

$$\frac{dy}{dx}$$

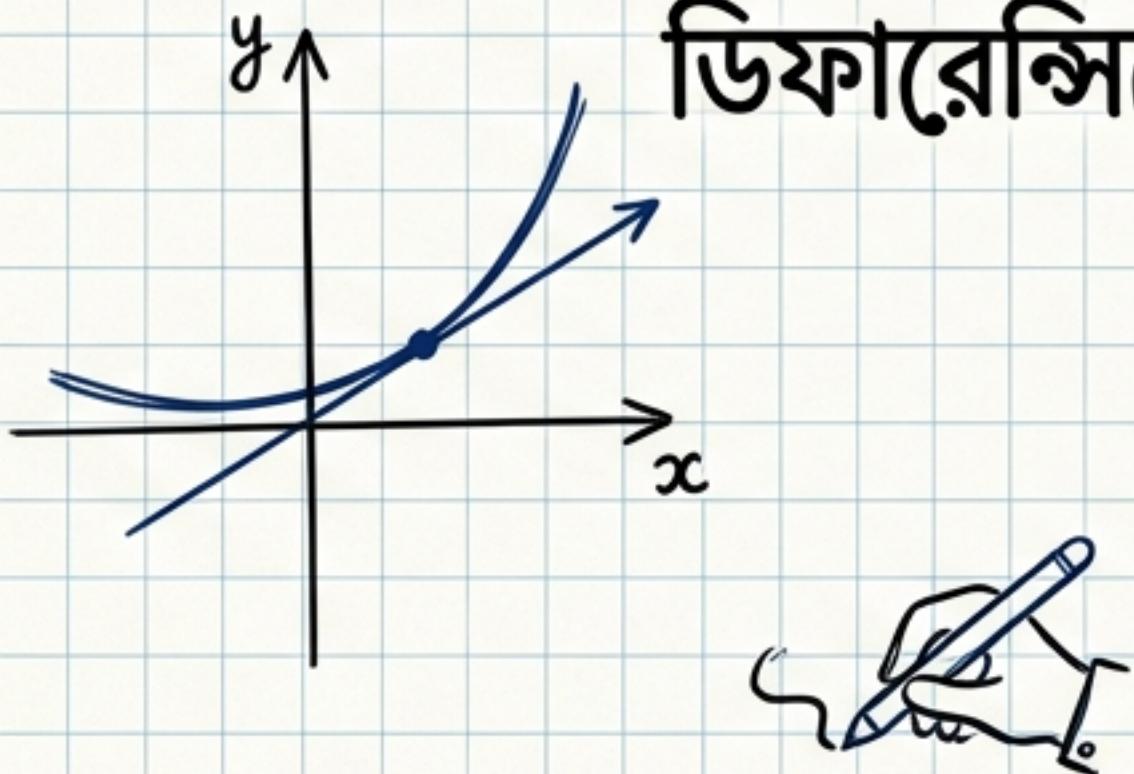
$$\int$$

$$\lim_{x \rightarrow 0}$$

$$f'(x)$$

# ক্যালকুলাস নোটস: হায়ার ম্যাথমেটিক্স

ডিফারেন্শিয়েশন এবং এর ব্যবহারিক প্রয়োগ



লিভিং সার্টিফিকেট  
মাস্টার গাইড

## লিমিট (Limits) – ক্যালকুলাসের শুরু

- ক্যালকুলাস মানে হলো কোনো মানের ‘কাছাকাছি’ যাওয়া।
- যদি মান বসালে  $\frac{0}{0}^*$  বা অনিশ্চয় আকার আসে, তবে অন্য পদ্ধতি ব্যবহার করতে হবে।

Key Rule: ফ্যাক্টরাইজেশন (উৎপাদকে বিশ্লেষণ) হলো মূল চাবিকঠি।

Example:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{x^2-49}$$

Step 1 : মান বসালে  $\rightarrow \frac{0}{0}^*$

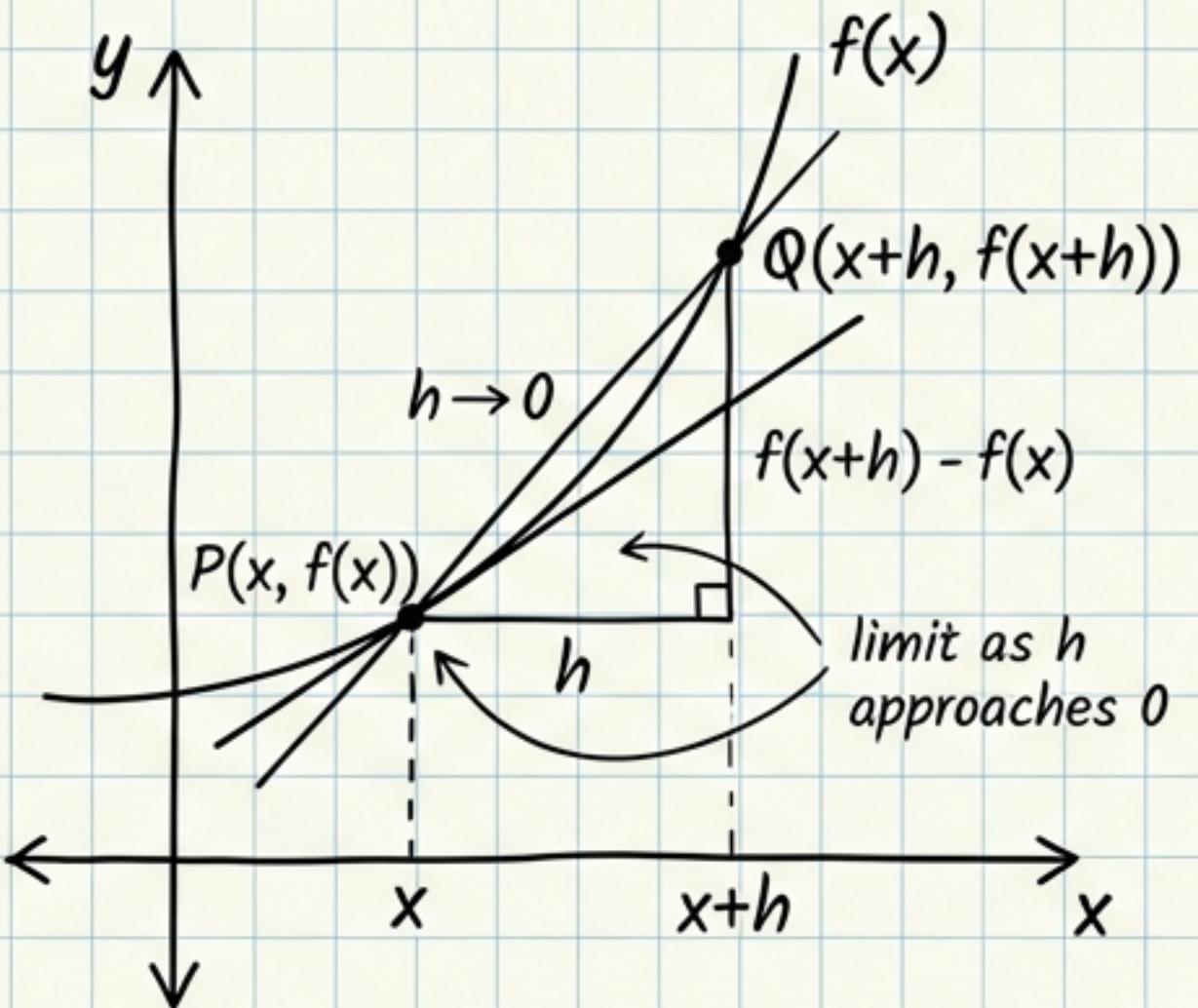
$$\text{Step 2 : } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-7)(x+7)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x+7}$$

Answer:  $\frac{1}{14}$

# মূল নিয়মে অন্তরীকরণ (Differentiation from First Principles)

ঢাল (Slope) বা পরিবর্তনের হার বের করার মূল সূত্র।



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Example:

যদি  $f(x) = 2x^2 + 5x$  হয়:

$$f(x+h) = 2(x+h)^2 + 5(x+h)$$

বিয়োগফল ও লিমিট নেয়ার পর  $\rightarrow 4x + 5$

## বেসিক রুলস: পাওয়ার রুল (Basic Rules: Power Rule)

$$y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

পাওয়ার সামনে আনুন, পাওয়ার এক কমিয়ে দিন।

বিঃদ্র: ধ্রুবক বা কনস্ট্যান্টের ডিফারেন্শিয়েশন সব সময় 0।

Examples:

1.  $x^3 \rightarrow 3x^2$

2.  $5x^2 \rightarrow 10x$

3. ~~x~~  $\rightarrow 0$

4.  $u+v$  রুল: আলাদা আলাদা অংশকে ডিফারেন্শিয়েট করে যোগ  
করতে হবে।

# ডিফারেন্সিয়েশন কুলস (The Big Three)

## প্রোডাক্ট কুল (Product Rule)

যখন দুটি ফাংশন গুণ আকারে থাকে ( $u \cdot v$ ):

$$u \left( \frac{dv}{dx} \right) + v \left( \frac{du}{dx} \right)$$

(প্রথমটি  $\times$  দ্বিতীয়টির ডিফারেন্সিয়েশন) +  
(দ্বিতীয়টি  $\times$  প্রথমটির ডিফারেন্সিয়েশন)

## কোশেন্ট কুল (Quotient Rule)

যখন ভাগ আকারে থাকে ( $u/v$ ):

$$\frac{v \left( \frac{du}{dx} \right) - u \left( \frac{dv}{dx} \right)}{v^2}$$

**নিচেরটি আগে! (Bottom one first!)**

## চেইন কুল (Chain Rule)

$$y = [f(x)]^n \Rightarrow n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

ব্র্যাকেটের বাইরের কাজ আগে, তারপর ভেতরের কাজ।

# ত্রিকোণমিতিক, এক্সপোনেনশিয়াল ও লগারিদমিক ফাংশন

Trigonometry	Exponential ( $e^x$ )	Logarithmic ( $\ln x$ )
$\sin x \rightarrow \cos x$ $\cos x \rightarrow -\sin x$ <i>চিহ্ন খেয়াল রাখুন!</i> $\tan x \rightarrow \sec^2 x$	$e^{f(x)} \rightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)}$ (যা আছে তাই থাকে $\times$ পাওয়ারের ডিফারেন্সিয়েশন)	$\ln f(x) \rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}$ (ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশন / মূল ফাংশন)

# বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন (Inverse Trigonometry)

লগ টেবিল  
(Log Tables)  
পৃষ্ঠা ২৫ দেখুন।

## Inverse Sine

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

## Inverse Tangent

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \rightarrow \frac{a}{a^2 + x^2}$$

### Worked Example:

If  $y = \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ :  $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3^2 + x^2} = \frac{3}{9 + x^2}$

চেইন রুল ব্যবহার করতে ভুলবেন না যদি  $x$  এর জায়গায় কোনো ফাংশন থাকে!

# অব্যক্ত ফাংশন (Implicit Differentiation)

যখন  $x$  এবং  $y$  মিশানো থাকে।

Technique: Sideways Kick

$y$  এর যেকোনো টার্ম ডিফারেন্সিয়েট করলে পাশে  $\frac{dy}{dx}$  গুণ করতে হবে।

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

Problem: বৃত্তের সমীকরণ:  $x^2 + y^2 = 25$

Step 1:  $2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

Step 2:  $2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = -2x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

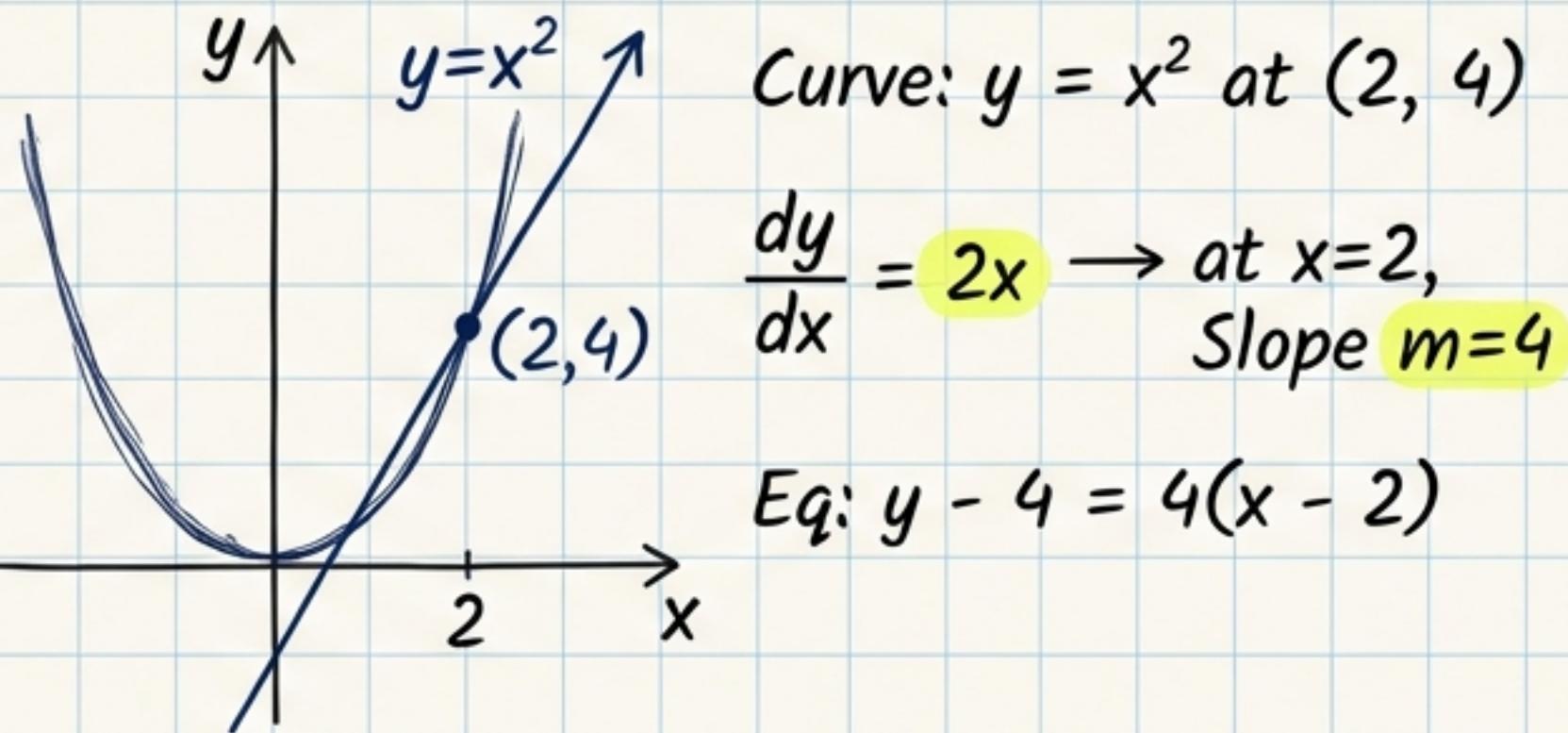
# স্পর্শকের ঢাল ও সমীকরণ (Slope and Equation of Tangents)

$$\frac{dy}{dx} = m \left( \frac{\text{Slope}}{\text{ঢাল}} \right)$$

## 3 Steps to Success:

1. ডিফারেন্সিয়েট করুন ( $\frac{dy}{dx}$  বের করুন)।
2.  $x$ -এর মান বসিয়ে ঢাল ( $m$ ) বের করুন।
3. সরলরেখার সমীকরণ ব্যবহার করুন:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



# কার্ভ স্কেচিং: সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান (Curve Sketching)

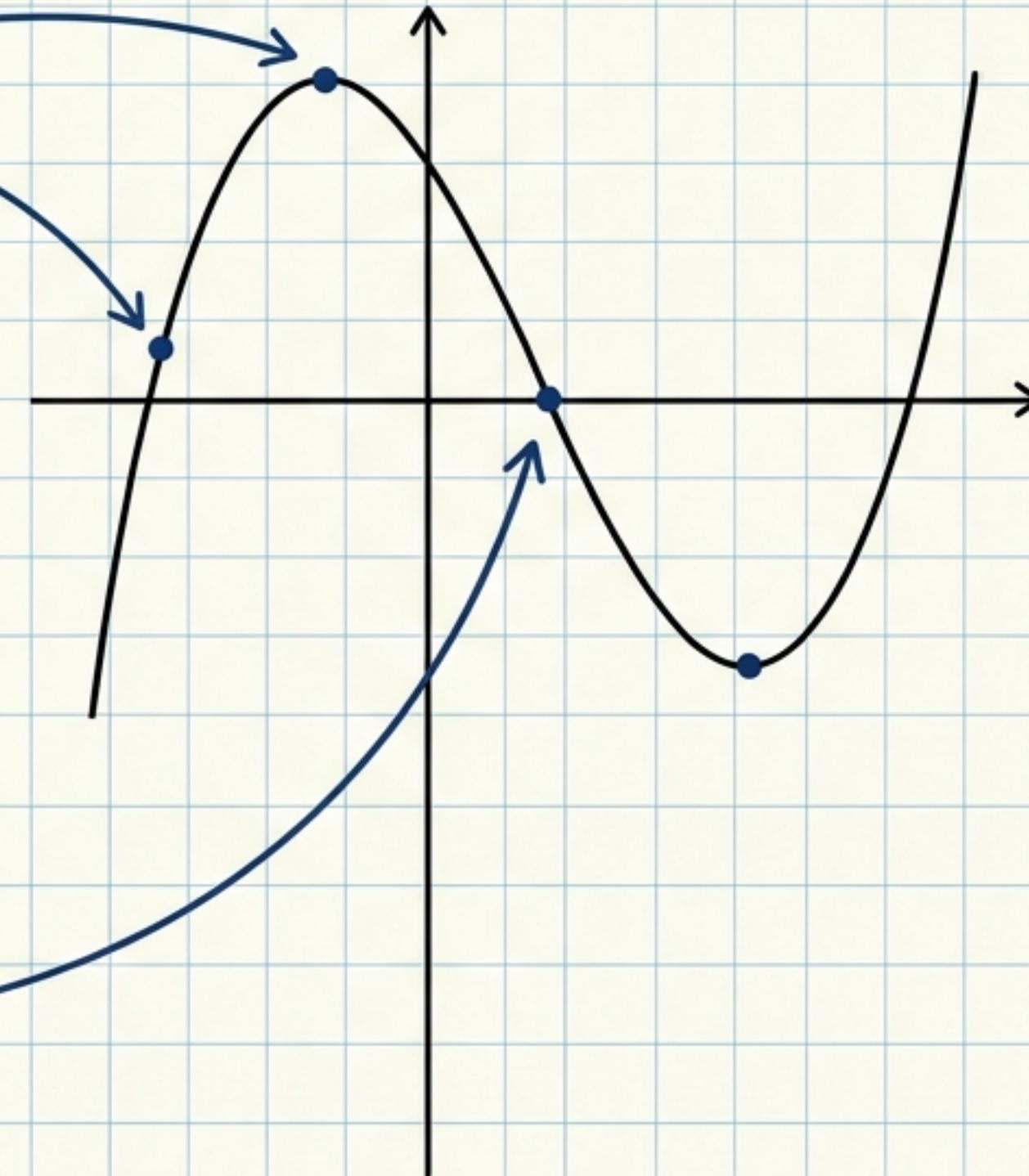
→ Turning Point (সম্পিল্যু):  $\frac{dy}{dx} = 0$

→ Nature of Point (Max/Min?): Check  $\frac{d^2y}{dx^2}$

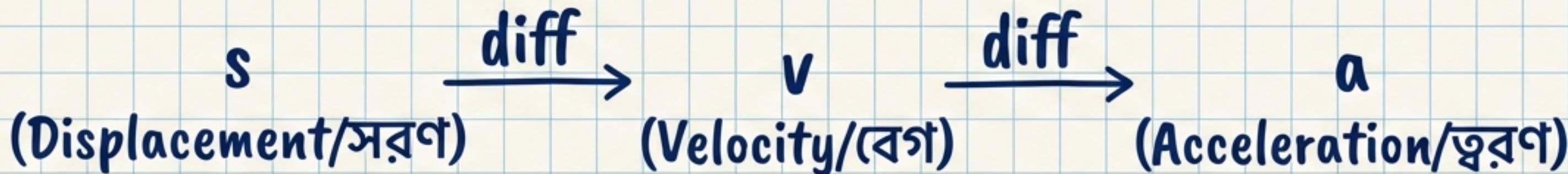
→ A. যদি  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \rightarrow$  Minimum (সর্বনিম্ন) U  
.:)

→ B. যদি  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \rightarrow$  Maximum (সর্বোচ্চ) n  
.:)

→ Point of Inflection :  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$



# গতিবিদ্যা: সরণ, বেগ ও ত্বরণ (Kinematics)



$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

## Key Terms

- Instantaneous Rest (তাঁক্ষণিক বিশ্রাম) মানে  $v = 0$
- Max Velocity মানে  $a = 0$

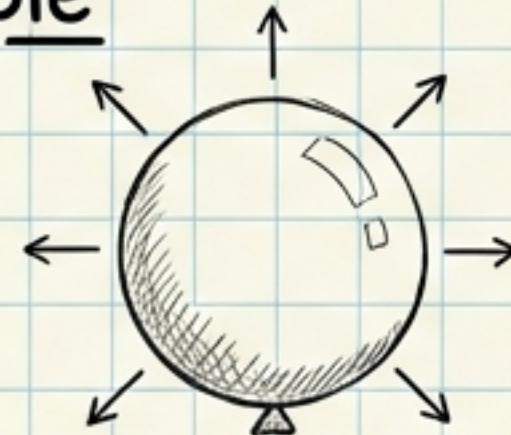
# পরিবর্তনের হার (Rates of Change)

## Strategy

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

টিপস: প্রশ্নে কী দেওয়া আছে ('Gimme') এবং কী বের করতে হবে তা আগে লিখুন।

## Example



Problem: বেলুন ফোলানো হচ্ছে ( $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ )

Given:  $\frac{dr}{dt} = 5$

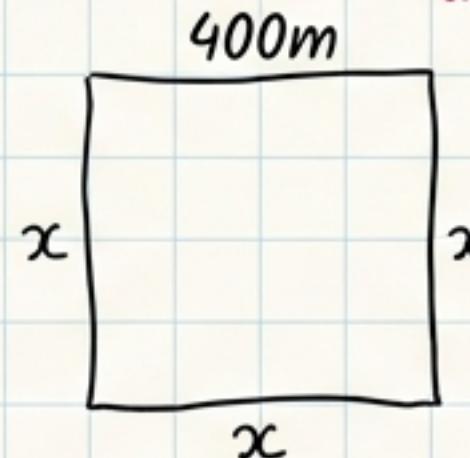
Find:  $\frac{dV}{dt}$  when  $r=30$

Solve: 
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4\pi r^2 \times 5 \\ &= 20\pi(30)^2 = 18000\pi \end{aligned}$$

# অপটিমাইজেশন: সর্বোচ্চকরণ ও সর্বনিম্নকরণের সমস্যা

## 4 Step Algorithm

1. সমীকরণ লিখুন: যা সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন করতে হবে (যেমন: ক্ষেত্রফল)।
2. একক চলক: সমীকরণটিকে একটি মাত্র variable-এ নিয়ে আসুন (*Substitution*)।
3. ডিফারেন্সিয়েশন:  $\frac{dy}{dx} = 0$  ধরে সমাধান করুন।
4. পরীক্ষা:  $\frac{d^2y}{dx^2}$  দিয়ে নিশ্চিত হোন এটা Max নাকি Min।



Example: কৃষকের বেড়া (Farmer's Fence).

400m তার দিয়ে সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল → বর্গক্ষেত্র (Square).

# এক নজরে সব সূত্র (All Formulas at a Glance)

Power Rule:

$$\frac{d}{dx}(x^n) \rightarrow nx^{n-1}$$

Logarithm:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) \rightarrow \frac{1}{x}$$

Exponential:

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) \rightarrow ae^{ax}$$

Trigonometry (sin):

$$\frac{d}{dx}(\sin ax) \rightarrow a \cos ax$$

Trigonometry (cos):

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) \rightarrow -a \sin ax$$

↑ Negative!

Quotient Rule (ভাগফল)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

Product Rule (গুণফল)

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dx}\right)$$

# এক্সাম টিপস এবং সতর্কতা (Exam Tips & Warnings)

- Simplify First: ডিফারেন্শিয়েশনের আগে লগ বা সূচকের নিয়ম ব্যবহার করে সমীকরণ সহজ করে নিন।
- Radians: ক্যালকুলাসে কোণ সর্বদা রেডিয়ান (Radians) থাকে, ডিগ্রিতে নয়!
- Chain Rule: ব্র্যাকেটের ভেতরের অংশ ডিফারেন্শিয়েট করতে ভুলবেন না।
- Terminology: মনে রাখবেন  $f'(x)$ ,  $dy/dx$ , ঢাল (slope), এবং পরিবর্তনের হার (rate of change) একই জিনিস।
- Log Tables: পৃষ্ঠা ২৫ এবং ২৭ এ সূত্রগুলো দেওয়া আছে, মুখস্থ না থাকলে দেখে নিন।

শুভকামনা! 😊⭐