

Metody numeryczne

Wykład 4 - Równania nieliniowe

Janusz Szwabiński

Plan wykładu

1. Równania z jedną niewiadomą
2. Równania algebraiczne
3. Układy równań nieliniowych

Równania nieliniowe

- szukamy x , dla którego

$$f(x) = 0$$

- **trudniejsze** niż rozwiązanie układu równań liniowych
- rozwiązanie analityczne albo nie istnieje (równania przestępne, równania algebraiczne rzędu wyższego niż 4), albo jest tak skomplikowane, że zupełnie nie nadaje się do użycia w praktycznych obliczeniach
- **iteracyjne poprawianie** początkowego przybliżenia szukanego pierwiastka
- przybliżone rozwiązania **wystarczają** w większości przypadków

Twierdzenie o punkcie stałym

Twierdzenie

Niech $g(x)$ i jej pochodna $g'(x)$ będą funkcjami ciągłymi na pewnym przedziale $I = [\tilde{x} - r, \tilde{x} + r]$ wokół punktu \tilde{x} takiego, że

$$g(\tilde{x}) = \tilde{x}.$$

Wówczas, jeżeli

$$|g'(x)| \leq \alpha < 1,$$

gdzie α to pewna liczba dodatnia, to iteracja

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

startująca z dowolnego $x_0 \in I$ dąży do punktu stałego \tilde{x} przekształcenia g .

Twierdzenie o punkcie stałym

- praktyczny przepis na znalezienie przybliżonego rozwiązania równania, o ile tylko da się ono zapisać w postaci

$$x = g(x)$$

- trudność polega na tym, że istnieje zwykle kilka różnych możliwości przekształcenia równania
- w myśl twierdzenia należy wybrać postać, dla której

$$|g'(x)| < 1, \quad x \in I$$

- bez znajomości zgrubnego oszacowania rozwiązania określenie przedziału I może okazać się niemożliwe

Twierdzenie o punkcie stałym - przykład

Rozważmy równanie

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

„Zgadujemy”, że rozwiązanie powinno leżeć w przedziale $I = (1; 1,5)$ i przekształcamy równanie do postaci

$$x = \frac{2}{x} \Rightarrow g(x) = 2/x$$

Po wyliczeniu pochodnej funkcji $g(x)$ okaże się, że warunek

$$|g'(x)| = \frac{2}{x^2} < 1$$

nie jest spełniony dla wszystkich $x \in I$.

Twierdzenie o punkcie stałym - przykład

W tej sytuacji procedura iteracyjna

$$x_{k+1} = \frac{2}{x_k}$$

raczej nie zadziała.

Twierdzenie o punkcie stałym - przykład

I rzeczywiście, już po kilku iteracjach widać, że otrzymaliśmy naprzemienny ciąg wartości

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \dots$$

który nigdy nie osiągnie poszukiwanego rozwiązania.

Twierdzenie o punkcie stałym - przykład

Równanie

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

możemy również zapisać w postaci

$$x = -\frac{1}{2} \{(x-1)^2 - 3\}$$

W tym wypadku funkcja $g(x)$ spełnia warunek zbieżności

$$|g'(x)| = |x-1| \leq 0.5 < 1, \quad \forall x \in I$$

Można więc użyć iteracji

$$x_{k+1} = -\frac{1}{2} \{(x_k-1)^2 - 3\}$$

do znalezienia rozwiązania.

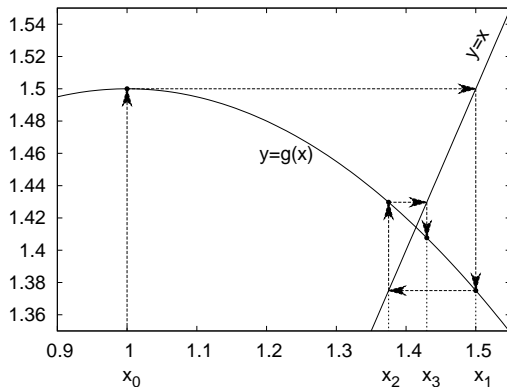
Twierdzenie o punkcie stałym - przykład

Szereg iteracyjny

$$x_0 = 1; \quad x_1 = 1,5; \quad x_2 = 1,375; \quad x_3 = 1,4297; \quad x_4 = 1,4077, \dots$$

rzeczywiście dąży do rozwiązania $\sqrt{2} = 1,414\dots$

Twierdzenie o punkcie stałym - przykład



Twierdzenie o punkcie stałym - przykład

Przekształćmy równanie

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

do postaci

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

Pochodna funkcji $g(x)$ spełnia warunek zbieżności

$$|g'(x)| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{2}{x^2} \right| \leq \frac{1}{2} < 1, \quad \forall x \in I$$

Dodatkowo $g'(x) = 0$ dla $x^2 = 2$ stanowiącego rozwiązanie równania. W tym przypadku szereg iteracyjny zbiega szczególnie szybko do punktu stałego:

$$x_0 = 1; \quad x_1 = 1,5; \quad x_2 = 1,4167; \quad x_3 = 1,4142; \quad x_4 = 1,4142; \dots$$

```
import numpy as np

def fixedpoint(g, x0, tol=1e-6, maxit=100):
    xx = np.zeros(maxit)
    xx[0] = x0
    for k in range(1, maxit):
        xx[k] = g(xx[k - 1])
        err = abs(xx[k] - xx[k - 1])
        if err < tol:
            break

    x = xx[k]
    if k == maxit - 1:
        print("No real convergence!") #

    return x, err, xx[:k+1]
```

```
def fun(x):  
    return 0.5*(x+2/x)  
  
result, error, values = fixedpoint(fun, 0.5)  
print("Result:", result)  
print("Error:", error)  
print("Values:", values)
```

Result: 1.414213562373095

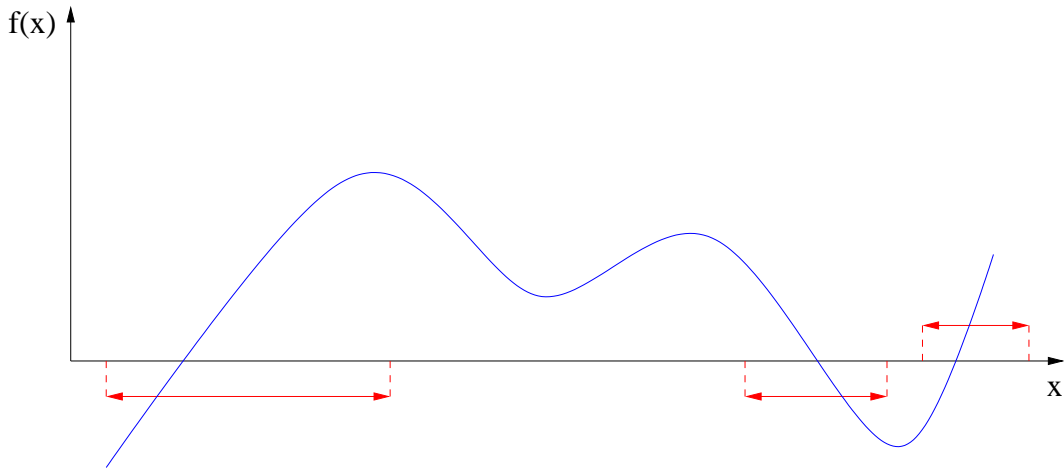
Error: 1.5183720947220536e-10

Values: [0.5 2.25 1.56944444 1.42189036 1.41423429 1.41421356 1.41421356]

Lokalizacja miejsc zerowych

- wybór wartości startowej (lub przedziału) odgrywa dużą rolę w rozwiązywaniu równań
- źle wybrany punkt startowy może spowodować, że metoda iteracyjna **w ogóle nie będzie zbieżna** lub **znajdzie „złe” rozwiązanie**
- nawet niezbyt dokładny wykres pozwala wybrać rozsądne przybliżenie początkowe
- jeżeli metoda wymaga od nas przedziału, w którym znajduje się rozwiązanie, a nie tylko wartości początkowej, powinniśmy wybrać tzw. **przedział izolacji pierwiastka**
- wiele metod zawodzi, kiedy podaje im się na starcie przedział zawierający więcej pierwiastków

Lokalizacja miejsc zerowych



Lokalizacja miejsc zerowych

- wykres funkcji jako metoda lokalizacji rozwiązań sprawdza się znakomicie przy rozwiązywaniu jednego (lub kilku równań), o ile tylko stanowi to cel sam w sobie
- czasochłonne, gdy mamy wiele różnych równań do rozwiązania
- niepraktyczne, gdy rozwiązanie równania nieliniowego stanowi tylko krok pośredni obliczeń komputerowych

Automatyczne oddzielanie pierwiastków (ang. *incremental search*)

- jeżeli $f(a)f(b) < 0$, to ciągła funkcja $f(x)$ musi mieć w przedziale (a, b) przynajmniej jeden pierwiastek
- jeżeli dodatkowo przedział (a, b) będzie mały, istnieje duże prawdopodobieństwo, że będzie on przedziałem izolacji danego pierwiastka
- wystarczy zbadać zmiany znaku w ciągu wartości funkcji wyliczonych dla dyskretnego zbioru punktów

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

odległych od siebie o pewien niewielki krok Δ

Automatyczne oddzielanie pierwiastków - przykład

$$x^2 - 2 = 0$$

x	f(x)
0.00000	-2.000000
0.20000	-1.960000
0.40000	-1.840000
0.60000	-1.640000
0.80000	-1.360000
1.00000	-1.000000
1.20000	-0.560000
1.40000	-0.040000
1.60000	0.560000
1.80000	1.240000
2.00000	2.000000

Automatyczne oddzielanie pierwiastków - implementacja

```
from numpy import sign
def rootsearch(f,a,b,dx):
    x1 = a; f1 = f(a)
    x2 = a + dx; f2 = f(x2)
    while sign(f1) == sign(f2):
        if x1 >= b: return None,None
        x1 = x2; f1 = f2
        x2 = x1 + dx; f2 = f(x2)
    else:
        return x1,x2
```

Automatyczne oddzielanie pierwiastków - implementacja

Szukamy pierwiastka funkcji

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$$

z dokładnością do 4 cyfr dziesiętnych

- w podejściu naiwnym $dx = 0.0001 \rightarrow 10000$ wyliczeń funkcji
- możemy lokalizować pierwiastek w 4 etapach, poprawiając za każdym razem dokładność $\rightarrow 40$ wyliczeń funkcji

Automatyczne oddzielanie pierwiastków - implementacja

```
def f(x): return x**3 - 10.0*x**2 + 5.0
```

```
x1 = 0.0; x2 = 1.0
```

```
for i in range(4):
```

```
    dx = (x2 - x1)/10.0
```

```
    x1,x2 = rootsearch(f,x1,x2,dx)
```

```
x = (x1 + x2)/2.0
```

```
print('x =', '{:6.4f}'.format(x))
```

```
x = 0.7346
```

Automatyczne oddzielanie pierwiastków

- ograniczenia

- jeśli krok Δx jest większy, niż odległość między dwoma sąsiednimi pierwiastkami, **możemy je przeoczyć**
- pierwiastek o parzystej krotności nie zostanie znaleziony
- niektóre osobliwości mogą zostać potraktowane jako pierwiastki

Automatyczne oddzielanie pierwiastków - ograniczenia

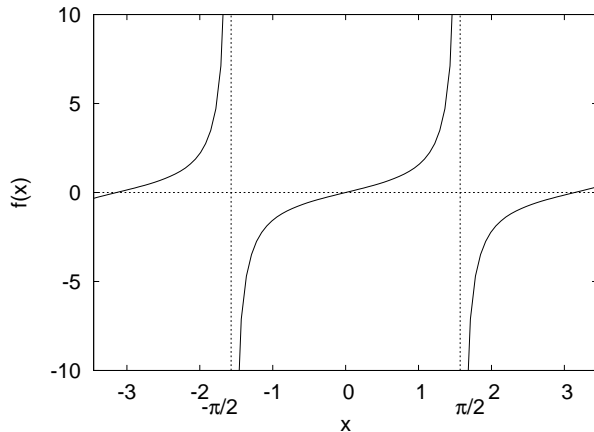
```
import math
def f(x): return math.tan(x)

x1,x2 = rootsearch(f,1,2,0.02)

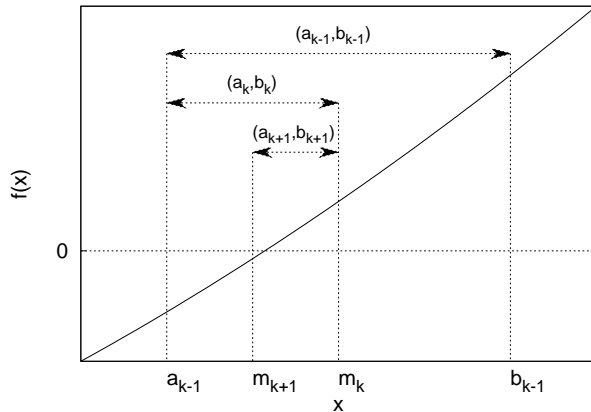
print((x1+x2)/2)

1.5700000000000005
```


Automatyczne oddzielanie pierwiastków - ograniczenia



Metoda połowienia przedziału (bisekcji)



Metoda połowienia przedziału

- jeżeli w przedziale (a, b) znajduje się miejsce zerowe **ciągłej** funkcji $f(x)$, to $f(a)f(b) < 0$
- dla pierwiastka $\alpha \in (a_1, b_1)$ generujemy ciąg przedziałów

$$(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots, \quad \forall i \quad \alpha \in (a_i, b_i)$$

- dla $I_{k-1} = (a_{k-1}, b_{k-1})$ kolejny przedział wyznaczamy według przepisu:
 1. obliczamy środek m_k przedziału I_{k-1}

$$m_k = \frac{1}{2} (a_{k-1} + b_{k-1})$$

2. jeśli $f(m_k) = 0$, znaleźliśmy pierwiastek; w przeciwnym razie

$$(a_k, b_k) = \begin{cases} (m_k, b_{k-1}), & \text{jeśli } f(m_k)f(b_{k-1}) < 0 \\ (a_{k-1}, m_k), & \text{jeśli } f(a_{k-1})f(m_k) < 0 \end{cases}$$

Metoda połowienia przedziału - błędy zaokrągleń

Używamy arytmetyki z sześcioma liczbami dziesiętnymi. Niech

$$a_{k-1} = 0,742531, \quad b_{k-1} = 0,742533$$

Stąd (po zaokrągleniu)

$$a_{k-1} + b_{k-1} = 1.48506, \quad \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1}) = 0,742530$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1}) < a_{k-1}$$

Metoda połowienia przedziału - błędy zaokrągleń

- w obliczeniach ze skończoną dokładnością w arytmetyce dziesiętnej nierówności

$$a_{k-1} \leq \frac{1}{2} (a_{k-1} + b_{k-1}) \leq b_{k-1}$$

mogą nie być spełnione dla wszystkich liczb zmiennoprzecinkowych a_{k-1} i b_{k-1} !

- aby zagwarantować spełnienie nierówności w arytmetyce o dowolnej podstawie, wystarczy wzór

$$m_k = a_{k-1} + \frac{1}{2} (b_{k-1} - a_{k-1})$$

Metoda połowienia przedziału

- po n krokach otrzymamy przedział o długości

$$\frac{1}{2^n}(b - a)$$

- jako wartość przybliżoną pierwiastka przyjmujemy

$$\alpha = m_{n+1} \pm d_n, \quad d_n = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a)$$

- wadą jest wolna zbieżność
- w każdym kroku iteracji zyskujemy jedną dokładną cyfrę dwójkową
- ponieważ $10^{-1} \simeq 2^{-3,3}$, jedną cyfrę dziesiętną uzyskamy średnio co **3,3** kroków

Metoda połowienia przedziału - przykład

$$x^2 - 2 = 0, I_0 = (1; 1,5)$$

n	a_{n-1}	b_{n-1}	m_n	$f(m_n)$
1	1,0000	1,5000	1,2500	-0,43750000
2	1,2500	1,5000	1,3750	-0,10938000
3	1,3750	1,5000	1,4375	0,06640600
4	1,3750	1,4375	1,4062	-0,02260200
5	1,4062	1,4375	1,4219	0,02180000
6	1,4062	1,4219	1,4141	-0,00032119
7	1,4141	1,4219	1,4180	0,01072400
8	1,4141	1,4180	1,4160	0,00505600
9	1,4141	1,4160	1,4150	0,00222500
10	1,4141	1,4150	1,4146	0,00109320
11	1,1441	1,4146	1,4143	0,00024449
12	1,4141	1,4143	1,4142	0,00003836

```

import math, sys
from numpy import sign

def bisection(f,x1,x2,switch=1,tol=1.0e-9):
    f1 = f(x1)
    if f1 == 0.0: return x1
    f2 = f(x2)
    if f2 == 0.0: return x2
    if sign(f1) == sign(f2):
        print('Wrong interval!')
        sys.exit(1)
    n = int(math.ceil(math.log(abs(x2 - x1)/tol)/math.log(2.0)))

    for i in range(n):
        x3 = 0.5*(x1 + x2); f3 = f(x3)
        if (switch == 1) and (abs(f3) > abs(f1)) and (abs(f3) > abs(f2)):
            return None
        if f3 == 0.0: return x3
        if sign(f2) != sign(f3): x1 = x3; f1 = f3
        else: x2 = x3; f2 = f3

    return (x1 + x2)/2.0

```



```
def f(x): return x**3 - 10.0*x**2 + 5.0

x = bisection(f, 0.0, 1.0, tol = 1.0e-4)
print('x =', '{:6.4f}'.format(x))
```

```
x = 0.7346
```

Metoda wielopodziału przedziału izolacji

- uogólnienie metody bisekcji
- w jednym kroku dzielimy przedział na k podprzedziałów $I_i = [x_i, x_{i+1}]$

$$x_i = a + i \left(\frac{b-a}{k} \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

- wybór nowego przedziału izolacji odbywa się jak poprzednio
- aby znaleźć pierwiastek z dokładnością ϵ musimy wykonać

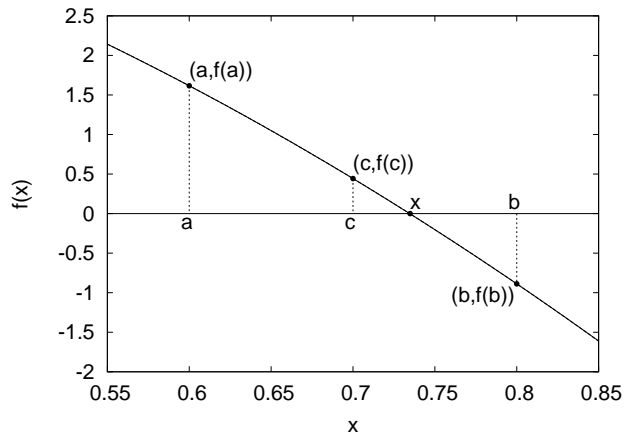
$$n_k = \frac{\log_2 \left(\frac{b-a}{2\epsilon} \right)}{\log_2 k} \text{ podziałów}$$

- przydatna, gdy w przedziale początkowym jest kilka pierwiastków i mamy możliwość równoległego operowania na większej liczbie podprzedziałów

Metoda Brenta

- łączy w sobie niezawodność bisekcji z odwrotną interpolacją kwadratową
- dzielimy wyjściowy przedział (a, b) izolacji pierwiastka na połowę
- określamy, w którym z przedziałów $(a, c = \frac{a+b}{2})$ i (c, b) leży poszukiwany pierwiastek
- przez punkty $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ i $(b, f(b))$ prowadzimy parabolę i szukamy punktu przecięcia z osią X

Metoda Brenta



Metoda Brenta

- wzór paraboli przechodzącej przez trzy punkty

$$x = \frac{[y - f(b)][y - f(c)]}{[f(a) - f(b)][f(a) - f(c)]}a + \frac{[y - f(a)][y - f(c)]}{[f(b) - f(a)][f(b) - f(c)]}b + \frac{[y - f(a)][y - f(b)]}{[f(c) - f(a)][f(c) - f(b)]}c$$

- kładąc $y = 0$ znajdziemy nowe przybliżenie poszukiwanego pierwiastka

$$x = -\frac{af(b)f(c)[f(b) - f(c)] + bf(c)f(a)[f(c) - f(a)] + cf(a)f(b)[f(a) - f(b)]}{[f(a) - f(b)][f(b) - f(c)][f(c) - f(a)]}$$

- przybliżenie przyjmujemy, jeśli leży ono w nowym przedziale izolacji
- w przeciwnym razie wynik interpolacji porzucamy i przeprowadzamy następny krok bisekcji
- procedurę powtarzamy do uzyskania żądanej dokładności

Metoda Brenta - przykład

Szukamy pierwiastka funkcji

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 5$$

znajdującego się początkowo w przedziale $(0, 6; 0, 8)$.
W punktach startowych mamy

$$a = 0,6, \quad f(a) = 1,616$$

$$b = 0,8, \quad f(b) = -0,888$$

Połowimy przedział izolacji pierwiastka:

$$c = 0,7, \quad f(c) = 0,443$$

Stąd wynika, że nowym przedziałem izolacji pierwiastka jest $(c, b) = (0,7; 0,8)$.

Metoda Brenta - przykład

Przez punkty $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ i $(b, f(b))$ prowadzimy parabolę. Znajdujemy punkt przecięcia z osią X :

$$x = 0,73487$$

Ponieważ leży on w nowym przedziale izolacji pierwiastka, akceptujemy wynik. W ten sposób pierwszy krok metody Brenta został ukończony. W drugim kroku wartości c , x i b będziemy traktować jako nowe wartości a , c i b

$$c = 0,7 \rightarrow a$$

$$x = 0,73487 \rightarrow c$$

$$b = 0,8 \rightarrow b$$

Nowym przedziałem izolacji będzie $(a, c) = (0,7; 0,73487)$.

Metoda Brenta - przykład

Interpolacja kwadratowa prowadzi do

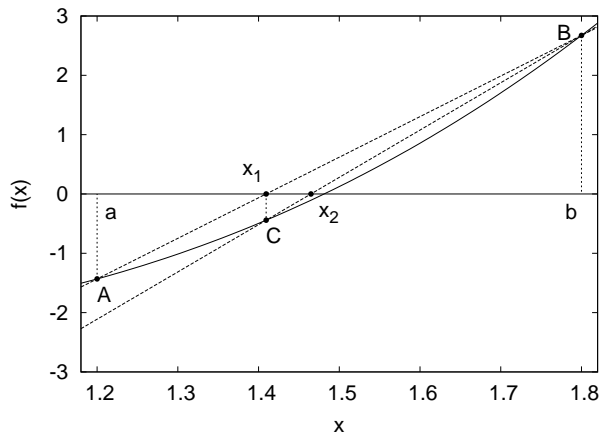
$$x = 0,73460$$

Ponownie akceptujemy wynik, ponieważ leży on w przedziale izolacji. W ten sposób, po dwóch krokach, otrzymaliśmy rozwiązanie z pięcioma poprawnymi cyframi dziesiętnymi.

Regula falsi

- zakładamy, że równanie $f(x) = 0$ ma w przedziale (a, b) pojedynczy pierwiastek α
- funkcja $f(x)$ jest klasy C^2 na przedziale $\langle a, b \rangle$
- jej pierwsza i druga pochodna mają stały znak na tym przedziale
- dla ustalenia uwagi rozważymy przypadek $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in \langle a, b \rangle$ (wybór stałego punktu iteracji)

Regula falsi



Regula falsi

- przez punkty $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$ prowadzimy cięciwę

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

- punkt przecięcia cięciwy z osią X to pierwsze przybliżenie pierwiastka:

$$-f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a) \Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

- jeśli przybliżenie nie jest wystarczające, przez punkt $C = (x_1, f(x_1))$ oraz jeden z punktów A i B (wybieramy ten, w którym funkcja jest przeciwnego znaku niż w C) prowadzimy następną cięciwę itd.

Regula falsi

- w ten sposób otrzymamy ciąg kolejnych przybliżeń

$$x_0 = a$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

- powyższy ciąg jest rosnący i ograniczony z góry \Rightarrow **jest zbieżny**
- można przejść w powyższym równaniu do granicy $k \rightarrow \infty$

$$g = g - \frac{f(g)}{f(b) - f(g)}(b - g)$$

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \quad a < g < b$$

$$\Rightarrow f(g) = 0$$

Regula falsi

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o przyrostach,

$$f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha), \quad x_n < c < \alpha$$

możemy oszacować błąd n -tego przybliżenia ($f(\alpha) = 0$)

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{f(x_n)}{m}, \quad m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$$

Regula falsi

Błąd możemy ocenić również znając dwa kolejne przybliżenia:

$$-f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(b)}{x_k - b}(x_{k+1} - x_k).$$

Ponieważ $f(\alpha) = 0$, więc

$$f(\alpha) - f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(b)}{x_k - b}(x_{k+1} - x_k)$$

Regula falsi

Z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy

$$(\alpha - x_k)f'(\xi_k) = (x_{k+1} - x_k)f'(\bar{x}_k), \quad \xi_k \in (x_k, \alpha), \quad \bar{x}_k \in (x_k, b)$$

Dodajemy obustronnie $-x_{k+1}f'(\xi_k)$

$$|\alpha - x_{k+1}| = \frac{|x_k - x_{k+1}| \cdot |f'(\xi_k) - f'(\bar{x}_k)|}{|f'(\xi_k)|} \leq \frac{M - m}{m} |x_{k+1} - x_k|,$$

gdzie

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|, \quad M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$$

Regula falsi

- oszacowanie pesymistyczne
- wymaga znajomości m i M
- dla przybliżeń w niewielkim otoczeniu α :

$$|\alpha - x_{k+1}| \sim \left| \frac{f(x_{k+1})}{f'(x_{k+1})} \right| \sim \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_{k+1}) - f(x_k)} \right| \cdot |f(x_{k+1})|$$

Regula falsi

- metoda zbieżna dla dowolnej funkcji ciągłej na przedziale $\langle a, b \rangle$, o ile tylko spełniony jest warunek $f(a)f(b) < 0$ i pierwsza pochodna tej funkcji jest ograniczona i różna od zera w otoczeniu pierwiastka
- jeżeli druga pochodna nie zmienia znaku w rozpatrywanym przedziale, to punktem stałym iteracji jest punkt, w którym

$$ff'' > 0$$

- stosunkowo wolno zbieżna

Regula falsi - przykład

Szukamy pierwiastka równania

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

Z wykresu funkcji $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ wynika, że pierwiastek dodatni leży w przedziale $(1, 2)$. Ponadto,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

$$f''(x) = 6x + 2$$

zatem obie pochodne są dodatnie w tym przedziale.

Regula falsi - przykład

x	$f(x)$
$a = 1$	-4
$b = 2$	3
$x_1 = 1,57142$	-1,36449
$x_2 = 1,70540$	-0,24784
$x_3 = 1,72788$	-0,03936
$x_4 = 1,73140$	-0,00615

```

def regula(func, a, b, delta, epsilon, maxit):
    fa = func(a); fb = func(b)
    if fa * fb > 0: raise ValueError("Wrong interval!")

    for k in range(maxit):
        dx = fb*(b-a)/(fb-fa)
        x = b-dx; ac = x-a; fx = func(x)

        if fx == 0: break
        elif fb * fx > 0:
            b = x; fb = fx
        else:
            a = x; fa = fx

        dx = min(abs(dx), abs(ac))

        if abs(dx) < delta: break
        if abs(fx) < epsilon: break

    err = abs(b - a) / 2
    return x, err, fx

```

```
def fun(x):  
    return x**3 + x**2 -3*x-3  
  
regula(fun,1,2,10e-6, 10e-6,100)  
  
(1.7320504374844243, 0.13397478125778783, -3.5025160194379623e-06)
```

Metoda siecznych

- metodę regula falsi możemy ulepszyć rezygnując z założenia, aby funkcja miała w punktach wytyczających następną cięciwę różne znaki
- kolejne przybliżenie pierwiastka wyznaczamy z poprzednich:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

- na ogół szybsza niż regula falsi
- zdarzają się przypadki, dla których nie jest ona zbieżna (np. gdy początkowe przybliżenia nie leżą dostatecznie blisko pierwiastka)
- gdy różnica $(x_k - x_{k-1})$ jest rzędu oszacowania błędu, następne przybliżenie nie do przyjęcia

Metoda siecznych - przykład

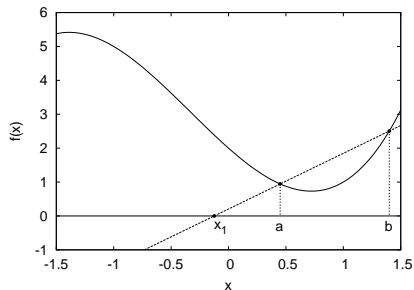
$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

x	$f(x)$
$a = 1$	-4
$b = 2$	3
$x_1 = 1,57142$	-1,36449
$x_2 = 1,70540$	-0,24784
$x_3 = 1,73513$	0,02920
$x_4 = 1,73199$	0,000576

Metoda siecznych

Uwaga!

W pierwszym kroku warunek $f(a)f(b) < 0$ ciągle jest potrzebny!



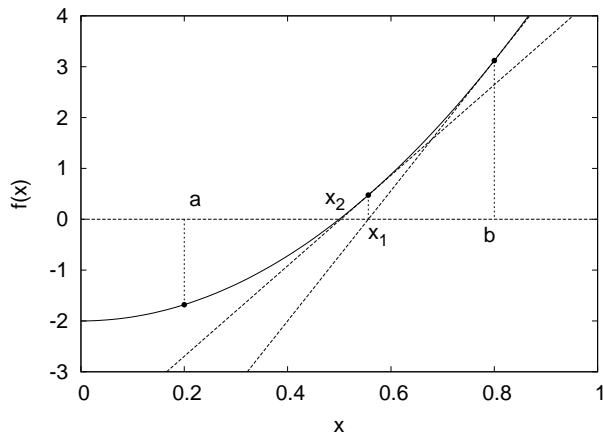
Metoda Newtona (stycznych)

- $f(x)$ jest ciągła na przedziale $\langle a, b \rangle$
- $f(a)f(b) < 0$
- $f'(x)$ i $f''(x)$ mają stały znak w rozpatrywanym przedziale
- dzięki wykorzystaniu dodatkowej informacji zawartej w pochodnych funkcji zbieżność na ogół lepsza niż omówionych już algorytmów

Metoda Newtona

- od końca przedziału, w którym funkcja $f(x)$ ma ten sam znak co jej druga pochodna, prowadzimy styczną do wykresu funkcji
- punkt x_1 przecięcia stycznej z osią X pierwszym przybliżeniem pierwiastka
- z punktu $(x_1, f(x_1))$ prowadzimy następną styczną i określamy kolejne przybliżenie
- powtarzamy aż do uzyskania żądanej dokładności

Metoda Newtona



Metoda Newtona

Z równania stycznej

$$f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = 0$$

Stąd łatwo otrzymać iteracyjny wzór Newtona na kolejne przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metoda Newtona

Niech $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $\forall x \in \langle a, b \rangle$.

Ze wzoru Newtona mamy

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

Z rozwinięcia w szereg Taylora otrzymujemy

$$f(\alpha) = f(b) + f'(b)(\alpha - b) + \frac{1}{2}f''(c)(\alpha - b)^2$$

gdzie $c \in \langle a, b \rangle$

Metoda Newtona

Jeśli α ma być pierwiastkiem równania, to

$$\alpha = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(b)} (\alpha - b)^2$$

czyli

$$\alpha - x_1 = -\frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(b)} (\alpha - b)^2 < 0$$

(bo pochodne są dodatnie)

Metoda Newtona

Stąd wynika

$$x_1 > \alpha$$

Ponieważ zachodzi również $x_1 - b < 0$, więc

$$x_1 < b$$

- x_1 leży bliżej szukanego pierwiastka, niż punkt startowy b
- kontynuując, można pokazać, że ciąg przybliżeń jest malejącym ciągiem ograniczonym z dołu poprzez $\alpha \rightarrow$ jest ciągiem zbieżnym (do pewnej liczby g)
- przechodząc obustronnie do granicy $n \rightarrow \infty$, mamy

$$g = g - \frac{f(g)}{f'(g)} \Rightarrow f(g) = 0 \Rightarrow g = \alpha$$

Metoda Newtona

Błąd n -tego przybliżenia szacujemy z twierdzenia Lagrange'a o przyrostach

$$|x_n - \alpha| \leq \left| \frac{f(x_n)}{m} \right|, \quad m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} |f'(x)|$$

Ze wzoru Taylora wynika

$$\begin{aligned} f(x_n) &\equiv f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) \\ &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1})^2 \end{aligned}$$

co po uwzględnieniu wzoru Newtona prowadzi do

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$$

Metoda Newtona

Stąd wynika

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2} M (x_n - x_{n-1})^2, \quad M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|$$

czyli również

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2} \frac{M}{m} (x_n - x_{n-1})^2 = \frac{M}{2m} \left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right]^2$$

Podobnie, jak w przypadku metody regula falsi, dla x_n dostatecznie bliskich α możemy korzystać z oszacowania

$$|\alpha - x_n| \approx \left| \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right|$$

Metoda Newtona - przykład

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$x_0 = 2$	3	$x_0 = 1$	-4
$x_1 = 1,76923$	0,36048	$x_1 = 3$	24
$x_2 = 1,73292$	0,00823	$x_2 = 2,2$	5,88800
$x_3 = 1,73205$	-0,000008	$x_3 = 1,83015$	0,98899
		$x_4 = 1,7578$	0,24782
		$x_5 = 1,73195$	-0,00095

Metoda Newtona

Twierdzenie

Jeżeli mamy przedział $\langle a, b \rangle$ taki, że:

- i. $f(a)$ i $f(b)$ mają przeciwne znaki,*
- ii. f'' jest ciągła i nie zmienia znaku na $\langle a, b \rangle$,*
- iii. styczne do krzywej $y = f(x)$ poprowadzone w punktach o odciętych a i b przecinają oś OX wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$,*

wówczas równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek α w przedziale $\langle a, b \rangle$ i metoda Newtona jest zbieżna do α dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Metoda Newtona - przykład

Metodę Newtona można zastosować np. do obliczania pierwiastka kwadratowego z liczby dodatniej c . Jest on bowiem rozwiązaniem równania

$$x^2 - c = 0$$

Na podstawie wzoru Newtona otrzymujemy (dla $x_n \neq 0$):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$$

Warunki twierdzenia są spełnione na przedziale $\langle a, b \rangle$ takim, że

$$0 < a < c^{1/2}, \quad b > \frac{1}{2} \left(a + \frac{c}{a} \right)$$

Metoda Newtona - implementacja

```
def newton(f,Df,x0,epsilon,maxit):  
    xn = x0  
    for n in range(0,maxit):  
        fxn = f(xn)  
        if abs(fxn) < epsilon:  
            print('Found solution after',n,'iterations.')  
            return xn  
        Dfxn = Df(xn)  
        if Dfxn == 0:  
            print('Zero derivative. No solution found.')  
            return None  
        xn = xn - fxn/Dfxn  
    print('Exceeded maximum iterations. No solution found.')  
    return None
```

Metoda iteracyjna Eulera

Niech x_n będzie aktualnym przybliżeniem poszukiwanego pierwiastka

$$f(x_n + h) = 0$$

gdzie h jest pewną małą liczbą. Rozwijając funkcję $f(x)$ w szereg Taylora wokół punktu x_n i pomijając wyrazy rzędu wyższego niż drugi otrzymamy

$$f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2}f''(x_n) = 0, \quad h = x - x_n$$

Jeśli $[f'(x_n)]^2 \geq 2f(x_n)f''(x_n)$, to powyższy trójmian kwadratowy ma pierwiastki rzeczywiste

$$h_n = -\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{f(x_n)f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2}} \right)$$

Metoda iteracyjna Eulera

Biorąc mniejszy z nich, znajdziemy

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2t(x_n)}}$$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad t(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Metoda iteracyjna Eulera

W przypadku $|t| \ll 1$ możemy jeszcze skorzystać z przybliżenia

$$\frac{2}{1 - \sqrt{2t(x_n)}} \simeq 1 + \frac{1}{2}t(x_n)$$

Wówczas

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \left(1 + \frac{1}{2}t(x_n) \right)$$

Rząd metod

Definicja

Mówimy, że metoda jest rzędu p , jeżeli istnieje stała K taka, że dla dwu kolejnych przybliżeń x_k i x_{k+1} zachodzi nierówność

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq K|x_k - \alpha|^p.$$

Rząd metod

Metoda	Rząd
bisekcji	1
regula falsi	1
siecznych	$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \simeq 1,62$
Brenta	$\simeq 1,8$
Newtona	2
Eulera	3

Pierwiastki wielokrotne

Definicja

Liczbę α nazywamy r -krotnym pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, jeżeli

$$0 < |g(\alpha)| < \infty, \quad g(x) = \frac{f(x)}{(x - \alpha)^r}$$

Pierwiastki wielokrotne

- metoda bisekcji, reguła fałsi i metoda siecznych mogą być stosowane do pierwiastków o krotności nieparzystej ($f(a)f(b) < 0$)
- rząd metody siecznych obniża się
- metoda Newtona może być stosowana do wszystkich krotności, jeśli tylko istnieje odpowiednie lewo- lub prawostronne sąsiedztwo szukanego pierwiastka, w którym znak $f'(x)$ i $f''(x)$ pozostaje stały
- rząd metody Newtona obniża się

Pierwiastki wielokrotne

Jeżeli krotność pierwiastka r jest znana, to metodę Newtona można zmodyfikować w sposób następujący:

$$x_{n+1} = x_n + rh_n, \quad h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Pierwiastki wielokrotne

Jeżeli krotność nie jest znana, postępujemy inaczej. Zakładamy, że $f(x)$ ma r -tą pochodną ciągłą w otoczeniu pierwiastka α o krotności r . Wówczas

$$f^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i < r$$

i ze wzoru Taylora wynika

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{r!}(x - \alpha)^r f^{(r)}(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{(r-1)!}(x - \alpha)^{r-1} f^{(r)}(\xi') \end{aligned}$$

przy czym ξ i ξ' leżą w przedziale między x i α .

Pierwiastki wielokrotne

Niech

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{u(x)}{x - \alpha} = \frac{1}{r},$$

czyli równanie $u(x) = 0$ ma pierwiastek pojedynczy α . Równanie $u(x) = 0$ można już rozwiązać wszystkimi omówionymi metodami.

Pierwiastki wielokrotne

Metoda Newtona daje w tym przypadku

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}, \quad u'(x_n) = 1 - \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} u(x_n)$$

natomiast wzór siecznych prowadzi do

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})}$$

Przyspieszanie zbieżności

Definicja

Dla ciągu $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ różnicą skończoną w przód nazywamy

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad n \geq 0.$$

Różnice wyższego rzędu określone są wzorem rekurencyjnym:

$$\Delta^k x_n = \Delta^{k-1}(\Delta x_n), \quad k \geq 2.$$

Przyspieszanie zbieżności

Twierdzenie

Niech ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ zbiega liniowo do granicy α i niech $\alpha - x_n \neq 0$ dla wszystkich $n \geq 0$. Jeśli istnieje liczba rzeczywista A taka, że $|A| < 1$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = A,$$

wówczas ciąg $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ zdefiniowany jako

$$y_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

zbiega do α szybciej niż $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, tzn.

Przyspieszanie zbieżności

Twierdzenie
(c.d.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - y_n}{\alpha - x_n} = 0.$$

Przyspieszanie zbieżności

- technika ta nazywana jest procesem Δ^2 Aitkena
- w połączeniu z metodą Newtona otrzymujemy algorytm Steffensena
- stosuje się go do poprawienia zbieżności metody Newtona w przypadku pierwiastków wielokrotnych

Równania algebraiczne

$$w(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

- dokładnie n pierwiastków
- pierwiastki mogą być rzeczywiste lub zespolone
- jeśli współczynniki a_0, a_1, \dots, a_n są rzeczywiste, to ewentualne pierwiastki zespolone występują w parach sprzężonych
- pierwiastków rzeczywistych wielomianów z rzeczywistymi współczynnikami możemy szukać opisanymi wcześniej metodami
- jeśli zależy nam na znalezieniu pierwiastków zespolonych, lepiej używać metod dedykowanych wielomianom

Metoda Laguerre'a

- bardzo popularna
- pozwala wyliczyć pierwiastki rzeczywiste i zespolone, pojedyncze i wielokrotne
- wymaga arytmetyki zespolonej

Metoda Laguerre'a

Aby znaleźć pierwiastek wielomianu $w_n(z)$ stopnia n , przybliżamy go wielomianem

$$r(z) = a(z - p_1)(z - p_2)^{n-1}$$

Parametry a , p_1 i p_2 dobieramy tak, aby

$$w_n(z_k) = r(z_k), \quad w'_n(z_k) = r'(z_k), \quad w''_n(z_k) = r''(z_k)$$

Jeśli z_k jest pewnym przybliżeniem pojedynczego pierwiastka α , wówczas parametr p_1 będzie jego następnym oszacowaniem.

Metoda Laguerre'a

Zauważmy, że dla

$$w(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$

zachodzi

$$S_1 \equiv \frac{w'(z)}{w(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \alpha_i}$$

Różniczkując obustronnie otrzymamy

$$-\frac{dS_1(z)}{dz} \equiv S_2(z) = \left(\frac{w'(z)}{w(z)} \right)^2 - \frac{w''(z)}{w(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(z - \alpha_i)^2}$$

Metoda Laguerre'a

Stąd

$$S_1(z_k) = \frac{1}{z_k - p_1} + \frac{(n-1)}{z_k - p_2}$$
$$S_2(z_k) = \frac{1}{(z_k - p_1)^2} + \frac{(n-1)}{(z_k - p_2)^2}$$

czyli ($p_1 = z_{k+1}$)

$$z_{k+1} = z_k - \frac{n w(z_k)}{w'(z_k) \pm \sqrt{H(z_k)}}$$

$$H(z_k) = (n-1)^2 [w'(z_k)]^2 - n(n-1)w(z_k)w''(z_k)$$

Metoda Laguerre'a

- znak we wzorze iteracyjnym wybieramy tak, aby poprawka $|z_{k+1} - z_k|$ była jak najmniejsza
- dla wielomianów, które mają tylko pierwiastki rzeczywiste, metoda Laguerre'a jest globalnie zbieżna
- w przypadku wielomianów z pierwiastkami zespolonymi zbieżności dla dowolnego punktu startowego nie można zagwarantować, ale w praktyce w większości przypadków metoda działa dobrze
- w szczególności dla punktu startowego $z_0 = 0$ metoda pozwoli zazwyczaj znaleźć pierwiastek o najmniejszym module
- rząd metody Laguerre'a wynosi 3 dla pierwiastków pojedynczych i 1 dla wielokrotnych

Macierz towarzysząca (ang. *companion matrix*)

- wartości własne macierzy \mathbf{A} to pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$w(x) = \det[\mathbf{A} - x\mathbf{I}]$$

- są lepsze sposoby na numeryczne wyznaczenie wartości własnych
- problem można jednak odwrócić i poszukać takiej macierzy, której wartości własne byłyby pierwiastkami interesującego nas wielomianu

Macierz towarzysząca

Wystarczy, że weźmiemy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & \dots & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierz towarzysząca

Łatwo sprawdzić, że wielomian charakterystyczny macierzy **A** ma postać

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \dots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

a więc rzeczywiście jest równoważny interesującemu nas wielomianowi.

Liczba pierwiastków rzeczywistych

Aby oszacować liczbę pierwiastków rzeczywistych wielomianu $w(x)$ stopnia n , tworzymy ciąg

$$w(x), w'(x), w''(x), \dots, w^{(n)}(x)$$

Oznaczmy przez $M(x_0)$ liczbę zmian znaku w ciągu w punkcie x_0 .

Twierdzenie

(Fouriera) Jeżeli $w(x)$ jest wielomianem stopnia n określonym w przedziale (a, b) oraz $w(a)w(b) \neq 0$, to liczba zer wielomianu w tym przedziale wynosi

$$M(a) - M(b),$$

lub jest od tej liczby mniejsza o liczbę parzystą.

Liczba pierwiastków rzeczywistych - przykład

Niech

$$w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 5$$

Tworzymy ciąg pochodnych:

$$w'(x) = 3x^2 - 4x - 5$$

$$w''(x) = 6x - 4$$

$$w'''(x) = 6$$

Liczba pierwiastków rzeczywistych - przykład

x	$-\infty$	∞	0	1	3
w	—	+	+	—	+
w'	+	+	—	—	+
w''	—	+	—	+	+
w'''	+	+	+	+	+
$M(x)$	3	0	2	1	0

Liczba pierwiastków rzeczywistych - przykład

Ponieważ

$$M(-\infty) - M(\infty) = 3$$

z twierdzenia Fouriera wynika, że równanie $w(x) = 0$ ma jeden lub trzy pierwiastki rzeczywiste. Ponadto

$$M(-\infty) - M(0) = 1$$

$$M(0) - M(1) = 1$$

$$M(1) - M(3) = 1$$

czyli wielomian ma trzy pierwiastki, po jednym w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 3)$.

Układy równań nieliniowych

Poszukujemy rozwiązania $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ równania

$$F(\vec{X}) = \mathbf{0}$$

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- gdy odwzorowanie F jest afiniczne, np. $F(\vec{X}) = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{b}$, uzyskujemy układ równań liniowych
- jeżeli F jest odwzorowaniem nieliniowym, rozwiązanie układu $F(\vec{X}) = \mathbf{0}$ komplikuje się
- brak ogólnego kryterium istnienia rozwiązania
- będziemy a priori zakładać, że rozwiązanie takie istnieje

Ogólne metody iteracyjne

Konstruujemy ciąg punktów

$$\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots$$

zbieżny do rozwiązania $\vec{\alpha}$ układu $F(\vec{x}) = 0$. Jeżeli można wskazać odwzorowanie G takie, że

$$\vec{x}^{(i)} = G(\vec{x}^{(i-1)}, \dots, \vec{x}^{(i-p)})$$

to metodę iteracyjną nazywamy metodą stacjonarną p -punktową. Jeżeli natomiast G ulega modyfikacjom podczas iteracji, to mówimy o metodzie niestacjonarnej (zmiennego operatora).

Ogólne metody iteracyjne

Definicja

Niech $G : D \subset \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Punkt $\vec{\alpha}$ nazywamy punktem przyciągania metody iteracyjnej, jeżeli istnieje takie otoczenie $U_{\vec{\alpha}}$ tego punktu, że obierając punkty $\vec{x}^{(-p+1)}, \dots, \vec{x}^{(0)}$ z tego otoczenia uzyskamy ciąg punktów $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots \in D$, zbieżny do $\vec{\alpha}$.

Ogólne metody iteracyjne

Definicja

Odwzorowanie $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy różniczkowalnym w sensie Frécheta w punkcie \vec{x} , jeżeli istnieje taka macierz $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, że

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{\|G(\vec{x} + \vec{h}) - G(\vec{x}) - A\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} = 0$$

przy dowolnym sposobie wyboru wektorów $\vec{h} \rightarrow 0$. Macierz A nazywamy pochodną Frécheta odwzorowania G w punkcie \vec{x} i oznaczamy ją przez $G'(\vec{x})$.

Ogólne metody iteracyjne

Twierdzenie

Jeżeli pochodna Frécheta odwzorowania $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ w punkcie $\vec{\alpha}$ ma promień spektralny $\varphi(G'(\vec{\alpha})) = \beta < 1$ oraz $G(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha}$, to $\vec{\alpha}$ jest punktem przyciągania metody iteracyjnej $\vec{x}^{(i+1)} = G(\vec{x}^{(i)})$.

- pozwala uzasadnić lokalną zbieżność wielu metod iteracyjnych

Metoda Newtona

Twierdzenie

Niech funkcja $F(\vec{x})$ będzie różniczkowalna w sensie Frécheta w pewnym otoczeniu $K(\vec{\alpha}, r)$ punktu $\vec{\alpha}$, w którym $F(\vec{\alpha}) = 0$. Załóżmy, że $F'(\vec{x})$ jest ciągła w punkcie $\vec{\alpha}$, a $F'(\vec{\alpha})$ jest nieosobliwa. Wówczas $\vec{\alpha}$ jest punktem przyciągania metody Newtona

$$\vec{x}^{(i+1)} = \vec{x}^{(i)} - [F'(\vec{x}^{(i)})]^{-1}F(\vec{x}^{(i)})$$

Metoda Newtona

Twierdzenie

(c.d.) Ponadto, jeżeli ciągłość pochodnej w punkcie $\vec{\alpha}$ jest typu Höldera

$$\|F'(\vec{x}) - F'(\vec{\alpha})\| \leq H\|\vec{x} - \vec{\alpha}\|^p, \quad \vec{x} \in K(\vec{\alpha}, r), \quad p \in (0, 1)$$

to

$$\|\vec{x}^{(i+1)} - \vec{\alpha}\| \leq C\|\vec{x}^{(i)} - \vec{\alpha}\|^{1+p},$$

gdzie $C = 4H\|[F'(\vec{\alpha})]^{-1}\|$.

Metoda siecznych

Przybliżamy F odwzorowaniem afinicznym w taki sposób, aby

$$F(\vec{y}^{(j)}) \simeq \mathbf{A}\vec{y}^{(j)} + \vec{b}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

a następnie przyjmujemy rozwiązanie liniowego układu równań

$$\mathbf{A}\vec{x} + \vec{b} = \mathbf{0}$$

jako przybliżenie poszukiwanego pierwiastka.

Metoda siecznych

Rozwiązaniem tego układu będzie

$$\vec{x} = -\mathbf{A}^{-1}\vec{b} = -\mathbf{A}^{-1}(F(\vec{y}) - \mathbf{A}\vec{y}) = \vec{y} - \mathbf{A}^{-1}F(\vec{y})$$

Niech $\Delta\mathbf{Y}$ będzie macierzą o kolumnach $\vec{y}^{(1)} - \vec{y}^{(0)}$, $\vec{y}^{(2)} - \vec{y}^{(1)}$, ..., $\vec{y}^{(n)} - \vec{y}^{(n-1)}$, a $\Delta\mathbf{F}$ macierzą o kolumnach $F(\vec{y}^{(1)}) - F(\vec{y}^{(0)})$, $F(\vec{y}^{(2)}) - F(\vec{y}^{(1)})$, ..., $F(\vec{y}^{(n)}) - F(\vec{y}^{(n-1)})$. Wówczas

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{Y}$$

Metoda siecznych

1. wybieramy punkty $\vec{x}^{(-n)}, \vec{x}^{(-n+1)}, \dots, \vec{x}^{(0)}$ i przyjmujemy $i = 0$
2. obliczamy $\Delta \mathbf{F}^{(i)}$ oraz $\Delta \mathbf{Y}^{(i)}$ przyjmując

$$\vec{y}^{(0)} = \vec{x}^{(i-n)}, \quad \vec{y}^{(1)} = \vec{x}^{(i-n+1)}, \quad \dots, \quad \vec{y}^{(n)} = \vec{x}^{(i)}$$

3. wyznaczamy $\vec{x}^{(i+1)}$ ze wzoru

$$\vec{x}^{(i+1)} = \vec{x}^{(i)} - \Delta \mathbf{Y}^{(i)} [\Delta \mathbf{F}^{(i)}]^{-1} \mathbf{F}(\vec{x}^{(i)})$$

4. zwiększamy i o jeden i wracamy do kroku 2

Metoda siecznych

- metodę można stosować, o ile tylko macierz $\Delta \mathbf{F}^{(i)}$ nie jest osobliwa
- w przeciwnym razie musimy inaczej wybierać punkty $\vec{y}^{(j)}$, np.

$$\begin{aligned}\vec{y}^{(n)} &= \vec{x}^{(i)} \\ \vec{y}^{(n-j)} &= \vec{x}^{(i)} + h\vec{e}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

gdzie h jest pewną stałą, a $\vec{e}^{(j)}$ to wektory przestrzeni \mathbb{R}^n

- w niektórych przypadkach niemożliwe takie dobranie punktów $\vec{y}^{(j)}$, aby macierz była nieosobliwa