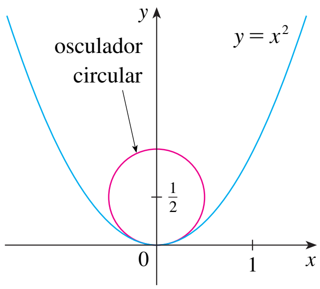


FIGURA 9

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

Para o gráfico da Figura 9 usamos as equações paramétricas do círculo:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, t$$

TEC *Visual 13.3C* mostra como o círculo osculador muda conforme um ponto se move ao longo de uma curva.

Resumimos aqui as fórmulas para os vetores tangente unitário, normal unitário e binormal e para a curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

13.3 Exercícios

1–6 Determine o comprimento da curva dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \cancel{\langle t, \cos t, 3\,\text{sen}\, t\rangle}, \quad -5 \leqslant t \leqslant 5$ <t, 3cos t, 3sen t>

2. $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, t^2, \tfrac{1}{3}t^3\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} + \ln \cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

6. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

7–9 Encontre o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. (Use sua calculadora para aproximar a integral.)

7. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{t}, t, t^2 \right\rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^{-t}, te^{-t}\rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 3$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, t, \cos t, \text{tg}\, t\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

10. Trace a curva com equações paramétricas $x = \text{sen}\, t$, $y = \text{sen}\, 2t$, $z = \text{sen}\, 3t$. Encontre o comprimento total desta curva com precisão de quatro casas decimais.

11. Seja C a curva de intersecção do cilindro parabólico $x^2 = 2y$ e da superfície $3z = xy$. Encontre o comprimento exato de C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$.

12. Encontre, com precisão de quatro casas decimais, o comprimento da curva de intersecção do cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ com o plano $x + y + z = 2$.

13–14 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t.

13. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 - 3t)\,\mathbf{j} + (5 + 4t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + e^{2t}\,\text{sen}\, 2t\,\mathbf{k}$

15. Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3\,\text{sen}\, t$, $y = 4t$, $z = 3\cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?

16. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\,\mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido a partir do ponto $(1, 0)$ na direção crescente de t. Expresse a reparametrização em sua forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

17–20

(a) Determine os vetores tangente e normal unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

(b) Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3\cos t, 3\,\text{sen}\, t\rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \text{sen}\, t - t\cos t, \cos t + t\,\text{sen}\, t\rangle, \quad t > 0$

19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{2}\,t, e^t, e^{-t}\right\rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \tfrac{1}{2}t^2, t^2\rangle$

21–23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} + 4\cos t\,\mathbf{k}$

24. Encontre a curvatura da curva $\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos t, e^t\,\text{sen}\, t, t\rangle$ no ponto $(1, 0, 0)$.

25. Encontre a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ no ponto $(1, 1, 1)$.

26. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $z = \text{sen}\, 5t$ e calcule a curvatura no ponto $(1, 0, 0)$.

27–29 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

27. $y = x^4$ **28.** $y = \text{tg}\, x$ **29.** $y = xe^x$

30–31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \to \infty$?

30. $y = \ln x$ **31.** $y = e^x$

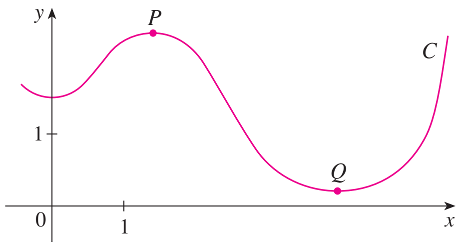
32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

33. (a) A curvatura da curva C mostrada na figura é maior em P ou em Q? Explique.
(b) Estime a curvatura em P e Q desenhando o círculo osculador nesses pontos.



34–35 Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar na mesma tela a curva e sua função curvatura $\kappa(x)$. Esse é o gráfico que você esperava?

34. $y = x^4 - 2x^2$ **35.** $y = x^{-2}$

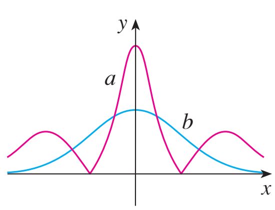
SCA **36–37** Trace a curva espacial e sua função curvatura $\kappa(t)$. Comente como a curvatura reflete a forma da curva.

36. $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, 4\cos(t/2)\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 8\pi$

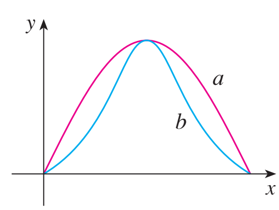
37. $\mathbf{r}(t) = \langle te^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t\rangle, \quad -5 \leqslant t \leqslant 5$

38–39 Dois gráficos, a e b, são mostrados. Um é a curva $y = f(x)$ e o outro é o gráfico da sua função curvatura $y = \kappa(x)$. Identifique cada uma e justifique suas escolhas.

38.



39.



SCA **40.** (a) Desenhe a curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} 3t, \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} 3t\rangle$. Em quantos pontos da curva tem-se a impressão de que a curvatura possui um máximo local ou absoluto?
(b) Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Esse gráfico confirma sua conclusão na parte (a)?

SCA **41.** O gráfico de $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{3}{2}\operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t\right\rangle$ é mostrado na Figura 12(b) da Seção 13.1. Onde você acha que a curvatura é maior? Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Para quais valores de t a curvatura é maior?

42. Use o Teorema 10 para mostrar que a curvatura da curva plana parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$ é

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t.

43–45 Use a fórmula do Exercício 42 para calcular a curvatura.

43. $x = t^2, \quad y = t^3$

44. $x = a\cos \omega t, \quad y = b \operatorname{sen} \omega t$

45. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t$

46. Considere a curvatura em $x = 0$ para cada membro da família de funções $f(x) = e^{cx}$. Para quais membros $\kappa(0)$ é maior?

47–48 Encontre os vetores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ no ponto indicado.

47. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t\right\rangle, \quad \left(1, \frac{2}{3}, 1\right)$

48. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, \ln \cos t\rangle, \quad (1, 0, 0)$

49–50 Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

49. $x = 2\operatorname{sen} 3t, \quad y = t, \quad z = 2\cos 3t; \quad (0, \pi, -2)$

50. $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

51. Encontre as equações para o círculo osculador da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ nos pontos $(2, 0)$ e $(0, 3)$. Utilize uma calculadora gráfica ou computador para traçar a elipse e ambos os círculos osculadores na mesma tela.

52. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ nos pontos $(0, 0)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Trace os dois círculos osculadores e a parábola na mesma tela.

53. Em qual ponto da curva $x = t^3$, $y = 3t$, $z = t^4$ o plano normal é paralelo ao plano $6x + 6y - 8z = 1$?

SCA **54.** Existe um ponto da curva do Exercício 53 onde o plano osculador é paralelo ao plano $x + y + z = 1$?
[*Observação:* Você precisará de um SCA para derivar, simplificar e calcular um produto vetorial.]

55. Determine as equações dos planos normais e osculador da curva de interseção dos cilindros parabólicos $x = y^2$ e $z = x^2$ no ponto $(1, 1, 1)$.

56. Mostre que o plano osculador em cada ponto da curva $\mathbf{r}(t) = \langle t + 2, 1 - t, \frac{1}{2}t^2\rangle$ é o mesmo plano. O que você pode concluir sobre a curva?

57. Mostre que a curvatura κ está relacionada com os vetores tangente e normal pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$$

58. Mostre que a curvatura de uma curva plana é $\kappa = |d\phi/ds|$, onde ϕ é o ângulo entre $\mathbf{T}$ e $\mathbf{i}$, isto é, ϕ é o ângulo de inclinação da reta tangente. (Isso mostra que a definição de curvatura é consistente com a definição dada para curvas planas no Exercício 69 da Seção 10.2.)

59. (a) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{B}$.
(b) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a $\mathbf{T}$.
(c) Deduza das partes (a) e (b) que $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$ para algum número $\tau(s)$ chamado **torção** da curva. (A torção mede quanto a curva é retorcida.)
(d) Mostre que para uma curva plana a torção é $\tau(s) = 0$.

60. As fórmulas seguintes, chamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, são de fundamental importância em geometria diferencial:

1. $d\mathbf{T}/ds = \kappa \mathbf{N}$

2. $d\mathbf{N}/ds = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$

3. $d\mathbf{B}/ds = -\tau \mathbf{N}$

(A Fórmula 1 é fornecida a partir do Exercício 57 e da Fórmula 3 vem de Exercício 59.) Use o fato de que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ para deduzir Fórmula 2 a partir das Fórmulas 1 e 3.

61. Utilize as fórmulas de Frenet-Serret para demonstrar cada um dos seguintes itens. (Apóstrofo denota derivadas com relação a t. Comece como na demonstração do Teorema 10.)

(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$

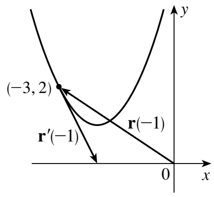
(b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$

(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$

(d) $\tau = \dfrac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

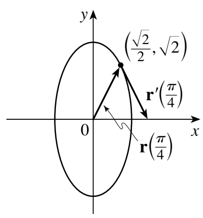
(c) $\mathbf{r}'(4) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\mathbf{r}(4+h) - \mathbf{r}(4)}{h}$; $\mathbf{T}(4) = \dfrac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$

3. (a), (c)



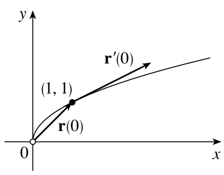
(b) $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t \rangle$

5. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \cos t\, \mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$

7. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = 2e^{2t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{r}'(t) = \langle t\cos t + \operatorname{sen} t, 2t, \cos 2t - 2t \operatorname{sen} 2t\rangle$

11. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{4t}\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}'(t) = 2te^{t^2}\,\mathbf{i} + [3/(1+3t)]\,\mathbf{k}$ **15.** $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$

17. $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\rangle$ **19.** $\frac{3}{5}\,\mathbf{j} + \frac{4}{5}\,\mathbf{k}$

21. $\langle 1, 2t, 3t^2\rangle$, $\langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}\rangle$, $\langle 0, 2, 6t\rangle$, $\langle 6t^2, -6t, 2\rangle$

23. $x = 3 + t,\ y = 2t,\ z = 2 + 4t$

25. $x = 1 - t,\ y = t,\ z = 1 - t$

27. $\mathbf{r}(t) = (3 - 4t)\,\mathbf{i} + (4 + 3t)\,\mathbf{j} + (2 - 6t)\,\mathbf{k}$

29. $x = t,\ y = 1 - t,\ z = 2t$

31. $x = -\pi - t,\ y = \pi + t,\ z = -\pi t$

33. 66° **35.** $2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 32\,\mathbf{k}$ **37.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

39. $e^t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + (t \ln t - t)\mathbf{k} + \mathbf{C}$

41. $t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + \left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3}\right)\mathbf{k}$

47. $2t\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2\cos t \operatorname{sen} t$ **49.** 35

EXERCÍCIOS 13.3

1. $10\sqrt{10}$ **3.** $e - e^{-1}$ **5.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$ **7.** 15,3841

9. 1,2780 **11.** 42

13. $\mathbf{r}(t(s)) = \dfrac{2}{\sqrt{29}}s\,\mathbf{i} + \left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \dfrac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

15. $(3 \operatorname{sen} 1, 4, 3\cos 1)$

17. (a) $\langle 1/\sqrt{10}, (-3/\sqrt{10})\operatorname{sen} t, (3/\sqrt{10})\cos t\rangle$, $\langle 0, -\cos t, -\operatorname{sen} t\rangle$ (b) $\frac{3}{10}$

19. (a) $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle \sqrt{2}e^t, e^{2t}, -1\rangle$, $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle 1 - e^{2t}, \sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^t\rangle$

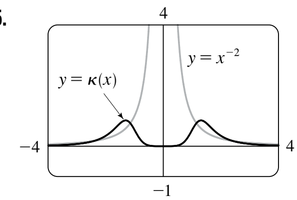
(b) $\sqrt{2}e^{2t}/(e^{2t}+1)^2$

21. $6t^2/(9t^4 + 4t^2)^{3/2}$ **23.** $\frac{4}{25}$ **25.** $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

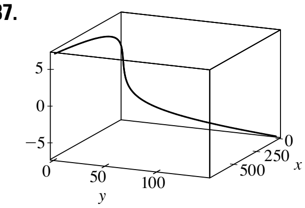
27. $12x^2/(1 + 16x^6)^{3/2}$ **29.** $e^x\,|x+2|/[1 + (xe^x + e^x)^2]^{3/2}$

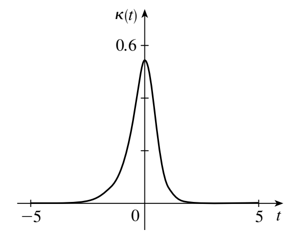
31. $(-\frac{1}{2}\ln 2, 1/\sqrt{2})$; tende a 0 **33.** (a) P (b) 1,3, 0,7

35.



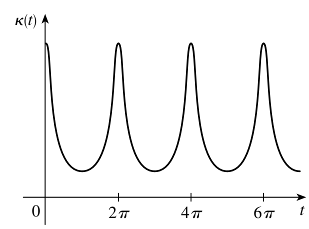
37.





39. a é $y = f(x)$, b é $y = \kappa(x)$

41. $\kappa(t) = \dfrac{6\sqrt{4\cos^2 t - 12\cos t + 13}}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$



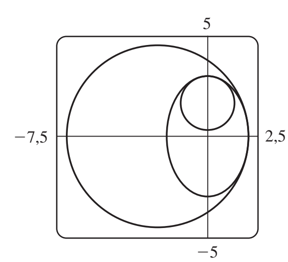
inteiros múltiplos de 2π

43. $6t^2/(4t^2 + 9t^4)^{3/2}$

45. $1/(\sqrt{2}e^t)$ **47.** $\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\rangle$, $\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$, $\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$

49. $y = 6x + \pi,\ x + 6y = 6\pi$

51. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{81}{4}$, $x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



53. $(-1, -3, 1)$

55. $2x + y + 4z = 7$, $6x - 8y - z = -3$

63. $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$ **65.** $2{,}07 \times 10^{10}$ Å $\approx$ 2 m

EXERCÍCIOS 13.4

1. (a) $1{,}8\mathbf{i} - 3{,}8\,\mathbf{j} - 0{,}7\mathbf{k}$, $2{,}0\mathbf{i} - 2{,}4\,\mathbf{j} - 0{,}6\mathbf{k}$, $2{,}8\mathbf{i} + 1{,}8\mathbf{j} - 0{,}3\mathbf{k}$, $2{,}8\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}4\mathbf{k}$

(b) $2{,}4\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}5\mathbf{k}$, 2,58

3. $\mathbf{v}(t) = \langle -t, 1\rangle$
$\mathbf{a}(t) = \langle -1, 0\rangle$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{t^2 + 1}$