Metody numeryczne

Wykład 6 - Interpolacja, część II

Janusz Szwabiński

Plan wykładu

1. Interpolacja trygonometryczna

2. Interpolacja funkcjami sklejanymi
   2.1 Interpolacja przedziałami liniowa
   2.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Funkcje okresowe

Definicja

Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy okresową z okresem $h > 0$, jeśli

$$f(x+h) = f(x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$

- $\Rightarrow$ funkcja f jest określona jednoznacznie przez jej wartości dla $x \in < 0, h)$
- $\Rightarrow$ funkcja $\tilde{f} := f\left(\frac{hx}{2\pi}\right)$ ma okres 2π

Wielomiany trygonometryczne

Definicja

(Rzeczywistymi) Wielomianami trygonometrycznymi stopnia co najwyżej n nazywamy elementy zbioru

$$T_n^{\mathbb{R}} := \{T(x): \quad T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}\}$$

$T_n^{\mathbb{R}}$ jest $(2n+1)$ wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$

Wielomiany trygonometryczne

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x = -\frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{cases}$$

Stąd wynika

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} c_k e^{ikx} = e^{-inx} P(x) \end{aligned}$$

$$c_{n-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad c_{n+k} = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad c_n = \frac{a_0}{2}$$

Wielomiany trygonometryczne

Definicja

Elementy zbioru

$$P^{\mathbb{C}}_{n-1} := \{P(x) : \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}\}$$

nazywamy (zespolonymi) wielomianami trygonometrycznymi stopnia co najwyżej $(n-1)$.

Interpolacja trygonometryczna

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb zespolonych $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, oraz parami różnych $x_k \in [0, 2\pi)$ istnieje dokładnie jeden wielomian trygonometryczny

$$P(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + \ldots + c_{n-1} e^{(n-1)ix}$$

taki, że

$$P(x_k) = y_k$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Interpolacja trygonometryczna

Dowód.

Niech

$$\begin{aligned}\omega &= e^{ix}\\ \omega_k &= e^{ix_k} \quad (\Rightarrow \ \omega_j \neq \omega_k \text{ dla } j \neq k,\ 0 \leqslant j, k \leqslant n-1)\\ P(\omega) &= c_0 + c_1\omega + \ldots c_{n-1}\omega^{n-1}\end{aligned}$$

Zagadnienie interpolacji tryg. jest więc równoważne znalezieniu wielomianu stopnia $\leqslant (n-1)$ takiego, że

$$P(\omega_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Z twierdzenia o jednoznaczności interpolacji wielomianowej wynika, że istnieje jeden taki wielomian. □

Interpolacja trygonometryczna - węzły równoodległe

Niech

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad x_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Twierdzenie

Dla danych punktów węzłowych (x_k, y_k), $k = 0, \ldots, n-1$, *współczynniki wielomianu trygonometrycznego*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi)$$

mają postać

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \zeta_n^{-kl}, \quad l = 0, \ldots, n-1$$

Interpolacja trygonometryczna - węzły równoodległe

Dowód.
Wystarczy pokazać, że powyższy wielomian rzeczywiście interpoluje dane. Mamy:

$$
\begin{aligned}
P(x_m) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \zeta_n^{-kl} e^{ikx_m} = \sum_{l=0}^{n-1} y_l \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{k(m-l)} \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} y_l \delta_{ml} = y_m
\end{aligned}
$$

dla $m = 0, \ldots, n-1$ $\square$

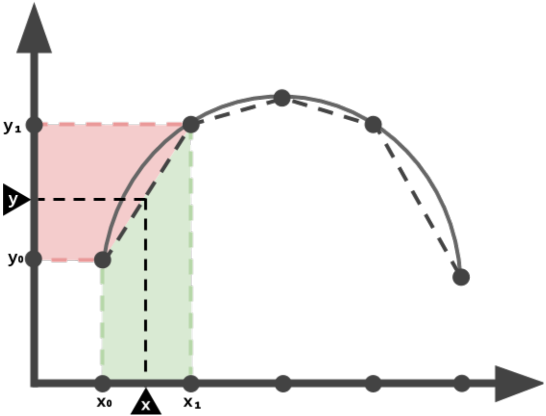
Interpolacja trygonometryczna - węzły równoodległe

Wnioski:

$\Rightarrow$ $O(n)$ operacji potrzebnych do wyliczenia c_k

$\Rightarrow$ $O(n^2)$ operacji potrzebnych do wyznaczenia wielomianu trygonometrycznego

Interpolacja przedziałami liniowa



Interpolacja przedziałami liniowa

$(x_i, y_i = f(x_i)),\ \ i = 0, 1, \ldots, n$ - punkty węzłowe

W przedziale $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$ przybliżamy $f(x)$ funkcją liniową:

$$f(x) = y_j + \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j}(y_{j+1} - y_j) + \Delta f(x)$$

gdzie

$$\Delta f(x) = \frac{\gamma}{2}(x - x_j)(x - x_{j+1})$$

Interpolacja przedziałami liniowa

Jeśli np. $f(x)$ jest funkcją gładką w $[x_j, x_{j+1}]$, to

$$\gamma = f''(a), \quad a \in [x_j, x_{j+1}]$$

Zachodzi

$$|\Delta f(x)| \leqslant \frac{\gamma_1}{8}(x_{j+1} - x_j)^2$$

gdzie

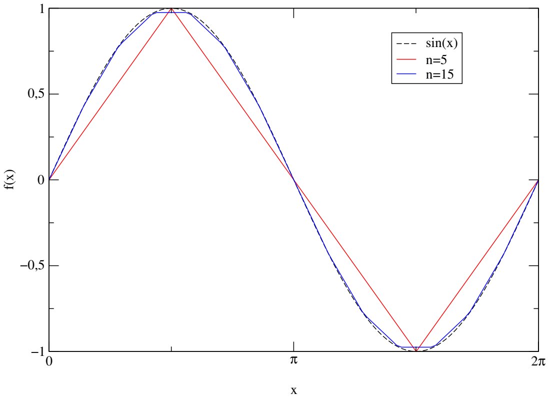
$$\gamma_1 = \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |f''(x)|$$

$\Rightarrow$ dokładność można zwiększyć, zmniejszając długość przedziału $h = x_{j+1} - x_j$ (zwiększając liczbę węzłów)

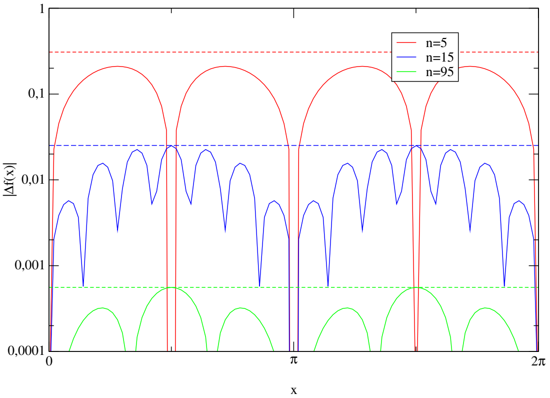
Interpolacja przedziałami liniowa

```
def linint(XX, fxx, X):
    N = len(XX)
    JL = 0; JU = N
    while JU - JL > 1:
        JM = (JU + JL) // 2
        if (XX[-1] > XX[1]) == (X > XX[JM]):
            JL = JM
        else:
            JU = JM
    J = JL
    dx = XX[J + 1] - XX[J]
    df = fxx[J + 1] - fxx[J]
    fx = df / dx * (X - XX[J]) + fxx[J]
    return fx
```

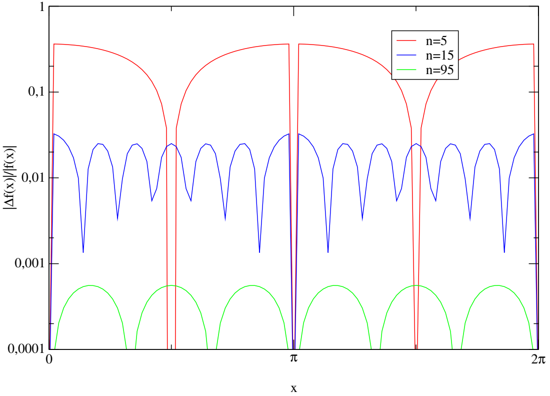
Interpolacja przedziałami liniowa



Interpolacja przedziałami liniowa



Interpolacja przedziałami liniowa



Funkcje sklejane

$x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$ - punkty węzłowe w przedziale $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Δ_n - podział przedziału $[a, b]$

Definicja

Funkcję $S(x) = S(x, \Delta_n)$ określoną na przedziale $[a, b]$ nazywamy funkcją sklejaną stopnia m ($m \geqslant 1$), jeżeli

a. $S(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale (x_j, x_{j+1}), $j = 0, 1, \ldots, n-1$

b. $S(x) \in C^{m-1}([a, b])$

Funkcje sklejane

$S_m(\Delta_n)$ - zbiór wszystkich funkcji sklejanych stopnia m

$S(x) \in S_m(\Delta_n)$

$\Rightarrow S(x) = c_{i0} + c_{i1}x + \ldots + c_{im}x^m, \quad x \in (x_i, x_{i+1})$

$\Rightarrow n(m+1)$ dowolnych stałych c_{ij}

Żądanie ciągłości pochodnych rzędu $0, \ldots, m-1$ w każdym węźle wewnętrznym x_i, $i = 1, \ldots, n-1$

$\Rightarrow (n-1)m$ warunków na stałe c_{ij}

$\Rightarrow S(x)$ zależy od $n(m+1) - m(n-1) = n + m$ parametrów

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Niech $f(x) \in C([a,b])$

Definicja

Funkcję $S(x) \in S_3(\Delta_n)$ nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji $f(x)$, jeżeli

$$S(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad n \geqslant 2$$

$S(x)$ stopnia trzeciego zależy od $(n+3)$ parametrów

$\Rightarrow$ potrzebujemy dodatkowych warunków na $S(x)$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Najczęściej zakłada się

$$S'(a+0) = \alpha_1, \quad S'(b-0) = \beta_1$$

lub

$$S''(a+0) = \alpha_2, \quad S''(b-0) = \beta_2$$

gdzie α_1, β_1, α_2 i β_2 - ustalone liczby rzeczywiste

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją okresową o okresie $(b-a)$, wówczas:

$$S^{(i)}(a+0) = S^{(i)}(b-0), \quad i = 1, 2$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Pytania:

- czy zagadnienie interpolacji za pomocą funkcji sklejanych stopnia trzeciego z jednym z dodatkowych warunków jest rozwiązywalne?
- czy rozwiązanie jest jednoznaczne?
- jaki jest błąd interpolacji na przedziale $[a, b]$?

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Niech

$$
\begin{aligned}
&M_j = S''(x_j), j = 0, 1, \ldots, n \\
&h_j = x_j - x_{j-1}
\end{aligned}
$$

$S''(x)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ i liniową na każdym podprzedziale $[x_{j-1}, x_j]$

$$\Rightarrow \quad S''(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j]$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Całkując stronami otrzymujemy ($x \in [x_{j-1}, x_j]$):

$$\begin{aligned} S'(x) &= -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + A_j \\ S(x) &= M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + A_j(x - x_{j-1}) + B_j \end{aligned}$$

gdzie A_j i B_j - pewne stałe. Z warunku interpolacji wynika:

$$\begin{aligned} B_j &= y_{j-1} - M_j\frac{h_j^2}{6} \\ A_j &= \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1}) \end{aligned}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

$S'(x)$ ma być funkcją ciągłą na $[a, b]$:

$$S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), \quad j = 1, \ldots, n-1$$

Otrzymujemy układ $(n-1)$ równań $(j = 1, \ldots, n-1)$

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad j = 1, \ldots, n-1$$

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = 1 - \lambda_j \\
d_j &= \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right) = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]
\end{aligned}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Dodatkowy warunek dla pierwszych pochodnych

$$
\Rightarrow \qquad \begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n &= d_n \end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1\right) \\
d_n &= \frac{6}{h_n}\left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)
\end{aligned}
$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Stąd

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Twierdzenie

Macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jest nieosobliwa dla każdego podziału Δ_n *przedziału* $[a, b]$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Dowód.

Pokażemy najpierw, że dla każdej pary wektorów $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$Ax = y \quad \Rightarrow \quad \max_i |x_i| \leqslant \max_i |y_i|$$

Niech $|x_r| = \max_i |x_i|$. Ponieważ $Ax = y$, więc

$$\mu_r x_{r-1} + 2x_r + \lambda_r x_{r+1} = y_r$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Dowód.

Z definicji r oraz z tego, że $\mu_r + \lambda_r \leqslant 1$ wynika

$$
\begin{aligned}
\max_i |y_i| &\geqslant |y_r| \geqslant 2|x_r| - \mu_r|x_{r-1}| - \lambda_r|x_{r+1}| \\
&\geqslant 2|x_r| - \mu_r|x_r| - \lambda_r|x_r| \\
&= (2 - \mu_r - \lambda_r)|x_r| \geqslant |x_r| = \max_i |x_i|
\end{aligned}
$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Dowód.

Jeśli macierz byłaby osobliwa, to istniałoby rozwiązanie $x \neq 0$ układu $Ax = 0$. Ale wówczas musiałoby być

$$0 < \max_i |x_i| \leqslant 0$$

co prowadzi do sprzeczności. $\square$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Definicja

Średnicą $||\Delta_m||$ podziału Δ_m nazywamy liczbę

$$||\Delta_m|| = \max_i (x_{i+1} - x_i)$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Twierdzenie

Niech $f \in C^4([a,b])$, $|f^{(4)}(x)| \leqslant L$ *dla* $x \in [a,b]$. *Niech* $\Delta_m = \{a = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < \ldots < x_{n_m}^{(m)} = b\}$ *będzie ciągiem podziałów przedziału* $[a,b]$ *takim, że*

$$\sup_{m,j} \frac{||\Delta_m||}{x_{j+1}^{(m)} - x_j^{(m)}} \leqslant K < +\infty$$

Istnieją wtedy stałe C_i ($\leqslant 2$) *niezależne od* Δ_m *takie, że dla* $x \in [a,b]$ *zachodzi*

$$|f^{(i)}(x) - S^{(i)}(x, \Delta_m)| \leqslant C_i L K ||\Delta_m||^{4-i}$$

dla $i = 0, 1, 2, 3$.

Funkcje sklejane Lagrange'a trzeciego stopnia

$\lambda_0(x)$	-	wielomian interpolujący dla funkcji $f(x)$ z węzłami x_0, x_1, x_2, x_3
$\lambda_n(x)$	-	z węzłami $x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$

Definicja

Funkcję $S_L(x) \in S_3(\Delta_n)$ spełniającą dodatkowe warunki

$$
\begin{aligned}
S_L'(a+0) &= \alpha_1 = \lambda_0'(a), \\
S_L'(b-0) &= \beta_1 = \lambda_n'(b)
\end{aligned}
$$

nazywamy funkcją sklejaną Lagrange'a stopnia trzeciego

Interpolacja przy węzłach równoodległych

Niech

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dodatkowo

$$\begin{array}{ccc} x_{-3} = x_0 - 3h & x_{-2} = x_0 - 2h & x_{-1} = x_0 - h \\ x_{n+1} = x_n + h & x_{n+2} = x_n + 2h & x_{n+3} = x_n + 3h \end{array}$$

Interpolacja przy węzłach równoodległych

Definicja

$$\phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} (x-x_{i-2})^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x-x_{i-1}) & \\ +3h(x-x_{i-1})^2 - 3(x-x_{i-1})^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1}-x) & \\ +3h(x_{i+1}-x)^2 - 3(x_{i+1}-x)^3 & \text{dla} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2}-x)^3 & \text{dla} \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Interpolacja przy węzłach równoodległych

Twierdzenie

Funkcje $\overline{\phi}_i(x)$, $i = -1, \ldots, n+1$ *określone na przedziale* $[a, b]$ *w następujący sposób:*

$$\overline{\phi}_i(x) = \phi_i^3(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

stanowią bazę funkcji sklejanych trzeciego stopnia $S_3(\Delta_n)$.

$\Rightarrow$ każdą funkcję $S(x) \in S_3(\Delta_n)$ można przedstawić w postaci

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \phi_i^3(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Interpolacja przy węzłach równoodległych

Z warunku interpolacji otrzymujemy

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Założenie dodatkowe

$$S'(a+0) = \alpha_1, \quad S'(b-0) = \beta_1$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} -c_{-1} + c_1 &= \frac{h}{3}\alpha_1 \\ -c_{n-1} + c_{n+1} &= \frac{h}{3}\beta_1 \end{aligned}$$

Interpolacja przy węzłach równoodległych

Stąd

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + \frac{h}{3}\alpha_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta_1 \end{pmatrix}$$