Probabilidade e Estatística

Probabilidades

Prof. Fermín Alfredo Tang Montané

Experimento Aleatório

- Um experimento é dito aleatório quando satisfaz as seguintes condições:
  - Pode ser repetido indefinidamente;
  - É possível descrever todos os resultados do experimento, sem predizer com certeza qual ocorrerá;
  - Obedece à regularidade estatística, ou seja, quando o experimento for repetido um grande número de vezes, surgirá uma configuração definida.

Experimento Aleatório

- **Exemplos:**
  - Lançar um dado e observar a face superior;
  - Lançar duas moedas e verificar as faces que o correm;
  - Verificar o tempo de vida de uma lâmpada.

Espaço Amostral

- **Espaço Amostral**
- Denotado por Ω, é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

- **Exemplo:**
- Considere o experimento aleatório sendo o lançamento de duas moedas não viciadas.
  - E = "Duas moedas não viciadas são lançadas"
  - Onde cara=k e coroa=c
  - $\Omega = \{ (k,k), (k,c), (c,k), (c,c) \}$

Tipos de Espaço Amostral

- 1)**Finito**: tem um número finito de elementos.
  - Exemplo: Lançamento de um dado.
  - $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- 2)**Infinito enumerável ou contável**: tem um número infinito de elementos enumeráveis.
  - Exemplo: Uma moeda é lançada sucessivas vezes até que ocorra uma coroa (c).
  - $\Omega = \{ c, kc, kkc, kkkc, kkkkc, \ldots \}$
- 3)**Infinito não enumerável ou não contável**: tem um número infinito de elementos não enumeráveis.
  - Exemplo: Observar o tempo de vida de uma lâmpada.
  - $\Omega = \{ x / x \in R, x \geq 0 \}$

Evento

- Define-se como evento a qualquer subconjunto de um espaço amostral Ω.
  - Considere como evento impossível, aquele que não pertence a Ω.
  - Como evento que sempre ocorre ao próprio espaço amostral Ω.

$$A \not\subset \Omega$$

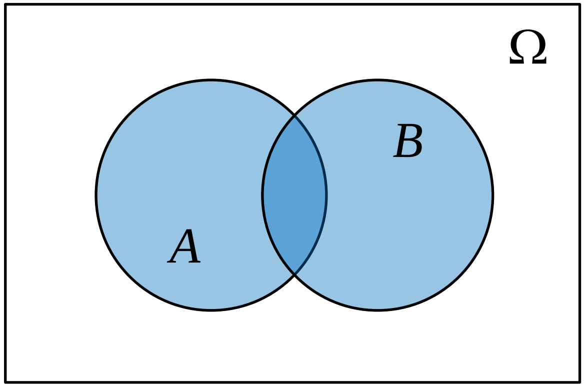
$$\Omega \subseteq \Omega$$

- **Exemplo:**
- No lançamento de um dado não viciado, considere que o evento A ocorre se obtida uma face com número par.
  - E = "um dado não viciado é lançado"
  - A ="uma face par é obtida"
  - Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - A = { 2, 4, 6 } $A \subset \Omega$

Operações com Eventos

- Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω.

- **A) União:** O evento A∪B ocorre quando:
  - ocorre somente o evento A;
  - ou ocorre somente o evento B;
  - ou ocorrem ambos os eventos A e B.

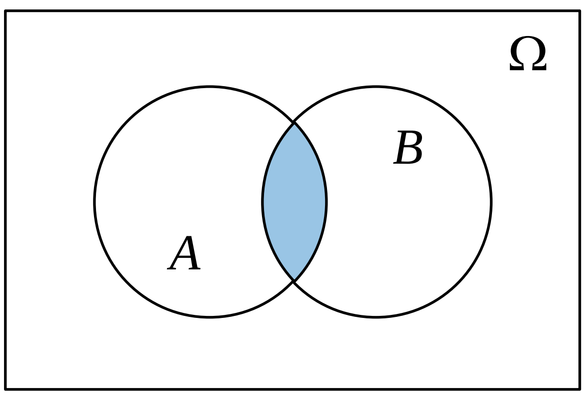


Experimento Aleatório

Operações com Eventos

- Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω.

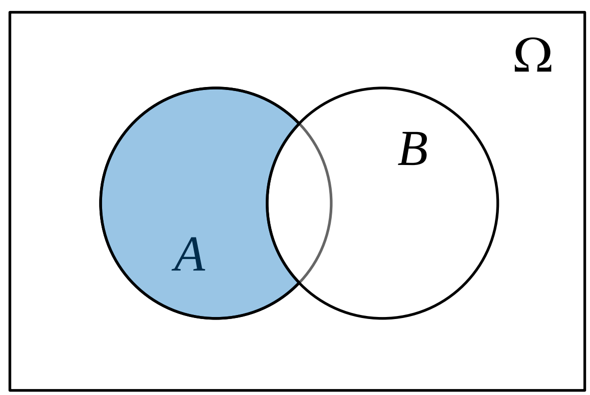
- **B) Interseção:** O evento $A \cap B$ ocorre quando ambos os eventos A e B ocorrem.



Operações com Eventos

- Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω.

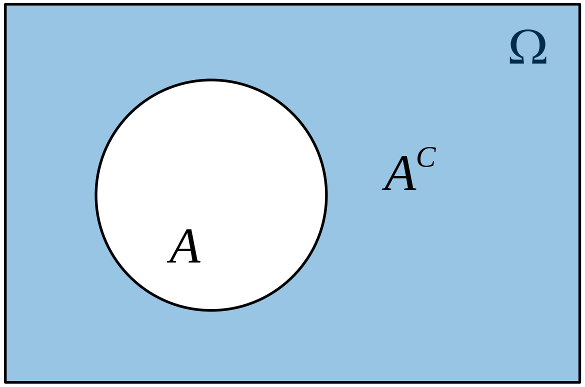
- **C) Diferença:** O evento A-B ocorre quando ocorre o evento A mas não ocorre o evento B.



Operações com Eventos

- Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω.

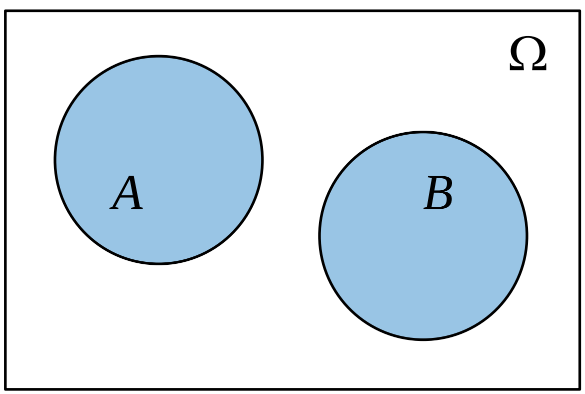
- **D) Complemento:** O evento A^C ocorre quando o evento A não ocorre.



Operações com Eventos

- Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω.

- **E) Mutuamente Excludentes:** Dois eventos A e B são ditos mutuamente excludentes (exclusivos ou disjuntivos) quando não podem ocorrer simultaneamente. Se a interseção deles for o conjunto vazio.



Operações com Eventos

- **Exemplo 1:**
- Sendo os eventos $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 5, 6, 7, 9\}$ e $\Omega = \mathbb{N}$, determinar:
  - a) $A \cup B$
  - b) $A \cap B$
  - c) $A - B$
  - d) $B - A$
  - e) $A^c \cap B$

Operações com Eventos

- **Exemplo 2:**
- Numa pesquisa, das pessoas entrevistadas, 120 assistem a emissora A, 150 assistem a emissora B, 40 assistem as duas emissoras e 120 não assistem nenhuma das emissoras. Quantas pessoas foram entrevistadas?
- Resposta: 350 pessoas

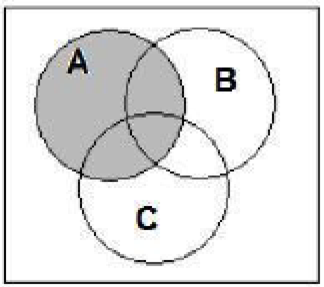
Operações com Eventos

- **Exemplo 3:**
- Sejam A, B e C eventos de um espaço amostral Ω. Descrever os eventos abaixo utilizando as operações de união, intersecção e complementar.
- a) Somente o evento B ocorre.
  - Resposta: $A^c \cap B \cap C^c$
- b)Pelo menos um evento ocorre.
  - Resposta: $A \cup B \cup C$
- c)Os três eventos ocorrem.
  - Resposta: $A \cap B \cap C$
- d)Exatamente dois eventos ocorrem.
  - Resposta: $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$

Operações com Eventos

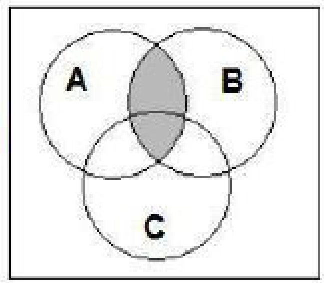
- **Exemplo 4:**
- Descrever os eventos hachurados nos diagramas abaixo utilizando as operações de união, intersecção e complementar.

a)



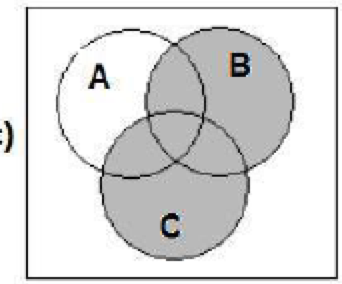
Ocorre o evento A

b)



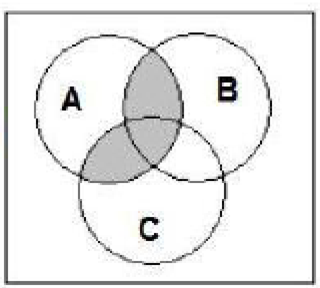
Ocorre o evento $A \cap B$

c)



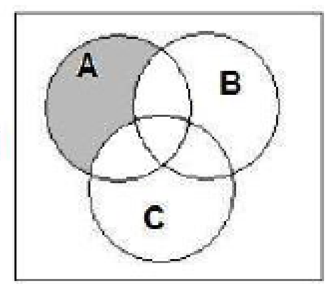
Ocorre o evento $B \cup C$

d)



Ocorre o evento $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

e)



Ocorre o evento $(A \cap B^c \cap C^c)$

Propriedades das Operações com Eventos

- a) Idempotente: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
- b) Comutativa: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
- c) Associativa:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- d) Distributiva:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- e) Identidade:

$$A \cup \varnothing = A, \;\; A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup \Omega = \Omega, \;\; A \cap \Omega = A$$

- f) Complementar: $A \cup A^C = \Omega, \;\; A \cap A^C = \varnothing$

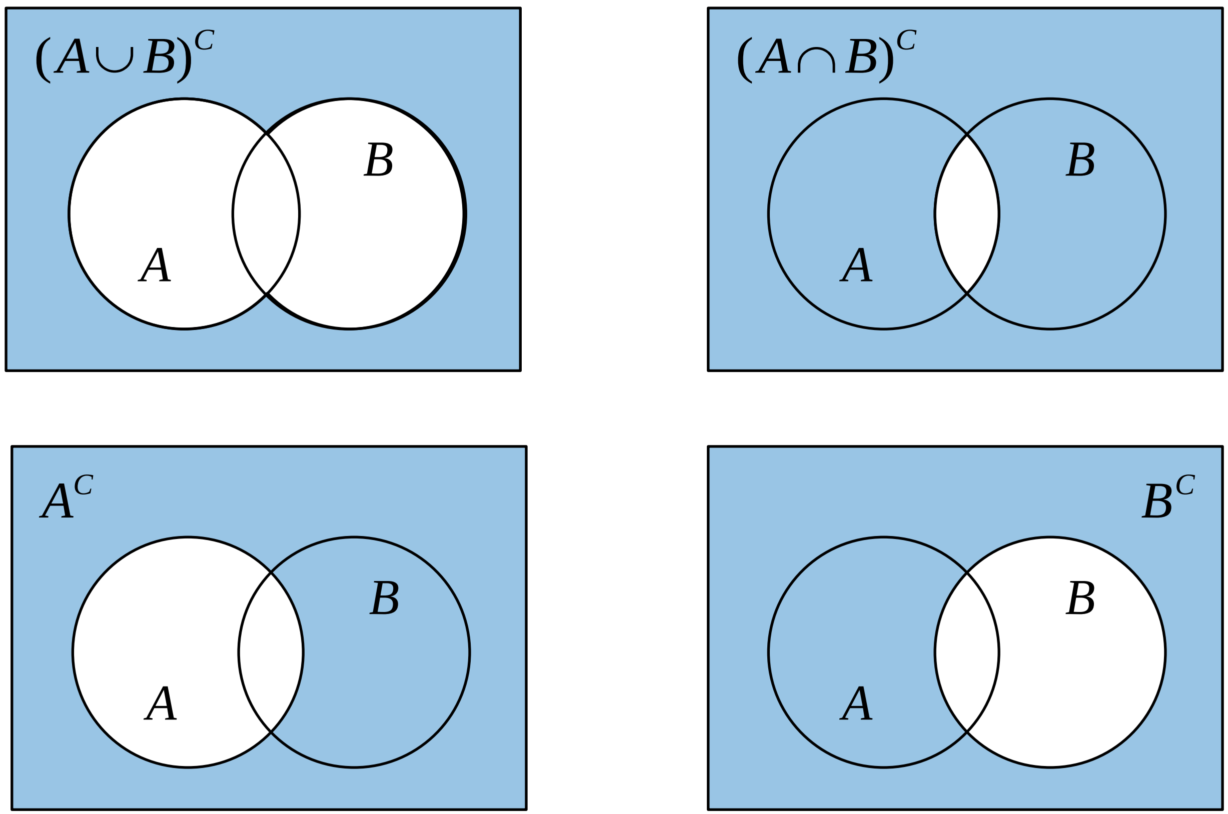
$$\left(A^C\right)^C = A, \;\; \Omega^C = \varnothing, \;\; \varnothing^C = \Omega$$

Propriedades das Operações com Eventos

- g) Lei de Morgan:

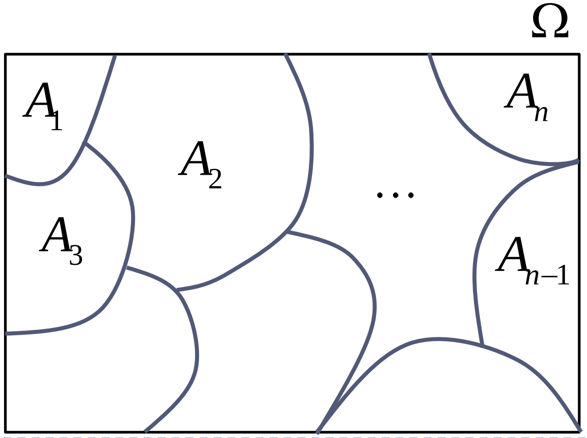
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$



Partição de um Espaço Amostral

- Os eventos A_1, A_2, ..., A_n formam uma **partição do espaço amostral** Ω se:
  - i) $A_i \neq \varnothing,\ i = 1, 2, ..., n$
  - ii) $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \text{para } i \neq j$ (A_i e A_j são eventos mutuamente excludentes)
  - iii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
- Uma partição de um espaço amostral Ω é uma coleção de subconjuntos não-vazio e mutuamente excludentes de Ω, cujas uniões são iguais a Ω.



Definição de Probabilidade

- **Definição Clássica: (Laplace 1749-1827)**
- Seja um espaço amostral finito Ω, formado por eventos equiprováveis. Sendo A um evento de Ω, então a probabilidade de ocorrência de A é dada por:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}, \quad \text{com } 0 \leq P(A) \leq 1}$$

- onde:
- n(A) é o número de elementos do evento A;
- n(Ω) é o número de elementos de espaço amostral Ω.

Definição de Probabilidade

- **Definição de Frequência: (von Mises 1883-1953)**
- Se em N realizações de um experimento aleatório, o evento A ocorre n_A vezes, então a frequência relativa de A nas N realizações é:

$$\boxed{f_r = \frac{n_A}{N}, \quad \text{com } 0 \le f_r \le 1}$$

- A probabilidade de ocorrência do evento A é:

$$\boxed{P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N}, \quad \text{com } 0 \le P(A) \le 1}$$

Definição de Probabilidade

- **Exemplo:**
- Qual a probabilidade de sair ao menos uma cara em dois lançamentos consecutivos de uma moeda não viciada?

- **Resposta:**
- Considere os resultados possíveis: cara = k e coroa = c
- Defina o experimento: E = "lançar uma moeda duas vezes"
- Calcule o espaço amostral: Ω = {(k,k), (k,c), (c,k), (c,c)}
- Defina o evento: A = "sair ao menos uma cara"
- A = {(k,k), (k,c), (c,k)}
- Calcule a probabilidade P(A):

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4} = 0,75}$$

Axiomas da Probabilidade

- Considere que os eventos A e B estão associados ao espaço amostral Ω, verifica-se que:
  - 1) $0 \leq P(A) \leq 1$
  - 2) $P(\Omega) = 1$
  - 3) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, então:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Teoremas da Probabilidade

- 1) Se $\varnothing$ é um conjunto vazio, então: $P(\varnothing) = 0$
- 2) Se A^c é o evento complementar do evento A, então:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Teoremas da Probabilidade

- **Exemplo:**
- A probabilidade de ocorrer face 2 e 3 (simultaneamente) no lançamento de um dado não viciado é $P(\varnothing)=0$,
- Enquanto que a probabilidade de ocorrer face 2 ou 3 é $1/6+1/6=1/3$.

Teoremas da Probabilidade

- **Exemplo:**
- Uma urna contém 4 bolas verdes, 3 bolas brancas e 8 bolas amarelas. Uma bola é retirada aleatoriamente. Determinar a probabilidade de que a bola retirada:
- a) Não seja amarela; b) Não seja verde e nem amarela.

- **Solução:**
- Defina os eventos possíveis e a probabilidade correspondente:
  - V = "a bola retirada é verde" $P(V) = 4/15 = 26{,}67\%$
  - B = "a bola retirada é branca" $P(B) = 3/15 = 20{,}00\%$
  - A = "a bola retirada é amarela" $P(A) = 8/15 = 53{,}33\%$

- a) Pede-se a probabilidade do $P(A^c)$, onde:
  - A^c = "a bola retirada não é amarela"
  - $P(A^c) = 1 – P(A) = 1 – 8/15 = 7/15 = 46{,}67\% = P(V \cup B)$

Teoremas da Probabilidade

- **Exemplo:**
- Uma urna contém 4 bolas verdes, 3 bolas brancas e 8 bolas amarelas. Uma bola é retirada aleatoriamente. Determinar a probabilidade de que a bola retirada:
- a) Não seja amarela; b) Não seja verde e nem amarela.

- **Solução:**
- b)Pede-se $P(V^c \cap A^c)$, onde:
  - $V^c \cap A^c$ = "a bola retirada não é verde e nem amarela"
- Pela lei de Morgan, sabe-se que: $V^C \cap A^C = (V \cup A)^C$
- Pelo complemento: $P\left[(V \cup A)^C\right] = 1 - P(V \cup A)$
- Como V e A são mutuamente excludentes:

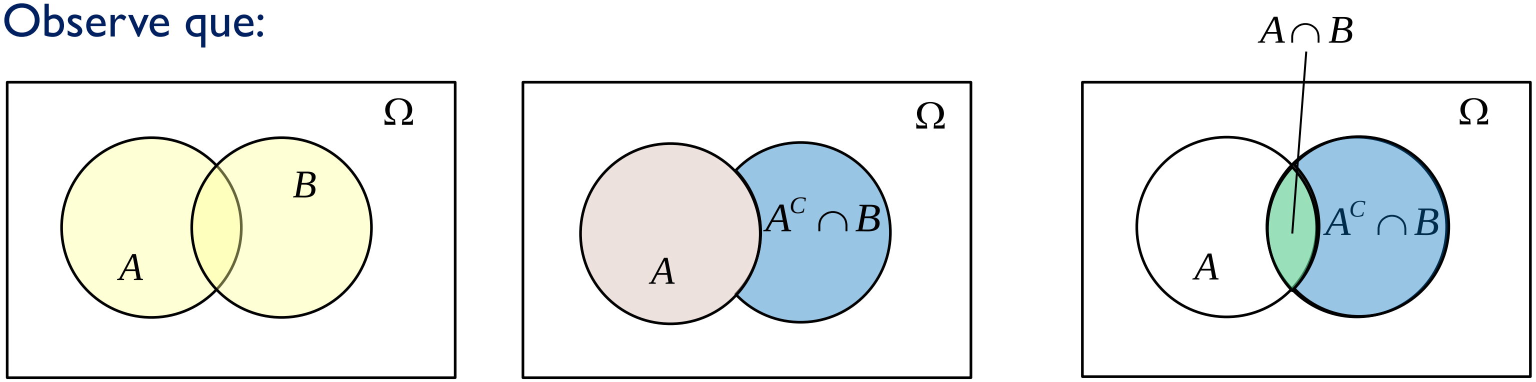
$$P\left[(V \cup A)^C\right] = 1 - \left(P(V) + P(A)\right) = 1 - \tfrac{4}{15} - \tfrac{8}{15} = \tfrac{3}{15} = P(B)$$

Teoremas da Probabilidade

- **3) Teorema da Soma:**
- Se A e B são dois eventos quaisquer, ou seja, podem ser mutuamente excludentes ou não, então:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- **Prova:**
- Observe que:



Teoremas da Probabilidade

- **Prova:**

Neste caso: $A \cap B \neq \varnothing$

($A \cup B$) é escrito em termos de dois conjuntos mutuamente exclusivos:

$$A \cup B = A \cup (A^C \cap B)$$

Com isso: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)}$

Considerando B como a união de dois conjuntos disjuntos:

$$B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$$

A probabilidade correspondente: $P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$

Re-escrevendo: $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Substituindo: $P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Teoremas da Probabilidade

- **Exemplo:**
- Dois dados são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de ocorrer pelo menos uma face com valor cinco.

Solução: A = "ocorrer 5 no dado 1"
B = "ocorrer 5 no dado 2"
A U B = "ocorrer pelo menos um cinco"

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	**(1,5)**	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	**(2,5)**	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	**(3,5)**	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	**(4,5)**	(4,6)
5	**(5,1)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(5,4)**	**(5,5)**	**(5,6)**
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	**(6,5)**	(6,6)

$n(\Omega) = 36$
$n(A) = 6$
$n(B) = 6$
$n(A \cap B) = 1$

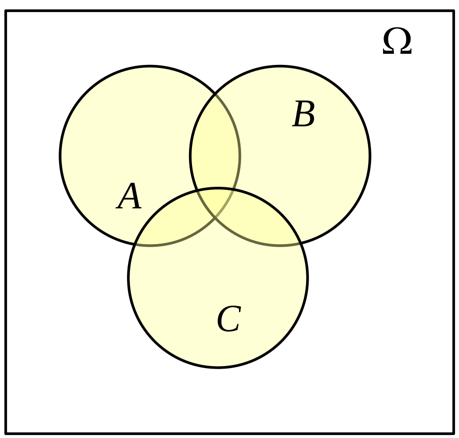
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 6/36 + 6/36 - 1/36 = 11/36 = 30{,}56\%$

Teoremas da Probabilidade

- **4) Teorema da Soma:**
- Se A, B e C são dois eventos quaisquer, ou seja, podem ser mutuamente excludentes ou não, então:

$$\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$$

- **Prova:**
- Observe que:



Teoremas da Probabilidade

- **5) Teorema da Diferença:**
- Se (A - B) é a diferença entre dois eventos quaisquer A e B então:

$$\boxed{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}$$

- **Prova:**
- O evento A é escrito como a união de dois eventos disjuntos:

$$A=\left(A-B\right)\cup\left(A\cap B\right)$$

A probabilidade correspondente:

$$P(A)=P\left(A-B\right)+P\left(A\cap B\right)$$

Re-escrevendo:

$$\boxed{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}$$