DSP

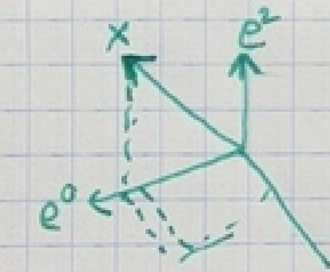
- שבוע שני

מרחבים וקטורים

1. אוסף הפונקציות הסימטריות ב $L_2[-1,1]$ זה מרחב וקטורי

<u>אופטימיזציה</u>: רוצים לקחת וקטור v במרחב ולמצוא לו אפרוקסימציה בתת מרחב.

- האפרוקסימציה תהיה ההטלה של v על תת מרחב



יהי $\{s^{(k)}\}_{k=0,\dots,K-1}$ בסיס אורתונורמלי של S

אזי ההטלה של x על S היא:

$$\hat{x} = \sum_{k=0}^{K-1} \langle s^{(k)}, x\rangle s^{(k)}$$

טענה:

$$\hat{x} = \underset{y\in S}{\arg\min} \|x-y\|$$

$L_2[-1,1]$ מרחב square integral functions ו- $P_N[-1,1]$ מרחב הפולינומים מדרגה $N-1$ על המקטע $[-1,1]$

<u>דוגמא</u>: נרצה לקרב את $x=\sin t \in L_2[-1,1]$ על ידי המרחב $P_3[-1,1]$.

1. נבנה בסיס אורתונורמלי ל $P_3[-1,1]$ לפי תהליך גרם-שמידט

תהליך גרם-שמידט: בהינתן בסיס $v_1 \dots v_n$ נבנה ממנו בסיס אורתונורמלי $u_1 \dots u_n$

כך שבכל שלב נחשב את u_i (הניצב) במאונך לכל ה- $u_1 \dots u_{i-1}$: $u_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle u_j, v_i\rangle u_j$

ונרמל את כל הוקטורים

$L_2[-1,1]$ זה מרחב הפונקציות הרציפות ב $[-1,1]$ כך שמכפלה פנימית מוגדרת $\langle x,y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$

נפעיל את גרם-שמידט על $1, t, t^2, t^3 \dots$ ונקבל בסיס

בסיס פורייה: $W_n^{(k)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

האורתוגונליות של הבסיס

$$\langle w_n, w_m\rangle = \sum_{a=0}^{N-1} w_n w_m^* = \sum_{a=0}^{N-1} \exp\left(\frac{j2\pi na}{N}\right)\exp\left(-\frac{j2\pi ma}{N}\right)$$

$$= \sum_{a=0}^{N-1} \exp\left(\frac{j2\pi a(n-m)}{N}\right) = \sum \exp\left(\frac{j2\pi (n-m)}{N}\right)^{a} = \frac{1-\left[\exp\left(\frac{j2\pi(n-m)}{N}\right)\right]^N}{\underbrace{1-\exp\left(\frac{j2\pi(n-m)}{N}\right)}_{D}} = \frac{1-\exp(j2\pi(n-m))}{D} = 0$$

לראות שאוסף הסיגנלים $y(x)=a\cos(x)+b\sin(x)$

מודול 3 - טרנספורם פוריה

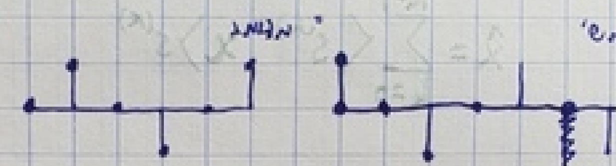
אנליזה:
- ממרחב הזמן למרחב התדר
- מציאת תרומות של תדרים שונים
- מציאת תכונות תדר נסתרות

סינתזה: - מהתדר לזמן, התאמת סיגנל לתנאי תדרים מסוים

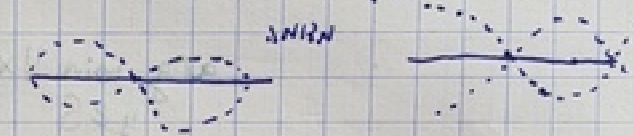
$$W_n^{(k)}=e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

דוגמאות:

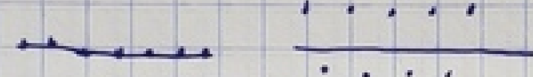
ה וקטור הזה (מבטאים) סינוס בחלק המדומה וקוסינוס בחלק הממשי (צד



$e^{j\frac{\pi n}{2}}$ נמצא $W^{(16)}\in\mathbb{C}^{64}$

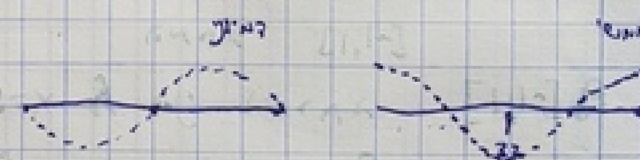


$W^{(31)}\in\mathbb{C}^{64}$

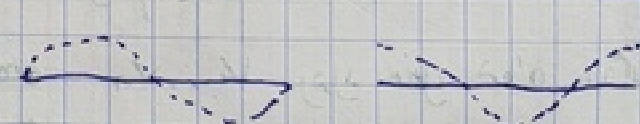


$W^{(32)}\in\mathbb{C}^{64}$ הוא בעל התדר הכי גבוה

בדגש שלאחר 32 התדר ממשי ומשנה כיוון



$W^{(33)}\in\mathbb{C}^{64}$



$W^{(1)}\in\mathbb{C}^{64}$

DFT definition

נוסחת הסינתזה $x=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_k W^{(k)}$ כאשר $X_k=\langle W^{(k)},x\rangle$

analysis formula: $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

Synthesis formula: $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

Examples of DFT calculation

$DFT\{\delta[n]\}$: $X[k]=1\ \forall k$

$DFT\{U[n]\}$ s.t $U[n]=1\ \forall n$: $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=N\delta[k]$

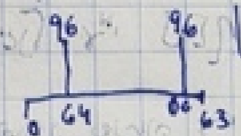
$\mathbb{C}^{64}\ni x[n]=3\cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right)=\frac{3}{2}\left(W_4[n]+W_{60}[n]\right)$

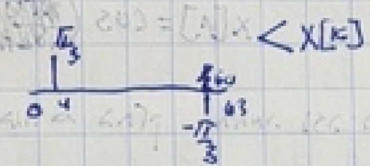
$$X[k]=\langle W_k[n],x[n]\rangle=\langle W_k[n],\frac{3}{2}\left(W_4[n]+W_{60}[n]\right)\rangle=\begin{cases}96 & \text{for } k=4,60\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$x[n] = 3\cos\left(\frac{2\pi}{16}n + \frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{64}\cdot 4n + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{64}\cdot 4n}e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{64}\cdot 4n}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}W_4[n] + e^{-j\frac{\pi}{3}}W_{60}[n]\right)$$

$$X[k] = \begin{cases} 96e^{j\frac{\pi}{3}} & k=4 \\ 96e^{-j\frac{\pi}{3}} & k=60 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$



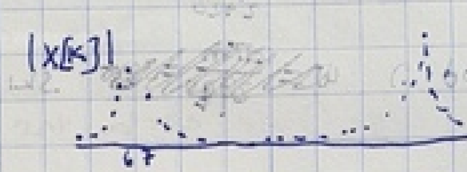


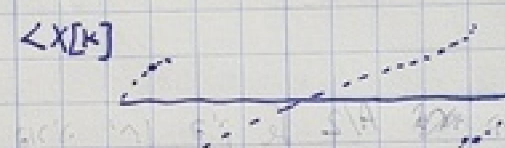
מה עם סינוסואידים שהם אינם כפולה

ה fundementa freq של $e^{\frac{2\pi}{64}}$ הוא $\frac{2\pi}{64}$, כלומר על סינוסואידים עם תדר שאינו כפולה של $\frac{2\pi}{64}$

$x[n] = 3\cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right) \quad \frac{2\pi}{64}\cdot 6 < \frac{2\pi}{10} < \frac{2\pi}{64}\cdot 7$

נחשב עם מטלב ונקבל





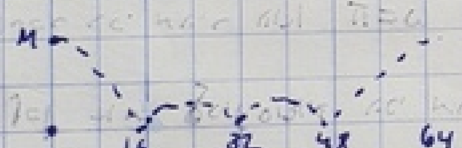
נסתכל על פונק' מדרגה

$$X[k] = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}Mk\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)} e^{-j\frac{\pi}{N}(M-1)k}$$

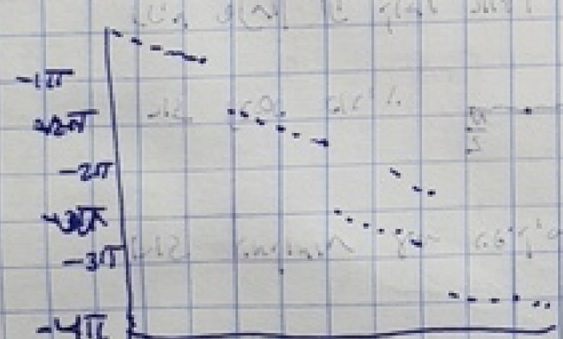
נשתמש בטריק

$$1-e^{-j\alpha} = e^{-j\frac{\alpha}{2}}\left(e^{j\frac{\alpha}{2}} - e^{-j\frac{\alpha}{2}}\right)$$

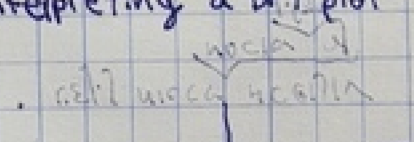
$$= 2j\sin\frac{\alpha}{2}$$



ערוך מיישרים את הפאזה שתכנס לתחום $[-\pi,\pi]$



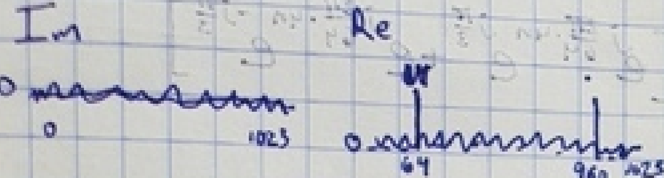
interpreting a DFT plot



הערך בציר של המקדם הפורייה k מתאים לתדירות של הסיגנל בתדר $\omega = \frac{2\pi}{N}k$

$|X[k]| = |X[N-k]|$ עבור סיגנלים לא מרוכבים הDFT הוא סימטרי בגודל

$k = 1, 2, \dots \lfloor N/2 \rfloor$ לכן מספיק להראות רק את $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$ המקדמים הראשונים



DFT Analysis

ב $\mathbb{R}^{1024}$

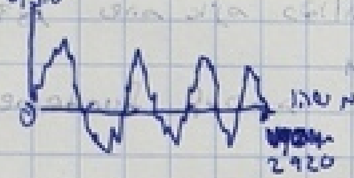
דוגמא: נתון סיגנל ואחרי שעשינו לו טרנס פורייה מקבלים

נוכל למדל את הסיגנל ע"י $x[n]=\cos(\omega n+\phi)+\eta[n]$

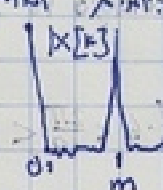
$\eta[n]$ זה רעש, ϕ זה הפאזה שנותנת ערכים גבוהים בחלק המדומה וזה קרוב ל0 במקרה שלנו

ω זה התדר שלנו $\omega=\frac{2\pi}{1024}\cdot 64$

נסתכל על הטמפרטורה היומית לאורך 20920 ימים ונקבל משהו



טרנס פורייה אחרי נירמול אז ה period הוא $365=\frac{2920}{m}$



$x[0]$ זה הממוצע t

אם יש לנו פונק $A\cos(\omega n)$ אז טרנס פורייה יתן פיק של $A/2$ בתדר ω

ולכן הממוצע מתנהגת $t\pm A$ כאשר $A/2$ זה $|X[m]|$ הגודל בגובה הפיק

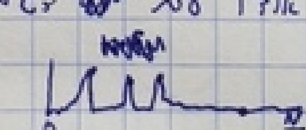
T_s הזמן שעובר בין דגימות $T_s=\frac{1}{F_s}$

התדר הכי מהיר הוא $\omega=\pi$ והוא דורש 2 דגימות כדי להשלים מעגל

לכן אם סינוסואיד הכי מהיר לוקח $2T_s$ לסגור מעגל אז התדר שלו הוא $F=\frac{1}{2T_s}=\frac{1}{2\frac{1}{F_s}}=\frac{F_s}{2}$

נניח שנתון לנו קובץ אודיו עם 20000 דגימות ונתון שתדר הדגימה $F_s=8000Hz$

אז נעשה פורייה. אז הערך במקום ה 10000 מתאים לתדר $\frac{F_s}{2}=4KHz$

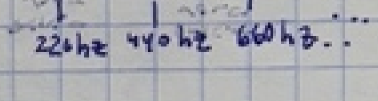


אז המקומות עם הפיקים יתאימו לתדרים $\frac{k_0}{10000}\cdot 4000\,Hz$

דגימה - אנליזה של תווים מוזיקליים

מכפלות k

ה pitch זה התדר הבסיסי של צליל, ה timber זה כל הקומבינציה של ה... שמאפיין אותו. הצליל מורכב מכפלות של התדר היסודי. המקדם של k מכפלה של התדר היסודי זה הטימבר



זה ההרמוניקה

Short time Fourier transform

נעשה DFT על מקטעים באורך L:

$$X[m;k]=\sum_{n=0}^{L-1} x[m+n]e^{-j\frac{2\pi}{L}nk}$$

The spectogram

יש טרייד אוף לגבי L ככל ש L גדול יותר כך המידע על התדר גדל אבל המידע על הזמן קטן

- אם קצב הדגימה הוא F_s ויש N דגימות אז רזולוציית התדר (frequency resolution) היא $\frac{F_s}{N}$ אם משך הדגימה הוא t אז $N=F_st$ ולכן הרזולוציה היא $\frac{F_s}{N}=\frac{F_s}{F_st}=\frac{1}{t}$

כלומר, כדי להגדיל את רזולוציית התדר צריך להגדיל את משך הדגימה.

הגדלת F_s לא תגדיל את רזולוציית התדר אלא את ה coverage של התדר

כלומר יהיה אפשר לראות תדרים יותר גבוהים

הפעלת DFT פעמיים $y[n]=DFT\{DFT\{x[n]\}\}$

נסמן $f[n]=DFT\{x[n]\}$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N-1} f[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1}x[i]e^{-j\frac{2\pi}{N}ik}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}x[i]\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+i)}$$

עבור הסדרה $a, ar, ar^2 \dots ar^n$ הנוסחא $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ מתקיימת רק עבור $r\neq 1$

עבור $n+i=0,N,2N,\dots$ אז $e^{-j\frac{2\pi}{N}kMN}=e^{-j2\pi kM}=e^0=1$ ועבור $n+i$ אחר לפי הנוסחא נקבל שהסכום הוא 0 ולכן

$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n+i)}=\begin{cases}N & n+i=0,N,\dots\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$y[n]=\sum_{\substack{i=0\\ s.t\\ n+i=N}}^{N-1}x[i]N = Nx[N-n]$$

תהי $x[n]$ סדרה N-פריודית ותהי $Y(k)=X(2k)$ סדרה באורך $\frac{N}{2}$ של דגימה שניה של $X[n]$

אז $y[n]=x[n]+x[n+\frac{N}{2}]$