Cálculo III – Prova Final – 13/12/2023
Prof. Rafael B. de R. Borges

Nome: ____

Matrícula: ____________________ **Curso:** ____________________

Atenção! É proibido:

- Portar **folha própria de rascunho, celular, calculadora** e qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova. Guarde-os na mochila, que deve ser guardada na frente da sala.
- **Desgrampear o caderno de provas.**

O descumprimento das duas regras acima pode causar a anulação da sua prova. Portanto, tenha cautela.

Instruções gerais para a prova:

- Só escreva nesta capa o que foi pedido no cabeçalho acima.
- Você pode resolver as questões na ordem que quiser.
- De preferência, resolva as questões a lápis e escreva a caneta apenas a resposta final. Questões feitas apenas a lápis não poderão ser revisadas depois.
- Faça uma prova organizada. Há folhas de sobra para você fazer as questões. E, caso falte, é só pedir que eu grampeio mais.
- Parênteses são muito importantes. Use-os. Exemplos:
  - "x vezes -6" é $x \cdot (-6)$, não $x \cdot -6$, ou, pior, $x - 6$.
  - $x - \dfrac{1}{y+2}$ é $\dfrac{x \cdot (y+2) - 1}{y+2}$, não $\dfrac{x \cdot y + 2 - 1}{y+2}$.
- Manipulações algébricas inválidas serão (muito) descontadas. As crianças do nosso Brasil dependem de que você saiba Matemática!
- Lembre-se: é melhor não simplificar, do que tentar — e se complicar!
- Mas você tem que saber o valor de expressões básicas como $\operatorname{sen} 0$, $\cos \pi$, $\ln 1$, e^0 etc.
- **Não serão aceitas respostas sem desenvolvimento.** Mostre que você sabe o que está fazendo.

Boa prova!

1. Seja $f(x,y) = y^3$ e C a curva parametrizada por

$$(x,y) = (t^3, t), \quad 0 \le t \le 2.$$

Calcule a integral de linha de $f(x,y)$ em C.

Solução:

Temos

$$\vec{r}(t) = (t^3, t), \quad \vec{r'}(t) = (3t^2,\, 1), \quad \|\vec{r'}(t)\| = \sqrt{9t^4+1}.$$

Assim,

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_0^2 [y(t)]^3 \|\vec{r'}(t)\|\,dt = \int_0^2 t^3\sqrt{9t^4+1}\,dt$$
$$\underset{u\,=\,9t^4+1}{=} \int_1^{145} \sqrt{u}\,\frac{du}{36} = \frac{1}{36}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^{145} = \frac{1}{54}\left(145^{3/2}-1\right).$$

2. Calcule

$$\iint_D 2xy\,dA,$$

onde D é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ e $(0,3)$.

Solução:

$$\iint_D 2xy\,dA = \int_0^1 \int_{2x}^{3-x} 2xy\,dy\,dx = \int_0^1 xy^2\Big|_{2x}^{3-x}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{3}\big[(3-x)^3 - (2x)^3\big]\,dx = \int_0^1 \frac{x}{3}\big[27 - 27x + 9x^2 - x^3 - 8x^3\big]\,dx$$
$$= \int_0^1 9x - 9x^2 + 3x^3 - 3x^4\,dx = \left[\frac{9}{2}x^2 - 3x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{33}{20}.$$

3. Seja $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, z)$ e S a superfície parametrizada por

$$\vec{r}(u,v) = (u\cos v,\ u\,\mathrm{sen}\, v,\ v), \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le \pi.$$

Calcule a integral de superfície de $\vec{F}$ em S.

Solução:
Temos

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_u = (\cos v,\ \mathrm{sen}\, v,\ 0), \quad \vec{r}_v = (-u\,\mathrm{sen}\, v,\ u\cos v,\ 1),\\
&\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\mathrm{sen}\, v,\ -\cos v,\ u).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^1 (y,-x,z)\cdot(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv\\
&\quad = \int_0^\pi \int_0^1 (u\,\mathrm{sen}\, v, -u\cos v, v)\cdot(\mathrm{sen}\, v,\ -\cos v,\ u)\, du\, dv\\
&\quad = \int_0^\pi \int_0^1 u\,\mathrm{sen}^2\, v + u\cos^2 v + uv\, du\, dv\\
&\quad = \int_0^\pi \int_0^1 u + uv\, du\, dv = \int_0^\pi \frac{1+v}{2}\, dv = \frac{\pi^2 + 2\pi}{4}.
\end{aligned}$$

4. Seja $\vec{F}(x,y) = (x-y,\ x+y)$ e C o círculo de raio 2 centrado na origem.
Calcule $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$:

a) Diretamente.

Solução:
O círculo pode ser parametrizado por

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(\theta) = (2\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\\
&\vec{r}'(\theta) = (-2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 2\cos\theta).
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
&\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (x-y,\ x+y)\cdot \vec{r}'(\theta)\, d\theta\\
&\quad = \int_0^{2\pi} 4\,(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta,\ \cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\cdot(-\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \cos\theta)\, d\theta\\
&\quad = \int_0^{2\pi} 4(\cancel{-\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta} + \mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta + \cancel{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta})\, d\theta\\
&\quad = \int_0^{2\pi} 4\cdot 1\, d\theta = 8\pi.
\end{aligned}$$

b) Usando o Teorema de Green.

Solução:
Seja S o círculo cheio de raio 2 centrado na origem. Temos

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S \frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y)\,dS\\ &= \iint_S 1-(-1)\,dS = 2\left(\iint_S dS\right) = 2\cdot\left(\text{Área do círculo de raio 2}\right)\\ &= 2\cdot\pi\cdot 2^2 = 8\pi.\end{aligned}$$

5. Seja $\vec{F}(x,y,z) = (xye^z,\, xy^2z^3,\, -ye^z)$ e S a superfície do paralelepípedo delimitado pelos planos coordenados e pelos planos $x=3$, $y=2$ e $z=1$. Use o Teorema de Ostrogradski–Gauss para calcular $\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

Solução:

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \int_0^1\int_0^2\int_0^3 \frac{\partial}{\partial x}(xye^z) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(-ye^z)\,dx\,dy\,dz\\ &= \int_0^1\int_0^2\int_0^3 \cancel{ye^z} + 2xyz^3 - \cancel{ye^z}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^2 x^2yz^3\Big|_0^3\,dy\,dz\\ &= \int_0^1\int_0^2 9yz^3\,dy\,dz = \int_0^1 \frac{9}{2}y^2z^3\Big|_0^2\,dz = \int_0^1 18z^3\,dz = 18\frac{z^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$