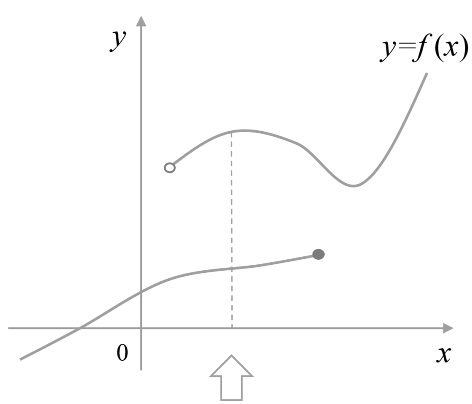
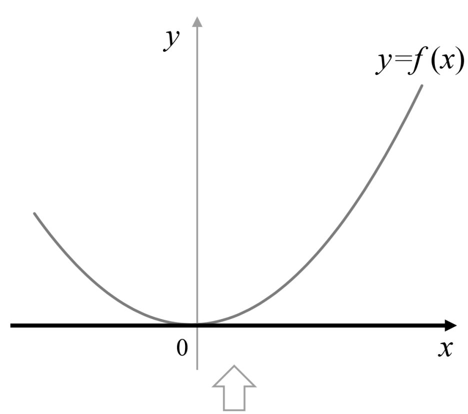
1-6-7　微分と積分

（1 変数の）関数とは

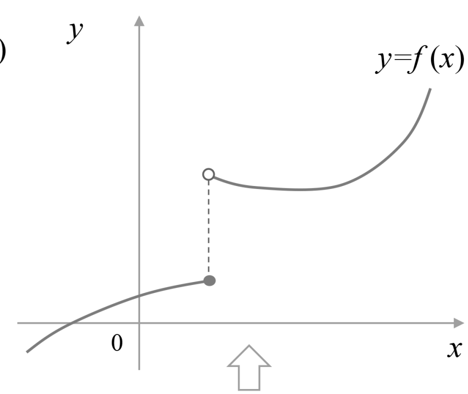
- 2 つの変数 x と y があったとき，x の値に応じて y の値が 1 つ定まるとき，y は x の関数であるといい，$y = f(x)$ のように表します.
  - 変数 x の動く範囲を，関数 f の定義域とよびます.
  - 対応する x と y の値を座標平面にプロットしていくと，関数 f のグラフが得られます.
- つまり，y 軸方向に見て，グラフが重なることがないものが，関数です.
  - また，y 軸方向に見て，グラフが「ある」範囲が，定義域です.



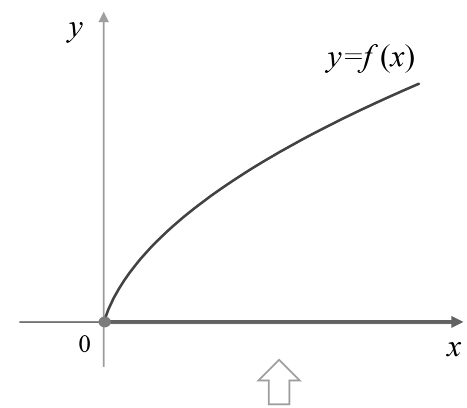
グラフが重なるので関数ではない



関数 $f(x) = x^2$
定義域は $\mathbb{R}$



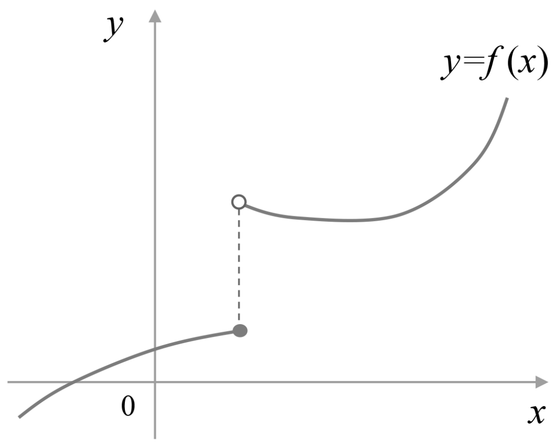
これも関数
定義域は $\mathbb{R}$



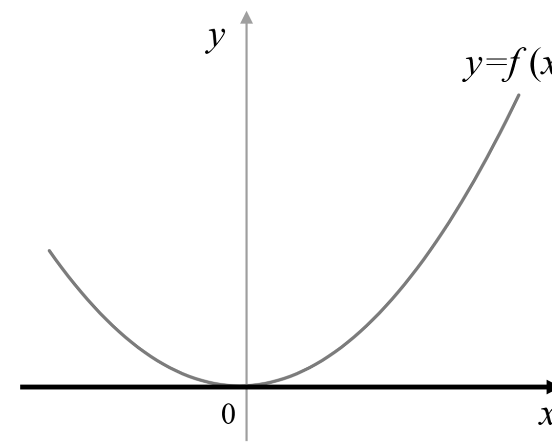
関数 $f(x) = \sqrt{x}$
定義域は $x \geqq 0$

関数の連続性

- 関数 f のグラフ $y = f(x)$ が，各点でちゃんとつながっているとき，f は連続であるといいます．
  - つまり，鉛筆で紙にグラフを描くときに紙から鉛筆を離すことなく描けるものは，連続な関数です．



関数ではあるが連続ではない例



連続な関数の例

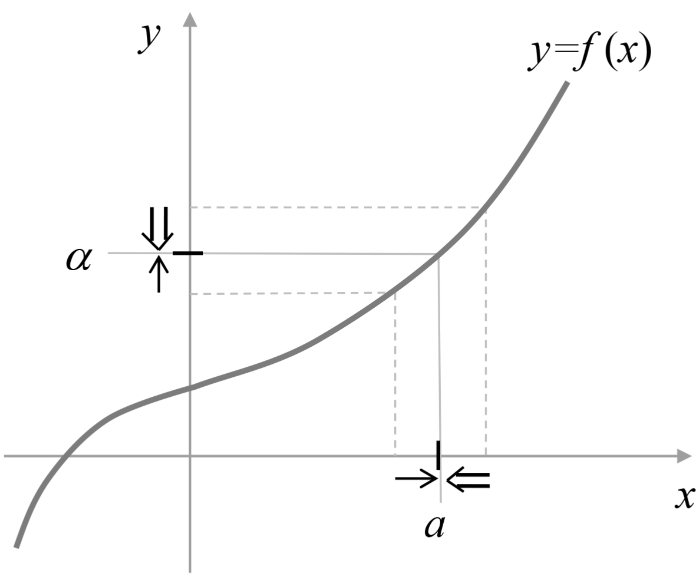
- 連続な関数の例：
  - 多項式関数，たとえば，$3x^2 - 4x + 1$, $x^6 + 2x^3 + 5$.
  - 指数関数 a^x .
  - 対数関数 $\log_a x$　（定義域は $x > 0$ で，$a > 0, a \neq 1$）．

関数の極限値

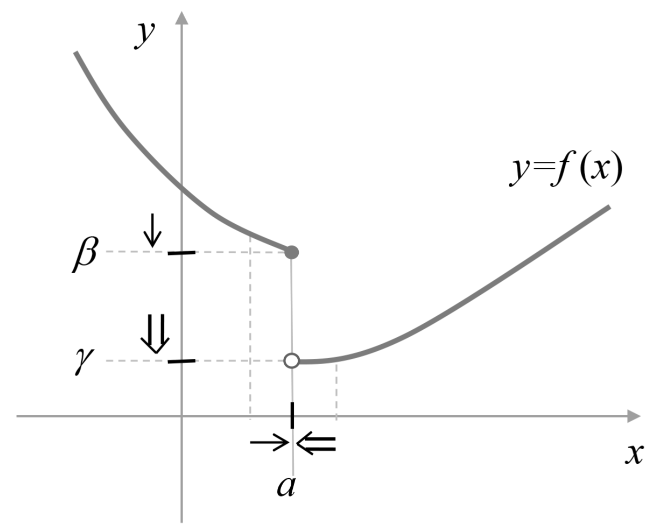
- 連続な関数 f と定数 a に対して，x を a に近づけたときに $f(x)$ がある 1 つの値 α に近づくとき，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \qquad や \qquad f(x) \to \alpha \ (x \to a)$$

と表します．α のことを，x が a に近づくときの $f(x)$ の極限値とよびます．



$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

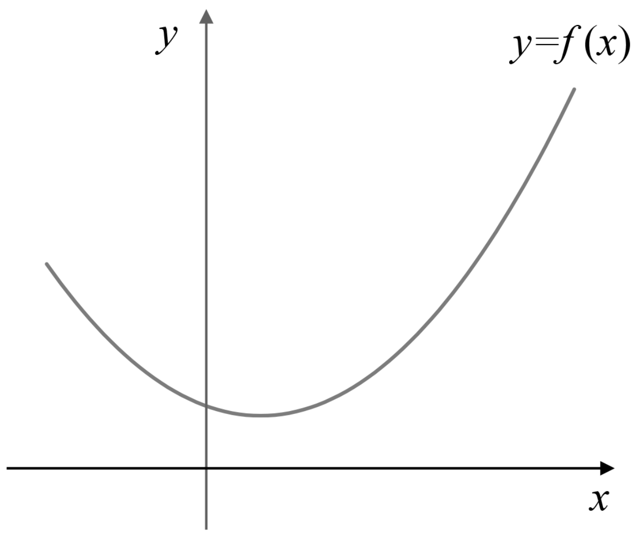


f が連続でない場合，極限値は存在するとは限りません（この例では $\beta \neq \gamma$ なので，$\lim_{x \to a} f(x)$ は存在しません）．

- f が多項式で表される関数であれば，単に，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ です．

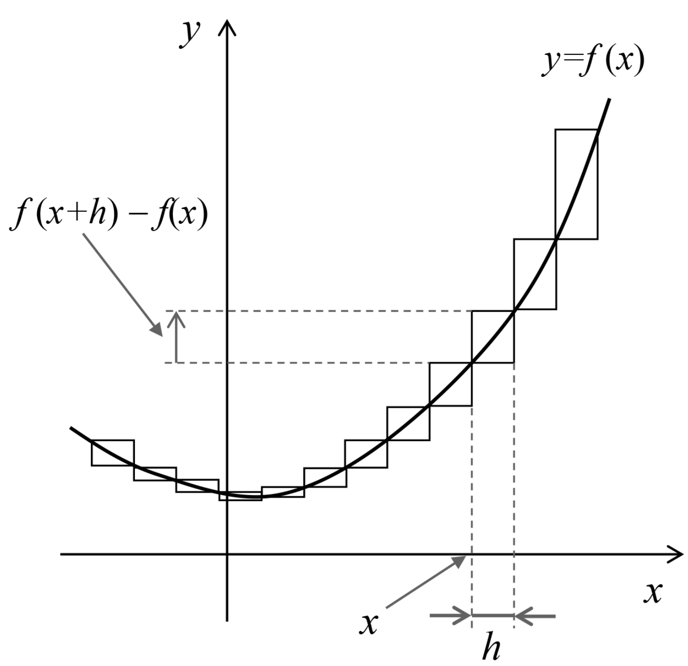
微分係数と導関数：導入

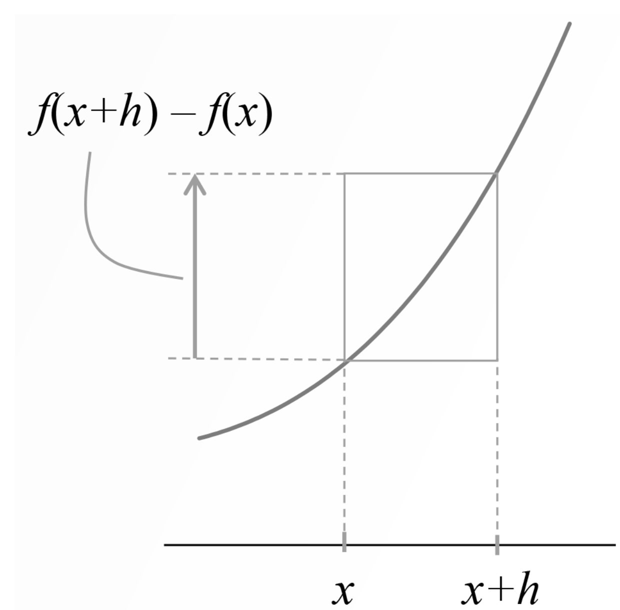
- 連続な関数のグラフ $y = f(x)$ について，その「傾き具合」を考えてみましょう.



微分係数と導関数：導入

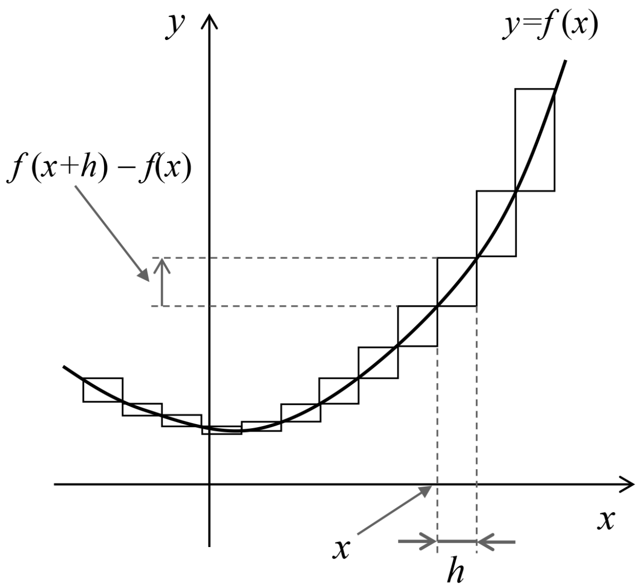
- 連続な関数のグラフ $y = f(x)$ について，その「傾き具合」を考えてみましょう.
  - そのために，まず幅 h が一定のブロックを（その高さを調整しながら）$y = f(x)$ のグラフに沿うように並べていきます.
  - この各ブロックの縦横の比（より正確には，$\dfrac{(\text{縦の長さ})}{(\text{横の長さ})}$）が，グラフの「傾き具合」に対応していることに注目しておいて下さい.



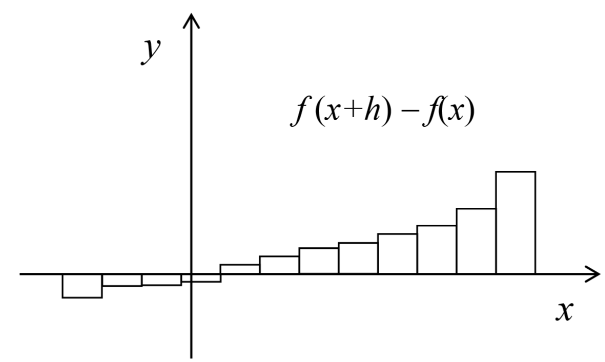


微分係数と導関数：導入

- これらのブロックをすべて x 軸上に並べます.

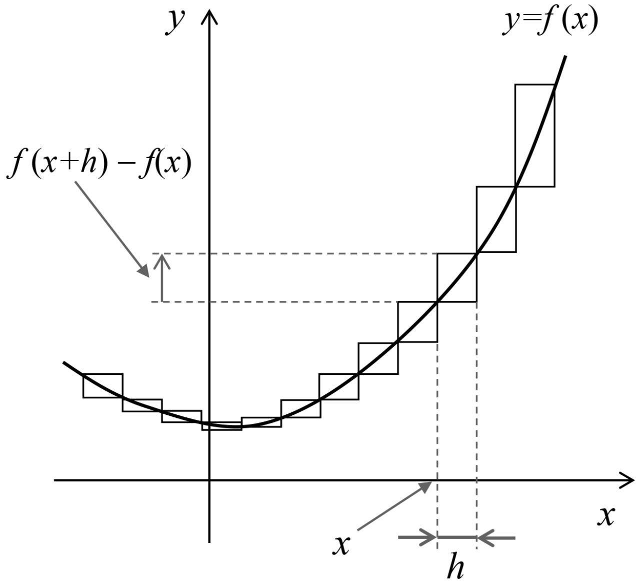


$\longrightarrow$

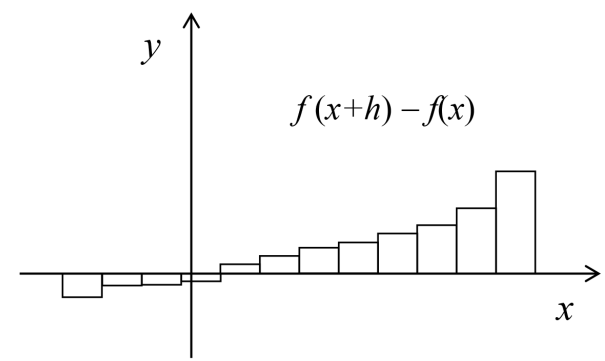


微分係数と導関数：導入

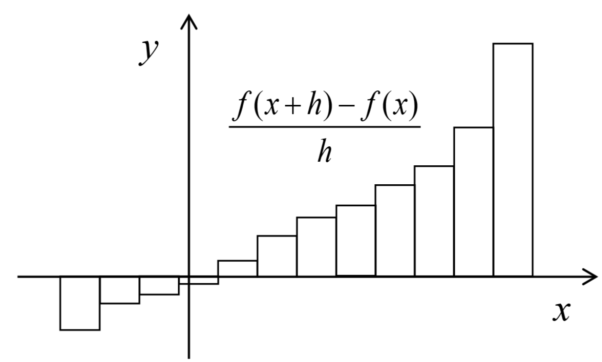
- ブロックの高さをすべて $\dfrac{1}{h}$ 倍します.



$\longrightarrow$

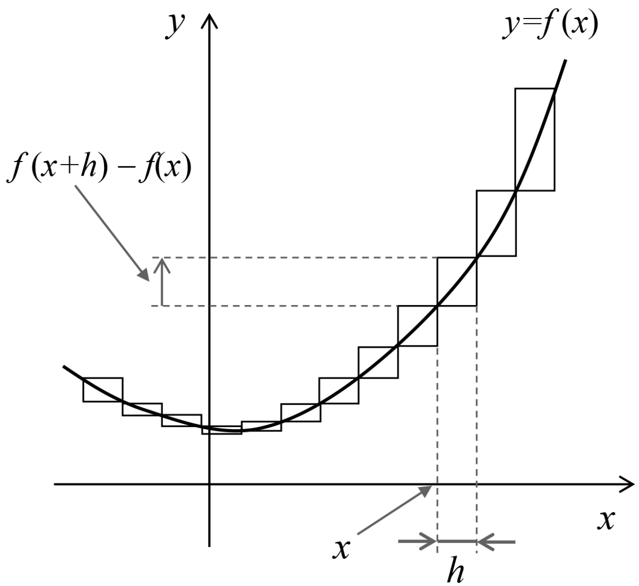


$\downarrow$（高さを $\dfrac{1}{h}$ 倍）

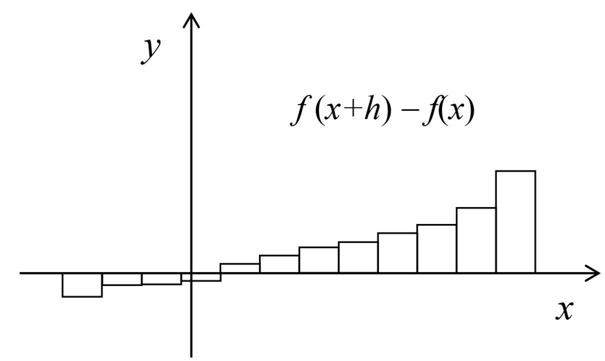


微分係数と導関数：導入

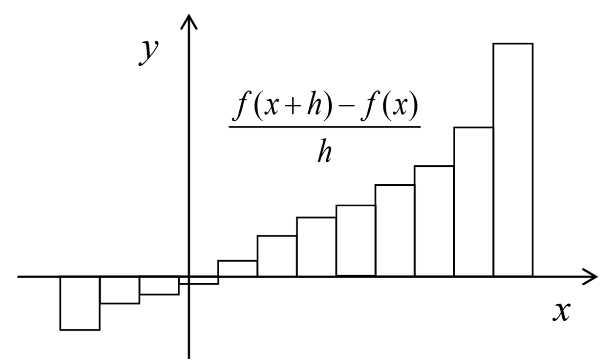
- $h \to 0$ としたときの縦軸の値を，$f'(x)$ で表します．



$\longrightarrow$

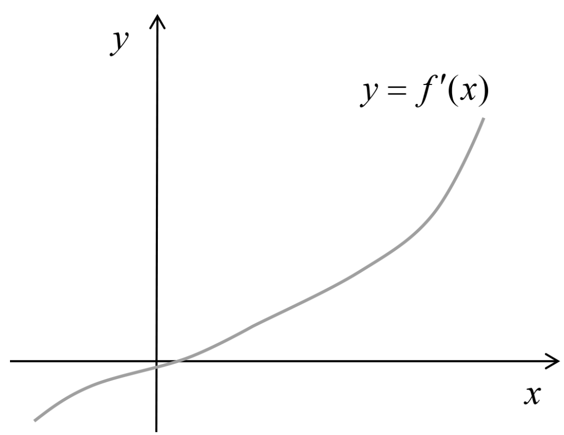


$\downarrow$ （高さを $\dfrac{1}{h}$ 倍）



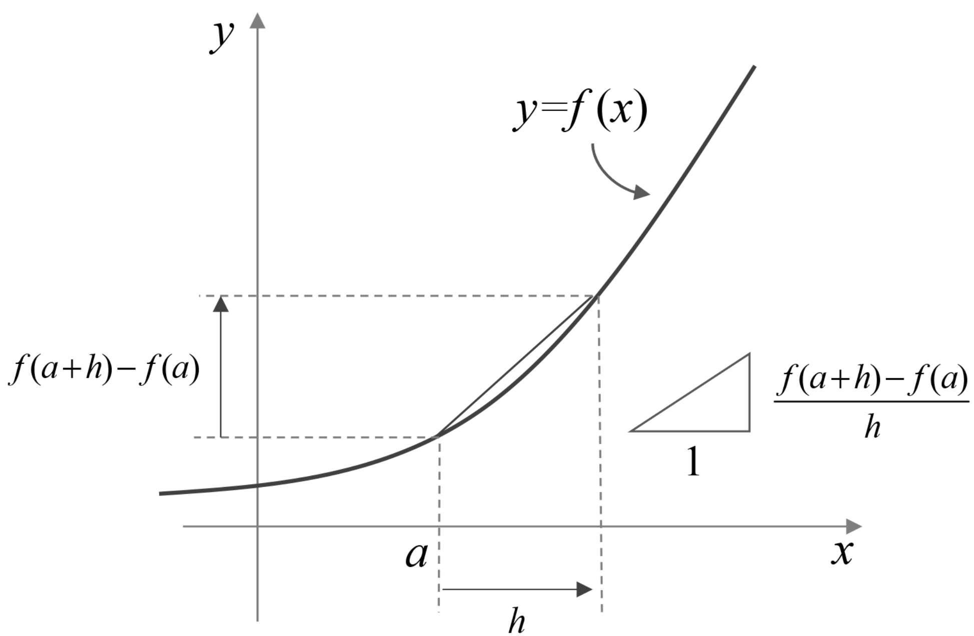
$\longleftarrow$

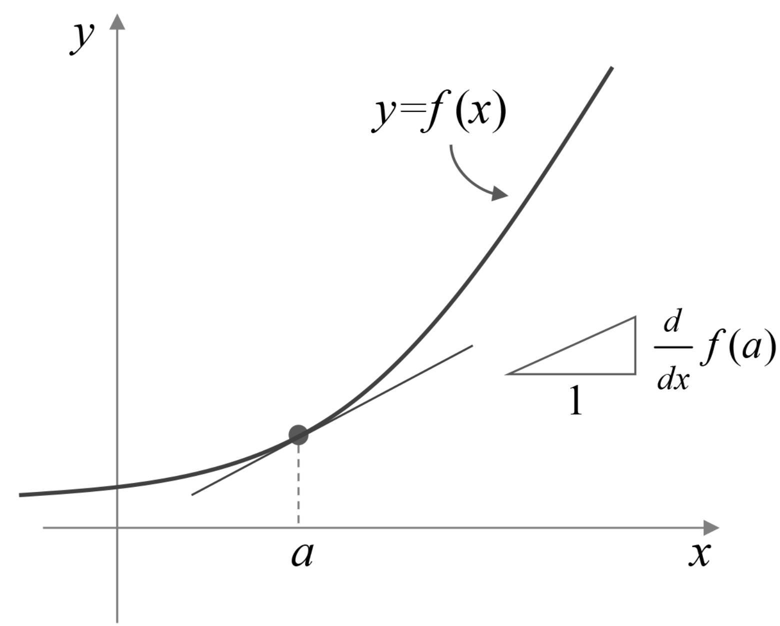
($h \to 0$ とします)



微分係数と導関数（要点）

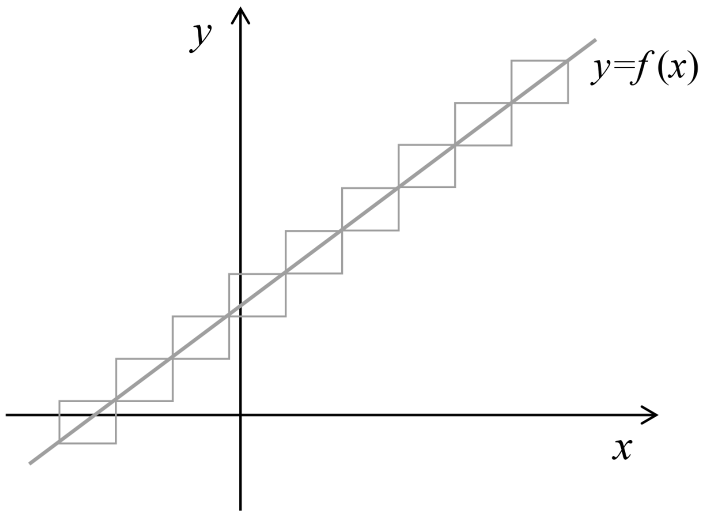
- 関数 f と点 $x=a$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を f の a における微分係数とよび，$f'(a)$ や $\dfrac{d}{dx}f(a)$ で表します.
- 関数 f' のことを，f の導関数とよびます.
- 関数の微分係数や導関数を求めることを，微分するといいます.

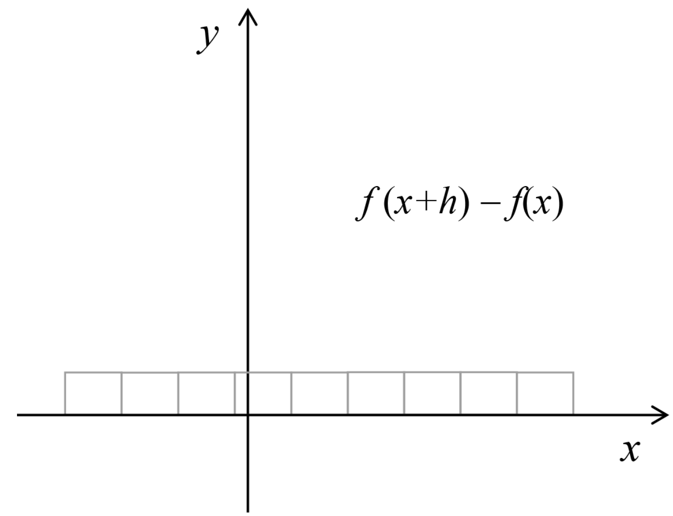




簡単な関数の微分 (1/2)

- 1 次関数の導関数は，定数関数.
  - ∵ 「幅 h のブロック」を並べると，高さが共通：





  - 実際，$f(x) = px + q$ （p と q は実数）に対して，

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ph}{h} = p\,.$$

（注）記号 ∵ は,「なぜならば」を意味します.

簡単な関数の微分 (2/2)

- ２次関数の導関数は，１次関数.
  - 基本的な場合として，$f(x) = x^2$ に対して $f'(x) = 2x$.

$$\because\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + \lim_{h\to 0} h = 2x\ .$$

- ３次関数の導関数は，２次関数.
  - 基本的な場合として，$f(x) = x^3$ に対して $f'(x) = 3x^2$.

$$\begin{aligned}\because\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= 3x^2 + \lim_{h\to 0} h(3x + h^2) = 3x^2\ .\end{aligned}$$

微分の諸公式

- $(f(x)+c)' = f'(x)$（c は実数）．
  - $\because$ 「幅 h のブロック」の高さは，c に無関係.
- $(f(x)+g(x))' = f(x)' + g(x)'$．
  - $\because$ 「幅 h のブロック」の高さが，関数値 $f(x)$ と $g(x)$ の和.
- $(\alpha f(x))' = \alpha f(x)'$（$\alpha$ は実数）．
  - $\because$ 「幅 h のブロック」の高さが，α 倍.
- $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$．　（合成関数の微分法）
  - $$\begin{aligned}\because \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} &= \lim_{h\to 0} e\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{g(x+h)-g(x)\to 0}\frac{f(g(x)+(g(x+h)-g(x)))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.\end{aligned}$$

いくつかの基本的な関数の微分 (1/2)

- 実は（説明は省きますが），実数 n に対して，$(x^n)' = nx^{n-1}$.
  - 例：$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.
  - 例：$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$.
- 実は（説明は省きますが），$(e^x)' = e^x$.
- 実は（説明は省きますが），$(\log x)' = \frac{1}{x}$.

いくつかの基本的な関数の微分 (2/2)

- 底が e 以外の指数関数や対数関数の微分は，係数が掛かります：
  - $(a^x)' = (\log a)a^x$.
    - $\because$ $k = \log a$ とおくと，$e^k = a$. したがって，$a^x = (e^k)^x = e^{kx}$. 合成関数の微分法により，$(a^x)' = ke^{kx} = (\log a)a^x$.
  - $(\log_a x)' = \dfrac{1}{\log a}\dfrac{1}{x}$.
    - $\because$ 「底の変換」$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$ を行い，両辺を微分します.
- 「微分した際に係数が掛からない」という意味で，e^x と $\log x$ は指数関数と対数関数の中でも基本的なものとみることができます.

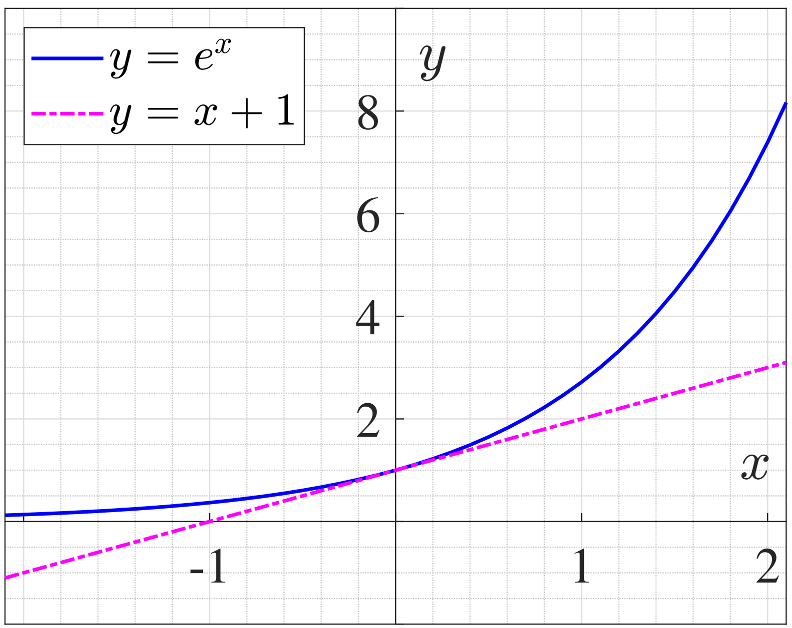
  ➪ スライド 73.

合成関数の微分法の使い方

- 公式は，$f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$ でした.
- 例： $h(x) = (3x^2+1)^4$ のとき，$h'(x) = 24x(3x^2+1)^3$.
  - $\because$ $f(s) = s^4$, $g(x) = 3x^2+1$ とおけば，$h(x) = f(g(x))$.
    ここで，f と g の微分は容易で，$f'(s) = 4s^3$, $g'(x) = 6x$,
    さらに，$f'(g(x)) = 4(3x^2+1)^3$.
    公式より，$f(g(x))' = 4(3x^2+1)^3 \cdot 6x$.
  - $h(x) = 81x^8 + 108x^6 + 54x^4 + 12x^2 + 1$ と展開してから h' を計算するより，ずっと楽です.

指数関数・対数関数と極限 (1/3)

- $f(x) = e^x$ とおくと，$f'(x) = e^x$ でしたので $f'(0) = 1$.
  - つまり，$\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.
  - 最後の等式より，h が 0 に十分に近いとき
$$e^h \simeq 1 + h$$
と近似できます.

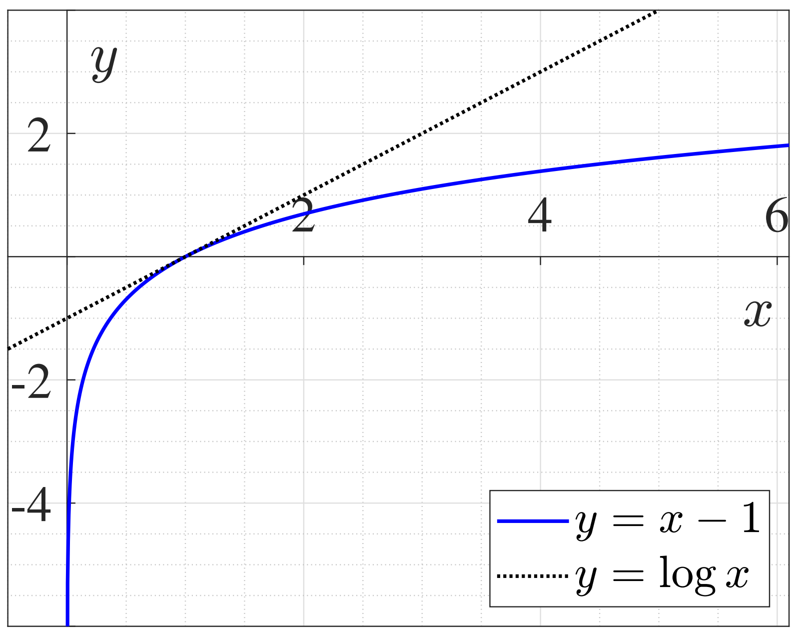


指数関数・対数関数と極限 (2/3)

- $g(x) = \log x$（e^x の逆関数）とおくと，$g'(x) = \dfrac{1}{x}$ でしたので $g'(1) = 1$.
  - つまり，$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$.
  - 最後の等式より，h が 0 に十分に近いとき

$$\log(1+h) \simeq h,\ \text{つまり},\ \log h \simeq h - 1$$

と近似できます（これは，前頁の近似と本質的には同じことです）.



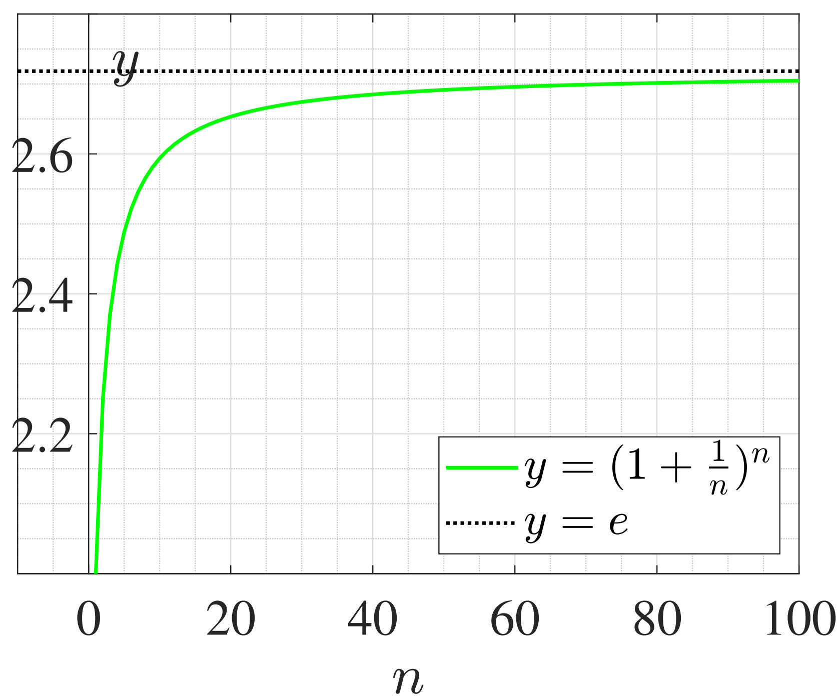
指数関数・対数関数と極限 (3/3)

- 前頁の $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$ より,

$$\lim_{h \to 0} \log(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1\text{, つまり, } \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e\,.$$

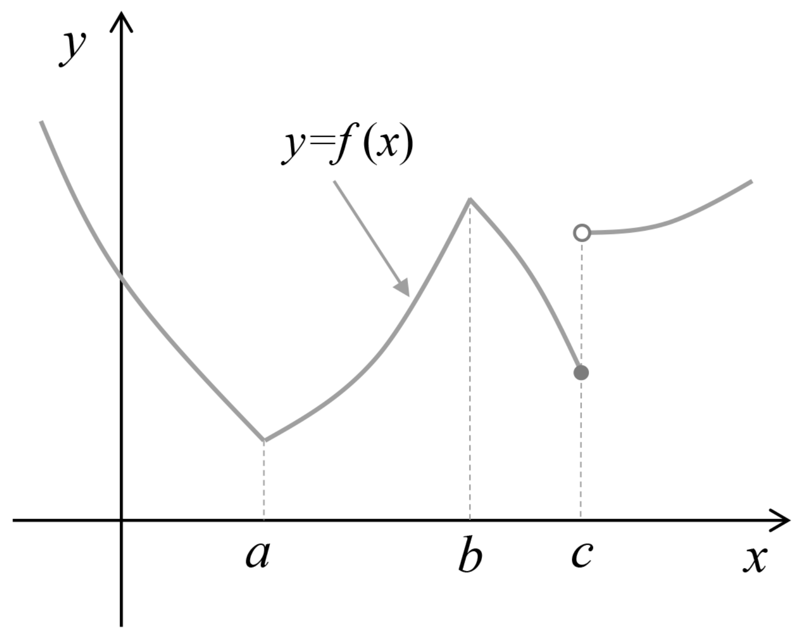
- $h = \dfrac{1}{n}$ と置き直せば, $\displaystyle\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,.$

つまり, e の定義式（➪ スライド 73）が得られました.



微分可能性 (1/2)

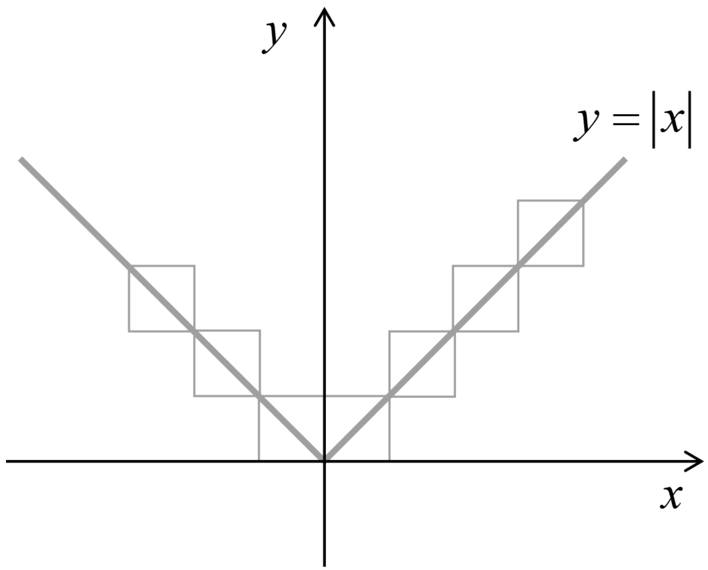
- これまでは触れずにきましたが，
  関数は（連続であっても）微分係数が存在するとは限りません．
  - おおまかに言って，グラフに「尖った点」があるとその点での微分係数は存在しません（定義できません）．
  - 例：

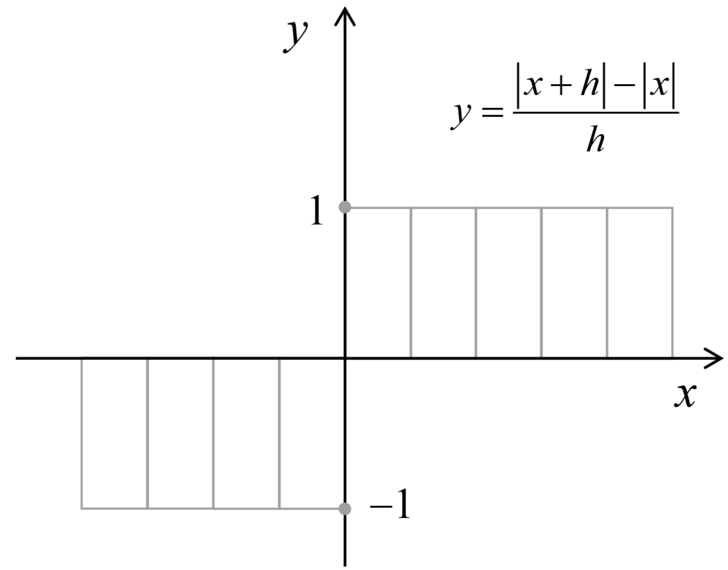


  - 点 $x = a$ および $x = b$ では f の微分係数は存在しません．
  - 点 $x = c$ では，f は連続でないので，微分係数も存在しません．

微分可能性 (2/2)

- 具体例として，$f(x) = |x|$ の場合：



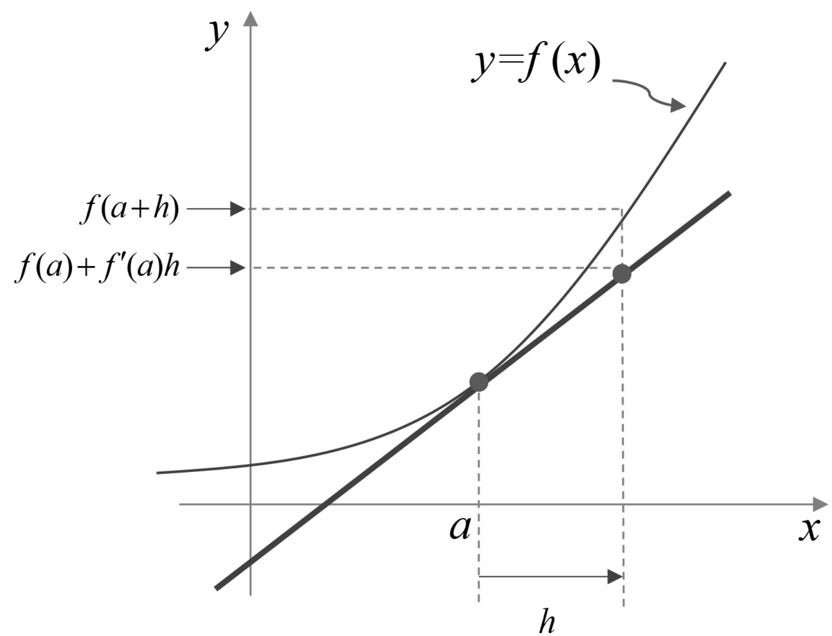


  - $x > 0$ のとき $f'(x) = 1$,
  - $x < 0$ のとき $f'(x) = -1$ ですが,
  - 点 $x = 0$ では f の微分係数は存在しません.

- 点 $x = a$ において関数 f の微分係数が存在するとき，f は $x = a$ で微分可能といいます.

微分は 何の役に立つでしょうか：関数の近似

- 点 $x = a$ における関数 f の微分係数は
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$
でした.
  - つまり，h が 0 に十分に近いとき，点 a から少し移動した点 $a + h$ での関数 f の値は
$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\,h$$
と近似できます（右辺は h に関する 1 次式で，そのグラフは $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線です）.



微分は 何の役に立つでしょうか：ニュートン・ラフソン法

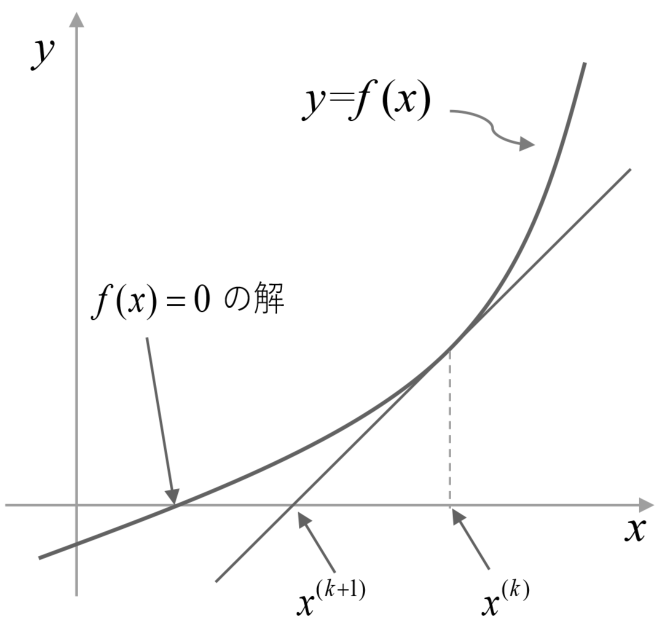
- 方程式 $f(x) = 0$ を解くことを考えます.
- いま $x^{(k)}$ が得られているとして，$x^{(k)} + \Delta x$ が方程式を満たすようにしたいと考えます．関数 $f(x^{(k)} + \Delta x)$ の近似を用いると

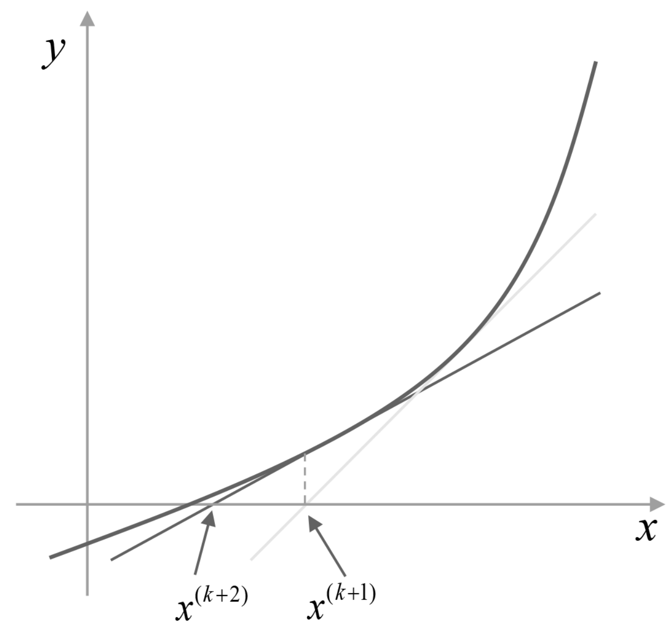
$$f(x^{(k)} + \Delta x) \simeq f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})\,\Delta x = 0\,.$$

- そこで，初期点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ を適当に決めて，更新

$$x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

を繰り返すことで方程式を解くことができます.





原始関数と不定積分：導入

- 数学では，よく,「対になる関係」を考えます.
  - 逆数： 掛け合わせると 1 になるもの.
    - 3 の逆数は $\dfrac{1}{3}$.
    - $\dfrac{a}{b}$ の逆数は $\dfrac{b}{a}$.
  - 逆関数：$y = f(x)$ に対して $x = f^{-1}(y)$.
    - $y = 2x + 3$ の逆関数は $x = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{2}$.
    - $y = e^x$ の逆関数は $x = \log y$.

- 以下では，微分（つまり，関数 f から導関数 f' への変換）の逆の変換を考えます.
  - 例： 微分すると $2x + 3$ になる関数は，たとえば $x^2 + 3x$.

原始関数と不定積分

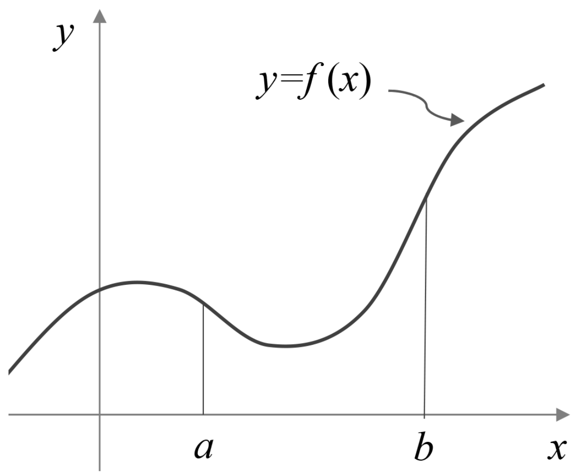
- 関数 f に対して，$F'(x) = f(x)$ を満たす関数 F を，f の原始関数とよびます.
  - f の原始関数はたくさん（無数に）あります.
  - 例： $f(x) = 2x + 3$ に対して，たとえば $x^2 + 3x + 1$ も $x^2 + 3x - 4$ も f の原始関数です.
- f の原始関数すべてを $\displaystyle\int f(x)\,dx$ で表し，f の不定積分とよびます.
  - f の原始関数のひとつ F と定数 c を用いると，
  $$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$
  と表せます（この c は積分定数とよばれます）.

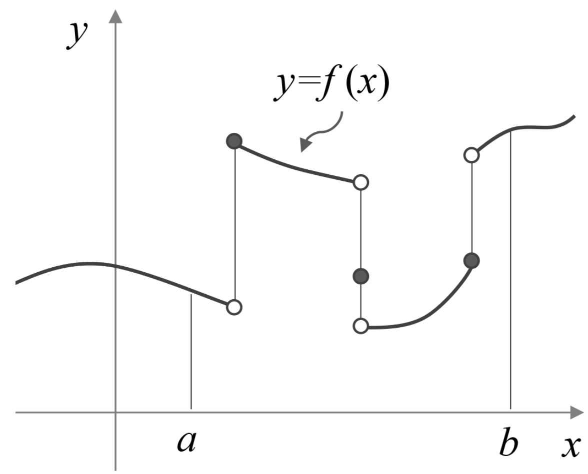
不定積分の諸公式

- 不定積分の線形性：
  - $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$,
  - α を実数として，$\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$.
- 基本的な関数の不定積分
  - -1 以外の実数 n に対して，$\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$.
  - $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$.
  - $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$.

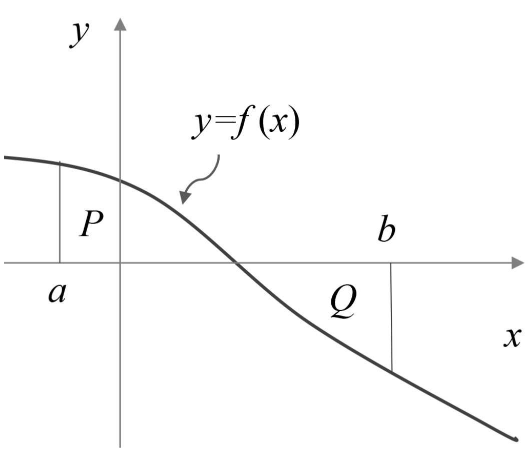
定積分

- 関数 f と区間 $[a, b]$ に対して，図で囲んだ範囲の面積のことを，a から b までの f の定積分とよび $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表します.





- ただし，グラフが x 軸より下にある部分については，負とします（符号付きの面積とよびます）.



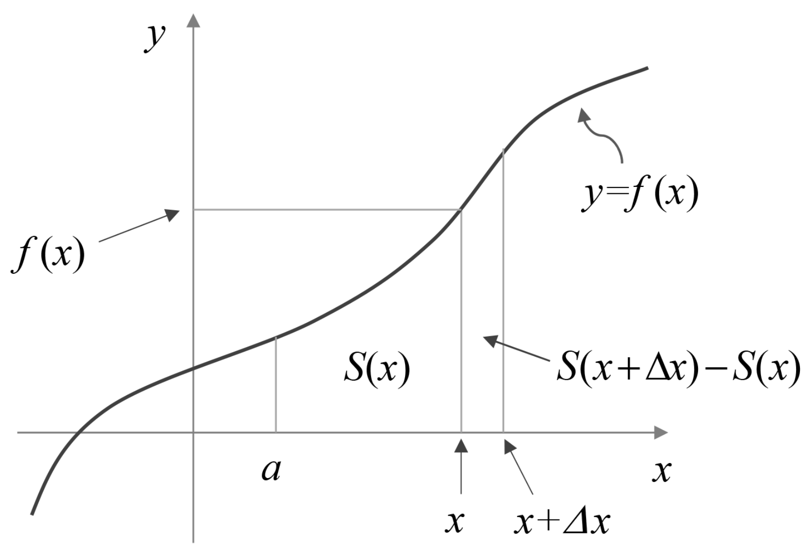
この場合，

$$\int_a^b f(x)\,dx = (P \text{ の面積}) - (Q \text{ の面積}).$$

定積分は 不定積分を使って計算可能

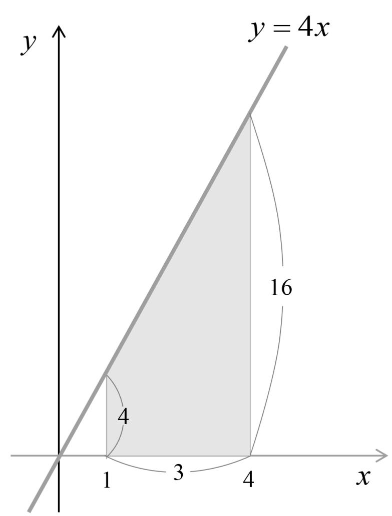
- 関数 f の原始関数を F（つまり，$F'(x) = f(x)$）とすると，
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
が成り立ちます（微分積分法の基本定理）．

- $S(x)$ を図の a から x までの囲まれた部分の面積とすると，
$S(x+\Delta x) - S(x) \simeq f(x)\,\Delta x$ が成り立ちます．$\Delta x \to 0$ とすると
$S'(x) = \dfrac{s(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x)$ が得られ，これを不定積分すると
$S(x) = F(x) + c$ です．$S(a) = 0$ より $c = -F(a)$ であるので，
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = S(b) = F(b) + c = F(b) - F(a)$ が得られます．



定積分の計算の例 (1/2)

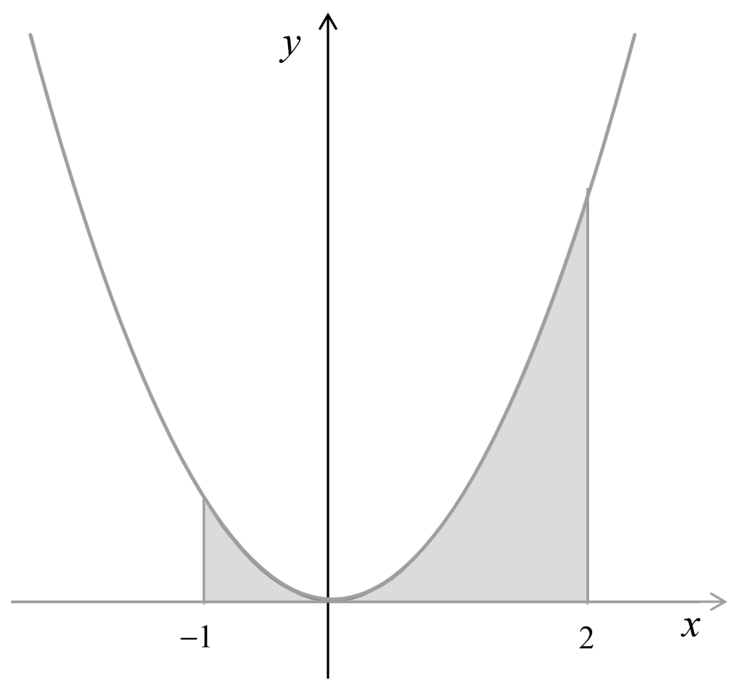
- $F'(x) = f(x)$ のとき，$f(x)$ の a から b までの定積分は
  $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$ この右辺を $\big[F(x)\big]_a^b$ と表します.
- 具体例：
  - $f(x) = 4x$ を $a = 1$ から $b = 4$ まで定積分します.
    f の原始関数は $F(x) = 2x^2 + c$ なので,
    $$\int_1^4 4x\,dx = \big[2x^2 + c\big]_1^4 = (2\cdot 4^2 + c) - (2\cdot 1^2 + c) = 30\,.$$
    - 積分定数 c は相殺されるので，$c = 0$ としてよいことがわかります.



- 台形の面積の公式
  $$\frac{(4+16)\cdot 3}{2} = 30$$
  と，結果が一致しています.

定積分の計算の例 (2/2)

- $F'(x) = f(x)$ のとき，$f(x)$ の a から b までの定積分は
  $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$ この右辺を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ と表します.
- 具体例：
  - $f(x) = x^2$ を $a = -1$ から $b = 2$ まで定積分します.
    $$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3\right) = 3\,.$$



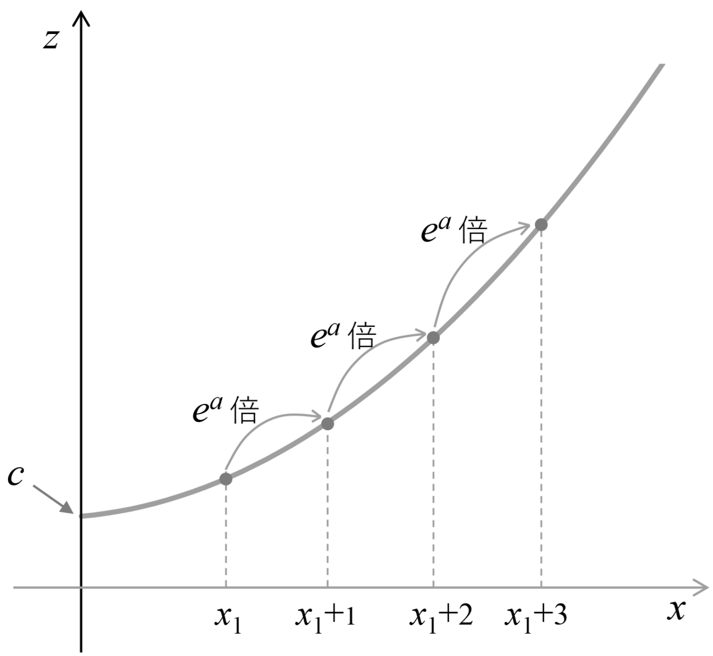
積分の応用：微分方程式の例 (1/3)

- バクテリアを培養すると，理想的には，一定の時間には一定の割合で増えます．
つまり，時刻 x $(\geqq 0)$ におけるバクテリアの数を $z(x)$ で表すと，$z(x)$ の増加率 $z'(x)$ はそのときの数 $z(x)$ に比例します：
$$z'(x) = az(x)\,.$$
  - a は正の定数です．
  - 時刻 $x = 0$ でのバクテリアの数は c（正の定数）とします，つまり，$z(0) = c$．

- ここで，
$$z(x) = ce^{ax}$$
が上の条件を満たすことは容易に確かめられます（実は，説明を省きますが，条件を満たす $z(x)$ はこれのみであることも示せます）．

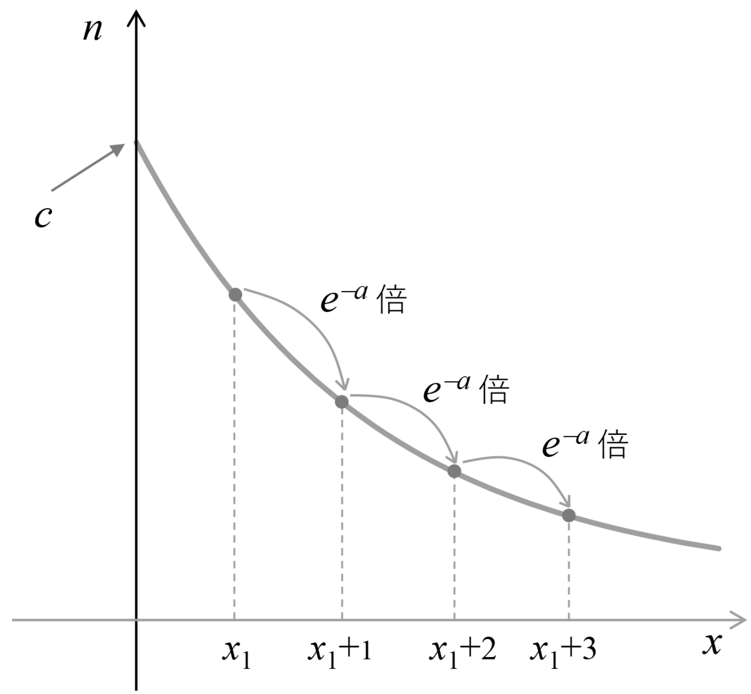
積分の応用：微分方程式の例 (2/3)

- バクテリアの数 $z(x)$ の増加率はそのときの数 $z(x)$ に比例します：
$$z'(x) = az(x)\,, \quad z(0) = c \quad (a \text{ は正の定数}).$$
- この条件を満たす $z(x)$ は,
$$z(x) = ce^{ax}\,.$$
  - ある時刻 x_1 と時刻 $x_1 + 1$ での量を比較すると,
$$\frac{z(x_1+1)}{z(x_1)} = \frac{ce^{a(x_1+1)}}{ce^{ax_1}} = e^a \ (\text{一定値}).$$
  つまり，一定時間ごとに一定の倍率で増えることがわかります.



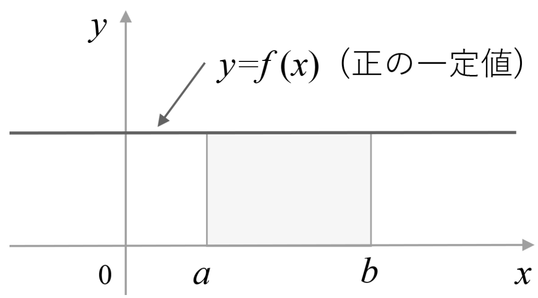
積分の応用：微分方程式の例 (3/3)

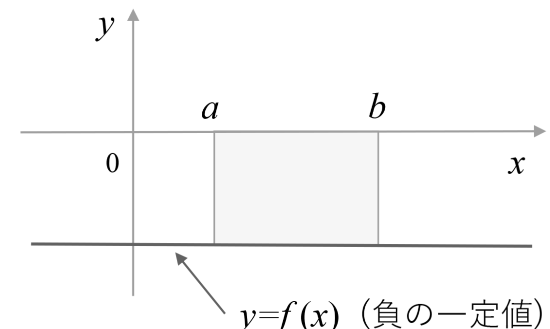
- 放射性元素は，一定時間には一定の割合で崩壊していきます．
  つまり，時刻 x ($\geqq 0$) における量（原子の数）を $n(x)$ で表すと，
  $$n'(x) = -an(x)\,, \quad n(0) = c\,, \quad a \text{ は正の定数．}$$
  - $n(x)$ は時間とともに減少するので，その増加率 $n'(x)$ は負であることに注意しましょう．
- この条件を満たす $n(x)$ は，$n(x) = ce^{-ax}$ ．



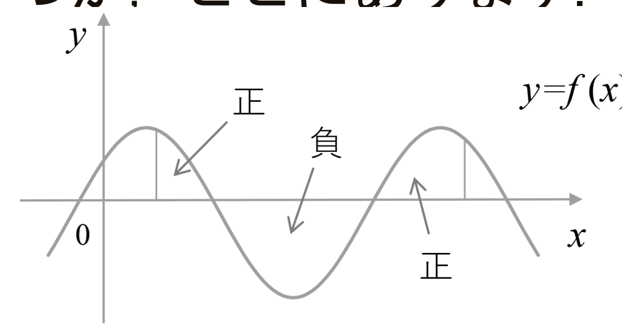
積分の応用：速度と変位

- 時刻 x における物体の速度を $f(x)$ で表します.
  - もし $f(x)$ が正の一定値であれば,「速度 × 時間 = $f(x)(b-a)$」は，時刻 a から時刻 b までの間に物体が進んだ距離です.
  - もし速度 $f(x)$ が負の一定値をとるときは，後戻りすることになるので，進んだ距離 $f(x)(b-a)$ は負の値です.



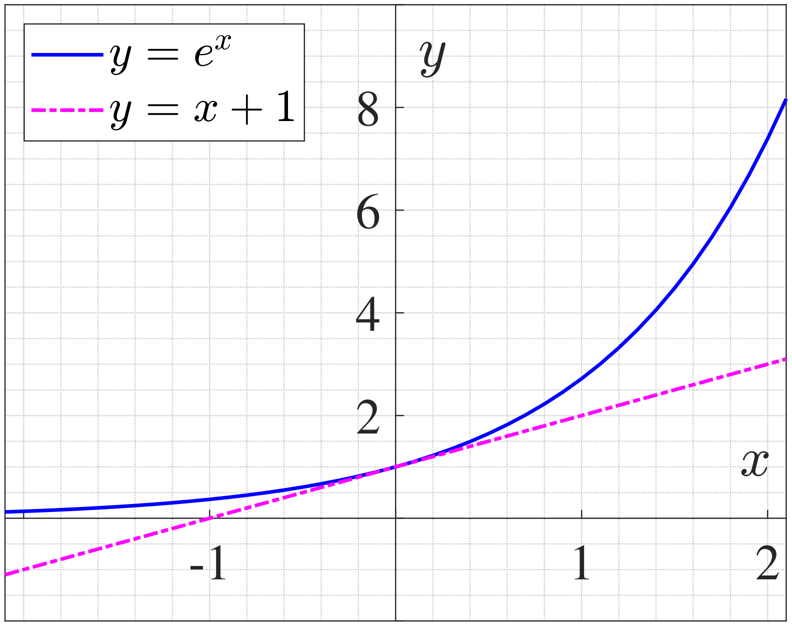


- ここで，進んだ距離はともに $f(x)(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と表せます.
  - 定積分を符号付きの面積で定義した理由の 1 つが，ここにあります.
- 速度 $f(x)$ が一定でない場合も，
  進んだ距離は $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表されます.



積分の応用：指数関数の展開

- 指数関数 e^x は，x が 0 に十分に近いとき
$$e^x \simeq 1 + x$$
で近似できます（➪ スライド 114）.



積分の応用：指数関数の展開

- 指数関数 e^x は，x が 0 に十分に近いとき
$$e^x \simeq 1 + x$$
で近似できます（➪ スライド 114）．　両辺の積分を考えると
$$\int_0^x e^x\,dx \simeq \int_0^x (1+x)\,dx$$
ですが，これを計算すると
$$e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 .$$
- この両辺をさらに 0 から x まで積分すれば
$$e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 .$$
- この過程は何度も繰り返すことができ，
$$e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}x^n .$$
  - n が大きいほど，近似の精度が良いです（言い換えると，x が 0 にさほど近くない場合でも近似が成り立ちます）．

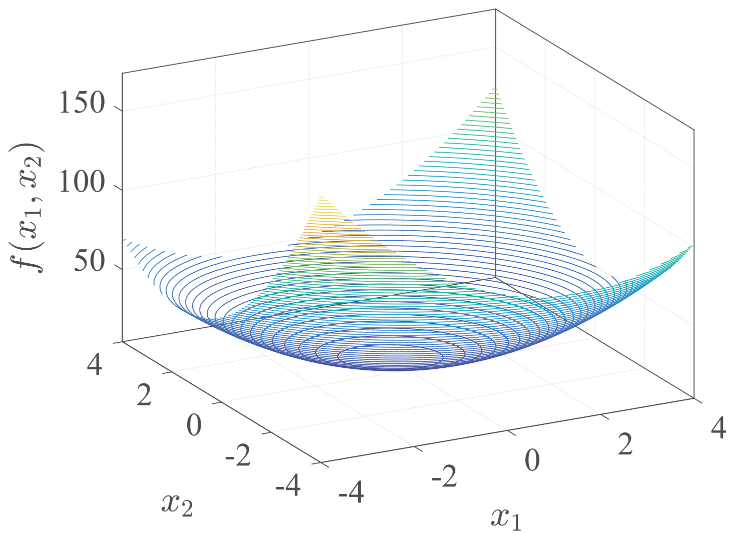
積分の応用：確率論での応用

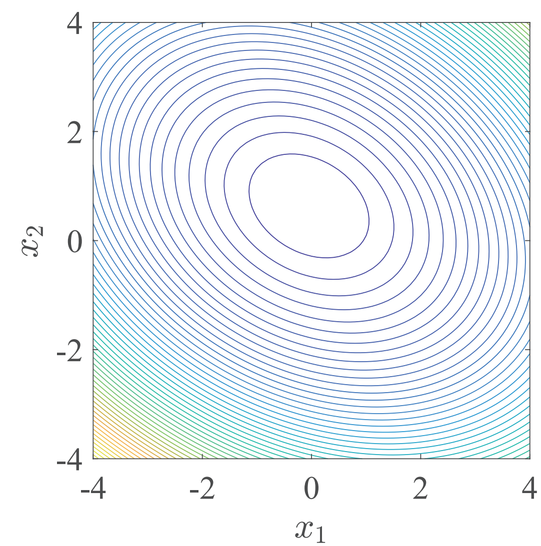
- 確率の計算
  - 連続型の確率変数 X について，その確率密度関数を f とすると，X が条件 $a \leqq X \leqq b$ を満たす確率は

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

多変数関数

- 関数とは，変数 x の値に応じて値 $f(x)$ が 1 つに定まる関係のことでした．
- 一方，2 つの変数 x_1 と x_2 の値に応じて値 $f(x_1, x_2)$ が 1 つに定まるような関係も考えられます．
  - 具体例として，$f(x_1, x_2) = 3{x_1}^2 + 2x_1x_2 + 4{x_2}^2 - x_1 - 5x_2 + 6$ のグラフは左図のように 3 次元空間の中の曲面です（右図は，その等高線です）．





- 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 2)$ の値に応じて値 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が 1 つに定まるとき，f を多変数関数とよびます．
- 以下では，2 変数の関数の微分と積分を扱います．

偏微分係数と偏導関数

- 1 変数関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の微分は，次のとおりでした.
  - 点 $x = a$ における g の微分係数を
$$\frac{d}{dx}g(a) = \lim_{h\to0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$
で定義し，関数 $\dfrac{d}{dx}g$ を g の導関数とよぶのでした.

- 2 変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の場合は，点 $(x_1, x_2) = (a, b)$ に対して，
$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(a, b) = \lim_{h\to0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$
を f の (a, b) における x_1 に関する偏微分係数とよびます．同様に，
$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(a, b) = \lim_{h\to0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$
を f の (a, b) における x_2 に関する偏微分係数とよびます．そして，関数 $\dfrac{\partial}{\partial x_1} f$ のことを f の x_1 に関する偏導関数とよび，関数 $\dfrac{\partial}{\partial x_2} f$ を f の x_2 に関する偏導関数とよびます.

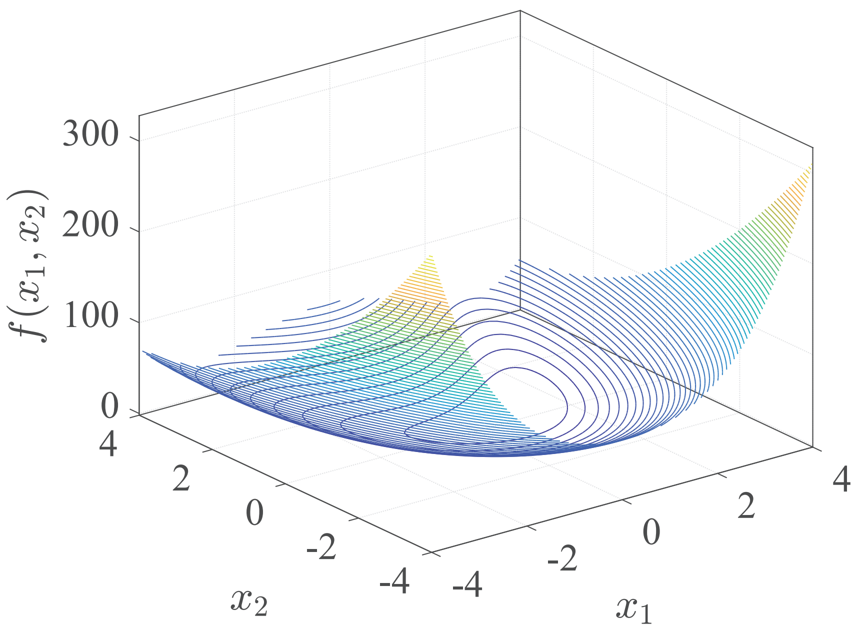
- なお，この教材では，関数 f や g は十分に滑らかであると仮定しています.

偏導関数の具体例

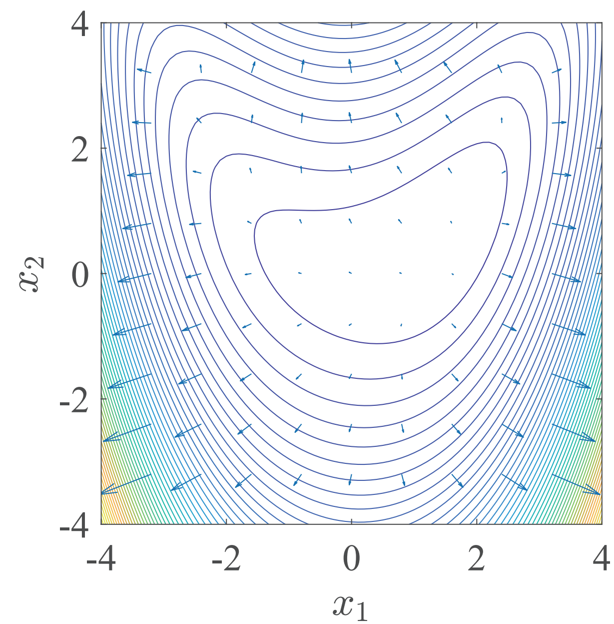
- 具体例として，２変数関数
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}{x_1}^4 - 2{x_1}^2 x_2 + 4{x_2}^2 - 5x_1 + 3x_2$$
をとりあげます.
  - f の x_1 に関する偏導関数を求めるには，x_2 を定数とみなして変数 x_1 についての導関数を求めればよく，
$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 2{x_1}^3 - 4x_1 x_2 - 5$$
です．同様に，x_2 に関する偏導関数は x_1 を定数とみなすことで
$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = -2{x_1}^2 + 8x_2 + 3$$
と得られます.

勾配

- 関数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と点 $(x, y) = (a, b)$ に対して，2 次元ベクトル
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} f(a,b) & \dfrac{\partial}{\partial x_2} f(a,b) \end{bmatrix}$$
を f の (a, b) における勾配とよび，$\nabla f(a, b)$ で表します．
- 具体例として，スライド 137 の関数の勾配は，右図の矢印のようになります（矢印の長さは縮小しています）．このように，勾配は各点における関数の等高線に直交し，関数値が増加する向きのベクトルです．



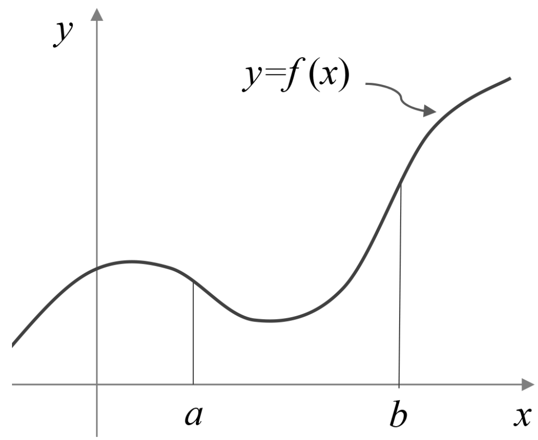
関数 $f(x_1, x_2)$ のグラフ



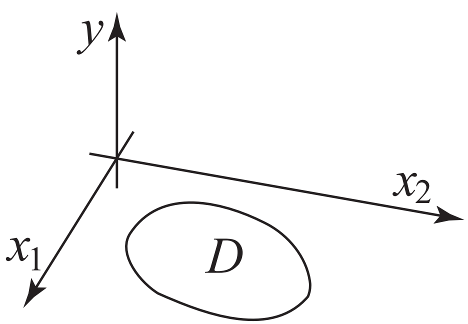
各点における勾配 $\nabla f(x_1, x_2)$

2 重積分 (1/2)

- 1 変数の関数の積分には，不定積分と定積分とがありました.
- 2 変数の関数に対しては，定積分のみが考察の対象です.
- 1 変数の関数の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，a から b までの区間に対して計算をしました：



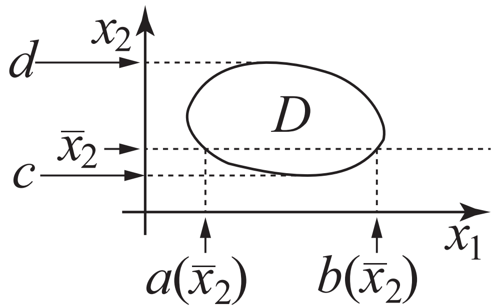
- 2 変数の場合，区間に代えて，x_1x_2-平面における領域 D を考えます.



以下では，D は「簡単な」形の領域（たとえば，長方形や円など，区分的に滑らかな曲線で囲まれた有界領域）であることを，仮定します.

2 重積分 (2/2)

- 関数 $f(x_1, x_2)$ と領域 D に対して，定積分に相当する値のことを f の D における 2 重積分とよび，$\displaystyle\iint_D f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ で表します.
- 2 重積分は，次のように計算します.
  - まず x_2 の値を固定し，x_1 について 1 変数の関数として積分します.



つまり，$\displaystyle\int_{a(\bar{x}_2)}^{b(\bar{x}_2)} f(x_1, \bar{x}_2)\, dx_1$ を計算します（この値を，$F(\bar{x}_2)$ とおきます）.

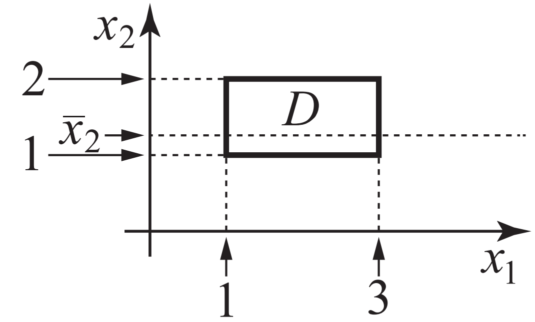
  - 次に，1 変数の関数 $F(x_2)$ を x_2 について積分したものが，f の 2 重積分です：

$$\iint_D f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_c^d F(x_2)\, dx_2 .$$

- この計算法を，f の累次積分とよびます.
- 最初に x_1 を固定して x_2 について積分する，という順序で計算しても，同じ結果が得られます.

2 重積分の具体例

- 関数 $f(x_1, x_2) = x_1 {x_2}^2$ を，
  右図の長方形の領域 D 上で積分してみます．

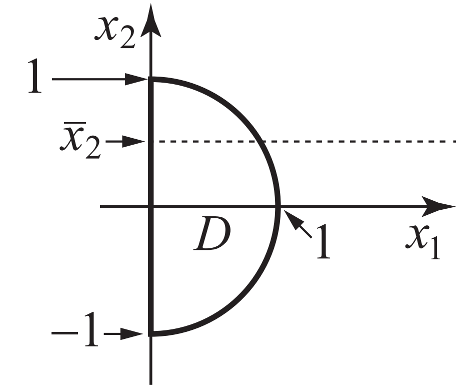


- x_2 の値を固定したとき x_1 は 1 から 3 までの値をとりますので，

$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 &= \int_1^2 \left(\int_1^3 x_1 {x_2}^2\, dx_1 \right) dx_2 \\
&= \int_1^2 \left[\frac{1}{2} {x_1}^2 {x_2}^2 \right]_{x_1=1}^{x_1=3} dx_2 \\
&= \int_1^2 4{x_2}^2\, dx_2 = \left[\frac{4}{3} {x_2}^3 \right]_1^2 = \frac{28}{3}\,.
\end{aligned}
$$

2 重積分の具体例

- 関数 $f(x_1, x_2) = 2{x_1}^2 x_2$ を，
  右図の半円形の領域 D 上で積分してみます.



- x_2 の値を固定したとき x_1 は 0 から $\sqrt{1 - {x_2}^2}$ までの値をとりますので，

$$\iint_D 2x_1{x_2}^2 \, dx_1 dx_2 = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-{x_2}^2}} 2x_1{x_2}^2 \, dx_1 \right) dx_2$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[{x_1}^2{x_2}^2 \right]_{x_1=0}^{x_1=\sqrt{1-{x_2}^2}} dx_2$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 - {x_2}^2){x_2}^2 \, dx_2$$

$$= \left[\frac{1}{3}{x_2}^3 - \frac{1}{5}{x_2}^5 \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15} .$$

索引（記号）

索引（記号）

索引（用語）

索引（用語）

索引（用語）

索引（用語）

索引（用語）

索引（用語）