

FIGURA 9

TEC Visual 13.3C mostra como o círculo osculador muda conforme um ponto se move ao longo de uma curva.

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Para o gráfico da Figura 9 usamos as equações paramétricas do círculo:

$$x = \frac{1}{2} \cos t \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$$

Resumimos aqui as fórmulas para os vetores tangente unitário, normal unitário e binormal e para a curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

13.3 Exercícios

1–6 Determine o comprimento da curva dada.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, 3 \sin t \rangle, \quad -5 \leq t \leq 5$
- $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle, \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \ln \cos t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$
- $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\mathbf{r}(t) = 12t \mathbf{i} + 8t^{3/2} \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

7–9 Encontre o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. (Use sua calculadora para aproximar a integral.)

- $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t, t^2 \rangle, \quad 1 \leq t \leq 4$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^{-t}, te^{-t} \rangle, \quad 1 \leq t \leq 3$
- $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \tan t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$

10. Trace a curva com equações paramétricas $x = \sin t, y = \sin 2t, z = \sin 3t$. Encontre o comprimento total desta curva com precisão de quatro casas decimais.

- Seja C a curva de intersecção do cilindro parabólico $x^2 = 2y$ e da superfície $3z = xy$. Encontre o comprimento exato de C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$.
- Encontre, com precisão de quatro casas decimais, o comprimento da curva de intersecção do cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ com o plano $x + y + z = 2$.

13–14 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t .

- $\mathbf{r}(t) = 2t \mathbf{i} + (1 - 3t) \mathbf{j} + (5 + 4t) \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = e^{2t} \cos 2t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + e^{2t} \sin 2t \mathbf{k}$

15. Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3 \sin t, y = 4t, z = 3 \cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?

16. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1 \right) \mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1} \mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido a partir do ponto $(1, 0)$ na direção crescente de t . Expresse a reparametrização em sua forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

17–20

(a) Determine os vetores tangente e normal unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

(b) Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3 \cos t, 3 \sin t \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t \rangle, \quad t > 0$
- $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2}t, e^t, e^{-t} \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, t^2 \rangle$

21–23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

- $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + (1 + t^2) \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = 3t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + 4 \cos t \mathbf{k}$

24. Encontre a curvatura da curva $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \sin t, t \rangle$ no ponto $(1, 0, 0)$.

25. Encontre a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ no ponto $(1, 1, 1)$.

26. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas $x = \cos t, y = \sin t, z = \sin 5t$ e calcule a curvatura no ponto $(1, 0, 0)$.

27–29 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

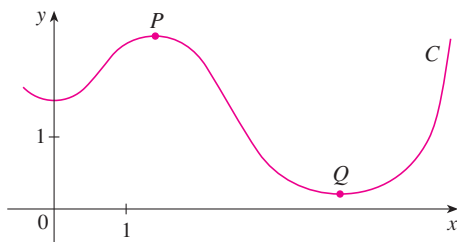
- $y = x^4$
- $y = \tan x$
- $y = xe^x$

30–31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \rightarrow \infty$?

- $y = \ln x$
- $y = e^x$

32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

33. (a) A curvatura da curva C mostrada na figura é maior em P ou em Q ? Explique.
 (b) Estime a curvatura em P e Q desenhando o círculo osculador nesses pontos.



34–35 Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar na mesma tela a curva e sua função curvatura $\kappa(x)$. Esse é o gráfico que você esperava?

34. $y = x^4 - 2x^2$

35. $y = x^{-2}$

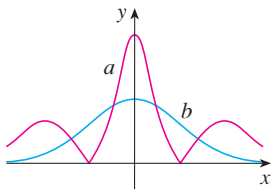
36–37 Trace a curva espacial e sua função curvatura $\kappa(t)$. Comente como a curvatura reflete a forma da curva.

36. $\mathbf{r}(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \cos(t/2) \rangle, \quad 0 \leq t \leq 8\pi$

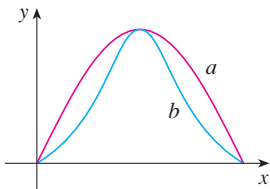
37. $\mathbf{r}(t) = \langle te^t, e^{-t}, \sqrt{2}t \rangle, \quad -5 \leq t \leq 5$

38–39 Dois gráficos, a e b , são mostrados. Um é a curva $y = f(x)$ e o outro é o gráfico da sua função curvatura $y = \kappa(x)$. Identifique cada uma e justifique suas escolhas.

38.



39.



40. (a) Desenhe a curva $\mathbf{r}(t) = \langle \sin 3t, \sin 2t, \sin t \rangle$. Em quantos pontos da curva tem-se a impressão de que a curvatura possui um máximo local ou absoluto?

(b) Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Esse gráfico confirma sua conclusão na parte (a)?

41. O gráfico de $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \rangle$ é mostrado na Figura 12(b) da Seção 13.1. Onde você acha que a curvatura é maior? Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Para quais valores de t a curvatura é maior?

42. Use o Teorema 10 para mostrar que a curvatura da curva plana parametrizada $x = f(t), y = g(t)$ é

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t .

43–45 Use a fórmula do Exercício 42 para calcular a curvatura.

43. $x = t^2, \quad y = t^3$

44. $x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t$

45. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t$

46. Considere a curvatura em $x = 0$ para cada membro da família de funções $f(x) = e^{cx}$. Para quais membros $\kappa(0)$ é maior?

47–48 Encontre os vetores \mathbf{T} , \mathbf{N} e \mathbf{B} no ponto indicado.

47. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \rangle, \quad (1, \frac{2}{3}, 1)$

48. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln \cos t \rangle, \quad (1, 0, 0)$

49–50 Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

49. $x = 2 \sin 3t, \quad y = t, \quad z = 2 \cos 3t; \quad (0, \pi, -2)$

50. $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

51. Encontre as equações para o círculo osculador da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ nos pontos $(2, 0)$ e $(0, 3)$. Utilize uma calculadora gráfica ou computador para traçar a elipse e ambos os círculos osculadores na mesma tela.

52. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ nos pontos $(0, 0)$ e $(1, \frac{1}{2})$. Trace os dois círculos osculadores e a parábola na mesma tela.

53. Em qual ponto da curva $x = t^3, y = 3t, z = t^4$ o plano normal é paralelo ao plano $6x + 6y - 8z = 1$?

54. Existe um ponto da curva do Exercício 53 onde o plano osculador é paralelo ao plano $x + y + z = 1$?

[Observação: Você precisará de um SCA para derivar, simplificar e calcular um produto vetorial.]

55. Determine as equações dos planos normais e osculador da curva de interseção dos cilindros parabólicos $x = y^2$ e $z = x^2$ no ponto $(1, 1, 1)$.

56. Mostre que o plano osculador em cada ponto da curva $\mathbf{r}(t) = \langle t + 2, 1 - t, \frac{1}{2}t^2 \rangle$ é o mesmo plano. O que você pode concluir sobre a curva?

57. Mostre que a curvatura κ está relacionada com os vetores tangente e normal pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

58. Mostre que a curvatura de uma curva plana é $\kappa = |d\phi/ds|$, onde ϕ é o ângulo entre \mathbf{T} e \mathbf{i} , isto é, ϕ é o ângulo de inclinação da reta tangente. (Isso mostra que a definição de curvatura é consistente com a definição dada para curvas planas no Exercício 69 da Seção 10.2.)

59. (a) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a \mathbf{B} .
 (b) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a \mathbf{T} .
 (c) Deduza das partes (a) e (b) que $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$ para algum número $\tau(s)$ chamado **torção** da curva. (A torção mede quanto a curva é retorcida.)
 (d) Mostre que para uma curva plana a torção é $\tau(s) = 0$.

60. As fórmulas seguintes, chamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, são de fundamental importância em geometria diferencial:

1. $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$

2. $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$

3. $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$

(A Fórmula 1 é fornecida a partir do Exercício 57 e da Fórmula 3 vem de Exercício 59.) Use o fato de que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ para deduzir Fórmula 2 a partir das Fórmulas 1 e 3.

61. Utilize as fórmulas de Frenet-Serret para demonstrar cada um dos seguintes itens. (Apóstrofo denota derivadas com relação a t . Comece como na demonstração do Teorema 10.)

(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$

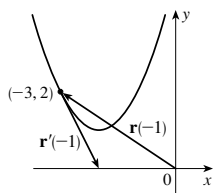
(b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$

(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$

(d) $\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

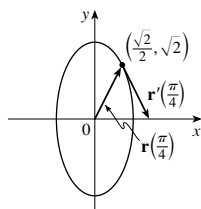
$$(c) \mathbf{r}'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(4+h) - \mathbf{r}(4)}{h}; \mathbf{T}(4) = \frac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$$

3. (a), (c)



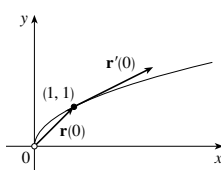
$$(b) \mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t \rangle$$

5. (a), (c)



$$(b) \mathbf{r}'(t) = \cos t \mathbf{i} - 2 \sin t \mathbf{j}$$

7. (a), (c)



$$(b) \mathbf{r}'(t) = 2e^{2t} \mathbf{i} + e^t \mathbf{j}$$

$$9. \mathbf{r}'(t) = \langle t \cos t + \sin t, 2t, \cos 2t - 2t \sin 2t \rangle$$

$$11. \mathbf{r}'(t) = 4e^{4t} \mathbf{k}$$

$$13. \mathbf{r}'(t) = 2te^{t^2} \mathbf{i} + [3/(1+3t)] \mathbf{k} \quad 15. \mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$$

$$17. \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \rangle \quad 19. \frac{3}{5} \mathbf{j} + \frac{4}{5} \mathbf{k}$$

$$21. \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle, \langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14} \rangle, \langle 0, 2, 6t \rangle, \langle 6t^2, -6t, 2 \rangle$$

$$23. x = 3 + t, y = 2t, z = 2 + 4t$$

$$25. x = 1 - t, y = t, z = 1 - t$$

$$27. \mathbf{r}(t) = (3 - 4t) \mathbf{i} + (4 + 3t) \mathbf{j} + (2 - 6t) \mathbf{k}$$

$$29. x = t, y = 1 - t, z = 2t$$

$$31. x = -\pi - t, y = \pi + t, z = -\pi t$$

$$33. 66^\circ \quad 35. 2 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} + 32 \mathbf{k} \quad 37. \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$39. e^t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + (t \ln t - t) \mathbf{k} + \mathbf{C}$$

$$41. t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} + (\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3}) \mathbf{k}$$

$$47. 2t \cos t + 2 \sin t - 2 \cos t \sin t \quad 49. 35$$

EXERCÍCIOS 13.3

$$1. 10\sqrt{10} \quad 3. e - e^{-1} \quad 5. \frac{1}{27}(13^{3/2} - 8) \quad 7. 15,3841$$

$$9. 1,2780 \quad 11. 42$$

$$13. \mathbf{r}(t(s)) = \frac{2}{\sqrt{29}} s \mathbf{i} + \left(1 - \frac{3}{\sqrt{29}} s\right) \mathbf{j} + \left(5 + \frac{4}{\sqrt{29}} s\right) \mathbf{k}$$

$$15. (3 \sin 1, 4, 3 \cos 1)$$

$$17. (a) \langle 1/\sqrt{10}, (-3/\sqrt{10}) \sin t, (3/\sqrt{10}) \cos t \rangle, \langle 0, -\cos t, -\sin t \rangle \quad (b) \frac{3}{10}$$

$$19. (a) \frac{1}{e^{2t} + 1} \langle \sqrt{2}e^t, e^{2t}, -1 \rangle, \frac{1}{e^{2t} + 1} \langle 1 - e^{2t}, \sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^t \rangle$$

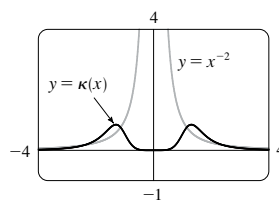
$$(b) \sqrt{2}e^{2t}/(e^{2t} + 1)^2$$

$$21. 6t^2/(9t^4 + 4t^2)^{3/2} \quad 23. \frac{4}{25} \quad 25. \frac{1}{7} \sqrt{\frac{19}{14}}$$

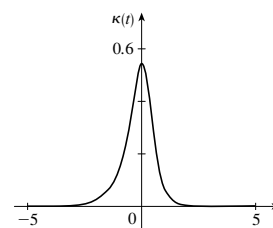
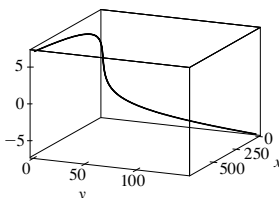
$$27. 12x^2/(1 + 16x^6)^{3/2} \quad 29. e^x | x + 2 | / [1 + (xe^x + e^x)^2]^{3/2}$$

$$31. (-\frac{1}{2} \ln 2, 1/\sqrt{2}); \text{tende a } 0 \quad 33. (a) P \quad (b) 1,3,0,7$$

35.

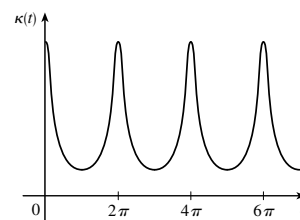


37.



$$39. a \text{ é } y = f(x), b \text{ é } y = \kappa(x)$$

$$41. \kappa(t) = \frac{6\sqrt{4 \cos^2 t - 12 \cos t + 13}}{(17 - 12 \cos t)^{3/2}}$$

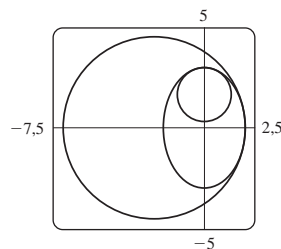

 inteiros múltiplos de 2π

$$43. 6t^2/(4t^2 + 9t^4)^{3/2}$$

$$45. 1/(\sqrt{2}e^t) \quad 47. \langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle, \langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \rangle, \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$$

$$49. y = 6x + \pi, x + 6y = 6\pi$$

$$51. (x + \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{81}{4}, x^2 + (y - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$$



$$53. (-1, -3, 1)$$

$$55. 2x + y + 4z = 7, 6x - 8y - z = -3$$

$$63. 2/(t^4 + 4t^2 + 1) \quad 65. 2,07 \times 10^{10} \text{ \AA} \approx 2 \text{ m}$$

EXERCÍCIOS 13.4

$$1. (a) 1,8\mathbf{i} - 3,8\mathbf{j} - 0,7\mathbf{k}, 2,0\mathbf{i} - 2,4\mathbf{j} - 0,6\mathbf{k}, 2,8\mathbf{i} + 1,8\mathbf{j} - 0,3\mathbf{k}, 2,8\mathbf{i} + 0,8\mathbf{j} - 0,4\mathbf{k} \quad (b) 2,4\mathbf{i} - 0,8\mathbf{j} - 0,5\mathbf{k}, 2,58$$

$$3. \mathbf{v}(t) = \langle -t, 1 \rangle \quad \mathbf{a}(t) = \langle -1, 0 \rangle \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{t^2 + 1}$$

