1-6-3　確率論

確率論：導入

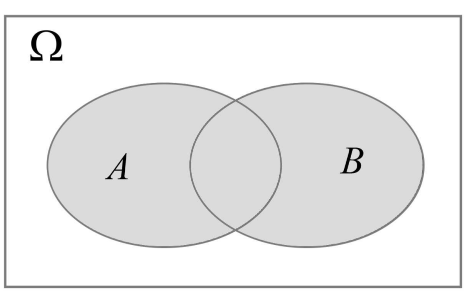
- 確率とは，ものごとが起きる「確からしさ」を 0 から 1 までの数で数値化したもの．偶然性・不規則性・予測不能性の程度の表現．
  - 例： 雨が降るかどうかの予測，疾患の生存率，地震の発生の予測，コインを投げたときに表と裏のどちらが出るかの予測．
- 先験的確率（組合せ確率）
  - 同等に起こりやすいと考えられる事柄は等しい確率をとる，として定めた確率．
- 経験的確率
  - 同じ実験や観測を繰り返して得たデータから定める確率．
- 公理論的確率
  - 現代の数学では，確率の意味については議論せず，ある公理系（約束ごと）を満たすものを確率とよびます．

試行，標本空間，事象

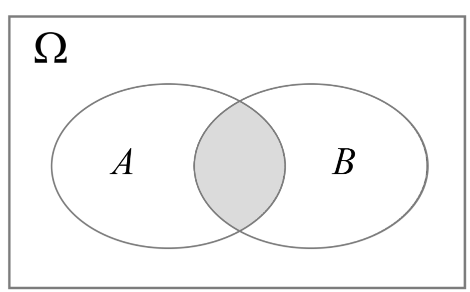
- 試行
  - 確率の考察の対象となる，再現性のある実験や観察を行うこと.
  - 例： サイコロを振ること.
- 標本点（または，標本） ω
  - 個々の試行によって得られた結果のこと.
  - 例： サイコロの例で，3 の目が出ること.
- 標本空間 Ω
  - 標本点すべての集合のこと.
  - 例： $\Omega = \{1$ の目が出る$, \ldots, 6$ の目が出る$\}$.
- 事象 $A, B, C, \ldots$
  - 標本空間の部分集合のこと.
  - 例： サイコロの例で，偶数の目が出ること.

事象の演算（$A, B, C \subseteq \Omega$ は事象）

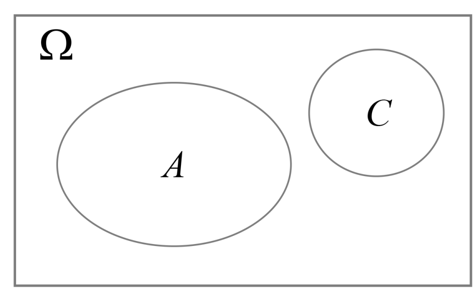
- A と B の和事象 $A \cup B$
  - A と B の少なくとも一方が起こること.
- A と B の積事象 $A \cap B$
  - A と B の両方が起こること.
- A と C が互いに排反であるとは，$A \cap C = \emptyset$（空事象，つまり，標本点を含まない事象）であること.
- A の余事象 A^{c}
  - A が起こらないという事象のこと.



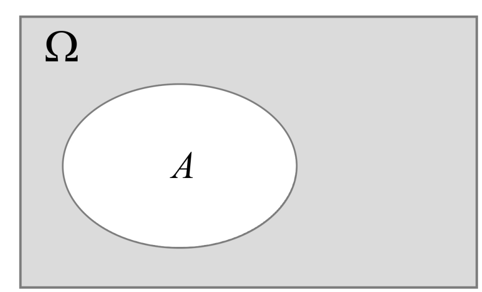
$A \cup B$



$A \cap B$



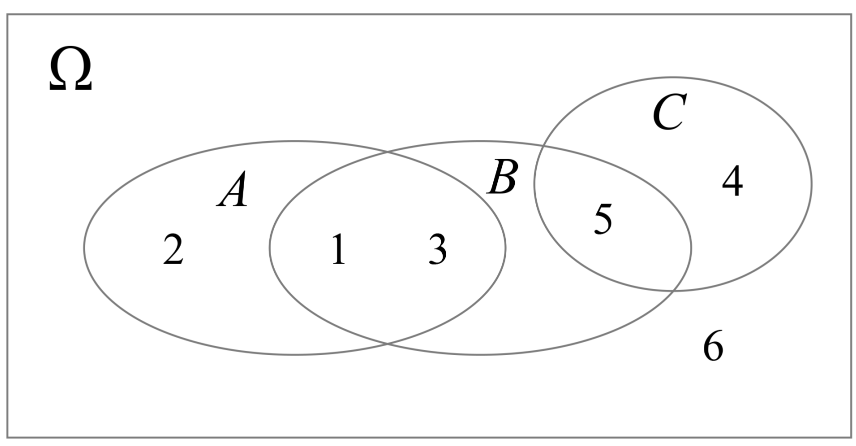
$A \cap C = \emptyset$



A^{c}

事象の演算の具体例

- サイコロを振って出る目を例として考えましょう.
  - 標本空間は，$\Omega = \{1$ の目が出る$, \ldots, 6$ の目が出る $\}$.
  - 3 以下の目のいずれかが出る事象を A とし，
    奇数の目のいずれかが出る事象を B とし，
    4 か 5 のいずれかの目が出る事象を C とすると ⋯
    - $A \cup B$ は，1, 2, 3, 5 のいずれかの目が出る事象.
    - $A \cap B$ は，1 か 3 のいずれかの目が出る事象.
    - A と C は互いに排反.
    - A^{c} は，4, 5, 6 のいずれかの目が出る事象.



確率の基本性質

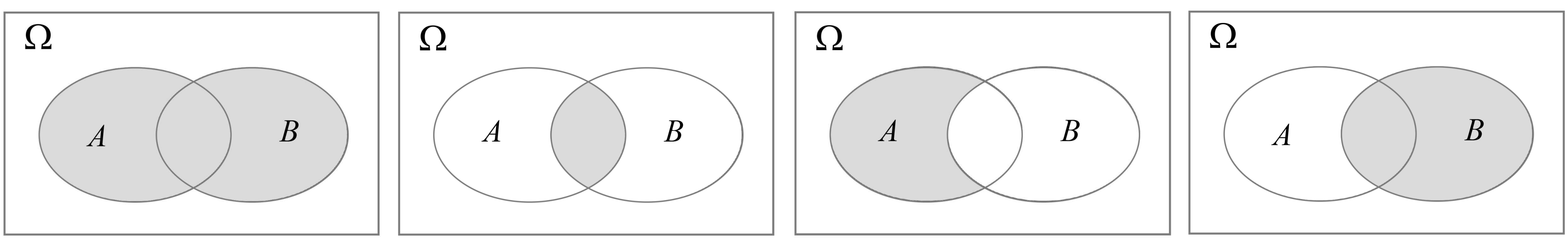
- 事象 A が起きる確率を，$P(A)$ で表します.
  - 任意の事象 A に対して，$0 \leqq P(A) \leqq 1$.
  - $P(\Omega) = 1\,, \quad P(\emptyset) = 0\,.$
  - 事象 A と事象 B が互いに排反（つまり，$A \cap B = \emptyset$）ならば，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\,.$
- 以上の性質は，約束ごとのように（確率の意味を議論することなく）決めておきます.

確率の基本性質に関する具体例

- サイコロを振って出る目を例として考えます.
  - $\Omega = \{1$ の目が出る$, \ldots, 6$ の目が出る$\}$.
  - それぞれの目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとします.
  - 「1 の目が出ること」と「3 の目が出ること」が同時に起きることはありません（つまり，この 2 つの事象は排反です）ので,「1 または 3 の目が出る」確率は $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.
  - 「1 または 3 の目が出ること」と「5 の目が出ること」が同時に起きることはありませんので,「奇数の目が出る」確率は $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.
  - 同様にして,「偶数の目が出る」確率も $\dfrac{1}{2}$.
  - 「奇数の目が出ること」と「偶数の目が出ること」が同時に起きることはありませんので，$P(\Omega) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

加法定理

- 事象 A, B に対して，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- 証明：
  - A は，$A \cap B$ と $A \cap B^{\mathrm{c}}$ にわけられます（この２つは排反）.
    - したがって，$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^{\mathrm{c}})$.
  - $A \cup B$ は，$A \cap B^{\mathrm{c}}$ と B にわけられます（この２つは排反）.
    - したがって，$P(A \cup B) = P(A \cap B^{\mathrm{c}}) + P(B)$.
  - あとは，２つの等式から $P(A \cap B^{\mathrm{c}})$ を消去すれば，証明が完成します.



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \cap B^{\mathrm{c}}$ $\quad$ B

条件付き確率と乗法定理

- 事象 A が起こった場合に事象 B が起きるという確率を，条件付き確率とよび，$P(B|A)$ で表します：

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} .$$

- 分母をはらった

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$$

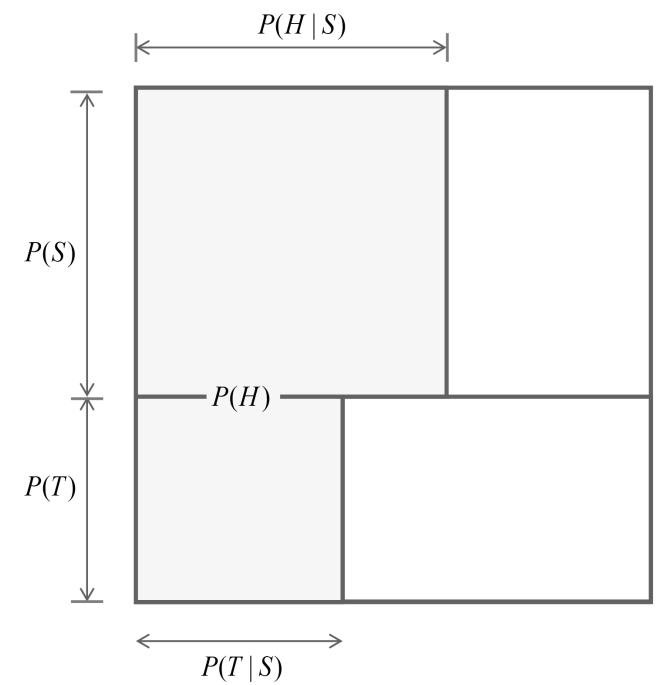
の形（乗法定理）も，よく用いられます.

加法定理と乗法定理の具体例 (1/2)

- 10 円玉と 100 円玉を（別々に）投げたとき，表になる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるとします．少なくとも一方が表になる確率は，次のようにして求められます．
- 10 円玉が表になる事象を A とし，
  100 円玉が表になる事象を B とします．
  - 「10 円玉が表」の確率は，$P(A) = \dfrac{1}{2}$.
  - 「10 円玉が表のときに 100 円玉が表」の確率は，$P(B|A) = \dfrac{1}{2}$.
- 乗法定理より,「10 円玉も 100 円玉も表」の確率は,
$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$
- 加法定理より,「少なくとも一方が表」の確率は,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

加法定理と乗法定理の具体例 (2/2)

- S 型と T 型のインフルエンザが流行しているとします.
- 患者が S 型である事象を S とし，T 型である事象を T とします．また，S 型と T 型の両方にかかっていることはないとします（つまり，S と T は互いに排反です）．このとき，$P(S) = 0.6$, $P(T) = 0.4$ であるとします.
- S 型にかかった際に熱が 38 °C を超える確率は 0.7 であり，T 型では 0.5 であるとします.
- インフルエンザにかかったときに熱が 38 °C を超える事象を H で表すと，その確率 $P(H)$ は次のように求められます.



- $P(S) = 0.6$, $P(H|S) = 0.7$ と乗法定理より，$P(S \cap H) = P(S)\,P(H|S) = 0.42$.
- $P(T) = 0.4$, $P(H|T) = 0.5$ と乗法定理より，$P(T \cap H) = P(T)\,P(H|T) = 0.2$.
- $P(H) = P(S \cap H) + P(T \cap H) = 0.62$.

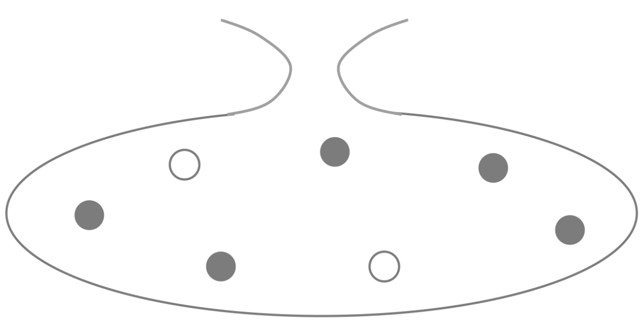
独立性

- 事象 A, B に対して条件
$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$
が成り立つとき，A と B は互いに独立であるといいます.
  - 乗法定理 $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$ より，A と B が互いに独立ならば
$$P(B|A) = P(B)$$
が成り立つことが分かります（つまり，B が起きる確率は，A が起きたかどうかに影響されません）.
同様に，
$$P(A|B) = P(A)$$
も成り立ちます.

独立な事象の具体例

- 白い玉が２個と黒い玉が５個入った袋から，玉を取り出すことを考えましょう．どの玉も等しい確率で取り出されるとします．
- 玉を１つ取り出すと，袋に返してから，次の玉を取り出すことにします．
- A：最初の玉が白である事象，　B：２番目の玉が黒である事象．
  - $P(A) = \dfrac{2}{7}$　　（どの玉も，取り出される確率は $\dfrac{1}{7}$ だから）．
  - $P(B|A) = P(B) = \dfrac{5}{7}$
    （最初の玉は返したので，最初に何が出ても次の試行に無関係）．
- 最初の玉が白で２番目の玉が黒である確率は，

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{10}{49}.$$



それでは，独立でない例は ⋯

- 白い玉が 2 個と黒い玉が 5 個入った袋から，玉を取り出すことを考えましょう．どの玉も等しい確率で取り出されるとします．
- 玉を 1 つ取り出すと，袋に返さずに，次の玉を取り出すことにします．
- A：最初の玉が白である事象，　B：2 番目の玉が黒である事象．
  - $P(A) = \dfrac{2}{7}$　（どの玉も，取り出される確率は $\dfrac{1}{7}$ だから）．
  - $P(B|A) = \dfrac{5}{6}$　$\left(\neq P(B) = \dfrac{5}{7}\right)$
    （最初の白玉は返さないので，袋の中の玉の数は 6）．
- 最初の玉が白で 2 番目の玉が黒である確率は，乗法定理より
$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = \frac{10}{42}.$$
  - 独立である場合（前頁）と結果が異なることに注意して下さい．

ベイズの定理

- 乗法定理より，$P(A \cap B)$ は
$$P(A)\,P(B|A) \quad \text{と} \quad P(B)\,P(A|B)$$
のいずれにも等しい．このことから，
$$P(B|A) = \frac{P(B)\,P(A|B)}{P(A)}.$$
- 一方，A は，$A \cap B$ と $A \cap B^{\mathrm{c}}$ にわけられます（2 つは排反）．
  - したがって，$P(A) = \underbrace{P(A \cap B)}_{=P(B)\,P(A|B)} + \underbrace{P(A \cap B^{\mathrm{c}})}_{=P(B^{\mathrm{c}})\,P(A|B^{\mathrm{c}})}$.
- 以上より，
$$\overbrace{P(B|A)}^{\text{事後確率}} = \frac{\overbrace{P(B)}^{\text{事前確率}}\;P(A|B)}{P(B)\,P(A|B) + P(B^{\mathrm{c}})\,P(A|B^{\mathrm{c}})}. \qquad \text{(ベイズの定理)}$$
  - B が原因となって A が生じたと考えると，事後確率 $P(B|A)$ は結果 A を知った上で B が起きていた確率.

ベイズの定理の具体例（加法定理と乗法定理の具体例 (2) の続き）

- S 型と T 型のインフルエンザが流行しているとします.
- 患者が S 型である事象を S とし，T 型である事象を T とします．また，S 型と T 型の両方にかかっていることはないとします（つまり，S と T は互いに排反です）．このとき，$P(S) = 0.6$, $P(T) = 0.4$ であるとします.
- S 型にかかった際に熱が $38\,°\mathrm{C}$ を超える確率は 0.7 であり，T 型では 0.5 であるとします.
- インフルエンザにかかったときに熱が $38\,°\mathrm{C}$ を超える事象を H で表すと，$P(H) = P(S)\,P(H|S) + P(T)\,P(H|T) = 0.62$ でした.
- では，インフルエンザにかかって熱が $38\,°\mathrm{C}$ を超えたとき，S 型であった確率は
$$P(S|H) = \frac{P(S)\,P(H|S)}{P(H)} = \frac{0.6 \cdot 0.7}{0.62} \simeq 0.677\,.$$

ベイズの定理の具体例

- ある電子メールがスパムメール（迷惑メール）であるという事象を B とおき，$P(B) = 0.5$ とします（事前確率）.
- ある電子メールに「緊急」という単語が含まれるという事象を A とおきます.
  - スパムメールに「緊急」が含まれる確率を $P(A|B) = 0.75$,
    スパムでないメールに「緊急」が含まれる確率を $P(A|B^{\mathrm{c}}) = 0.15$ とします.
- では，メールが「緊急」を含んでいるときにそれがスパムメールである確率（事後確率）は,

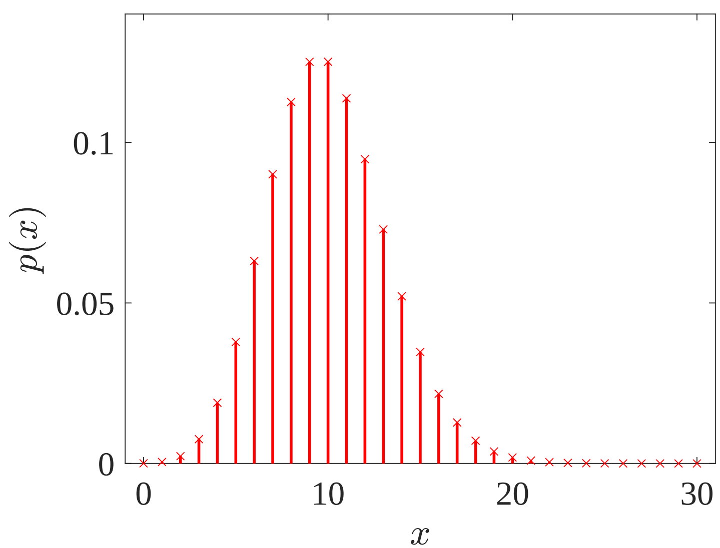
$$P(B|A) = \frac{P(B)\,P(A|B)}{P(B)\,P(A|B) + P(B^{\mathrm{c}})\,P(A|B^{\mathrm{c}})}$$
$$= \frac{0.5 \cdot 0.75}{0.5 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.15} \simeq 0.833\,.$$

確率変数

- 例として，コイン投げにおいて，表が出ると $X = 1$ とし裏が出ると $X = 0$ とします．このように，標本点それぞれに対応して値が割り当てられた変数 X のことを，確率変数とよびます．
- より詳しく言うと，標本空間 Ω の要素を $\omega_1, \omega_2, \ldots$ のように列挙できる場合，各 $\omega_k \in \Omega$ に対してある数 x_k を $X(\omega_k) = x_k$ と割り当てます．この X を,（離散型の）確率変数とよびます.
  - Ω の要素がとびとびに数えることができない場合（たとえば，時刻 x までにある機械が故障する事象を考えるような場合）は，取り扱いがより複雑になるので，まずはより簡単な離散型の場合を考えましょう.

確率分布

- $X(\omega)$ が値 x_k をとるという事象が起きる確率は，$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_k\})$ です．これを，表記の簡単のため，$P(\{X = x_k\})$ と書くことにします．
- x_k と $P(\{X = x_k\})$ の組を，X の確率分布（または，分布）とよびます．
- $p(x) = P(\{X = x\})$ で定まる関数 p を，X の確率関数とよびます．



確率関数の例

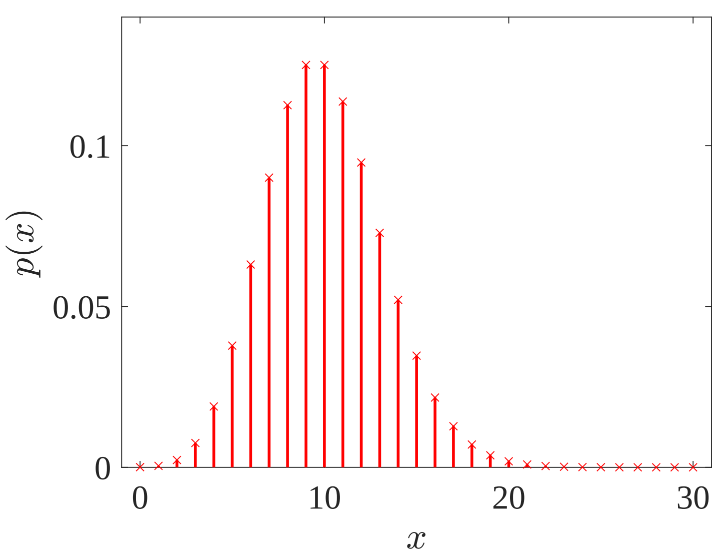
確率関数と確率分布関数

- 確率関数は，$p(x) = P(\{X = x\})$ でした．
- 確率変数 X がある値 x 以下である確率

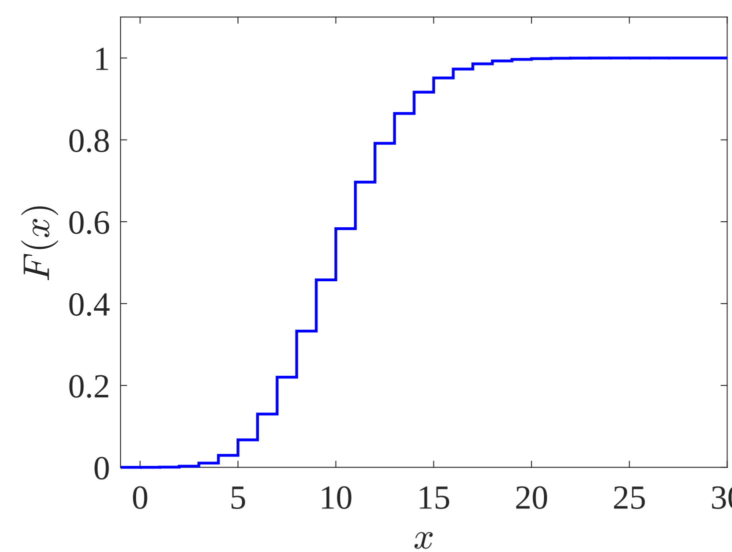
$$F(x) = P(\{X \leqq x\})$$

を，X の確率分布関数（または，分布関数，累積分布関数）とよびます．

  - $F(x)$ は，0 から 1 までの値をとります．また，$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$，$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$．
  - F は，単調増加関数です．



確率関数の例



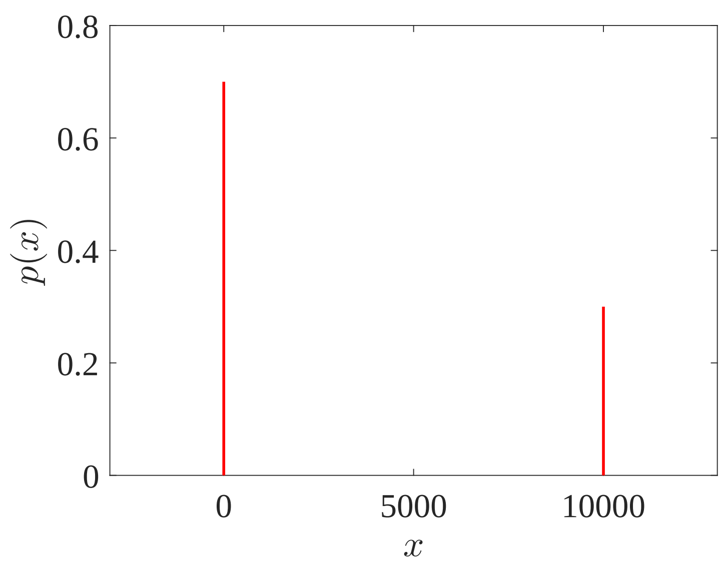
対応する確率分布関数

確率変数の期待値

- 確率変数 X の期待値（または，平均）とは，
$$E[X] = x_1\, p(x_1) + x_2\, p(x_2) + \cdots .$$
（すべての標本点に関して和をとります）

  - μ で表すことが多いです.

- 例： 0.3 の確率で 1 万円が当たるクジがあるとしましょう．つまり，
$$P(\{X = 1\text{ 万円}\}) = 0.3\,, \quad P(\{X = 0\text{ 円}\}) = 0.7\,.$$
当選金の期待値は，
$$E[X] = 1\text{ 万円} \cdot 0.3 + 0\text{ 円} \cdot 0.7 = 3\text{ 千円}\,.$$



確率変数の期待値

- 確率変数 X の期待値（または，平均）とは，

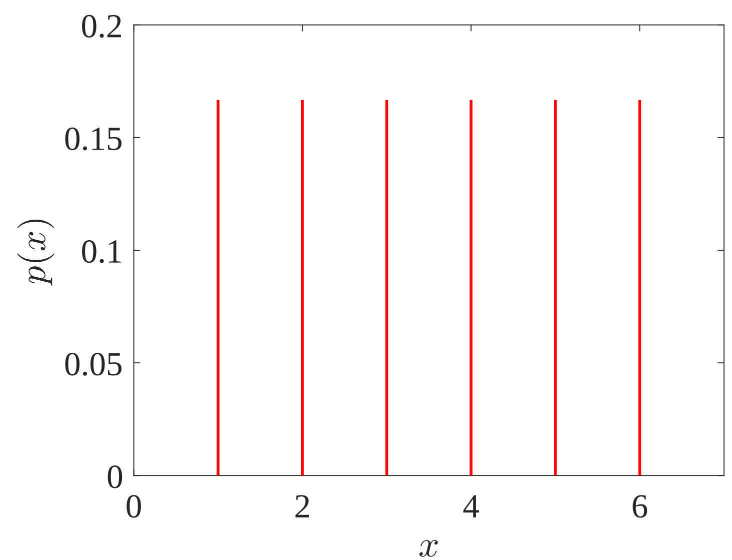
$$E[X] = x_1\,p(x_1) + x_2\,p(x_2) + \cdots\,.$$

（すべての標本点に関して和をとります）

  - μ で表すことが多いです.

- サイコロを振って出る目の数を X とおくと，

$$P(\{X=1\}) = P(\{X=2\}) = \cdots = P(\{X=6\}) = \frac{1}{6}\,.$$



X の期待値は，

$$E[X] = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \cdots + 6\cdot\frac{1}{6} = 3.5\,.$$

確率変数の分散

- 確率変数 X の分散とは,

$$V[X] = E[(X-\mu)^2] \qquad (\mu \text{ は } X \text{ の期待値})$$
$$= (x_1-\mu)^2\, p(x_1) + (x_2-\mu)^2\, p(x_2) + \cdots .$$

（すべての標本点に関して和をとります）

  - ばらつき具合の尺度．σ^2 で表すことが多いです.
  - $\sqrt{\sigma^2}$ を，標準偏差とよびます.

- 例．0.3 の確率で 1 万円が当たるクジがあるとします：

$$P(\{X = 1\text{ 万円}\}) = 0.3\,, \qquad P(\{X = 0\text{ 円}\}) = 0.7\,.$$

当選金の期待値は,

$$E[X] = 1\text{ 万円} \cdot 0.3 + 0\text{ 円} \cdot 0.7 = 3\text{ 千円}\,.$$

当選金の分散は,

$$V[X] = (1\text{ 万円} - 3\text{ 千円})^2 \cdot 0.3 + (0\text{ 円} - 3\text{ 千円})^2 \cdot 0.7 = 2100\text{ 円}^2\,.$$

期待値と分散に関する具体例

- 0.3 の確率で 1 万円が当たるクジ：

$$P(\{X = 1\text{ 万円 }\}) = 0.3\,, \quad P(\{X = 0\text{ 円 }\}) = 0.7\,.$$

- 0.003 の確率で 100 万円が当たるクジ：

$$P(\{Y = 100\text{ 万円 }\}) = 0.003\,, \quad P(\{Y = 0\text{ 円 }\}) = 0.997\,.$$

- X と Y では，期待値は同じだが分散が異なります：
  - $E[X] = 3$ 千円， $V[X] = 2100$ 円^2.
  - $E[Y] = 3$ 千円， $V[Y] = 299100$ 円^2.

- 両方のクジを 1 枚ずつ買った場合，当選金の合計の期待値は，

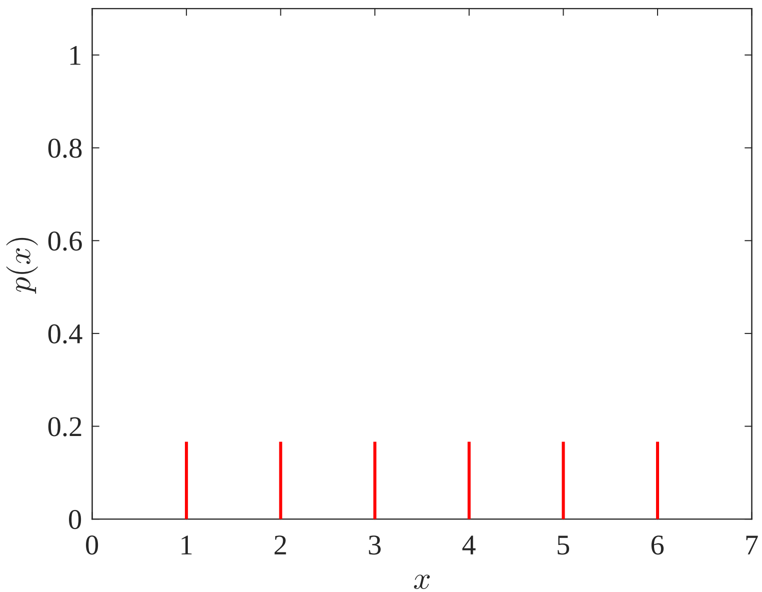
$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 6\text{ 千円}\,.$$ （期待値の加法性）

- X のクジを α 枚だけ買った場合，当選金の合計の期待値と分散は，

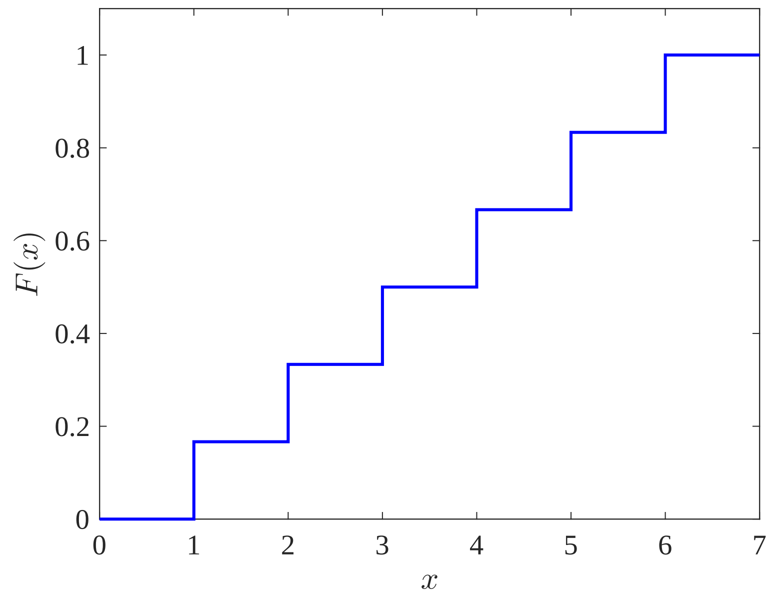
$$E[\alpha X] = \alpha E[X]\,,$$
$$V[\alpha X] = \alpha^2 V[X]\,.$$

さまざまな確率分布：離散型

- 離散一様分布 DU(r)　（r は自然数）
  - $1, 2, \ldots, r$ の値をそれぞれ等確率 $1/r$ でとる確率分布です.
  - 例： サイコロを振ったときの目の確率分布は，DU(6) です.



DU(6) の確率関数

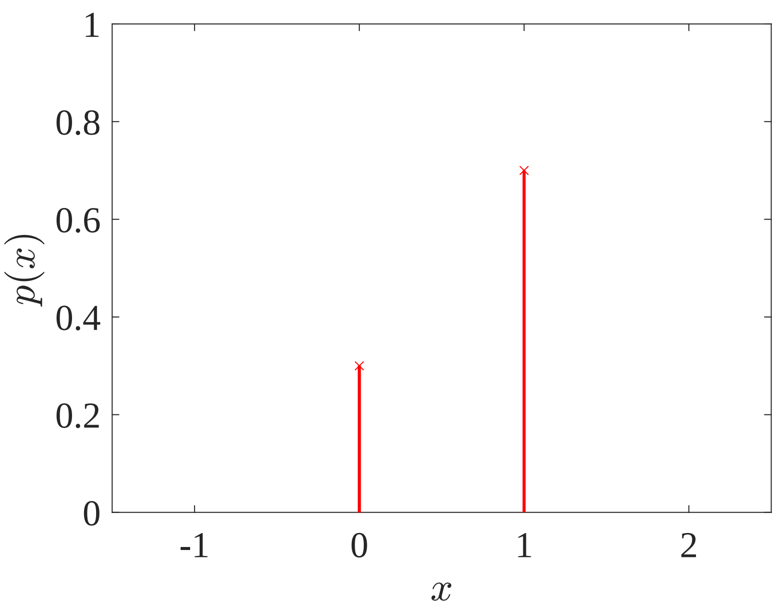


DU(6) の確率分布関数

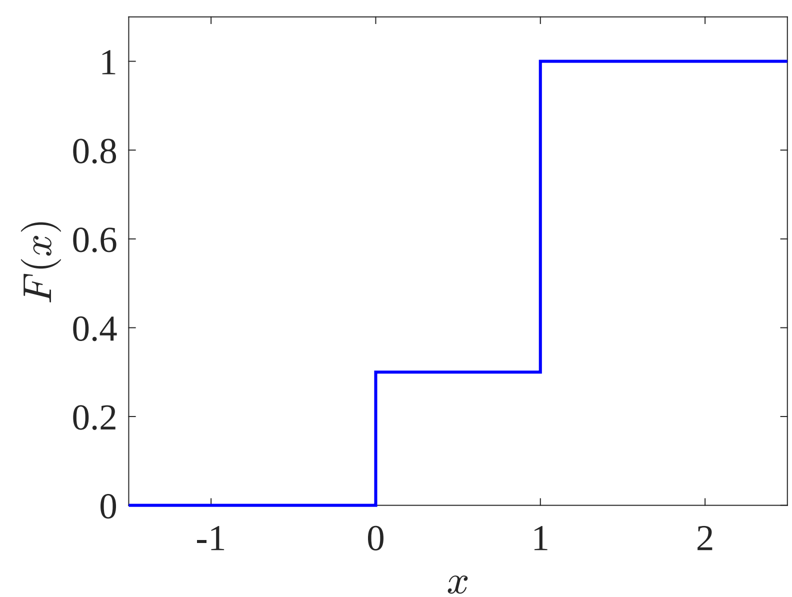
代表的な離散型の確率分布

- ベルヌーイ分布
  - 表の出る確率が p で裏の出る確率が $1-p$ のコインを投げ，表が出ると $X=1$ とし，裏が出ると $X=0$ とした確率分布のことです．
  - 確率関数は

$$P(\{X=1\})=p\,,\quad P(\{X=0\})=1-p\,.$$



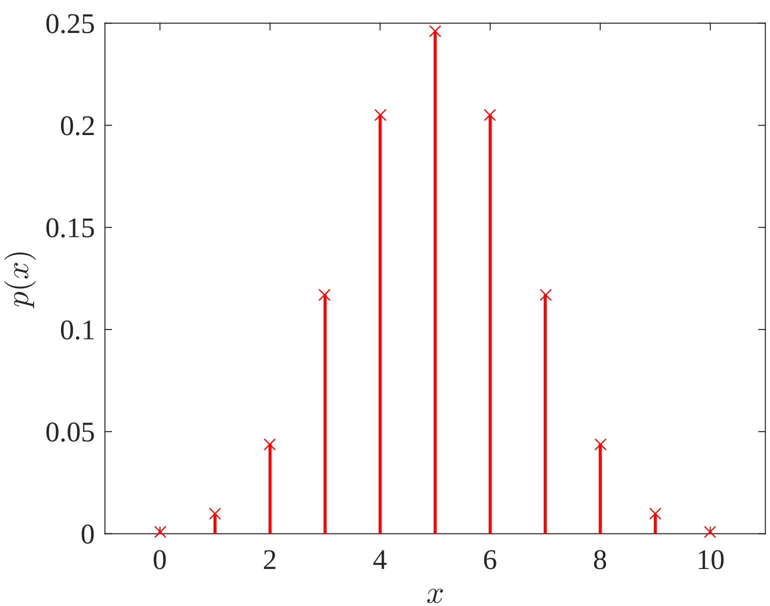
ベルヌーイ分布 ($p=0.7$) の
確率関数



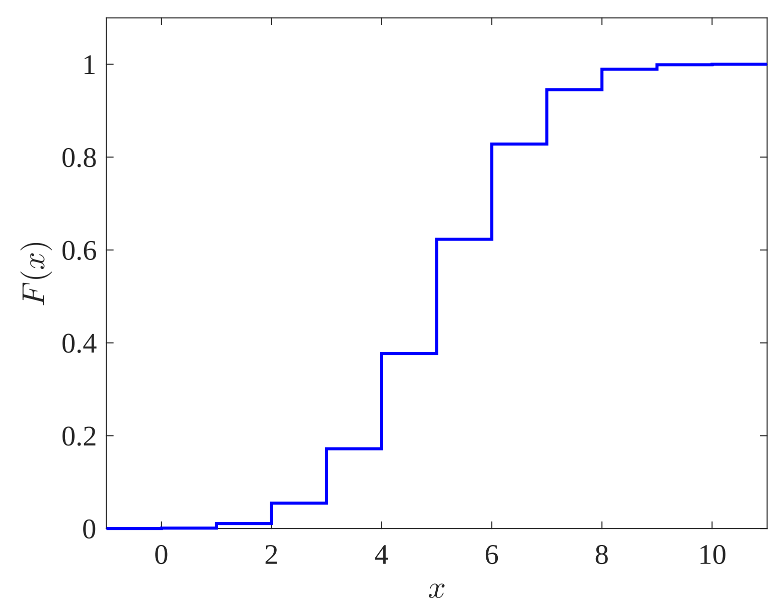
ベルヌーイ分布 ($p=0.7$) の
確率分布関数

代表的な離散型の確率分布

- 2 項分布 $\mathrm{B}\textsc{n}(n, p)$
  - ベルヌーイ分布で考えたコインを n 回投げたとき，表の出る回数 X の確率分布のことです（つまり，ベルヌーイ分布は $\mathrm{B}\textsc{n}(1, p)$ です）.
  - 確率関数は $P(\{X = k\}) = {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$.



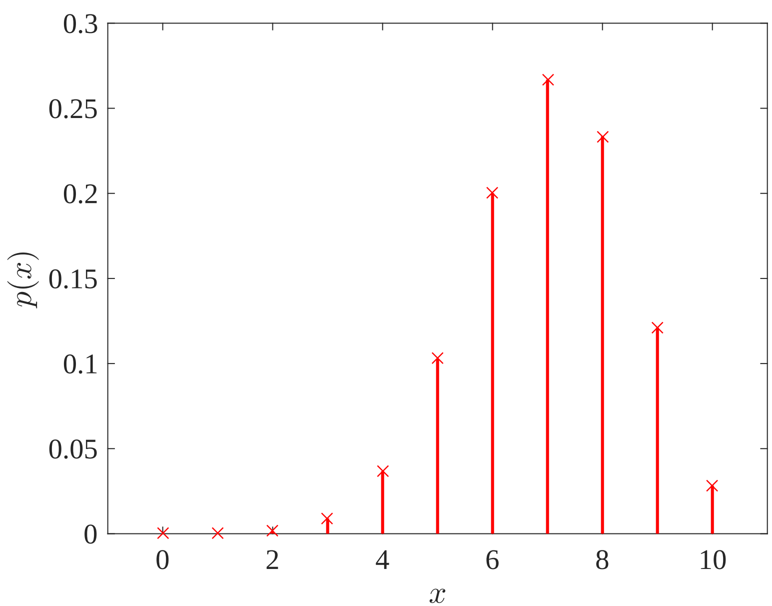
$\mathrm{B}\textsc{n}(10, 0.5)$ の確率関数



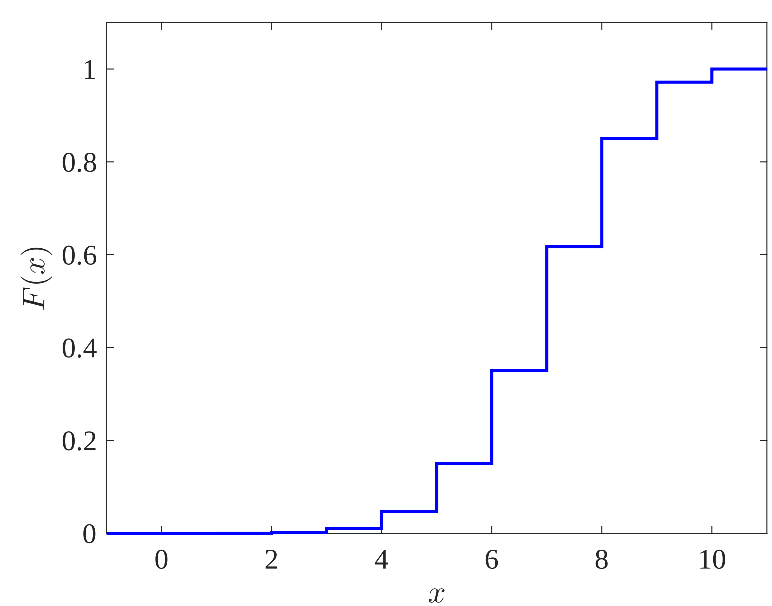
$\mathrm{B}\textsc{n}(10, 0.5)$ の確率分布関数

代表的な離散型の確率分布

- 2 項分布 $\mathrm{B_N}(n, p)$
  - ベルヌーイ分布で考えたコインを n 回投げたとき，表の出る回数 X の確率分布のことです（つまり，ベルヌーイ分布は $\mathrm{B_N}(1, p)$ です）.
  - 確率関数は $P(\{X = k\}) = {}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$.



$\mathrm{B_N}(10, 0.7)$ の確率関数



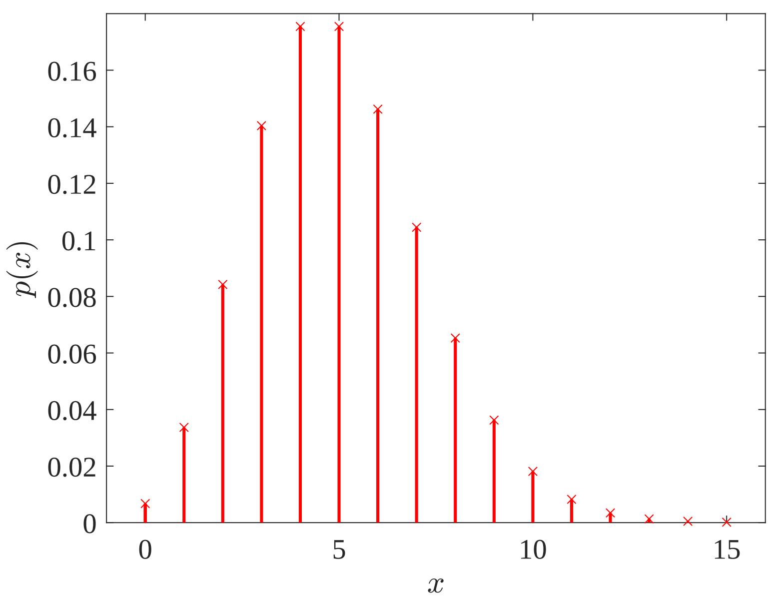
$\mathrm{B_N}(10, 0.7)$ の確率分布関数

代表的な離散型の確率分布

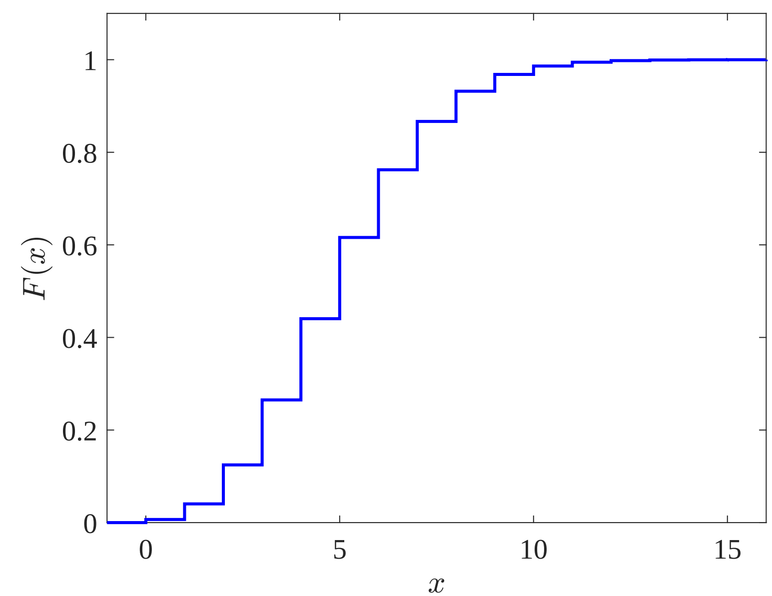
- ポアソン分布 Po(λ)
  - 2 項分布 Bn(n, p) で，$np = \lambda$（一定値）としたまま，コインを投げる回数 n を非常に多くし表の出る確率 p を 0 に近づけていくと得られる分布です.
  - 個々の生起確率は小さいけれど，分析対象の数が多い現象は，ポアソン分布がよくあてはまることが知られています．たとえば，
    - 一定期間に製造された製品のうち，不良品の個数，
    - 一定期間内の事故の件数，
    - 単位面積あたりの雨粒の数.
  - 確率関数は $P(\{X = k\}) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$.

代表的な離散型の確率分布

- ポアソン分布 Po(λ)
  - 確率関数は $P(\{X = k\}) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$.
  - 期待値も分散も λ .



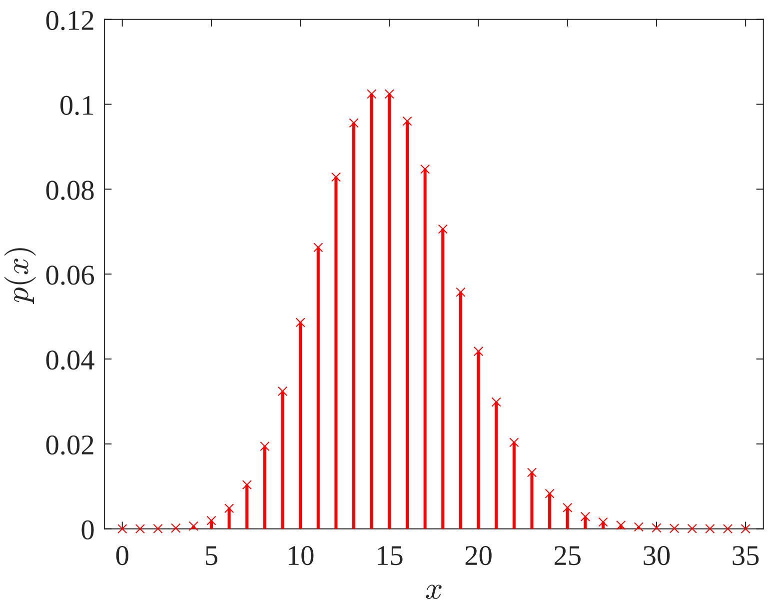
Po(5) の確率密度関数



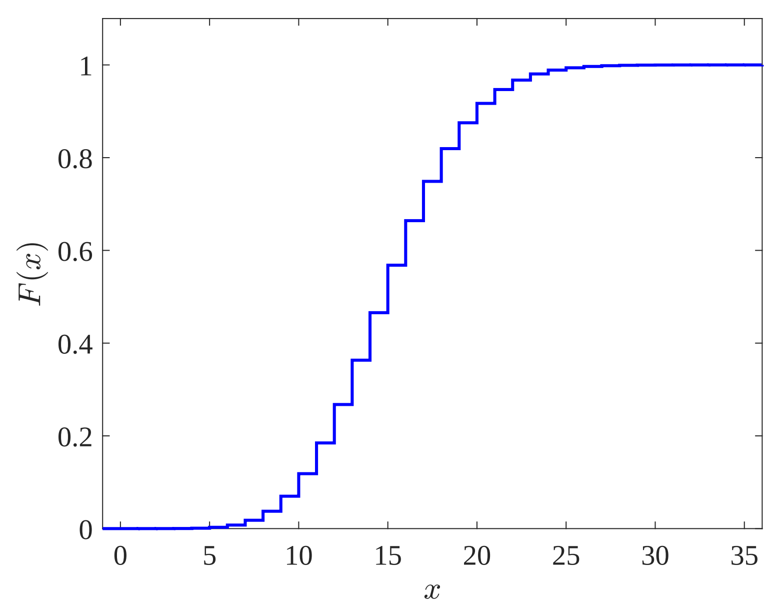
Po(5) の確率分布関数

代表的な離散型の確率分布

- ポアソン分布 Po(λ)
  - 確率関数は $P(\{X=k\}) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2,\ldots)$.
  - 期待値も分散も λ .



Po(15) の確率密度関数



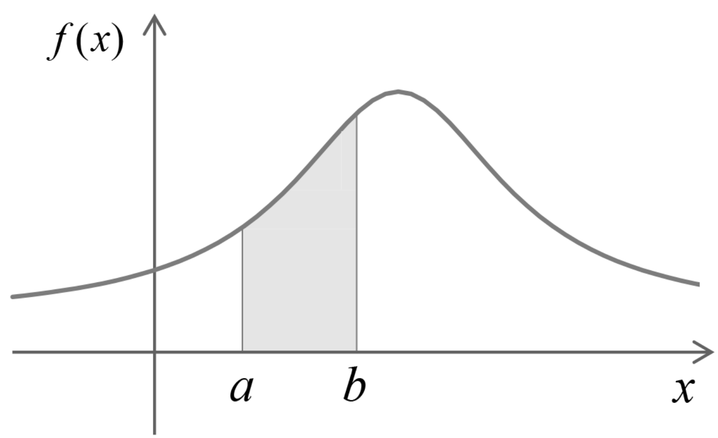
Po(15) の確率分布関数

連続型の確率分布

- 確率変数 X が，長さや時間など，連続値をとる変数である場合を考えましょう.
- X がとり得る値は無限個あるので，X がある 1 つの値 x をとる確率は $P(\{X = x\}) = 0$ ということになります.
- 一方，確率分布関数は，離散型の場合と同様に，$F(x) = P(\{X \leqq x\})$ で定義できます.

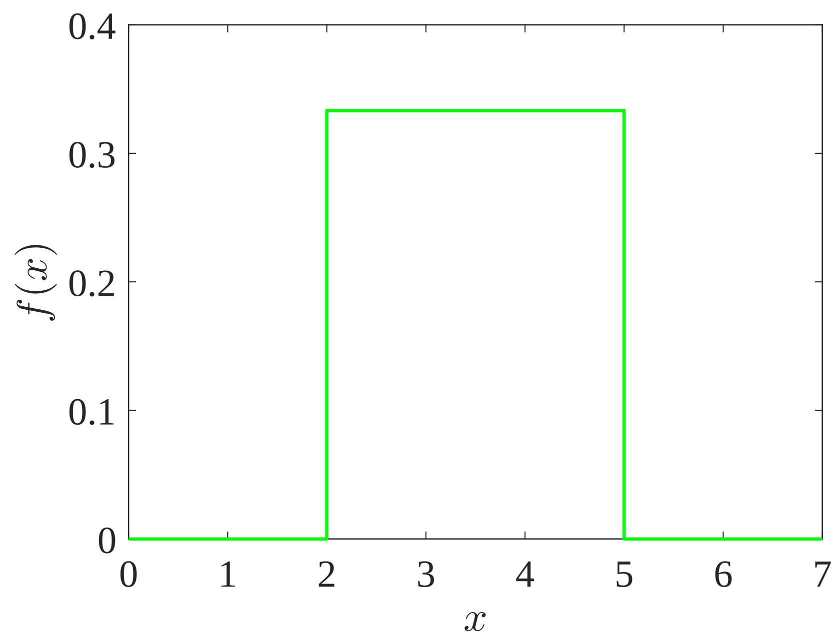
連続型の確率分布

- また，確率変数 X が a と b の間に入る確率が，
$$P(\{a \leqq X \leqq b\}) = \int_a^b f(x)\,dx$$
となる関数 f を確率密度関数と呼びます（ただし，a と b は定数で，$a < b$ とします）．
- 上の式の右辺は関数 f の積分を表していて，下図のように関数 f のグラフの $x = a$ から $x = b$ までの部分と x 軸で囲まれる色付き領域の面積を表しています（詳細は後述の積分の節を参照してください）．



代表的な連続型の確率分布

- 一様分布 $\mathrm{U}(a, b)$
  - a から b の間の区間（ただし，$a < b$）で等しい確率をとる確率分布です.



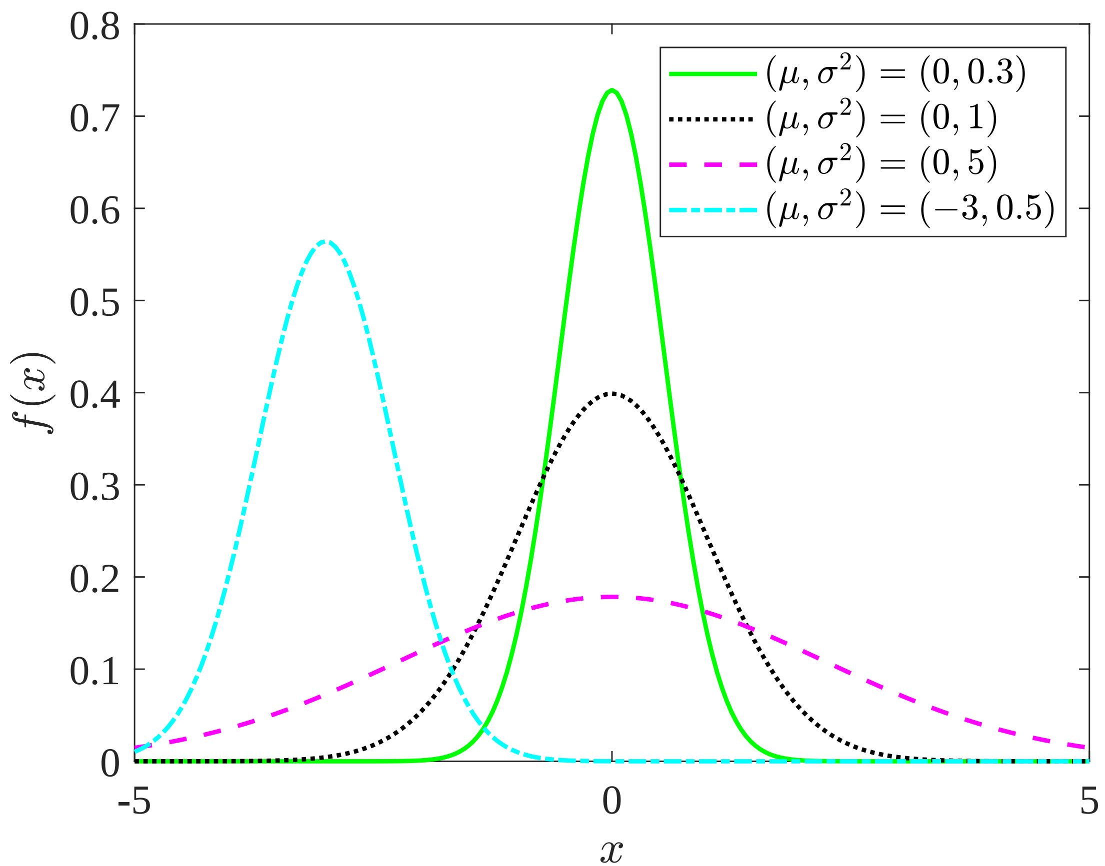
$\mathrm{U}(2, 5)$ の確率密度関数

代表的な連続型の確率分布

- 正規分布（または，ガウス分布） N(μ, σ^2)
  - 統計学で最もよく用いられる確率分布です.
  - 確率密度関数は $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.
    （$\exp(x)$ は後述の指数関数を表す）
  - 期待値は μ で，分散は σ^2 .
  - N$(0, 1)$ を，標準正規分布とよびます.
    - X が N(μ, σ^2) に従うならば，$\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ は標準正規分布 N$(0, 1)$ に従います.

代表的な連続型の確率分布

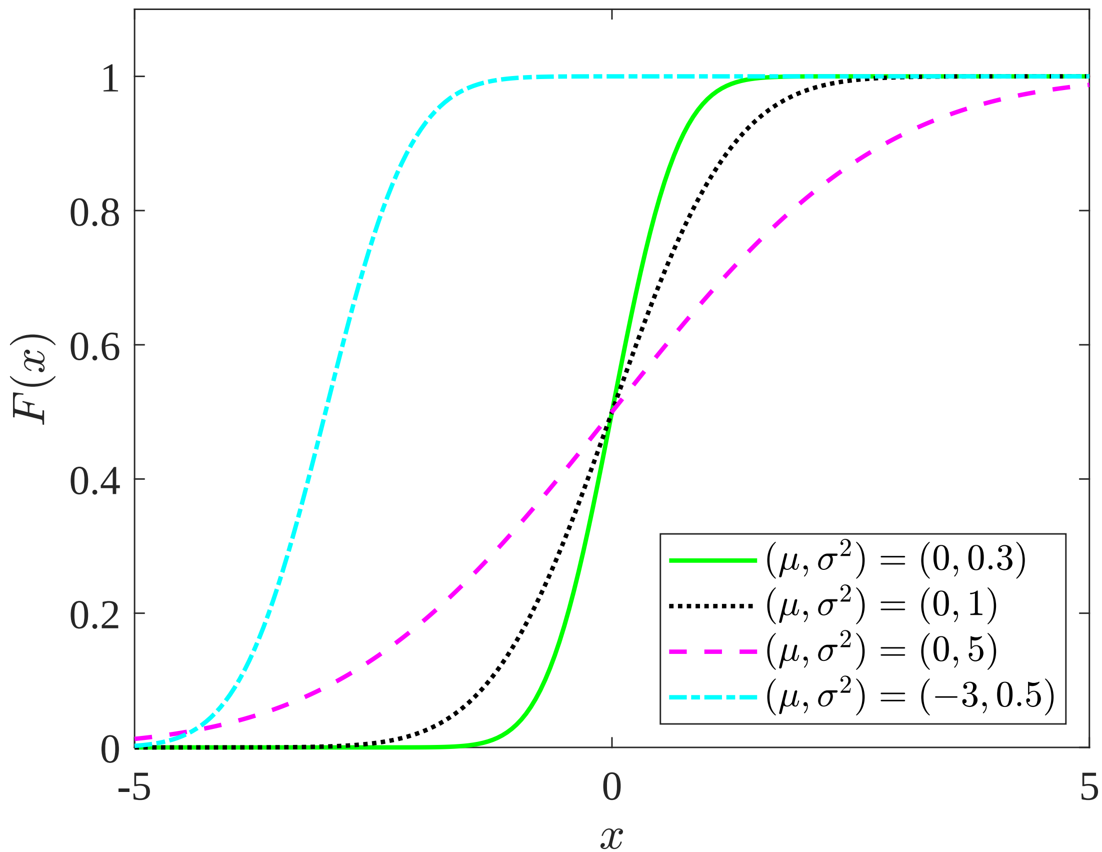
- 正規分布（または，ガウス分布） $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
  - 確率密度関数の値 $f(x)$ は，$x = \mu$ で最大になります．グラフは，左右対称で，単峰性をもちます．



$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数

代表的な連続型の確率分布

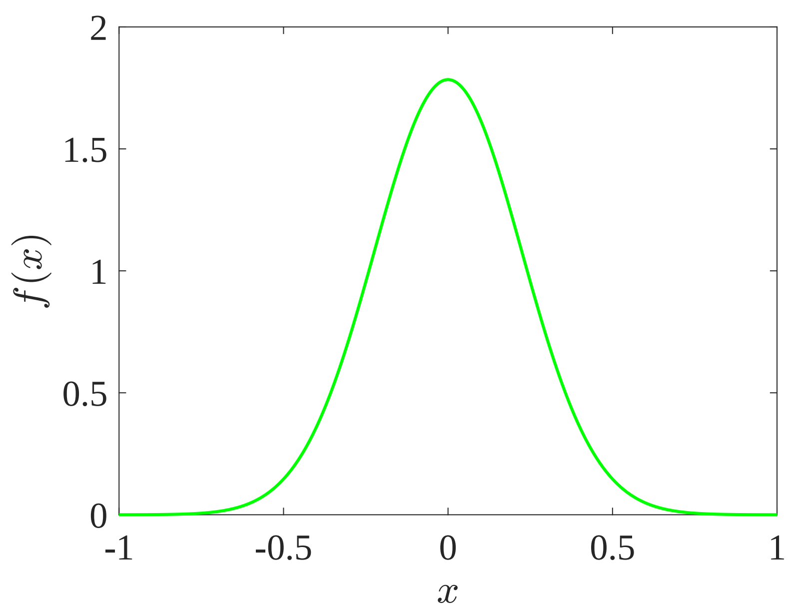
- 正規分布（または，ガウス分布） N(μ, σ^2)
  - 確率分布関数 $F(x)$ のグラフ：



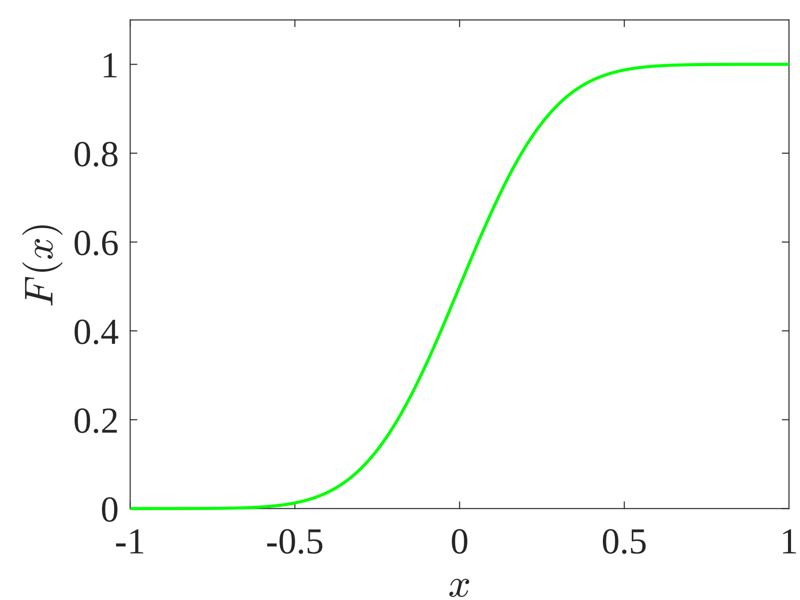
N(μ, σ^2) の確率分布関数

確率密度関数に関する注意

- 確率密度関数の値 $f(x)$ は,「確率変数 X が 値 x をとる確率」ではないことに注意して下さい.
- このため，分散 σ^2 が小さい場合，$f(x) > 1$ となり得ます.
  - あくまで，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が確率です.
- 確率分布関数の値 $F(x)$ は（確率 $P\{X \leqq x\}$ を表すので），必ず 1 以下です.



N(0, 0.05) の確率密度関数



N(0, 0.05) の確率分布関数

独立同一分布

- 確率変数の列 $X_1, X_2, \cdots$ に対して，$X_1, X_2, \cdots$ がそれぞれ独立に値が定まり，各 j に対して X_j の確率分布が j によらず同じものになっている時，独立同一分布であるといいます．
- 例えば，サイコロを何回も振ったり，同じ条件下で実験を繰り返すといった場合などがあります．サイコロを何回も振る場合，X_j は j 回目のサイコロの目に対応します．
- 繰り返し行われる試行のうち，独立同一分布は最も基本的で，数学的に扱いやすいものとなります．

大数の法則

- 「大数の法則」
  - $X_1, X_2, \cdots$ を独立同分布に従う確率変数列とします．この時，試行回数 n が大きくなるにつれて，データの平均

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

    は X_1 の期待値 $E[X_1]$ に近づいていきます．
  - 試行回数 n が少ない時にはデータの平均は試行する度に違う値をとりますが，大数の法則によると試行回数 n が大きくなると，何度試行しても安定的に $E[X_1]$ に近い値をとるということがわかります．
  - ある人が一定期間の間に死亡するかどうかは，基本的には人によって独立で性別・年代別に見れば同じ分布に従っていると考えることができます．従って，大数の法則によって，例えば 40 代男性全体の死亡率は年によってほとんど変わらずに安定することがわかります．生命保険はこのような考え方に基づいて支払う保険金の合計額を予測し，月々に払う保険料を定めています．