1-6-6　多項式関数，指数関数，対数関数

多項式とは

- 数と文字（変数）の積と，それらの和で表される式のことを，多項式とよびます.
  - たとえば，
  $$x\,,\quad 2x^3y\,,\quad 4abcd+6$$
  などは多項式です．また，
  $$x^2+3x+4\,,\quad \frac{1}{2}x^3y+5x^2y^2+y^4$$
  も多項式です.
  - 一方で，たとえば
  $$\frac{1}{x}\,,\quad \frac{y}{x^2+1}\,,\quad \sqrt{x}$$
  などは，多項式ではありません．また，
  $$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \qquad \text{（限りなく和が続く）}$$
  のように無限個の和で表されるものも，多項式ではありません.

多項式の主な乗法公式

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
- $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.
- $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$.
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.
- $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$.
- $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$.
- $(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

2 項展開

- n 個のものから r 個を選ぶときの選び方の総数を，${}_n\mathrm{C}_r$ や $\binom{n}{r}$ で表します：

$$
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} \,.
$$

  - $n!$ は，n の階乗（つまり，$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$）を表します.
  - 約束ごととして，$0! = 1$ です.

- n を自然数とするとき，

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k} y^k \\
&= {}_n\mathrm{C}_0 x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n y^n
\end{aligned}
$$

が成り立ちます．これを，2 項展開とよびます.

多項式関数

- n を自然数とし，$a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ を数とします．多項式
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
の文字（変数）x に数を代入して $f(x)$ の値を考えるとき，$f(x)$ を多項式関数とよびます．
  - n を，$f(x)$ の次数とよびます．
  - $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を，$f(x)$ の係数とよびます．
- 具体例として，各 $x \in \mathbb{R}$ に対して関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がとる値が
$$f(x) = 2x^3 + \frac{1}{5}x - 8$$
であるならば，f は次数 3 の多項式関数です．
- 多項式関数は，連続な関数です．

補間多項式 (1/2)

- $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ を相異なる数とし，$y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ を数とします．このとき，条件
$$f(x_1) = y_1\,,\ f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_{n+1}) = y_{n+1}$$
を満たす多項式で次数が n 次以下のものが一意に存在します．

- $n = 2$ の場合の具体例として，
$$x_1 = -2\,,\quad x_2 = 1\,,\quad x_3 = 3\,,$$
$$y_1 = 12\,,\quad y_2 = 0\,,\quad y_3 = 2$$
を考えてみます．これは，2 次関数のグラフ $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ が点 $(-2, 12), (1, 0), (3, 2)$ を通るように係数 a_0, a_1, a_2 の値を決定する問題とみなせます．それぞれの点の座標を代入することで，線形方程式系
$$\begin{aligned} 4a_2 - 2a_1 + a_0 &= 12\,, \\ a_2 + a_1 + a_0 &= 0\,, \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 2 \end{aligned}$$
が得られます．これを解くと $a_2 = 1$, $a_1 = -3$, $a_0 = 2$ ですので，求める 2 次の多項式は $x^2 - 3x + 2$ です．

補間多項式 (2/2)

- 一般の n の場合も，同様に考えることができます.
  - つまり，求めたい多項式を
    $$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
    とおくと，条件
    $$f(x_1) = y_1 \,,\, f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_{n+1}) = y_{n+1}$$
    は線形方程式系
    $$\begin{aligned} x_1^n a_n + x_1^{n-1} a_{n-1} + \cdots + x_1 a_1 + a_0 &= y_1, \\ x_2^n a_n + x_2^{n-1} a_{n-1} + \cdots + x_2 a_1 + a_0 &= y_2, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{n+1}^n a_n + x_{n+1}^{n-1} a_{n-1} + \cdots + x_{n+1} a_1 + a_0 &= y_{n+1} \end{aligned}$$
    で書けます．これを解くことで，求める多項式が得られます.
- このようにして得られる多項式を，補間多項式とよびます.

ラグランジュ補間多項式

- 2 次関数
$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$
が点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を通ることは，容易に確かめられます．補間多項式の一意性からこれが 2 次の補間多項式の公式であることがわかりますが，これを 2 次のラグランジュ補間多項式とよびます．

- 一般の n に対するラグランジュ補間多項式は，次のように与えられます．数 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ が相異なるとき，条件
$$f(x_1) = y_1 , f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_{n+1}) = y_{n+1}$$
を満たす多項式で次数が n 次以下のものは
$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_i) \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)}$$
と表せます．ただし，p_i は
$$p_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1})}{(x-x_i)}$$
で定義される多項式関数です．

指数とは

- 累乗（または，べき）とは，同じ数や文字を，何回か掛け合わせたものです.
  - 2^3 は，2 を 3 回かけたもの：$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
  - 2^4 は，2 を 4 回かけたもの：$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
  - y^3 は，y を 3 回かけたもの：$y^3 = y \times y \times y$.
- 右肩にのっている 3 や 4 を,（累乗の）指数とよびます.

指数は どんなときに使われるでしょうか

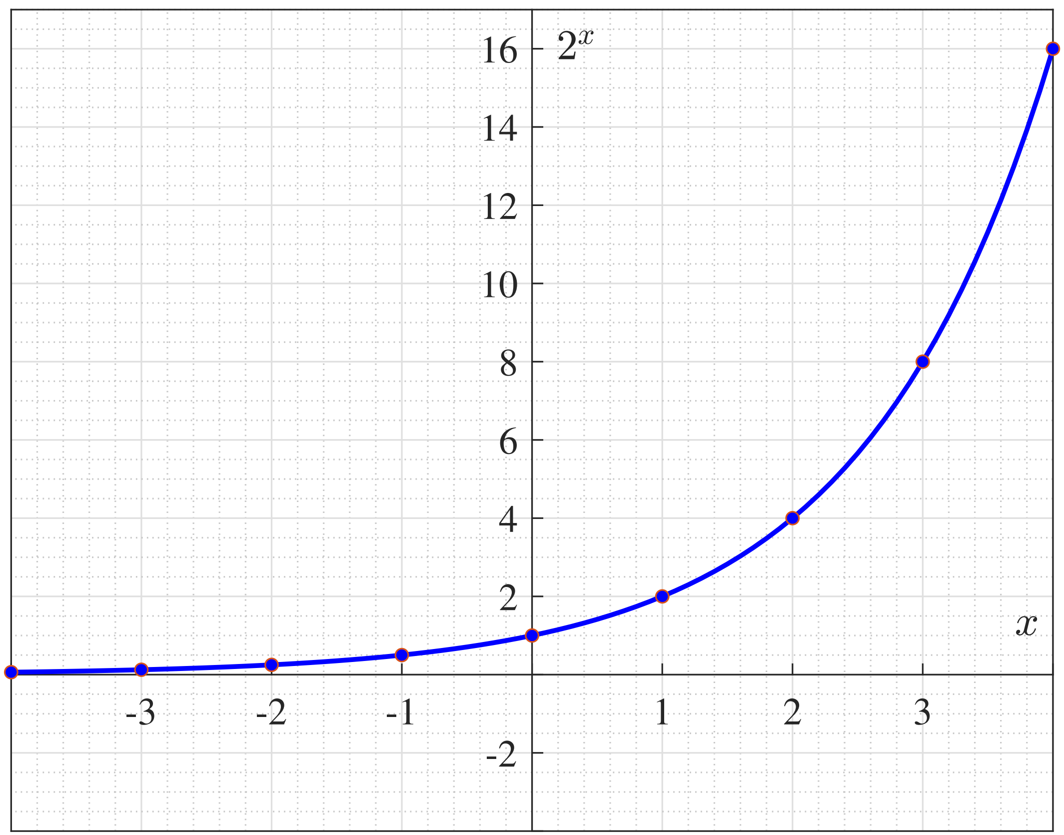
- 大きな数を表すとき
  - 例： 地球から太陽までの距離は，およそ
$$149600000000\,\mathrm{m} = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}\,.$$
- 小さな数を表すとき
  - 例： 水素の原子核の直径は，およそ
$$0.00000000000000175\,\mathrm{m} = 1.75 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}\,.$$
- 位取り（n 進法）
  - 例： 2 進法での $(110.01)_2$ は，10 進法の $2^2 + 2^1 + 2^{-2} = 6.25\,.$
- 有効数字
  - 例： 1.00×10^4 は有効数字 3 桁，1.0000×10^4 は有効数字 5 桁.

指数に関する諸公式

- 正の数 a, b と，実数 p, q に対して，
  - $a^{p+q} = a^p a^q$.
  - $a^{pq} = (a^p)^q$.　　　　　　例： $a^{2p} = a^{p+p} = a^p a^p = (a^p)^2$.
  - $(ab)^p = a^p b^p$.
- したがって，
  - $a^p = a^{p+0} = a^p a^0$ より，$a^0 = 1$.
  - $1 = a^{p-p} = a^p a^{-p}$ より，$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$.
  - $a = (a^{\frac{1}{p}})^p$ より，$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$.
  - 同様に，$a^q = (a^{\frac{q}{p}})^p$ より，$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$.
- 無理数 p に対する a^p の定義は，あまり容易ではありません（高校数学では，有理数乗の極限として理解します）.

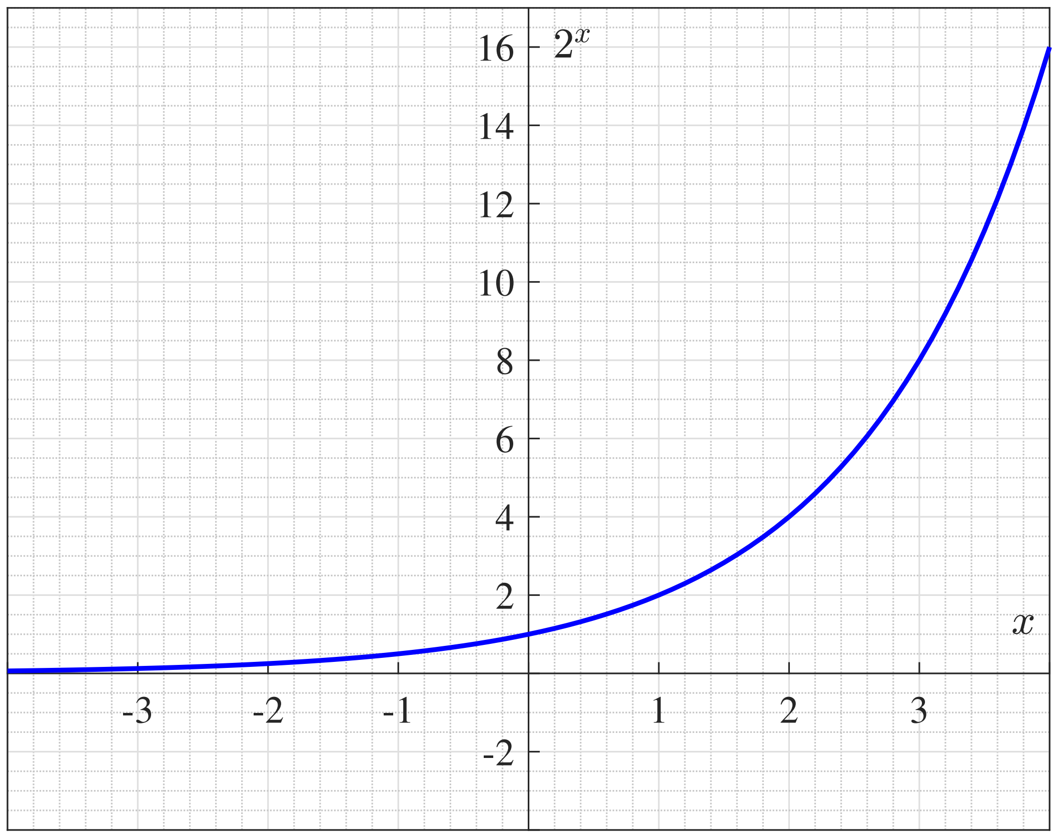
指数関数とそのグラフ (1/6)

- 2^x（x は実数）というように，2 を何回かけるかという回数（指数）を連続的に変化させます.
  - この $f(x) = 2^x$ のことを，2 を底（てい）とする指数関数とよびます.



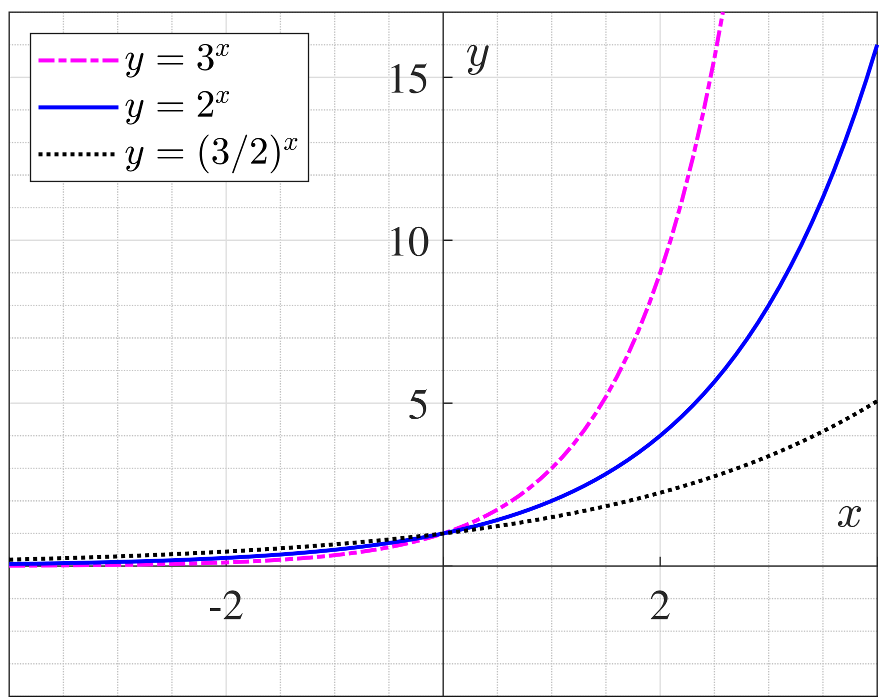
指数関数とそのグラフ (2/6)

- 一般に，正の数 a が与えられたとき，
  a^x のことを「a を底とする指数関数」とよびます．
  - $a > 1$ なら，a^x は単調増加です．



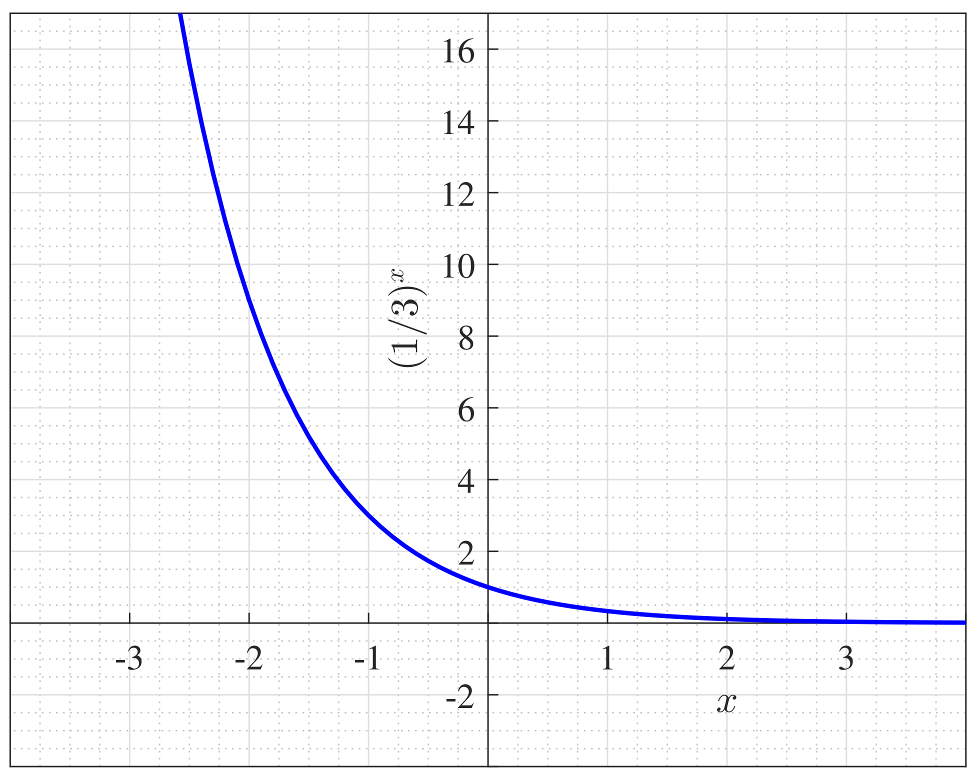
指数関数とそのグラフ (3/6)

- 底が $a > 1$ なら，a^x は単調増加で，x が大きくなるにつれて急激に増加します.
- x が小さくなるにつれて 0 に近づきます（常に正）.
  - x が正のとき，$a > b$ なら $a^x > b^x$.
  - x が負のとき，$a > b$ なら $a^x < b^x$.



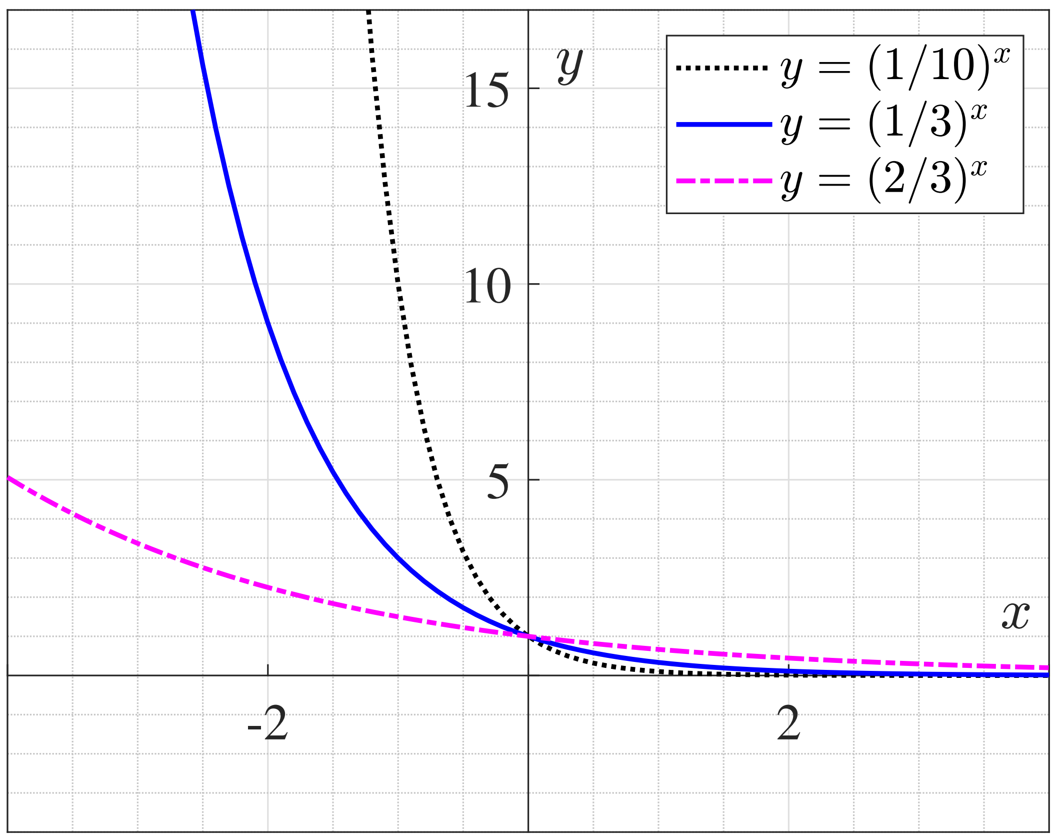
指数関数とそのグラフ (4/6)

- 底が $0 < a < 1$ なら，a^x は単調減少で，x が大きくなると 0 に近づきます.
- 常に正の値をとります.
- x が小さくなるにつれて急激に増加.



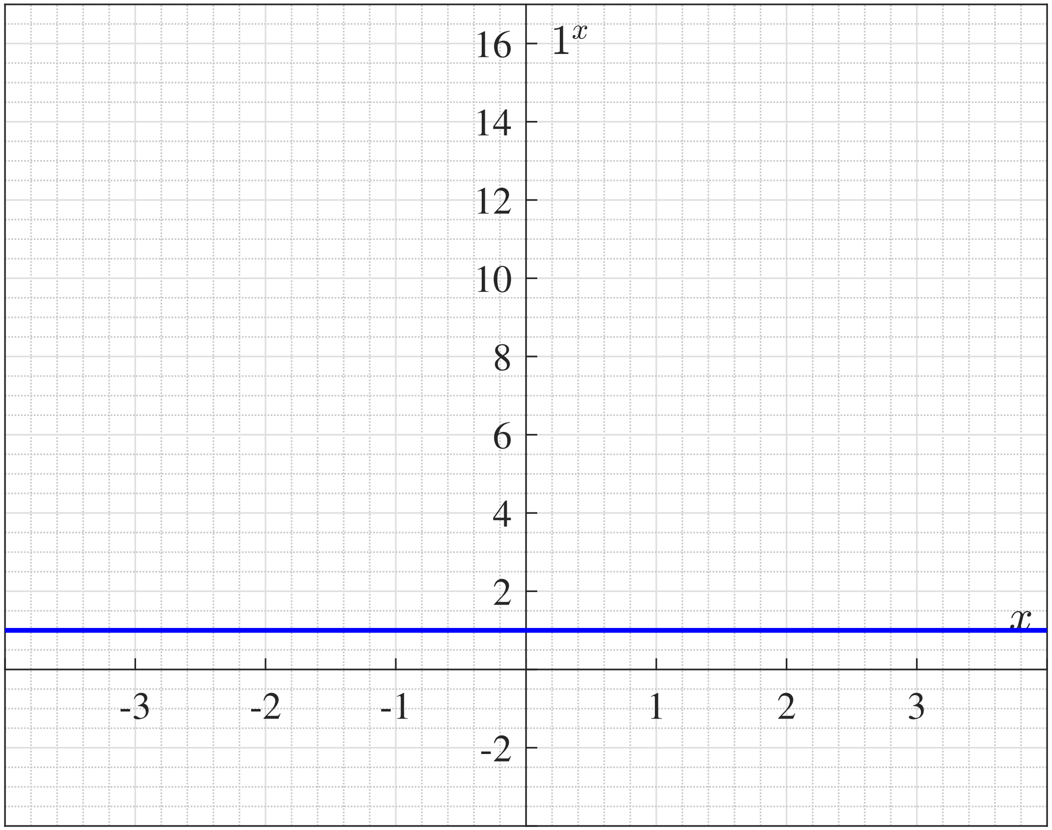
指数関数とそのグラフ (5/6)

- 底が $0 < a < 1$ なら，a^x は単調減少.
  - x が正のとき，$a > b$ なら $a^x > b^x$.
  - x が負のとき，$a > b$ なら $a^x < b^x$.



指数関数とそのグラフ (6/6)

- 底が $a = 1$ なら，a^x は恒等的に 1 です.
- そこで，以下では，$a \neq 1$ とします.



ネイピア数を底とする指数関数

- ネイピア数（自然対数の底）$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. （➪ スライド 116）

（注：「対数」とは何かについては，このあと扱います）

（注：記号 $\lim_{n\to\infty}$ の定義は，スライド 101）

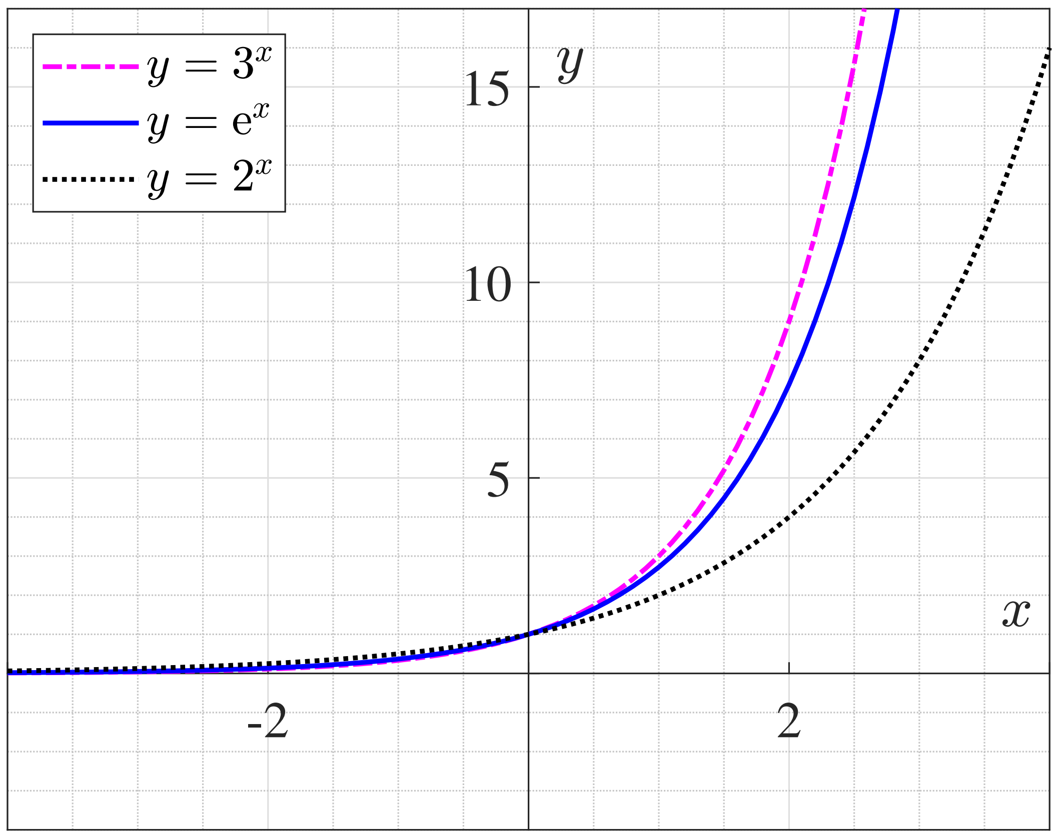
  - 無理数（つまり，整数の比では表せない実数）であり，$e = 2.71828\cdots$.

- e^x のことを，$\exp(x)$ とも書きます.
  - （ある意味で）一番基本的な指数関数

（注：「基本的」の意味は，スライド 112 で明らかになります）

ネイピア数を底とする指数関数のグラフ

- x が正のとき，$2^x < e^x < 3^x$.　　（$2 < e < 3$ なので）
- x が負のとき，$2^x > e^x > 3^x$.



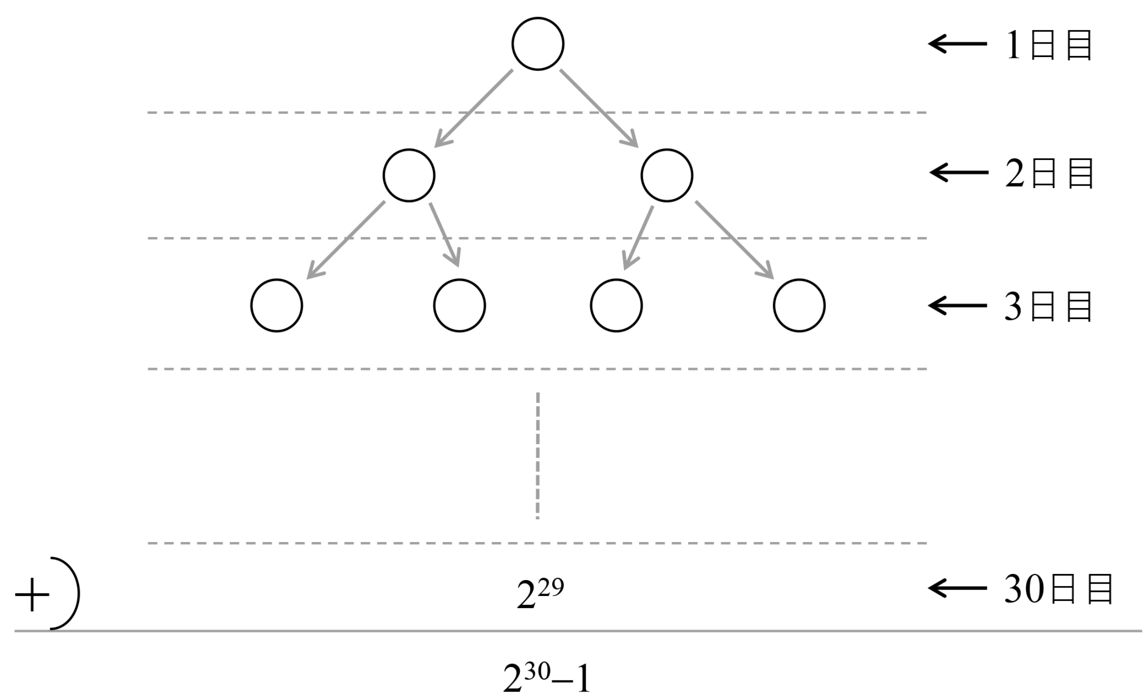
指数関数は どういうところに現れるでしょうか (1/3)

- 等比級数
  - 初項 a, 項比 r として，$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{x-1}$.
    - 正月にねずみの番(つがい)が，雌雄同数の子 12 匹生むとします（全部で 14 匹となる）．2 月には，親と子が一対あたり 12 匹生んで，全部で 98 匹になります．このように，月に一度ずつ，すべての番が 12 匹ずつを生むとすると，12 月末には全部で何匹になるでしょうか．
      $\to a = 2, r = 7, x = 12,$
      つまり，$2, 14, 98, 686, 4802, 33614, \ldots, 3954653486.$

指数関数は どういうところに現れるでしょうか (2/3)

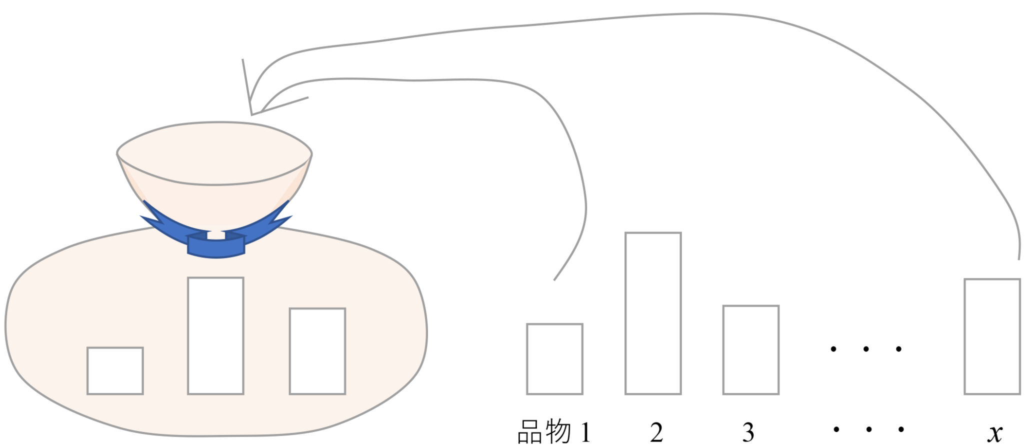
- 等比級数の和（いわゆる「ねずみ算」）
  - $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{x-1} = \dfrac{a}{r-1} r^x - \dfrac{a}{r-1}$.
    - 1 日目にお小遣いを 1 円もらい，2 日目はその 2 倍の 2 円，3 日めには前の日の 2 倍の 4 円をもらうとします．このように，前の日の 2 倍の金額をもらうとすると，30 日目には全部でいくらもらったことになるでしょうか．

      $\to a = 1, r = 2, x = 30.$



指数関数は どういうところに現れるでしょうか (3/3)

- 組合せ
  - 例として，ナップサック問題（➪ 1-4-7 最適化概論）:
    - 品物が x 個あり，いくつかを選んで 1 つのナップサックに詰めるとします．それぞれの品物には，重量と価格が与えられています．ナップサックには重量制限があり，詰め込んだ品物の重量の和がその制限を超えてはいけません．このとき，ナップサックの中の品物の価格の和が最大になるように，詰める品物を選びます．
    - それぞれの品物をナップサックに入れるか入れないかを決める問題ですので，解の候補は全部で 2^x 個あります．
      $\rightarrow$ x が少し増えると，解の候補を列挙して解くことは現実的には不可能です．



対数関数の定義

- 対数関数は，指数関数の逆関数です.
  - 具体例：

$$
\begin{array}{ccc}
10^0 = 1 & \Leftrightarrow & \log_{10} 1 = 0 \\
10^1 = 10 & \Leftrightarrow & \log_{10} 10 = 1 \\
10^2 = 100 & \Leftrightarrow & \log_{10} 100 = 2 \\
10^5 = 100000 & \Leftrightarrow & \log_{10} 100000 = 5
\end{array}
$$

  - おおまかに言うと，$\log_{10} y$ は「y の桁数 -1」に対応する数です.
- 一般に，$y = a^x \ \Leftrightarrow\ \log_a y = x$.
  - $\log_a y$ のことを，a を底とする y の対数とよびます.
    - ただし，$y > 0, a > 0, a \neq 1$.
  - 10 を底とする対数 $\log_{10} x$ を，常用対数とよびます.

常用対数

- $y = a^x \iff \log_a y = x$　（したがって，$a^{\log_a y} = y$）
- $\log_{10} x$ は，$x = 1, 10, 100, \ldots$ に対して,「桁数 -1」でした.
- x が一般の数のとき,
  - 例：$\log_{10} 2000 = ?$
    - $2000 = 10^3 \times 2$（4 桁）なので，$3 < \log_{10} 2000 < 4$.
    - $\log_{10} 2000 = \log_{10}(10^3 \times 10^{\log_{10} 2}) = \log_{10} 10^{3+\log_{10} 2} = 3 + \log_{10} 2$.
    - $10^{1/4} = \sqrt[4]{10} \simeq 1.78$ と $10^{1/3} = \sqrt[3]{10} \simeq 2.15$ から見当をつけることができます.
      $10^{1/4} < 2 < 10^{1/3}$ なので，$1/4 < \log_{10} 2 < 1/3$.
    - 実は常用対数表というものがあり，$\log_{10} 2 \simeq 0.3010$ と書いてあります.
    - したがって，$\log_{10} 2000 \simeq 3.3010$.
      - 整数部分の 3 は，やはり,「2000 の桁数 -1」を表していることがわかります.

常用対数

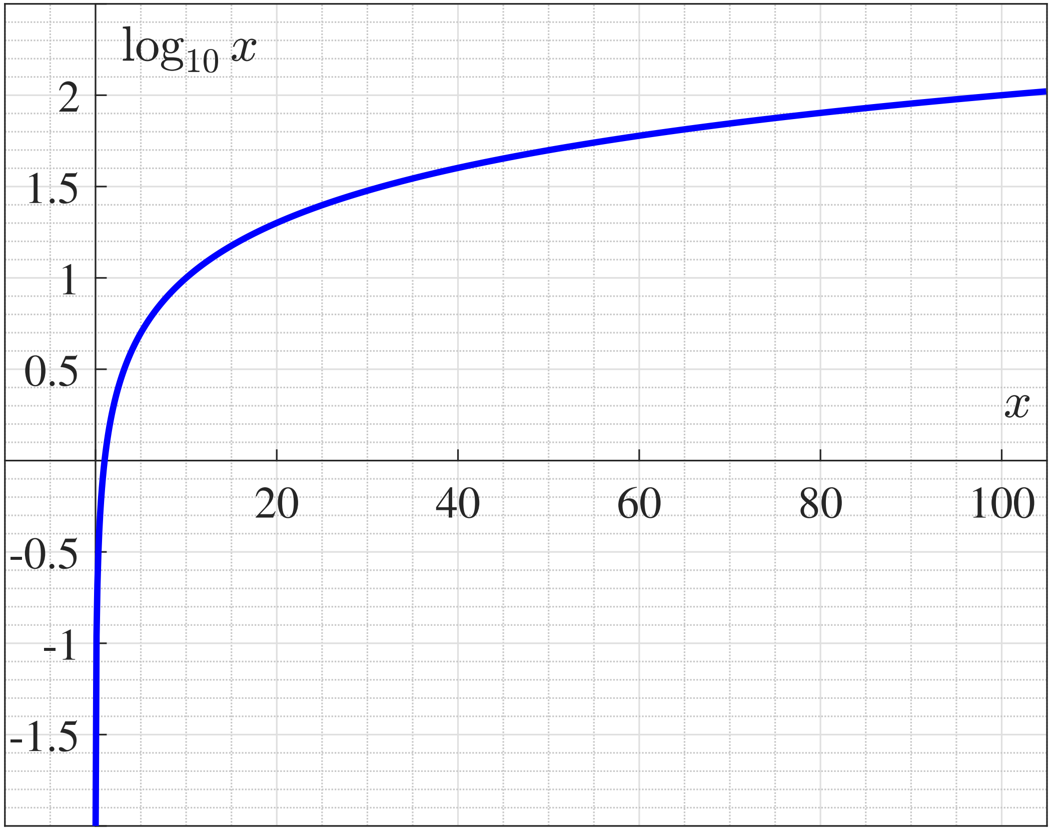
- $\log_{10} x$ は，$x = 1, 10, 100, \ldots$ に対して,「桁数 -1」.
- x が 1 より小さいとき,
  - 具体例：

$$
\begin{aligned}
10^{-1} &= 0.1 &\Leftrightarrow&& \log_{10} 0.1 &= -1\\
10^{-2} &= 0.01 &\Leftrightarrow&& \log_{10} 0.01 &= -2\\
10^{-3} &= 0.001 &\Leftrightarrow&& \log_{10} 0.001 &= -3
\end{aligned}
$$

- x が一般の数のとき,
  - 例： $\log_{10} 0.002 =?$
    - $0.002 = 10^{-3} \times 2$ なので，$-3 < \log_{10} 0.002 < -2$.
    - $\log_{10} 0.002 = \log_{10}(10^{-3} \times 10^{\log_{10} 2}) = \log_{10} 10^{-3+\log_{10} 2} = -3 + \log_{10} 2$.
    - $\log_{10} 2 \simeq 0.3010$ でしたので，$\log_{10} 0.002 \simeq -2.6990$.

常用対数のグラフ

- 定義域 $x > 0$ において，単調増加です.
- x が大きくなるにつれて，$\log_{10} x$ はゆるやかに増加します.
- x が 0 に近づくにつれて，$\log_{10} x$ は無限小へ（軸 $x = 0$ が漸近線）.



10 以外を底とする対数の概要：底が 2 の例

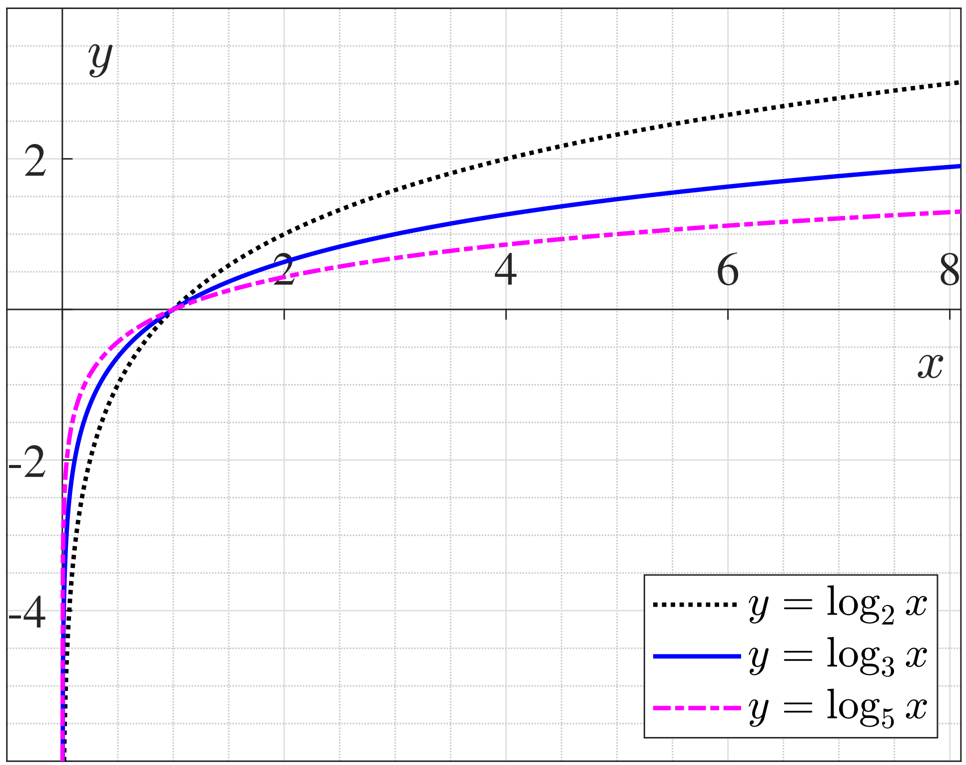
- $\log_2 x$ の具体例：

$$\begin{array}{cccc} 2^1 = 2 & \text{2 進法で } (10)_2 & \Leftrightarrow & \log_2 2 = 1 \\ 2^2 = 4 & \text{2 進法で } (100)_2 & \Leftrightarrow & \log_2 4 = 2 \\ 2^3 = 8 & \text{2 進法で } (1000)_2 & \Leftrightarrow & \log_2 8 = 3 \\ 2^4 = 16 & \text{2 進法で } (10000)_2 & \Leftrightarrow & \log_2 16 = 4 \end{array}$$

- つまり，$\log_2 x$ は「x の 2 進法での桁数 -1」に対応します.
- x が一般の数のとき，
  - 例： $\log_2 5 = ?$
    - $5 = 2^2 + 1$ なので，$2 < \log_2 5 < 3$.
    - このあと具体的な数値を求めるには，発展的な内容を必要としますので，ひとまずこの程度の大雑把な理解でとどめておきましょう.
- 一般に，$\log_a x$ は,「x の a 進法での桁数 -1」に対応するような数です.
  - x が大きいほど，桁数の概数 $\log_a x$ は大.
  - a が大きいほど，桁数の概数 $\log_a x$ は小.

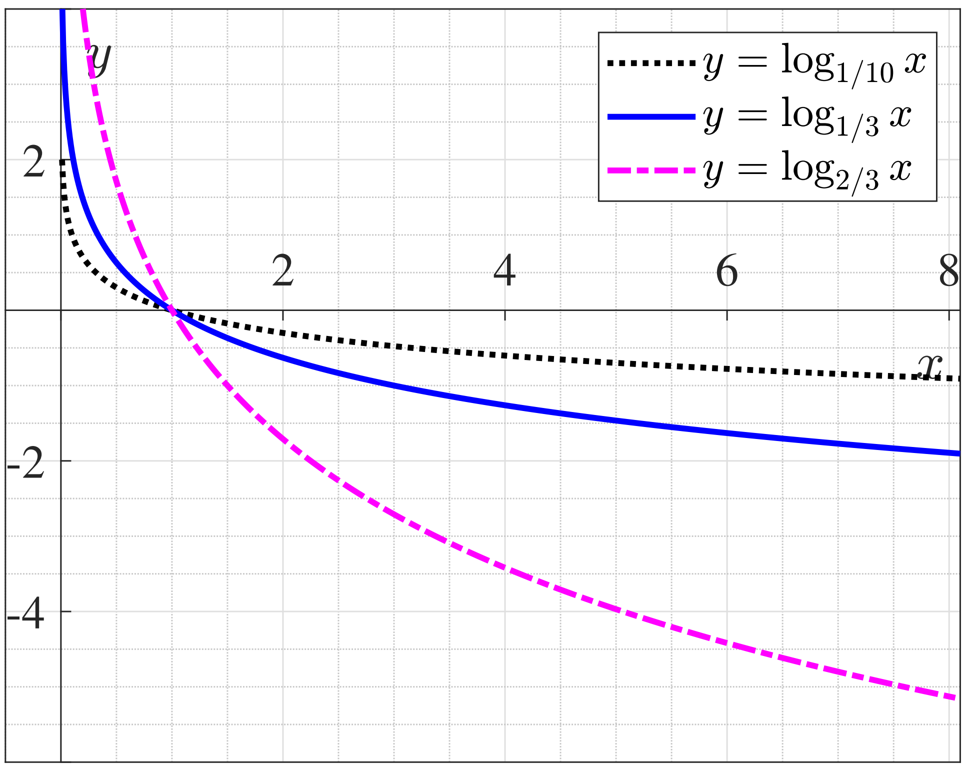
対数関数のグラフ (1/2)

- 底が $a > 1$ なら，$\log_a x$ は単調増加です.
  - $x > 1$ のとき，$a > b$ なら $\log_a x < \log_b x$.
  - $0 < x < 1$ のとき，$a > b$ なら $\log_a x > \log_b x$.



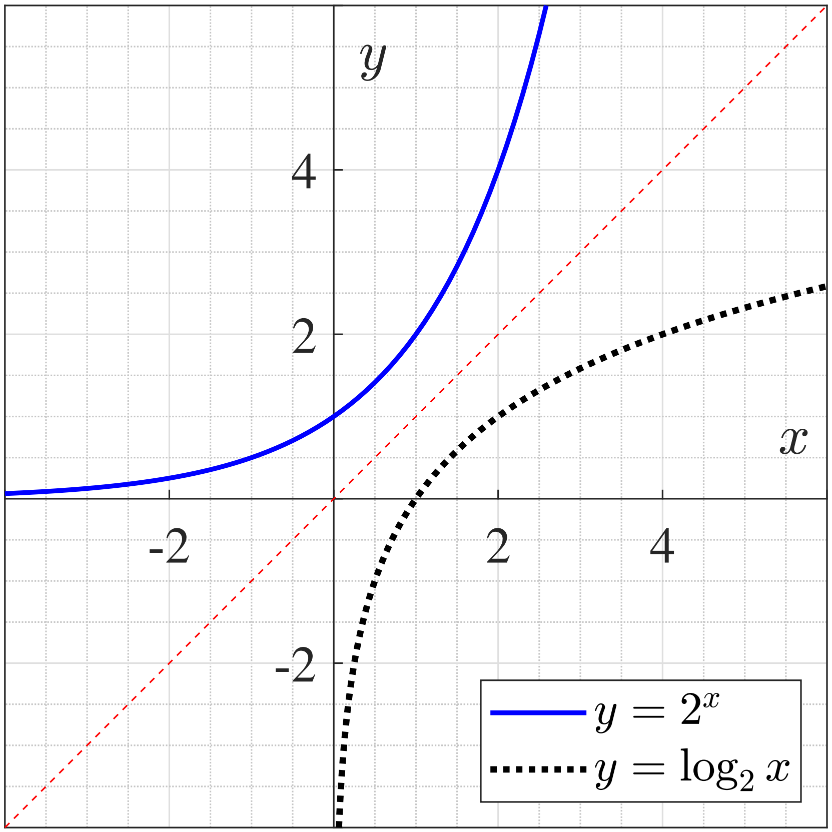
対数関数のグラフ (2/2)

- 底が $0 < a < 1$ なら，$\log_a x$ は単調減少です.
  - $x > 1$ のとき，$a > b$ なら $\log_a x < \log_b x$.
  - $0 < x < 1$ のとき，$a > b$ なら $\log_a x > \log_b x$.



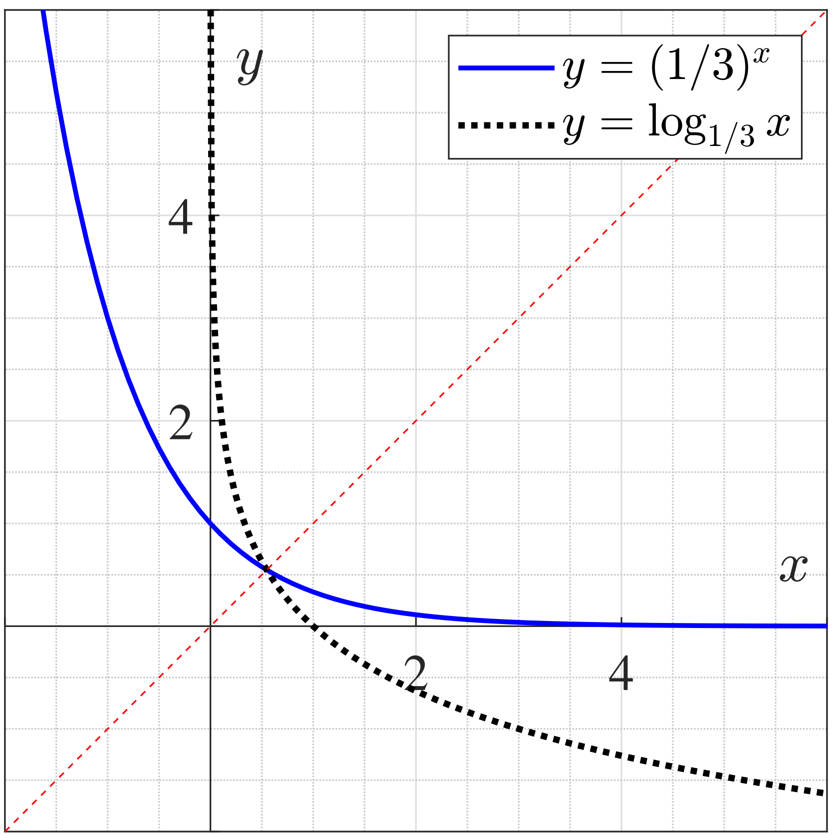
指数関数と対数関数のグラフ (1/2)

- $y = a^x$ のグラフと $y = \log_a x$ のグラフは，$y = x$ に関して対称です.
（互いに逆関数の関係にあるという事実によります）
  - 底が $a > 1$ のとき：



指数関数と対数関数のグラフ (2/2)

- $y = a^x$ のグラフと $y = \log_a x$ のグラフは，$y = x$ に関して対称です.
（互いに逆関数の関係にあるという事実によります）
  - 底が $0 < a < 1$ のとき：



対数の基本的な公式

1. $\log_a y^n = n \log_a y$.
（「n 乗して対数をとる」は,「対数をとってから n 倍」と同じ）

- ∵ 対数の定義　“$y = a^x \iff \log_a y = x$”　より,
$y^n = a^{nx} \iff \log_a y^n = nx = n \log_a y$.

2. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.　　（底の変換）

- ∵ $x = a^{\log_a x}$ の両辺に対して b を底とする対数を考えると,
$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a$.

（注）記号 ∵ は,「なぜならば」を意味します.

対数の基本的な公式

1. $\log_a y^n = n \log_a y$.
　（「n 乗して対数をとる」は,「対数をとってから n 倍」と同じ）

- ∵ 対数の定義　“$y = a^x \iff \log_a y = x$”　より,
  $y^n = a^{nx} \iff \log_a y^n = nx = n \log_a y$.

2. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.　　（底の変換）

- ∵ $x = a^{\log_a x}$ の両辺に対して b を底とする対数を考えると,
  $\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a$.

- “$\log_2 5 = ?$” に戻ると,
  - 底の変換により，$\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$.　　（$\log_{10} 2$ は，計算済み）
  - 残るは，$\log_{10} 5 = \log_{10}(10 \times 10^{\log_{10} 2^{-1}}) = \log_{10} 10^{1+\log_{10} 2^{-1}} =$
    $1 + \log_{10} 2^{-1} = 1 - \log_{10} 2$. したがって，$\log_2 5 \simeq \dfrac{1 - 0.301}{0.301} \simeq 2.322$.

自然対数

- ネイピア数 e を底とする対数 $\log_e x$ のこと.
  - $e = 2.71828\cdots$ でした.
  - $\log_e x$ のことを，単に $\log x$ とも書きます.
    - ただし，工学では，常用対数 $\log_{10} x$ のことを $\log x$ と書き，自然対数 $\log_e x$ のことを $\ln x$ と書くことがあります.

対数の性質のまとめ

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
- $\log_a(x^z) = z\log_a x$.
- $\log_a 1 = 0$.
- $\log_a a = 1$.
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.
- 以上は，指数関数の性質から，自然に導かれます.
  - 既に，これまでのスライドで，本質的なところは確認しました.

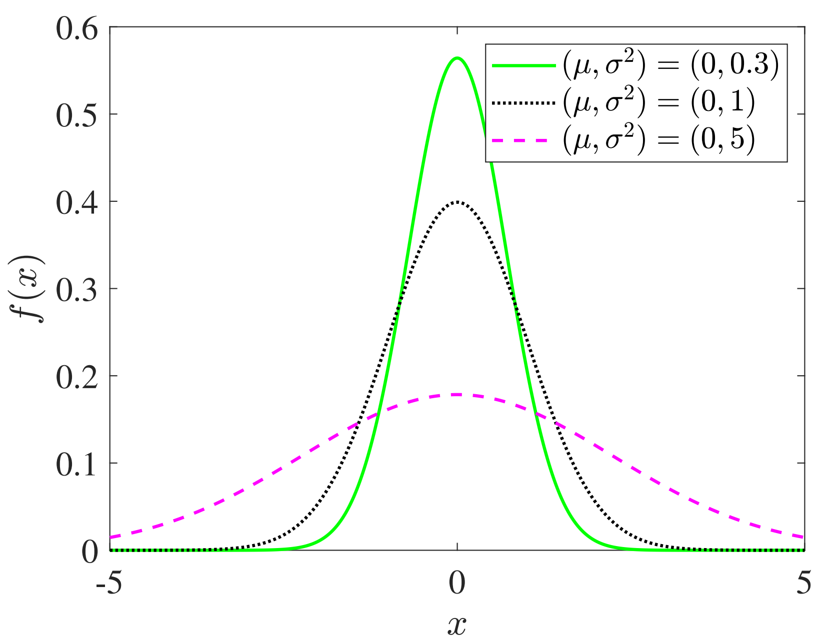
指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (1/7)

- データの対数変換
  - 株価，破壊確率，雨量などのデータは，その対数をとると，正規分布に（近く）なります.
    - 正規分布はとても扱いやすい性質をもつため，このようなデータは対数に変換してから扱うと便利です.

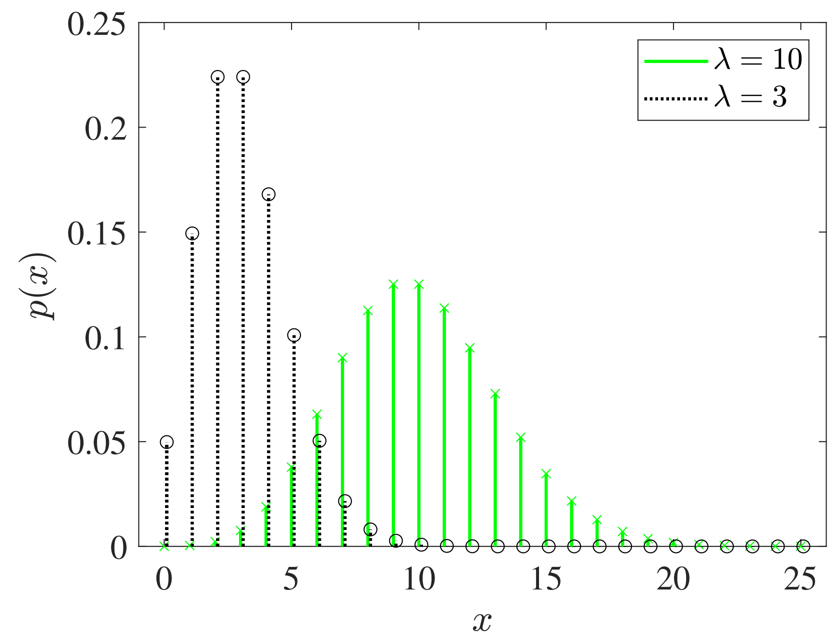
- 回帰分析における最尤推定
  - 尤度関数を最大化する際に，その自然対数を考えれば最大化が容易になることが多いです.
    - 対数関数は単調増加ですので，対数をとってから最大化しても，元の関数を最大化したときと同じ解が得られます.

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (2/7)

- 確率の分野
  - 正規分布の確率密度関数 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.
  - ポアソン分布の確率関数 $P(\{X=k\}) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ (k=0,1,2,\ldots)$.



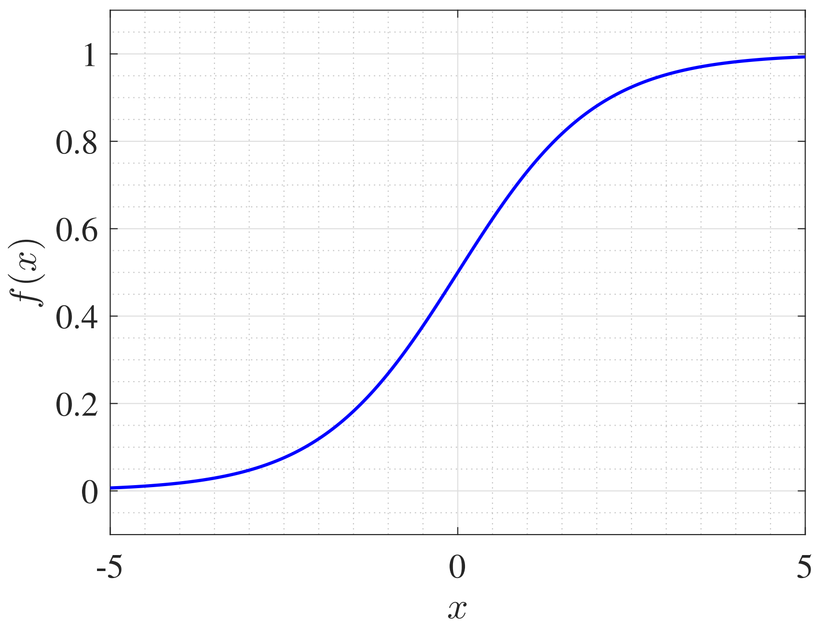
正規分布の確率密度関数



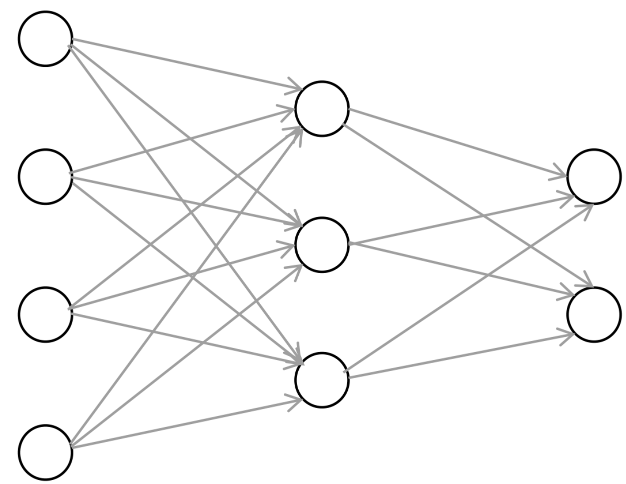
ポアソン分布の確率関数

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (3/7)

- シグモイド関数（標準ロジスティック関数）$f(x) = \dfrac{1}{1 + \exp(-x)}$.
  - ニューラルネットワーク，深層学習（➪ 3-4 深層学習の基礎と展望）.



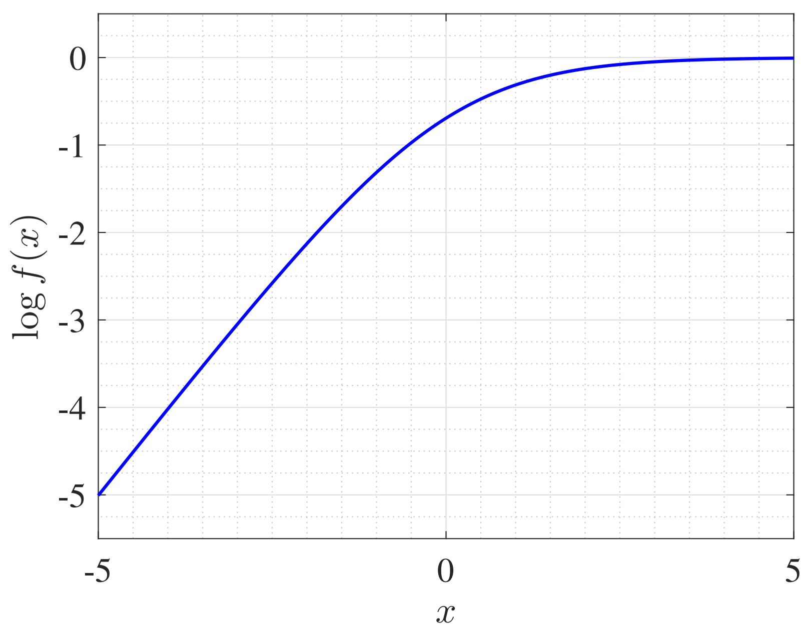
シグモイド関数



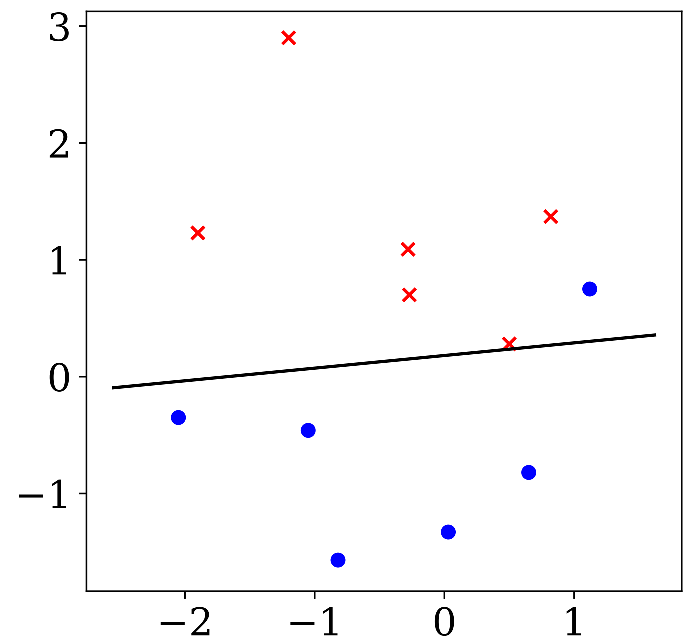
ニューラルネットワーク

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (4/7)

- シグモイド関数（標準ロジスティック関数）$f(x) = \dfrac{1}{1+\exp(-x)}$.
- $\log f(x) = -\log(1+\exp(-x))$ は，ロジスティック損失関数.
  - ロジスティック回帰分析（➪ 1-4-2 ロジスティック分析）.



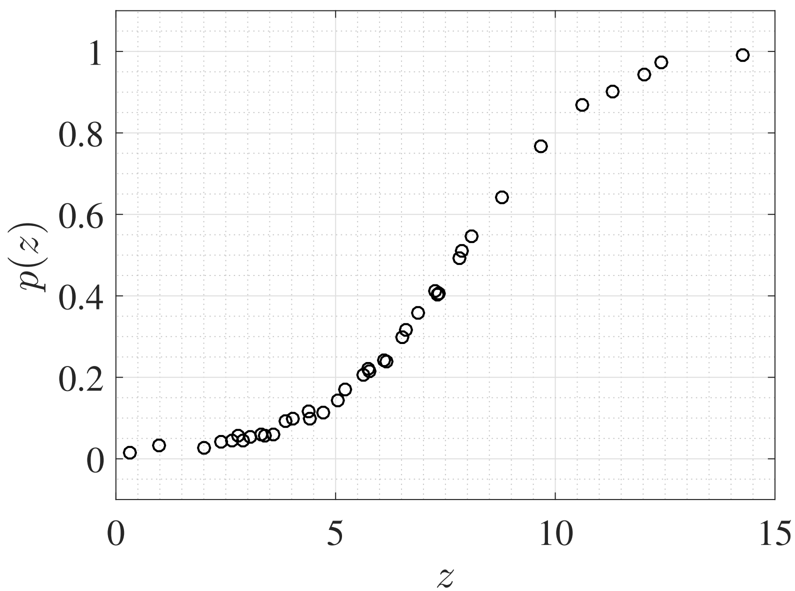
ロジスティック損失関数



ロジスティック回帰分析

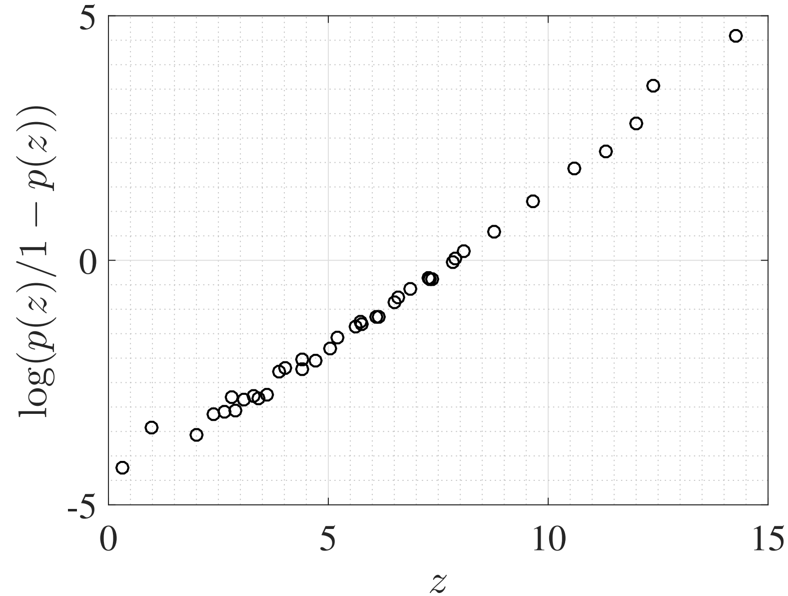
指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (5/7)

- ロジット関数 $\log\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.
  - シグモイド関数の逆関数.
  - ロジット変換（➪ 1-4-2 ロジスティック分析）.



元のデータ
（例：ある機械の使用年数 z と
故障率 $p(z)$）

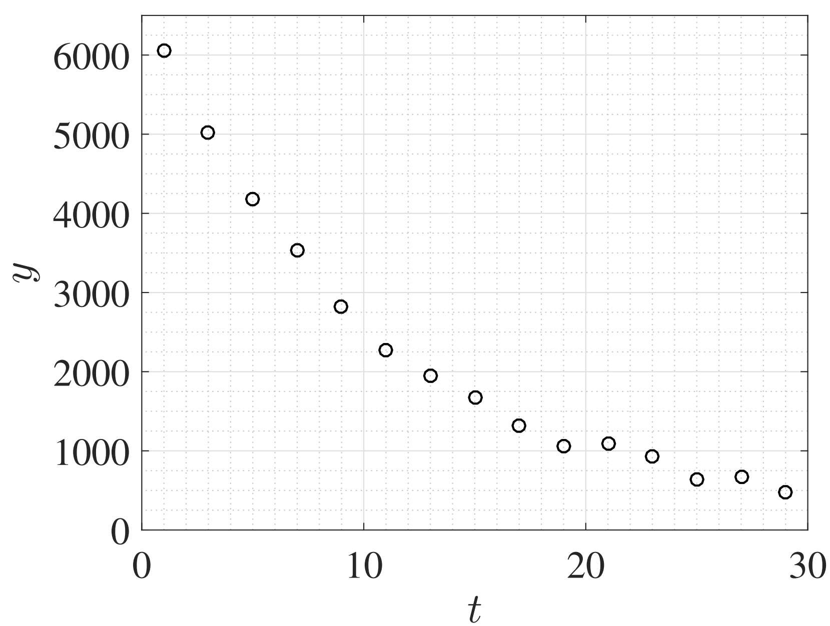
$\longrightarrow$



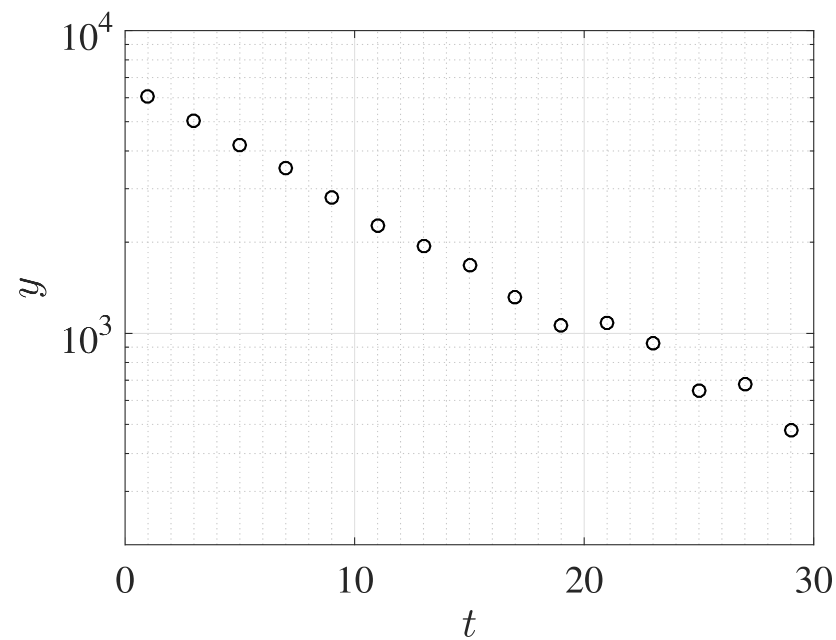
ロジット変換後のデータ

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (6/7)

- 片側対数グラフ
  - 例として，あるバクテリアは，X 線を照射すると，指数関数的に死滅します．つまり，照射時間 t におけるバクテリアの生存数 y は，$y = ae^{-bt}$ $(a, b > 0)$ と表せます.
  - $\log y = \log a - bt$ ですから，横軸を t, 縦軸を $\log y$ として生存数のデータをプロットすれば，ほぼ直線になります.



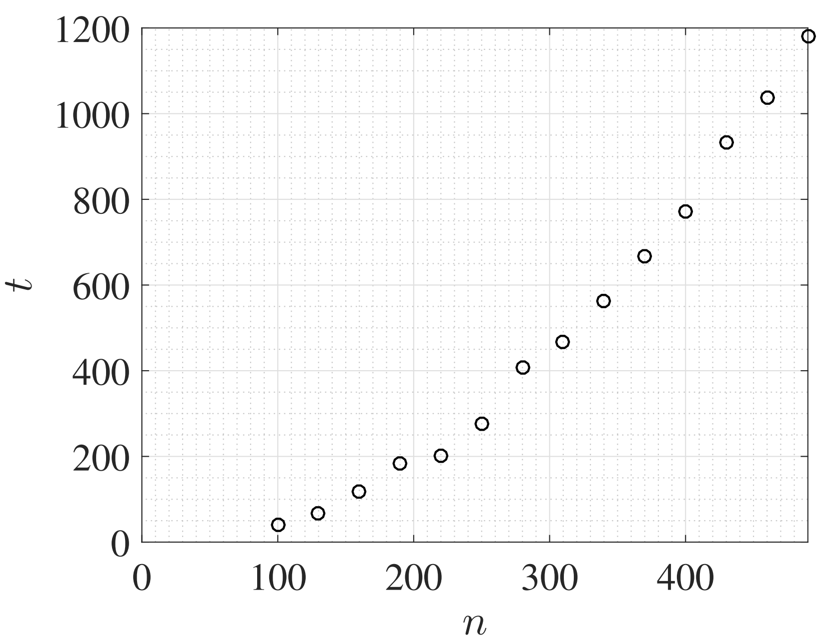
普通の軸のグラフ



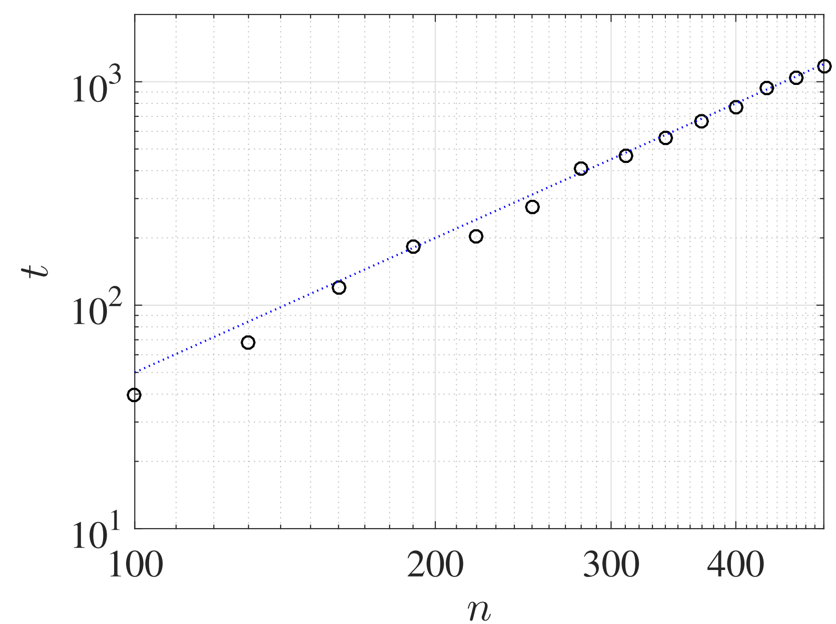
縦軸が対数軸のグラフ

指数関数や対数関数は どこで使われるでしょうか (7/7)

- 両側対数グラフ
  - 例として，計算量．計算時間 t が問題のサイズ n に対して $t \simeq n^k$ のとき，$\log t \simeq k \log n$ ですから，横軸を $\log t$，縦軸を $\log n$ として計算時間をプロットすれば，傾きから k が確認できます．



普通の軸のグラフ



横軸と縦軸が対数軸のグラフ
（点線は n^2 の定数倍のグラフ）