1-6-5　線形代数

ベクトルとは

- ベクトル
  - いくつかの数を一列に配置したもの，つまり，
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{や} \quad \begin{bmatrix} 3.3 \\ 4.8 \\ 10.6 \\ 7.25 \end{bmatrix}$$
    などを，ベクトルとよびます.
  - 並べた数字（つまり，$1, 0, -1$ など）のことを，そのベクトルの成分とよびます.
  - 並べ方の順番には意味があります．つまり，たとえば $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とは，異なるベクトルです.
- スカラー
  - ベクトルに対して，（1 つ 1 つの）実数のことをスカラーとよびます.

n 次元ベクトル

- n 次元ベクトル
- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ のように，n 個の成分からなるベクトル $\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトルとよびます.
  - ベクトルを表すには，このように太字のイタリック体 $\boldsymbol{x}$ のほか，$\vec{x}$ などが用いられます.
  - $\boldsymbol{x}$ が $x_1, \ldots, x_n$ を成分とするベクトルであることを，$\boldsymbol{x} = (x_i)$ と表記することもあります.
- 先頭から数えて i 番目の成分 x_i を，$\boldsymbol{x}$ の第 i 成分とよびます.

列ベクトルと行ベクトル

- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ のように，成分を縦に並べたベクトルを，列ベクトル（または，縦ベクトル）とよびます.
- 一方，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$ のように，成分を横に並べたベクトルを，行ベクトル（または，横ベクトル）とよびます.

ベクトルの内積

- 2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して，
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$
で定まるスカラーを，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積とよびます．
  - 例： $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ のとき，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$．
  - 例： $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ のとき，
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = (-3) \cdot 0.1 + 0 \cdot (-0.9) + 5 \cdot 0.4 = 1.7\,.$$
- 記号 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ の他に，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ なども用いられます．
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$．
- 内積は，次元が同じベクトルどうしでしか，定義できません．
  - 例： $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ のとき，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ は定義できません．

ベクトルの直交性

- 2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ が 0 であるとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するといいます.
  - 例： 2 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$ は直交します.
  - 例： 2 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ は直交しません.
  - 例： 3 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ は互いに直交します.
  - 例： 2 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は直交します.
  - 例： 3 次元ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は互いに直交します.

行列とは

- mn 個のスカラーを

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

  のように配置したものを，$m \times n$ 型行列とよびます.
  - 各 A_{ij} を，行列 A の (i, j) 成分とよびます.
  - A が A_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ を成分とする行列であることを，$A = (A_{ij})$ と表記します.

- 例：
  - $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ は，2×3 型行列.
  - $\begin{bmatrix} 2.1 & 6.9 & 4.5 \\ 5.6 & 1.2 & 8.7 \\ 7.3 & 3.4 & 9.8 \end{bmatrix}$ は，3×3 型行列.

行列とベクトル (1/3)

- n 次元の行ベクトルは，$1 \times n$ 型の行列とみなせます.
  - 例： 4 次元の行ベクトル $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ は，1×4 型の行列とみなせます.
- m 次元の列ベクトルは，$m \times 1$ 型の行列とみなせます.
  - 例： 3 次元の列ベクトル $\begin{bmatrix} 1.6 \\ -2.5 \\ 4.7 \end{bmatrix}$ は，3×1 型の行列とみなせます.

行列とベクトル (2/3)

- $m \times n$ 型の行列は，m 本の n 次元行ベクトルを縦に並べたものとみなせます：

$$\left[\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{array}\right].$$

  - 例： 3×4 型の行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 11 & -5 \\ 8 & -3 & 9 & 15 \\ 12 & 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

  は，3 本の 4 次元行ベクトル

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 11 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 & 9 & 15 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

  を（この順に）縦に並べたものとみなせます.

行列とベクトル (3/3)

- $m \times n$ 型の行列は，n 本の m 次元列ベクトルを横に並べたものとみなせます：

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{array}\right].$$

  - 例：3×4 型の行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 11 & -5 \\ 8 & -3 & 9 & 15 \\ 12 & 1 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

  は，4 本の 3 次元列ベクトル

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  を（この順に）横に並べたものとみなせます.

正方行列，対角行列

- $n \times n$ 型の行列のことを，n 次の正方行列とよびます.
- 正方行列 $A = (A_{ij})$ の成分 A_{ij} のうち，$i = j$ であるものを対角成分とよび，$i \neq j$ であるものを非対角成分とよびます.
  - 例： $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ は，2 次の正方行列.
    A_{11} と A_{22} は対角成分，A_{12} と A_{21} は非対角成分.
- すべての非対角成分が 0 である正方行列を，対角行列とよびます.
  - 例： $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ は 2 次の対角行列，$\begin{bmatrix} 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.7 \end{bmatrix}$ は 3 次の対角行列.

単位行列

- すべての対角成分が 1 である対角行列を，単位行列とよびます．単位行列は I で表します：
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$
  - 型を明確にするために，I_n と書くこともあります．

零行列，実行列

- すべての成分が 0 である行列を，零行列とよびます．零行列は O で表します：

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

  - 型を明確にするために，$O_{m,n}$ と書くこともあります．

- すべての成分が 0 であるベクトルを，零ベクトルとよびます．零ベクトルは $\mathbf{0}$ で表します（型を明確にするために，$\mathbf{0}_n$ と書くこともあります）．

- すべての成分が実数である行列を，実行列とよびます．
また，すべての成分が実数であるベクトルを，実ベクトルとよびます．
  - 以下では，実行列と実ベクトルのみを扱います．

行列やベクトルの演算　スカラー倍

- 行列のスカラー倍は，そのスカラーを各成分に乗じます．
  - 例： $2\times\begin{bmatrix}3 & 4 & 8\\ 2 & 6 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8 & 16\\ 4 & 12 & 2\end{bmatrix}.$
  - 一般に，実数 α に対して，$\alpha A=\begin{bmatrix}\alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn}\end{bmatrix}.$
- ベクトルのスカラー倍も同様です．
  - （というのも，n 次元の行ベクトルは $1\times n$ 型の行列とみなせ，m 次元の列ベクトルは $m\times 1$ 型の行列とみなせるのでした．）

行列やベクトルの演算　和と差

- 行列の和
  - 2 つの行列が同じ型をもつとき，それらの和が定義できます.
  - 行列の和は，成分ごとの和です.
    - 例： $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.
    - 一般に，$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}$.
  - $A + B = B + A$.
- 行列の差は，$A - B = A + (-1)B$.
- 2 つのベクトルの和と差も，同様に定義されます.

行列やベクトルの演算　行列と列ベクトルの積

- $m \times n$ 型の行列 $A = (A_{ij})$ と n 次元の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の積は，次のように定めます．

1. A を，行ベクトルを並べたものとみます：

$$A = \left[\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{a}^{(1)} \\ \hline \boldsymbol{a}^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{a}^{(m)} \end{array}\right].$$

2. 積 $A\boldsymbol{x}$ は，m 次元の列ベクトルで，その第 i 列は $\boldsymbol{a}^{(i)}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積です：

$$A\boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{c} \langle \boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{x} \rangle \\ \hline \langle \boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{x} \rangle \\ \hline \vdots \\ \hline \langle \boldsymbol{a}^{(m)}, \boldsymbol{x} \rangle \end{array}\right].$$

例：$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 27 \end{bmatrix}.$

- m 次元の行ベクトル $\boldsymbol{y}$ と $m \times n$ 型の行列 $A = (A_{ij})$ の積は，次のように定めます．

1. A を，列ベクトルを並べたものとみます：

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{a}_{(1)} & \boldsymbol{a}_{(2)} & \cdots & \boldsymbol{a}_{(n)} \\ & & & \end{array}\right].$$

2. 積 $\boldsymbol{y}A$ は，n 次元の行ベクトルで，その第 j 列は $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{a}_{(j)}$ の内積です：

$$\boldsymbol{y}A = \left[\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_{(1)} \rangle \;\middle|\; \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_{(2)} \rangle \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_{(n)} \rangle\right].$$

- 例：$\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \left[\left\langle \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \right] = \begin{bmatrix} 23 & 32 \end{bmatrix}.$

行列やベクトルの演算　行列と行列の積

- $m \times n$ 型の行列 $A = (A_{ij})$ と $n \times k$ 型の行列 $B = (B_{jl})$ の積は，次のように定めます．

1. A は行ベクトルを並べ，B は列ベクトルを並べたものとみます：

$$A = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{a}^{(1)} \\ \hline \boldsymbol{a}^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{a}^{(m)} \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{b}_{(1)} & \boldsymbol{b}_{(2)} & \cdots & \boldsymbol{b}_{(k)} \end{array}\right].$$

2. 積 AB は，$m \times k$ 型の行列で，その (i, l) 成分は $\boldsymbol{a}^{(i)}$ と $\boldsymbol{b}_{(l)}$ の内積です：

$$AB = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{b}_{(1)} \rangle & \langle \boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{b}_{(2)} \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{b}_{(k)} \rangle \\ \langle \boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}_{(1)} \rangle & \langle \boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}_{(2)} \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}_{(k)} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{a}^{(m)}, \boldsymbol{b}_{(1)} \rangle & \langle \boldsymbol{a}^{(m)}, \boldsymbol{b}_{(2)} \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{a}^{(m)}, \boldsymbol{b}_{(k)} \rangle \end{bmatrix}.$$

行列やベクトルの演算　特別な場合 (1/2)

- n 次元の行ベクトル $\boldsymbol{s}$ と n 次元の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の積 $\boldsymbol{sx}$ は，スカラーで，$\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積に等しいです： $\boldsymbol{sx} = \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{x} \rangle$.
  - 例： $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$.

- n 次元の列ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)$ と m 次元の行ベクトル $\boldsymbol{y} = (y_j)$ の積 $\boldsymbol{xy}$ は，$n \times m$ 型の行列で，

$$\boldsymbol{xy} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix} .$$

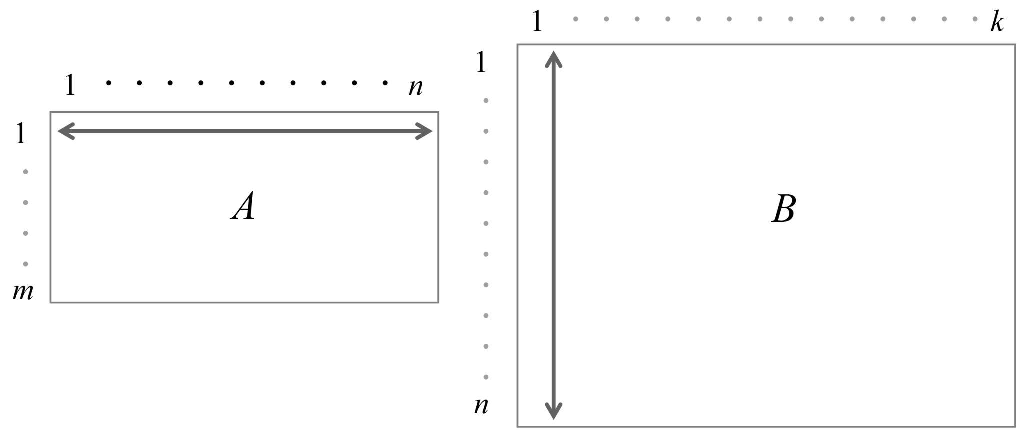
  - 例： $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$.

行列やベクトルの演算　特別な場合 (2/2)

- $m \times n$ 型の行列 A に対して，$AI_n = A$, $I_mA = A$.
  - つまり，単位行列を掛けても行列は不変です.
- $m \times n$ 型の行列 A に対して，$AO_{n,k} = O_{m,k}$, $O_{k,m}A = O_{k,n}$.
  - つまり，行列に零行列を掛けた結果は零行列です.

行列の積に関する注意点 (1/2)

- 積が定められるかは，型に依存します．



$\longleftrightarrow$ と $\updownarrow$ が同じ長さのときのみ，積 AB が定義されます．

- A が $m \times n$ 型行列で B が $n \times m$ 型行列なら，AB も BA も定義されます．しかし，両者は同じ型とは限りません（AB は $m \times m$ 型で，BA は $n \times n$ 型）．
  - $m = 2, n = 3$ の例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 15 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 18 & 0 \end{bmatrix}.$$

行列の積に関する注意点 (2/2)

- A も B も n 次正方行列ならば，AB も BA も定義されます．しかし，$AB = BA$ が成り立つとは限りません．
  - 例：
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
- A が正方行列のとき，$A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ $(= A^2A = AA^2)$ と書きます．
- 「行列の割り算」は，してはいけません．
  - $AB = C$ でも，$B = \dfrac{C}{A}$ と書いてはいけません．

転置 (1/2)

- $m \times n$ 型の行列 $A = (A_{ij})$ に対して，(i, j) 成分が A_{ji} であるような $n \times m$ 型行列のことを，A の転置（または，A の転置行列）とよび，$A^\top$ と書きます.
    - 例： $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ に対して，$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.
    - 転置を表す記号としては，A^T, ${}^t A$, A' なども用いられます.
- $(A^\top)^\top = A$.
    - つまり，転置の転置はもとの行列です.

転置 (2/2)

- $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
  - 例：
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4\\5 & 0\\0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 16\\15 & 0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\4 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\\2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 15\\16 & 0\end{bmatrix}.$$
- $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{p}$ がともに n 次元の列ベクトルであるとき，その内積は $\boldsymbol{x}^\top$ と $\boldsymbol{p}$ の積に等しいです：$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{p} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \rangle$.
  - 例：$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$.
- $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{q}$ がともに m 次元の行ベクトルであるとき，その内積は $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{q}^\top$ の積に等しいです：$\boldsymbol{y}\boldsymbol{q}^\top = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{q} \rangle$.
  - 例：$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}^\top = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$.

ベクトルのノルム

- n 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)$ に対して,
$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$
を $\boldsymbol{x}$ のノルムとよびます.
  - $\|\boldsymbol{x}\|_2$ とも書きます.
  - ユークリッドノルムや，2 ノルム，ℓ_2 ノルムともよばれます.
  - 例： $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ に対して，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
  - 例： $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ に対して，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

ベクトルのノルムの性質

- $\|\boldsymbol{x}\| \geqq 0$.
- $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$.
  - 例： $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha = -3$, $\alpha\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix}$ に対して，

    $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad \|\alpha\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

逆行列とは

- n 次の正方行列 A に対して，条件
$$AX = XA = I$$
を満たす n 次の正方行列 X を，A の逆行列とよびます.
  - 一般に，A の逆行列は存在するとは限りません.
  - A の逆行列が存在するとき，A は正則であるといいます.
  - A が正則であるとき，A の逆行列を A^{-1} で表します.

逆行列の例 (1/2)

- 零行列 O の逆行列は存在しません（つまり，O は正則ではありません）.
- 単位行列 I の逆行列は I そのものです.
- α を 0 でない実数とするとき，αI の逆行列は $\dfrac{1}{\alpha}I$ です.
- $d_1, d_2, \ldots, d_n$ を 0 でない実数とするとき，n 次の対角行列

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

の逆行列は

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

です．なお，$d_1, d_2, \ldots, d_n$ のうち 1 つでも 0 のものがあれば，D は正則ではありません.

逆行列の例 (2/2)

- 2 次の正方行列
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$
は，$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0$ のとき正則であり，逆行列は
$$A^{-1} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$
です．
  - $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ のことを A の行列式とよび，$\det A$ で表します．
- 解説はしませんが，一般の n 次の正方行列 A に対しても，行列式 $\det A$ は定義されています．そして，A が正則であることと $\det A \neq 0$ であることとは，同値です．

逆行列の性質

- n 次の正方行列 A が正則であるとき,
  - A の逆行列 A^{-1} はただ 1 つ存在します.
  - A^{-1} も正則です.
  - A^{-1} の逆行列は A です（つまり, $(A^{-1})^{-1} = A$ です）.
  - $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ が成り立ちます.
- n 次の正方行列 A, B が正則であるとき,
  - A と B の積 AB も正則です.
  - AB の逆行列は $B^{-1}A^{-1}$ です（つまり, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ です）.

逆行列の応用：線形方程式系

- 逆行列を用いると，線形方程式系（連立 1 次方程式）の解を計算することができます.
- 例として，2 つの未知数に関する線形方程式系

  $$2x + 5y = 6\,,\quad x + 3y = 4\,,\qquad \text{つまり，}\qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  は，両辺に行列 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ を左から掛けることで

  $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  と解くことができます.
- 一般に，n 次の正則な正方行列 A と n 次元の列ベクトル $\boldsymbol{b}$ とが与えられたとき，線形方程式系

  $$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

  の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ です.
  - ただし，実際の数値計算では，この方法が用いられることはほとんどありません（より優れた方法が用いられます）.

固有値とは

- n 次の正方行列 A に対して，スカラー λ と零ベクトルではない n 次元の列ベクトル $\boldsymbol{u}$ が条件
$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \tag{$*1$}$$
を満たすとき，λ を A の固有値とよび，$\boldsymbol{u}$ を（λ に対応する）固有ベクトルとよびます.
  - 実行列であっても，その固有値は実数であるとは限りませんし，固有ベクトルは実ベクトルであるとは限りません.
- 式 $(*1)$ は
$$(A - \lambda I)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$
と書き換えられますが，もし行列 $A - \lambda I$ が正則であれば（逆行列を両辺に左から掛けることで）$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ が導かれます．したがって，λ が A の固有値であるための条件は
$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{$*2$}$$
であることがわかります．式 $(*2)$ を，A の特性方程式とよびます.

2 次の正方行列の固有値

- 具体例として，行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値を求めてみます.

  $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$ より，A の特性方程式は

  $$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0\text{，つまり，}(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

  ですから，1 と 4 が固有値です.

- この例からわかるように，2 次の正方行列では，固有値は 2 次方程式の解として得られます．したがって，固有値は 2 個あります（ただし，その 2 個の値は等しい可能性があります）.

  - たとえば，単位行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の 2 つの固有値はともに 1 です.

- 行列 $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ の固有値を λ_1, λ_2 とおくと，2 次方程式の根と係数の関係から

  $$\lambda_1 + \lambda_2 = B_{11} + B_{22}\,, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det B$$

  が成り立ちます.

対称行列の固有値

- n 次の正方行列 A が $A^\top = A$ を満たすとき，A を対称行列とよびます.
- 対称行列の固有値は，実数です.
  - 固有ベクトルも，実ベクトルに選ぶことができます（そこで，以下では，対称行列の固有ベクトルは実ベクトルとします）.
- 対称行列の固有ベクトルは，互いに直交するように選ぶことができます.
- 具体例として，対称行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ の固有値は

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$$

であり，対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

です．ここで，$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle = 0$ が成り立つことを確認できます（つまり，$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ は直交しています）.

対称行列の対角化

- n 次の正方行列 Q が $Q^\top Q = I$（つまり，$Q^{-1} = Q$）を満たすとき，Q を直交行列とよびます.
- 対称行列 A に対して，直交行列 Q をうまく選ぶと行列 $Q^\top AQ$ を対角行列にすることができます．つまり，

$$Q^\top AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

  とすることができます.
  - 対角成分 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ は，A の固有値です.
  - Q の列を

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_n \end{array}\right]$$

    と表すと，$\boldsymbol{q}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ は λ_j に対応する A の固有ベクトルであり，$\|\boldsymbol{q}_j\| = 1$, $\boldsymbol{q}_j^\top \boldsymbol{q}_l = 0$ $(j \neq l)$ を満たします.

対称行列の対角化の具体例

- 具体例として，対称行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ であり，対応する固有ベクトルは
$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
です.
- $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ をスカラー倍してノルムを 1 としたものを
$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
で表すと，A を対角化する直交行列として
$$Q = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$
が得られます．実際，$Q^\top A Q = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ となることを確認できます.

対称行列の対角化の応用：行列のべき乗

- 対角行列の k 乗 $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ は，容易に計算できます．具体例として，
$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$
が成り立ちます（つまり，対角成分それぞれを k 乗すればよいわけです）．

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ の k 乗を計算するには，対角化
$$Q^\top A Q = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{$*3$}$$
を用いると便利です（Q は，スライド 41にある直交行列のことです）．

  - 式 $(*3)$ の両辺を k 乗すると
$$(Q^\top A Q)^k = \begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \tag{$*4$}$$
です．$Q^\top = Q^{-1}$ を用いると，式 $(*4)$ の左辺は
$$(Q^\top A Q)(Q^\top A Q) \cdots (Q^\top A Q) = Q^\top A^k Q$$
と変形できますので，$A^k = Q \begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} Q^\top$ が得られます．

対称行列の固有値とレイリー商

- n 次の対称行列 A を直交行列 Q で対角化します：
$$Q^\top AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_n \end{array}\right].$$
固有値は，大きい順に $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n$ とします.

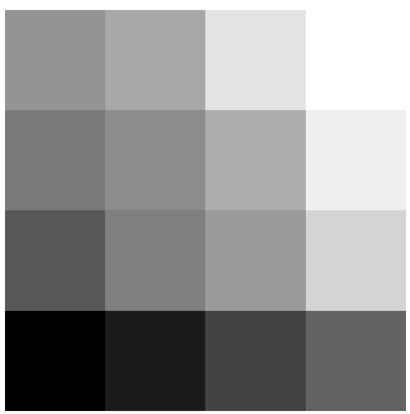
- 零ベクトルでない $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\dfrac{\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$ をレイリー商とよびます.

- 固有値とレイリー商について，
$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}, \quad \lambda_n = \min_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$$
が成り立ちます.

  - $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{q}_1 + c_2\boldsymbol{q}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{q}_n$ とおき $Q^\top Q = I$ を用いると
  $$\frac{\boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}} = \frac{\lambda_1 {c_1}^2 + \lambda_2 {c_2}^2 + \cdots + \lambda_n {c_n}^2}{{c_1}^2 + {c_2}^2 + \cdots + {c_n}^2}$$
  が得られることから示すことができます.

行列は どのように生じるのでしょうか (1/4)

- デジタル画像（➪ 2-2 データ表現）
  - グレースケール画像では，各ピクセル（画素）に 0 から 255 の整数が割り当てられています．
    - こうして，非負の整数行列（つまり，すべての成分が 0 以上の整数である行列）が生じます．



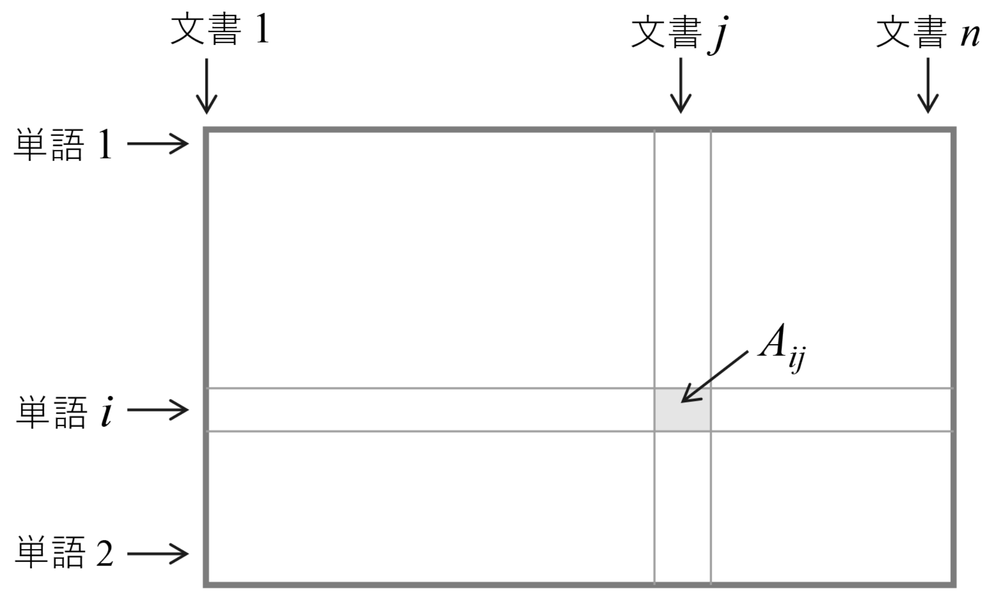
$4 \times 4 = 16$ ピクセル
からなる画像の例

$$\begin{bmatrix} 150 & 167 & 220 & 245 \\ 127 & 143 & 172 & 230 \\ 96 & 131 & 155 & 206 \\ 18 & 42 & 78 & 106 \end{bmatrix}$$

対応する行列
（4×4 型の非負の整数行列）

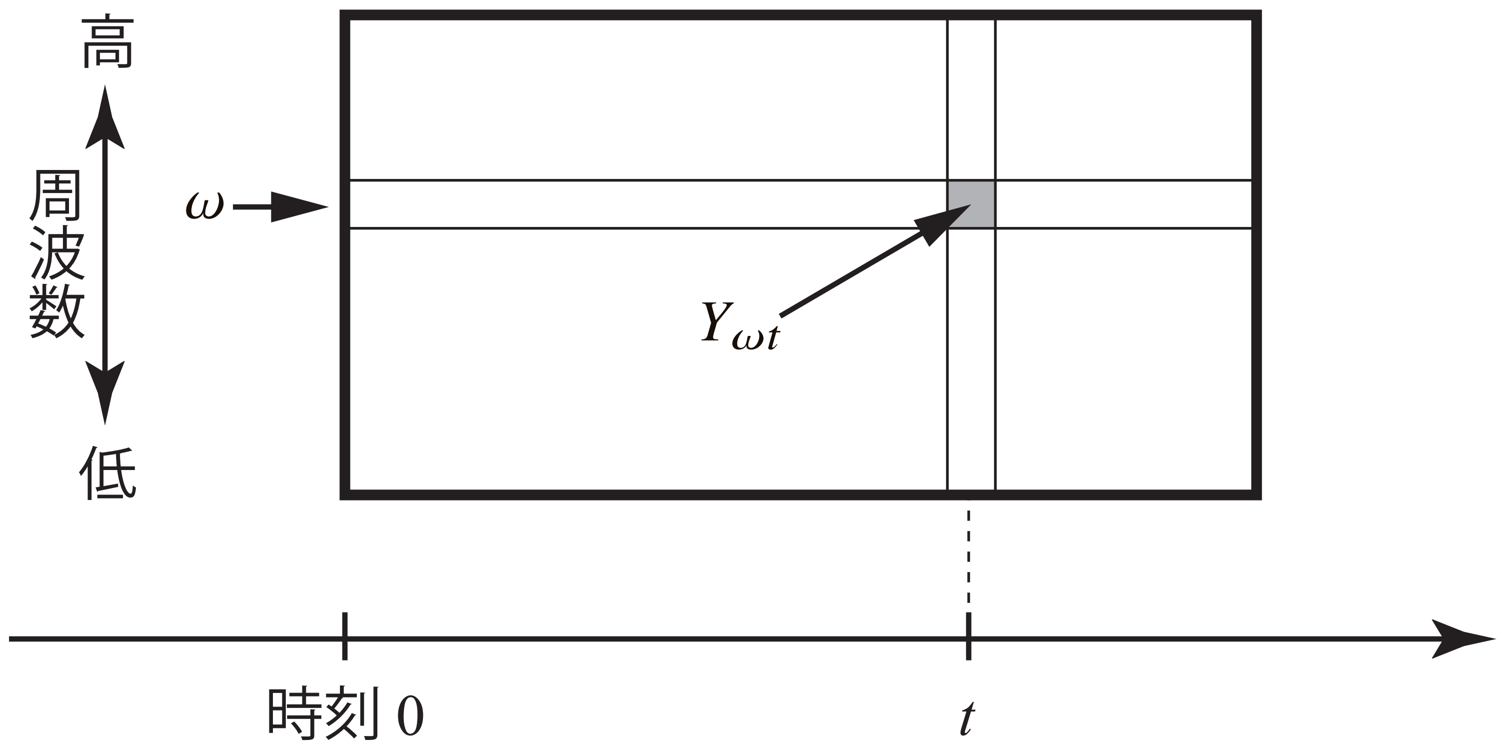
行列は どのように生じるのでしょうか (2/4)

- 文書のデータ（➪ 2-2 データ表現）
  - 単語文書行列：単語 i が文書 j に現れる回数を A_{ij} とすると，行列 A ができます.
    - こうして，非負の整数行列が生じます.
    - テキストデータの分析や検索に利用されます.



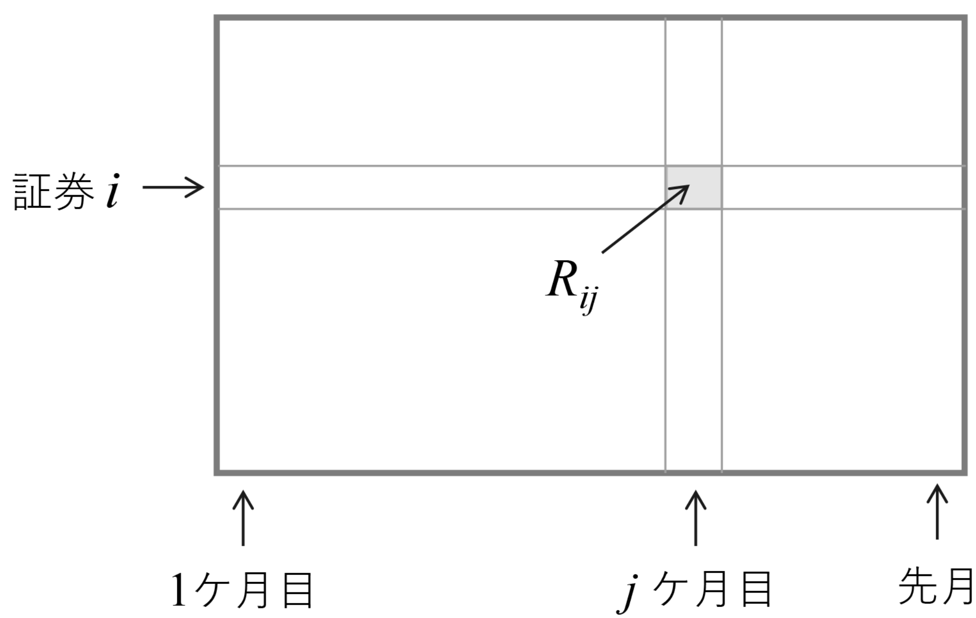
行列は どのように生じるのでしょうか (3/4)

- 音響信号の分析（➪ 3-5-4 音響処理・音声認識技術）
  - 時刻 t における周波数 ω の信号成分の強さ $Y_{\omega t}$ を並べると，行列 Y ができます.
    - こうして，非負の実行列が生じます.
      - 各成分は,「強さ」を表すので 0 以上です.



行列は どのようにして生じるのでしょうか (4/4)

- 証券の収益率の月次データ
  - 証券 i の月 j における収益率を R_{ij} とおけば，行列 R ができます.
    - こうして，実行列が生じます.
      - 損失が生じた場合は $R_{ij} < 0$ なので，一般に正・負どちらの成分ももちます.
    - ポートフォリオ（運用証券の組合せ）の決定などに用いられます.

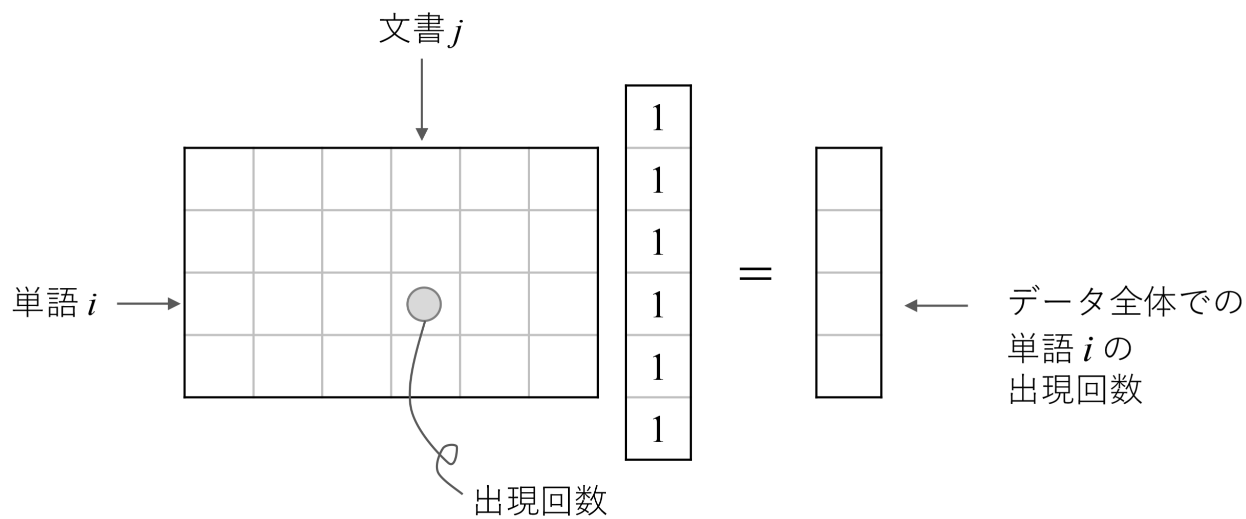


線形代数は どんな役に立つのでしょうか (1/5)

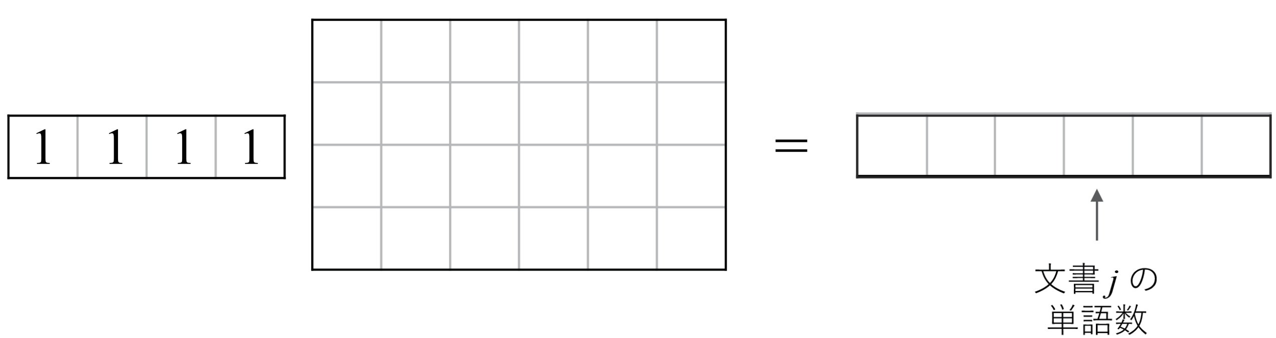
- データ点間の類似度（➪ 3-7 言語・知識）
  - データが n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_i \ (i = 1, \ldots, d)$ として与えられているとき，$\boldsymbol{x}_i$ と $\boldsymbol{x}_j$ の類似度の指標として $\dfrac{\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{x}_j}{\|\boldsymbol{x}_i\| \, \|\boldsymbol{x}_j\|}$ が用いられることがあります.
- また，線形代数は，線形方程式系を解くために用いられています.
- そのほか，ここでは解説しませんが，データ分析の手法として，次のような場面で用いられています.
  - 主成分分析，画像処理などでの低ランク行列近似（特異値分解），音響信号処理などでの非負行列因子分解，多次元データの可視化のための多様体学習（固有値問題）など.

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (2/5)

- 単語文書行列に対して，
  - 右から $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^\top$ を乗じると，

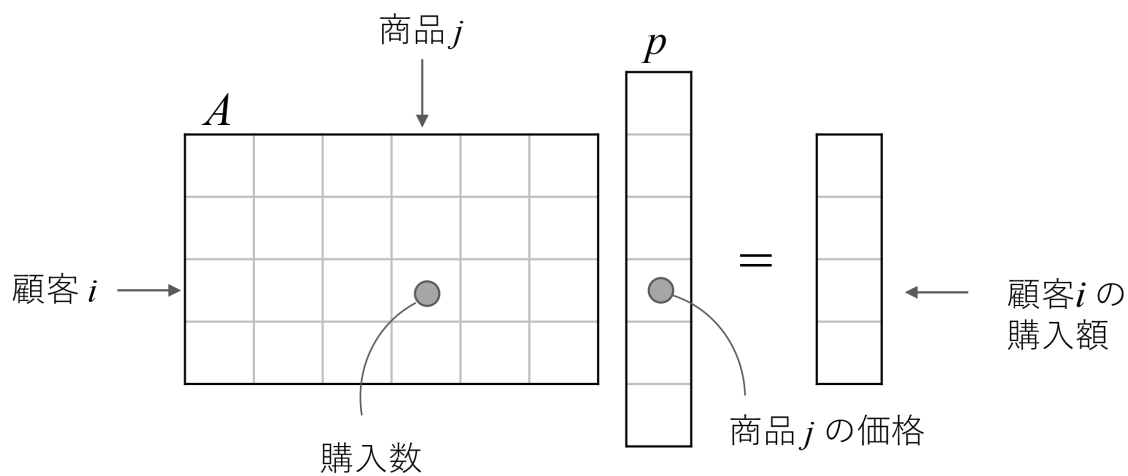


  - 左から $\mathbf{1}^\top = (1, \ldots, 1)$ を乗じると，



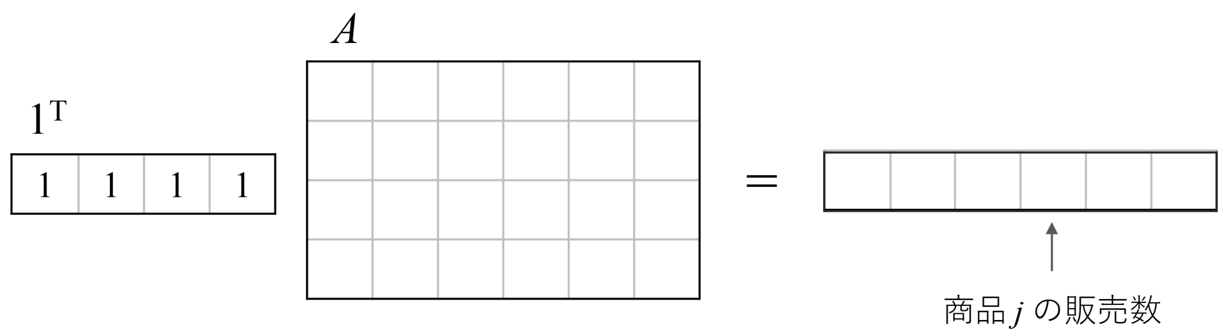
線形代数は どんな役に立つのでしょうか (3/5)

- 購買データ (1/2)
  - ある日の POS データから，来店者 i が商品 j を購入した数 A_{ij} を集計して，行列 $A = (A_{ij})$ をつくります．
  - 一方，商品 j の価格を p_j とおき，列ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_j)$ をつくります．
    - $A\boldsymbol{p}$ を計算すると，

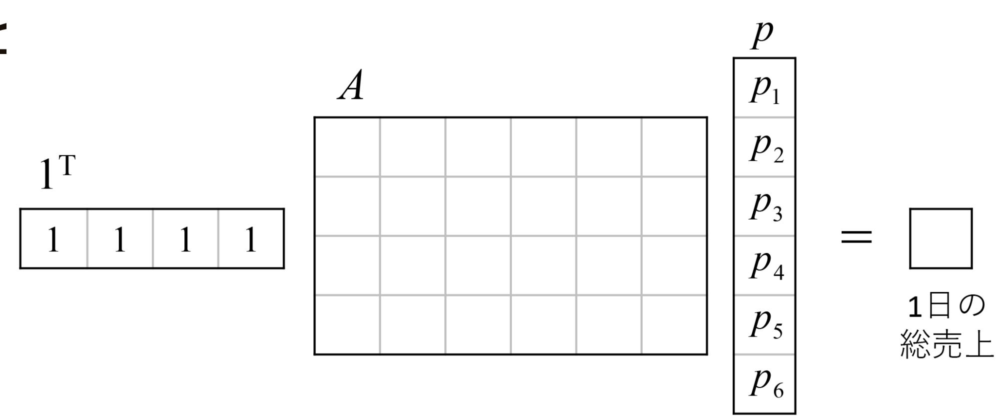


線形代数は どんな役に立つのでしょうか (3/5)

- 購買データ (2/2)
  - ある日の POS データから，来店者 i が商品 j を購入した数 A_{ij} を集計して，行列 $A = (A_{ij})$ をつくります.
  - 一方，商品 j の価格を p_j とおき，列ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_j)$ をつくります.
    - $\mathbf{1}^\top A$ を計算すると，

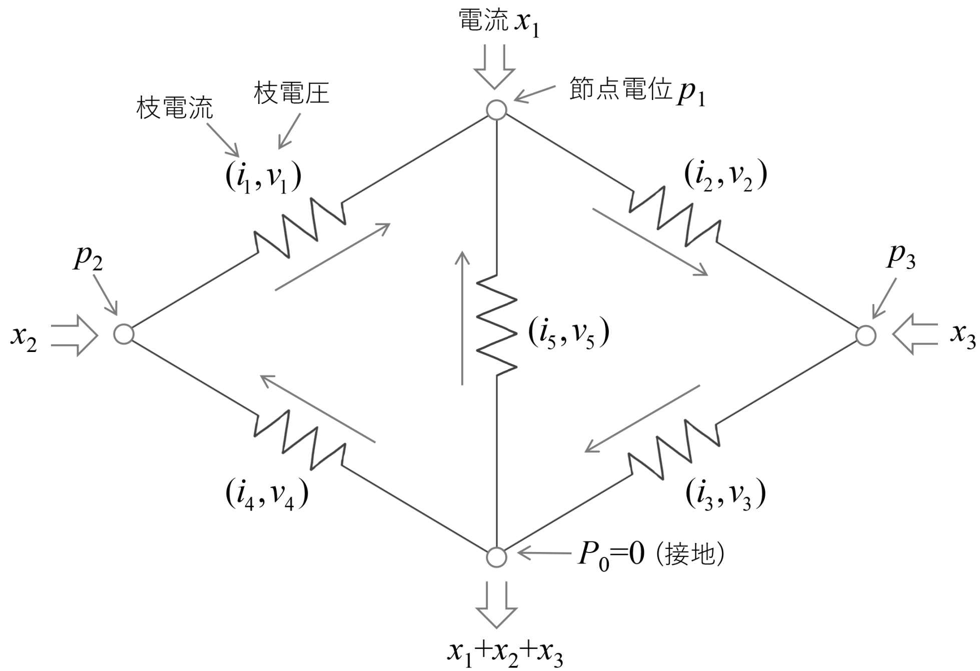


    - $\mathbf{1}^\top A\boldsymbol{p}$ を計算すると



線形代数は どんな役に立つのでしょうか (4/5)

- 電気回路 (1/2)



節点 i から節点 l に向かう枝 j があるとき $N_{ij} = 1$, $N_{lj} = -1$ とおくと行列 N ができます：

$$
\begin{array}{cc|c}
 & & \text{枝} \\
 & & \begin{array}{ccccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{array} \\
\text{節点} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

（グラフの接続行列）

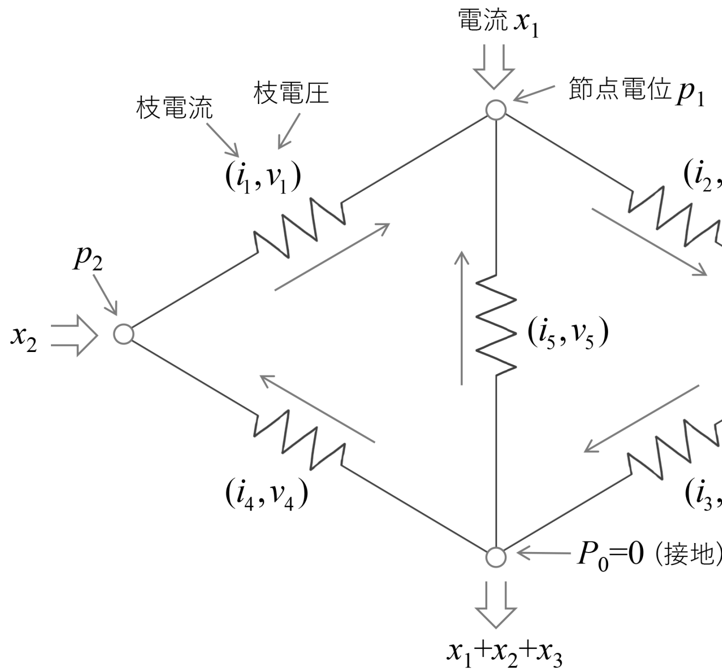
- 電流の保存則は,

$$
\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},
$$

つまり, $N\boldsymbol{i} = \boldsymbol{x}$.

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (4/5)

- 電気回路 (2/2)



節点 i から節点 l に向かう枝 j があるとき $N_{ij} = 1$, $N_{lj} = -1$ とおくと行列 N ができます：

$$
\text{節点}\quad
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

（枝は列方向）

（グラフの接続行列）

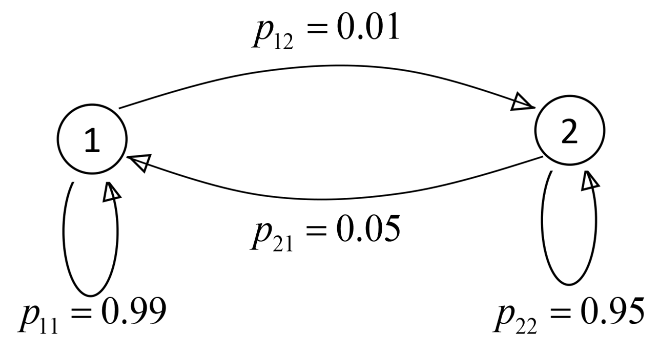
- 節点電位と枝電圧の関係は,

$$
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix},
$$

つまり, $\boldsymbol{v} = N^\top \boldsymbol{p}$.

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (5/5)

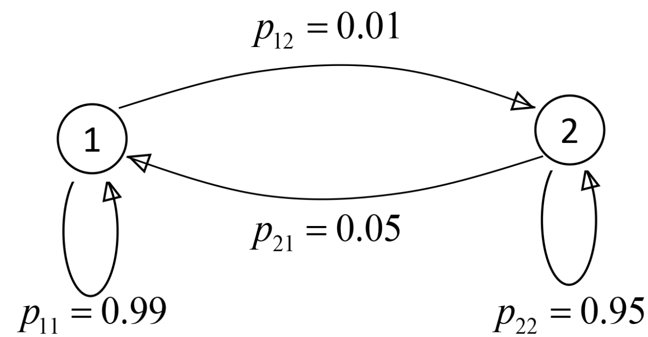
- マルコフ連鎖 (1/2)
  - 具体例として，毎年，買い換える商品で，A 社製を買うか B 社製を買うかという問題を考えましょう.
  - ① は A 社製を買うという状態，
    ② は B 社製を買うという状態として，
    次の年にどちらに推移するかの確率を
    右図のように表します.



- たとえば，今年 A 社製を買った人は，来年は 0.99 の確率で A 社製を買い，0.01 の確率で B 社製を買う，ということです.
- 確率 p_{ij} を並べると，行列 $P = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$ が生じます.
  - 成分はすべて 0 以上.
  - 行ごとの成分の和は 1.

線形代数は どんな役に立つのでしょうか (5/5)

- マルコフ連鎖 (2/2)
  - 時刻 k において，状態 (i) である確率を $y_i^{(k)}$ で表します．つまり，A 社製と B 社製のシェアの比が $y_1^{(k)} : y_2^{(k)}$ です（$y_1^{(k)} + y_2^{(k)} = 1$）．



  - 次の時刻では，
$$y_1^{(k+1)} = p_{11} y_1^{(k)} + p_{21} y_2^{(k)} ,$$
$$y_2^{(k+1)} = p_{12} y_1^{(k)} + p_{22} y_2^{(k)} .$$

   つまり，$\boldsymbol{y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} & y_1^{(k)} \end{bmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{y}^{(k+1)} = \boldsymbol{y}^{(k)} P$.

  - いま，$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}}_{=P}$ が成り立つので，この例ではシェアが $5 : 1$ が定常状態（もうそれ以上変化しない状態）です．
  - このような定常状態の存在や一意性が，実は，行列 P の性質から明らかにできます．