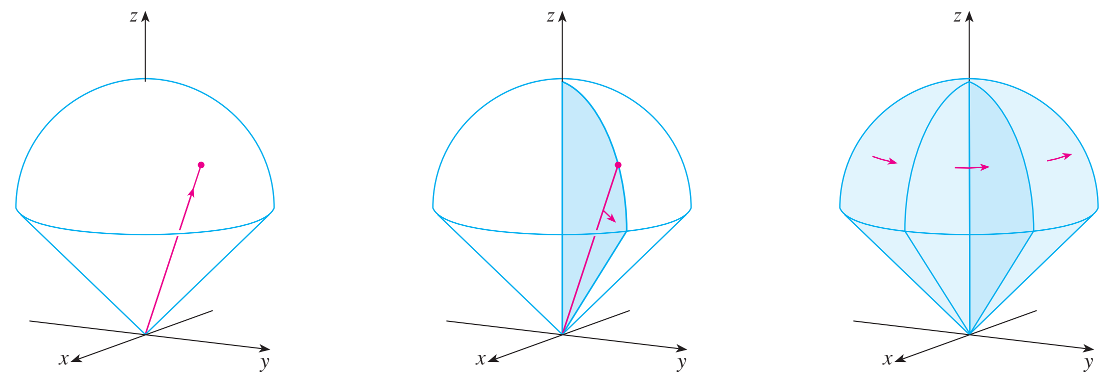


FIGURA 11

ρ varia de 0 a $\cos\phi$, enquanto ϕ e θ são constantes.

ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto θ é constante.

θ varia de 0 a 2π.

15.9 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(3, \pi/2, 3\pi/4)$

2. (a) $(2, \pi/2, \pi/2)$ (b) $(4, -\pi/4, \pi/3)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para esféricas.

3. (a) $(0, -2, 0)$ (b) $(-1, 1, -\sqrt{2})$

4. (a) $(1, 0, \sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\phi = \pi/3$ **6.** $\rho = 3$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

8. $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

9–10 Escreva a equação em coordenadas esféricas.

9. (a) $z^2 = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + z^2 = 9$

10. (a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ (b) $x + 2y + 3z = 1$

11–14 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $2 \leqslant \rho \leqslant 4$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/3$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $1 \leqslant \rho \leqslant 2$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$, $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$

13. $\rho \leqslant 1$, $3\pi/4 \leqslant \phi \leqslant \pi$

14. $\rho \leqslant 2$, $\rho \leqslant \operatorname{cossec}\phi$

15. Um sólido está cima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escreva uma descrição do sólido em termos de desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.

16. (a) Determine desigualdades que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas.
(b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva desigualdades que descrevam uma das metades.

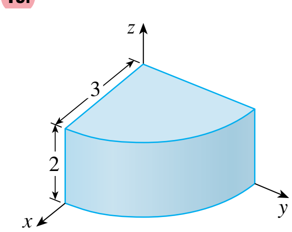
17–18 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi$

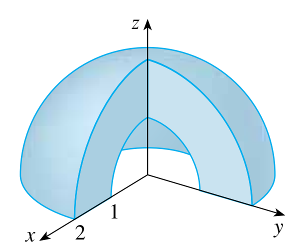
18. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta$

19–20 Escreva a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

19.



20.



21–34 Utilize coordenadas esféricas.

21. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5.

22. Calcule $\iiint_H (9 - x^2 - y^2)\, dV$, onde H é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

23. Calcule $\iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

24. Calcule $\iiint_E y^2 \, dV$, onde E é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

25. Calcule $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2}\, dV$, onde E é a porção da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ que fica no primeiro octante.

26. Calcule $\iiint_E xyz \, dV$, onde E fica entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

27. Encontre o volume da parte da bola $\rho \leqslant a$ a que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

28. Encontre a distância média de um ponto em uma bola de raio a a seu centro.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

29. (a) Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4\cos\phi$.
(b) Encontre o centroide do sólido na parte (a).

30. Determine o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

31. (a) Encontre o centroide do sólido no Exemplo 4.
(b) Encontre o momento de inércia em torno do eixo z para este sólido.

32. Seja H um hemisfério sólido de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.
(a) Determine a massa de H.
(b) Determine o centro de massa de H.
(c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu eixo.

33. (a) Determine o centroide do hemisfério sólido homogêneo de raio a.
(b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação a um diâmetro de sua base.

34. Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância da base.

35–38 Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada.

35. Determine o volume e o centroide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

36. Determine o volume da menor cunha esférica cortada de uma esfera de raio a por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.

SCA **37.** Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E está acima do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 2y$. Utilize a Tabela de Integrais (veja as Páginas de Referência 6–11) ou um sistema de computação algébrica para calcular a integral.

SCA **38.** (a) Determine o volume limitado pelo toro $\rho = \operatorname{sen}\phi$.
(b) Utilize um computador para desenhar o toro.

39–41 Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

39. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3)\,dz\,dx\,dy$

41. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4^2-x^2}}^{\sqrt{4^2-x^2}} \int_{-\sqrt{4^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{4^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\,dz\,dx\,dy$

---

42. Um modelo para a densidade δ da atmosfera terrestre próxima à superfície é

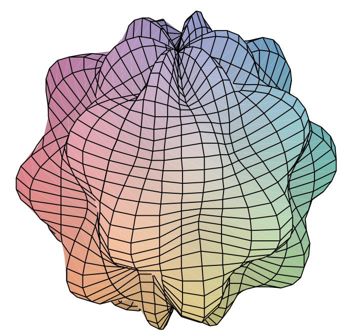
$$\delta = 619{,}09 - 0{,}000097\rho$$

onde ρ (a distância do centro da Terra) é medido em metros e δ é medido em quilogramas por metro cúbico. Se tomarmos a superfície da Terra como uma esfera com raio de 6 370 km, então, este modelo é razoável para $6\,370 \times 10^6 \leqslant \rho \leqslant 6\,375 \times 10^6$. Use este modelo para estimar a massa da atmosfera entre o solo e uma altitude de 5 km.

43. Use uma ferramenta gráfica para desenhar um silo que consista em um cilindro de raio 3 e altura 10 com um hemisfério no topo.

44. A latitude e a longitude de um ponto P no hemisfério norte estão relacionadas com as coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como a seguir. Tomamos a origem como o centro da Terra e o eixo z passando pelo polo norte. O eixo x positivo passa pelo ponto onde o meridiano principal (o meridiano por Greenwich, na Inglaterra) intercepta o equador. Então a latitude de P é $\alpha = 90° - \phi°$ e a longitude é $\beta = 360° - \theta°$. Encontre a distância sobre um círculo máximo de Los Angeles (lat. 34,06º N, long. 118,25º W) a Montreal (lat. 45,50º N, long. 73,60º W). Tome o raio da Terra como 6 370 km. (Um *círculo máximo* é o círculo de intersecção de uma esfera com um plano que passe pelo centro da esfera.)

SCA **45.** As superfícies $\rho = 1 + \frac{1}{5}\operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} n\phi$ têm sido usadas para modelar tumores. A "esfera rugosa" com $m = 6$ e $n = 5$ está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



46. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio da esfera aumenta indefinidamente.)

47. (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = r\cot\phi_0$ (ou $\phi = \phi_0$), onde $0 < \phi_0 < \pi/2$, é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$$

(b) Deduza que o volume da cunha esférica dada por $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

onde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2, $\tilde{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

33. $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\int_0^{1-y} f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_0^1\int_0^{y^2}\int_0^{1-y} f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$
$= \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{y^2} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$
$= \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{y^2} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$
$= \int_0^1\int_0^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx$
$= \int_0^1\int_0^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$

35. $\int_0^1\int_y^1\int_0^y f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_0^1\int_z^1\int_y^1 f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^y\int_y^1 f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy$
$= \int_0^1\int_0^x\int_z^x f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx = \int_0^1\int_z^1\int_z^x f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$

37. 64π **39.** $\frac{79}{30}, \left(\frac{358}{553}, \frac{33}{79}, \frac{571}{553}\right)$

41. a^5, $(7a/12, 7a/12, 7a/12)$

43. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}kL^5$ **45.** $\frac{1}{2}\pi kha^4$

47. (a) $m = \int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$
(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde
$\bar{x} = (1/m)\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} x\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$
$\bar{y} = (1/m)\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} y\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$
$\bar{z} = (1/m)\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$
(c) $\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y}(x^2+y^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$

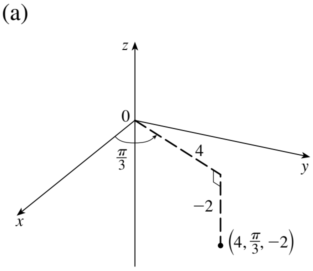
49. (a) $\frac{3}{32}\pi + \frac{11}{24}$
(b) $\left(\frac{28}{9\pi+44}, \frac{30\pi+128}{45\pi+220}, \frac{45\pi+208}{135\pi+660}\right)$
(c) $\frac{1}{240}(68 + 15\pi)$

51. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{5760}$ **53.** $L^3/8$

55. (a) A região ligada pelo elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$
(b) $4\sqrt{6}\pi/45$

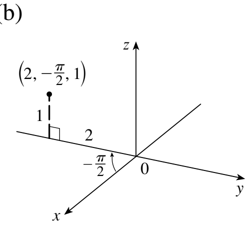
EXERCÍCIOS 15.8

1. (a)



$(2, 2\sqrt{3}, -2)$

(b)



$(0, -2, 1)$

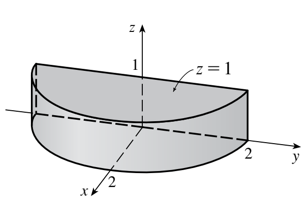
3. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 1)$ (b) $(4, 2\pi/3, 3)$

5. Meio-plano vertical pelo eixo z

7. Paraboloide circular

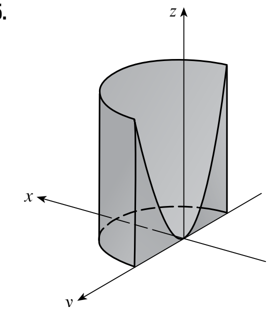
9. (a) $z^2 = 1 + r\cos\theta - r^2$ (b) $z = r^2\cos 2\theta$

11.



13. Coordenadas cilíndricas: $6 \leqslant r \leqslant 7$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 20$

15. 4π



17 384π **19.** $\frac{8}{3}\pi + \frac{128}{15}$ **21.** $2\pi/5$ **23.** $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2} - 1)$

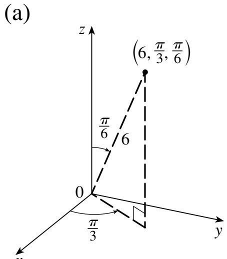
25. (a) 162π (b) $(0, 0, 15)$

27. $\pi Ka^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$ **29.** 0

31. (a) $\iiint_C h(P)g(P)\,dV$, onde C é o cone
(b) $\approx 4{,}4 \times 10^{18}$ **J**

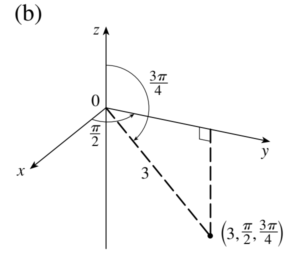
EXERCÍCIOS 15.9

1. (a)



$\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3}\right)$

(b)



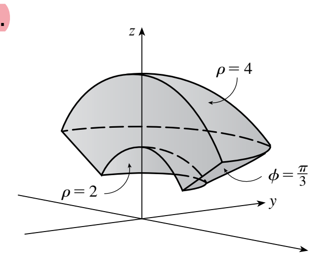
$\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

3. (a) $(2, 3\pi/2, \pi/2)$ (b) $(2, 3\pi/4, 3\pi/4)$

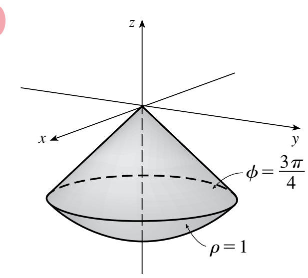
5. Meio-cone **7.** Esfera, raio $\frac{1}{2}$, centro $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

9. (a) $\cos^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi$ (b) $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

11.

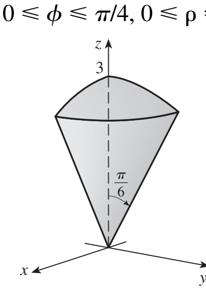


13.



15. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \rho \leqslant \cos\phi$

17. $(9\pi/4)(2 - \sqrt{3})$



19. $\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$

21. $312.500\pi/7$ **23.** $1.688\pi/15$ **25.** $\pi/8$

27. $(\sqrt{3} - 1)\pi a^3/3$ **29.** (a) 10π (b) $(0, 0, 2{,}1)$

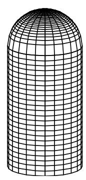
31. (a) $(0, 0, \frac{7}{12})$ (b) $11K\pi/960$

33. (a) $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$ (b) $4K\pi a^5/15$

35. $\frac{1}{3}\pi(2 - \sqrt{2}),\ (0, 0, 3/[8(2 - \sqrt{2})])$

37. $5\pi/6$ **39.** $(4\sqrt{2} - 5)/15$ **41.** $4096\pi/21$

43.



45. $136\pi/99$

EXERCÍCIOS 15.10

1. 16 **3.** $\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta$ **5.** 0

7. O paralelogramo com vértices $(0, 0)$, $(6, 3)$, $(12, 1)$, $(6, -2)$

9. A região ligada pela reta $y = 1$, o eixo y e por $y = \sqrt{x}$

11. $x = \frac{1}{3}(v - u)$, $y = \frac{1}{3}(u + 2v)$ é uma transformação possível, onde $S = \{(u, v) \mid -1 \leqslant u \leqslant 1, 1 \leqslant v \leqslant 3\}$

13. $x = u \cos v$, $y = u \,\text{sen}\, v$ é uma transformação possível, onde $S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant u \leqslant \sqrt{2}, 0 \leqslant v \leqslant \pi/2\}$

15. -3 **17.** 6π **19.** $2 \ln 3$

21. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$ (b) $1\,083 \times 10^{12}$ km³ (c) $\frac{4}{15}\pi(a^2 + b^2)abck$

23. $\frac{8}{5}\ln 8$ **25.** $\frac{3}{2}\,\text{sen}\,1$ **27.** $e - e^{-1}$

CAPÍTULO 15 REVISÃO

Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Verdadeiro **7.** Verdadeiro **9.** Falso

Exercícios

1. $\approx 64{,}0$ **3.** $4e^2 - 4e + 3$ **5.** $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,1$ **7.** $\frac{2}{3}$

9. $\int_0^{\pi}\int_2^4 f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

11. A região dentro do circuito da rosa de quatro folhas $r = \text{sen}\,2\theta$ no primeiro quadrante

13. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,1$ **15.** $\frac{1}{2}e^6 - \frac{7}{2}$ **17.** $\frac{1}{4}\ln 2$ **19.** 8

21. $81\pi/5$ **23.** $\frac{81}{2}$ **25.** $\pi/96$ **27.** $\frac{64}{15}$

29. 176 **31.** $\frac{2}{3}$ **33.** $2ma^3/9$

35. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{15}\right)$

(c) $I_x = \frac{1}{12}$, $I_y = \frac{1}{24}$; $\bar{\bar{y}} = 1/\sqrt{3}$, $\bar{\bar{x}} = 1/\sqrt{6}$

37. (a) $(0, 0, h/4)$ (b) $\pi a^4 h/10$

39. $\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}/3$ **41.** $\frac{486}{5}$ **43.** $0{,}0512$

45. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{45}$

47. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ **49.** $-\ln 2$ **51.** 0

PROBLEMAS QUENTES

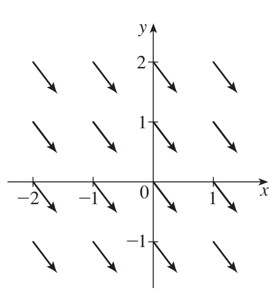
1. 30 **3.** $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,1$ **7.** (b) $0{,}90$

13. $abc\pi\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{9\sqrt{3}}\right)$

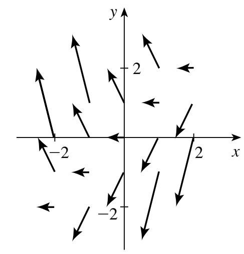
CAPÍTULO 16

EXERCÍCIOS 16.1

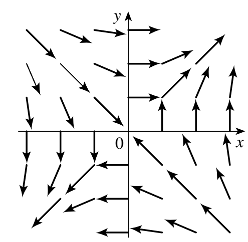
1.



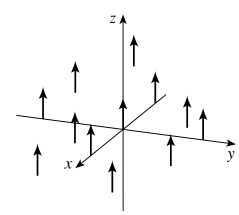
3.



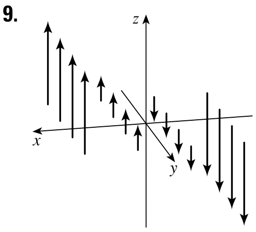
5.



7.

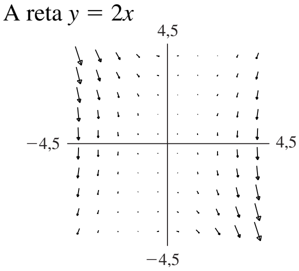


9.



11. IV **13.** I **15.** IV **17.** III

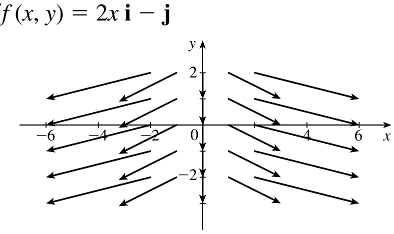
19. A reta $y = 2x$



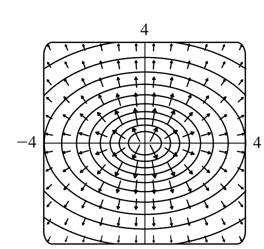
21. $\nabla f(x, y) = (xy + 1)\, e^{xy}\, \mathbf{i} + x^2 e^{xy}\, \mathbf{j}$

23. $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$



27.



29. III **31.** II **33.** $(2{,}04,\ 1{,}03)$