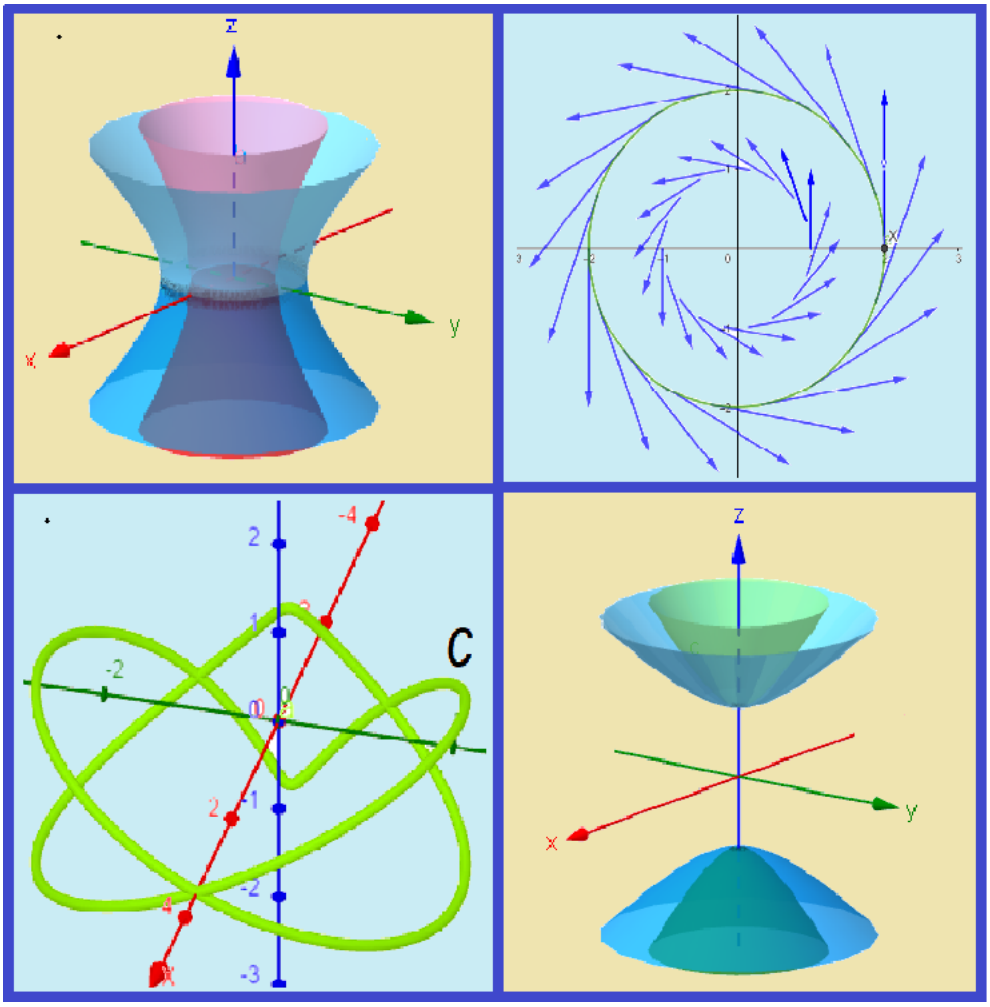
UENF

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

CCT-LCMAT

Laboratório de Ciências Matemáticas

Cálculo Diferencial e Integral II



Liliana A. L. Mescua †

Rigoberto G. S. Castro

Agosto de 2023

Liliana A. L. Mescua
*27/03/1970 +06/02/2019

Embora o tempo não perdoe,
a memória é o nosso livro,
e não há ausência para apagar,
o que nós já escrevemos juntos.
Tu me darás algo de magia,
algo do Céu, algo da alma,
e nada de esquecer,
porque eu sempre
te levarei comigo.
A saudade te trará de volta,
lembraremos do teu sorriso,
do teu dom de ensinar,
da tua empatia para com o próximo...
será inevitável sentir algo na alma,
saberemos que aqui tu estarás.

‘‘Dai-lhe Senhor,
em felicidade
no Céu
o que ela nos deu
em ternura
na Terra’’

Sumário

Capítulo 1

Espaço Tridimensional

1.1 Sistema de Coordenadas no Espaço Tridimensional

Os pontos do espaço tridimensional (**3-D**) podem ser identificados em uma correspondência um a um com o conjunto de triplas de números reais:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/\ x,\ y,\ z\ \in\ \mathbb{R}\}.$$

Para obter a correspondência entre o espaço tridimensional e as triplas de números reais usamos três retas coordenadas, mutuamente perpendiculares, chamadas de eixo **x**, eixo **y** e eixo **z**, tais que suas origens coincidem. Os três eixos coordenados formam um *sistema de coordenadas retangulares* tridimensional (ou *sistema de coordenadas cartesianas*)(Figura 1.1). O ponto de interseção é chamado de *origem* **O**.

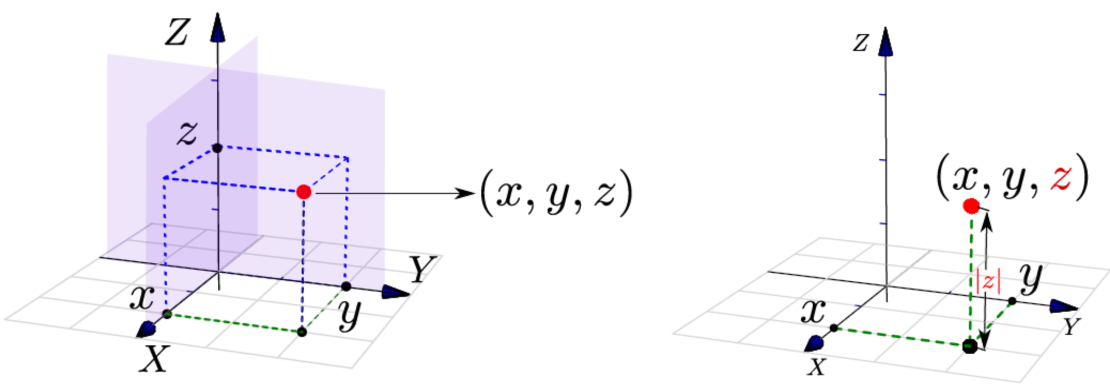


Figura 1.1: Sistema de coordenadas tridimensionais

Os eixos coordenados, tomados em pares, determinan três planos coordenados, o plano **xy**, o plano **xz**, o plano **yz**. Estes planos coordenados dividem o espaço 3-D em oito partes chamadas de **octantes**. O conjunto de pontos com as três coordenadas positivas é chamado **primeiro octante**, os octantes restantes não tem uma enumeração padrão.

Para escolher a direção dos eixos usamos a **regra da mão direita**, para isto, como mostra a Figura 1.2, posicionamos o polegar da mão direita na direção do eixo **z** desejado, e os outros dedos de modo a coincidir com o eixo **x** positivo, de modo que girando-os coincidam com a direção ao eixo **y** positivo.

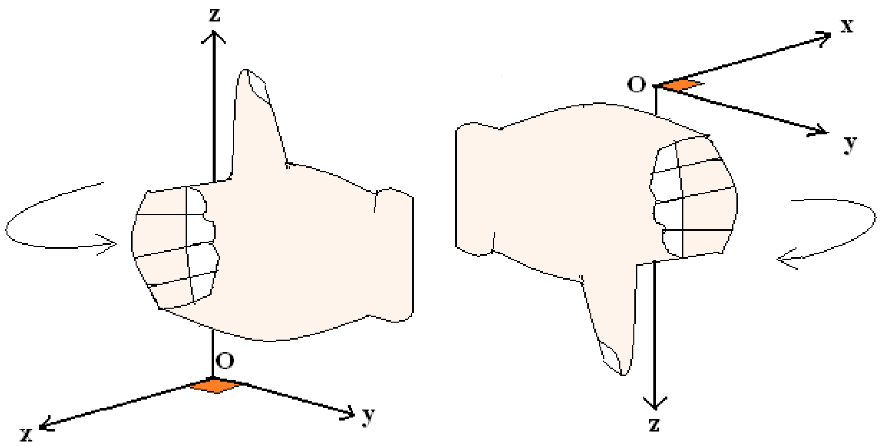


Figura 1.2: Regra da mão direita

Em $\mathbb{R}^3$ definimos a distância entre dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Observação 1.1. *Para cada ponto $P = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ é possível associar um vetor $\vec{v}$ definido como o segmento de reta orientado desde a origem $O = (0, 0, 0)$ até o ponto $P = (x, y, z)$, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Em geral, todos os segmentos orientados $\overrightarrow{QR}$ paralelos ou colineares, de mesmo sentido e mesmo comprimento de $\overrightarrow{OP}$, representam o mesmo vetor $\vec{v}$.*

*Para dois vetores $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ definimos por **Produto Escalar** o número real $\vec{u} \cdot \vec{v}$,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \qquad \text{onde} \quad \vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \tag{1.1}$$

Geometricamente, se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ quer dizer que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares.

1.2 Gráficos em $\mathbb{R}^3$

O conjunto de pontos $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ cujas coordenadas satisfazem uma equação em x, y e z é chamado de gráfico da equação.

A seguir, os gráficos de algumas destas equações.

1.3 Retas

Seja o ponto fixo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ com vetor posição r_0 e $P = (x, y, z)$ um ponto arbitrário na reta $\mathcal{L}$ cujo vetor posição denotaremos por r. A reta $\mathcal{L}$ que passa por P_0 na direção do vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$, satisfaz a equação

$$r = r_0 + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

chamada de Equação Vetorial de $\mathcal{L}$, ou equivalentemente

$$(x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

Note que cada valor do parâmetro t fornece um vetor posição r do ponto P

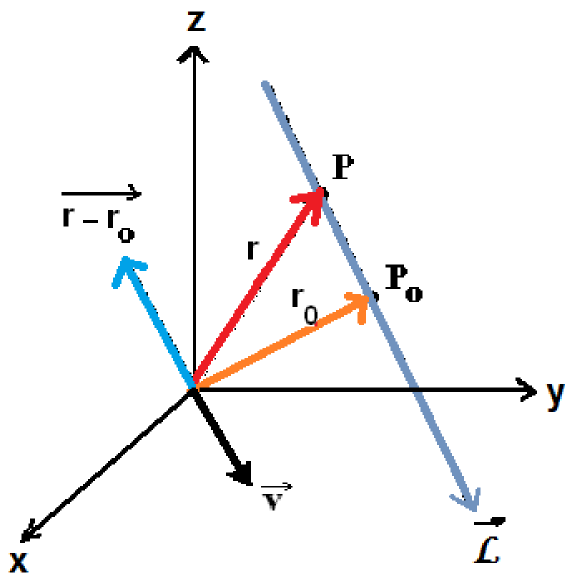


Figura 1.3: Reta em $\mathbb{R}^3$

Dois vetores iguais têm as componentes correspondentes iguais. Assim, da última equação temos três equações escalares:

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc, \qquad t \in \mathbb{R}$$

denominadas de Equações Parâmetricas da Reta $\mathcal{L}$.

1.4 Planos

A equação do plano que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ com vetor normal $\overrightarrow{N} = (a, b, c)$, (vetor ortogonal ao plano) é dada por:

$$\overrightarrow{N} \cdot (\overrightarrow{P - P_0}) = 0$$

ou

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Esta equação pode ser escrita na forma:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde $d = -ax_0 - bx_0 - cz_0$.

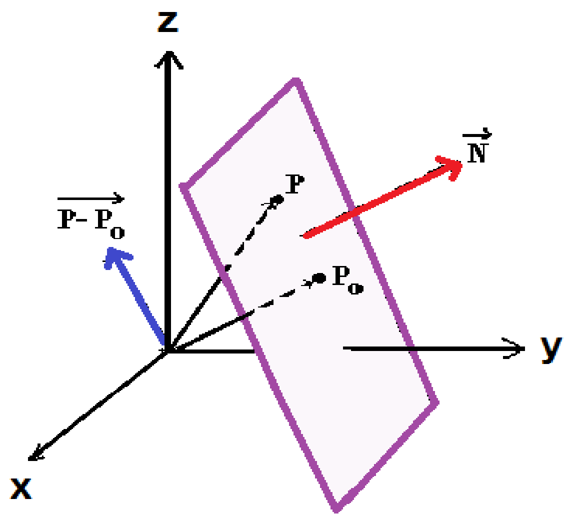


Figura 1.4: Gráfico do plano $ax + by + cz + d = 0$

Exemplo 1.1. *A equação $z = 0$ representa o plano coordenado que contém a origem com vetor normal $\overrightarrow{N} = (0, 0, 1)$ e tal que*

$$(0, 0, 1) \cdot (x, y, z) = 0$$

Este plano é chamado de plano Π_{xy}. Analogamente, $x = 0$ e $y = 0$ definem os planos coordenados Π_{yz} e Π_{xz} respectivamente.

Exemplo 1.2. *Esboce o gráfico da equação $2x + 3y + 4z = 12$*

Solução: Observe que a normal a este plano é $N = (2, 3, 4)$, consequentemente o plano será perpendicular a N. Para esboçar o gráfico faça as intercepções com os planos coordenados e desenhe estas retas. O plano procurado contém estas 3 retas.

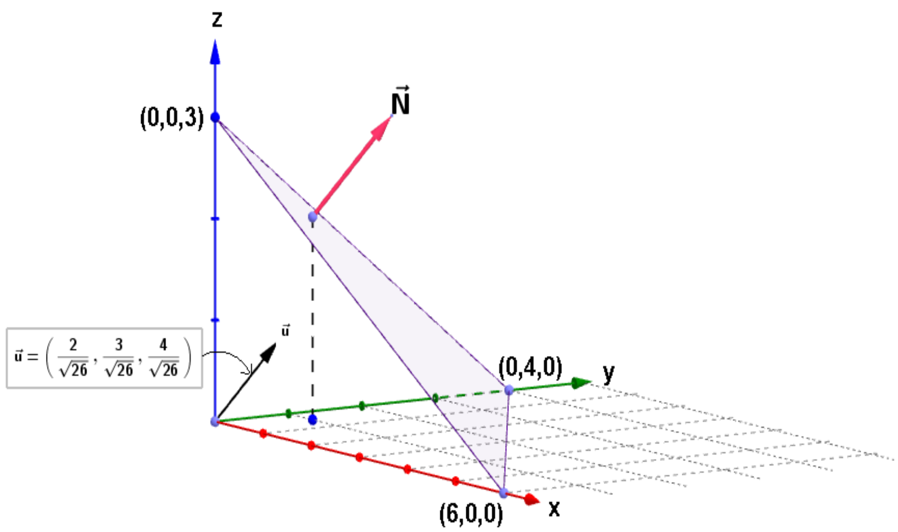


Figura 1.5: Gráfico do plano $2x + 3y + 4z = 12$

Se $z = 0$. Temos a reta $2x + 3y = 12$ no plano coordenado Π_{xy}.

Se $x = 0$. Temos a reta $3y + 4z = 12$ no plano coordenado Π_{yz}.

Se $y = 0$. Temos a reta $2x + 4z = 12$ no plano coordenado Π_{xz}.

Observação 1.2. *Lembre que um vetor perpendicular ao plano que contém os vetores $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é dado pelo **Produto Vetorial** $\vec{u} \times \vec{v}$,*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), \qquad \textit{onde} \quad \vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad \textit{e} \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2).$$

1.5 Exercícios

1. Determine a reta que:

   a) Passa pelo ponto $P_0 = (1, 1, 2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

   b) Passa pelos pontos $P_0 = (1, 1, 2)$ e $P_1 = (1, 2, 0)$.

2. Encontre a equação do plano e esboce seu gráfico que:

   a) Contém o ponto $P_0 = (0, 1, 1)$ e cuja normal é $\overrightarrow{N} = (1, -1, 2)$.

   b) Contém o ponto $P_0 = (1, 1, 1)$ e cuja normal é $\overrightarrow{N} = (0, 1, 0)$.

   c) Contém o pontos $P_0 = (1, -1, -2)$, $P_1 = (-1, 1, 3)$ e $P_2 = (2, 1, 0)$.

3. Esboce os planos:

a) $x + y = 2$	d) $z = 5$	g) $2z - 5y - 10 = 0$	j) $3x - y + z = 3$
b) $x - 3y + 4z = 9$	e) $y = 3$	h) $x + y + z = 1$	k) $x + 3y - 2z - 6 = 0$
c) $x + y - 3z = 1$	f) $z = 4$	i) $4x + 5y + z = 20$	l) $y + 2z = 8$

4. Ache a normal de cada plano do exercício 3.

5. Determine:

a) A equação do plano que passa pelos pontos

$$P = (1,3,2),\ Q = (3,-1,6),\ R = (5,2,0).$$

b) O ponto onde a reta com equação paramétrica $x = 2 + 3t,\ y = -4t,\ z = 5 + t$ intercepta o plano $4x + 5y - 2z = 18$.

c) A reta que passa pelo ponto $(1,0,-3)$ e é paralela ao vetor $(2,-4,5)$.

d) A reta que passa pelo ponto $(1,0,6)$ e é perpendicular ao plano $x+3y+z = 5$.

e) O plano que passa pelo ponto $(-1,2,1)$ e contém a reta que é a interseção dos planos $x + y - z = -2$ e $2x - y + 3z = 5$.

6. Ache a equação da reta no espaço que passa por:

   $a)$ Os pontos $P = (3,2,-1)$ e $Q = (2,2,0)$

   $b)$ O ponto $P = (3,-1,4)$ e paralela ao vetor $v = (4,-2,5)$

7. Ache a distância entre:

   $a)$ O ponto $P = (3,2,-1)$ e o plano $7x - 6y + 6z = 8$

   $b)$ Os planos $x - 2y + 3z = -4$ e $2x - 4y + 6z = 7$

1.6 Superfícies Quádricas

O gráfico em $\mathbb{R}^3$ da equação do segundo grau

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{1.2}$$

nas variáveis x, y e z, é chamado de **superfície quádrica**.

Para desenhar uma superfície quádrica devemos ter presente as seguintes definições:

Definição 1.1. *Uma **Curva Plana** no plano Π_{xy} é descrita pelo conjunto de pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem uma função da forma:*

1. ***Explícita:*** *$y = f(x)$ ou $x = g(y)$,* ***ou***

2. ***Implícita:*** *$f(x, y) = 0$.*

Uma curva plana no plano Π_{yz} ou Π_{xz} pode-se definir de forma análoga.

Definição 1.2. *As curvas de interseção da superfície com os planos coordenados, são chamadas de* ***Traços*** *da superfície quádrica. Para obter o traço* **yz** *basta fazer $x = 0$ na equação (1.2). De modo análogo pode-se obter os traços* **xz** *e* **xy** *fazendo $y = 0$ e $z = 0$ respectivamente.*

Definição 1.3. *As* ***seções*** *de uma superfície quádrica são as curvas de interseção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados. Podemos achar uma seção paralela ao plano Π_{yz} fazendo $x = k$, onde k é uma constante. Assim também pode ser feito para as outras seções, basta fazer $y = k$ e $z = k$.*

1.6.1 Superfície Quádrica Central

O gráfico em $\mathbb{R}^3$ de uma equação da forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1.3}$$

onde a, b e c são constantes positivas é chamado superfície quádrica central, e é um caso particular da equação (1.2).

A superfície quádrica central é classificada da seguinte maneira:

1) Se todos os três sinais são positivos, a superfície é chamada de um elipsoide.

2) Se dois sinais são positivos e um é negativo, a superfície é chamada de hiperboloide de uma folha.

3) Se um sinal é positivo e os outros dois são negativos, a superfície é chamada de hiperboloide de duas folhas.

1.6.2 Elipsoide

Os três sinais do lado esquerdo da equação (1.3) são positivos.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1.4}$$

Traços do elipsoide:

a) No plano Π_{xy} $(z = 0)$: é a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

b) No plano Π_{xz} $(y = 0)$: é a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

c) No plano Π_{yz} $(x = 0)$: é a elipse $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Seções do Elipsoide: Se $k \in \mathbb{R}$, então:

a) Seção $x = k$,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

representa uma elipse para $|k| < a$, e o ponto $(a, 0, 0)$ para $k = a$. Se $|k| > a$ não existe interseção.

b) Seção $y = k$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

representa uma elipse para $|k| < b$, e o ponto $(0, b, 0)$ para $k = b$. Se $|k| > b$ não existe interseção.

c) Seção $z = k$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

representa uma elipse para $|k| < c$, e o ponto $(0, 0, c)$ para $k = c$. Se $|k| > c$ não existe interseção.

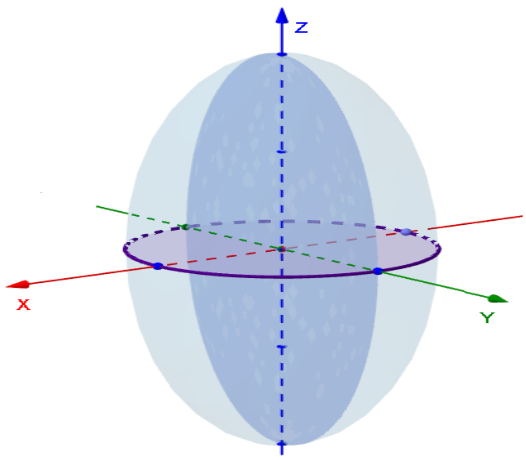


Figura 1.6: Gráfico do elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Observação 1.3. *Quando $a = b = c$ o gráfico da equação (1.4) chama-se **esfera**.*

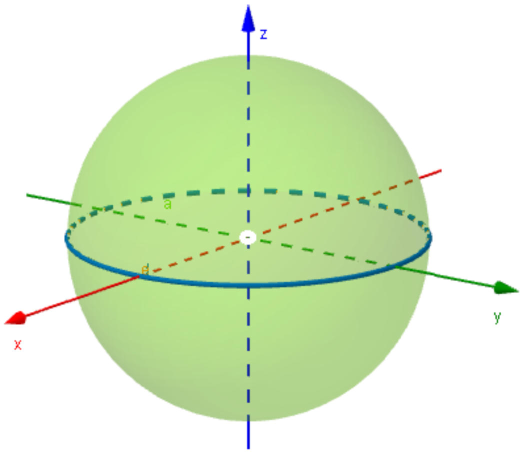


Figura 1.7: Gráfico da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

1.6.3 Hiperboloide de uma Folha

Se apenas um dos sinais do lado esquerdo da equação (1.3) é negativo. A posição do sinal negativo definirá qual será o seu eixo. Por exemplo, o eixo do hiperboloide seguinte é o eixo z.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

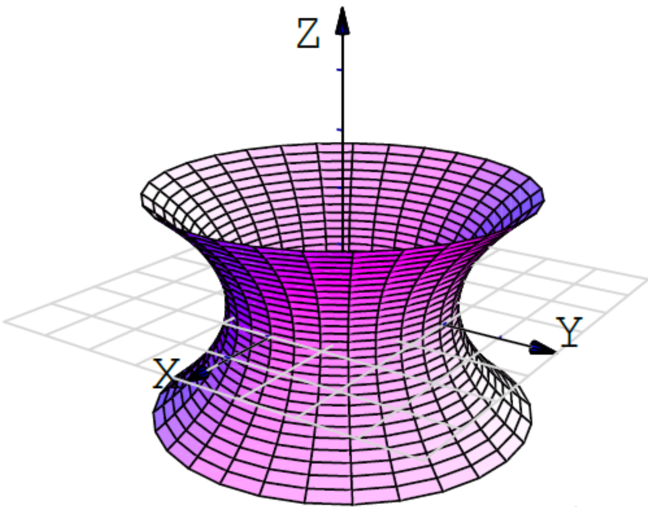


Figura 1.8: Gráfico do hiperboloide de uma folha $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Traços do hiperboloide de uma folha

a) No plano Π_{xy} $(z = 0)$: é a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

b) No plano Π_{xz} $(y = 0)$: é a hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

c) No plano Π_{yz} $(x = 0)$: é a hipérbole $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Seções do hiperboloide de uma folha: Se $k \in \mathbb{R}$, então:

a) Seção $x = k$,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

representa hipérboles para $k \neq a$, e retas para $k = a$.

b) Seção $y = k$,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

representa hipérboles para $k \neq b$, e retas para $k = b$.

c) Seção $z = k$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

representa elipses.

1.6.4 Hiperboloide de duas Folhas

Se dois sinais do lado esquerdo da equação (1.3) são negativos e o outro é positivo. A posição do sinal positivo define qual será o seu eixo. A equação abaixo define um hiperboloide de duas folhas cujo eixo é o eixo z.

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

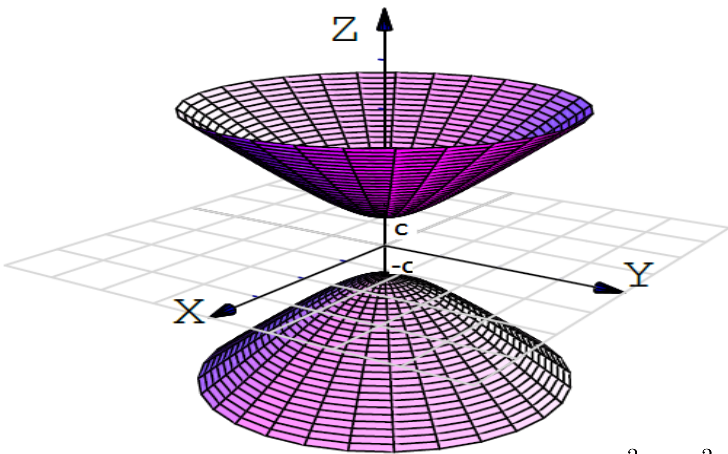


Figura 1.9: Gráfico do hiperboloide de duas folhas $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Traços do hiperboloide de duas folhas

a) No plano Π_{xy} $(z=0)$: Não há interseção.

b) No plano Π_{xz} $(y=0)$: é a hipérbole $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$.

c) No plano Π_{yz} $(x=0)$: é a hipérbole $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Seções do hiperboloide de duas folhas: Se $k\in\mathbb{R}$, então:

a) Seção $x=k$,

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{a^2}$$

representa hipérboles.

b) Seção $y=k$,

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{k^2}{b^2}$$

representa uma hipérboles.

c) Seção $z=k$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$$

representa uma elipse para $|k|>c$, e o ponto $(0,0,c)$ para $|k|=c$. Se $|k|<c$ não existe interseção.

1.6.5 Cones Elípticos

Outro caso particular da equação (1.2) é o chamado cone elíptico, cuja equação é da forma:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=0$$

onde a, b e c são constantes positivas e nem todos os sinais do lado esquerdo da equação são iguais. O cone elíptico é simétrico em relação a todos os planos coordenados, a todos os eixos coordenados e à origem.

Exemplo 1.3. *A equação:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

representa um cone elíptico cujo eixo é o eixo z.

O traço no plano Π_{xy} é a origem. Os traços nos planos Π_{xz} e Π_{yz} são os pares de retas concorrentes $z=\pm\dfrac{c}{a}x$ e $z=\pm\dfrac{c}{b}y$, respectivamente.

A seção da superfície no plano $z=k$ e $y=k$, $k\neq 0$ é uma elipse. As seções nos planos $x=k$ e $y=k$, $k\neq 0$, são as hipérboles $-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{k^2}{a^2}$ e $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{k^2}{b^2}$

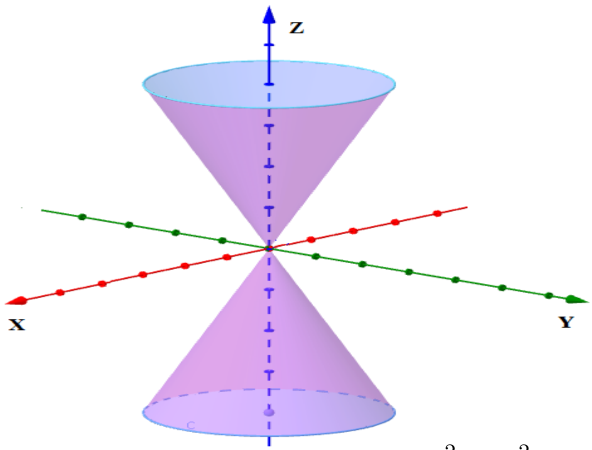


Figura 1.10: Gráfico do Cone $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

1.6.6 Paraboloides

São superfícies quádricas cuja equação (1.2) possui uma das seguintes formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=z \quad \text{ou} \quad \pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=x \quad \text{ou} \quad \pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{b^2}=y \tag{1.5}$$

onde $a,\ b,\ c$ são constantes positivas.

Os Paraboloides podem ser divididos em:

1. **Paraboloide Elíptico:** É a equação dada em (1.5) cujos termos do lado esquerdo possuem o mesmo sinal.

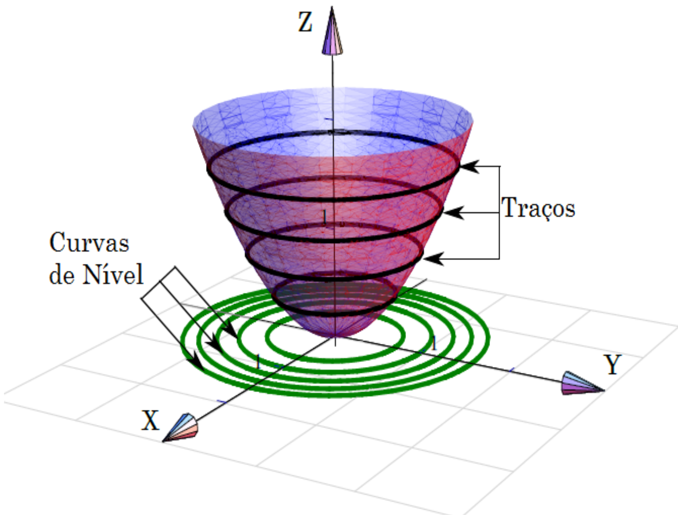


Figura 1.11: Gráfico do Paraboloide Elíptico $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

Exemplo 1.4. *O paraboloide elíptico* $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ *cujo eixo é o eixo z.*

O traço **xy** é a origem. Os traços **xz** e **yz** são as parábolas $z = \frac{x^2}{a^2}$ e $z = \frac{y^2}{b^2}$, respectivamente.

A seção da superfície no plano $z = k$ possui equação $k = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Se $k > 0$, a seção é uma elipse. Se $k < 0$ a seção é vazia. As seções nos planos $x = k$ e $y = k$ são as parábolas $z = \frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ e $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}$, respectivamente.

Se $a = b$, a superfície é um paraboloide circular, e portanto, uma superfície de revolução em torno do eixo z.

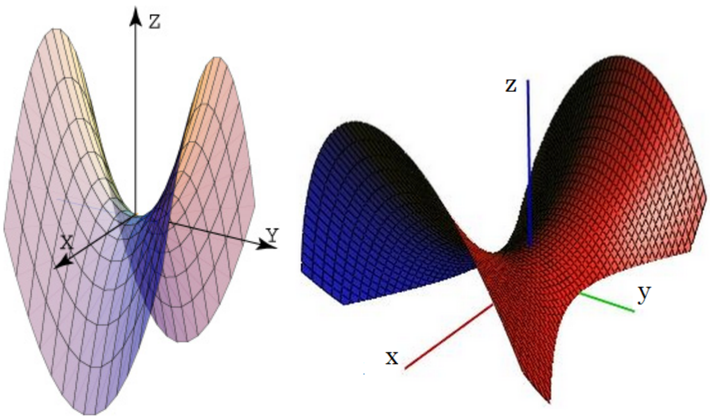
2. **Paraboloide Hiperbólico:** Se os termos do lado esquerdo das equações padrão possuem sinais opostos.

Exemplo 1.5. *O paraboloide hiperbólico* $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

O traço **xy** é o par de retas concorrentes $y = \pm\frac{bx}{a}$. Os traços **xz** e **yz** são as parábolas $z = -\frac{x^2}{a^2}$ e $z = \frac{y^2}{b^2}$, respectivamente.

A seção da superfície no plano $z = k$ é uma hipérbole. Se $k > 0$ a hipérbole possui equação $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$; se $k < 0$, a hipérbole possui equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = |k|$.

As seções nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas com concavidade para cima e para baixo, respectivamente. Na Figura 1.12a é mostrado o gráfico do paraboloide hiperbólico discutido.



(a) $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (b) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

Figura 1.12: Paraboloide Hiperbólico

1.6.7 Exercícios

1. Identifique e desenhe a superfície quádrica cuja equação é dada a seguir.

$a)$ $x^2+y^2+z^2+10x+4y+2z=19.$	$f)x^2-y^2-z^2=16.$	$k)z=x^2+y^2.$
$b)$ $2x^2+2y^2+2z^2-2x-3y+5z=2.$	$g)$ $x^2+2x+y^2+z^2=0.$	$l)$ $4z=x^2+2y^2.$
$c)$ $-x^2+4y^2+4z^2=4.$	$h)$ $x^2-\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=0.$	$m)$ $z=2x^2-y^2.$
$d)$ $3z-6x^2-3y^2=0.$	$i)$ $y=2x^2-z^2$	$n)$ $y=x^2-z^2.$
$e)$ $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$	$j)$ $z=\dfrac{y^2}{25}-x^2.$	$o)$ $\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{8}=x.$

2. Esboce a região determinada pelo conjunto de pontos que satisfazem simultaneamente as equações:
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-z\geq 0, \qquad \text{e} \qquad x^2+y^2+z^2-1<0.$$

3. Esboce a região no primeiro octante que esta limitada pelos planos coordenados e pelas superfícies $\dfrac{x^2}{9}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ e $x+y=1$.

4. Esboce a superfície $S=S_1\cup S_2\cup S_3$, onde S_1 tem equação $x^2+y^2=4$ com $-2\leq z\leq 4$, S_2 e S_3 são os gráficos das funções $z=x^2+y^2$ e $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ respectivamente, ambas definidas no conjunto $D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4\leq x^2+y^2\leq 25\Big\}$.

1.7 Cilindros

Um cilindro é uma superfície gerada por uma reta $\mathcal{L}$ que se move ao longo de uma curva plana C dada, de tal modo que permaneça sempre paralela a uma reta fixa não situada no plano da curva dada. A reta $\mathcal{L}$ é chamada geratriz do cilindro e a curva C é chamada diretriz do cilindro.

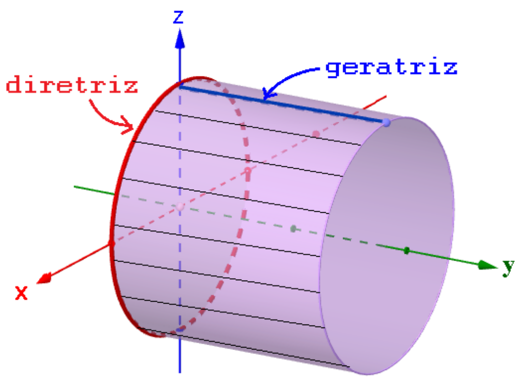
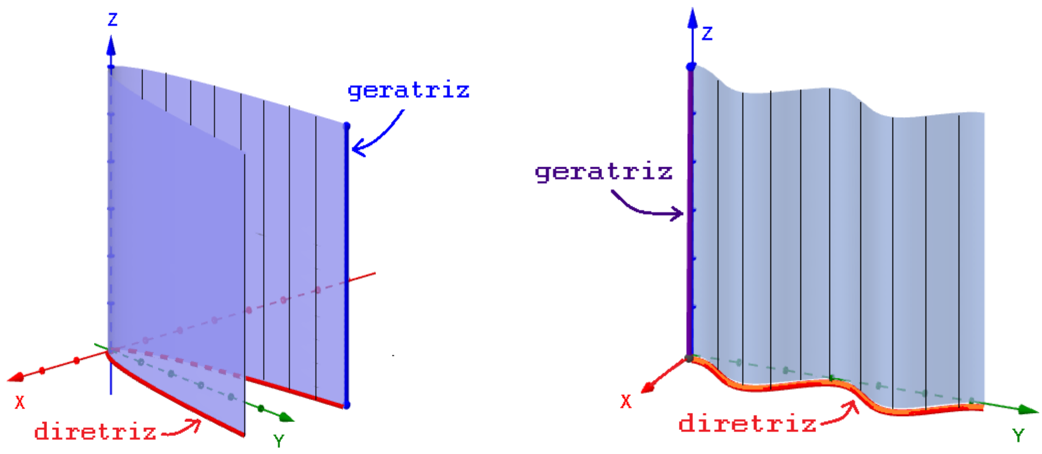


Figura 1.13: Gráfico do Cilindro $x^2+z^2=1$

Consideraremos cilindros retos cujas equações tem duas das três variáveis x, y e z, com reta geratriz paralela ao eixo associado com a variável ausente. Por exemplo, na Figura 1.13 o cilindro tem geratriz paralela ao eixo y, enquanto que na Figura 1.14a e 1.14b a geratriz é paralela ao eixo z.



(a) Gráfico do Cilindro $y = 3x^2$ (b) Gráfico do Cilindro $x = \operatorname{sen}^2 y$

Figura 1.14: Cilindros

1.7.1 Exercícios

1. Esboce os cilindros cujas equações são:

a) $x^2 + (y-2)^2 = 4$

b) $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

c) $y^2 - x^2 = 16.$

d) $y = |z|$

e) $z = \ln x$

f) $y^2 - x^2 = 16.$

g) $yz = 1$

h) $|y| + |z| = 1$

2. Ache a equação da superfície de pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância ao eixo x é $\frac{2}{3}$.

3. Escreva a equação da superfície de pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao ponto $(0, 0, 1)$ é a mesma do que a de P ao plano $x = -2$. Identifique a superfície.

1.8 Superfícies de Revolução

É a superfície S obtida pela rotação de uma curva plana C em torno de uma reta fixa que pertence ao mesmo plano da curva. A curva plana é a **curva geratriz** e a reta fixa é o **eixo de revolução**.

Se o eixo de revolução é o eixo z e a curva geratriz é determinada pela equação $x = f(z)$ ou $y = f(z)$ então a equação da superfície de revolução é

$$x^2 + y^2 = (f(z))^2$$

Se o eixo de revolução é o eixo y e a curva geratriz é determinada pela equação $z = f(y)$ ou $x = f(y)$ então a equação da superfície de revolução é

$$x^2 + z^2 = (f(y))^2$$

Analogamente, se o eixo de revolução é o eixo x e a curva geratriz é determinada pela equação $y = f(x)$ ou $z = f(x)$ então a equação da superfície de revolução é

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2$$

Exemplo 1.6. *A superfície de revolução gerado pela da curva* $x = \sqrt{1 - z^2}$, $z \in [-1, 1]$ *em torno do eixo* z *é a esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, *como mostra a Figura 1.15. Na Figura 1.16 temos a superfície de revolução gerado pela curva (reta)* $y = z$, $z \in [2, 4]$ *em torno do eixo* z *cuja equação resultante é* $x^2 + y^2 = z^2$, $z \in [2, 4]$. *(Cone parcial)*

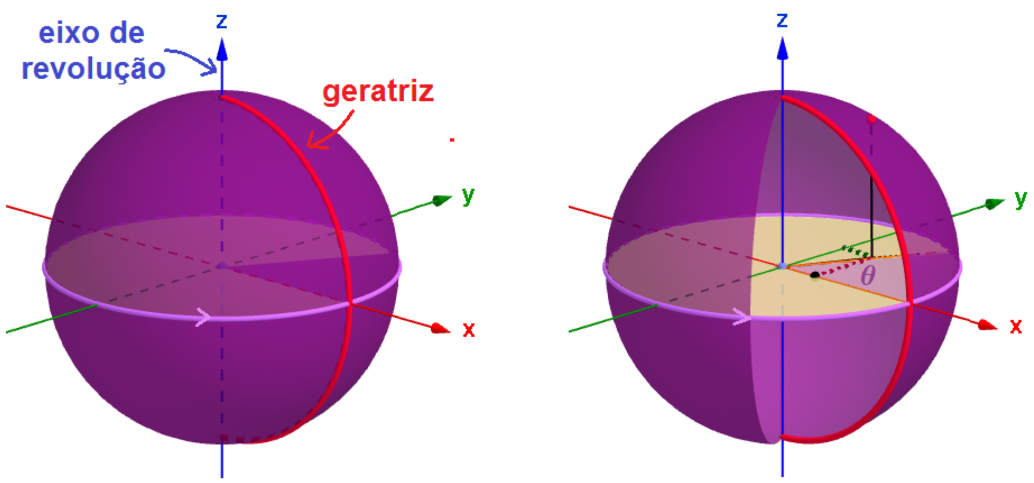


Figura 1.15: Rotação da curva $x = \sqrt{1 - z^2}$, $z \in [-1, 1]$ em torno do eixo z

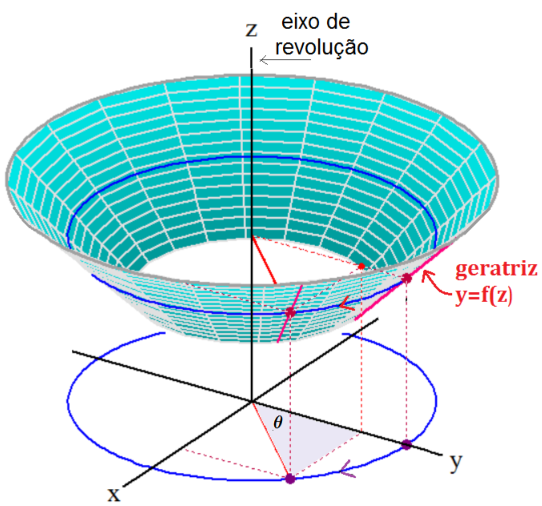


Figura 1.16: Rotação da reta $y = z$, $y \in [2, 4]$ em torno do eixo z.

1.8.1 Exercícios

1. Desenhe as superfícies de revolução que são geradas pelas curvas:

a) $(x-2)^2+y^2=1, y \in [0,1]$, em torno do eixo x

b) $y=x^2$, $x \in [1,2]$ em torno do eixo y

c) $z=y^2$, $y \in [0,2]$ em torno do eixo z

1.9 Exercícios Complementares

1. Identifique e esboce as superfícies quádricas

a) $x^2+2z^2-6x-y+10=0$	c) $x^2+y^2-(z-2)^2=0$	e) $x^2+y^2-(z-2)^2=1$
b) $z^2+y^2=\dfrac{x}{4}$	d) $x^2+y^2+\dfrac{(z-1)^2}{9}=0$	f) $4x^2-y^2+2z^2+4=0$

2. Esboce o sólido Q limitado pelos planos $S_1:\ x-y+z=0,\ \ S_2:\ y+z=2,\ x=0$ e $z=0$.

3. Esboce o sólido Q limitado pelas superfícies $S_1:\ x^2+z^2=4,\ \ S_2:\ x+y=5$ e o plano $z=2$; no primeiro octante.

4. Esboce o sólido Q limitado pelas superfícies $S_1:\ z=1-x^2,\ \ S_2:\ x+y=1$ e os planos $x=0,\ y=0$ e $z=0$; no primeiro octante.

5. Desenhe o sólido Q limitado pela superfície S delimitada pelo cilindro $x^2+y^2=4$ e os planos $x+2y=4$ e $z=4$, no primeiro octante.

6. Desenhe o sólido Q limitado pela superfície S delimitada pelo cilindro $z=4-x^2$ e os planos $z+y=2$; $y=1$ e $y=0$, no primeiro octante.

7. Desenhe o sólido Q limitado pela superfície S delimitada pelo cilindro $y^2+z^2=4$ e os planos $2x-2y+z=2$; $x=0$ e $z=0$.

8. Desenhe o sólido Q limitado pela superfície S delimitada pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e os planos $z=1$ e $z=-1$.

9. Desenhe o sólido Q limitado pela superfície S delimitada pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e os planos $z=1$ e $z=-1$.

10. Desenhe o sólido

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq 4; \quad x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 \leq 2 \quad \text{e} \quad z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$.

(c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$.

(d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

(e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y; \quad z \leq \sqrt{x^2 + y^2}; \quad y \geq x \quad \text{e} \quad x \geq 0\}$.

(f) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 4 \leq x^2 + (y - 1)^2 + z^2 \leq 9; \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad z \geq 0\}\}$.

(g) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq 2y\}$.

Capítulo 2

Funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$

Uma função $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação cujo domínio são vetores de $\mathbb{R}^n$ e cuja imagem é um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^m$.

1. Se $n = 1$ diremos que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial.

2. Se $m = 1$ diremos que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função real de n variáveis.

3. Se $m = n$ diremos que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial.

2.1 Função Vetorial

Chamamos de função vetorial de uma variável t, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a função que a cada $t \in I$ associa um vetor $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)) \in \mathbb{R}^m$. Além disso, cada componente é uma função real do tipo: $x_i : I \to \mathbb{R}$.

Definição 2.1. *O limite de $\alpha(t)$ quando t se aproxima de t_0 é definido por*

$$\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = (\lim_{t \to t_0} x_1(t), \lim_{t \to t_0} x_2(t), ..., \lim_{t \to t_0} x_m(t)),$$

se $\lim_{t \to t_0} x_1(t)$, $\lim_{t \to t_0} x_2(t)$, ...,$\lim_{t \to t_0} x_m(t)$ existem.

Definição 2.2. *A função $\alpha(t)$ é contínua em $t_0 \in I$ se, e somente se,*

$$\lim_{t \to t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0).$$

Segue das definições (2.1) e (2.2) que $\alpha(t)$ é contínua em t_0 se, e somente se, as funções coordenadas $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... , $x_m(t)$ são contínuas em t_0.

Um exemplo muito importante de uma função vetorial contínua é dado pela definição de **curva** que é o lugar geométrico dos pontos P que tem vetor posição $\alpha(t),\ t \in I$. Se $\alpha(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, a **curva** C coincide com a trajetória da partícula.

2.2 Representação Paramétrica das Curvas

Sejam $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t), \ldots,\ x_m = x_m(t)$ funções contínuas de uma variável t, definidas para $t \in [a, b]$.

As equações anteriores são chamadas de equações paramétricas de uma curva C e podemos obter uma equação vetorial para ela. Basta considerar o vetor posição $\alpha(t)$ de cada ponto da curva. As componentes de $\alpha(t)$ são precisamente as coordenadas do ponto. Escrevemos

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_m(t)) \qquad t \in [a, b] \tag{2.1}$$

Curvas parametrizadas são utilizadas para se modelar m quantidades (posição de um objeto, trabalho, capital de empresa, etc) que variam no tempo. A variável t é chamada de parámetro.

A representação mais importante de uma curva parametrizada é o seu traço.

Definição 2.3. ***(Traço de uma curva parametrizada).*** *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ uma curva parametrizada. O traço de α é o conjunto $C = \{\alpha(t),\ t \in I\}$ (também chamado de curva C). Para cada instante de tempo t, $\alpha(t)$ é um ponto de $\mathbb{R}^m$. O traço de uma curva parametrizada α nada mais é do que a união de todos estes pontos de $\mathbb{R}^m$.*

Se por exemplo, $\alpha(t)$ representa a posição de um objeto no instante de tempo t, o traço da curva representa, neste caso, a trajetória do objeto.

Exemplo 2.1. *Suponha que a posição de um objeto (um ponto material) movendo-se no plano $\mathbb{R}^2$ seja descrita pela curva parametrizada*

$$\begin{aligned} \alpha\ &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t &\to \alpha(t) = (1 + t, 3 - 2t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

a) Qual é a posição inicial do objeto?

b) Qual é a posição do objeto no instante de tempo $t = 1$?

c) O objeto passa pela origem $(0, 0)$?

d) Faça o esboço da trajetória do objeto.

Solução:

a) A posição inicial do objeto é a posição do objeto no instante de tempo $t = 0$. Assim, para sabermos a posição inicial do objeto basta calcularmos

$$\alpha(0) = (1 + 0, 3 - 2(0)) = (1, 3)$$

b) Para sabermos a posição do objeto no instante de tempo $t = 1$ basta calcularmos

$$\alpha(1) = (1 + 1, 3 - 2(1)) = (2, 1)$$

c) Para saber se existe um instante de tempo t tal que $\alpha(t) = (1 + t, 1 - 2.t) = (0, 0)$, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} 1 + t & = 0 \\ 3 - 2t & = 0 \end{cases}$$

Como este sistema não possui solução, segue-se que o objeto nunca passa pela origem $(0, 0)$.

d) Para fazer um esboço do gráfico da curva parametrizada α vamos tentar determinar uma equação nas variáveis cartesianas x e y em $\mathbb{R}^2$ que é satisfeita pelos pontos $\alpha(t) = (1+t, 3-2t)$.

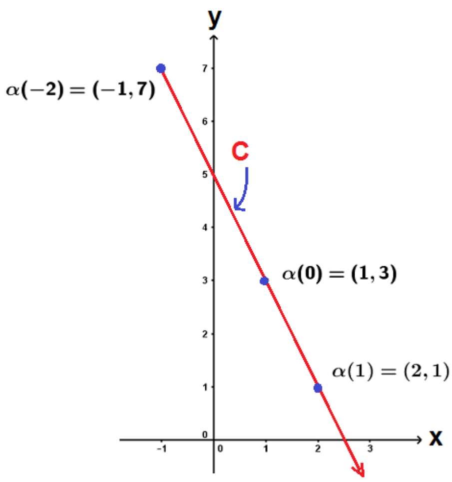


Figura 2.1: Traço da curva $\alpha(t) = (1 + t, 3 - 2t)$.

Assim, considerando

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$$

e isolando a variável t na primeira e segunda equação e igualando temos que:

$$x - 1 = \frac{3 - y}{2}$$

ou seja

$$y = 3 - 2(x - 1) = -2x + 5.$$

Do anterior, concluímos que o traço da curva α (e portanto a trajetória do objeto) é a reta $y = -2x + 5$ no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Assim, a trajetória do objeto pode ser descrita de duas maneiras diferentes:

- Como o traço da curva parametrizada $\alpha(t) = (1 + t, 3 - 2t)$, e
- Como gráfico da equação $2x + y - 5 = 0$.

No primeiro caso estamos dizendo que estamos descrevendo a curva **parametricamente** e no segundo caso **implicitamente**.

Exemplo 2.2. *Faça o esboço do traço da curva parametrizada*

$$\begin{aligned} \beta\ &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t &\to \beta(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sol.: A posição do móvel em $t = 0$ é

$$\beta(0) = (\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (1, 0).$$

Analogamente, a posição respectiva em $t = \pi/4$ e $t = \pi/2$ é:

$$\beta(\pi/4) = (\cos \pi/4, \operatorname{sen} \pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$$

e

$$\beta(\pi/2) = (\cos \pi/2, \operatorname{sen} \pi/2) = (0, 1).$$

Mas ao invés de tentar obter um esboço do traço de β através de alguns poucos pontos, vamos utilizar a mesma técnica desenvolvida no exercício resolvido anterior, isto é, vamos tentar obter uma equação nas variáveis x e y que é satisfeita pelos pontos $\beta(t)$, com $t \in \mathbb{R}$. Escrevendo:

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \operatorname{sen} t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Portanto, o traço da curva β é a circunferência de centro na origem $(0, 0)$ e raio 1 (Veja Figura 2.2).

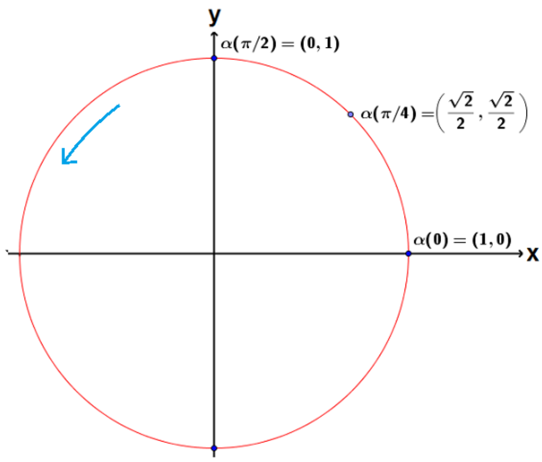


Figura 2.2: Traço da curva $\beta(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

Exemplo 2.3. *Faça um esboço do traço da curva parametrizada*

$$\begin{aligned} \beta \ &: [0,\infty) \to \mathbb{R}^2 \\ t &\to \beta(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sol.: Fazendo

$$\begin{aligned} x &= t\cos t \\ y &= t \operatorname{sen} t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{x^2+y^2}$$

Portanto, a equação cartesiana é $y = \sqrt{x^2+y^2} \operatorname{sen} \sqrt{x^2+y^2}$, da qual é muito difícil obter informações geométricas a partir desta formulação implícita. Observe que $\beta(t) = t(\cos t, \operatorname{sen} t)$.

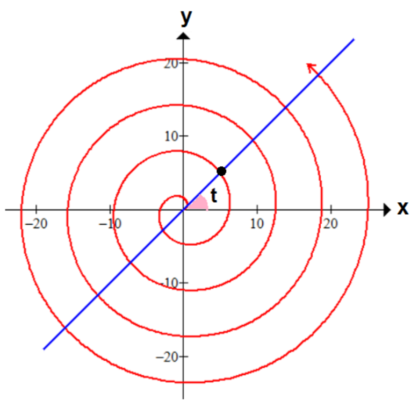


Figura 2.3: Traço da Espiral

Assim, para cada $t \in [0,\infty)$, a expressão $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ representa um ponto sobre a circunferência de centro a origem e raio 1. Observe também que t representa o ângulo orientado entre o segmento de reta unindo a origem $(0,0)$ e o ponto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ e o eixo x. Agora, como estamos multiplicando $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ por t, o raio deixa de ser 1 e fica sendo t. A medida que variamos o ângulo t, mudamos o valor do raio para t. O traço da curva β tem a forma da Figura 2.3.

Exemplo 2.4. *A hélice é o traço da curva parametrizada*

$$\begin{aligned} \alpha\ &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ t &\to \alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sol.: Para fazer um esboço do desenho da hélice, fazemos:

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t$$

Notemos que as duas primeiras coordenadas de $\alpha(t)$ satisfazem a equação da circunferência

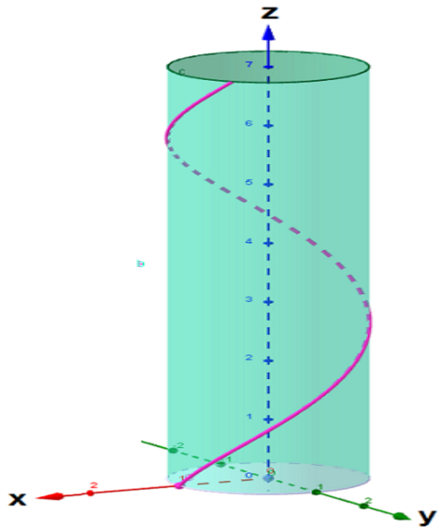


Figura 2.4: Traço da Hélice.

de centro na origem e raio 1, isto é,

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Concluímos que o traço da curva α (Figura 2.4) está contido no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ e que a *altura* $z = t$ cresce com o tempo t.

2.3 Parametrização de Curvas

Nesta seção vamos ver como parametrizar algumas curvas.

Exemplo 2.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva de $\mathbb{R}^2$, descrita por uma função contínua, definida explicitamente pela relação*

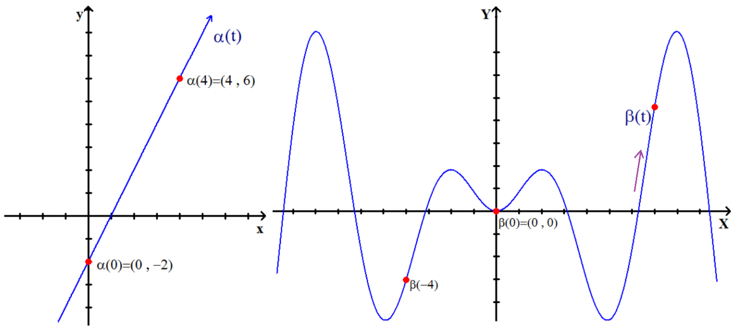
$$y = f(x), \qquad x \in I \subset \mathbb{R}$$

*Então, uma **parametrização natural** de $\mathcal{C}$ é*

$$\alpha(t) = (t, f(t)) \qquad com \qquad t \in I$$

Exemplo 2.6. *Do exemplo anterior, segue que uma parametrização natural para:*

A reta $y = 2x - 2$, é $\alpha(t) = (t, 2t - 2)$ com $t \in \mathbb{R}$ e para a curva $y = x \operatorname{sen} x$, é $\beta(t) = (t, t \operatorname{sen} t)$ com $t \in \mathbb{R}$



(a) $\alpha(t) = (t, 2t - 2)$ (b) $\beta(t) = (t, t \operatorname{sen} t)$

Exemplo 2.7. *Seja $\mathcal{L}$ a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, paralela ao vetor $v = (v_1, v_2)$. Encontre uma parametrização da reta $\mathcal{L}$.*

Sol.: Seja $P = (x, y) \in \mathcal{L}$, então usando a álgebra de vetores temos que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$ para algum $t \in \mathbb{R}$, isto é $(x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$. Assim, uma parametrização de $\mathcal{L}$ é

$$\alpha(t) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2),$$

com $t \in \mathbb{R}$. Logo, suas equações paramétricas são:

$$x(t) = x_0 + tv_1,\ t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = y_0 + tv_2,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Por outro lado, podemos eliminar o parâmetro t nas equações paramétricas para obter uma expressão cartesiana da reta $\mathcal{L}$. Se v_1, v_2, são não nulos, então

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}, \tag{2.7}$$

é uma expressão cartesiana da reta $\mathcal{L}$.

Exemplo 2.8. *Seja $\mathcal{L}$ a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$. Encontre uma parametrização da reta $\mathcal{L}$.*

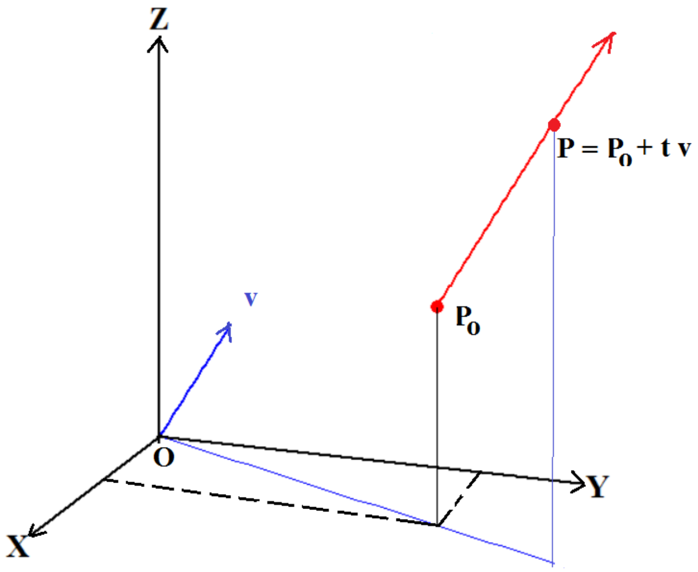


Figura 2.5: Parametrização da Reta em $\mathbb{R}^3$.

Sol.: Se $P = (x, y, z) \in \mathcal{L}$, então $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$ para algum $t \in \mathbb{R}$,

Assim,

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3)$$

isto é, uma parametrização de $\mathcal{L}$ é $\alpha(t) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3)$, com $t \in \mathbb{R}$. Logo, suas equações paramétricas são:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1,\ t \in \mathbb{R} \\ y &= y_0 + tv_2,\ t \in \mathbb{R}. \\ z &= z_0 + tv_3,\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Exemplo 2.9. *(**Parametrização de segmentos**) Seja P_0 e P_1 dois pontos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Uma parametrização do segmento na direção de P_0 a P_1 e dada por:*

$\alpha(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$ *com* $t \in [0, 1]$.

Se consideramos os pontos (2,1) e (-3,5) em $\mathbb{R}^2$, a parametrização do segmento indo de (-3,5) até (2,1) é dada por:

$\alpha(t) = (-3, 5) + t\big((2, 1) - (-3, 5)\big) = (-3 + 5t, 5 - 4t)$ *com* $t \in [0, 1]$.

Exemplo 2.10. *(**Parametrização de Circunferências**) Parametrize a circunferencia de equação $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ no sentido anti-horário.*

Sol. Da seção anterior, fazendo $x - h = rcos\theta$ e $y - k = r \operatorname{sen} \theta$ podemos parametrizar a circunferência com $\alpha(\theta) = (h + r\cos\theta, k + r \operatorname{sen} \theta)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exemplo 2.11. *(**Parametrização de Elipses**) Parametrize a elipse de equação* $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ *no sentido anti-horário.*

Sol. Fazendo $\dfrac{(x-h)}{a}=\cos\theta$ e $\dfrac{(y-k)}{b}=\operatorname{sen}\theta$ podemos parametrizar a elipse com $\beta(\theta)=(h+a\cos\theta, k+b\operatorname{sen}\theta)$ com $\theta\in[0,2\pi]$

Exemplo 2.12. *Encontre uma parametrização da curva C que é interseção das superfícies $z=x^2$ e o plano $y=5$.*

Sol.: Para parametrizar a curva C consideramos as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x=t\\ y=5\\ z=t^2\end{cases}$$

Logo, a parametrização da curva C é dada por:

$$\begin{aligned}\alpha\ &: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\\ t&\to\alpha(t)=(t,5,t^2)\end{aligned}\tag{2.9}$$

2.4 O vetor tangente a uma curva parametrizada

Seja $\alpha(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),\ldots,x_m(t))$ uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^m$. Se o parâmetro t representa o tempo, então $x_j'(t)=\dfrac{dx_j}{dt}(t)$ é a velocidade instantânea da j-ésima coordenada ao longo da curva no instante t. Logo, se define o vetor velocidade da curva em t como:

$$\alpha'(t)=(x_1'(t),x_2'(t),x_3'(t),\ldots,x_m'(t))$$

$\alpha'(t)$ é também o vetor tangente à curva α.

Exemplo 2.13. *Considere a curva*

$$\begin{aligned}\alpha\ &: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\\ t&\to\alpha(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t).\end{aligned}\tag{2.10}$$

O vetor tangente é

$$\alpha'(t)=(-\operatorname{sen} t,\cos t).$$

Quando $t=0$ temos que $\alpha(0)=(1,0)$ e $\alpha'(0)=(0,1)$.

Observemos que $\alpha(t)\cdot\alpha'(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)\cdot(-\operatorname{sen} t,\cos t)=0$.(Ver Figura 2.6)

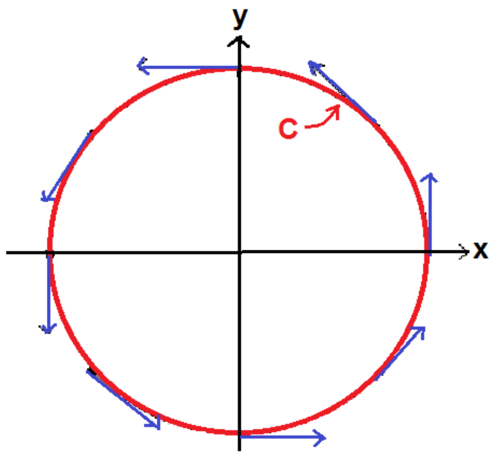


Figura 2.6: Vetor derivada $\alpha'(t)$.

2.5 Propriedades da derivada de curvas parametrizadas

Sejam as seguintes funções: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então:

1. $(\alpha(t) \pm \beta(t))' = \alpha'(t) \pm \beta'(t)$

2. $(h(t)\alpha(t))' = h'(t)\alpha(t) + h(t)\alpha'(t)$

3. $(\alpha(t) \cdot \beta(t))' = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t)$

4. $\left(\dfrac{\alpha(t)}{h(t)}\right)' = \dfrac{h(t)\alpha'(t) - h'(t)\alpha(t)}{\big(h(t)\big)^2}$

5. $(\|\alpha(t)\|)' = \dfrac{\alpha(t) \cdot \alpha'(t)}{\|\alpha(t)\|}$, se $\alpha(t) \neq 0$. Lembre que $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$.

6. $\big(\alpha\big(h(t)\big)\big)' = \dfrac{d}{dt}\big(\alpha\big(h(t)\big)\big) = \alpha'\big(h(t)\big) \cdot h'(t) = \dfrac{d}{dt}\alpha\big(h(t)\big) \cdot \dfrac{d}{dt}h(t)$.

2.6 Exercícios

1. Encontre uma parametrização para as seguintes curvas em $\mathbb{R}^2$, logo expresse estas como funções vetoriais. Em seguida, esboce o traço das curvas parametrizadas.

   (a) $y - x = 3$

   (b) $(y + 1)^2 - 4(x - 1)^2 = 1$

   (c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

   (d) $x = 1$

(e) A parte do círculo que esta no terceiro quadrante orientada no sentido anti-horário.

(f) A elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ orientada no sentido horário.

(g) O círculo de raio 4, centrado em $(-1, 5)$, orientado no sentido anti-horário.

(h) O quadrado que passa pelos pontos $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, orientado no sentido anti-horário.

(i) O triângulo que passa pelos pontos $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, orientado no sentido horário.

(j) O triângulo que passa pelos pontos $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,0,0)$, orientado no sentido horário.

2. Esboce o traço e identifique a curva definida pelas equações paramétricas $x = t^2 - 2t$, $y = t + 1$.

3. Que curva é representada pelas equações paramétricas $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos 2t$, quando $0 \leq t \leq 2$?

4. Por eliminação do parâmetro, esboce no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$, a trajetória de uma partícula cujas equações do movimento são $x = \cos(\pi t)$, $y = \operatorname{sen}(\pi t)$.

5. Encontre uma parametrização que descreva os caminhos abaixo apresentados:

   (a) A parte do círculo $x^2 + y^2 = 1$ que está no terceiro quadrante orientada no sentido anti-horário.

   (b) O círculo de raio 4, centrado em $(1, -3)$, orientado no sentido anti-horário.

6. Encontre uma parametrização e esboce o traço da curva C que é interseção das superfícies:

   (a) $S_1 : \ z = 1 - x^2$, e o plano $S_2 : \ y = 3$; no primeiro octante.

   (b) $S_1 : \ z = 4 - \dfrac{x^2}{4}$, e o plano $S_2 : \ x + y = 6$; no primeiro octante.

   (c) $S_1 : \ x^2 + z^2 = 9$, e o plano $S_2 : \ y - x = -2$; no primeiro octante.

   (d) $S_1 : \ z = 1 - x^2$, e o plano $S_2 : \ y + z = 2$; no primeiro octante.

   (e) $S_1 : \ x^2 + y^2 = 1$, e $S_2 : \ x - z^2 = 0$; no primeiro octante.

7. Determine o domínio das funções vetoriais α (curvas paramétricas) e determine onde são contínuas.

$a)$ $\alpha(t) = (5t^2, 3t + 1, 3 - t^2)$ $\quad$ $c)$ $\alpha(t) = (\sqrt{t}, e^{-3t}, t)$

$b)$ $\alpha(t) = ((1 + t)^2, \cos t, 3 - t^2)$ $\quad$ $d)$ $\alpha(t) = (1/t, |t - 1|, \operatorname{sen} t)$

Capítulo 3

Funções Reais de Várias Variáveis

Sejam

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x, \ y \ \in \mathbb{R}\} \tag{3.1}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ x, \ y, \ z \in \mathbb{R}\} \tag{3.2}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ / \ x_1, \ x_2, \ldots, \ x_n \in \mathbb{R}\} \tag{3.3}$$

Definição 3.1. *Uma função real de n variáveis, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, associa a cada n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ um único número real $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. O subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, é chamado **domínio** da função f, e denotaremos por Dom f.*

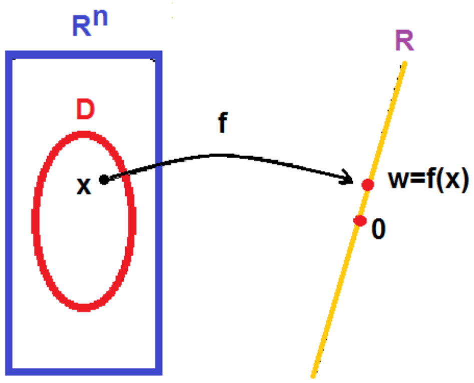


Figura 3.1: Função real de n variáveis.

Exemplo 3.1. *Se $n = 3$, $w = f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma função de três variáveis, onde Dom $f = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.*

Exemplo 3.2. *Se $n = 2$, $z = f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}$ é uma função de duas* *variáveis. O domínio de f são todos os pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que*

$$(1-x^2-y^2)(x^2+y^2-4) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1-x^2-y^2 \geq 0 \quad & e \quad x^2+y^2-4 \geq 0 \\ ou & \\ 1-x^2-y^2 \leq 0 \quad & e \quad x^2+y^2-4 \leq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \geq x^2+y^2 \quad & e \quad x^2+y^2 \geq 4 \\ ou & \\ 1 \leq x^2+y^2 \quad & e \quad x^2+y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$Dom\ f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\} (Ver\ Figura\ 3.2)$$

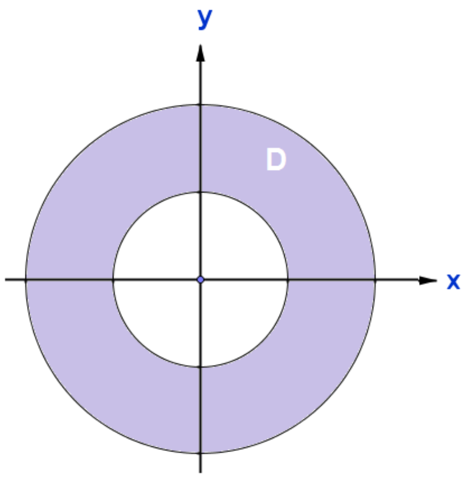


Figura 3.2: Domínio da função $f(x, y) = \sqrt{(1-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)}$.

Exemplo 3.3. *Se $n = 2$, $z = f(x, y) = \dfrac{5 \ \ln(x+y)}{\sqrt{(4-x^2-y^2)}}$ é uma função de duas variáveis.*

$$\begin{aligned} Dom\ f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 4-x^2-y^2 \geq 0 \quad e \quad x+y > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 4 \geq x^2+y^2 \quad e \quad y > -x\} (Ver\ Figura\ 3.3) \end{aligned}$$

Definição 3.2. *Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de n variáveis, definimos o gráfico de f e denotamos por $Graf(f)$ ao conjunto*

$$Graf(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Observação 3.1. *Note que no caso $n = 2$ o gráfico de f é uma superfície de $\mathbb{R}^3$. Se $n = 3$ o gráfico de f não é possível de visualizar, visto que o gráfico é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$.*

Exemplo 3.4. *Determine o domínio e esboce o gráfico da função $z = f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ com $z \geq 1/2$.*

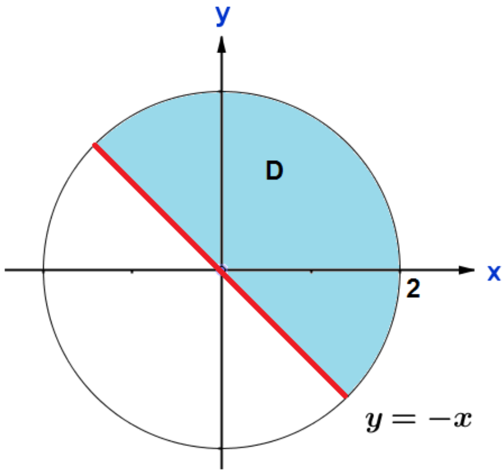


Figura 3.3: Domínio da função $f(x, y) = \frac{5\ \ln(x+y)}{\sqrt{(4-x^2-y^2)}}$.

Sol.: Primeiro determinemos o domínio de f,

$$Dom\ f = D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 1 - x^2 - y^2 \geq \frac{1}{2}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ /\ \frac{1}{2} \geq x^2 + y^2\}$$

Pela definição de gráfico temos que

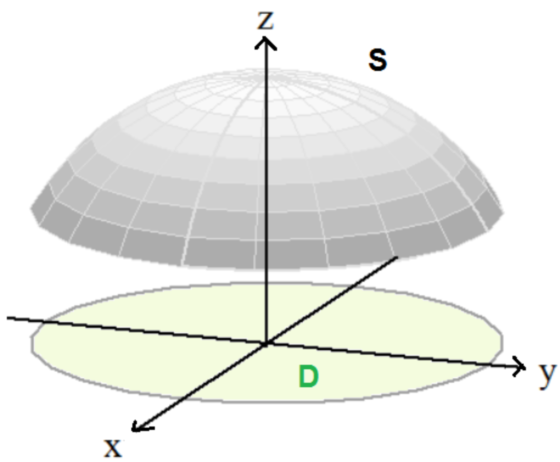


Figura 3.4: Superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com $z \geq 1/2$.

$$\begin{aligned} Graf(f) &= \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in D\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \forall\ (x, y) \in D\} \end{aligned}$$

Da equação $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ obtemos $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Logo, o gráfico é a parte de uma esfera com $z \geq 1/2$ como mostra a Figura 3.4.

3.1 Curvas de Nível

Definição 3.3. *Uma curva ao longo da qual a função $z = f(x, y)$ tem valor constante é denominada **Curva de Nível** ou **Curva de Contorno** da função f.*

A equação da Curva de Nível ao longo da qual a função $z = f(x, y)$ assume o valor constante k é

$$f(x, y) = k.$$

Quando a função f representa a temperatura, as curvas de nível são chamadas **Isotermas**. Se f representa o potencial elétrico, as curvas de nível de f são chamadas de **Curvas Equipotenciais**.

Para diferentes valores de k obtemos o conjunto de curvas de nível. Este conjunto de curvas é chamado **Mapa de Contorno** de f ou **Mapa Topográfico**.(Ver Figura 3.5)

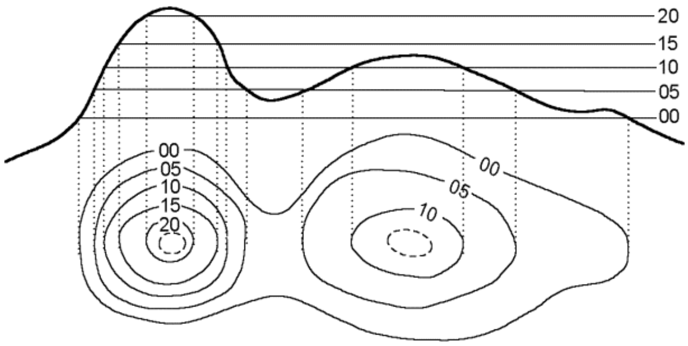


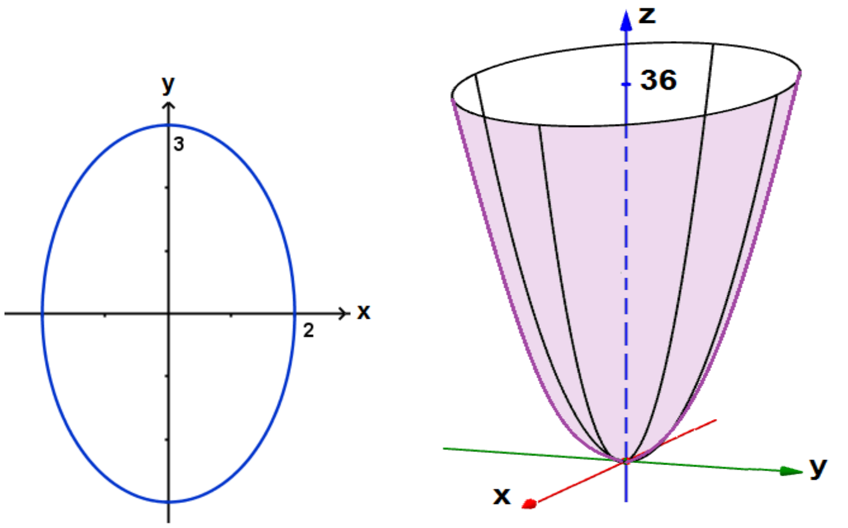
Figura 3.5: Mapa Topográfico

Exemplo 3.5. *A temperatura em um ponto (x, y) de uma placa de metal plana é $T(x, y) = 9x^2 + 4y^2$ graus.*

1. *Encontre a temperatura no ponto $(1, 2)$.*
2. *Encontre a equação da curva ao longo da qual a temperatura tem um valor constante 36 graus.*
3. *Esboce o gráfico do item 2. e o gráfico de T.*

Sol.:

1. $T(1, 2) = 9(1)^2 + 4(2)^2 = 25$ graus
2. A curva de nível tem equação $T(x, y) = 36$, isto é, $9x^2 + 4y^2 = 36$.
3. O gráfico da curva é a elipse $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ como vemos na Figura 3.6a. Na Figura 3.6b é mostrado o gráfico de T.



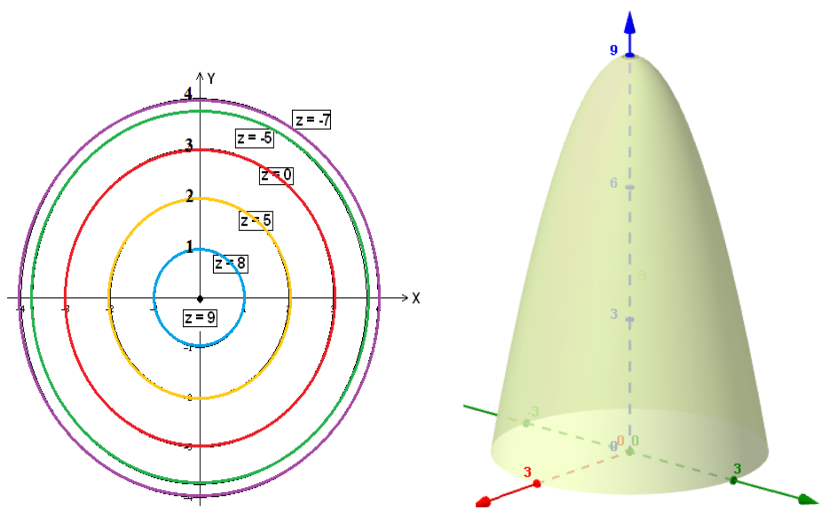
(a) Curva de Nível $T(x, y) = 36$ (b) Gráfico de $T(x, y) = 9x^2 + 4y^2$

Figura 3.6

Exemplo 3.6. *Esboçe o gráfico da função* $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ *usando as curvas de nível ou mapa de contorno.*

Sol.:

Note que $Dom\ f = \mathbb{R}^2$. As Curvas de Nível possuem a equação $9 - x^2 - y^2 = k$, que são círculos concêntricos à origem $x^2 + y^2 = 9 - k$ para valores de $k \leq 9$. Na Figura 3.7 vemos as curvas de nível e o gráfico da função.



(a) Curvas de Níveis $9 - x^2 - y^2 = k$ (b) Gráfico de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

Figura 3.7

Observação 3.2. *Para as funções de 3 variáveis não é possível visualizar seu gráfico. No* *entanto podemos considerar a superfície $f(x,y,z) = k$, quando k varia na imagem de f. Estas superfícies são chamadas **Superfícies de Nível** de f.*

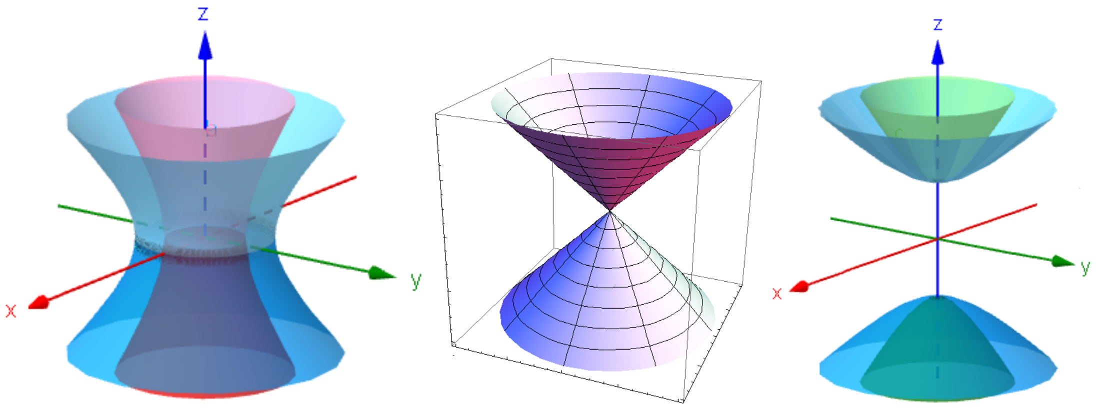
Exemplo 3.7. *Descreva as Superfícies de Nível de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.*

Sol. As Superfícies de Nível possuem a equação $x^2 + y^2 - z^2 = k$.

a) Se $k > 0$, a superfície de nível é o hiperboloide de uma folha $\dfrac{x^2}{k} + \dfrac{y^2}{k} - \dfrac{z^2}{k} = 1$. Ver Figura 3.8a .

b) Se $k = 0$, a superfície de nível é o cone circular $x^2 + y^2 = z^2$. Ver Figura 3.8b.

c) Se $k < 0$, a superfície de nível é o hiperboloide de duas folhas $-\dfrac{x^2}{|k|} - \dfrac{y^2}{|k|} + \dfrac{z^2}{|k|} = 1$. Ver Figura 3.8c.



(a) $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k} - \frac{z^2}{k} = 1$, $k > 0$ (b) $x^2 + y^2 = z^2$, $k = 0$ (c) $-\frac{x^2}{|k|} - \frac{y^2}{|k|} + \frac{z^2}{|k|} = 1$, $k < 0$

Figura 3.8: superfícies de nível

3.2 Limites e Continuidade

Na reta real um ponto se pode aproximar de um ponto fixo x_0 de dois modos: à direita de x_0 ou à esquerda de x_0.

Em $\mathbb{R}^2$ um ponto variável (x,y) pode-se aproximar de um ponto fixo (x_0,y_0) por um número infinito de caminhos.

Diremos que (x,y) se aproxima de (x_0,y_0) se a distância entre eles tende a zero, isto é $d((x,y),(x_0,y_0)) \to 0$. Denotaremos esta aproximação por $(x,y) \to (x_0,y_0)$ e leremos (x,y) tende a (x_0,y_0).

Notação: $d((x,y),(x_0,y_0)) = \|(x,y) - (x_0,y_0)\|$

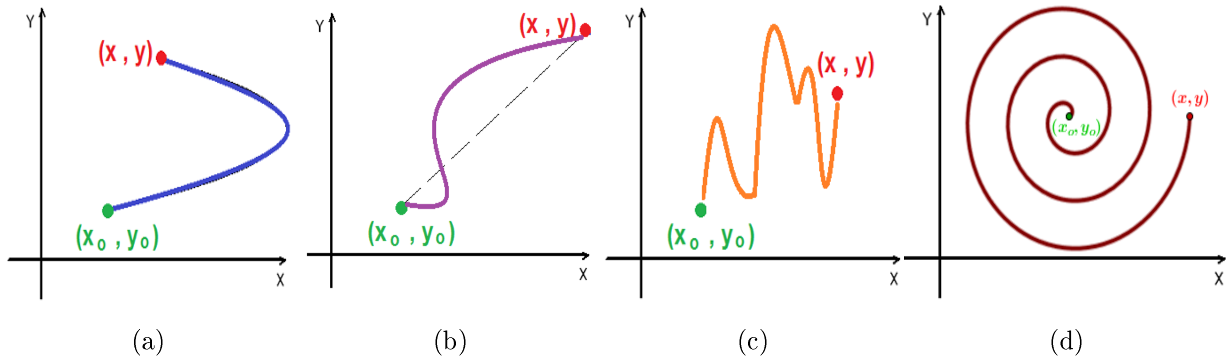


Figura 3.9: Aproximação de um ponto variável (x, y) de um ponto fixo (x_0, y_0)

Definição 3.4. *Uma bola aberta de centro em* (x_0, y_0) *e raio* $r > 0$ *é denotado e definido por*

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$$

Definição 3.5. *Seja* $z = f(x, y)$ *uma função real de duas variáveis definida em uma bola aberta* $B_r(x_0, y_0)$ *com exceção possível no ponto* (x_0, y_0)*. Dizemos que o limite de* $f(x, y)$ *quando* (x, y) *tende a* (x_0, y_0) *é o número* L *e escrevemos*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \qquad \textit{quando} \qquad \lim_{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\to 0} |f(x, y) - L| = 0,$$

o que significa que para cada número $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \qquad \textit{implica que} \qquad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

Observação 3.3. *Dizer que* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ *significa que quando* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *por qualquer direção então* $f(x, y)$ *tende ao mesmo limite* L*.*

A observação anterior da um mecanismo para provar que o limite não existe, isto é, se por dois caminhos diferentes dão limites diferentes então concluímos que não existe o limite.

Exemplo 3.8. *Calcule:*

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\operatorname{sen}(5x^2+y)} + \cos(xy)$.

2. *Seja* $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$*. Encontre* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *se existir.*

3. *Seja* $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{2x^2 + 2y^2}$*. Encontre* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *se existir.*

4. *Seja* $f(x, y) = \dfrac{-xy}{x^2 + y^2}$*. Encontre* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *se existir.*

5. *Seja* $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. *Encontre* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *se existir.*

Sol.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\text{sen}(5x^2+y)} + \cos(xy) = e^0 + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$

2. Usando caminhos:

   (a) **Aproximação pelo eixo y** $(x = 0)$. Então, $f(0,y) = \dfrac{0}{y^2} = 0$ e

   $$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

   (b) **Aproximação pelo eixo x** $(y = 0)$. Então, $f(x,0) = \dfrac{0}{x^4} = 0$ e

   $$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

   (c) **Aproximação pelas retas** $\mathbf{y = mx}$. Então, $f(x,mx) = \dfrac{mx^3}{x^4 + m^2x^2}$ e

   $$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$$

   (d) **Aproximação pela parábola** $\mathbf{y = x^2}$. Então, $f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{x^4 + x^4}$ e

   $$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

   Visto que os limites (a), (b) e (c) são diferentes de (d) concluímos que o limite de $f(x,y)$ não existe em $(0,0)$.

3. Usando caminhos:

   (a) **Aproximação pelo eixo y** $(x = 0)$. Então, $f(0,y) = \dfrac{0}{2y^2} = 0$ e

   $$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

   (b) **Aproximação pelo eixo x** $(y = 0)$. Então, $f(x,0) = \dfrac{0}{2x^2} = 0$ e

   $$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

   (c) **Aproximação pelas retas** $\mathbf{y = mx}$. Então, $f(x,mx) = \dfrac{mx^3}{2x^2 + m^2x^2}$ e

   $$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{2 + 2m^2} = 0$$

(d) **Aproximação pela parábola** $\mathbf{x = y^2}$. Então, $f(y^2, y) = \dfrac{y^5}{2y^4 + 2y^2}$ e

$$\lim_{x \to 0} \quad f(y^2, y) = \lim_{y \to 0} \quad \frac{y^3}{2y^2 + 2} = 0$$

Visto que os limites (a), (b), (c) e (d) são iguais, procedemos a usar a definição com o intuito de provar que o limite de $f(x, y)$ existe em $(0, 0)$ e é igual a zero.

Assim,

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2 y}{2x^2 + 2y^2} - 0 \right| \leq \left| \frac{(x^2 + y^2)y}{2x^2 + 2y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|y| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Logo,

$$\lim_{\|(x,y)-(0,0)\| \to 0} |f(x,y) - 0| \leq \lim_{\|(x,y)-(0,0)\| \to 0} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

Equivalentemente, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{2x^2 + 2y^2} = 0$

4. Usando caminhos:

(a) **Aproximação pelo eixo y** $(x = 0)$. Então, $f(0, y) = \dfrac{0}{y^2} = 0$ e

$$\lim_{y \to 0} \quad f(0, y) = 0$$

(b) **Aproximação pelo eixo x** $(y = 0)$. Então, $f(x, 0) = \dfrac{0}{x^2} = 0$ e

$$\lim_{x \to 0} \quad f(x, 0) = 0$$

(c) **Aproximação pela reta** $\mathbf{y = x}$. Então, $f(x, x) = \dfrac{-x^2}{2x^2}$ e

$$\lim_{x \to 0} \quad f(x, x) = \lim_{x \to 0} \quad \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Visto que os limites (a) e (b) são diferentes de (c) concluímos que o limite de $f(x, y)$ não existe em $(0, 0)$.

5. Usando caminhos:

(a) **Aproximação pelo eixo y** $(x = 0)$. Então, $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ e

$$\lim_{y \to 0} \quad f(0, y) = -1$$

(b) **Aproximação pelo eixo x** $(y = 0)$. Então, $f(x, 0) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ e

$$\lim_{x \to 0} \quad f(x, 0) = 1$$

Visto que os limites (a) e (b) são diferentes concluímos que o limite de $f(x,y)$ não existe em $(0,0)$.

Exercício: Seja $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-1}$. Encontre $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ se existir.

Definição 3.6. *Seja $z = f(x,y)$ uma função real de duas variáveis definida em todos os pontos de uma bola aberta $B_r(x_0,y_0)$. Dizemos que $f(x,y)$ é contínua (x_0,y_0), se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Diremos que f é uma função contínua num subconjunto D de $\mathbb{R}^2$, se $f(x,y)$ é contínua em cada ponto $(x_0,y_0) \in D$.

3.3 Exercícios

1. Determine e realize a representação gráfica do domínio de f.

   $a)$ $f(x,y) = \sqrt{y-1-x^2}$ $\qquad$ $c)$ $f(x,y,z) = \sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$

   $b)$ $f(r,s) = \sqrt{1-r} - e^{\frac{r}{s-2r}}$ $\qquad$ $d)$ $f(x,y) = \ln[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)]$

2. Esboce o gráfico de f.

   $a)$ $f(x,y) = y^2 - x^2$. $\qquad$ $c)$ $f(x,y) = (x-2)^2 - (y+3)^2$.

   $b)$ $f(x,y) = x^2 - y$. $\qquad$ $d)$ $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1$.

3. Considere a superfície S, união de S_1 e S_2, onde S_1 tem equação $x^2+y^2 = 4$ com $0 \le z \le 2$, e S_2 é o gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ definida no conjunto D, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \le x^2+y^2 \le 25\}$. Esboce as superfícies S_1, S_2 e S.

4. Dada a função $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, Pede-se:

   $a)$ As equações das curvas de nível $z = \frac{1}{4}$, $z = 4$ e $z = 9$.

   $b)$ A equação e esboço da curva de nível que contém o ponto $(0,2)$.

   $c)$ Um esboço do gráfico da função.

5. Considere a superfície $z = f(x,y)$, onde

   $$f(x,y) = \begin{cases} 8 - x^2 - y^2 & , \quad x^2+y^2 \le 4 \\ 4 & , \quad x^2+y^2 \ge 4 \end{cases} \qquad \text{Pede-se:}$$

   $a)$ As interseções da superfície com os planos $z = 8$, $z = 6$, $x = 0$ e $y = 0$.

   $b)$ Um esboço da superfície.

6. Esboce o mapa de contorno e o gráfico das seguintes funções:

$a)\ f(x,y)=\sqrt{2y-x^2-y^2},\qquad b)\ f(x,y)=\begin{cases}6-x^2-y^2 & , \quad x^2+y^2\leq 4\\ 4-x^2-y^2 & , \quad x^2+y^2\geq 4\end{cases}$

7. A temperatura num ponto (x,y,z) é dada por $T(x,y,z)=e^{-x^2-2y^2+3z^2}$ graus. Identifique a superfície do $\mathbb{R}^3$ cujos pontos possuem temperatura igual à temperatura do ponto (-1,-1,1).

8. Descreva o domínio e as superfícies de nível das seguintes funções:

$a)\ f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1}.$

$b)\ f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2-1).$

$c)\ f(x,y,z)=x^2+y^2-(z-1)^2.$

$d)\ f(x,y,z)=x^2+z^2-e^{2y}$

9. Calcule os limites

$a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{5}{e^{x+3y+\ln(x+1)}}$

$b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos y}{e^{-x}+3e^{y}}$

$c)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0)} x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

$d)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

10. Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo de cada um dos caminhos indicados. Determine $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se existir.

$a)\ f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (i) Ao longo dos eixos dos x e y. (ii) Ao longo da reta $y=5x$. (iii) Ao longo da curva $y=x^3$.

$b)\ f(x,y)=\dfrac{3x^4y^4}{(x^4+y^2)^2}$ (i) Ao longo dos eixos dos x e y. (ii) Ao longo da reta $y=x$.(iii) Ao longo da curva $y=-x^4$.

$c)\ f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{y} & , \quad \text{se} \quad y\neq 0\\ 0 & , \quad \text{se} \quad y=0\end{cases}$

(i) Ao longo dos eixos dos x e y.
(ii) Ao longo da reta $y=x^3$.
(iii) Ao longo da curva $y=-x^5$.

11. Determine se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x,y)$ existe nos seguintes casos.

$a)\ f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x_0,y_0)=(0,0).$

$b)\ f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ (x_0,y_0)=(0,0).$

$c)\ f(x,y)=\dfrac{xy}{y-2x},\ (x_0,y_0)=(1,2).$

$d)\ f(x,y)=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2},\ (x_0,y_0)=(0,0).$

12. Determine os pontos em que a função é contínua.

$a)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} & , \quad \text{se} \quad x+y\neq 0\\ 1 & , \quad \text{se} \quad x+y=0\end{cases}$

$b)\ f(x,y)=\dfrac{5xy^2+2y}{16-x^2-4y^4}.$

13. Discuta a continuidade das funções.

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} \quad , \quad \text{se} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 \quad , \quad \text{se} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^8+y^4} \quad , \quad \text{se} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 \quad , \quad \text{se} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} 4x^2+9y^2, \quad \text{se} \quad 4x^2+9y^2 \leq 1 \\ 0 \quad , \quad \text{se} \quad 4x^2+9y^2 > 1 \end{cases}$$

$$d)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \quad , \quad \text{se} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 \quad , \quad \text{se} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

Capítulo 4

Diferenciabilidade

4.1 Derivadas Parciais

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis.

Definição 4.1. *As derivadas parciais primeiras de f em relação a x e y no ponto $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ são definidas por:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

sempre que os limites existam.

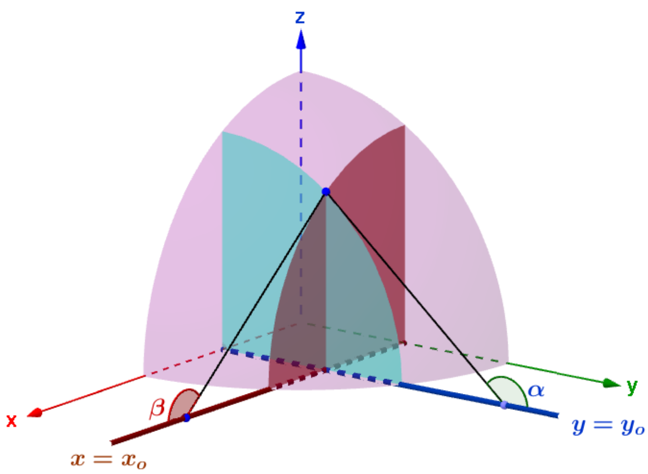


Figura 4.1

Na Figura 4.1 vemos a varição da função na direção dos eixos x e y.

O procedimento para encontrar derivadas parciais se chama diferenciação parcial.

Notações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y) = f_1(x,y) = D_1 f(x,y) = D_x f(x,y).$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y) = f_2(x,y) = D_2 f(x,y) = D_y f(x,y).$$

Exemplo 4.1. *Use a definição para calcular as derivadas parciais de primeira ordem da função* $f(x,y) = x^2 + 2xy$ *no ponto* (x_0, y_0).

Sol.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 + 2(x_0+\Delta x)y_0 - (x_0^2 + 2x_0y_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y_0\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x + 2y_0 \\
&= 2x_0 + 2y_0.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0(y_0+\Delta y) - (x_0^2 + 2x_0y_0)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x_0\Delta y}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} 2x_0 \\
&= 2x_0.
\end{aligned}$$

Observação 4.1. *Para o cálculo das derivadas parciais podem ser usadas fórmulas análogas ás das funções de uma variável. Por exemplo:*

$$\frac{\partial}{\partial x}(f.g) = \frac{\partial f}{\partial x}\, g + f\frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\, g - f\, \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$$

Exemplo 4.2. *Seja* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ *Determine as derivadas parciais primeiras de* $f(x,y)$.

Sol. Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$, temos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^3 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2yx^2(x + 1)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

No ponto $(x, y) = (0, 0)$, pela definição de derivada parcial temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-1 - 0}{\Delta y} \text{.....(não existe)}$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-2yx^2(x + 1)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \text{não existe}, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Definição 4.2. *Seja f uma função de n-variáveis e $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Dom(f)$. Se $1 \leq k \leq n$, então a derivada parcial de f em relação a k-ésima variável x_k é denotada e definida por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + h, \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}.$$

Exemplo 4.3. *Seja $f(x, y, z) = xy^2z^3$. Usando a definição, calcule as derivadas parciais primeiras de $f(x, y, z)$.*

Sol. No ponto (x_0, y_0, z_0), temos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)\, y_0^2\, z_0^3 - x_0 y_0^2 z_0^3}{h} \\ &= y_0^2 z_0^3, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) &= \lim_{h\to 0} \quad \frac{f(x_0,y_0+h,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \quad \frac{x_0(y_0+h)^2z_0^3 - x_0y_0^2z_0^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \quad \frac{2hx_0y_0z_0^3 + h^2x_0z_0^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \quad 2x_0y_0z_0^3 + hx_0z_0^3\\
&= 2x_0y_0z_0^3
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) &= \lim_{h\to 0} \quad \frac{f(x_0,y_0,z_0+h)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \quad \frac{x_0y_0^2(z_0+h)^3 - x_0y_0^2z_0^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \quad \frac{3hx_0y_0^2z_0^2 + 3h^2x_0y_0^2z_0 + h^3x_0y_0^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \quad 3x_0y_0^2z_0^2 + 3hx_0y_0^2z_0 + h^2x_0y_0^2\\
&= 3x_0y_0^2z_0^2.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.4. *Calcule as derivadas parciais primeiras de* $f(x,y,z) = x\ e^{x-y+z}$.

Sol. No ponto (x,y,z), temos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= e^{x-y+z} + x\ e^{x-y+z}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -x\ e^{x-y+z}\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= x\ e^{x-y+z}
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.5. *Calcule as derivadas parciais primeiras de*

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0)\\ 0, & \textit{(x,y)= (0,0).} \end{cases}
$$

Sol. Consideremos dois casos:

a) Se $(x,y) \neq (0,0)$, então:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

$b)$ Se $(x, y) = (0, 0)$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \quad \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \quad \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) == \lim_{h \to 0} \quad \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \quad \frac{0-0}{h} = 0$$

De $a)$ e $b)$ concluímos que f possui derivadas parciais em todos os pontos do plano. Entretanto a função f não é contínua em $(0, 0)$.

4.2 Exercícios

1. Encontre as derivadas parciais das seguintes funções.

   $a)$ $f(x, y) = 3xy + 6x - y^2 + 3$

   $b)$ $f(x, y) = e^{(\frac{y}{x})} \tan \frac{x^2}{y}$

   $c)$ $f(x, y) = \dfrac{x + y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$

   $d)$ $f(x, y) = \int_x^y \ln(\sin t) dt$

   $e)$ $f(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2} \sec x$

   $f)$ $f(r, s, t) = r^2 e^{2s} \cos t$

   $g)$ $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4 + 2x - 5yz$

   $h)$ $f(x, y, t) = \dfrac{x^2 - t^2}{1 + \sin 3y}$

   $i)$ $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$

   $j)$ $f(u, w) = \arctan \dfrac{u}{w}$

   $k)$ $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right) e^{y/x}$

   $l)$ $f(u, w) = \arcsin \dfrac{u + w^2}{w}$

2. Seja $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$. Calcule as derivadas parciais $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ e $f_y(2, 1)$

3. Dada a função $f(x, y) = \sqrt{x - y}$. Represente graficamente o domínio de f e a seguir determine f_y.

4. Encontrar a declividade da reta tangente à curva resultante da intersecção de:

   (a) $z = x^2 + y^2$ com o plano $x = 1$, no ponto $(1, 2, 5)$

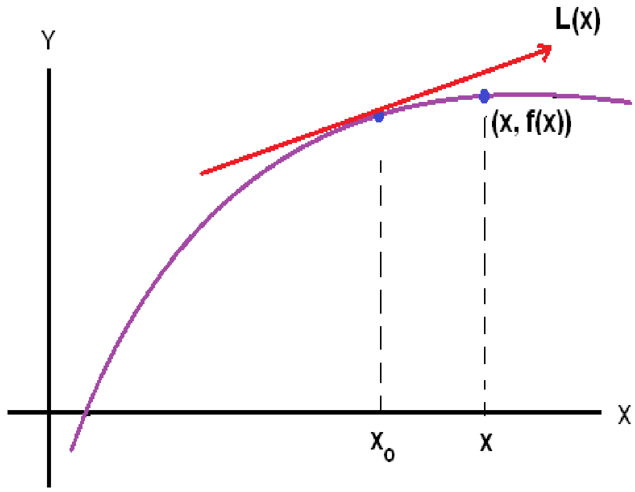
   (b) $z = x^2 + y^2$ com o plano $y = 2$, no ponto $(2, 2, 8)$

   (c) $z = \sqrt{34 - 9x^2 - 4y^2}$ com o plano $y = 2$, no ponto $(1, 2, 3)$

5. Encontre a inclinação da reta tangente à curva de interseção do gráfico de $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1}$ com o plano $y = 4$ no ponto $(3, 4, 2)$.

4.3 Diferenciabilidade

Lembremos que uma função de uma variável real, $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x_0 \in U$ se, e somente se, existe uma reta de equação $L(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ tal que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$.



Consequentemente, f é diferenciável em x_0 se, e somente se, existe $f'(x_0)$ e $m = f'(x_0)$.

Observar que a diferença $E(x) = f(x) - L(x)$ é o erro cometido ao se calcular o valor aproximado de $f(x)$ na reta $L(x)$. Logo, dizer que uma função $y = f(x)$ é diferenciável em x_0, significa que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{E(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 0$$

ou seja o erro na aproximação de $f(x)$ por $L(x)$ tende a zero mais rapidamente do que $x - x_0 \to 0$, quando $x \to x_0$.

Para funções de duas variáveis, intuitivamente podemos dizer que uma função é diferenciável em (x_0, y_0) se existe um plano não vertical contendo $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de equação

$$z = T(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

que se confunde com o gráfico de f nas proximidades de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Definição 4.3. *Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, se para cada $(x_0, y_0) \in U$ existe uma bola aberta de raio $r > 0$ e centro em (x_0, y_0), tal que*

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) / \|(x - x_0, y - y_0)\| < r\} \subset U.$$

Definição 4.4. *Sejam $z = f(x, y)$ uma função definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in U$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se, e somente se, existem constantes* *reais a e b, tal que*

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0.$$

onde

$$\begin{aligned} E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - (f(x_0,y_0) + a\Delta x + b\Delta y) \\ &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - T(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \end{aligned}$$

Teorema 4.1. *Se f é diferenciável em (x_0,y_0) então f é contínua em (x_0,y_0).*

Prova: Se f é diferenciável em (x_0,y_0) então existem constantes reais a e b, tal que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \|(\Delta x,\Delta y)\| \, \frac{E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (a\Delta x + b\Delta y) = 0.$$

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0,y_0) + a\Delta x + b\Delta y + E(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \\ &= f(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Teorema 4.2. *Se f é diferenciável em (x_0,y_0) então f possui derivadas parciais em (x_0,y_0).*

Prova: Se f é diferenciável em (x_0,y_0), considerando $\Delta y = 0$ temos:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{E(x_0+\Delta x, y_0)}{\|(\Delta x, 0)\|} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) - a\Delta x}{|\Delta x|} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} - a = 0.$$

Portanto, segue que:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Analogamente, se $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{E(x_0, y_0+\Delta y)}{\|(0,\Delta y)\|} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - b\Delta y}{|\Delta y|} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} - b = 0.$$

Portanto, segue que:

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Observação 4.2. *As reciprocas do Teoremas 4.1 e Teoremas 4.2, nós dizem respectivamente que:*

1. *Se f não é contínua em (x_0, y_0) então f não é diferenciável em (x_0, y_0).*

2. *Se alguma das derivadas parciais de f não existe em (x_0, y_0) então f não é diferenciável em (x_0, y_0).*

Observação 4.3. *Para provar que uma função $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) é suficiente provar que f admite derivadas parciais em (x_0, y_0) e que:*

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0,$$

onde

$$E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, \Delta y$$

Exemplo 4.6. *Mostre que $f(x, y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Sol. De fato,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, \Delta y \\ &= (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2 - 2x\, \Delta x - 2y\Delta y \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{E(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|^2} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0.$$

O que prova que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 4.7. *A função* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ *é diferenciável em* $(0,0)$*? Justifique sua resposta.*

Sol. Como f não é contínua em $(0,0)$, f não é diferenciável em $(0,0)$. Embora, deve-se notar que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existem.

Exemplo 4.8. *A função* $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$ *é diferenciável em* $(0,0)$*?. Justifique*

Sol. Como f é contínua em $(0,0)$ e admite derivadas parciais em $(0,0)$, a saber

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} E(0+\Delta x, 0+\Delta y) &= f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\ \Delta y \\ &= (\Delta x)^{1/3}(\Delta y)^{1/3} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{E(\Delta x, \Delta x)}{\|(\Delta x, \Delta x)\|} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{2/3}}{(2(\Delta x)^2)^{1/2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2}\ |\Delta x|^{1/3}} = +\infty.$$

Segue que $f(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$.

Teorema 4.3. *Seja* U *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in U$ *. Se as derivadas parciais* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *existem numa bola aberta* $B_r(x_0,y_0) \subset U$ *e são contínuas, então* f *é diferenciável em* (x_0, y_0)*.*

Prova: Quando y fixo (ou x fixo), f depende só de x (f depende só de y) e sua derivada parcial pode ser vista como a derivada de uma função real.

Assim, como as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existem, então pelo Teorema de Valor Médio temos que

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})(y - y_0) \end{aligned}$$

onde $\bar{x} \in (x_0, x)$ e $\bar{y} \in (y_0, y)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{E(x,y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})\Delta y - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})\right)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\end{aligned}$$

Por outro lado, sabendo que:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x} \text{ é contínua em } (x_0,y_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial y} \text{ é contínua em } (x_0,y_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = 0 \\ &\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \leq 1,\end{aligned}$$

temos

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0.$$

Observação 4.4. *A reciproca do Teoremas 4.3 não é verdadeira, ou seja existem funções que são diferenciáveis num ponto, sem que as derivadas parciais sejam contínuas nesse ponto.*

Definição 4.5. *Sejam $z = f(x,y)$ uma função diferenciável em (x_0,y_0). O plano de equação*

$$z = T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{4.1}$$

é chamado ***plano tangente*** *ao gráfico de f no ponto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.*

Usando o produto interno podemos escrever a equação da forma:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right) \cdot \Big(x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0)\Big) = 0$$

Observamos que o plano tangente ao gráfico de f em (x_0,y_0) é perpendicular à direção do vetor

$$N(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

chamado de vetor normal.

A reta que passa por $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ e é paralela ao vetor $N(x_0,y_0)$ é chamada **reta normal** ao gráfico da função em $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ e sua equação é dada por:

$$(x,y,z) = \Big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\Big) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right), \qquad t\in\mathbb{R}$$

Observe que só definimos plano tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ no caso em que f é diferenciável em (x_0, y_0). Se f não é diferenciável em (x_0, y_0), mas admite derivadas parciais neste ponto, então a equação do plano (4.1) existe, mas não é necessariamente tangente ao gráfico.

Exemplo 4.9. *Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de* $f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ *no ponto* $(3, 4, -3)$

Sol. Se $(x,y) \neq (0,0)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Além disso,

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(3,4)$$
$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(3,4),$$

o que mostra que as derivadas parciais são contínuas em $(3,4)$. Logo, pelo *Teorema 4.3*, f é diferenciável em $(3,4)$.

A equação do plano tangente de f em $(3,4)$ é dada por:

$$z = f(3,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,4)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)(y-4)$$

ou

$$z = -3 - \frac{3}{5}(x-3) - \frac{4}{5}(y-4)$$

A equação da reta normal ao gráfico de f em $(3,4)$ é

$$(x,y,z) = (3,4,-3) + t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(3,4), \frac{\partial f}{\partial y}(3,4), -1\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$(x,y,z) = (3,4,-3) + t\left(\frac{-3}{4}, \frac{-4}{5}, -1\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Definição 4.6. *Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ é aberto, se para cada $(x_0, y_0, z_0) \in U$ existe uma bola aberta de raio $r > 0$ e centro em (x_0, y_0, z_0), tal que*

$$B_r(x_0,y_0,z_0) = \{(x,y,z) / \|(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\| < r\} \subset U.$$

Definição 4.7. *Seja f uma função definida num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$. Dizemos que f é diferenciável em P_0 se, e somente se, existem as derivadas parciais de f em P_0 e*

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)} \frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)}{\|(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\|} = 0,$$

onde

$$E(P_0 + \Delta(x,y,z)) = f(P_0 + \Delta(x,y,z)) - \left(f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\ \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\ \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\ \Delta z \right)$$

sendo que $\Delta(x,y,z) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Observação 4.5. *O* Teorema 4.1*,* Teorema 4.2 *e* Teorema 4.3*, podem ser estendidos às funções de 3-variáveis.*

Definição 4.8. *Uma função real de n-variáveis reais é dita de classe C^1 em P_0, se e somente se, f possui derivadas parciais numa bola aberta $B_r(P_0)$ e tais derivadas são contínuas em P_0.*

Observação 4.6. *Toda função f de classe C^1 em P_0 é diferenciável em P_0.*

4.4 Exercícios

1. Considere a função $f(x,y) = e^{x+y} + x + y$:

   (a) Estude a continuidade e a existência de derivadas parciais de 1^a ordem de $f(x,y)$ em $\mathbb{R}^2$ e conclua quanto à sua diferenciabilidade.

   (b) Estude a continuidade das derivadas parciais de 1^a ordem em $\mathbb{R}^2$ e conclua quanto à sua diferenciabilidade.

2. Verifique se cada função é diferenciável no ponto indicado. Justifique sua resposta.

   a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ em $(0,0)$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x+y} \cos e^{x^2+y^2}$ em $(1,1)$.

   c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{xy} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ em $(0,0)$.

   d) $f(x,y) = xe^{-y}$ em (x,y).

   e) $f(x,y) = \dfrac{3xy}{x^3 + y^3}$ em $(1,2)$.

   f) $f(x,y) = |xy|$ em $(0,1)$.

3. Verifique se as funções são diferenciáveis em $(0,0)$.

$a)$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

$b)$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

$e)$ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

$d)$ $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}\cos\, y$.

4. Seja $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & (x,y)=(0,0).\end{cases}$.

$a)$ Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$b)$ Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas em (0,0).

$c)$ Mostre, usando a definição, que f é diferenciável em (0,0). Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

5. Seja $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 \quad , & (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$

$a)$ Prove que f_x, f_y e f_z existem em $(0,0,0)$.

$b)$ Prove que f não é diferenciável em $(0,0,0)$.

6. Sabendo que o plano tangente a $f(x,y)$ no ponto $(1,-1,2)$ é $3x-4y+2z=11$. Quanto valem as derivadas parciais $f_x(1,-1)$ e $f_y(1,-1)$?

7. Calcule o plano tangente à superfície $z=4x^2-y^2+2y$ no ponto $(-1,2,4)$.

8. Encontre o ponto onde o plano tangente a cada uma das superfícies, de equação abaixo, é horizontal.

$a)$ $f(x,y)=2x^2+2xy-y^2-5x+3y-2$. $\qquad$ $b)$ $f(x,y)=x^2y^2+2(x-y)$.

9. Considere a superfície S de equação $z=2x^2+2y^2$.

$a)$ Determine o ponto $P_0\in S$ tal que o plano tangente a S em P_0 seja ortogonal ao vetor $V=(0,1,-\frac{1}{6})$.

b) Escreva a equação do plano tangente referido no item a).

10. Considere a superfície do parabolóide de equação $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25}$.

    a) Encontre uma equação do plano tangente ao parabolóide no ponto $P_0 = (6, 10, 8)$.

    b) Este parabolóide deve ser apoiado em uma viga presa ao eixo z, de tal modo que esta fique tangente à superfície em P_0. Calcule o comprimento da viga.

11. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcule o comprimento do segmento da reta normal ao gráfico da f compreendida entre o ponto (3,-4,5) e o plano xy.

4.5 Diferencial Total

Seja $z = f(x, y)$. Se x e y sofrem pequenas variações Δx e Δy respectivamente, então z varia uma quantidade Δz dada por:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Considerando que f seja diferenciável em (x, y) conhecemos que o erro

$$E(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - \left(f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y \right)$$

será pequeno.

Logo, se $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ então diremos que:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y$$

ou

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Portanto, fica definido o **Diferencial Total** de f por

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

ou equivalentemente,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

Exemplo 4.10. *Seja* $f(x, y) = 3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1$. *Encontre a diferencial total* df

Sol.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2y^2 - 2y^3 + y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^3y - 6xy^2 + x.$$

Daí

$$df = (9x^2y^2 - 2y^3 + y)\,dx + (6x^3y - 6xy^2 + x)\,dy.$$

Exemplo 4.11. *O volume de um cone circular reto de altura h e raio de base r é dado por $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Se a altura é aumentada de $5cm$ para $5,01cm$, enquanto o raio da base é diminuido de $4,0cm$ para $3,98cm$, encontre uma aproximação da variação ΔV no volume.*

Sol. Usamos o diferencial total dV para aproximar ΔV. Assim,

$$d\,V = \frac{\partial V}{\partial h}\,dh + \frac{\partial V}{\partial r}\,dr = \frac{1}{3}\pi r^2\,dh + \frac{2}{3}\pi r h\,dr.$$

Como $h = 5$, $dh = 0,01$ e $r = 4$, $dr = -0,02$, então

$$\Delta V \approx d\,V = \frac{1}{3}\pi(4)^2\,(0,01) + \frac{2}{3}\pi(4)(5)\,(-0,02) = -0,6702.$$

Observação 4.7. *Se $w = f(x,y,z)$, a **Diferencial Total** de f em (x,y,z), é*

$$dw = d\,f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz$$

4.6 Exercícios

1. Calcule o diferencial total das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = xy + y^2$ *c)* $f(x,y,z) = xe^{yz} + ye^{xz} + ze^{xy}$.

   b) $f(x,y) = e^x \cos\, y + e^{-x}\,\mathrm{sen}\, y$.   *e)* $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$.

2. Calcule a variação aproximada das funções:

   a) $f(x,y) = e^x + \ln(xy)$ entre os pontos $(1;2)$ e $(0,9\ ;\ 2,1)$

   b) $f(x,y) = \sqrt{\ln\,(xy)}$ entre os pontos $(1\ ;\ 1,2)$ e $(1,016\ ;\ 1,2)$.

3. Considere a função $f(x;y) = \sqrt{y}\ \cos(\ln x)$. Calcule, aplicando diferenciais, o valor aproximado da função no ponto $(1,05\ ;\ 3,95)$

4. As dimensões de uma caixa retangular são 5, 6 e 8 polegadas. Se cada dimensão aumenta em 0,01 polegada, qual é aproximadamente o volume resultante.

4.7 Regra da Cadeia

Seja $z = f(x, y)$, onde x e y são funções que dependem de outra variável t; ou seja $x = x(t)$ e $y = y(t)$, então z fornece uma única variável t, isto é $z(t) = f(x(t), y(t))$. Logo, como

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy,$$

então:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Teorema 4.4. ***Primeira Regra da Cadeia*** *Seja $z = f(x, y)$ uma função definida num subconjunto aberto $U \subset R^2$, e $x(t)$ e $y(t)$ funções diferenciáveis em $t_0 \in I$. Se f é diferenciável em $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Então, a função composta $z(t) = f(x(t), y(t))$ é diferenciável em t_0 e*

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{dy}{dt}(t_0)$$

Exemplo 4.12. *Seja $z = f(x, y) = x^2 y + y^3$, onde $x(t) = e^t$ e $y(t) = t\cos t$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$*

Sol. Sabendo que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ e $\dfrac{dy}{dt} = \cos t - t \operatorname{sen} t$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 2xy\frac{dx}{dt} + (x^2 + 3y^2)\frac{dy}{dt} \\ &= 2te^{2t}\cos t + (e^{2t} + 3t^2\cos^2 t)(\cos t - t\sin t). \end{aligned}$$

Observação 4.8. *A primeira regra da cadeia pode ser generalizada para funções de mais de duas variáveis. De fato, se $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, é uma função de n-variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e cada uma dessas variáveis é por sua vez função de uma variável t, então:*

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\,\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\,\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\,\frac{dx_n}{dt}.$$

Exemplo 4.13. *Seja $w = \ln\left(\dfrac{x^2y^2}{4z^3}\right)$, onde $x(t) = e^t$, $y(t) = \sec t$ e $z(t) = \cot t$. Calcule $\dfrac{dw}{dt}$*

Sol. Sabendo que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$, $\dfrac{dy}{dt} = \sec t \tan t$, $\dfrac{dz}{dt} = -\csc^2 t$ e pelas propriedades de logaritmo

$$w = 2\ln x + 2\ln y - \ln 4 - 3\ln z,$$

então:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2}{x}\frac{dx}{dt} + \frac{2}{y}\frac{dy}{dt} - \frac{3}{z}\frac{dz}{dt} = 2 + 2\tan t + \frac{3}{\cot t}\csc^2 t = 2 + 2\tan t + 3\sec t\csc t.$$

Agora, consideremos o caso que $z = f(x, y)$, onde x e y são funções que dependem de duas variáveis u e v; ou seja $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$. Então z fornece uma função que depende de u e v, isto é

$$z(u, v) = f(g(u, v), h(u, v)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}
\end{aligned}$$

Teorema 4.5. ***Segunda Regra da Cadeia*** *Sejam f, g e h funções de duas variáveis. Suponhamos que f seja diferenciável em (x_0, y_0) e as funções g e h diferenciáveis em (u_0, v_0), onde $(x_0, y_0) = \Big(g(u_0, v_0), h(u_0, v_0)\Big)$.*

Se $F(u, v) = f\big(g(u, v), h(u, v)\big)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0)\\
\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0)
\end{aligned}$$

Exemplo 4.14. *Seja $z = x^2 - y^2$, onde $x(u, v) = u\cos v$ e $y(u, v) = v \operatorname{sen} u$. Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.*

Sol. Sabendo que $\dfrac{\partial x}{\partial u} = \cos v$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u} = v\cos u$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\
&= 2x\cos v - 2y(v\cos u)\\
&= 2u\cos^2 v - 2v^2 \operatorname{sen} u\ \cos u.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\dfrac{\partial x}{\partial v} = -u \operatorname{sen} v$ e $\dfrac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen} u$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\
&= 2x(-u \operatorname{sen} v) - 2y \operatorname{sen} u\\
&= -2u^2 \operatorname{sen} v\cos v - 2v\operatorname{sen}^2 u
\end{aligned}$$

Observação 4.9. *Utilizar a regra da cadeia, é bem similar ao que se acostumava fazer em Cálculo I. No entanto, alguns exercícios podem ser confusos quanto ao uso de valores e variáveis, nesse caso deve-se sempre tomar bastante cuidado.*

Exemplo 4.15. *Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y tal que $f_x(1,2) = 2$ e $f_y(1,2) = 5$. Calcular $g_u(0,0)$ e $g_v(0,0)$ sabendo que:*

$$g(u,v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$$

Solução: Fazendo $x = e^u + \operatorname{sen} v$ e $y = e^u + \cos v$, temos:

$$g(u,v) = f(x,y)$$

sendo que $g(0,0) = f(1,2)$. Logo,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\,\frac{\partial x}{\partial u}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\,\frac{\partial y}{\partial u}(0,0) = 2\ e^u|_{(0,0)} + 5\ e^u|_{(0,0)}$$
$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\,\frac{\partial x}{\partial v}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\,\frac{\partial y}{\partial v}(0,0) = 2\ \cos v|_{(0,0)} - 5\ \operatorname{sen} v|_{(0,0)}$$

Portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 7$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = 2.$$

4.8 Exercícios

1. Use a regra da cadeia para encontrar cada derivada.

   a) $\dfrac{dz}{dt}$, se $z = x^3y^2 - 3xy, \quad x = 2t,\ y = 6t^2.$

   b) $\dfrac{dw}{dx}$, se $w = u \operatorname{sen} v + \cos(u - v), \quad u = x^2,\ v = x^3$

   c) $\dfrac{dz}{dt}$, se $w = e^{x^2y},\ x = \operatorname{sen} t,\ y = \cos t.$

   d) $\dfrac{dz}{dt}$ em $t = 0$, se $z = \sqrt{x^2y - 3xy^4}, \quad x = \operatorname{sen} 2t,\ y = \cos t.$

   e) $\dfrac{dw}{d\theta}$ se $w = \sqrt{u^2 - v^2}, \quad u = \operatorname{sen}\theta,\ v = \cos\theta.$

   f) $\dfrac{dw}{dr}, \quad \dfrac{dw}{ds}$, se $w = 6xyz, \quad x = rs, \quad y = 2r + s, \quad z = 3r^2 - s.$

   g) $\dfrac{dw}{du}, \quad \dfrac{dw}{dv}$, se $w = 2x^2 + 3y^2 + z^2, \quad x = u\cos v,\ y = u \operatorname{sen} v,\ z = uv.$

   h) $\dfrac{dw}{d\rho}, \quad \dfrac{dw}{d\theta}, \quad \dfrac{dw}{d\phi}$, se $w = x^2 + y^2 - z^2,\ x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\phi\sin\theta,\ z = \rho\cos\phi.$

2. Seja $z = f\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ com f derivável, verifique que: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

3. Considere a função diferenciável $f(x,y)$, onde $x = g(u,v) = v\cos(\pi + u) + e^{uv}$ e $y = h(u,v) = u^2 - v^2$. Sabendo que $\dfrac{df}{dx}(-1,-4) = 3$ e $\dfrac{df}{dy}(-1,-4) = 2$, determine as derivadas parciais $\dfrac{dF}{du}(0,2)$ e $\dfrac{dF}{dv}(0,2)$ da função $F(u,v) = f(g(u,v), h(u,v))$.

4.9 Diferenciação Implícita

Dada uma equação nas variáveis x e y, podemos expressar ela da seguinte forma

$$f(x, y) = 0,$$

onde f é função de duas variáveis.

Esta equação define implicitamente y por uma função g que depende de x ($y = g(x)$). Logo, para todo $x \in \ Dom(f)$

$$f(x, g(x)) = 0$$

Usando, o *Teorema 4.4* temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\ \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

Portanto, se $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$ temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

Exemplo 4.16. *Seja a equação $x^3y^2 + 3xy^2 + 5x^4 = 2y + 7$. Encontre o valor de $\dfrac{dy}{dx}$, quando $x = 1$ e $y = 1$*

Sol. Podemos colocar a equação sob a forma $f(x, y) = 0$ onde

$$f(x, y) = x^3y^2 + 3xy^2 + 5x^4 - 2y - 7.$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 + 3y^2 + 20x^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y + 6xy - 2.$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y^2 + 3y^2 + 20x^3}{2x^3y + 6xy - 2}$$

Portanto, para $x = 1$ e $y = 1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{13}{3}.$$

Observação 4.10. *Se $f(x, y, z) = 0$, define uma equação de três variáveis, ela pode ser resolvida para uma das variáveis, digamos y em termos das outras variáveis x e z. Esta solução tem a forma $y = g(x, z)$, então:*

$$f(x, g(x, z), z) = 0$$

é valida para todos os pontos (x, z) do domínio da função g. Além disso, dizemos que a equação $f(x, y, z) = 0$ define implicitamente y como uma função g que depende de x e z. Assumindo que as funções f e g sejam diferenciáveis podemos calcular as derivadas parciais em relação a x e em relação a y. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z} = 0$$

Logo,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad\qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Exemplo 4.17. *Suponha que y seja uma função de x e z, dada implicitamente por*

$$7x^3y - 4xyz^3 + x^2y^3z^2 - z - 14 = 0. \tag{4.2}$$

Encontre o valor de $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial z}$, quando $x = 1$ e $z = 0$.

Sol. A equação tem a forma $f(x, y, z) = 0$, onde

$$f(x, y, z) = 7x^3y - 4xyz^3 + x^2y^3z^2 - z - 14.$$

Substituindo $x = 1$ e $z = 0$ na equação (4.2) temos que $y = 2$.

Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 21x^2y - 4yz^3 + 2xy^3z^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2, 0) = 42,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 7x^3 - 4xz^3 + 3x^2y^2z^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2, 0) = 7,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -12xyz^2 + 2x^2y^3z - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, 0) = -1,$$

então

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{42}{7} = -6 \qquad\qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{-1}{7} = \frac{1}{7}$$

OUTRA FORMA: Considerando que $y = y(x, z)$, e derivando diretamente a equação (4.2) em relação a x temos

$$21x^2y + 7x^3\frac{\partial y}{\partial x} - 4yz^3 - 4xz^3\frac{\partial y}{\partial x} + 2xy^3z^2 + 3x^2y^2z^2\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Logo, $\dfrac{\partial y}{\partial x}(1, 2, 0) = -\dfrac{42}{7} = -6.$

Analogamente, derivando a equação (4.2) em z, obtemos que

$$7x^3\frac{\partial y}{\partial z} - 4xz^3\frac{\partial y}{\partial z} - 12xyz^2 + 3x^2y^2z^2\frac{\partial y}{\partial z} + 2x^2y^3z - 1 = 0.$$

Consequentemente, $\dfrac{\partial y}{\partial z}(1,2,0) = \dfrac{1}{7}$.

Definição 4.9. *Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função escalar de n-variáveis que possui derivadas parciais no ponto $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O gradiente de f é a função (ou campo) vetorial $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

No caso que $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. O vetor gradiente de f em P, é o vetor

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

No caso que $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. O vetor gradiente de f em P, é o vetor

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Exemplo 4.18. *O campo gradiente do paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ é*

$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$$

Teorema 4.6. *Seja $w = f(x, y, z)$ uma função de classe C^1 num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ tal que $\nabla f(P_0) \neq 0$. Se S é a superfície de nível de $f(x, y, z) = k$ que contém P_0, então $\nabla f(P_0)$ é normal a S em P_0.*

Prova Dado um vetor T tangente a S em P_0, então existe $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \subset S$ tal que $\sigma(t) = P_0$ e $\sigma'(t) = T$. Por outro lado, como $\sigma(t) \subset S$, então $f(\sigma(t)) = k$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} f(\sigma(t)) = 0,\\
&\frac{d}{dt} f(\sigma(t))\bigg|_{t=t_0} = \nabla f(x_0, y_0, z_0).\sigma'(t_0) = \nabla f(P_0).T = 0
\end{aligned}$$

Definição 4.10. *Sejam S uma superfície de nível de equação $f(x, y, z) = k$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de S. Se f é de classe C^1 num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e $\nabla f(P_0) \neq 0$, definimos o plano tangente a S em P_0 pela equação*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Além disso, a reta de equação

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \, \nabla f(x_0, y_0, z_0), \qquad t \in \mathbb{R}$$

denomina-se reta normal à S em P_0.

Exemplo 4.19. *Determine as equações do Plano Tangente e reta normal à S de equação $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$*

Sol. S é uma superfície de nível da função de classe C^1 $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2$. Assim, $\nabla f(x, y, z) = (2x, 6y, 8z)$ e $\nabla f(1, -1, 1) = (2, -6, 8)$. Portanto, o plano tangente a S em $P_0 = (1, -1, 1)$ é dado por:

$$2(x - 1) - 6(y + 1) + 8(z - 1) = 0$$

4.10 Exercícios

1. Derivar as funções implícitas e achar y_x, nas expressões abaixo

   (a) $2xy^2 + \text{sen}(xy) - 1 = 0$

   (b) $4y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

2. Derivar as funções implícitas e achar z_x e z_y, nas expressões abaixo

   (a) $2x^3 - 4y^2 - e^z = 0$

   (b) $x^2 + xy^2 + xyz^3 - 3 = 0$

3. Considere que y seja dada implicitamente como uma função diferenciável das outras variáveis das equações. Encontre o valor das derivadas parciais indicadas quando as variáveis têm os valores dados.
   a) Se $xy^2z - 3x^2yz + \dfrac{2xz}{y} - z^2 = 0$, ache $\dfrac{dy}{dx}$ *e* $\dfrac{dy}{dz}$ quando $x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1$.
   b) Se $\dfrac{\text{sen}(y - x)}{z^2} = \dfrac{\cos(x + y)}{w^2 - 3}$, ache $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{dz}$ *e* $\dfrac{dy}{dw}$ quando $x = \pi/4, \quad y = \pi/4, \quad z = 1, \quad w = -2$.

4. Determine o ponto situado no primeiro octante, da superfície de equação $x^2 + 3y^2 + \dfrac{3z^2}{2} = 18$ no qual a reta normal é perpendicular ao plano $x + y + z = 10$.

5. Seja $V = V(P, T)$. Se $P(V - b)e^{RV} = RT$, com b e R constantes, calcule $\dfrac{\partial V}{\partial T}$

4.11 Derivada Direcional

Sejam $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis, $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto do domínio de f e u um vetor não nulo do plano xy. O conjunto de pontos $P_0 + tu$, $t \in \mathbb{R}$, é a reta L que contém P_0 e é paralela ao vetor u.

A derivada direcional de f em P_0 na direção do vetor u, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ é a taxa de variação de $f(x, y)$ em P_0 na direção de L. Geometricamente, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva C de equação $z = f(P_0 + t\,u)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. (Ver Figura 4.2)

Definição 4.11. *A derivada direcional de uma função $z = f(x, y)$ em P_0 na direção do vetor u é definida por*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{\|u\|\; t}$$

sempre que este limite existir.

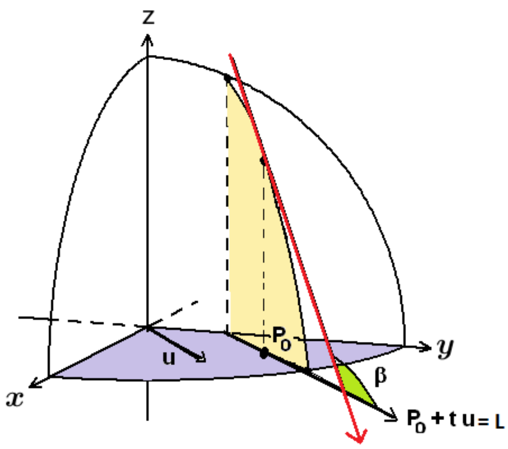


Figura 4.2: A derivada direcional em P_0 na direção do vetor u

Observação 4.11. *As derivadas parciais de $f(x, y)$ em relação a x e y em P_0 são as derivadas direcionais nas direções dos vetores $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$ respectivamente.*

Exemplo 4.20. *Seja $f(x, y) = x^3 y^2$. Ache a derivada direcional de f em $P_0 = (-1, 2)$ na direção do vetor $u = (4, -3)$.*

Sol. Calculando, temos $\|u\| = 5$ e

$$\frac{\partial f}{\partial u}(-1, 2) = \lim_{t \to 0} \frac{f((-1, 2) + t(4, -3)) - f(-1, 2)}{5t} = 12$$

A derivada direcional de f em P_0 na direção do vetor u, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ é a taxa de variação de $f(x, y)$ em P_0 na direção de L. Geometricamente, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva C de equação $z = f(P_0 + t\,u)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Teorema 4.7. *Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}$$

onde $\nabla f(P_0) \cdot \dfrac{u}{\|u\|}$ é o produto escalar de $\nabla f(P_0)$ pelo vetor unitário na direção do vetor u.

Prova Desde que $z = f(x, y)$ é diferenciável em P_0, então

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0) - \nabla f(P_0) \cdot (tu)}{\|t\,u\|} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tu) - f(P_0)}{\|t\,u\|} - \frac{t\,\nabla f(P_0) \cdot u}{\|t\,u\|} = 0$$

ou que é equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|}.$$

Exemplo 4.21. *Seja $f(x, y) = x^3 y^2$, $\;P_0 = (-1, 2)\;$ e o vetor $u = (4, -3)$. Ache a derivada direcional de f em P_0.*

Sol. Calculando, temos $\|u\| = 5$, $\;\dfrac{u}{\|u\|} = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{-3}{5}\right)$ e $\nabla f = (3x^2y^2, 2x^3y)$. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial u}(-1, 2) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|} = (12, -4) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right) = 12$$

Teorema 4.8. *Se f é diferenciável em P_0, tal que $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$. Então, o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ ocorre quando u tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$, sendo $\|\nabla f(P_0)\|$ o valor máximo.*

Prova Seja θ o ângulo entre $\nabla f(P_0)$ e u, então

$$\frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{u}{\|u\|} = \|\nabla f(P_0)\| \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| \cos\theta = \|\nabla f(P_0)\| \cos\theta.$$

Logo $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ terá o valor máximo quando $\theta = 0$, ou seja, quando $\vec{u}$ tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$ e seu valor máximo é $\|\nabla f(P_0)\|$.

Exemplo 4.22. *Seja $f(x, y, z) = \dfrac{xz}{x^2 + y^2 + 1}$. Determine*

1. *A direção de maior variação de f e a taxa de maior variação da função no ponto $P = (1, 0, -1)$*

2. *A taxa de maior variação de f no ponto $P = (1, 0, -1)$ na direção e o sentido do vetor $u = \sigma'(t)$, onde $\sigma(t) = (t, 1 + 2t, t - 1)$.*

Sol. Como f é diferenciável em $P = (1, 0, -1)$ e $\nabla f(P) = (0, 0, 1/2) \neq \vec{0}$:

a) O Teorema 4.8 garante que a direção de maior variação de f em P é a do vetor $(0, 0, 1/2)$ e a taxa de maior variação de f no ponto P é $\|\nabla f(P)\| = 1/2$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \dfrac{u}{\|u\|} = (0, 0, 1/2) \cdot \dfrac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

4.12 Exercícios

1. Encontre a derivada direcional no ponto P_0 na direção do vetor u, nos seguintes casos.

   a) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad P_0 = (0, 1), \quad u = (2, 2)$.
   b) $f(x, y) = e^{x^2 - y^2} \quad P_0 = (1, 1), \quad u = (1, 3)$.
   c) $f(x, y) = 3x^2y + xy \quad P_0 = (1, 2), \quad u = (3, -4)$.
   d) $f(x, y, z) = \text{sen}(xy) + \cos(yz) \quad P_0 = (1, 0, -1), \quad u = (-1, 2, 2)$.
   e) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad P_0 = (1, 2, 3), \quad u = (1, -1, -1)$.

2. Calcule a derivada direcional da função $f(x, y) = ye^x$ no ponto $P = (0, 3)$ e na direção da reta tangente à parábola de equação $y = x^2 + 3$.

3. Sejam $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$, e $u = (1, 1)$.

   a) Calcule $\dfrac{df}{du}(0, 0)$, usando a definição. *b*) Calcule $\nabla f(0, 0).\dfrac{u}{\|u\|}$

4. Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ e o ponto $P_0 = (2, 2)$. Determine

   a) A Taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor (1,1).

   b) A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor tangente $g'(t)$ à curva $g(t) = (t, t^2 - t)$ em $(3, 6)$.

   c) A direção na qual a taxa de variação de f em P_0 é máxima.

5. Sendo $f(x, y) = x^2 + y^2$, calcule a derivada direcional de f no ponto $P = (1, 2)$, nas seguintes direções:

(a) Na direção do vetor $v = (-3, 4)$;

(b) Na direção $\alpha = 30^o$ e sentido crescente do eixo y;

(c) Na direção da reta $y = 2x$ e sentido crescente do eixo y.

4.13 Derivadas Parciais de Ordem Superior

Dada $z = f(x, y)$ definimos as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Ao definir as derivadas parciais de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ obtemos quatro novas funções, que são chamadas as derivadas parciais de segunda ordem de f, e são definidas por:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x + \Delta x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\Delta x} \\
f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\Delta y} \\
f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\Delta x} \\
f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\Delta y}.
\end{aligned}$$

sempre que que os limites existam.

As definições de derivadas parciais de segunda ordem de funções de três variáveis são análogas.

Exemplo 4.23. *Calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função*

$$f(x, y) = xy - e^x \cos y.$$

Sol. As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y - e^x \cos y \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x + e^x \operatorname{sen} y.
\end{aligned}$$

Logo, as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y - e^x \cos y\right) = -e^x \cos y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y - e^x \cos y\right) = 1 + e^x \operatorname{sen} y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x + e^x \operatorname{sen} y\right) = 1 + e^x \operatorname{sen} y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x + e^x \operatorname{sen} y\right) = e^x \cos y.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.24. *Calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (0,0). \end{cases}$$

Sol. As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^2(x^2+y^2) - 2y^4}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-1}{\Delta x} \ldots \text{(não existe)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 4.25. *A equação de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, sendo a constante, descreve o movimento de uma onda, que pode ser uma onda de som, uma onda de luz ou uma onda que viaja ao longo de uma corda vibrante. Se f e g são funções de uma variável dois vezes deriváveis, prove que a função $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ satisfaz a equação de onda.*

Solução Inicialmente faremos $u = x + at$ e $v = x - at$. Assim $u(x,t) = f(u) + g(v)$ e as derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) + g'(v) \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(u)\, a + g'(v)\, a. \tag{4.4}$$

Consequentemente, as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(u) + g''(v) \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f''(u)\, a^2 + g''(v)\, a^2. \tag{4.6}$$

Portanto,

$$u_{tt} = f''(u)\, a^2 + g''(v)\, a^2 = a^2(f''(u) + g''(v)) = a^2\, u_{xx}$$

Definição 4.12. *Se as derivadas parciais de segunda ordem são contínuas, dizemos que f é de classe C^2.*

Teorema 4.9. *(Teorema de Clairaut ou Teorema de Schwarz) Se $z = f(x, y)$ é de classe C^2, então suas derivadas mistas são iguais, isto é;*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Exemplo 4.26. *Seja*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calculando tem-se que $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 0$, porém $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

De fato, f_{xy} e f_{yx} estão definidas en $(0, 0)$, mas não são continuas neste ponto. Por isso, vamos calcular as derivadas parciais f_x e f_y sobre as retas $x = 0$ e $y = 0$ respectivamente e observar que seus valores deferem. Assim,

$$f_x(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hy(h^2 - y^2)}{h(h^2 + y^2)} = -y$$

e

$$f_y(x, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hx(x^2 - h^2)}{h(x^2 + h^2)} = x$$

Portanto,

$$f_{xy}(x, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k - 0}{k} = -1$$

e

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

Isto prova que $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

4.14 Exercícios

1. Calcule as derivadas parciais indicadas

   i) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$ *a)* $f_{xx}(x, y)$ *b)* $f_{yx}(x, y)$

   ii) $f(x, y, z) = y^2 z + \sin(x^2 z)$ *a)* $f_{xz}(x, y, z)$ *b)* $f_{yzx}(x, y, z)$

2. Se $f(x, y) = xye^{\frac{x}{y}}$, mostre que $x\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} + y\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 0.$

3. Mostre que as seguintes funções satisfazem a **equação de Laplace** :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

   (a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

   (b) $f(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$

4. Seja $w = e^{3x} f(x^2 - 4y^2)$, onde f é uma função derivável. Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

5. Seja $z(x, y) = 2(ax + by)^2 - (x^2 + y^2)$ com $a^2 + b^2 = 1$. Verifique que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

6. Seja $u(r, \theta) = r^n \cos(n\theta)$ com n um número natural constante. Verifique que satisfaz a equação

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

Capítulo 5

Máximos e Mínimos

5.1 Valores Extremos de Funções de duas Variáveis

Definição 5.1. *Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é um valor* ***máximo relativo ou local*** *de f (respectivamente* ***mínimo relativo*** *de f) se existe uma bola aberta $B_r(x_0, y_0) \subset D$ tal que*

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \qquad \text{(respectivamente } f(x,y) \geq f(x_0,y_0))$$

para todo $(x,y) \in B_r(x_0, y_0)$.

Um valor máximo ou mínimo relativo de f é chamado ***valor extremo relativo****. O ponto (x_0, y_0) onde f assume um valor extremo relativo é dito ponto extremo relativo.*

Definição 5.2. *Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que $f(x_0, y_0)$ é um valor* ***máximo absoluto*** *de f (respectivamente* ***mínimo absoluto*** *de f) se*

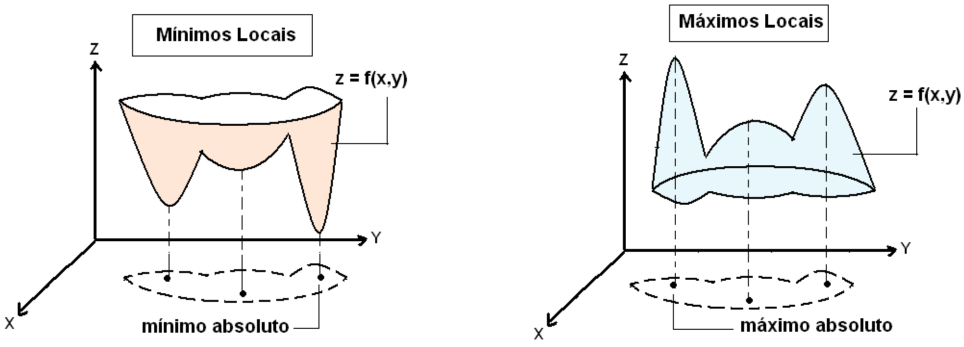
$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \qquad \text{(respectivamente } f(x,y) \geq f(x_0,y_0))$$

para todo $(x,y) \in D$. (Ver Figura 5.1a e 5.1b)

Teorema 5.1. *(**Condição Necessária para a existência de Extremos relativos**) Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cujo interior de D é não vazio, e (x_0, y_0) um ponto interior a D. Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e $f(x,y)$ tem um extremo relativo em (x_0, y_0), então*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Definição 5.3. *Um ponto (x_0, y_0) interior ao domínio de uma função $z = f(x,y)$ é chamado* ***Ponto Crítico*** *(P.C.) de f, se $\nabla f(x_0, y_0)$ não existe ou $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.*



(a) (b)

Figura 5.1: Valores Extremos

Exemplo 5.1. *Calcule os pontos extremos da função* $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ *com* $x^2 + y^2 \leq 4$.

Sol. Calculando temos que $\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0)$ se e somente se $x = 0$ e $y = 0$. Assim $(0,0)$ é ponto crítico e $f(0,0) = 1 < 1 + x^2 + y^2 = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Portanto, $(0,0)$ é ponto mínimo absoluto e f atinge seu valor mínimo em $f(0,0) = 1$.(Figura 5.2)

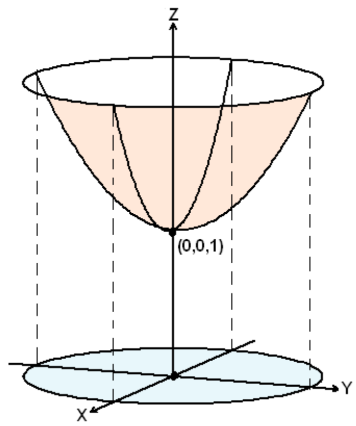


Figura 5.2: Gráfico da função $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

Exemplo 5.2. *Calcule os pontos extremos da função* $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sol. Calculando temos que $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ se $(x,y) \neq (0,0)$.

Por outro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ não existe, pois } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \text{não existe.}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ não existe, pois } \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} \text{não existe.}$$

O ponto $(0,0)$ é ponto crítico. Como $f(0,0) = 0$ e

$$0 = f(0,0) \leq f(x,y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Então, $(0,0)$ é mínimo absoluto.

Exemplo 5.3. *Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. A função f possui extremo relativo?*

Sol. A partir de $\nabla f(x,y) = (2x, -2y) = (0,0)$ obtemos que $(x,y) = (0,0)$. Portanto, $(0,0)$ é ponto crítico. Embora, no gráfico vemos que f não possui extremo relativo em $(0,0)$.

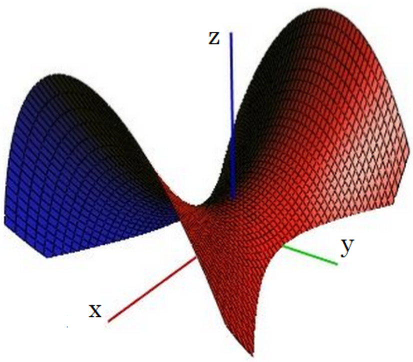


Figura 5.3: Ponto de Sela

Observação 5.1. *Observe que na Figura 5.3 algumas seções verticais do gráfico de f passando por $(0,0,0)$ tem concavidade voltada para cima e outros têm concavidade voltada para baixo. Neste caso diremos que a função tem um **Ponto de Sela** no ponto crítico $(0,0)$.*

Definição 5.4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A matriz $n \times n$ de derivadas de segunda ordem $D_{ij}f(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ é chamada Matriz Hessiana e é denotada por*

$$H(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^{n}$$

Exemplo 5.4. *Seja $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + xy^2$. Calcule a matriz Hessiana.*

Sol. Calculando as derivadas parciais de primeira ordem temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) + y^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) + 2xy.$$

Logo, a Matriz Hessiana é

$$H(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y^2 \operatorname{sen} xy & \cos(xy) - xy \operatorname{sen} xy + 2y \\ \cos(xy) - xy \operatorname{sen} xy + 2y & -x^2 \cos xy + 2x \end{bmatrix}$$

O seguinte Teorema dá a condição suficiente para um ponto crítico ser extremo local.

Teorema 5.2. ***(Teste da Segunda Derivada)*** *Seja $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto crítico interior ao domínio de f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Se*

$$\Delta(x_0, y_0) = det\ H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \tag{5.1}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 \tag{5.2}$$

então:

1. *Se $\Delta(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em (x_0, y_0).*
2. *Se $\Delta(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em (x_0, y_0).*
3. *Se $\Delta(x_0, y_0) < 0$, então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0).*
4. *Se $\Delta(x_0, y_0) = 0$ não se pode afirmar nada.*

Exemplo 5.5. *Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$. Encontre os extremos relativos de f.*

Sol. Calculando os pontos críticos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1 \end{aligned}$$

Em outras palavras, os P.C. são:

$$(1, 1),\ (-1, -1),\ (-1, 1),\ (1, -1).$$

Logo,

$$det\ H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy. \tag{5.3}$$

Portanto, temos

Ponto Crítico	Hessiano	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	Conclusão
(1,1)	$\Delta = 36 > 0$	6	Mínimo Local
(-1,-1)	$\Delta = 36 > 0$	-6	Máximo Local
(-1,1)	$\Delta = -36 < 0$		Ponto de Sela
(1,-1)	$\Delta = -36 < 0$		Ponto de Sela

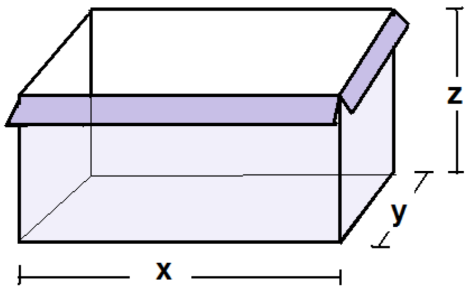


Figura 5.4: Caixa Retangular

Exemplo 5.6. *Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem a tampa com volume de $4\,u^3$ sendo usada a menor quantidade de material. (Figura 5.4)*

Sol. Pelos dados sabemos que se a caixa tem dimensões x, y e z então:

$$\text{Volume } = xyz = 4 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{4}{xy}$$

e

$$\text{Área da Superfície } = xy + 2(xz + yz)$$

Das equações anteriores podemos afirmar que a Área da Superfície depende só das variáveis x e y, isto é:

$$A(x,y) = xy + 2\left(x\,\frac{4}{xy} + y\,\frac{4}{xy}\right) = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}.$$

Calculando as derivadas parciais temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{8}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{8}{y^2}$$

Logo, os pontos críticos são os valores $x \neq 0$ e $y \neq 0$ tal que $y = \frac{8}{x^2}$ e $x = \frac{8}{y^2}$. Isto é

$$yx^2 = xy^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad xy(x-y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = 2$$

Em outras palavras, só existe um P.C., que é $(2,2)$ Logo,

$$det\ H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{16^2}{x^3y^3} - 1 \tag{5.4}$$

Ponto Crítico	Hessiano	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	Conclusão
(2,2)	$\Delta = 3 > 0$	2	Mínimo Local

5.2 Exercícios

1. Analise a natureza dos pontos críticos das seguintes funções:

   a) $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x.$

   b) $f(x, y) = x \sin y.$

   c) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

   d) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

   e) $f(x, y) = 4y^2e^{-(x^2+y^2)}$

   f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$

   g) $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$

   h) $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$

2. Mostrar que $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{y} + 5$

3. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem a tampa com $4m^3$ de volume, sendo usada a menor quantidade de material.

4. A temperatura T, em graus centígrados, em cada ponto de um painel plano é dada por $T(x, y) = 16x^2 + 24x + 40y^2$. Encontre a temperatura nos pontos mais quentes e mais frios da região.

5. Uma industria produz dois produtos denotados por A e B. O lucro da indústria pela venda de x unidades do produto A e y unidades do produto B é dado por:

   $$L(x, y) = 60x + 100y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy$$

   Supondo que toda a produção da indústria seja vendida, determinar a produção que maximiza o lucro. Determine, também, esse lucro.

5.3 Máximos e Mínimos com Restrições - Multiplicadores de Lagrange

Teorema 5.3. ***(Teorema de Lagrange)*** *Sejam f e g funções de duas variáveis, de classe C^1, definidas num subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ que contém a curva C de equação $g(x, y) = 0$.*

Se f tem um valor máximo ou mínimo em $(x_0, y_0) \in C$ e $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, então existe um número real λ tal que:

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0).$$

O número λ é chamado ***multiplicador de Lagrange*** *e a condição $g(x, y) = 0$ é a* ***restrição****.*

Observação 5.2.

a) O Teorema anterior significa que se (x_0, y_0) é ponto extremo de f então (x_0, y_0, λ_0) é ponto crítico da função

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y).$$

b) O Teorema anterior é válido para funções de três variáveis, notando que: $g(x, y, z)$ é uma superfície de nível.

Exemplo 5.7. *Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem a tampa com volume de $4\ u^3$ sendo usada a menor quantidade de material.*

Sol. Se a caixa tem dimensões x, y e z, então nosso problema é minimizar a área da superfície, definida pela função

$$f(x, y, z) = xy + 2(xz + yz)$$

de modo que, no valor onde f atinge o mínimo, satisfaça a condição $g(x, y, z) = 0$. Em outras palavras,

$$g(x, y, z) = xyz - 4$$

Assim, o problema consiste em minimizar a função:

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\, g(x, y, z) = xy + 2(xz + yz) + \lambda(xyz - 4)$$

Então, calculando os P.C temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2z + \lambda yz = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y + z(2 + \lambda y) = 0 \tag{5.5}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2z + \lambda xz = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x + z(2 + \lambda x) = 0 \tag{5.6}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2x + 2y + \lambda xy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x + y(2 + \lambda x) = 0 \tag{5.7}$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = xyz - 4 = 0. \tag{5.8}$$

Mulplicando a equação (5.6) por y e a equação (5.7) por $-z$ temos

$$xy + zy(2 + \lambda x) = 0$$
$$-2xz - yz(2 + \lambda x) = 0$$

Portanto, somando estas duas ultimas equações temos

$$xy - 2xz = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(y - 2z) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0 \text{ ou } y = 2z \tag{5.9}$$

Como x representa a dimensão de uma caixa, descartamos a possibilidade de $x = 0$, então resta dizer que $y = 2z$. Portanto:

- Na equação (5.5) substituindo $y = 2z$ temos

$$2z + z(2 + \lambda 2z) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z(4 + 2\lambda z) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = -\frac{2}{\lambda} \quad \text{e} \quad y = -\frac{4}{\lambda}$$

- Na equação (5.6) substituindo $z = -\dfrac{2}{\lambda}$ temos

$$x(1 + \lambda\left(\frac{-2}{\lambda}\right)) = -2z \qquad \Rightarrow \qquad x(1 - 2) = -2z \qquad \Rightarrow \qquad x = 2z = -\frac{4}{\lambda}$$

- Na equação (5.8) substituindo $x = -\dfrac{4}{\lambda},\ y = -\dfrac{4}{\lambda},\ z = -\dfrac{2}{\lambda}$ temos

$$\left(-\frac{4}{\lambda}\right)\left(-\frac{4}{\lambda}\right)\left(-\frac{2}{\lambda}\right) = 4 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^3 = -8 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -2$$

Portanto, $x = 2,\ y = 2,\ z = 1$.

Exemplo 5.8. *Determine os extremos de $f(x, y) = 3x + 2y$ com a restrição $x^2 + y^2 = 1$.*

Sol. Definamos a função $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ e

$$F(x, y, \lambda) = 3x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Então, calculando os P.C temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3 + 2\lambda x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{3}{2\lambda} \tag{5.10}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{1}{\lambda} \tag{5.11}$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{5.12}$$

Substituindo na equação (5.12) os valores de x e y temos

$$\left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 = \frac{13}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}$$

Portanto, $x = \mp\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $y = \mp\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, em outras palavras os P.C. são

$$\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \qquad \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

Por simples observação vemos que

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) > f\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

isto é, f atinge seu valor máximo em $\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ e seu valor mínimo em $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}, -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Exemplo 5.9. *Um placa metálica circular com um metro de raio está colocada com centro na origem do plano xy e é aquecida de modo que a temperatura num ponto (x, y) é dado por:*

$$T(x, y) = 32(3x^2 + 2y^2 + 2y + 5)$$

graus, onde x e y estão em metros. Encontre a maior e a menor temperatura na placa.

Sol. Resolveremos este problema em dois casos:

1^{er} **Caso**: No interior da placa $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2 + y^2 < 1\}$

Cálculo dos pontos críticos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 32(6x) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 32(2y + 2) = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o único ponto crítico no interior da placa é $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$, e $T\left(0, -\dfrac{1}{2}\right) = -144$

2^{do} **Caso**: Na fronteira da placa $\partial(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2 + y^2 = 1\}$

Para encontrar um ponto extremo usaremos multiplicadores de Lagrange onde a restrição é a curva $x^2 + y^2 = 1$. Logo, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Assim, o problema consiste em calcular os extremos da função:

$$F(x, y, \lambda) = T(x, y) + \lambda\, g(x, y) = 32(3x^2 + 2y^2 + 2y + 5) + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Então, calculando os P.C temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 32(6x) + \lambda 2x = 0 \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 32(4y + 2) + \lambda 2y = 0 \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{5.15}$$

Da equação (5.13) temos que $\lambda = -96$, e substituindo em (5.14), obtemos que $y = \dfrac{1}{32}$. Da equação (5.15) obtemos que $x = \pm\sqrt{1 - (\dfrac{1}{32})^2}$

Como $T\Big(\pm\sqrt{1-(\frac{1}{32})^2}, \frac{1}{32}\Big) = \frac{6210}{32} = 194,0625$ concluímos que a menor temperatura da placa é -144 graus e a maior é 194,0625 graus.

5.4 Exercícios

1. Determinar os pontos de máximos e/ou mínimos da função dada, sujeita às restrições indicadas:

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2; \quad x + y = 1$

   (b) $f(x, y) = 4 - 2x - 3y; \quad x^2 + y^2 = 1$

   (c) $f(x, y) = 2x + y; \quad x^2 + y^2 = 4$

   (d) $f(x, y) = xy; \quad 2x^2 + y^2 = 16$

   (e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x + y + z = 9$

   (f) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2; \quad x + y = 2$

2. O departamento de estrada está planejando construir uma área de piquenique para motoristas ao longo de uma grande auto-estrada. Ela deve ser retangular, com uma área de 5.000 metros quadrados, e cercada nos três lados não-adjacentes à auto-estrada. Qual é a quantidade mínima de cerca que será necessária para realizar o trabalho?

3. Deseja-se construir um aquário, na forma de um paralelepípedo retangular de volume 1 m^3 (1.000 L). Determine as dimensões do mesmo que minimizam o custo, sabendo que o custo do material usando na confecção do fundo é o dobro do da lateral e que o aquário não terá tampa.

4. Projete uma caixa retangular de leite com largura x, comprimento y e altura z, que contenha 512 cm^3 de leite. Os lados da caixa custam 3 centavos/cm^2 e o topo e o fundo custam 5 centavos/cm^2. Ache as dimensões da caixa que minimizem o custo total. Qual é esse custo?

5. Calcule a menor distância do ponto $(0, 2)$ à curva de equação $y = x^2 - 4$.

6. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída de modo que sua área seja 36 m^2.

7. Encontre o máximo e o mínimo absoluto de $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + y$ na região $D = [0,1] \times [0,1]$

8. Em que pontos da elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a tangente a esta forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima?

Referências Bibliográficas

[1] Diomara Pinto e Maria Cândida Ferreira Morgado. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de várias Variáveis.* Editora UFRJ, 1999.

[2] James Stewart. *Cálculo Vol1 e Vol 2.* Cengage Learning, 2006.

[3] Miriam Buss Gonçalvez e Diva Marília Flemming. *Cálculo B.* Pearson, 2007.

[4] Walter Mora Flores. *Cálculo en Varias Variáveis.* Revista Digital Matemática educación e Internet, 2013.