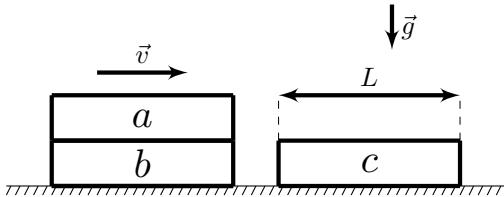


# 11 класс

## Теоретический тур

### Задача №1. Вспоминая 90-е

Вспоминая 1997 год, теоретик Баг продолжил исследования следующей ситуации: Доска  $a$  лежит на такой же доске  $b$ . Они, как единое целое, движутся с некоторой скоростью по гладкой горизонтальной поверхности и сталкиваются с такой же доской  $c$ , верхняя поверхность которой покрыта тонким слоем резины. Трения между досками  $a$  и  $b$  нет, а трения между досками  $a$  и  $c$  есть. При ударе доски  $b$  и  $c$  прочно сцепляются. Длина досок равна  $L$ . Доска  $a$  перестала перемещаться относительно досок  $b$  и  $c$  в момент, когда она целиком расположилась на доске  $c$ . Найдите перемещение  $\Delta x$  доски  $a$  от момента соударения до момента прекращения относительного движения досок.



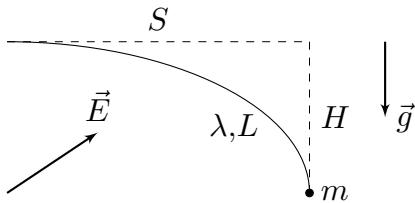
### Задача №2. Нагревание насосом

Сосуд с теплоизолирующими стенками заполнен атмосферным воздухом при температуре  $T_0$  и давлении  $p_0$ . Через малый клапан в стенке сосуда с помощью насоса, соединённого с клапаном, в сосуд начинают закачивать воздух. Малая порция воздуха из атмосферы поступает в насос, сжимается, после чего в результате теплообмена с окружающей средой охлаждается до температуры  $T_0$ , при этом после охлаждения давление воздуха в насосе всегда незначительно выше, чем в сосуде. Затем открывается клапан, и порция воздуха из насоса поступает в сосуд при практически постоянных давлении и температуре, сразу после чего клапан закрывается. Воздух можно считать идеальным двухатомным газом. Теплопотерями за время, в течение которого клапан открыт, можно пренебречь. Считайте, что в процессе закачивания давление воздуха в насосе всегда больше, чем давление воздуха в сосуде, а газ, находящийся в сосуде, из него никогда не вытекает. В результате многократного повторения описанного процесса давление в сосуде повышается до  $p_1$ .

1. Во сколько раз изменилось количество вещества газа в сосуде?
2. Определите температуру  $T_1$  в сосуде.

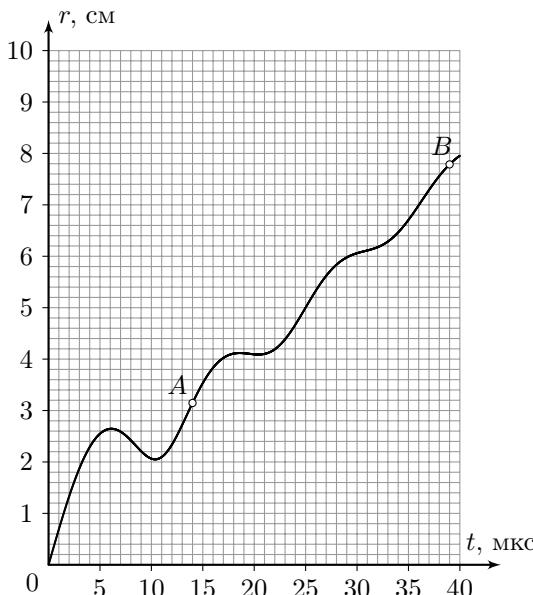
### Задача №3. Равновесие в полях

Нерастяжимая невесомая нить длиной  $L$  заряжена равномерно по длине положительным зарядом с линейной плотностью  $\lambda$ . Один конец нити закреплён, а к другому прикреплён маленький груз массой  $m$ . Систему поместили в однородное электростатическое поле. В положении равновесия система расположилась таким образом, что касательные к нити в точке крепления и в месте расположения груза оказались горизонтальной и вертикальной соответственно. Груз расположился на расстоянии  $H$  ниже и на расстоянии  $S$  правее точки крепления (см. рис.). Собственным электростатическим полем зарядов нити можно пренебречь. Ускорение свободного падения равняется  $g$ . Определите величину напряжённости  $E$  электростатического поля.



### Задача №4. Полный улёт

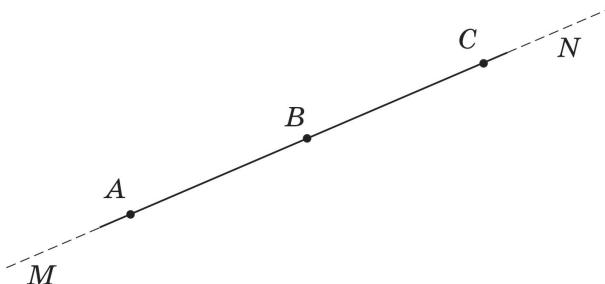
В однородном магнитном поле в отсутствие силы тяжести движется заряженная частица. На рисунке представлен график зависимости модуля перемещения этой частицы  $r$  относительно точки, в которой находилась эта частица в момент времени  $t = 0$ , от времени её дальнейшего движения  $t$ .



1. Определите модуль скорости  $v$ , с которой движется частица.
2. Определите угол  $\alpha$  между вектором скорости частицы в момент  $t = 0$  и вектором индукции магнитного поля.
3. Определите индукцию магнитного поля, если заряд частицы равен  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, а её масса  $m = 1,0 \cdot 10^{-26}$  кг.
4. Найдите расстояние между двумя положениями частицы, которые соответствуют точкам  $A$  и  $B$  на графике.

### Задача №5. Троеточие

При очередном разборе архива Снеллиуса на глаза одному из специалистов попался небольшой рисунок с тремя точками  $A$ ,  $B$  и  $C$ , лежащими на одной прямой  $MN$ . Из комментариев к рисунку следовало, что прямая  $MN$  проходила через оптический центр тонкой линзы под небольшим углом к главной оптической оси, а точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  обладали любопытным свойством: при помещении точечного источника света в любую из них изображение оказывалось в одной из двух других точек. Также было указано, что расстояния между точками  $A$  и  $B$  и между точками  $B$  и  $C$ , в которые помещали источник, были одинаковы и равнялись  $l$ , а модуль фокусного расстояния линзы был равен  $F$ .



1. Определите, о собирающей или рассеивающей линзе шла речь.
2. С какой стороны (слева или справа) от точки  $B$  располагался оптический центр линзы?
3. На каком расстоянии от точки  $B$  располагался оптический центр линзы?
4. Под каким углом к прямой  $MN$  наклонена главная оптическая ось линзы?

## 11 класс

### Задача №11-Т1. Вспоминая 90-е

Пусть  $v_0$  - скорость досок  $a$  и  $b$  до соударения с доской  $c$ , а  $m$  - масса каждой из досок. Поскольку трения между досками  $a$  и  $b$  нет, а доски  $b$  и  $c$  при ударе скрепляются - сразу после удара скорость доски  $a$  равна  $v_0$ , а скорость досок  $b$  и  $c$  равна  $v_0/2$  из закона сохранения импульса.

Введём ось  $x$  по направлению скорости  $v_0$ . Поскольку горизонтальная поверхность гладкая - центр масс системы движется с постоянной скоростью, равной  $v_{\text{цм}} = 2v_0/3$ . В момент удара центр масс системы опережает центр доски  $a$  на величину  $l/3$ , а к моменту, когда доска  $a$  целиком оказалась на доске  $c$ , центр масс системы отстает от центра доски на ту же величину  $l/3$ . Тогда для перемещения доски  $a$  получим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2l}{3} = \frac{2(v_0\tau + l)}{3}$$

где  $\tau$  - время движения доски  $a$  относительно досок  $b$  и  $c$ . Далее объединим доски  $b$  и  $c$  в одно тело массой  $2m$  и будем характеризовать его индексом 2. Доску  $a$  будем характеризовать индексом 1. Пусть  $\vec{F}$  - сила трения, действующая на первое тело со стороны второго, а  $x$  - их относительное перемещение после удара. Отметим, что трение происходит только в области перекрытия досок  $a$  и  $c$ . Величина силы трения скольжения прямо пропорциональна силе нормальной реакции шероховатой части поверхности опоры, и поэтому  $F_x = -\mu mgx/l$ . Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} \quad 2m\vec{a}_2 = -\vec{F}$$

откуда:

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_{\text{отн}} = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}}{2m} = \frac{2\vec{F}}{3m}$$

Тогда получим уравнение движения для переменной  $x$ :

$$\ddot{x} = -\frac{2\mu gx}{3L}$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega_0 = \sqrt{2\mu g/3L}$ . Его общее решение:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Определим  $A$  и  $\varphi_0$  из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = A \sin \varphi_0 = 0 \\ \dot{x}(0) = \frac{v_0}{2} = \omega A \cos \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ A = \frac{v_0}{2\omega} \end{cases}$$

Величина  $A$  имеет смысл амплитуды колебаний, которая также равна  $L$ , поскольку относительное движение досок прекращается, когда доска  $a$  целиком оказывается на доске  $c$ . Таким образом, имеем связь:

$$\frac{v_0}{2\omega} = L$$

Время движения  $\tau$  является четвертью периода гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega_0$ , откуда:

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}$$

Тогда для перемещения центра масс имеем:

$$\Delta x_{\text{цм}} = \frac{2v_0\tau}{3} = \frac{2\pi L}{3}$$

и окончательно находим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2L}{3} = \frac{2(\pi + 1)L}{3}$$

### Задача №11-Т2. Нагревание насосом

Пусть  $V$  – объём сосуда,  $\nu_0$  – начальное количества вещества в сосуде, а  $\Delta\nu$  – количество вещества, переместившееся в сосуд из атмосферы. Запишем уравнения состояния газа в сосуде до и после закачивания:

$$p_0V = \nu_0RT_0 \quad p_1V = (\nu_0 + \Delta\nu)RT_1.$$

Пусть давление воздуха внутри насоса равняется  $p_{\text{в}}$ , а  $dV_{\text{в}}$  – объём, занимаемый порцией воздуха в количестве вещества  $d\nu$  внутри насоса. При закачивании указанной порции воздуха в сосуд насос совершают механическую работу  $\delta A_{\text{н}}$ , равную:

$$\delta A_{\text{н}} = p_{\text{в}}dV_{\text{в}}.$$

Но из уравнения Менделеева–Клапейрона  $p_{\text{в}}dV_{\text{в}} = RT_0d\nu$ , поэтому:

$$\delta A_{\text{н}} = RT_0d\nu.$$

Таким образом, полная механическая работа насоса  $A_{\text{н}}$  составляет:

$$A_{\text{н}} = \Delta\nu RT_0.$$

Запишем первое начало термодинамики для системы, состоящей из изначального находившегося в сосуде газа и закаченного в него насосом:

$$A_{\text{н}} + U_0 + U_1 = U_{\text{к}}.$$

Здесь  $U_0 = \nu_0 C_V T_0$  – начальная внутренняя энергия воздуха, изначально находившегося в сосуде,  $U_1 = \Delta\nu C_V T_0$  – сумма внутренних энергий закачиваемого воздуха на этапе закачивания в сосуд, а  $U_{\kappa} = (\nu_0 + \Delta\nu) C_V T_1$  – конечная внутренняя энергия рассматриваемой системы. Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме равна  $C_V = 5R/2$ . Отсюда:

$$\Delta\nu RT_0 + \frac{5\nu_0 RT_0}{2} + \frac{5\Delta\nu RT_0}{2} = \frac{5(\nu_0 + \Delta\nu)RT_1}{2}.$$

Таким образом:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{5\nu_0 + 7\Delta\nu}{5(\nu_0 + \Delta\nu)} = \frac{p_1}{p_0} \frac{\nu_0}{(\nu_0 + \Delta\nu)} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{5}{7} \left( \frac{p_1}{p_0} - 1 \right).$$

Для отношения количеств вещества воздуха в сосуде после завершения процессов с насосом и до их начала имеем:

$$\frac{\nu_{\kappa}}{\nu_0} = 1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_0},$$

откуда:

$$\frac{\nu_{\kappa}}{\nu_0} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}.$$

Для отношения температур  $T_1/T_0$  имеем:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1 \nu_0}{p_0 \nu_{\kappa}}.$$

Таким образом:

$$T_1 = \frac{T_0}{\frac{2p_0}{7p_1} + \frac{5}{7}}.$$

### Задача №11-Т3. Равновесие в полях

Пусть  $\vec{T}$  – сила, действующая на нить в точке её крепления, равная по модулю силе натяжения нити в данной точке. Тогда, поскольку система расположена в равновесии:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \lambda L \vec{E} = 0.$$

Введём систему координат  $xy$ , где ось  $x$  направлена вправо, а ось  $y$  – вертикально вверх. Тогда из условия равновесия:

$$E_y = \frac{mg}{\lambda L} \quad E_x = \frac{T}{\lambda L}.$$

Связем силы натяжения нити  $T_0 = mg$  в точке крепления груза и  $T$  в точке крепления нити. Приведём два способа получения данной связи.

### Первый способ:

Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Мысленно поместим нить в гладкую трубку, повторяющую форму нити. Это не изменит силу натяжения, потому что нить с трубкой не взаимодействует. Сдвинем нить вдоль трубки на величину  $dl$  в направлении от точки крепления груза к точке крепления нити. Тогда изменение формы нити эквивалентно перемещению участка нити длиной  $dl$  из точки крепления груза в точку крепления нити, поскольку форма остальной части нити не изменится. Поскольку сила натяжения невесомой нити направлена вдоль нити, работа сил, приложенных к концам нити, на указанном виртуальном перемещении равна:

$$\delta A = Tdl - T_0 dl = Tdl - mgdl.$$

Совершаемая силами натяжения работа равна изменению потенциальной энергии нити в электростатическом поле:

$$\delta A = dW_p.$$

Поскольку перемещение нити эквивалентно перемещению её участка длиной  $dl$  из точки крепления груза в точку крепления нити – изменение потенциальной энергии нити в электростатическом поле равно изменению потенциальной энергии соответствующего участка нити:

$$dW_p = \lambda dl(\varphi - \varphi_0) = \lambda dl \Delta \varphi,$$

где  $\varphi$  и  $\varphi_0$  – потенциалы электростатического поля в точках крепления нити и груза соответственно. Для изменения потенциала  $\Delta \varphi$  имеем:

$$\Delta \varphi = -E_x(x - x_0) - E_y(y - y_0).$$

Поскольку  $x - x_0 = -S$ , а  $y - y_0 = H$ , для изменения потенциала  $\Delta \varphi$  находим:

$$\Delta \varphi = E_x S - E_y H.$$

Таким образом:

$$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$

**Второй способ:**

Рассмотрим бесконечно малый элемент нити длиной  $dl$ . Условие его равновесия записывается следующим образом:

$$(\vec{T} + d\vec{T}) - \vec{T} + \vec{E}\lambda dl = 0.$$

Проектируя на направление касательной к нити, получим:

$$dT + \lambda E_{||} dl = 0.$$

Пусть касательная к нити образует угол  $\varphi$  с вертикалью. Тогда для  $E_{||}$  имеем:

$$E_{||} = E \cos \varphi - E \sin \varphi,$$

откуда:

$$dT + E_y \lambda dl \cos \varphi - E_x \lambda dl \sin \varphi = 0.$$

Но при этом  $dl \cos \varphi = dy$ , а  $dl \sin \varphi = -dx$ , откуда:

$$dT + E_y \lambda dy + E_x \lambda dx = 0.$$

Суммируя, получим:

$$T - T_0 = T - mg = -E_y \lambda (y - y_0) - E_x \lambda (x - x_0).$$

Поскольку  $y - y_0 = H$ , а  $x - x_0 = -S$ , получим:

$$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$

Но поскольку  $T = \lambda L E_x$ :

$$\lambda L E_x - mg = \lambda(S E_x - H E_y) = \lambda S E_x - \lambda H \cdot \frac{mg}{\lambda L} \Rightarrow E_x = \frac{mg L - H}{\lambda L} L - S.$$

Для напряжённости электростатического поля имеем:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2},$$

откуда:

$$E = \frac{mg}{\lambda L} \sqrt{1 + \left( \frac{L - H}{L - S} \right)^2}.$$

**Задача №11-Т4. Полный улёт**

Постоянное магнитное поле не совершает работы над заряженной частицей, и поэтому, если пренебречь излучением, модуль скорости частицы не изменяется. Поэтому величина скорости частицы равна величине скорости при  $t = 0$ .

Отметим, что при конечных ускорениях всегда существует такой "малый" интервал времени после начала движения, на котором скорость удаления частицы от начального положения примерно равна начальной скорости, то есть можно считать, что  $r \approx vt$ . Поэтому для нахождения скорости частицы проведём касательную к графику функции в начале координат (верхняя прямая на графике). Величина скорости при этом численно равна тангенсу угла наклона этой прямой:

$$v = \frac{9,8 \text{ см}}{14 \text{ мкс}} \approx 7 \text{ км/с.}$$

Направим ось  $z$  вдоль вектора индукции магнитного поля, выбирая для простоты начало координат так, чтобы  $z = 0$  при  $t = 0$ . Обозначим  $v_{||}$  проекцию вектора скорости частицы на ось  $z$ , а  $v_{\perp}$  — величину перпендикулярной этой оси составляющей. Так как сила Лоренца, действующая на частицу, не имеет составляющей вдоль оси  $z$ ,

$$z(t) = v_{||}t.$$

В сечении, перпендикулярном оси  $z$ , движение частицы происходит по окружности с постоянной скоростью  $v_{\perp}$ . Радиус этой окружности равен

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB},$$

где  $B$  — модуль вектора магнитной индукции, а время одного оборота

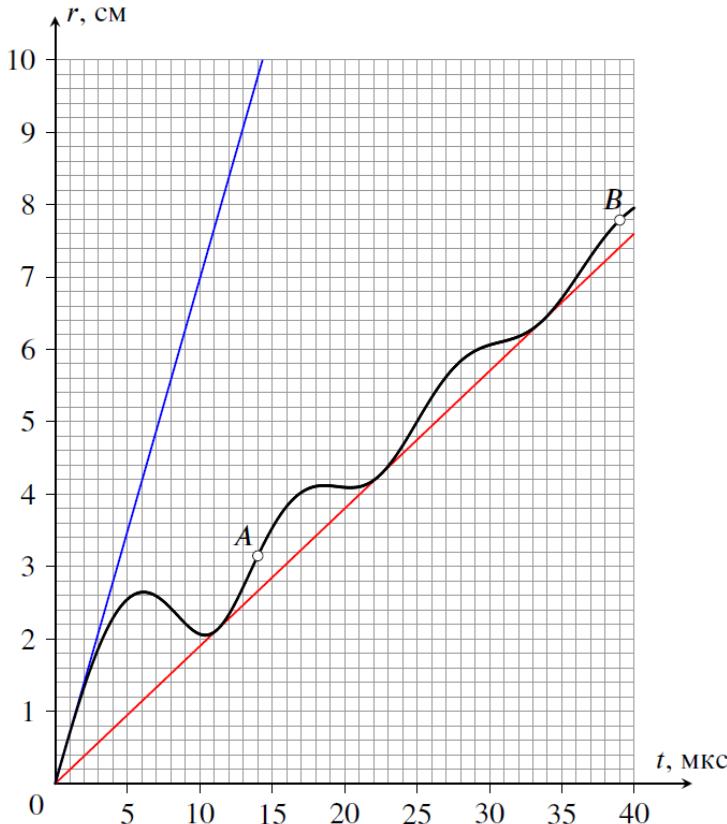
$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Таким образом, траектория частицы представляет собой винтовую линию с шагом  $h = v_{||}T$  и радиусом  $R = v_{\perp}T/(2\pi)$ . Выбирая оставшиеся оси координат максимально удобным способом, можно записать, что

$$x(t) = R \cos(2\pi t/T), \quad y(t) = R \sin(2\pi t/T),$$

откуда, учитывая, что в момент  $t = 0$  частица находилась в точке с координатами  $x = R$ ,  $y = z = 0$ , получим формулу зависимости модуля её перемещения от времени:

$$r(t) = \sqrt{(x(t) - R)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} = \sqrt{v_{||}^2 t^2 + 4R^2 \sin^2(\pi t/T)}.$$



Возьмём теперь выражение для  $r(t)$  и поделим его на  $t$ :

$$\frac{r(t)}{t} = \sqrt{v_{||}^2 + 4R^2 \cdot \left(\frac{\sin(\pi t/T)}{t}\right)^2}.$$

Второе слагаемое в подкоренном выражении при любом  $t$  не может быть меньше нуля, следовательно  $r(t)/t \geq v_{||}$ . Это значит, что прямая, идущая в координатах  $r-t$  из начала, имеющая общие точки с приведённым в условии графиком и обладающая наименьшим угловым коэффициентом, является прямой  $r = |v_{||}|t$ . Соответственно, для того чтобы определить  $v_{||}$ , проведём касательную из начала координат к нижней части графика (нижняя прямая на рисунке). Точки касания соответствуют ситуации, когда частица находится на прямой, проходящей через

начальную точку и параллельной линиям магнитного поля. Тангенс наклона такой прямой численно равен  $|v_{||}|$ :

$$|v_{||}| = \frac{7,6 \text{ см}}{40 \text{ мкс}} = 1,9 \text{ км/с.}$$

Отсюда находим, что

$$\cos \alpha = \frac{v_{||}}{v} = \pm \frac{1,9}{7} \approx \pm 0,271 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 74^\circ \quad \text{или} \quad \alpha \approx 106^\circ.$$

Точки касания нижней прямой располагаются через равные промежутки времени, равные времени  $T$  прохода частицей одного витка винтовой линии. Для увеличения точности возьмем крайнюю (третью) точку касания и определим значение  $T$ :

$$T = 34 \text{ мкс}/3 \approx 11,3 \text{ мкс.}$$

Отсюда получим, что

$$B = \frac{2\pi m}{qT} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-26} \text{ кг}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 11,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}} \approx 35 \text{ мТл.}$$

Между положениями  $A$  и  $B$  прошло время, равное

$$t_{AB} = 39 \text{ мкс} - 14 \text{ мкс} = 25 \text{ мкс.}$$

За это время частица сместилась вдоль линий магнитного поля на расстояние

$$\Delta z = |v_{||}| t_{AB} = 4,75 \text{ см.}$$

В проекции на перпендикулярную магнитному полю плоскость частица движется по окружности с радиусом

$$R = (v_{\perp} T)/2\pi = T/2\pi \cdot \sqrt{v^2 - v_{||}^2} \approx 1,21 \text{ см.}$$

Её смещение в этой плоскости равно

$$\Delta l = 2R \sin(\pi t_{AB}/T) \approx 1,50 \text{ см.}$$

Отсюда получим значение расстояния  $AB$ :

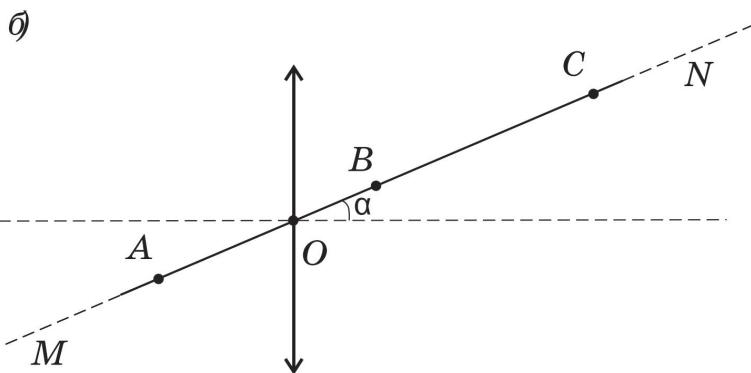
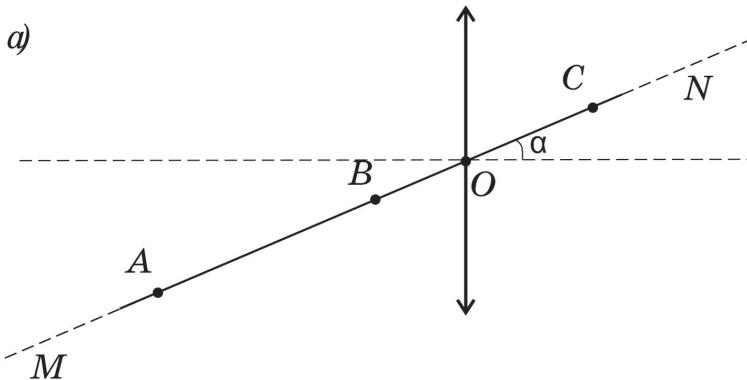
$$L_{AB} = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta z^2} \approx 5,0 \text{ см.}$$

### Задача №11-Т5. Троеточие

Если линза рассеивающая, то, независимо от положения источника, его изображение будет мнимым, расположенным между источником и оптическим центром линзы. После перемещения источника в точку, где ранее было расположено его изображение, новое изображение окажется снова между источником и оптическим центром линзы. Получится бесконечная цепочка изображений. Таким образом, три точки с указанным свойством в случае рассеивающей линзы существовать не могут.

Линза может быть только собирающей.

Мнимое изображение в собирающей линзе всегда расположено дальше от линзы, чем источник, поэтому не может быть, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются мнимыми изображениями друг друга. Но, в соответствии с принципом обратимости хода световых лучей, при помещении источника в точку действительного изображения, его новое изображение совпадает с предыдущим положением источника. Поэтому описанным в условии свойством три точки могут обладать только в том случае, если две из них являются действительными изображениями друг друга, а при помещении источника в третью он дает мнимое изображение в одной из точек этой пары. Пусть, например, собирающая линза расположена так, что точка  $A$  находится за её фокальной плоскостью. Тогда изображение  $A$  будет действительным и будет расположено по другую сторону от плоскости линзы. При перемещении источника в точку этого изображения, новое изображение вернется в точку  $A$ . Оставшееся, третье положение источника, должно давать мнимое изображение в одной из первых двух точек. Значит, оно должно располагаться между этой точкой (своим изображением) и оптическим центром линзы  $O$  ближе фокальной плоскости линзы. В этом случае линза могла быть расположена двумя способами (см. рисунок): а) оптический центр линзы находится между точками  $B$  и  $C$ , причём источник в точке  $B$  даёт мнимое изображение в точке  $A$ ; б) оптический центр линзы находится между точками  $A$  и  $B$ , причём источник в точке  $B$  даёт мнимое изображение в точке  $C$ .



Таким образом, оптический центр линзы мог располагаться как справа так и слева от точки  $B$ .

Если же источник сначала расположить между фокальной плоскостью и плоскостью линзы, то изображение будет получаться мнимым. При помещении источника в точку изображения новое изображение должно получиться действительным (по другую сторону плоскости линзы). И при перемещении источника в оставшуюся, третью точку, изображение окажется на месте, где источник располагался ранее. Этот вариант идентичен представленному ранее и отдельного рассмотрения не требует.

Рассмотрим только способ а) размещения линзы, так как способ б) аналогичен. Источник, расположенный в точке  $B$  на расстоянии меньшем фокусного, даёт мнимое изображение в точке  $A$ . При помещении источника в точку  $A$  возникает действительное изображение в точке  $C$ , при помещении источника в точку

$C$  – действительное изображение в точке  $A$ . Обозначим расстояние между оптическим центром линзы и источником, угол между главной оптической осью линзы и прямой и фокусное расстояние линзы за  $d$ ,  $\alpha$  и  $F$  соответственно. Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке  $B$ :

$$\frac{1}{d \cos \alpha} - \frac{1}{(l+d) \cos \alpha} = \frac{1}{F}.$$

Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке  $A$ :

$$\frac{1}{(l+d) \cos \alpha} + \frac{1}{(l-d) \cos \alpha} = \frac{1}{F}.$$

Решая систему, находим  $d$  и  $\alpha$ .

Расстояние между оптическим центром линзы и точкой  $B$  равно  $d = \frac{l}{3}$ .

Решение системы уравнений дает:  $\cos \alpha = \frac{9F}{4l}$ , откуда  $\alpha = \arccos \frac{9F}{4l}$ . Поскольку в условии сказано, что угол  $\alpha$  является малым, то допустимо на любом этапе вычислений использовать приближённое равенство  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ . Тогда приходим к формуле  $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}$ . Отметим, что малость угла означает, что с точностью до поправок порядка  $\alpha^2$  параметры системы связаны соотношением  $l \approx \frac{9}{4}F$ .

Угол между главной оптической осью линзы и прямой  $MN$  равен  $\alpha = \arccos \frac{9F}{4l}$  или  $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}$ .