4) x e y são funções de uma terceira variável. Encontre $\dfrac{dx}{dt}$.

a) $2x + 3y = 8$ e $\dfrac{dy}{dt} = 2$

b) $xy = 20$, $\dfrac{dy}{dt} = 10$ e $x = 2$

c) $y\,(\text{tg}\, x + 1) = 4$, $\dfrac{dy}{dt} = -4$ e $x = \pi$

4) a) $2x + 3y = 8$ e $\dfrac{dy}{dt} = 2$

$$(2x + 3y = 8)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{dx}{dt} + 3 \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = -3}$$

b) $xy = 20$, $\frac{dy}{dt} = 10$ e $x = 2$

$(xy = 20)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow$

$xy = 20$ SUBST. $x = 2$:

$2 \cdot y = 20 \rightarrow y = 10$

$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-20}{10} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = -2}$

c) $y(tg\,x + 1) = 4$, $\dfrac{dy}{dt} = -4$ e $x = \pi$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(tg\,x+1)=4 \;,\; x=\pi: \\ y.(0+1)=4 \to y=4 \end{array}}$$

$$\left(\underbrace{y}\,\underbrace{(tg\,x+1)} = 4\right)' \iff$$

$$\iff \frac{dy}{dt}.(tg\,x+1) + y.(sec^2 x).\frac{dx}{dt} = 0 \iff$$

$$\iff (-4).(0+1) + 4.\,1.\,\frac{dx}{dt} = 0 \iff$$

$$\iff 4\,\frac{dx}{dt} = 4 \iff \boxed{\frac{dx}{dt} = 1}$$

5) Um balão esférico de raio r perde gás à taxa de v m^3 / min . A que taxa decresce o raio? Calcular essa taxa quando r = 5m, se v = 2.

$$\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3 \right) \Leftrightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = ? \quad r = 5m \quad \frac{dV}{dt} = v = 2m^3/min}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = 4\pi \cdot 25 \cdot \frac{dr}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{2}{100\pi} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{1}{50\pi}\ m/min}$$

EXERCÍCIOS

Seja $r(x) = ax+b$ uma reta tangente à uma curva e $t(x) = a'x+b'$ uma reta normal. A reta normal é uma reta perpendicular à reta tangente em um ponto. Assim, $a.a' = -1$.

Se $s(x) = ax+b$ e $m(x) = a'x+b'$, então as retas s e m são paralelas se $a=a'$.

1) Encontre a equação da reta tangente e da normal ao gráfico de cada uma das funções dadas abaixo no ponto indicado. A seguir, utilize o *software* Winplot para representação gráfica.

$a)\ f(x) = \dfrac{2}{x} + x$ no ponto (1,3)

$b)\ f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.

c) $f(x) = \sqrt{x} + 2$ no ponto de ordenada 4

a) $f(x) = \frac{2}{x} + x \quad (1, 3)$

$f'(x) = \frac{-2}{x^2} + 1 \rightarrow$ COEF. a

$a = \frac{-2}{1} + 1 = -1$

$(2x^{-1})' \Rightarrow -2 \cdot x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$

$\rightarrow$ RETA TANGENTE

$r: y = ax + b$

$y = -x + b$ SUBST. (1,3):

$3 = -1 + b \Rightarrow b = 4$

$\boxed{r: y = -x + 4}$

$\hookrightarrow$ EQ. RETA TANGENTE

RETA NORMAL

$t: y = a'x + b'$

$a \cdot a' = -1 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow (-1) \cdot a' = -1 \Leftrightarrow a' = 1$

SUBST. (1, 3) EM $y = 1 \cdot x + b'$:

$3 = 1 \cdot 1 + b' \rightarrow b' = 2$

$$\boxed{t: y = x + 2}$$

EQ. RETA NORMAL

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
Profª. Mylane dos Santos Barreto

EXERCÍCIOS

1) Encontre as derivadas primeira e segunda das funções:

a) $g(t) = t^3 - t^2 + t$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(t) = 4 \cos t^2$

1) a) $g(t) = t^3 - t^2 + t$

$g'(t) = 3t^2 - 2t + 1$

$g''(t) = 6t - 2$

EXERCÍCIOS

1) Encontre as derivadas primeira e segunda das funções:

a) $g(t) = t^3 - t^2 + t$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(t) = 4\cos t^2$

1) a) $g(t) = t^3 - t^2 + t$

$g'(t) = 3t^2 - 2t + 1$

$g''(t) = 6t - 2$

b) $f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{1/2}}$

EXERCÍCIOS

1) Encontre as derivadas primeira e segunda das funções:

a) $g(t) = t^3 - t^2 + t$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(t) = 4\cos t^2$

b) $$f''(x) = \frac{1.(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - x.\frac{1}{2}.2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{\left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - x^2.(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+1}$$

$$(x^2+1)^{3/2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{1} - x^2.\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}}{x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{(x^2+1)^{1/2}}}{x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(x^2+1)}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}}$$

EXERCÍCIOS

1) Encontre as derivadas primeira e segunda das funções:

a) $g(t) = t^3 - t^2 + t$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(t) = 4 \cos t^2$

c) $f(t) = 4 \cos t^2$

$f'(t) = 4 . (- \operatorname{sen} t^2) . 2t$

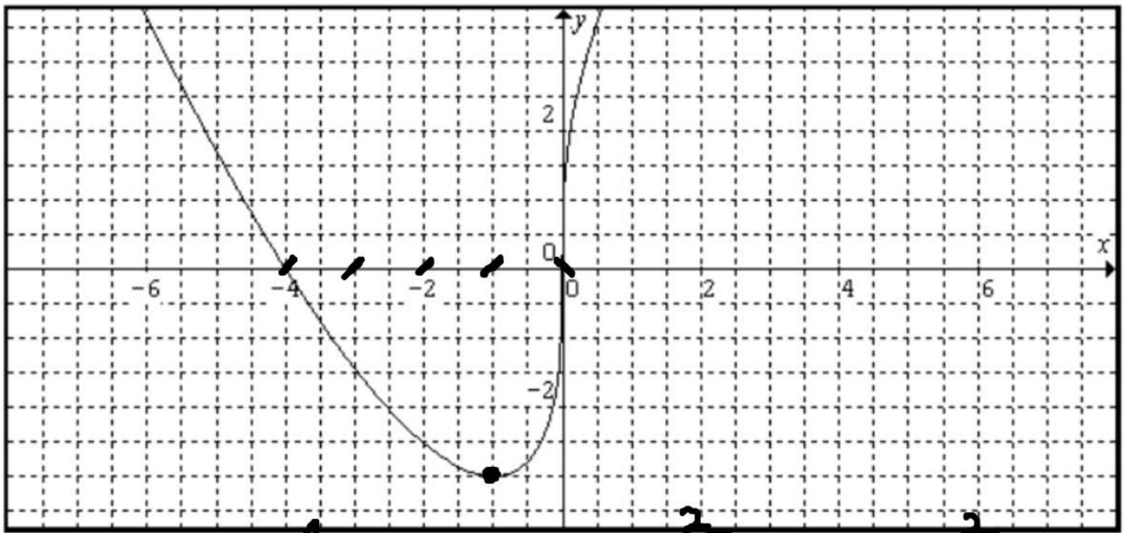
$f'(t) = -8t . \operatorname{sen} t^2$

$f''(t) = -8 . \operatorname{sen} t^2 + (-8t) . (\cos t^2) . 2t$

$f''(t) = -8 \operatorname{sen} t^2 - 16t^2 . \cos t^2$

EXEMPLO

1) Ache os números críticos da função f definida por $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$.



$$\frac{1}{x^{2/3}}$$

$$\frac{4}{3} - 1$$

$$\frac{1}{3} - 1$$

$$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x+1)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{4}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x+1) = 0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$f'(x) \nexists \quad x=0$$

EXEMPLO

1) Ache os extremos absolutos de f em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ se $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

2) Ache os extremos absolutos de f em [1,5] se $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

1) NÚM. CRÍTICOS:

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6} \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ -1 \end{cases}$$

x	-1	$\frac{1}{3}$	-2	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	2	$\frac{22}{27}$	-1	$\frac{7}{8}$
	V.M.		v.m.	

R: O PONTO MÁXIMO É $(-1, 2)$.
O PONTO MÍNIMO É $(-2, -1)$.

EXEMPLO

1) Ache os extremos absolutos de f em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ se $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

2) Ache os extremos absolutos de f em [1,5] se $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

2) $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{(x-2)}{1}^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}} = 0$ (f' NUNCA É ZERO)

$f'(x)$ NÃO EXISTE QUANDO $x = 2$.

x	2	1	5
$f(x)$	0	1	$\sqrt[3]{9}$
	V.m.		V.M

O PONTO MÁXIMO É $(5, \sqrt[3]{9})$.

O PONTO MÍNIMO É $(2,0)$.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
Profª. Mylane dos Santos Barreto

EXERCÍCIOS

1) Ache os números críticos da função dada.

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$

b) $g(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$

c) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$

d) $f(x) = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$

b) $g(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$

$$g'(x) = \frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} - \frac{12}{5}\cdot\frac{x^{-\frac{4}{5}}}{1} = \frac{6x^{\frac{1}{5}}}{5} - \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} =$$

$$= \frac{6x - 12}{5x^{\frac{4}{5}}}$$

$g'(x) = 0 \to 6x - 12 = 0 \to x = 2$

$g'(x)$ NÃO EXISTE QUANDO $x = 0$. $(5x^{\frac{4}{5}} = 0)$

OS NÚMEROS CRÍTICOS SÃO 2 E 0.

3) Uma fábrica pode vender x milhares de unidades mensais de um determinado artigo por $V = 10x - 2x^2$ reais. Sendo o custo de produção $C = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 10$. Determinar o número ótimo de artigos a vender para maximizar o lucro L = V – C.

$$L = V - C$$

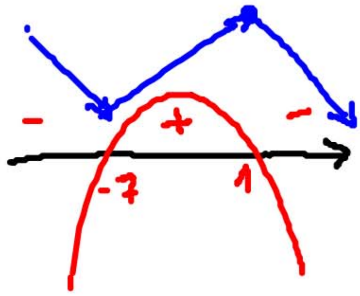
$$L = 10x - 2x^2 - \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 10\right)$$

$$L = -\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 7x - 10 \quad , x \geq 0$$

$$L' = -x^2 - 6x + 7$$

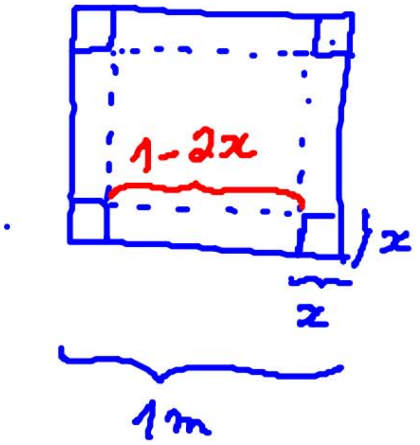
$$L' = 0 \iff -x^2 - 6x + 7 = 0$$

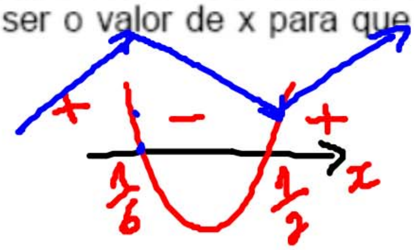
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.(-1).7}}{-2} = \frac{6 \pm 8}{-2} \begin{cases} \cancel{-7} \\ 1 \end{cases}$$



R: MIL ARTIGOS.

4) De uma folha de zinco quadrada de lado 1 metro, pretende-se confeccionar uma caixa prismática. Quatro quadrados de lado x serão jogados fora, dobrando-se em seguida as quatro abas e soldando os quatro cantos da caixa. Qual deve ser o valor de x para que a caixa tenha capacidade máxima.





$$V = A_b \cdot h$$

$$V = (1-2x)^2 \cdot x$$

$$V = (1-4x+4x^2)x$$

$$V = x - 4x^2 + 4x^3, \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$V' = 1 - 8x + 12x^2$$

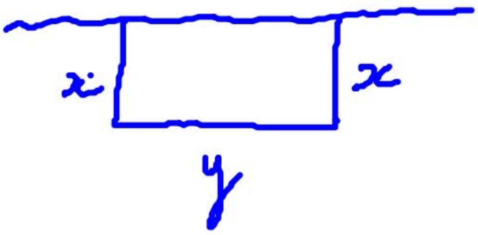
$$V' = 0 \iff 1 - 8x + 12x^2 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4.12.1}}{24} = \frac{8 \pm 4}{24} \begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{6} \end{cases}$$

R: $\boxed{x = \frac{1}{6} m}$

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
Profª. Mylane dos Santos Barreto

5) Um fazendeiro planeja cercar um pasto retangular adjacente a um rio. Para proporcionar pastagem suficiente para o gado, o pasto deve ter 180.000 metros quadrados. Não haverá cerca margeando o rio. Que dimensões devem ser usadas para minimizar a quantidade de cerca?



$A = 180000\ m^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy = 180\,000 \Leftrightarrow$

$\boxed{\Leftrightarrow y = \dfrac{180\,000}{x}}$

$0 < x < 300\sqrt{2}$

$f(x) = x + x + y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = 2x + y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2x}{1} + \dfrac{180\,000}{x}$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2x^2 + 180\,000}{x}$

$f'(x) = 2 - 180000 \cdot x^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{1} - \dfrac{180000}{x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2x^2 - 180000}{x^2} \Leftrightarrow$

5) Um fazendeiro planeja cercar um pasto retangular adjacente a um rio. Para proporcionar pastagem suficiente para o gado, o pasto deve ter 180.000 metros quadrados. Não haverá cerca margeando o rio. Que dimensões devem ser usadas para minimizar a quantidade de cerca?

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 180\,000}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 180000 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 90000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 300 \text{ ou } \cancel{x = -300}$$

$$f'(x) \text{ NÃO EXISTE } \Leftrightarrow x^2 = 0 \rightarrow \cancel{x = 0}$$

R: AS DIMENSÕES QUE MINIMIZAM A QUANTIDADE DE CERCA SÃO 300m E 600m.

6) Uma empresa apurou que a sua receita total (em reais) com a venda de um produto admite como modelo R = $-x^3 + 450x^2 + 52.500x$, onde x é o número de unidades produzidas (e vendidas). Qual o nível de produção que gera receita máxima?

$$R = -x^3 + 450x^2 + 52500x$$

$$R' = -3x^2 + 900x + 52500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R' = 0 \Leftrightarrow (-3x^2 + 900x + 52500 = 0) \div 3 \Leftrightarrow$$

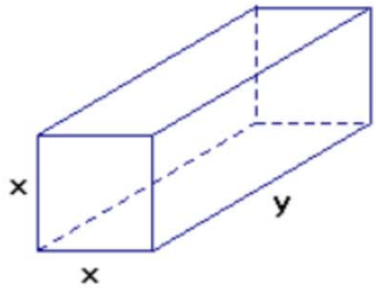
$$\Leftrightarrow -x^2 + 300x + 17500 = 0$$

$$x = \frac{-300 \pm \sqrt{90000 - 4.(-1).17500}}{-2}$$

$$\boxed{R: 350 \text{ UNIDADES}}$$

$$x = \frac{-300 \pm 400}{-2} \begin{cases} \cancel{-50} \\ 350 \end{cases}$$

7) Um pacote retangular, a ser enviado via postal, pode apresentar um total máximo combinado de 108 polegadas para o comprimento e o perímetro transverso. Ache as dimensões do pacote de volume máximo. Conforme mostrado na figura a seguir, admita que as dimensões do pacote sejam *x* por *x* por *y*.



$$4x + y = 108 \rightarrow y = 108 - 4x = 36$$

$$V = x \cdot y \cdot x, \; x > 0 \text{ e } y > 0$$

$$\Leftrightarrow V = x^2 \cdot (108 - 4x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 108x^2 - 4x^3$$

$$V' = 216x - 12x^2$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow \underbrace{216}_{12.18}x - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x(18 - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x = 0 \text{ ou } 18 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x = 0} \qquad \Leftrightarrow x = 18$$

R: 18 in., 18 in., 36 in.

EXERCÍCIOS

1) Ache os extremos relativos de f pelo teste da derivada primeira e determine os intervalos nos quais f é crescente e decrescente.

a) $f(x) = x^2 - 4x - 1$

~~b)~~ $f(x) = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

c) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

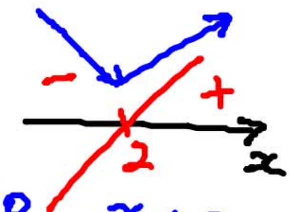
~~d)~~ $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

~~e)~~ $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{se } x < 3 \\ 3x - 10 & \text{se } 3 \le x \end{cases}$

a) $f(x) = x^2 - 4x - 1$

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0 \iff 2x - 4 = 0 \iff x = 2$



f É DECRESCENTE QUANDO $x < 2$.

f É CRESCENTE SE $x > 2$.

O PONTO MÍNIMO DE f OCORRE EM $(2, -5)$.

EXERCÍCIOS

1) Ache os extremos relativos de f pelo teste da derivada primeira e determine os intervalos nos quais f é crescente e decrescente.

a) $f(x) = x^2 - 4x - 1$

b) $f(x) = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$

c) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

d) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{se } x < 3 \\ 3x - 10 & \text{se } 3 \leq x \end{cases}$

c) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

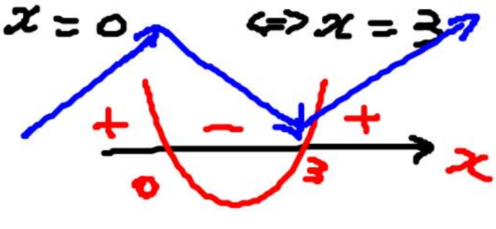
$f'(x) = 6x^2 - 18x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x = 0$ ou $x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \Leftrightarrow x = 3$



f É CRESCENTE SE $x < 0$ e SE $x > 3$

f É DECRESCENTE SE $0 < x < 3$

f TEM UM PONTO MÁXIMO RELATIVO $(0, 2)$

f TEM UM PONTO MÍNIMO RELATIVO $(3, -25)$

EXERCÍCIOS

1) Encontre os pontos de inflexão do gráfico da função dada, se existirem. Determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo.

a) $f(x) = x^3 + 9x$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

c) $f(x) = (x-1)^3$

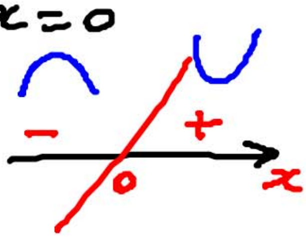
~~d)~~ $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$

a) $f(x) = x^3 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 + 9$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$



O GRÁFICO DE f TEM UM PONTO DE INFLEXÃO EM (0, 0).
O GRÁFICO DE f TEM C.V.B. SE $x<0$.
O GRÁFICO DE f TEM C.V.C. SE $x>0$.