

<p style="text-align: center;"><b>Statystyka stosowana</b> <b>2023/2024</b></p>
---

## Lista 1

1. Rozpatrzmy zmienną losową  $Y = \exp(X)$ , gdzie  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Zmienna losowa  $Y$  ma rozkład log-normalny  $Y \sim LN(\mu, \sigma)$ .
  - a) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej  $Y$  i wyraż ją w języku dystrybunaty standardowego rozkładu normalnego (oznaczamy ją  $\Phi(x)$ ).
  - b) Wyznacz gęstość zmiennej losowej  $Y$ .
  - c) Na podstawie danych ze strony [www](http://www.stat.gov.pl), które są realizacjami zmiennej losowej  $X \sim N(0, 1)$ , wyznacz realizacje zmiennej losowej  $Y$ .
  - d) Dla danych odpowiadających zmiennej  $X$  oraz zmiennej  $Y$  narysuj histogramy.
  - e) Dla danych odpowiadających zmiennej  $X$  oraz zmiennej  $Y$  narysuj unormowane histogramy w taki sposób, aby mogły być one porównane z gęstościami teoretycznymi odpowiednich zmiennych losowych. Na wykresach z unormowanymi histogramami narysuj teoretyczne gęstości zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$ .
  - f) Zaproponuj metodę do wyznaczania gęstości empirycznej, która jest wygładzoną wersją unormowanego histogramu. Narysuj gęstość empiryczną dla danych odpowiadających zmiennej  $X$  oraz  $Y$  oraz teoretyczną odpowiadającą danej zmiennej losowej.
2. Wykorzystując metodę odwrotnej dystrybunaty wysymuluj próbę o długości 1000 z rozkładu Pareto z parametrami  $\alpha > \lambda > 0$ , w którym dystrybuanta wyraża się następującym wzorem:

$$F(x) = 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^\alpha, \quad x > 0. \quad (1)$$

Współczynniki  $\alpha$  i  $\lambda$  wybierz w ten sposób, aby wariancja rozważanego rozkładu była skończona.

3. Dla danych z rozkładu Pareto zdefiniowanego w równaniu (1) wyznacz dystrybuantę empiryczną i porównaj ją z dystrybuntą teoretyczną rozkładu Pareto z wybranymi parametrami.

4. Dla rozkładu Pareto z zadania 3 wyznacz gęstość. Dla wysymulowanych danych porównaj gęstość empiryczną oraz teoretyczną.
5. Niech  $Z$  będzie zmienną losową z rozkładu Pareto z parametrami  $\alpha$  oraz  $\lambda$ . Zmienna losowa z rozkładu Burra z parametrami  $\alpha, \lambda, \tau > 0$  zdefiniowana jest jako  $W = Z^{1/\tau}$ .
  - a) Wyznacz gęstość oraz dystrybuantę zmiennej losowej  $W$ .
  - b) Wysymuluj 1000 obserwacji odpowiadających zmiennej losowej  $W$ .
  - c) Gęstość empiryczną (wyznaczoną na podstawie wysymulowanej próby) porównaj z gęstością teoretyczną zmiennej losowej  $W$ .
  - d) Dystrybuantę empiryczną (wyznaczoną na podstawie wysymulowanej próby) porównaj z dystrybuantą teoretyczną zmiennej losowej  $W$ .