Metody numeryczne

Wykład 5 - Interpolacja

Janusz Szwabiński

Plan wykładu

1. Zagadnienie interpolacyjne

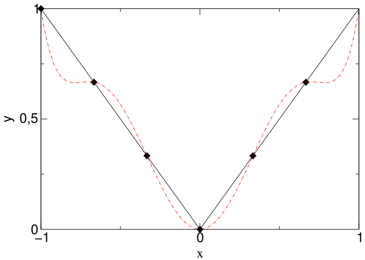
2. Interpolacja wielomianowa

3. Interpolacja wymierna

Zagadnienie interpolacyjne

$$F(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

- x_i – węzły interpolacji
- $y_i \equiv f(x_i)$ – wartości funkcji interpolowanej
- $F(x)$ – funkcja interpolująca



Interpolacja wielomianowa

$$\Pi_n \text{ – zbiór wielomianów stopnia} \leqslant n$$

Twierdzenie

Dla dowolnych $n+1$ *punktów węzłowych* (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, $x_i \neq x_k$ *dla* $i \neq k$*, istnieje dokładnie jeden wielomian* $W_n \in \Pi_n$ *taki, że*

$$W_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

$\Rightarrow$ interpolacja wielomianowa jest zagadnieniem jednoznacznym!

Interpolacja wielomianowa

Dowód.

Mamy $n+1$ punktów węzłowych (x_i, y_i). Szukamy wielomianu interpolującego w postaci

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad W_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

Stąd

$$\begin{array}{ccccc} a_0 + a_1 x_0 + & \ldots & + a_n x_0^n & = & y_0 \\ & \vdots & & & \\ a_0 + a_1 x_n + & \ldots & + a_n x_n^n & = & y_n \end{array}$$

Interpolacja wielomianowa

Dowód.

Macierz układu (niewiadomymi są współczynniki a_i!)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\det A \neq 0$ (wyznacznik Vandermonde'a z $x_i \neq x_k$ dla $i \neq k$)

$\Rightarrow$ układ równań jest układem Cramera

Interpolacja wielomianowa

Dowód.

$\Rightarrow$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie

$$a_i = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=0}^{n} y_j A_{ij}$$

gdzie A_{ij} są kolejnymi dopełnieniami algebraicznymi elementów i–tej kolumny macierzy A

$\square$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$\left.\begin{aligned} W_n(x) &= a_0 + \ldots + a_n x^n \\ a_i &= \tfrac{1}{\mathrm{det}A} \textstyle\sum_{j=0}^{n} y_j A_{ij} \end{aligned}\right\} \quad W_n(x) = y_0\Phi_0(x) + \ldots + y_n\Phi_n(x)$$

$\Phi_i(x)$ - wielomiany stopnia $\leqslant n$

Ponieważ

$$W_n(x_i) = y_0\Phi_0(x_i) + y_1\Phi_1(x_i) + \ldots + y_n\Phi_n(x_i) \equiv y_i$$

$$\Rightarrow \Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Niech

$$\Phi_i(x) = \lambda(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)$$

Z warunku $\Phi_i(x_i) = 1$ otrzymujemy

$$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Stąd

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j) \left. \frac{\omega_n(x)}{x - x_j} \right|_{x=x_j}} = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega_n'(x_j)}$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Z twierdzenia o jednoznaczności

$\Rightarrow$ wielomian Lagrange'a jest jedynym wielomianem interpolacyjnym stopnia $\leqslant n$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

Przykład

Szukamy wielomianu interpolacyjnego, który przechodzi przez następujące punkty węzłowe:

x_i	-2	1	2	4
y_i	3	1	-3	8

$$
\begin{aligned}
W_3(x) &= \frac{3(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} + \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} \\
&\quad \frac{-3(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} + \frac{8(x+2)(x-1)(x-4)}{(4+2)(4-1)(4-2)} \\
&= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{25}{6}x + 6
\end{aligned}
$$

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

```
def lagrange(x,xData,yData):
    n = len(xData)
    y = 0
    for i in range(n):
        w = 1.0
        for j in range(n):
            if i != j:
                w = w*(x-xData[j])/(xData[i]-xData[j])
        y = y + w*yData[i]
    return y
```

Metoda Neville'a

$$W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x) \quad \text{-} \quad \text{wielomian stopnia } k \text{ przechodzący przez } (x_{i_j}, y_{i_j}),\ j = 0, 1, \ldots, k$$

Twierdzenie

Wielomian $W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}$ daje się przedstawić wzorem rekurencyjnym

$$W_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})W_{i_1,\ldots,i_k}(x) - (x - x_{i_k})W_{i_0,\ldots,i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

Metoda Neville'a

Dowód.

Niech $P(x)$ będzie prawą stroną powyższego równania. Stopień $P(x)$ jest $\leqslant k$. Ponadto, zgodnie z definicją wielomianów $W_{i_1,\dots,i_k}(x)$ i $W_{i_0,\dots,i_{k-1}}(x)$ mamy

$$P(x_{i_0}) = W_{i_0,\dots,i_{k-1}}(x_{i_0}) = y_{i_0}, \quad P(x_{i_k}) = W_{i_1,\dots,i_k}(x_{i_k}) = y_{i_k} \tag{1}$$

a dla $j = 1, 2, \dots, k-1$

$$P(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})y_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k})y_{i_j}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = y_{i_j}$$

$P(x)$ ma zatem cechy $W_{i_0,i_1,\dots,i_k}(x)$ $\square$

Metoda Neville'a

$$
\begin{array}{ccccc}
x_0 & y_0 & & & \\
 & & W_{0,1}(x) & & \\
x_1 & y_1 & & W_{0,1,2}(x) & \\
 & & W_{1,2}(x) & & W_{0,1,2,3}(x) \\
x_2 & y_2 & & W_{1,2,3}(x) & \\
 & & W_{2,3}(x) & & \\
x_3 & y_3 & & &
\end{array}
$$

Metoda Neville'a

Przykład

x_i	0	1	3
y_i	1	3	2

Schemat Neville'a dla $W_{0,1,2}(2)$ ma postać:

$$
\begin{array}{lllll}
0 & 1 & & & \\
 & & W_{0,1}(2) = \frac{(2-0)*3-(2-1)*1}{1-0} = 5 & & \\
1 & 3 & & & W_{0,1,2}(2) = \frac{10}{3} \\
 & & W_{1,2}(2) = \frac{(2-1)*2-(2-3)*3}{3-1} = \frac{5}{2} & & \\
3 & 2 & & &
\end{array}
$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Twierdzenie (Rolle'a)

Niech:

1. *funkcja będzie określona na przedziale domkniętym* $< a, b >$*;*
2. *istnieje pochodna skończona* $f'(x)$ *przynajmniej w przedziale otwartym* (a, b)*;*
3. *na końcach przedziału funkcja przyjmuje wartości* $f(a) = f(b)$*.*

Wówczas między a i b można znaleźć taki punkt c ($a < c < b$*), że*

$$f'(c) = 0.$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Niech $f(x)$ będzie funkcją $n+1$ razy różniczkowalną oraz $\epsilon(x) = W_n(x) - f(x)$:

Twierdzenie

$$|\epsilon(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|$$

gdzie

$$M_{n+1} = \sup_{x \in <a,b>} |f^{(n+1)}(x)|$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Dowód.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą (K - pewna stała)

$$\phi(u) = W_n(u) - f(u) + K(u - x_0)(u - x_1)\dots(u - x_n)$$

$$\phi(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Współczynnik K dobieramy tak, aby pierwiastkiem funkcji $\phi(u)$ był również punkt $\tilde{x}$, różny od węzłów interpolacji:

$$K = \frac{f(\tilde{x}) - W_n(\tilde{x})}{\omega_n(\tilde{x})} \quad (\omega_n(\tilde{x}) \neq 0 \text{ dla } \tilde{x} \neq x_i)$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Dowód.

$\phi(u)$ ma w sumie $n+2$ miejsc zerowych x_0, x_1,. . ., x_n, $\tilde{x}$.
Twierdzenia Rolle'a:

- $\Rightarrow$ $\phi'(u)$ ma w każdym z podprzedziałów położonych między pierwiastkami co najmniej jedno miejsce zerowe
- $\Rightarrow$ w przedziale $(\min(x, x_0), \max(x, x_n))$ jest co najmniej $n+1$ miejsc zerowych $\phi'(u)$
- $\Rightarrow$ co najmniej n miejsc zerowych drugiej pochodnej $\phi''(u)$

$$\vdots$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Dowód.

$\Rightarrow$ istnieje co najmniej jeden punkt ξ w przedziale $(\min(x, x_0), \max(x, x_n))$ taki, że $\phi^{(n+1)}(\xi) = 0$

Ponieważ

$$\begin{aligned} W_n^{(n+1)}(x) &= 0 \\ \omega_n^{(n+1)}(x) &= (n+1)! \end{aligned}$$

więc

$$\phi^{(n+1)}(u) = -f^{(n+1)}(u) + K(n+1)! \quad \Rightarrow \quad K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Oszacowanie błędu wzoru interpolacyjnego

Dowód.

Stąd wynika

$$f(x) - W_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

zatem

$$|\epsilon(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|,$$

gdzie

$$M_{n+1} = \sup_{x \in <a,b>} |f^{(n+1)}(x)|$$

$\square$

Wzór interpolacyjny Newtona

- wzór Lagrange'a i metoda Neville'a pozwalają wyznaczyć wartość wielomianu w punkcie
- niepraktyczne, jeśli punktów jest dużo

Ilorazy różnicowe

Definicja

Ilorazami różnicowymi pierwszego rzędu nazywamy wyrażenia

$$
\begin{aligned}
f[x_0; x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
f[x_1; x_2] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&\vdots \\
f[x_{n-1}; x_n] &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Ilorazy różnicowe

Definicja

Ilorazami różnicowymi drugiego rzędu nazywamy wyrażenia

$$
\begin{aligned}
f[x_0;x_1;x_2] &= \frac{f[x_1;x_2]-f[x_0;x_1]}{x_2-x_0} \\
&\vdots \\
f[x_{n-2};x_{n-1};x_n] &= \frac{f[x_{n-1};x_n]-f[x_{n-2};x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}}
\end{aligned}
$$

Ilorazy różnicowe

Definicja

Ilorazem różnicowym rzędu n nazywamy

$$f[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}; \ldots; x_{i+n}] - f[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $i = 0, 1, 2, \ldots$

Ilorazy różnicowe

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe			
		rzędu 1	rzędu 2	rzędu 3	rzędu 4
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0;x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0;x_1;x_2]$		
		$f[x_1;x_2]$		$f[x_0;x_1;x_2;x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1;x_2;x_3]$		$f[x_0;x_1;x_2;x_3;x_4]$
		$f[x_2;x_3]$		$f[x_1;x_2;x_3;x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2;x_3;x_4]$		
		$f[x_3;x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

Wzór Newtona

Twierdzenie

$$W_n(x) = f(x_0) + f[x_0; x_1]\omega_0(x) + \ldots + f[x_0; \ldots; x_n]\omega_{n-1}(x),$$

przy czym $\omega_i(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_i)$.

Wzór Newtona

Dowód.

Dla $n = 0$ twierdzenie jest prawdziwe, ponieważ

$$W_0(x) \equiv f(x_0).$$

Załóżmy, że jest ono prawdziwe dla pewnego $k - 1 > 0$. Różnica $W_k(x) - W_{k-1}(x)$ jest wielomianem, który można przedstawić w postaci

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}),$$

gdzie A jest współczynnikiem przy najwyższej potędze x wielomianu $W_k(x)$.

Wzór Newtona

Dowód.

Według założenia indukcyjnego, najwyższymi współczynnikami wielomianów $W_{0,1,\ldots,k-1}$ oraz $W_{1,\ldots,k}$ są odpowiednio $f[x_0,\ldots,x_{k-1}]$ i $f[x_1,\ldots,x_k]$. Ze wzoru Neville'a wynika

$$W_k(x) = \frac{(x-x_0)W_{1,\ldots,k}(x) - (x-x_k)W_{0,\ldots,k-1}(x)}{x_k - x_0},$$

zatem

$$A = \frac{f[x_1,\ldots,x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0} = f[x_0,\ldots,x_k].$$

□

Wzór Newtona

Przykład

x_i	0	2	3	4	6
y_i	1	3	2	5	7

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i; x_{i+1}]$	$f[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}]$	$f[x_i; \ldots; x_{i+3}]$	$f[x_i; \ldots; x_{i+4}]$
0	1				
		1			
2	3		$-\frac{2}{3}$		
		-1		$\frac{2}{3}$	
3	2		2		$-\frac{2}{9}$
		3		$-\frac{2}{3}$	
4	5		$-\frac{2}{3}$		
		1			
6	7				

Wzór Newtona

$$
\begin{aligned}
W_4(x) &= 1 + 1(x-0) - \frac{2}{3}(x-0)(x-2) \\
&\quad + \frac{2}{3}(x-0)(x-2)(x-3) \\
&\quad - \frac{2}{9}(x-0)(x-2)(x-3)(x-4) \\
&= -\frac{2}{9}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{88}{9}x^2 + \frac{35}{3}x + 1
\end{aligned}
$$

Wzór Newtona - implementacja

```
n = len(x)-1
W = np.copy(y)
for i in range(1,n+1):
    for j in range(n,i-1,-1):
        W[j]=(W[j]-W[j-1])/(x[j]-x[j-i])
```

$\Rightarrow$ W zawiera potrzebne ilorazy różnicowe w kolejności $W[0] = f(x_0)$, $W[1] = f[x_0, x_1], \ldots, W[n] = f[x_0, \ldots, x_n]$

Sprawdzenie ($n = 2$):

$$
\begin{aligned}
&i = 1, \quad j = 2, \quad W[2] = \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = f[x_1, x_2] \\
& \quad j = 1, \quad W[1] = \tfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \\
&i = 2, \quad j = 2, \quad W[2] = \tfrac{f[x_1, x_2] - W[1]}{x_2 - x_0} = \tfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]
\end{aligned}
$$

Wzór Newtona - współczynniki wielomianu

Chcemy zapisać wielomian interpolacyjny w postaci

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Przykład

$(n = 2)$:

$$\begin{aligned} W(x) &= f[x_0, x_1, x_2]x^2 \\ &\quad + \{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_1 + x_2)\}x \\ &\quad + \{f(x_0) - f(x_0, x_1)x_0 + f[x_0, x_1, x_2]x_0 x_1\} \end{aligned}$$

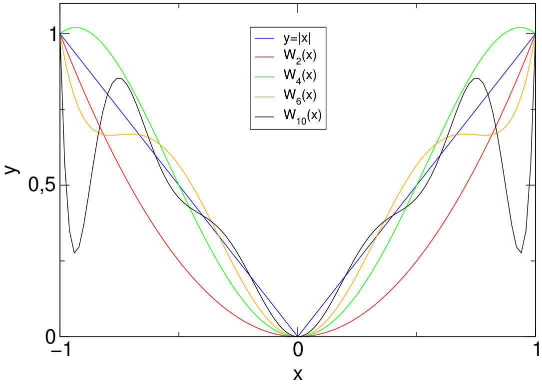
Wzór Newtona - współczynniki wielomianu

```
a = np.copy(W)
for i in range(n):
    for j in range(n-1,i-1,-1):
        a[j]=a[j]-x[j-i]*a[j+1]
```

Sprawdzenie ($n = 2$):

$$
\begin{array}{lll}
i = 0 & j = 1 & a[1] = f[x_0, x_1] - x_1 f[x_0, x_1, x_2] \\
 & j = 0 & a[0] = f(x_0) - x_0\{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2]\} \\
i = 1 & j = 1 & a[1] = f[x_0, x_1] - (x_0 + x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\
i = 2 & & a[2] = f[x_0, x_1, x_2]
\end{array}
$$

Zbieżność procesów interpolacyjnych



Interpolacja wymierna

Mamy $(n+1)$ punktów węzłowych

$$(x_i, y_i = f(x_i)), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Wartość funkcji $f(x)$ przybliżamy funkcją wymierną

$$\phi^{\mu,\nu}(x) \equiv \frac{P^{\mu}(x)}{Q^{\nu}(x)} = \frac{a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{\mu} x^{\mu}}{b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_{\nu} x^{\nu}}$$

spełniającą warunek

$$\phi^{\mu,\nu}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Pułapka!

Na podstawie

$$\phi^{\mu,\nu}(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

można wnioskować, że

$$P^{\mu}(x_i) - y_i Q^{\nu}(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \mu + \nu$$

określa współczynniki a_i, b_i

Pułapka!

Przykład

Niech $\mu = \nu = 1$ oraz

x_i	0	1	2
y_i	1	2	2

$$
\begin{aligned}
a_0 - b_0 &= 0 \\
a_0 + a_1 - 2 * (b_0 + b_1) &= 0 \\
a_0 + 2a_1 - 2 * (b_0 + 2b_1) &= 0
\end{aligned}
$$

Pułapka!

Zakładając, że $b_1 = 1$, otrzymamy

$$b_0 = 0, a_0 = 0,\; a_1 = 2$$

czyli

$$\phi^{1,1}(x) = \frac{2x}{x}$$

$\Rightarrow$ funkcja $\phi^{1,1}(x)$ nie rozwiązuje zadania interpolacji

Odwrotności ilorazów różnicowych

Definicja

Odwrotnościami ilorazów różnicowych nazywamy wielkości

$$
\begin{aligned}
\varphi[x_i; x_j] &= \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j} \\
\varphi[x_i; x_j; x_k] &= \frac{x_j - x_k}{\varphi[x_i; x_j] - \varphi[x_i; x_k]} \\
\varphi[x_i; \ldots; x_l; x_m; x_n] &= \frac{x_m - x_n}{\varphi[x_i; \ldots; x_l; x_m] - \varphi[x_i; \ldots; x_l; x_n]}
\end{aligned}
$$

przy czym niektóre z nich mogą być nieskończone ze względu na zerowanie się mianowników.

Interpolacja wymierna

Spełniona jest następująca własność:

$$\begin{aligned}\frac{P^n(x)}{Q^n(x)} &= y_0 + \frac{P^n(x)}{Q^n(x)} - y_0 = y_0 + \frac{P^n(x)}{Q^n(x)} - \frac{P^n(x_0)}{Q^n(x_0)} \\ &= y_0 + (x - x_0)\frac{P^{n-1}(x)}{Q^n(x)} = y_0 + \frac{x_i - x_0}{\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}}\end{aligned}$$

Stąd wynika

$$\frac{Q^n(x_i)}{P^{n-1}(x_i)} = \frac{x_i - x_0}{y_i - y_0} = \varphi[x_0; x_i], \quad i = 1, 2, \ldots, 2n$$

Interpolacja wymierna

czyli

$$\begin{aligned}\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} &= \varphi[x_0; x_1] + \frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} - \frac{Q^n(x_1)}{P^{n-1}(x_1)}\\ &= \varphi[x_0; x_1] + (x - x_1)\frac{Q^{n-1}(x)}{P^{n-1}(x)}\\ &= \varphi[x_0; x_1] + \frac{x - x_1}{\frac{P^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}},\end{aligned}$$

co prowadzi do

$$\frac{P^{n-1}(x_i)}{Q^{n-1}(x_i)} = \varphi[x_0; x_1; x_i], \quad i = 2, 3, \ldots, 2n$$

Interpolacja wymierna

Ostatecznie

$$\begin{aligned}
\phi^{n,n}(x) &= \frac{P^n(x)}{Q^n(x)} = y_0 + \frac{x - x_0}{\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}} \\
&= y_0 + \frac{x - x_0}{\varphi[x_0; x_1] + \frac{x - x_1}{\frac{P^{n-1}(x)}{Q^{n-1}(x)}}} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Interpolacja wymierna

$\phi^{n,n}(x)$ można więc przedstawić w postaci następującego ułamka łańcuchowego:

$$
\begin{aligned}
\phi^{n,n}(x) \quad = \quad & y_0 + \underline{x - x_0}/\overline{\varphi[x_0; x_1]} + \underline{x - x_1}/\overline{\varphi[x_0; x_1; x_2]} \\
& + \underline{x - x_2}/\overline{\varphi[x_0; x_1; x_2; x_3]} + \cdots \\
& + \underline{x - x_{2n-1}}/\overline{\varphi[x_0; x_1; \ldots; x_{2n}]}
\end{aligned}
$$

Interpolacja wymierna

Przykład

Mamy daną tabelę odwrotności ilorazów różnicowych:

x_i	y_i	$\varphi[x_0;x_i]$	$\varphi[x_0;x_1;x_i]$	$\varphi[x_0;x_1;x_2;x_i]$
0	0			
1	-1	-1		
2	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{1}{2}$	
3	9	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\phi^{2,1}(x) = 0 + \underline{x}/\overline{-1} + \underline{x-1}/\overline{-\frac{1}{2}} + \underline{x-2}/\overline{\frac{1}{2}} = \frac{x}{-1+\frac{x-1}{-\frac{1}{2}+\frac{x-2}{\frac{1}{2}}}} = \frac{4x^2-9x}{-2x+7}$$