ANTIDIFERENCIAÇÃO: A INTEGRAL INDEFINIDA

A derivação também pode ser chamada de diferenciação. A operação inversa da diferenciação (ou derivação) é chamada de antidiferenciação ou antiderivação ou integração.

ANTIDERIVADA OU INTEGRAL INDEFINIDA

Se $h'(x) = f(x)$ para todo x no domínio de f, então $h(x)$ é a antiderivada de f.

EXEMPLO

Se h for definida por $h(x) = 4x^3 + x^2 + 5$, então $h'(x) = 12x^2 + 2x$ e $f(x) = 12x^2 + 2x$, afirmamos que f é a derivada de h e que h é uma antiderivada de f.

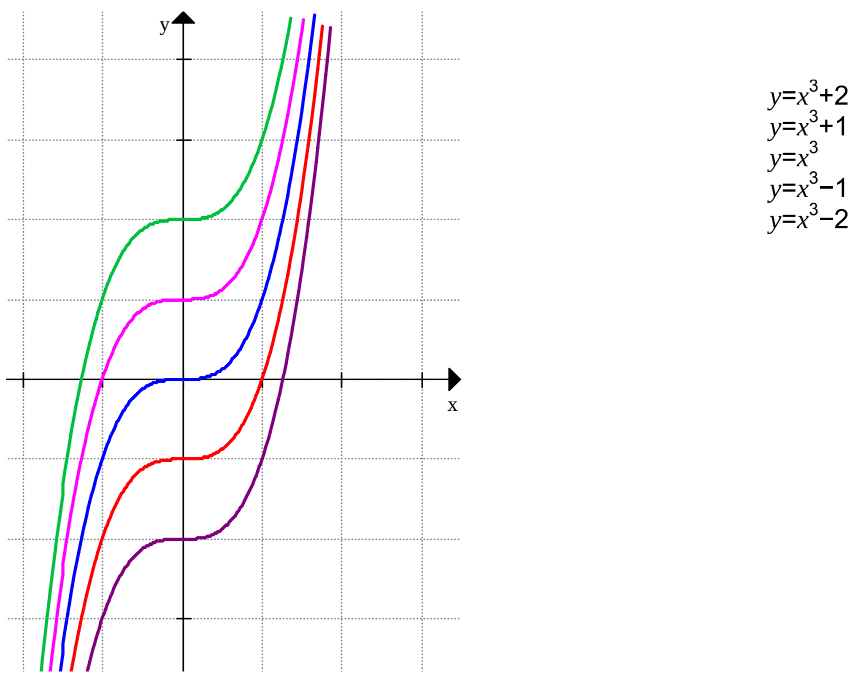
Se g for a função definida por $g(x) = 4x^3 + x^2 - 17$ então g também é uma antiderivada de f, pois $g'(x) = 12x^2 + 2x$. Na realidade, toda função cujos valores funcionais são dados por $4x^3 + x^2 + C$, onde C é uma constante qualquer, é uma antiderivada de f.

Em geral, se uma função h for antiderivada de uma função f num intervalo I e se a função g for definida por $g(x) = h(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária, então $g'(x) = h'(x) = f(x)$ e g também será uma antiderivada de f no intervalo I.

AS ANTIDERIVADAS DE UMA FUNÇÃO

Se h é uma antiderivada de f em um intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por $h(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária.

Há uma explicação geométrica para o fato de que quaisquer duas antiderivadas de uma mesma função devem diferir por uma constante. Se h é uma antiderivada de f, então $h'(x) = f(x)$. Isto diz que, para qualquer valor de x, $f(x)$ é a **inclinação** da tangente ao gráfico de $h(x)$. Se g é uma outra antiderivada de f, a inclinação de sua tangente é também $f(x)$. Assim, o gráfico de g é "paralelo" ao gráfico de h, e pode ser obtido pela translação do gráfico de h verticalmente. Isto é, existe alguma constante C para a qual $g(x) = h(x) + C$. A figura a seguir mostra várias antiderivadas da função $f(x) = 2x$.



Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função. O símbolo $\int$ é chamado sinal de integral e denota a operação de antidiferenciação.

Se $h(x)$ é tal que $\dfrac{dh}{dx} = f(x)$ podemos escrever $dh = f(x)dx$.

$$\int f(x)\,dx = h(x) + C$$

constante de integração

O símbolo dx indica que x é a variável em relação à qual a integração deve ser executada. Por exemplo, na expressão $\int 3px^2\,dp$, o dp indica que p é a variável de integração. Assim, $\int 3x^2 p\,dp = \dfrac{3x^2 \,.\, p^2}{2} + C$, onde $C \in \mathbb{R}$.

REGRAS DE INTEGRAÇÃO

A integração é o inverso da derivação. Assim, muitas regras de integração podem ser obtidas pelas regras de derivação correspondentes. Considere $k \in \mathbb{R}$

1) $\int c\,dx = cx + k$

2) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k \; (n \neq -1)$

3) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

4) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,\; k \in \mathbb{R}$

5) $\int e^x\,dx = e^x + k$

6) $\int e^{\alpha x}\,dx = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + k \; (\alpha \in \mathbb{R}^*)$

7) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + k,\; a \in \mathbb{R}_+^*$

8) $\int [f(x)]^n\,dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + k,\; f(x) = x + a,\; a \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{R}$

9) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k$

10) $\int \dfrac{1}{ax+b}\,dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + k$

11) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k$

12) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k$

13) $\int \cos \alpha x\,dx = \dfrac{1}{\alpha}\operatorname{sen} \alpha x + k$

14) $\int \text{sen}\,\alpha x \, dx = -\dfrac{1}{\alpha}\cos \alpha x + k$

15) $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + k$

16) $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + k$

17) $\int \text{cossec}\, x \, dx = \ln |\text{cossec}\, x - \text{cotg}\, x| + k$

18) $\int \text{cotg}\, x \, dx = \ln |\text{sen}\, x| + k$

19) $\int \text{sen}^2 x \, dx = \dfrac{1}{2}(x - \text{sen}\, x \cdot \cos x)\tan x + k$

20) $\int \cos^2 x \, dx = \dfrac{1}{2}(x + \text{sen}\, x \cdot \cos x)\tan x + k$

21) $\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + k$

22) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + k$

23) $\int \text{cossec}^2 x \, dx = -\text{cotg}\, x + k$

24) $\int \text{cotg}^2 x \, dx = -\text{cotg}\, x - x + k$

25) $\int \sec x \,.\, \text{tg}\, x \, dx = \sec x + k$

26) $\int \text{cossec}\, x \,.\, \text{cotg}\, x \, dx = -\text{cossec}\, x + k$

27) $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \dfrac{1}{a}\text{arc tg}\left(\dfrac{x}{a}\right) + k$

28) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \text{arc sen}\left(\dfrac{x}{a}\right) + k$

29) $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + k$

30) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + k$

31) $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\text{arcsen}\left(\dfrac{x}{a}\right) + k$

32) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + k$

33) $\int e^{\alpha x} \, dx = \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + k \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$

34) $\int \cos \alpha x \, dx = \dfrac{1}{\alpha}\text{sen}\, \alpha x + k$

35) $\int \text{sen}\, \alpha x \, dx = -\dfrac{1}{\alpha}\cos \alpha x + k$

36) $\int a\, f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx, \ a \in \mathbb{R}$

37) $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + k, \ a \in \mathbb{R}_+^*$

39) $\int [f(x)]^n \, dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{(n+1)^2} + k$

40) $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + k$

41) $\int \log_a x = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)\int \ln x \, dx, \ \left(a \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } a \neq 1\right)$

Não existem regras gerais para integração de produtos e quocientes. Para resolvê-los deve-se reescrever um produto ou quociente em uma forma que possa ser integrada usando as técnicas anteriores.

EXEMPLOS

1) Calcule:

a) $\int x\,\sqrt{x}\;dx \;=$

b) $\int \dfrac{x^3+1}{x}\,dx =$

c) $\int tg^2 x\;dx =$

d) $\int \left(3e^x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2}x^2\right) dx =$

e) $\int \dfrac{3x^5+2x-5}{x^3}\,dx =$

2) Prove que:

a) $\int e^{\alpha x}\;dx \;=\; \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+k$

b) $\int \cos \alpha x\,dx \;=\; \dfrac{1}{\alpha}\;\mathrm{sen}\;\alpha x \;+\; k$

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a) $\int dx =$

b) $\int e^{2x} \, dx =$

c) $\int \text{sen}\, 5x \, dx =$

d) $\int \cos 3x \, dx =$

e) $\int e^{-x} \, dx =$

f) $\int x^5 \, dx =$

g) $\int 3 \, dx =$

h) $\int \sqrt[5]{x^2} \, dx =$

i) $\int \frac{x + x^2}{x^2} \, dx =$

j) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$

k) $\int \left(e^x + 4 \right) dx =$

l) $\int \left(e^{4x} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$

m) $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) dx =$

n) $\int \frac{x^5 + x + 1}{x^2} \, dx =$

o) $\int \sqrt{x}(x + 1) \, dx =$

p) $\int (3 \,\text{sen}\, t - 2 \cos t) \, dt =$

q) $\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x} \, dx =$

r) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} \, dx =$

s) $\int \frac{3 \,\text{tg}\, \theta - 4 \cos^2 \theta}{\cos \theta} \, d\theta =$

Obs.: Para resolver os problemas a seguir lembre-se que a derivada de uma função pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. O custo marginal é a derivada da função custo total.

2) Encontre a função $f(x)$ cuja tangente tem inclinação $3x^2+1$ para cada valor de x e cujo gráfico contém o ponto (2,6).

3) Os pontos (−1,3) e (0,2) estão numa curva e em qualquer ponto (x, y) da curva $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$. Determine a equação da curva.

4) Um produtor descobre que o custo marginal é de $3q^2 - 60q + 400$ u.m. por unidade, quando q unidades do produto são produzidas. O custo total de produção das primeiras 2 unidades é de $900. Qual é o custo total de produção das primeiras 5 unidades?

5) Estima-se que daqui a x meses a população de uma certa cidade estará variando a uma taxa de $2 + 6\sqrt{x}$ pessoas por mês. A população atual é de 5.000. Qual será a população daqui a 9 meses?

6) Encontre a solução completa da equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3$.

7) Encontre a solução particular da equação diferencial da questão anterior para $y = 2$ e $y' = -3$ quando $x = 1$.

8) Encontre a solução da cada equação dada abaixo:

a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2y^2$ sabendo que para $x = 2$, $y = 1$.

b) $\frac{dx}{y} = \frac{4dy}{x}$ sabendo que $y = -2$ quando $x = 4$.

9) Ache a solução geral de $F'(x) = 2x - 2$ e a solução particular que satisfaz a condição inicial $F(1) = 2$.

10) O custo marginal da fabricação de x unidades de um produto tem como modelo

$$\frac{dC}{dx} = 32 - 0{,}04x.$$

A produção de uma unidade custa $\$50$. Ache o custo total da produção de 200 unidades.

11) A taxa de crescimento de uma população de uma cidade tem como modelo

$$\frac{dP}{dt} = 500t^{1{,}06}$$

onde t é o tempo em anos. A população da cidade é, no momento, de 50.000 habitantes. Qual será a população daqui a 10 anos?

12) Uma colônia de bactérias cresce à taxa de $\frac{dP}{dt} = \frac{3.000}{1 + 0{,}25t}$ onde t é o tempo em dias. Quando $t = 0$, a população é de 1.000.

a) Estabeleça uma equação para modelar a população P em termos do tempo t.
b) Qual é a população após 3 dias?
c) Após quantos dias a população será de 12.000?

INTEGRAL INDEFINIDA DA FORMA $\int f\left(g(x)\right).g'(x)\,\mathrm{d}x$

Sejam f e g tais que $\mathrm{Im}_g \subset \mathrm{D}_f$ com g derivável. Então: $\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right).g'(x)$.

Como encontrar a função primitiva $f\left(g(x)\right)$ se conhecemos $f'\left(g(x)\right).g'(x)$, ou seja, como resolver a integral: $\int f\left(g(x)\right).g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Se $\mathrm{u} = g(x) \rightarrow \dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}x} = g'(x) \rightarrow \mathrm{du} = g'(x).\mathrm{d}x$

Daí: $\int f'\left(g(x)\right).g'(x)\mathrm{d}x = \int f'(\mathrm{u}).\mathrm{du} = f(\mathrm{u}) + \mathrm{k} = f\left(g(x)\right) + \mathrm{k}$

EXEMPLOS:

a) $\int \mathrm{x}\cos \mathrm{x}^2\,\mathrm{dx} =$

b) $\int \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} =$

c) $\int (2\mathrm{x}+1)^3\,\mathrm{dx} =$

d) $\int \dfrac{1}{3\mathrm{x}+2}\,\mathrm{dx} =$

e) $\int \mathrm{x}^3\sqrt{1+\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} =$

f) $\int \mathrm{sen}^3\mathrm{x}.\cos \mathrm{x}\,\mathrm{dx} =$

g) $\int \dfrac{\mathrm{sen}\,\mathrm{x}}{\cos^3 \mathrm{x}}\,\mathrm{dx} =$

EXERCÍCIOS

1) Calcule:

a) $\int x^2 e^{x^3} dx =$

b) $\int x^3 \cos x^4 dx =$

c) $\int \frac{x}{(1+4x^2)^2} dx =$

d) $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx =$

e) $\int \text{sen}\, 5x\, dx =$

f) $\int \cos 6x\, dx =$

g) $\int \frac{3x}{5+6x^2} dx =$

h) $\int x e^{-x^2} dx =$

i) $\int x \sqrt{1+3x^2} dx =$

j) $\int \cos^3 x \,.\, \text{sen}^3 x\, dx =$

k) $\int \frac{\sec^2 x}{3+2\,\text{tg}\, x} dx =$

l) $\int \left(\frac{5}{x-1} + \frac{2}{x} \right) dx =$

m) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx =$

n) $\int \frac{dx}{1+(1-5x)^2} =$

o) $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+4} dx$

p) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx$

q) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-6x+9}} dx$

r) $\int \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}\ dx$

s) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1\text{-}4x^2}}\ dx$

t) $\int \dfrac{3x-1}{\sqrt{9x^2-6x}}\ dx$

u) $\int \dfrac{dx}{x^2\ +\ x\ +\ 1}\ dx$

INTEGRAIS RACIONAIS – MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO

EXEMPLOS

1) $\int \dfrac{x+3}{x^2-x-6}\ dx$

2) $\int \dfrac{1}{x^3-x}\ dx$

3) $\int \dfrac{x}{(x+1)(x-1)^2}\ dx$

EXERCÍCIOS

2) Resolva as integrais a seguir.

a) $\int \dfrac{x}{x^2\text{-}6x\text{-}7}\ dx$

b) $\int \dfrac{2x+5}{x^2+3x}\ dx$

c) $\int \dfrac{dx}{x\ (x\text{-}2)^2}\ dx$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

A integração por partes é uma técnica usada para integrar certos produtos do tipo $f(x).g(x)$: $\int f(x).g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,\mathrm{d}x$, onde $u(x)$ é uma antiderivada de g.

Para ver como a integração por partes é uma reestruturação do que acontece quando a regra do produto é usada para derivar $f(x).u(x)$, onde $u(x)$ é uma antiderivada de g, note que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)u(x)\right] = f'(x)u(x) + f(x)u'(x) = f'(x)u(x) + f(x)g(x)$$

Expressa em termos de integral, isto diz que:

$$f(x)u(x) = \int f'(x)u(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ou

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,\mathrm{d}x$$

que é precisamente a fórmula para integração por partes.

Exemplo 1: $\int xe^{2x}\,dx$

Exemplo 2: $\int x\sqrt{x+5}\,dx$

Exemplo 3: $\int x \ln x\,dx$

REVISÃO

REGRAS DE DERIVAÇÃO

1) $y = k,\ k \in \mathbb{R} \to y' = 0$

2) $y = x^n,\ n \in \mathbb{R} \to y' = nx^{n-1}$

3) $y = k\, f(x) \to y' = k\, f'(x)$

4) $y = f(x) + g(x) + \ldots + z(x) \to y' = f'(x) + g'(x) + \ldots + z'(x)$

5) $y = a^{f(x)} \to y' = f'(x).\ln a.\, a^{f(x)}\ (0 < a \neq 1)\ /\ y = e^x \to y' = e^x$

6) $y = \log_a f(x) \to y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\,.\ln a}\ (0 < a \neq 1)\ /\ y = \ln|x| \to y' = \dfrac{1}{x}$

7) $y = f(x).g(x) \to y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

8) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \to y' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2},\ g(x) \neq 0$

9) $y = [f(x)]^n \to y' = n\, f'(x).[f(x)]^{n-1}$

10) $y = \text{sen } x \to y' = \cos x$

11) $y = \cos x \to y' = -\text{sen } x$

12) $y = g(f(x)) \to y' = g'(f(x)).f'(x)$

13) $y = \text{tg } x \to y' = \sec^2 x$

14) $y = \sec x \to y' = \sec x\,.\,\text{tg } x$

15) $y = \text{cotg } x \to y' = -\text{cossec}^2\, x$

16) $y = \text{cossec } x \to y' = -\text{cossec } x\,.\,\text{cotg } x$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1) $\text{sen } (a \pm b) = \text{sen } a\,.\cos b \pm \text{sen } b\,.\cos a$

2) $\cos (a \pm b) = \cos a\,.\cos b \mp \text{sen } a\,.\,\text{sen } b$

3) $\text{tg } (a \pm b) = \dfrac{\text{tg } a \pm \text{tg } b}{1 \mp \text{tg } a\,.\,\text{tg } b}$

4) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

5) $\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$

6) $\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

7) $\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1$

8) $\text{cossec}^2\, x = \text{cotg}^2\, x + 1$

9) $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$