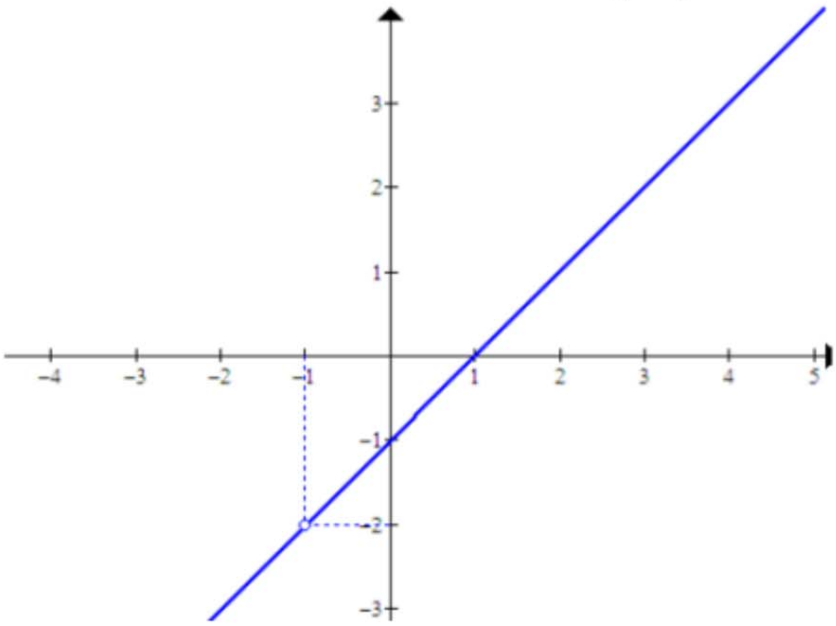
10) Calcule, se existir:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \dfrac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

Para calcular este limite vamos analisar o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Observe que o gráfico da função f é descontínuo para x = -1. Existe um furo no gráfico.



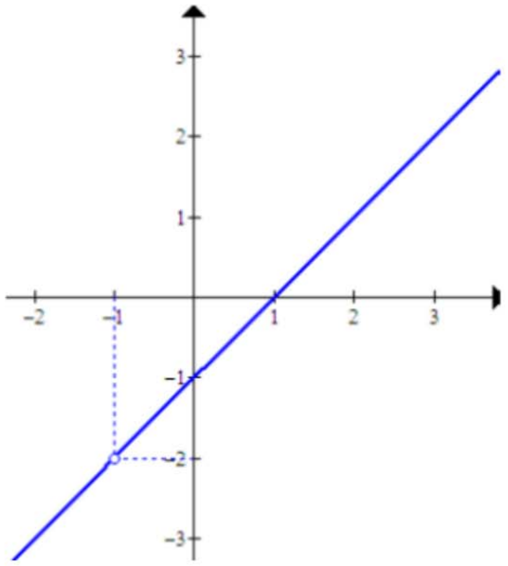
Manipulando algebricamente a equação da função f obtemos uma nova lei:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1} = x - 1 \text{, desde que } x \neq -1$$

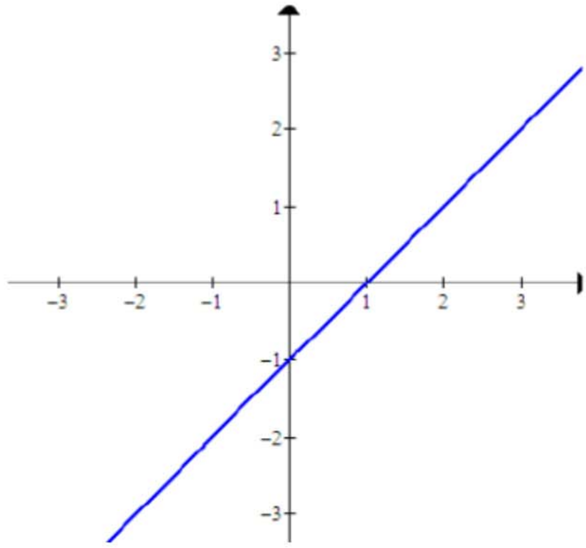
Podemos escrever a função f da seguinte maneira: como o numerador é a diferença dos quadrados de dois números, pode ser escrito como o produto da soma pela diferença desses números. Simplificando o numerador pelo denominador chegamos a $h(x) = x - 1$. Lembre-se que -1, não está definido para ambas as funções, ou seja, $D(f) = D(h) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Observe que o gráfico das funções f e h.

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}}$$



$$\boxed{h(x) = x - 1}$$



Podemos observar que o gráfico da função $f(x)$ é idêntico ao gráfico de $h(x)$, com exceção do ponto (-1, -2), que não está definido em $f(x)$, pois $x = -1$ é o valor que anula o denominador da função, logo não está definido no domínio da função.

O limite não é o estudo no ponto, e sim, o estudo da vizinhança de um ponto. Desta forma utilizamos esta "nova" lei para calcular o limite da função $f(x)$ quando x tende a -1, pois os valores de f e h possuem o mesmo comportamento na vizinhança de x = -1. Compare o limite das duas funções, com a ajuda dos gráficos.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2$$

Lembre-se que quando calculamos o limite de uma função e encontramos o sinal de indeterminação $\frac{0}{0}$, podemos, em muitos casos, calcular este limite pelo limite de outra função cujo gráfico é igual (possui a mesma vizinhança do ponto estudado) ao gráfico da função desejada.

$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{0}{0}$ (INDETERMINAÇÃO)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (x+1) = \boxed{2}$$

$D(f) = \mathbb{R}^* - \{-2\}$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x + x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x} = \dfrac{0}{0}$ (INDETERMINAÇÃO)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}.(x+4)}{\cancel{x}.(x+2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+4}{x+2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$D(f) = \mathbb{R}^*$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{|0|}{0} = \dfrac{0}{0}$ (INDETERMINAÇÃO)

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} \nexists$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$

$D(f) = \mathbb{R}^*$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x} = \dfrac{0}{0}$ (INDETERMINAÇÃO)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x} \cdot (x-1)}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0} (x-1) = \boxed{-1}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \dfrac{4 - 6 + 2}{4 - 4} = \dfrac{0}{0}$ (INDETERMINAÇÃO)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 1}{x + 2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

FATORANDO $1.x^2 - 3x + 2$:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4.1.2}}{2.1} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ — 2, 1

$x^2 - 3x + 2 = 1.(x - 2)(x - 1)$

g) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ $= \frac{0}{0}$ (INDETERMINAÇÃO)

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x - 1}}{(x + 1)\cancel{(x - 1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

h) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{9\}$

i) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = \dfrac{9-9}{\sqrt{9}-3} = \dfrac{0}{0}$ (INDETERMINAÇÃO)

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x}+3)\cancel{(\sqrt{x}-3)}}{\cancel{\sqrt{x}-3}} = \lim_{x \to 9} (\sqrt{x}+3) = \boxed{6}$$

j) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 5x}{x}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{5\}$

k) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \dfrac{25 - 35 + 10}{5 - 5} = \dfrac{0}{0}$ (INDETERMINAÇÃO)

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x-2)}{\cancel{x-5}} = \lim_{x \to 5} (x-2) = \boxed{3}$$

$1.x^2 - 7x + 10 = 0$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4.1.10}}{2.1} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$ — 5, 2

$x^2 - 7x + 10 = 1.(x-5)(x-2)$

l) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

m) $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\cos x}{x} = \dfrac{\cos \pi}{\pi} = \boxed{-\dfrac{1}{\pi}}$

$\cos \pi = \cos 180^\circ = -1$

n) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2} = \dfrac{0}{0}$ (INDET.)

$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} -1 = -1$$

$|2{,}1 - 2| = |0{,}1| = 0{,}1$

$|2{,}2 - 2| = |0{,}2| = 0{,}2$

$|2{,}3 - 2| = |0{,}3| = 0{,}3$

$|1{,}9 - 2| = |-0{,}1| = 0{,}1$

$|1{,}8 - 2| = |-0{,}2| = 0{,}2$

$|1{,}7 - 2| = |-0{,}3| = 0{,}3$

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2} \ \nexists$$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \log\left(x^2 - 4x + 1\right) = \log 1 = 0$

$D(f) = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

p) $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^3 + t^2 - 5t + 3}{t^2 - 3t + 2} = \dfrac{1 + 1 - 5 + 3}{1 - 3 + 2} = \dfrac{0}{0}$ (IND.)

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^3 + t^2 - 5t + 3}{t^2 - 3t + 2} = \lim_{t \to 1} \frac{(t^2 + 2t - 3)\cancel{(t-1)}}{(t-2)\cancel{(t-1)}} = \lim_{t \to 1} \frac{t^2 + 2t - 3}{t - 2} = \frac{0}{-1} = \boxed{0}$$

FATORANDO $t^3 + t^2 - 5t + 3$:

$(t^3 + t^2 - 5t + 3) \div (t - 1) = t^2 + 2t - 3$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
1 & 1 & 1 & -5 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -3 & & 0
\end{array}$$

FATORANDO $t^2 - 3t + 2$:

$(t^2 - 3t + 2) \div (t - 1) = t - 2$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
1 & 1 & -3 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & & 0
\end{array}$$

t) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4 - x}{x^2 - 2x - 8} = \dfrac{4-4}{16-8-8} = \dfrac{0}{0}$ (INDET.)

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{4-x}{x^2-2x-8} = \lim_{x \to 4} \frac{4-x}{1.(x-4)(x+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{-\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} -\frac{1}{x+2} = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(-8)}}{2.1} = \frac{2 \pm 6}{2} \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
Profª. Me. Mylane dos Santos Barreto

$D(f) = \mathbb{R}^* - \{-2\}$

u) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + 2x} = \dfrac{0}{0}$ (INDET.)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot (x^2 + 3x + 1)}{\cancel{x}(x + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$(x - 0) \cdot (\quad)$

x

v) $\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - x}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-5, -2\}$

x) $\lim_{y \to -2} \frac{y^3 + 8}{y^2 + 7y + 10} = \frac{0}{0}$ (IND.)

$$\lim_{y \to -2} \frac{y^3 + 8}{y^2 + 7y + 10} = \lim_{y \to -2} \frac{(y^2 - 2y + 4) \cdot \cancel{(y+2)}}{(y+5)\cancel{(y+2)}} = \lim_{y \to -2} \frac{y^2 - 2y + 4}{y + 5} = \frac{12}{3} = 4$$

FATORANDO $y^3 + 8$:

$(y^3 + 8) \div (y + 2) = y^2 - 2y + 4$

-2	1	0	0	8
	1	-2	4	0

FATORANDO $y^2 + 7y + 10$:

$(y^2 + 7y + 10) \div (y + 2) = y + 5$

-2	1	7	10
	1	5	0

a.1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} 0}{0} = \dfrac{0}{0}$ (IND.)

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
0,1	0,9983
0,01	0,999983
0,001	0,99999983

0^+ — 1

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\boxed{\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$

$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
-0,1	0,9983
-0,01	0,999983
-0,001	0,99999983

b.1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

i.1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2}$

Solução:

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2} = \dfrac{3}{0}$ (Impossível)

Teste:

$x = 1{,}9 \ \to \ \dfrac{3}{(x-2)^2} = 300\ (+)$

$x = 2{,}1 \ \to \ \dfrac{3}{(x-2)^2} = 300\ (+)$

então $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2} = +\infty$.

j.1) $\lim_{x \to 2} -\dfrac{3}{(x-2)^2} = -\dfrac{3}{0}$ (IMPOSSÍVEL)

TESTE:

$x = 1{,}9 \rightarrow -\dfrac{3}{(1{,}9-2)^2} = \dfrac{-}{+} = -$

$x = 2{,}1 \rightarrow -\dfrac{3}{(2{,}1-2)^2} = \dfrac{-}{+} = -$

$\lim_{x \to 2} -\dfrac{3}{(x-2)^2} = -\infty$

k.1) $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{2}{0}$ (IMPOSSÍVEL)

TESTE:

$x = 0{,}9 \rightarrow \dfrac{2 \cdot 0{,}9}{0{,}9-1} = \dfrac{+}{-} = -$

$x = 1{,}1 \rightarrow \dfrac{2 \cdot 1{,}1}{1{,}1-1} = \dfrac{+}{+} = +$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{2x}{x-1}$ $\nexists$

l.1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$ (IMPOSSÍVEL)

TESTE:

$x = -0{,}1 \to \frac{1}{-0{,}1} = -$

$x = 0{,}1 \to \frac{1}{0{,}1} = +$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \nexists$

m.1) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2}$

n.1) $\lim_{x \to 4} \frac{1}{|x - 4|} = \frac{1}{0}$ (IMPOSSÍVEL)

TESTE:

$x = 3,9 \rightarrow \frac{1}{|3,9 - 4|} = \frac{+}{+} = +$

$x = 4,1 \rightarrow \frac{1}{|4,1 - 4|} = \frac{+}{+} = +$

$\Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{1}{|x - 4|} = +\infty$

o.1) $\lim_{x \to 0} - \frac{1}{x^2}$

p.1) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x + 2}{2 - x} = \dfrac{4}{0}$ (IMPOSSÍVEL)

TESTE:

$x = 2{,}1 \rightarrow \dfrac{2{,}1 + 2}{2 - 2{,}1} = \dfrac{+}{-} = -$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x + 2}{2 - x} = -\infty$

q.1) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3 - x}{x^2} = \dfrac{3 - 0}{0^2} = \dfrac{3}{0}$ (IMPOSSÍVEL)

TESTE:

$x = -0{,}1 \rightarrow \dfrac{3 - (-0{,}1)}{(-0{,}1)^2} = \dfrac{+}{+} = +$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3 - x}{x^2} = +\infty$

r.1) $\lim_{x \to 2^+} \left(x^2 + 3\right) = 2^2 + 3 = 7$

s.1) $\lim_{x \to 4^-} \dfrac{x+1}{x+5} = \dfrac{5}{9}$

t.1) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{0}$ (IMPOSSÍVEL)

TESTE:

$x = -0,1 \to \frac{1}{|-0,1|} = \frac{+}{+} = +$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty$

$\lim_{x \to -2} \frac{-x+1}{x+2} = \frac{3}{0}$ (IMPOSSÍVEL)

TESTE:

$x = -2,1 \to \frac{-(-2,1)+1}{-2,1+2} = \frac{+}{-} = -$

$x = -1,9 \to \frac{-(-1,9)+1}{-1,9+2} = \frac{+}{+} = +$

$\lim_{x \to -2} \frac{-x+1}{x+2} \nexists$

(NÃO EXISTE)