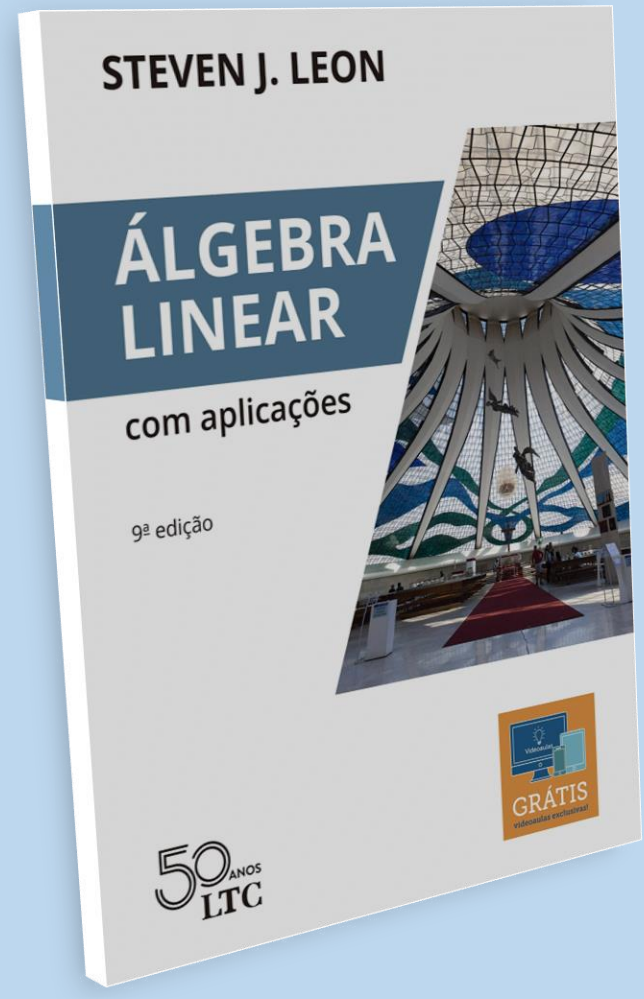
UENF

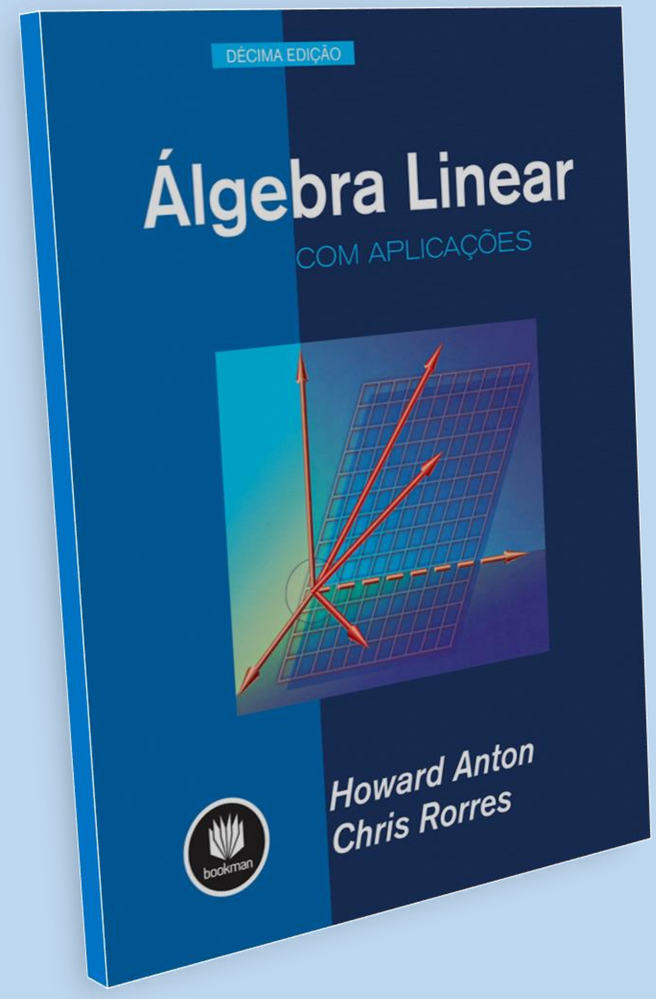
Álgebra Linear

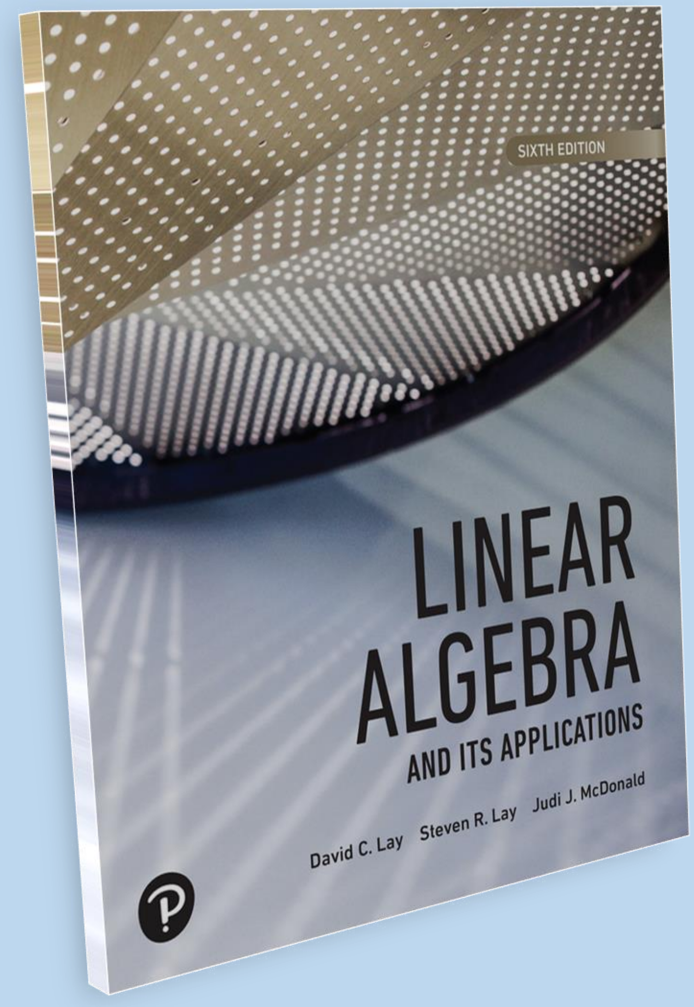
Transformações Lineares

Profa. Elba O. Bravo Asenjo
eoba@uenf.br

Referências Bibliográficas







Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Exemplo. Dada a transformação linear $T(x , y , z) = (x + 2y – z \; , \; y + 2z \; , \; x + 3y + z)$ em $\mathbb{R}^3$

(a) Verificar que Nuc(T) é uma reta que passa pela origem;

(b) Determinar as equações paramétricas da reta obtida em (a);

(c) Verificar que Im T é um plano que passa pela origem;

(d) Determinar as equações paramétricas do plano obtido em (c).

Solução

(a) Pela definição $Nuc(T) = \{ (x , y , z) \in \mathbb{R}^3; \; T(x , y , z) = 0 \}$; ou seja,

$$(x + 2y – z \; , \; y + 2z \; , \; x + 3y + z) = (0 , 0 , 0)$$

Isto é, $(x , y , z) \in Nuc(T)$ quando (x , y , z) é solução do sistema linear

$$\begin{aligned} x + 2y – z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $x = 5z$ e $y = - 2z$, com $z \in \mathbb{R}$. Assim,

$$Nuc(T) = \{ (5z , -2z , z); z \in \mathbb{R} \}$$

Como Nuc(T) é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e sua dimensão é 1, Nuc(T) é uma reta que passa pela origem.

(b) Seja $z = t$, então

$$\begin{aligned} x &= 5t \\ y &= -2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= t \end{aligned}$$

são as equações paramétricas da reta que passa pela origem

(c) Como dim Nuc(T) = 1, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que dim Im T = 2.
Portanto, Im T é um plano que passa pela origem.

(d) Ora,

$$\begin{aligned} \text{Im } T &= G(\, T(1,0,0) , T(0,1,0) , T(0,0,1) \,) \quad \text{pelo Teorema 1.} \\ &= G(\, (1,0,1) , (2,1,3) , (-1, 2, 1) \,) \\ &= G(\, (1,0,1) , (2,1,3) \,) \end{aligned}$$

já que (-1 , 2,1) = - 5 (1,0,1) + 2 (2 , 1, 3). Portanto,

$$\text{Im } T = \pi\,(0 , v_1 , v_2) ,$$

onde v_1 = (1 , 0, 1) e v_2 = (2 , 1 , 3). Assim,

$$\begin{aligned} x &= m + 2n \\ y &= n, \qquad\qquad m, n \in \mathbb{R} \\ z &= m + 3n \end{aligned}$$

são as equações paramétricas procuradas.

Observação. Seja W um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, então dim W $\leq$ 3.

Temos a seguinte classificação dos subespaços W de $\mathbb{R}^3$.

aspecto algébrico		**aspecto geométrico**
dim W = 0	$\longleftrightarrow$	W = { (0, 0, 0) } (origem do espaço)
dim W = 1	$\longleftrightarrow$	W é uma reta que passa pela origem
dim W = 2	$\longleftrightarrow$	W é um plano que passa pela origem
dim W = 3	$\longleftrightarrow$	W = $\mathbb{R}^3$

Matriz de uma Transformação Linear

Sejam $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, A uma base de V e B uma vase de W.

Sem prejuízo da generalização, consideremos o caso em que $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$.

Sejam $A = \{v_1 \ , v_2\}$ e $B = \{w_1 \ , w_2 \ , w_3\}$ bases de V e W, respectivamente.

Então,

$$[T(v)]_B = [T]_B^A \, [v]_A \qquad (1)$$

Sendo a matriz $[T]_B^A$ denominada matriz de T em relação às bases A e B

Observações:

1) A matriz $[T]_B^A$ é de ordem 3 x 2 quando dim V = 2 e dim W = 3.

2) As colunas da matriz $[T]_B^A$ são as componentes (ou coordenadas) das imagens dos vetores da base A em relação à base B; isto é :

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}} \\ \uparrow & \uparrow \\ T(v_1)_B & T(v_2)_B \end{array}$$

De um modo geral, para $T : V \rightarrow W$ linear, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ são bases de V e W, respectivamente, teremos que $[T]_B^A$ é uma matriz de ordem m x n, onde cada coluna é formada pelas

Componentes (ou coordenadas) das imagens dos vetores de A em relação à base B:

$$
[T]_B^A = \begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
T(v_1)_B & T(v_2)_B & T(v_n)_B
\end{array}
\end{array}
$$

3) Como se vê, a matriz $[T]_{B}^{A}$ depende das bases A e B consideradas, isto é, a cada dupla de bases corresponde uma particular matriz. Assim, uma transformação linear poderá ter uma infinidade de matrizes para representá-la. No entanto, fixadas as bases, a matriz é única.

Matriz de uma Transformação Linear - Exemplos

Exemplo 1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x , y , z) = (2x - y + z \;,\; 3x + y - 2z)$, linear.
Considere as bases $A = \{v_1 \;, v_2 \;, v_3\}$, com $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$
e $B = \{w_1 \;, w_2\}$, sendo $w_1 = (2 , 1)$ e $w_2 = (5, 3)$.

a) Determinar $[T]_B^A$

b) Se $v = (3 , -4 , 2)$ (coordenadas em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$) , calcular $[T(v)]_B$ usando a matriz encontrada.

Solução

a) A matriz é de ordem 2x3

$$[T]_B^A = \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T(v_1)_B & T(v_2)_B & T(v_3)_B \end{array}$$

$$T(v_1) = T(1, 1, 1) = (2, 2) = a_{11}(2, 1) + a_{21}(5, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_{11} + 5a_{21} = 2 \\ a_{11} + 3a_{21} = 2 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{11} = -4 \\ a_{21} = 2 \end{cases}$$

$$T(v_2) = T(0, 1, 1) = (0, -1) = a_{12}(2, 1) + a_{22}(5, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_{12} + 5a_{22} = 0 \\ a_{12} + 3a_{22} = -1 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{12} = 5 \\ a_{22} = -2 \end{cases}$$

$$T(v_3) = T(0, 0, 1) = (1, -2) = a_{13}(2, 1) + a_{23}(5, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_{13} + 5a_{23} = 1 \\ a_{13} + 3a_{23} = -2 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{13} = 13 \\ a_{23} = -5 \end{cases}$$

Logo

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Sabe-se que

$$[T(v)]_B = [T]_B^A \, [v]_A$$

Como v está expresso com componentes (coordenadas) na base canônica, isto é,

v = (3 , -4 , 2) = 3 (1 , 0, 0) – 4 (0 , 1 , 0) + 2 (0, 0 , 1)

teremos que, primeiramente expressá-lo na base A. Seja $[v]_A$ = (a , b , c) , isto é,

$(3, -4, 2) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1)$

ou

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = -4 \\ a + b + c = 2, \end{cases}$$

Sistema cuja solução é $a = 3$, $b = -7$ e $c = 6$, ou seja, $[v]_A = (3, -7, 6)$.

Portanto:

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Isto é

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 31 \\ -10 \end{bmatrix}$$

O vetor coordenada de T(v) na base canônica é:

$T(v) = 31(2, 1) - 10(5, 3)$

$T(v) = (12, 1)$

Naturalmente $T(v) = (12, 1)$ também seria obtido por meio da lei que define a transformação T, considerando $v = (3, -4, 2)$, isto é,

$T(3, -4, 2) = (12, 1)$

Exemplo 2. Considere-se a mesma transformação linear do Exemplo 1. Sejam as bases
A = {(1,1,1) , (0,1,1) , (0,0,1)} (a mesma) e B = {(1,0) , (0,1)} canônica.

a) Determinar $[T]_B^A$

a) Se v = (3 , -4 , 2), calcular $T(\mathrm{v})_B$ utilizando a matriz encontrada.

Solução

a)

$$T(1,1,1) = (2,2) = 2(1,0) + 2(0,1)$$

$$T(0,1,1) = (0,-1) = 0(1,0) - 1(0,1)$$

$$T(0,0,1) = (1,-2) = 1(1,0) - 2(0,1)$$

Então:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Como $[v]_A$ = (3 , -7 , 6) (pelo item (b) do Exemplo 1) , temos:

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Isto é,

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3. Seja ainda a mesma transformação linear do Exemplo 1.

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 , \quad T(x , y , z) = (2x - y + z \ , \ 3x + y - 2z)$$

Sejam as bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$:

A = {(1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1)} e B = {(1,0) , (0,1)}

a) Determinar $[T]_B^A$

b) Se $v = (3 , -4 , 2)$, calcular $T(v)_B$ utilizando a matriz encontrada.

Solução

a)

$$T(1,0,0) = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$T(0,1,0) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1)$$

$$T(0,0,1) = (1,-2) = 1(1,0) - 2(0,1)$$

Então:

$$[T]^A_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Como $[v]_A = (3, -4, 2)$, pois A é a base canônica, temos:

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Isto é,

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observação. No caso de serem A e B bases canônicas, representa-se a matriz simplesmente por [T] , que é chamada *matriz canônica* de T. Então, tem-se:

$$T(v) = [T]\,[v]$$

Em se tratando da matriz canônica, essa poderá ser escrita diretamente, como mostram os exemplos:

1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, T(x , y) = (3x – 2y , 4x + y , x)

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T(x , y) = (x , -y)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, T(x , y , z) = 4x - y

$$[T] = [\, 4 \quad -1 \quad 0 \,]$$

Por outro lado, quando é dada uma matriz de uma transformação linear T sem que haja referência às bases, essa deve ser entendida como a *matriz canônica* da T. Por exemplo a matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

define a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 , \quad T(x , y , z) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x + 3y + 4z \, , \; x - 2y)$$

Operações com Transformações Lineares

1. Adição

Sejam $T_1 : V \rightarrow W$ e $T_2 : V \rightarrow W$ transformações lineares. Chama-se *soma* das transformações lineares T_1 e T_2, à transformação linear

$$T_1 + T_2 : V \rightarrow W$$

$$v \mapsto (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v), \quad \forall\, v \in V$$

Se A e B são bases de V e W, respectivamente, demonstra-se que

$$[T_1 + T_2]^A_B = [T_1]^A_B + [T_2]^A_B$$

Multiplicação por Escalar

2. Multiplicação por Escalar

Sejam $T: V \to W$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se *produto* de T pelo escalar α à transformação linear

$$\begin{aligned} \alpha\, T : V &\to W \\ \mathrm{v} &\mapsto (\alpha\, T)(\mathrm{v}) = \alpha\, T(\mathrm{v})\,, \quad \forall\, \mathrm{v} \in V \end{aligned}$$

Se A e B são bases de V e W, respectivamente, demonstra-se que:

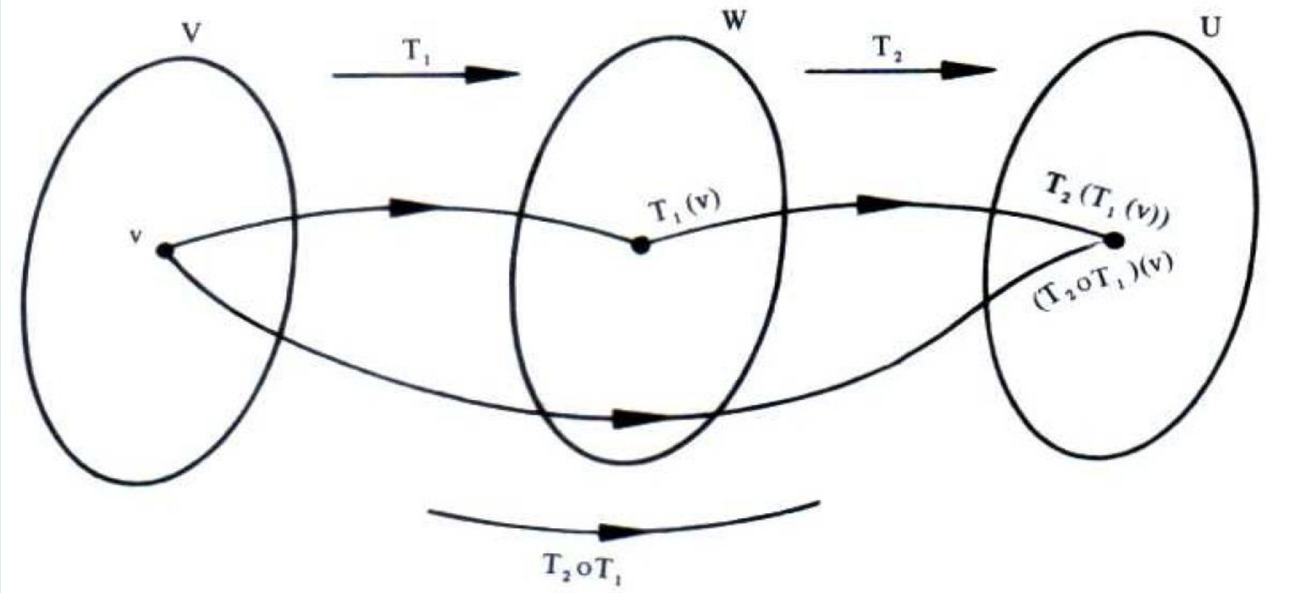
$$[\alpha T]_B^A = \alpha\,[T]_B^A$$

Transformações Lineares - Composição

3. Composição

Sejam $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$ transformações lineares. Chama-se aplicação *composta* de T_1 com T_2, e se representa por $T_2 \circ T_1$ à transformação linear:

$$T_2 \circ T_1 : V \to U$$
$$\mathrm{v} \mapsto (T_2 \circ T_1)(\mathrm{v}) = T_2(\,T_1(\mathrm{v})\,), \quad \forall\, \mathrm{v} \in V$$



Se A , B e C são bases de V , W e U, respectivamente, demonstra-se que:

$$[T_2 \circ T_1]_C^A = [T_2]_C^B \times [T_1]_B^A$$

Operações com Transformações Lineares - Exemplos

Exemplo 1. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares definidas por:

T_1(x , y) = (x + 2y , 2x – y , x) e T_2(x , y) = (-x , y , x + y). Determinar:

a) $T_1 + T_2$

b) $3T_1 - 2\,T_2$

c) a matriz canônica de $3T_1 - 2\,T_2$ e mostrar que $[3T_1 - 2\,T_2] = 3\,[T_1] - 2\,[T_2]$

Solução

a) $(T_1 + T_2)(x\,,y) = T_1$(x , y) + T_2(x , y) = (x + 2y , 2x – y , x) + (-x , y , x + y) =

= (2y , 2x , 2x + y)

b) $(3T_1 - 2\,T_2)(x\,,y) = (3T_1)(x\,,y) - (2\,T_2)(x\,,y) = 3T_1(x\,,y) - 2\,T_2(x\,,y) =$

$= 3\,(x + 2y\ ,\ 2x - y\ ,\ x)\ - 2\,(\,-x\ ,\ y\ ,\ x + y)$

$= (5x + 6y\ ,\ 6x - 5y\ ,\ x - 2y)$

c)

$$[3T_1 - 2T_2] = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3\,[T_1] - 2\,[T_2]$$

Exemplo 2. Sejam S e T operadores lineares no $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$S(x, y) = (2x, y) \quad \text{e} \quad T(x, y) = (x, x - y).$$

Determinar:

a) $S \circ T$

b) $T \circ S$

c) $S \circ S$

d) $T \circ T$

Solução

a) $(S \circ T)(x, y) = S(T(x, y)) = S(x, x - y) = (2x, x - y)$

Observemos que:

$$[S \circ T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [S]\,[T]$$

b) $(T \circ S)(x, y) = T(S(x, y)) = T(2x, y) = (2x, 2x - y)$

Observemos que :

$$S \circ T \neq T \circ S$$

e esse fato geralmente ocorre.

c) $(S \circ S)(x, y) = S(S(x, y)) = S(2x, y) = (4x, y)$

d) $(T \circ T)(x, y) = T(T(x, y)) = T(x, x - y) = (x, y)$

As transformações $S \circ S$ e $T \circ T$ são também representadas por S^2 e T^2 .

n-ésima potência de T

Sejam $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a n-ésima potencia de T, denotando-a por T^n, como a função $T^n: V \rightarrow V$ dada por

$$T^1 = T \qquad \text{e} \qquad T^n = T \circ T \circ \ldots \circ T \ \text{(n vezes)}, \quad \text{se} \quad n \geq 2.$$

T^n é uma transformação linear.

Definimos também T^0 como a função identidade em V, ou seja, $T^0 = I_V$

Se $T: V \rightarrow V$ é um isomorfismo, a transformação linear $T^{-n}: V \rightarrow V$ é definida por

$$T^{-n} = (T^{-1})^n$$

Teorema. Sejam T e T' transformações lineares de V em W e sejam S e S' transformações lineares de W em U. Então:

(i) $S \circ (T + T') = S \circ T + S \circ T'$

(ii) $(S + S') \circ T = S \circ T + S' \circ T$

(iii) $k\,(S \circ T) = (k\,S) \circ T = S \circ (k\,T)$, onde $k \in \mathbb{R}$

Transformação Linear Inversa

Sejam $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear bijetiva. Logo existe a função inversa $T^{-1}: W \rightarrow V$ de T. A *função* T^{-1} *é também uma transformação linear.*

De fato:

Consideremos w_1 e w_2 em W e a em $\mathbb{R}$. Como T é bijetiva, existem únicos vetores v_1 e v_2 em V tais que $\mathrm{T}(v_1) = w_1$ e $\mathrm{T}(v_2) = w_2$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
T^{-1}(w_1 + a\,w_2) &= T^{-1}(\mathrm{T}(v_1) + a\,\mathrm{T}(v_2)) \\
&= T^{-1}(\mathrm{T}(v_1 + a\,v_2)) \\
&= v_1 + a\,v_2 \\
&= T^{-1}(w_1) + a\,T^{-1}(w_2)
\end{aligned}
$$

Observação. Uma transformação linear bijetiva é chamada *isomorfismo*.

Transformação Linear Inversa

Teorema 1. Seja $T: V \to W$ um isomorfismo, onde V e W são espaços vetoriais de dimensão finita. Se α é uma base de V e β é uma base de W, então

$$[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\alpha} \right)^{-1}$$

Corolário. Seja $T: V \to W$ uma transformação linear, onde V e W são espaços vetoriais de mesma dimensão finita. Sejam α e β bases de V e W, respectivamente. Temos que

T é invertível se, e somente se, a matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$ é invertível.

Transformação Linear Inversa - Exemplo

Exemplo 1. Seja $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

T(x , y) = (4x – 3y , – 2x + 2y)

Verificar que T é invertível e determinar T^{-1}

Para verificar que T é invertível basta verificar que T é injetiva, isto é, verificar que Nuc(T) = { (0 , 0) }; ou ainda, podemos calcular $[T]_\alpha^\alpha$, onde α é uma base qualquer de $\mathbb{R}^2$, e usar o corolário anterior. Vamos optar pelo segundo método.

Seja α a base canônica de $\mathbb{R}^2$, então,

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz acima é invertível e a sua inversa é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Portanto, devido ao Teorema 1, temos que

$$[T^{-1}]_{\alpha}^{\alpha} = ([T]_{\alpha}^{\alpha})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo a transformação linear T^{-1} é dada por (usando a fórmula (1) da Def. de matriz de uma transf. linear):

$$[T^{-1}(x, y)]_{\alpha} = [T^{-1}]_{\alpha}^{\alpha} \, [(x,y)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3/2y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

O que fornece

$$T^{-1}(x, y) = (x + 3/2\, y \;,\; x + 2y)$$

Propriedades dos Operadores Inversíveis

Seja $T: \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V}$ um operador linear.

I) Se T é inversível e T^{-1} é a sua inversa, então;

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ \mathrm{T} = \mathrm{I} \text{ (identidade)}$$

II) T é inversível se, e somente se, $\mathrm{Nuc(T)} = \{0\}$

III) Se T é inversível, T transforma base em base, isto é, se B é uma base de V, T(B) também é base de V.

IV) Se T é inversível e B uma base de V, então $T^{-1}: \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V}$ é linear e

$$[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$$

isto é, a matriz do operador linear inverso numa certa base B é a inversa da matriz do operador T nessa mesma base.

Na prática, a base B será normalmente considerada como canônica. Logo, de forma mais simples:

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

e, portanto:

$$[\mathrm{T}]\,[T^{-1}] = [T \circ T^{-1}] = [\mathrm{I}]$$

Como consequência temos: T é inversível se, e somente se, $\det[\mathrm{T}] \neq 0$.

Exemplo 2. Seja o operador linear em $\mathbb{R}^2$ definido por T(x , y) = (x – 2y , -2x + 3y)

a) Mostrar que T é inversível.

b) Encontrar uma regra para T^{-1} como a que define T.

Solução

a) A matriz canônica de T é $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Como det [T] = -1 ≠ 0, T é inversível.

b) $[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

Logo:

$$[T^{-1}(\mathrm{x}\,,\,\mathrm{y})] \;=\; [T^{-1}]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x\; - 2y \\ -2x\; - y \end{bmatrix}$$

Ou:

$$T^{-1}(\mathrm{x}\,,\,\mathrm{y}) = \;(-3x\; - 2y\,, -2x\; - y\,).$$