Metody numeryczne

Wykład 7 - Aproksymacja funkcji

Janusz Szwabiński

Plan wykładu

1. Pojęcia podstawowe
   1.1 Zagadnienie aproksymacji
   1.2 Funkcje bazowe
   1.3 Typowe normy
   1.4 Rodzaje aproksymacji

2. Aproksymacja średniokwadratowa
   2.1 Aproksymacja wielomianowa
   2.2 Aproksymacja trygonometryczna
   2.3 Aproksymacja za pomocą funkcji sklejanych
   2.4 Aproksymacja funkcji ciągłych

Zagadnienie aproksymacji

$\mathcal{X}$	-	pewna przestrzeń liniowa
$\mathcal{X}_m$	-	m-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni $\mathcal{X}$
$f(x)$	-	funkcja, którą chcemy aproksymować

Zagadnienie aproksymacji

Definicja

Aproksymacja liniowa funkcji $f(x)$ polega na wyznaczeniu takich współczynników $a_0, a_1, \ldots, a_m$ funkcji

$$F(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_m\phi_m(x)$$

gdzie $\phi_0(x), \ldots, \phi_m(x)$ są funkcjami bazowymi podprzestrzeni $\mathcal{X}_{m+1}$, aby funkcja $F(x)$ spełniała pewne warunki, np. minimalizowała normę różnicy $\|f(x) - F(x)\|$

Zagadnienie aproksymacji

Definicja

Aproksymacja wymierna funkcji $f(x)$ polega na znalezieniu takich współczynników $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$ funkcji

$$F(x) = \frac{a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_n\phi_n(x)}{b_0\psi_0(x) + b_1\psi_1(x) + \ldots + b_m\psi_m(x)}$$

gdzie $\phi_i(x)$ i $\psi_j(x)$ $(i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, m)$ są elementami tej samej bazy k wymiarowej podprzestrzeni liniowej $(k = \max(m, n))$, aby funkcja $F(x)$ spełniała pewne warunki, np. minimalizowała normę różnicy $\|f(x) - F(x)\|$

Przykłady funkcji bazowych

- funkcje trygonometryczne
  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin kx, \cos kx$
- jednomiany
  $1, x, x^2, \ldots, x^m$
- wielomiany
  $1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0) \cdots (x - x_m)$
- wielomiany Czebyszewa, Legendre'a

Wybór bazy wpływa na dokładność i koszt obliczeń!!!

Typowe normy

- Czebyszewa

$$\|f\| = \sup_{\langle a,b \rangle} |f(x)|$$

- L_2

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

- L_2 z wagą

$$\|f\|_{2,w} = \left(\int_a^b w(x) |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

Typowe normy

- „dyskretna”

$$\|f\| = \left(\sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 \right)^{1/2}$$

Rodzaje aproksymacji

- średniokwadratowa, kiedy szukamy funkcji $F(x)$ minimalizującej całkę

$$\|f(x) - F(x)\| = \int_a^b w(x)\left[F(x) - f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$$

lub sumę

$$\|f(x) - F(x)\| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2$$

$$w(x_i) \geqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Rodzaje aproksymacji

- jednostajna, kiedy szukamy funkcji $F(x)$ minimalizującej normę

$$\|F(x) - f(x)\| = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} |F(x) - f(x)|$$

Rodzaje aproksymacji

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na skończonym przedziale $\langle a, b \rangle$, to dla każdego ϵ dodatniego można dobrać takie n, że jest możliwe utworzenie wielomianu $P_n(x)$ stopnia n ($n = n(\epsilon)$), który spełnia nierówność

$$|f(x) - P_n(x)| < \epsilon$$

na całym przedziale $\langle a, b \rangle$.

Rodzaje aproksymacji

Twierdzenie

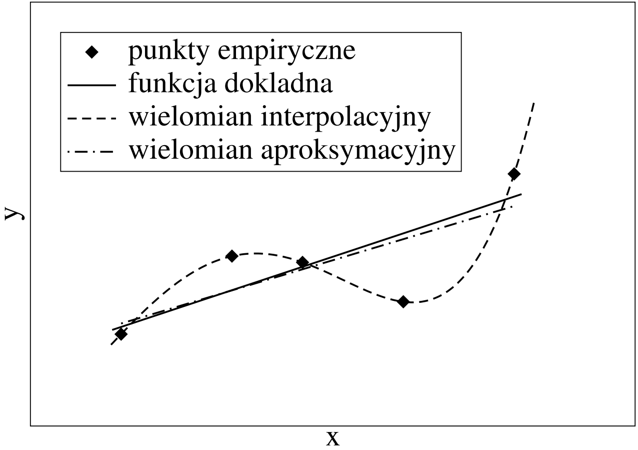
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na $\mathbf{R}$ *i okresowa o okresie 2π, to dla każdego ϵ dodatniego istnieje wielomian trygonometryczny*

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = n(\epsilon)$$

spełniający dla wszystkich x nierówność

$$|f(x) - S_n(x)| < \epsilon.$$

Aproksymacja średniokwadratowa



Aproksymacja średniokwadratowa

Szukamy wielomianu uogólnionego

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i(x)$$

takiego, że suma

$$\|F(x) - f(x)\| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left[F(x_i) - f(x_i)\right]^2$$

osiąga minimum.

Aproksymacja średniokwadratowa

$$H(a_0,\dots,a_m)=\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\left[f(x_j)-\sum_{i=0}^{m} a_i\phi_i(x_j)\right]^2=\sum_{j=0}^{n} w(x_j)R_j^n$$

Układ normalny ($k=0,1,\dots,m$)

$$\frac{\partial H}{\partial a_k}=-2\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\left[f(x_j)-\sum_{i=0}^{m} a_i\phi_i(x_j)\right]\phi_k(x_j)=0$$

$\phi_j(x)$ tworzą bazę

$\Rightarrow$ wyznacznik różny od zera

$\Rightarrow$ rozwiązanie układu minimalizuje sumę $\|F(x)-f(x)\|$

Aproksymacja wielomianowa

Niech $\phi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots, m$ oraz $w(x) \equiv 1$

$\Rightarrow$ układ normalny ma postać

$$\sum_{j=0}^{n} \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i \right] x_j^k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

Stąd

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_{ik} = \rho_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m$$

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k}, \quad \rho_k = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) x_j^k$$

Aproksymacja wielomianowa

Jeśli punkty $x_0, \ldots, x_n$ są różne oraz

- $m \leqslant n$

  $\Rightarrow$ wyznacznik układu jest różny od zera

  $\Rightarrow$ układ ma jednoznaczne rozwiązanie

- $m = n$

  $\Rightarrow$ $F(x)$ pokrywa się z wielomianem interpolacyjnym

  $\Rightarrow$ $H = 0$

Aproksymacja wielomianowa

Uwaga!

Dla $m \geqslant 6$ układ normalny aproksymacji wielomianowej jest źle uwarunkowany

$\Rightarrow$ aproksymację z jednomianami jako funkcjami bazowymi stosujemy tylko dla małych m

$\Rightarrow$ dla dużych m lepiej stosować jako bazę wielomiany ortogonalne

Aproksymacja trygonometryczna

$f(x)$ jest określona na dyskretnym zbiorze punktów

$$x_i = \frac{\pi i}{L}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2L-1$$

Mamy

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \sin m x_i \sin k x_i = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ L, & m = k \neq 0 \\ 0, & m = k = 0 \end{cases}$$

Aproksymacja trygonometryczna

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos mx_i \cos kx_i = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ L, & m = k \neq 0 \\ 2L, & m = k = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos mx_i \sin kx_i = 0$$

Aproksymacja trygonometryczna

Szukamy funkcji aproksymującej postaci

$$y_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \cos jx + b_j sinjx \right), \quad n < L$$

Żądanie minimalizacji sumy

$$\sum_{i=0}^{2L-1} [f(x_i) - y_n(x_i)]^2$$

prowadzi do

Aproksymacja trygonometryczna

$$
\begin{aligned}
a_j &= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)\cos jx_i = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)\cos\frac{\pi ij}{L} \\
b_j &= \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)\sin jx_i = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{2L-1} f(x_i)\sin\frac{\pi ij}{L}
\end{aligned}
$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Aproksymacja za pomocą funkcji sklejanych

Funkcja jest określona na dyskretnym zbiorze punktów

$$x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n_1, \quad n_1 > n + 3$$

Funkcji aproksymacyjnej szukamy w postaci

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \phi_i^3(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

Aproksymacja za pomocą funkcji sklejanych

$$\phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) & \\ +3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) & \\ +3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & \text{dla} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Aproksymacja za pomocą funkcji sklejanych

Niech

$$I = \sum_{k=0}^{n_1} \left[f(x_k) - \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \phi_i^3(x_k) \right]^2$$

Warunek

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0, \quad i = -1, 0, 1, \ldots, n+1$$

prowadzi do

$$\sum_{i=-1}^{n+1} b_{ij} c_i = \sum_{k=0}^{n_1} f(x_k) \phi_j^3(x_k), \quad j = -1, 0, \ldots, n+1$$

$$b_{ij} = \sum_{k=0}^{n_1} \phi_i^3(x_k) \phi_j^3(x_k)$$

Aproksymacja funkcji ciągłych

Szukamy funkcji aproksymującej postaci

$$P(x) = a_0\phi_0(x) + \ldots a_n\phi_n(x)$$

gdzie $\phi_j(x)$ to elementy bazy pewnej podprzestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem

Niech

$$H_n = \int_a^b \mathrm{d}x \, [P(x) - f(x)]^2 = \int_a^b \mathrm{d}x \left[\sum_{i=0}^{n} a_i\phi_i(x) - f(x)\right]^2$$

Aproksymacja funkcji ciągłych

Minimum H_n będzie minimalizowało normę

$$\|P(x) - f(x)\|$$

W tym celu rozwiązujemy układ

$$\frac{\partial H_n}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

względem współczynników a_i

Aproksymacja funkcji ciągłych

Przykład

Funkcję $f(x) = \sin x$ na przedziale $\langle 0, \pi/2\rangle$ aproksymujemy wielomianem

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Układ równań ma postać

$$\begin{aligned}
a_0 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x + a_1 \int_0^{\pi/2} x\mathrm{d}x + a_2 \int_0^{\pi/2} x^2\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sin x\mathrm{d}x \\
a_0 \int_0^{\pi/2} x\mathrm{d}x + a_1 \int_0^{\pi/2} x^2\mathrm{d}x + a_2 \int_0^{\pi/2} x^3\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} x \sin x\mathrm{d}x \\
a_0 \int_0^{\pi/2} x^2\mathrm{d}x + a_1 \int_0^{\pi/2} x^3\mathrm{d}x + a_2 \int_0^{\pi/2} x^4\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Aproksymacja funkcji ciągłych

czyli

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}a_0 + \frac{\pi^2}{8}a_1 + \frac{\pi^3}{24}a_2 &= 1 \\
\frac{\pi^2}{8}a_0 + \frac{\pi^3}{24}a_1 + \frac{\pi^4}{64}a_2 &= 1 \\
\frac{\pi^3}{24}a_0 + \frac{\pi^4}{64}a_1 + \frac{\pi^5}{160}a_2 &= -2
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
P(x) \simeq 0,134 + 0,59x + 0,05x^2
$$

Aproksymacja funkcji ciągłych

Średni błąd aproksymacji

$$M^2 = (b-a)^{-1} H_n(a_0, a_1, a_2) \simeq 0,00797$$

Przykład

Funkcję $f(x) = \sin x$ na przedziale $\langle 0, \pi/2 \rangle$ aproksymujemy posługując się wielomianami Legendre'a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wprowadzamy zmienną

$$t = \frac{4}{\pi} x - 1$$

Aproksymacja funkcji ciągłych

Aproksymować będziemy funkcję

$$\hat{f}(t) = \sin\frac{\pi(t+1)}{4}$$

wielomianem

$$W(t) = a_0 P_0(t) + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t)$$

Aproksymacja funkcji ciągłych

Współczynniki wynoszą

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \sin\frac{\pi}{4}(t+1) = \frac{2}{\pi} \\
a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t t \sin\frac{\pi}{4}(t+1) = \frac{24}{\pi^2} - \frac{6}{\pi} \\
a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) \sin\frac{\pi}{4}(t+1) = -\frac{480}{\pi^3} + \frac{120}{\pi^2} + \frac{10}{\pi}
\end{aligned}
$$

Stąd

$$W(t) \simeq 0,6366197 + 0,5218492x - 0,1390961x^2$$

$$M^2 \simeq 0,0000704$$