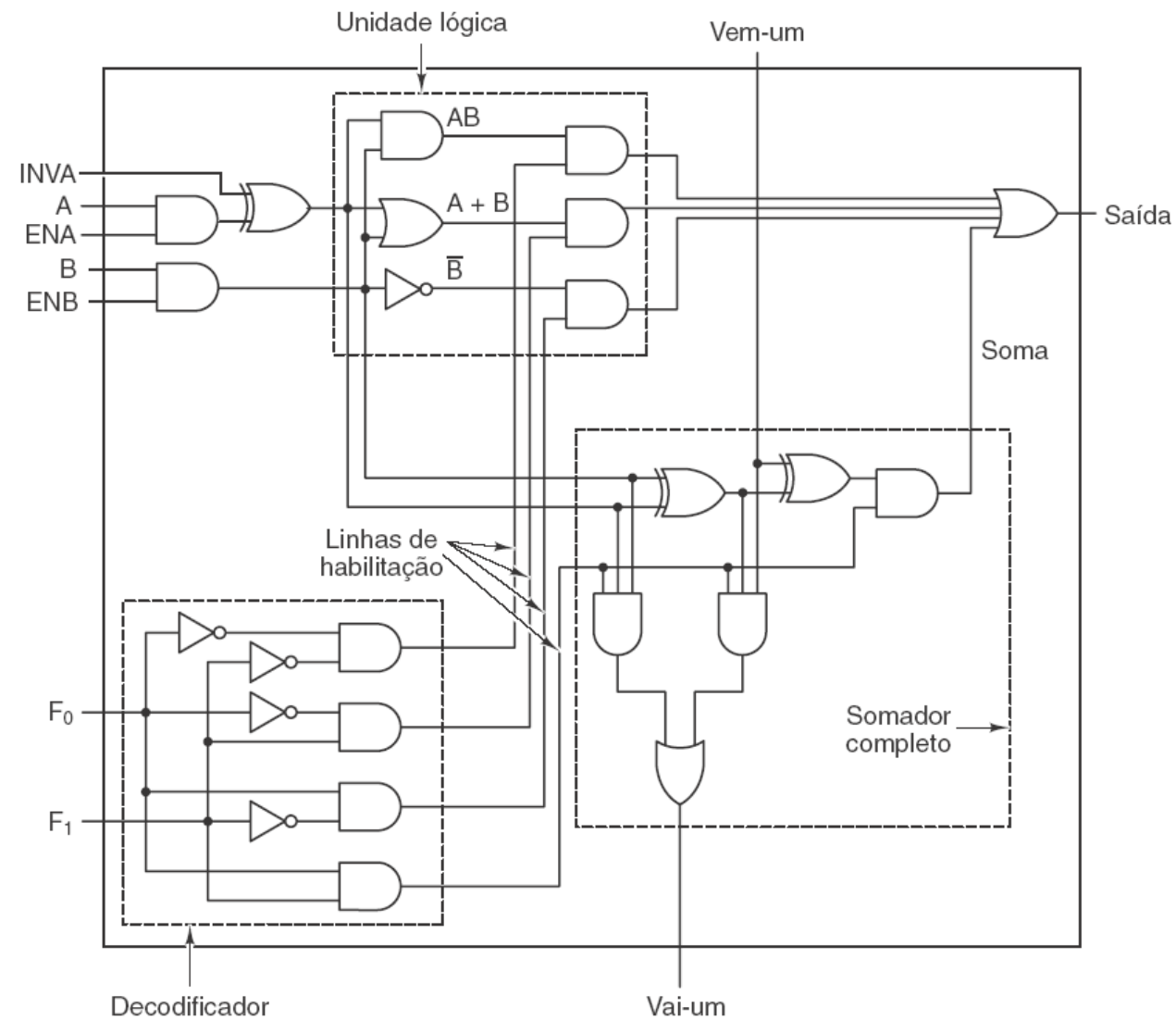
Capítulo 5 - Circuitos Aritméticos

- Circuitos Aritméticos
 - Meio somador
 - Somador completo
 - Somador completo a partir de meio somadores
 - Meio subtrator
 - Subtrator completo
 - Subtrator completo a partir de Meio Subtratores
 - Somador/Subtrator completo

Circuitos Aritméticos

- Dentro do conjunto de circuitos combinacionais aplicados para finalidade específica nos sistemas digitais, destacam-se os circuitos aritméticos. São utilizados, principalmente, para construir a **ULA (Unidade Lógica Aritmética)** dos microprocessadores e ainda, encontrados disponíveis em circuitos integrados comerciais.

Circuitos Combinacionais - 2ª parte



ULA de 1 bit

Meio somador

- Relembrando...

$$\begin{array}{r} 0 \\ + 0 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ + 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ + 0 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ + 1 \\ \hline 10 \end{array}$$

Transporte

Meio somador

- Tabela verdade soma de 2 números binários de 1 algarismo

A	B	S	Ts
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Ts → transporte de saída

$$(0 + 0 = 0 \rightarrow Ts = 0)$$

$$(0 + 1 = 1 \rightarrow Ts = 0)$$

$$(1 + 0 = 1 \rightarrow Ts = 0)$$

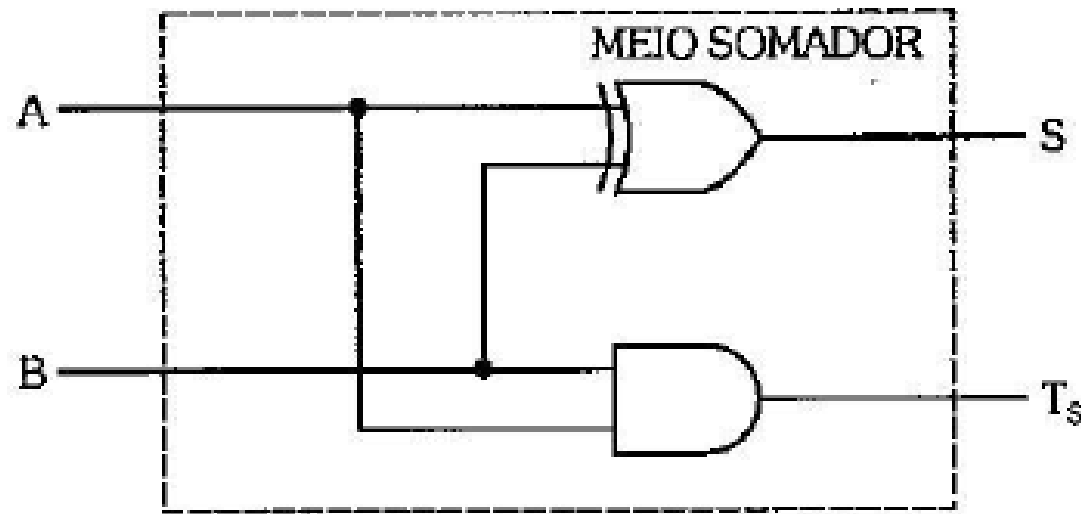
$$(1 + 1 = 0 \rightarrow Ts = 1)$$

Meio somador

- Representando cada número por um bit, podemos, então, montar um circuito com entradas A e B, e como saída a soma dos algarismos (S) e o respectivo transporte de saída (Ts).

Meio somador

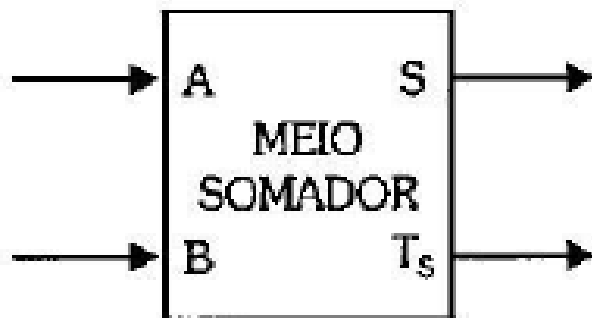
- As expressões características do circuito, extraídas da tabela, são:
- $A \oplus B$
- $T_s = AB$



Circuito a partir das
expressões

Meio somador

- A representação em bloco deste circuito é:



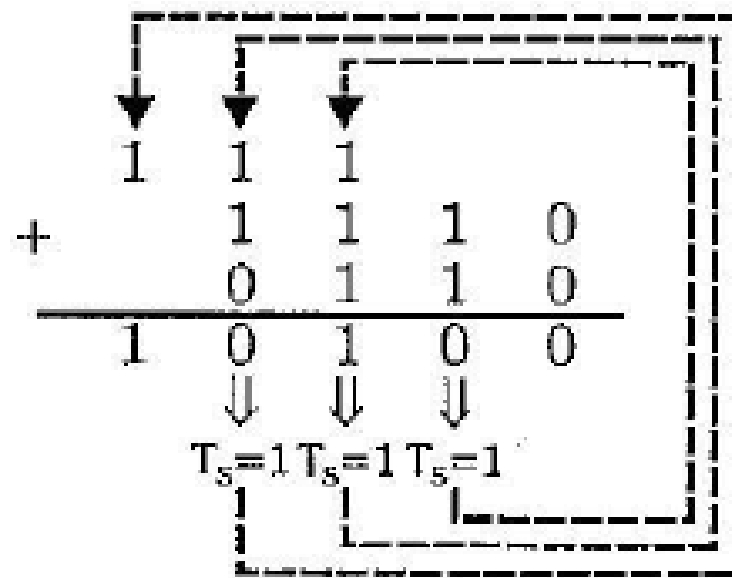
- Este circuito Meio Somador também é conhecido como **Half Adder**, sendo a saída de transporte denominada **carry out**.

Somador Completo

- O Meio Somador possibilita efetuar soma de números binários com 1 algarismo. Para se fazer a soma de números binários de mais algarismos, esse circuito torna-se insuficiente, pois não possibilita a introdução do transporte de entrada proveniente da coluna anterior.
- Analisando a soma: $1110_2 + 110_2$

Somador Completo

- A soma de 2 números binários de mais algarismos, basta somarmos coluna a coluna, levando em conta o transporte de entrada que nada mais é do que o T_s da coluna anterior.



Somador Completo

- Tabela verdade deste circuito:

A	B	T _E	S	T _s
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

T_E → transporte de entrada

$$(0 + 0 + 0 = 0 \rightarrow Ts = 0)$$

$$(0 + 0 + 1 = 1 \rightarrow Ts = 0)$$

$$(0 + 1 + 0 = 1 \rightarrow Ts = 0)$$

$$(0 + 1 + 1 = 0 \rightarrow Ts = 1)$$

$$(1 + 0 + 0 = 1 \rightarrow Ts = 0)$$

$$(1 + 0 + 1 = 0 \rightarrow Ts = 1)$$

$$(1 + 1 + 0 = 0 \rightarrow Ts = 1)$$

$$(1 + 1 + 1 = 1 \rightarrow Ts = 1)$$

$$S = \overline{A}\overline{B}T_E + \overline{A}B\overline{T}_E + A\overline{B}\overline{T}_E + ABT_E$$

$$Ts = \overline{A}BT_E + A\overline{B}T_E + A\overline{B}\overline{T}_E + AB\overline{T}_E$$

Expressão característica sem simplificação

Somador Completo

- Simplificação:

S:

	\bar{B}		B	
\bar{A}	0	1	0	1
A	1	0	1	0
	\bar{T}_E	T_E	\bar{T}_E	T_E

$$S = A \oplus B \oplus T_E$$

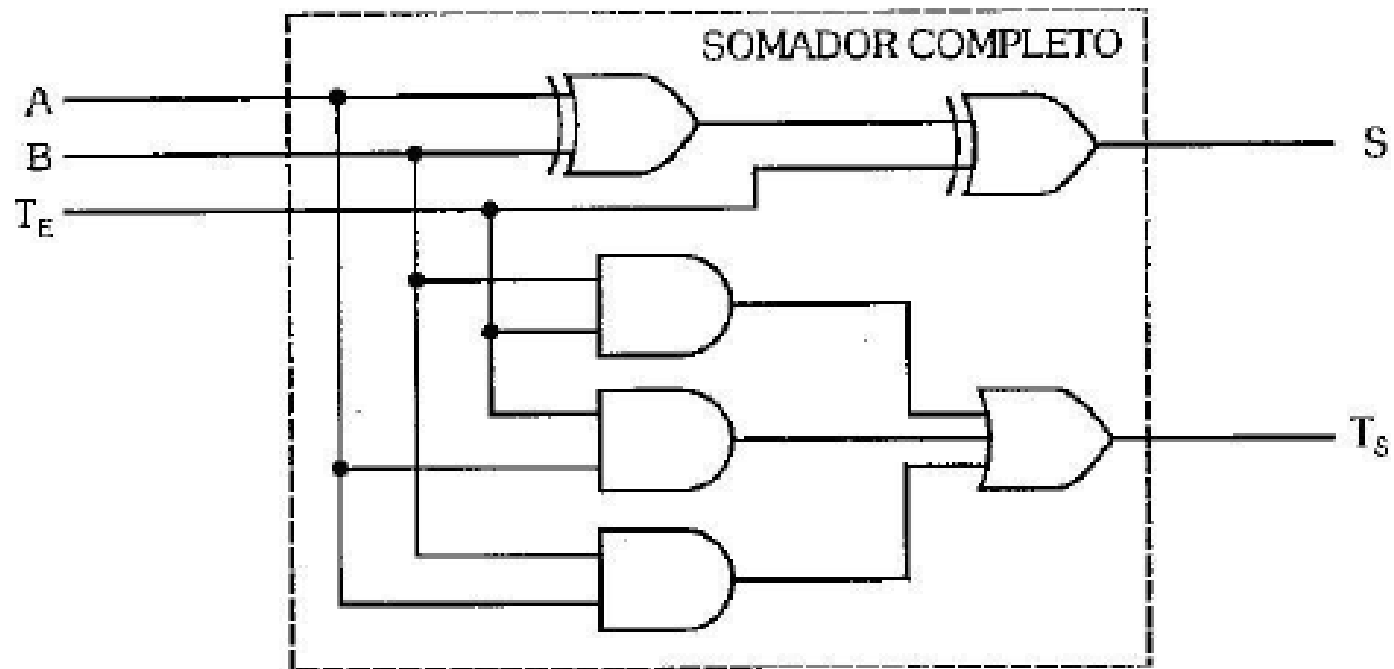
T_S :

	\bar{B}		B	
\bar{A}	0	0	1	0
A	0	1	1	1
	\bar{T}_E	T_E	\bar{T}_E	T_E

$$T_S = BT_E + AT_E + AB$$

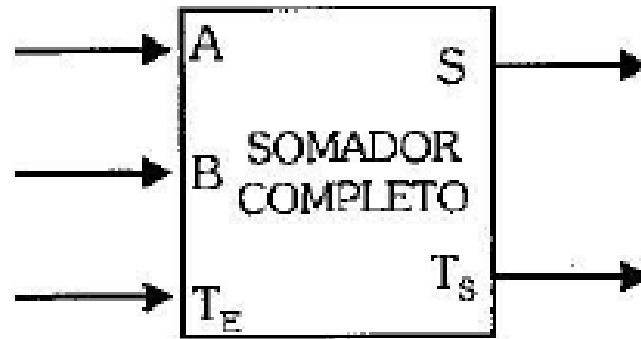
Somador Completo

- Circuito somador completo:



Somador Completo

- A representação em bloco deste circuito é:



- O circuito Somador Completo também é conhecido como **Full Adder**, sendo a saída de transporte denominada **carry in**.

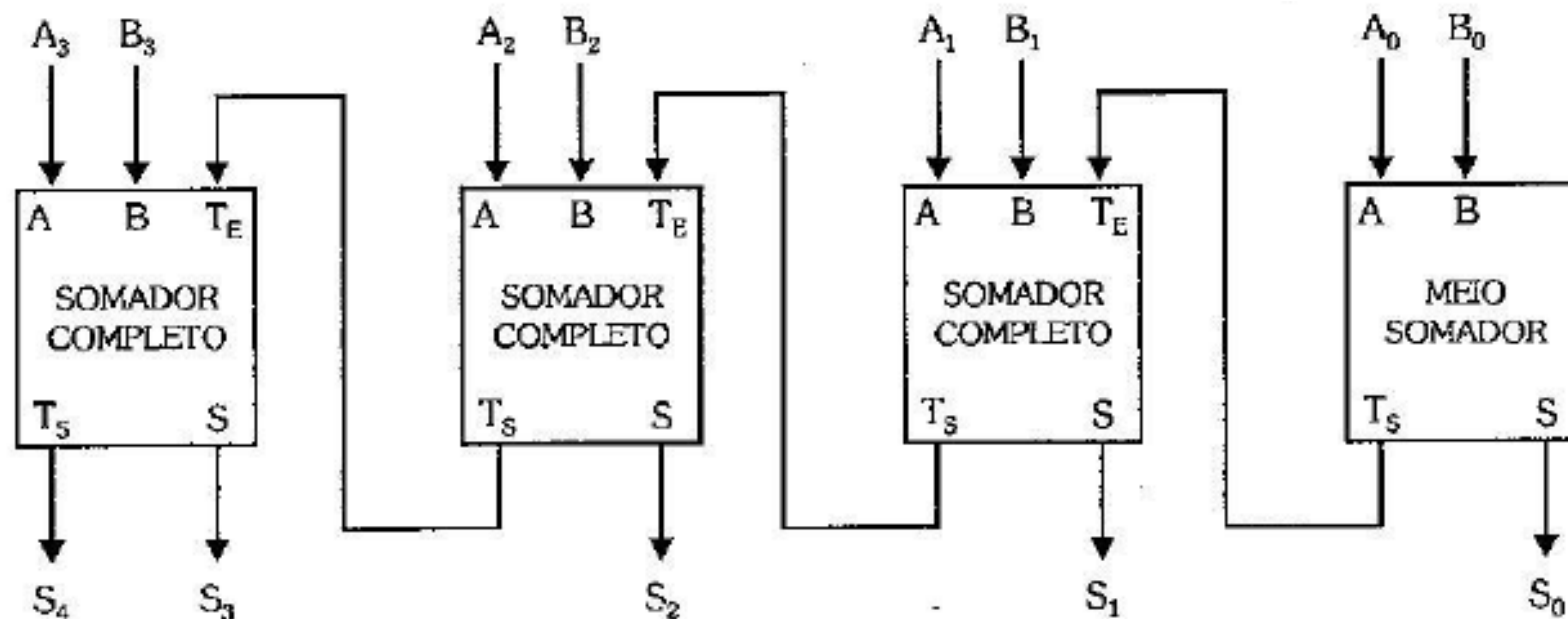
Somador Completo

- A exemplo de aplicação, vamos montar um sistema em blocos que efetua a soma de 2 números de 4 bits, conforme o esquema:

$$\begin{array}{rccccccccc} & & A_3 & & A_2 & & A_1 & & A_0 & & \\ + & & B_3 & & B_2 & & B_1 & & B_0 & & \\ \hline S_4 & S_3 & & S_2 & & S_1 & & S_0 & & & \end{array}$$

Somador Completo

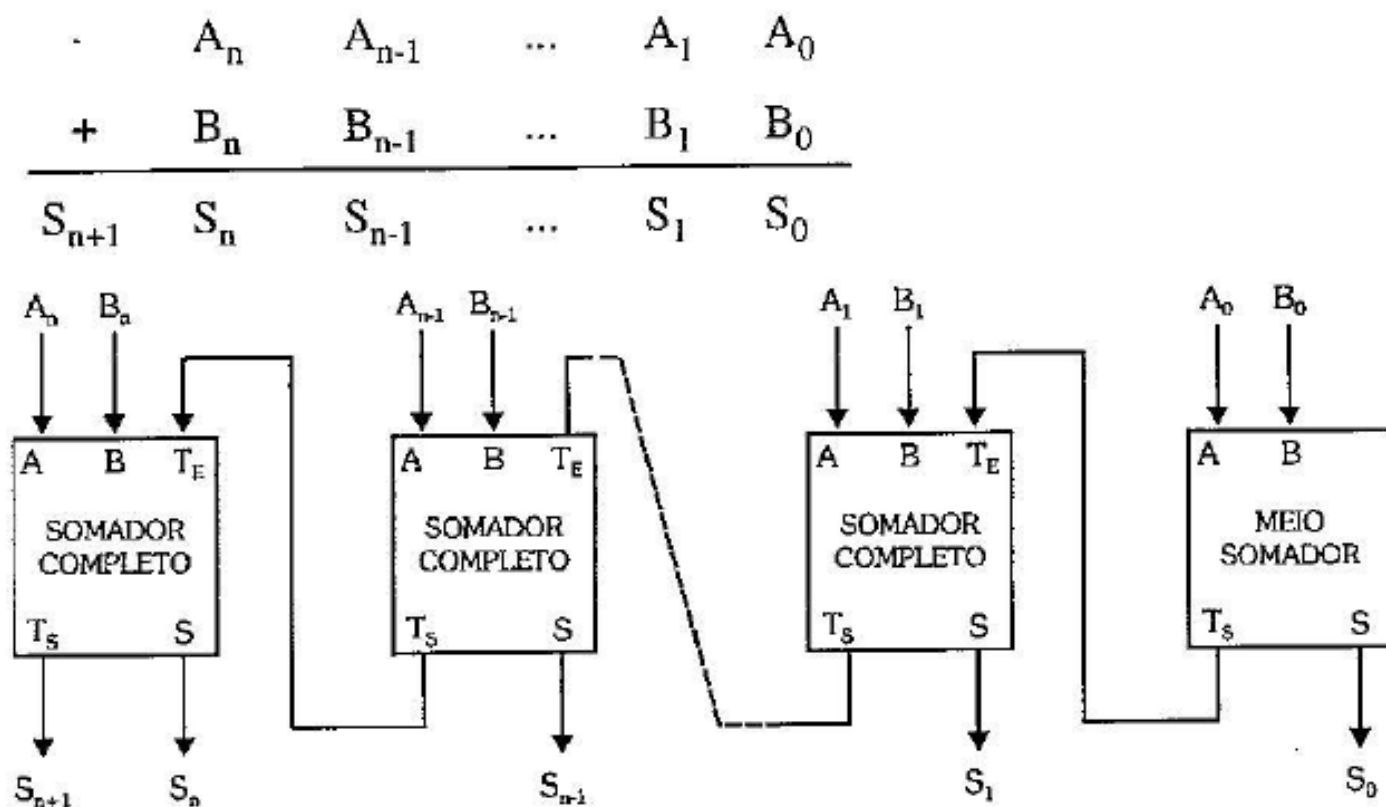
- Para efetuar a soma dos bits A_0 e B_0 dos números (1ª coluna), vamos utilizar um Meio Somador, pois não existe transporte de entrada, mas para as outras utilizaremos Somadores Completos:



Circuitos Combinacionais - 2ª parte

Somador Completo

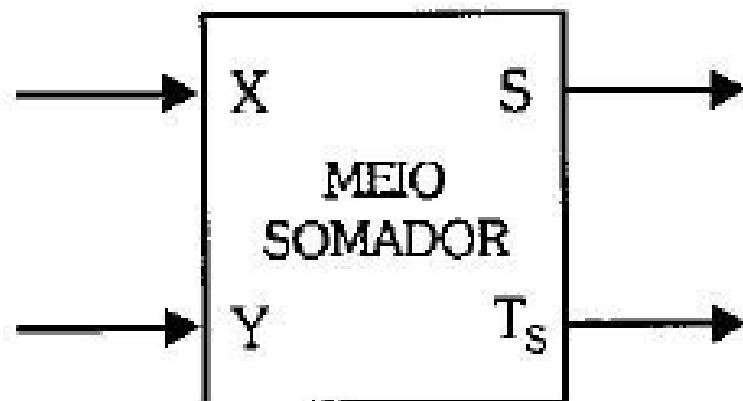
- Generalizando para um sistema que efetua a soma de 2 números de **m** bits (**m = n+1**), temos:



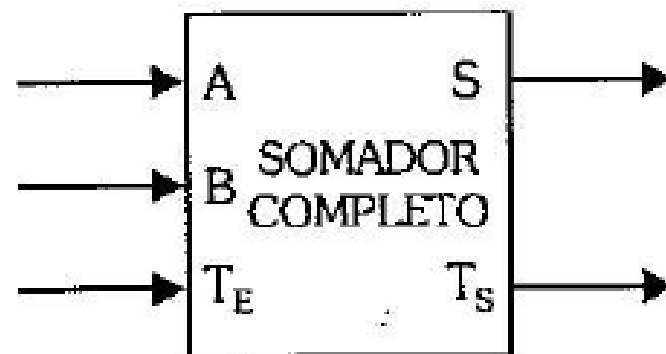
Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Somador Completo a partir de Meio Somador

- Analizando as expressões de ambos os blocos:



$$S = X \oplus Y$$
$$T_s = XY$$



$$S = A \oplus B \oplus T_E$$

$$T_s = \bar{A}BT_E + A\bar{B}T_E + AB\bar{T}_E + ABT_E$$

Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Somador Completo a partir de Meio Somador

- Fatorando a expressão de T_s , temos:

$$T_s = T_E (\overline{A}B + A\overline{B}) + AB (\overline{T_E} + T_E) \therefore T_s = T_E (A \oplus B) + AB$$

- Ligando A e B nas entradas Meio Somador 1 temos:



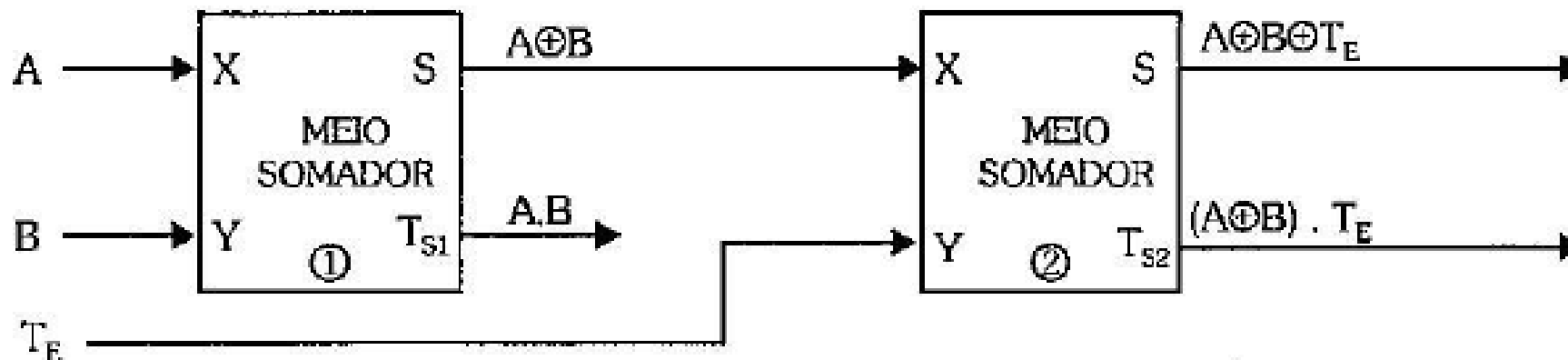
Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Somador Completo a partir de Meio Somador

- Fatorando a expressão de T_s , temos:

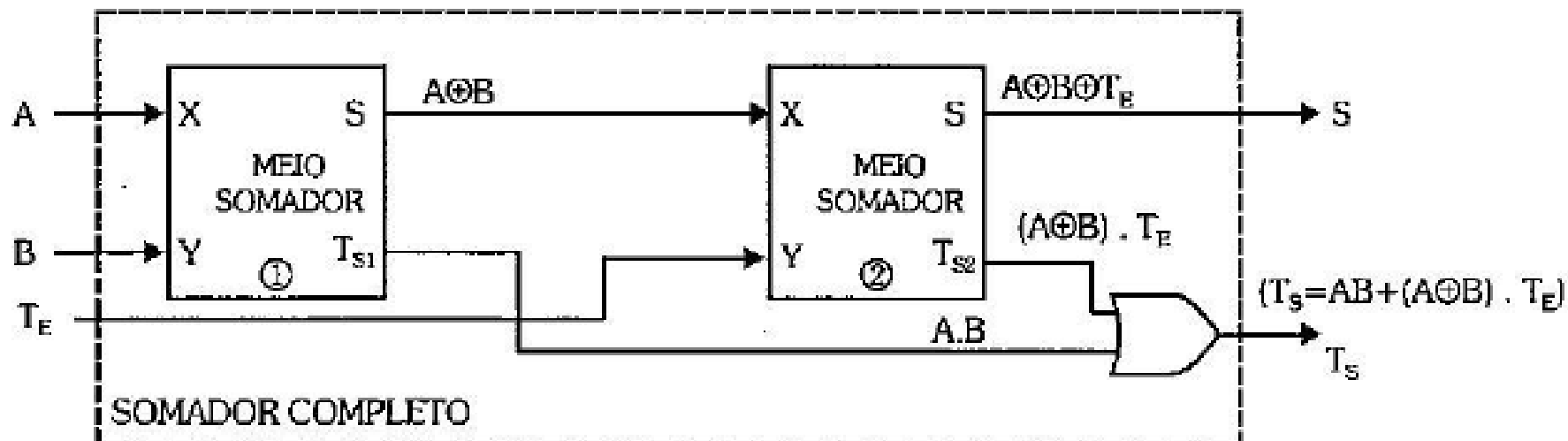
$$T_s = T_E (\overline{A}B + A\overline{B}) + AB (\overline{T_E} + T_E) \therefore T_s = T_E (A \oplus B) + AB$$

- Ligando a saída S do Meio Somador 1 à entrada X do outro Meio Somador e à entrada Y deste, a variável T_E , temos:



Somador Completo a partir de Meio Somador

- Notamos:
 - que a saída S do meio Somador 2 apresenta a soma de 2 números.
 - as saídas T_{S1} e T_{S2} são os termos da expressão de T_s de um Somador Completo, logo se fizermos a soma dessas 2 saídas (porta OU), teremos na saída o T_s de um Somador Completo:



Meio Subtrator

- Relembrando...

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - 1 = 1 \text{ e transporta } 1 \text{ (“empresta } 1\text{)}$$

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

Meio Subtrator

- Relembrando...

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - 1 = 1 \text{ e transporta 1 ("empresta 1")}$$

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

A	B	S	Ts
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

$$(0 - 0 = 0 \rightarrow Ts = 0)$$

$$(0 - 1 = 1 \rightarrow Ts = 1)$$

$$(1 - 0 = 1 \rightarrow Ts = 0)$$

$$(1 - 1 = 0 \rightarrow Ts = 0)$$

$$S = A \oplus B$$

$$Ts = \overline{A}B$$

Expressão característica

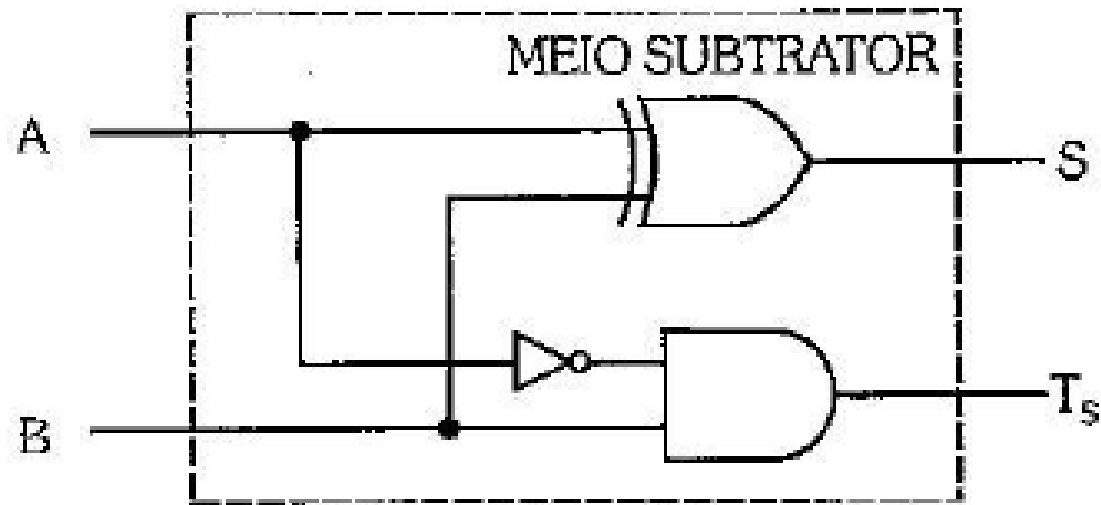
Circuitos Combinacionais - 2ª parte

Meio Subtrator

- O circuito a partir das expressões

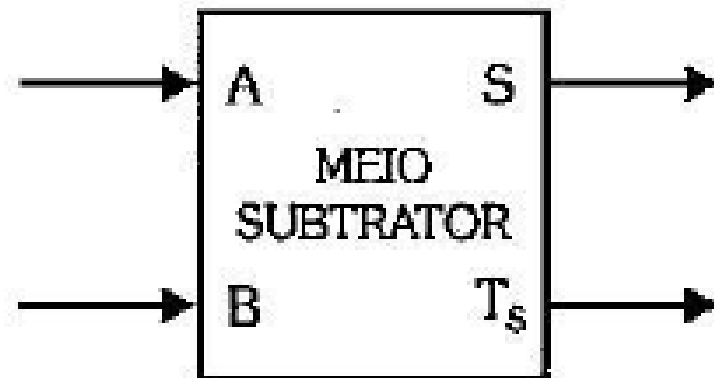
$$S = A \oplus B$$

$$T_s = \overline{A}B$$



Meio Subtrator

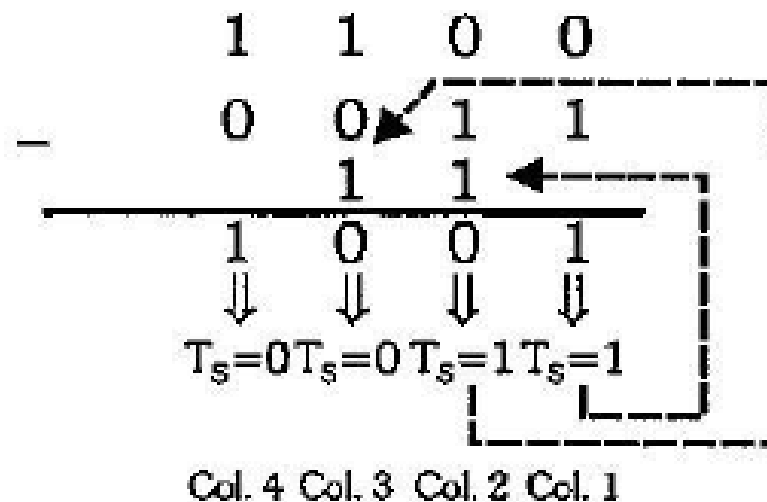
- Em bloco o circuito recebe a representação:



- Também recebe a denominação **Half Subtractor**.

Subtrator Completo

- O meio Subtrator Completo possibilita-nos efetuar a subtração de números binários de 1 algarismo.
- Analisando a subtração: $1100_2 - 11_2$



Subtrator Completo

- Para fazermos a subtração de números binários de mais algarismos, basta subtrairmos coluna a coluna, levando em conta o transporte de entrada que nada mais é que o T_s da coluna anterior.

A	B	T_E	S	T_s
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$$S = \overline{A}\overline{B}T_E + \overline{A}B\overline{T_E} + A\overline{B}\overline{T_E} + ABT_E$$

$$T_s = \overline{A}\overline{B}T_E + \overline{A}B\overline{T_E} + \overline{A}BT_E + ABT_E$$

S:

	\overline{B}	B	
\overline{A}	0	1	0
A	1	0	1
	$\overline{T_E}$	T_E	$\overline{T_E}$

(a) $S = A \oplus B \oplus T_E$

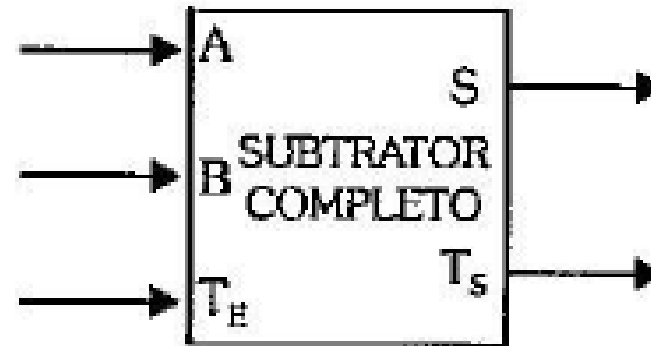
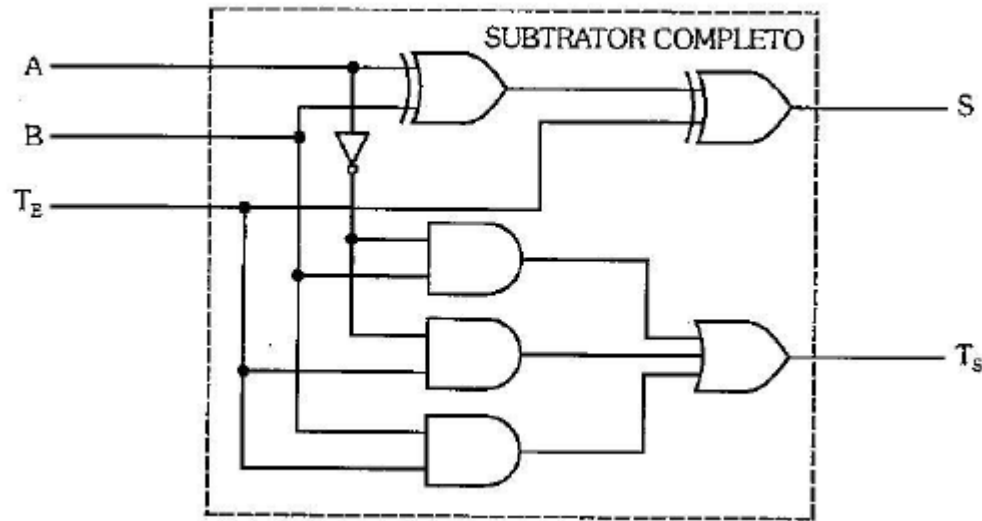
T_s :

	\overline{B}	B	
\overline{A}	0	1	1
A	0	0	1
	$\overline{T_E}$	T_E	$\overline{T_E}$

(b) $T_s = \overline{A}B + \overline{A}T_E + BT_E$

Subtrator Completo

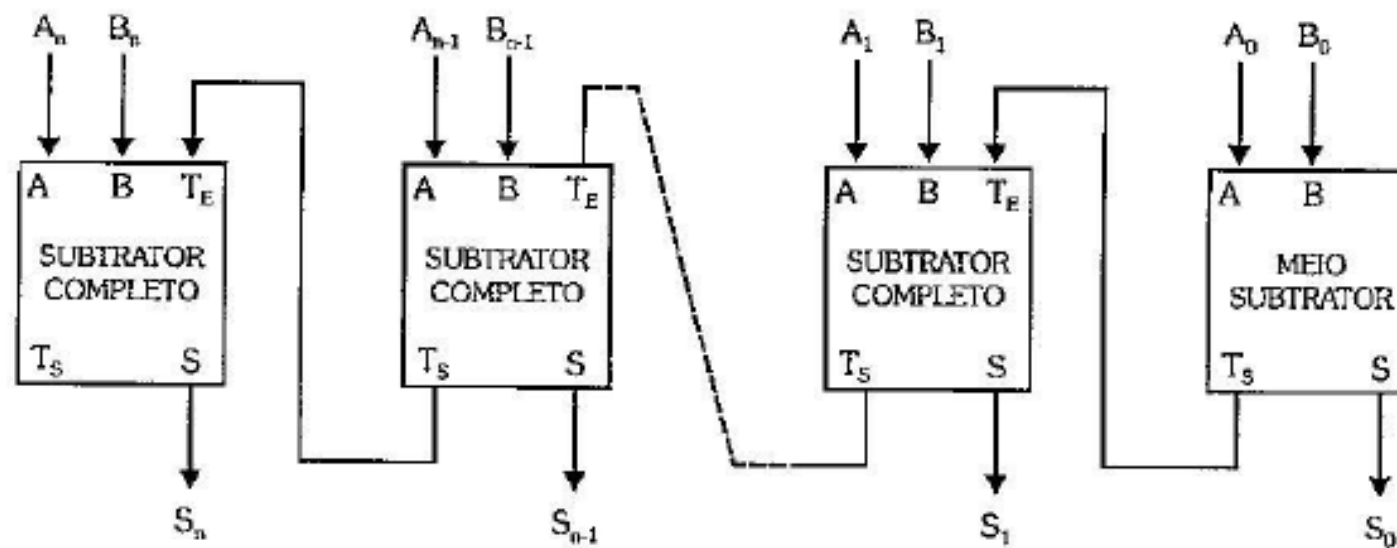
- Subtrator Completo e a representação em bloco :



- Este também é chamado **Full Subtractor**.

Subtrator Completo

- Generalizando para um sistema que efetua a subtração de 2 números de **m** bits (**m = n+1**), temos:



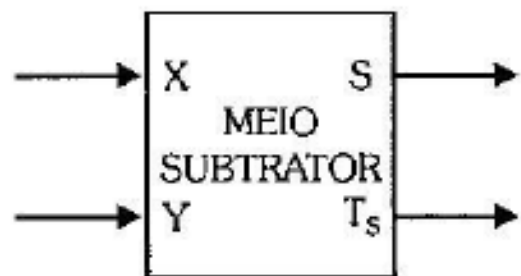
- Nesse sistema, a saída de transporte T_S do último bloco torna-se desnecessária se o número $A_n...A_0$ (minuendo) for maior ou igual a $B_n...B_0$ (subtraendo), porém poderá ser utilizada no caso contrário para sinalizar que o resultado é negativo, estando, então, na notação de complemento de 2.

Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Subtrator Completo a partir de Meio Subtrator

- Analisando as expressões dos dois blocos:

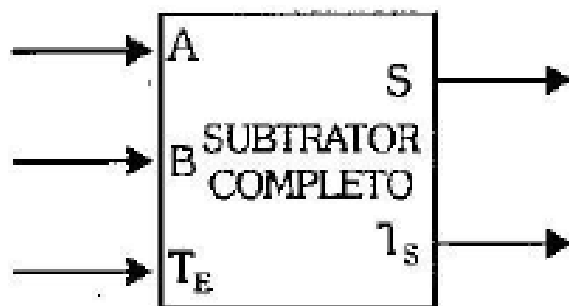
Meio Subtrator:



$$S = X \oplus Y$$

$$T_s = \overline{X}Y$$

Subtrator Completo:



$$S = A \oplus B \oplus T_E$$

$$T_s = \overline{A}\overline{B}T_E + \overline{A}B\overline{T_E} + \overline{A}BT_E + ABT_E$$

Circuitos Combinacionais – 2ª parte

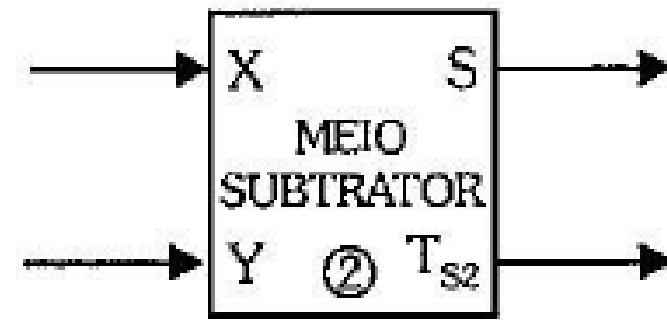
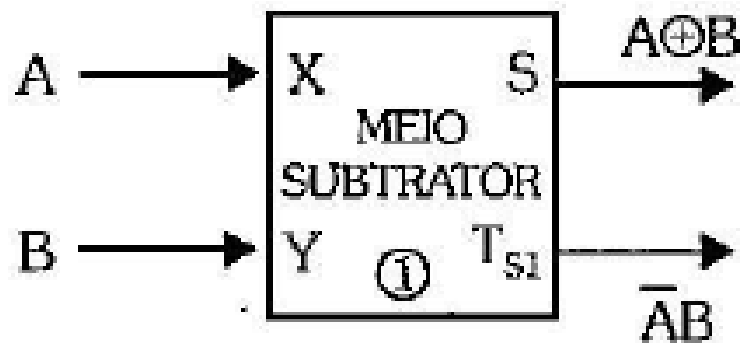
Subtrator Completo a partir de Meio Subtrator

- Fatorando a expressão de T_s temos:

$$T_s = T_E (\overline{A} \overline{B} + AB) + \overline{A}B(\overline{T_E} + T_E)$$

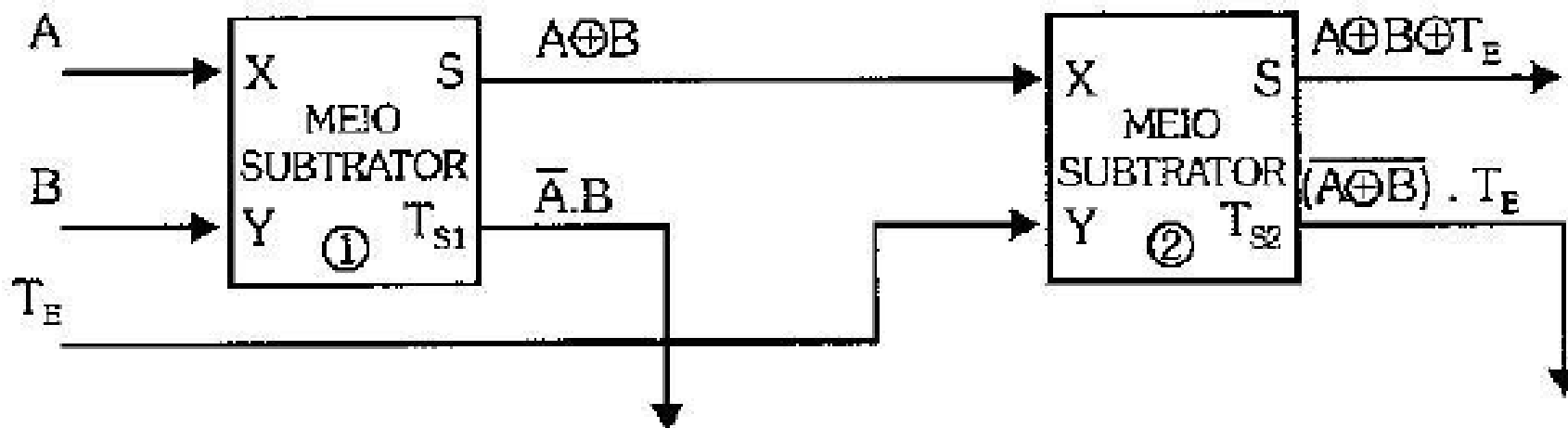
$$T_s = T_E (A \odot B) + \overline{A}B \quad \therefore \quad T_s = T_E (\overline{A \oplus B}) + \overline{A}B$$

- Ligando A e B nas entradas X e Y do Meio Subtrator 1, temos:



Subtrator Completo a partir de Meio Subtrator

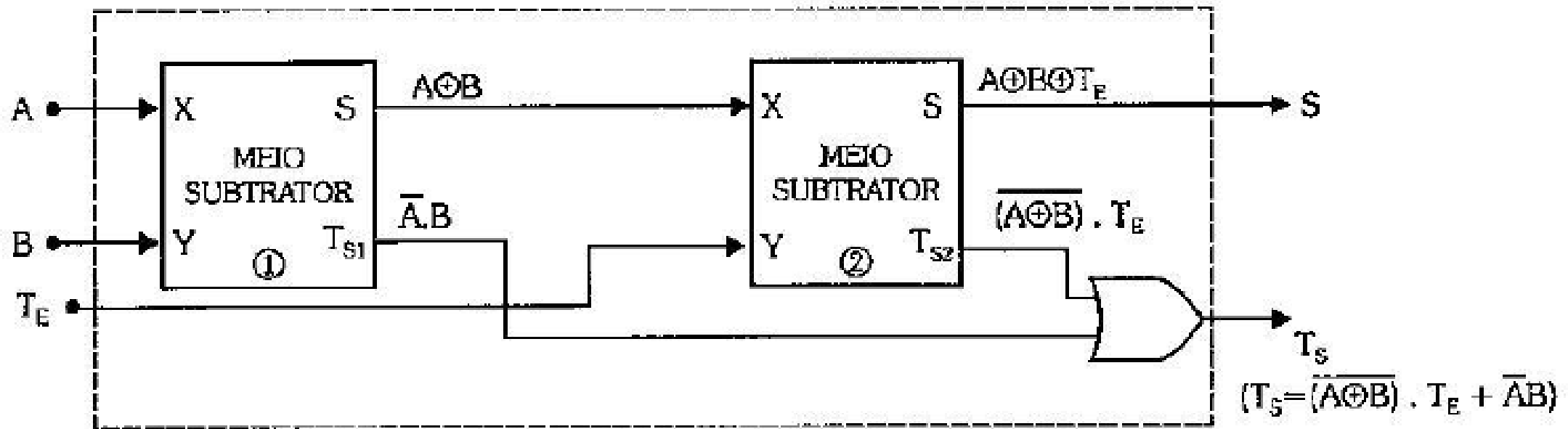
- Ligando a saída S na entrada X do 2º bloco, e à entrada Y, a variável T_E , temos:



- Notamos que a saída S do Meio Subtrator 2 apresenta a subtração completa de 2 números.

Subtrator Completo a partir de Meio Subtrator

- Analisando as saídas T_{s1} e T_{s2} , notamos que são os termos da expressão de T_s de um Subtrator Completo. Se injetarmos T_{s1} e T_{s2} nas entradas de uma porta OU, teremos na saída o T_s de um Subtrator Completo. O circuito com essa ligação é:



Somador/Subtrator Completo

- Podemos esquematizar um circuito que efetue as duas operações.
- Para isso, vamos introduzir uma outra entrada que permanecendo em nível 0, faz o circuito efetuar uma soma completa, e permanecendo em nível 1, faz efetuar uma subtração completa.

Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Somador/Subtrator Completo

- Montando a tabela verdade do circuito, sendo M a variável de controle ($M=0 \rightarrow$ soma e $M=1 \rightarrow$ subtração):

M	A	B	T_F	S	T_S	
0	0	0	0	0	0	Soma Completa ($M = 0$)
0	0	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	
0	0	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	0	
0	1	0	1	0	1	
0	1	1	0	0	1	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	Subtração Completa ($M = 1$)
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	
1	0	1	1	0	1	
1	1	0	0	1	0	
1	1	0	1	0	0	
1	1	1	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	

Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Somador/Subtrator Completo

- Simplificação:

S:

	\bar{B}		B	
	0	1	0	1
\bar{M}	1	0	1	0
M	1	0	1	0
	0	1	0	1
	\bar{T}_E		T_E	

Do diagrama, obtemos:

$$S = \bar{A}\bar{B}\bar{T}_E + \bar{A}BT_E + AB\bar{T}_E + \bar{A}B\bar{T}_E$$

Fatorando a expressão, temos:

$$S = \bar{A}(\bar{B}T_E + BT_E) + A(\bar{B}\bar{T}_E + B\bar{T}_E)$$

$$S = \bar{A}(B \oplus T_E) + A(B \odot T_E)$$

$$S = \bar{A}(B \oplus T_E) + A(\overline{B \oplus T_E})$$

$$\therefore S = A \oplus B \oplus T_E$$

Circuitos Combinacionais - 2ª parte

Somador/Subtrator Completo

- Simplificação:

Ts:

	\bar{B}	B	
	0	0	1
\bar{M}	0	1	1
M	0	0	1
	0	1	1
	\bar{T}_E	T_E	\bar{T}_E

Do diagrama, obtemos: $Ts = BT_E + \bar{M}AB + \bar{M}AT_E + M\bar{A}B + M\bar{A}T_E$

Fatorando a expressão, temos:

$$Ts = BT_E + B(\bar{M}A + M\bar{A}) + T_E(\bar{M}A + M\bar{A})$$

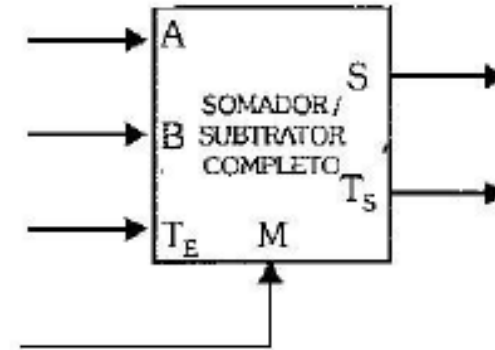
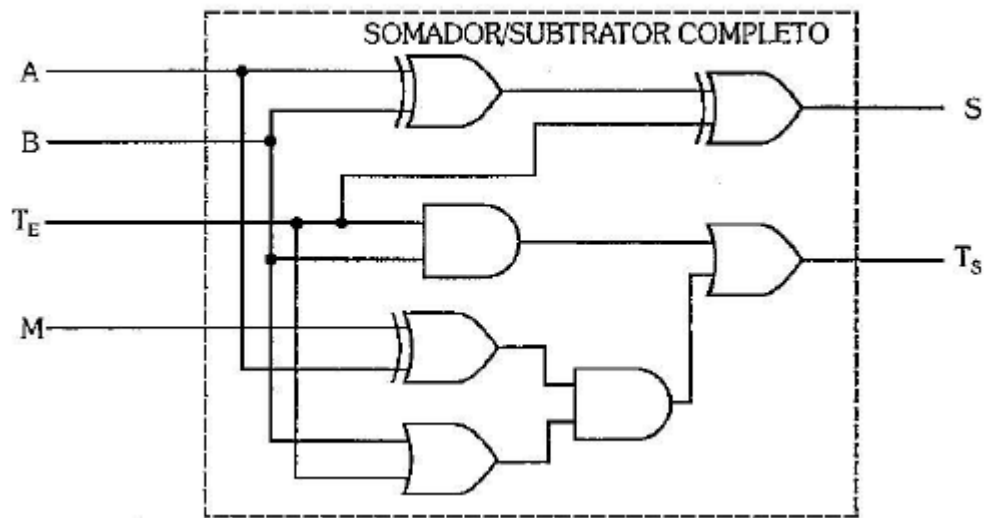
$$Ts = BT_E + B(M \oplus A) + T_E(M \oplus A)$$

$$Ts = BT_E + (M \oplus A)(B + T_E)$$

Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Somador/Subtrator Completo

- O circuito e sua representação em bloco:



Circuitos Combinacionais – 2ª parte

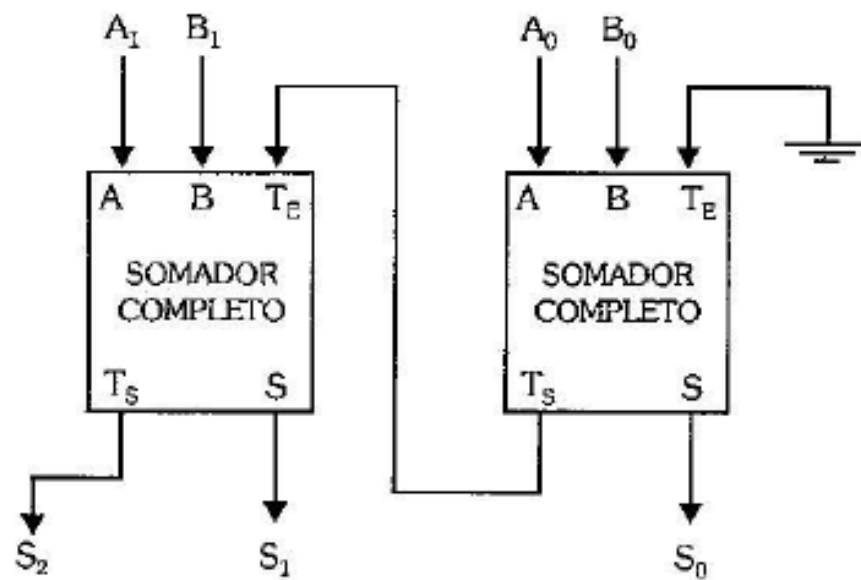
Exercícios

- Desenhe um sistema somador para 2 números de 2 bits apenas com blocos de Somadores Completos.

Circuitos Combinacionais - 2ª parte

Exercícios

- Desenhe um sistema somador para 2 números de 2 bits apenas com blocos de Somadores Completos.



Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Exercícios

- Desenvolva um circuito com uma entrada de controle M , para fornecer à saída o complemento de 1 de um número binário de 1 bit ($M = 0 \Rightarrow \text{Saída} = \text{número de entrada}$ e $M = 1 \Rightarrow \text{Saída} = \text{complemento de 1}$).

Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Exercícios

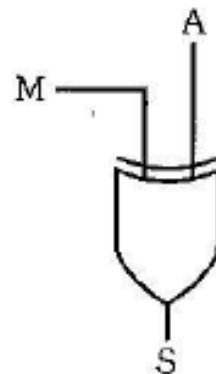
- Desenvolva um circuito com uma entrada de controle M, para fornecer à saída o complemento de 1 de um número binário de 1 bit ($M = 0 \Rightarrow \text{Saída} = \text{número de entrada}$ e $M = 1 \Rightarrow \text{Saída} = \text{complemento de 1}$).

M	A	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

} Saída = número de entrada

} Saída = complemento de 1

A partir da tabela, obtemos a expressão: $S = \overline{M}A + M\overline{A}$ ou $S = M \oplus A$, sendo o circuito derivado, visto na figura 5.60.



Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Exercícios

- Esquematize, em blocos, um sistema subtrator para 2 números com 2 bits.

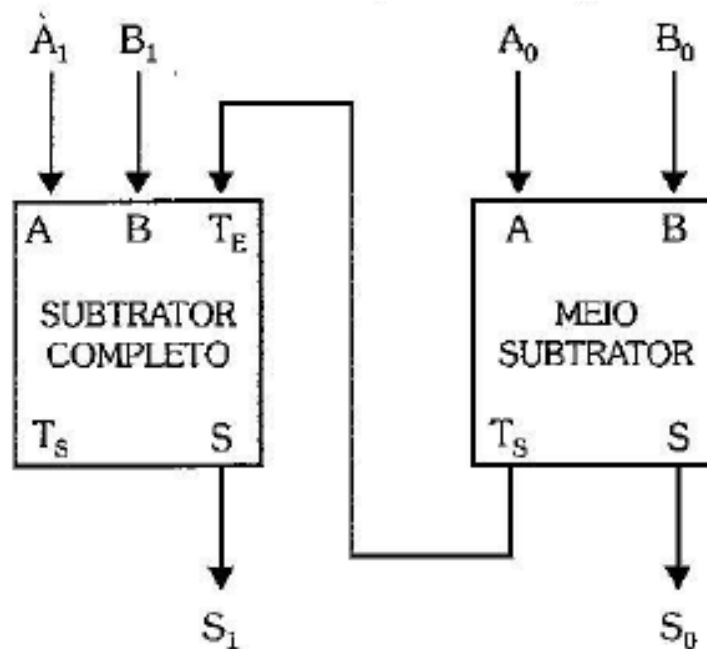
$$\begin{array}{r} A_1 \ A_0 \\ - \ B_1 \ B_0 \\ \hline S_1 \ S_0 \end{array}$$

Circuitos Combinacionais - 2ª parte

Exercícios

- Esquematize, em blocos, um sistema subtrator para 2 números com 2 bits.

$$\begin{array}{r} A_1 \ A_0 \\ - \ B_1 \ B_0 \\ \hline S_1 \ S_0 \end{array}$$



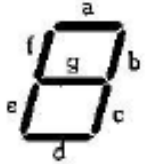
Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Quadro resumo (1)

				Códigos																		
Decimal	BCD 8421				Excesso 3				Gray				2 entre 5				Jonhson					
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
5	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
6	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
7	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0


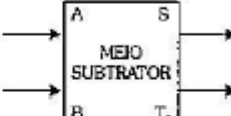


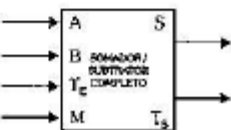
Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Quadro resumo (2)

Display de 7 segmentos		
	catodo comum	Cada segmento acende com 1 aplicado ao respectivo anodo.
	anodo comum	Cada segmento acende com 0 aplicado ao respectivo catodo.

Circuitos Combinacionais – 2ª parte

Quadro resumo (2)

Circuitos Aritméticos		
Meio Somador		$S = A \oplus B$ $T_s = AB$
Meio Subtrator		$S = A \oplus B$ $T_s = \overline{A}B$
Somador Completo		$S = A \oplus B \oplus T_E$ $T_s = AB + (A \oplus B) \cdot T_E$ $T_s = AB + AT_E + BT_E$
Subtrator Completo		$S = A \oplus B \oplus T_E$ $T_s = \overline{A}B + (A \oplus B) \cdot T_E$ $T_s = \overline{A}B + \overline{A}T_E + BT_E$
Somador/Subtrator Completo $M = 0 \rightarrow$ Somador $M = 1 \rightarrow$ Subtrator		$S = A \oplus B \oplus T_E$ $T_s = BT_E + (M \oplus A) \cdot (B + T_E)$