Teoría de Números

Prof. Yuri Rojas
Catedrático de Matemáticas RUM
AFAMaC 2006

Teoría de Números

"La matemática es la reina de las ciencias, y la teoría de los números es la reina de las matemáticas."

Karl Friedrich Gauss

Teoría de Números

Rama de las matemáticas dedicada al estudio de las propiedades de los números naturales.

Teoría de Números

1. Números primos y compuestos
2. Pruebas de divisibilidad
3. Criba de Eratóstenes
4. Teorema fundamental de la aritmética

Teoría de Números

5. Números perfectos
6. Números deficientes y abundantes
7. Números amigables
8. Primos de Mersenne

Teoría de Números

9. Conjetura de Goldbach
10. Números primos gemelos
11. Último Teorema de Fermat
12. Máximo común divisor

Teoría de Números

13. Mínimo común múltiplo
14. La sucesión de Fibonacci
15. La razón dorada
16. Cuadrados mágicos

1. Números primos y compuestos

- Números naturales (números de conteo o enteros positivos)

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

1. Números primos y compuestos

Divisibilidad

- El número natural a es <u>divisible</u> por el número natural b si existe un número natural k tal que a = bk.

- a es <u>divisible</u> por b si al dividir a por b se obtiene un residuo de 0.

1. Números primos y compuestos

Divisibilidad

- Ejemplo: $a = 36$ es divisible por $b = 3$ porque existe el número natural $k = 12$ tal que $36 = 3 \times 12$

- Ejemplo: 27 no es divisible por 7 porque al dividir 27 por 7, se obtiene residuo $6 \neq 0$.

1. Números primos y compuestos

Divisibilidad

- Factor o divisor
- Múltiplo
- Factorización

1. Números primos y compuestos

Divisibilidad

Ejemplo: el número 30 tiene los siguientes:

- factores (o divisores): 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
- múltiplos: 30, 60, 90, 120, ...
- factorizaciones: 1 x 30, 2 x 15, 3 x 10, 5 x 6

1. Números primos y compuestos

Divisibilidad

- Números pares son divisibles por 2.
- Números impares son aquellos que no son divisibles por 2.

1. Números primos y compuestos

Divisibilidad

- Ejercicio: Encuentre los factores de:

a) 36
b) 50
c) 11

1. Números primos y compuestos

Números primos

Un número natural mayor de 1 que tiene como factores sólo el 1 y el número mismo se denomina un <u>número primo</u>.

1. Números primos y compuestos

Números compuestos

Un número natural mayor de 1 que no es primo se llama un número compuesto.

1. Números primos y compuestos

¡OJO!

El número natural 1
no se considera ni primo ni compuesto.

1. Números primos y compuestos

¡OJO!

El número natural 2
es el único par que es primo.

1. Números primos y compuestos

¡OJO!

Para efectos de este material, el número 0 es divisible por cualquier número natural.

1. Números primos y compuestos

Definición alterna

Un número primo es un número natural que tiene exactamente dos factores diferentes.

1. Números primos y compuestos

Ejemplo: Decida si cada uno de los siguientes números es primo o compuesto.

a) 97
b) 59,872
c) 697

1. Números primos y compuestos

Usos de los números primos

- Códigos de seguridad
- Comunicaciones

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 2 (es decir, es par) si

- termina en 0, 2, 4, 6 u 8 (es decir, su último dígito es par)

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 9,489,994

Termina en 4.
Por lo tanto, es divisible por 2.

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 3 si

- la suma de sus dígitos es divisible por 3.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 897,432

8+9+7+4+3+2=33.

33 es divisible por 3.

Por lo tanto, es divisible por 3.

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 4 si

- los últimos dos dígitos forman un número divisible por 4.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 7,693,432

32 es divisible por 4.
Por lo tanto, es divisible por 4.

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 5 si

- el número termina en 0 ó 5.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 7,635,840

Termina en 0.
Por lo tanto, es divisible por 5.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 7,635

Termina en 5.
Por lo tanto, es divisible por 5.

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 6 si

- el número es divisible por 2 y también es divisible por 3.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 27,342

Termina en 2: es divisible por 2.
2+7+3+4+2=18: es divisible por 3.
Por lo tanto, es divisible por 6.

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 7 si

- al duplicar el último dígito y restar este valor del número original, sin su último dígito, el resultado obtenido es divisible por 7.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 784

Al duplicar el 4, obtenemos 8.
78-8=70, un múltiplo de 7.
Por lo tanto, es divisible por 7.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplos adicionales:

142,891
409,311
458,485
287,824

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 8 si

- los últimos tres dígitos dan un número divisible por 8.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 1,437,816

816 es divisible por 8.

Por lo tanto, es divisible por 8.

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 9 si

- la suma de los dígitos es divisible por 9.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 428,376,105

4+2+8+3+7+6+1+0+5=36.
36 es divisible por 9.
Por lo tanto, es divisible por 9.

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 10 si

- el último dígito es 0.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 428,376,100

Termina en 0.

Por lo tanto, es divisible por 10.

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 11 si

- al restar las siguientes dos sumas -la de los dígitos alternos y la de los demás dígitos (comenzando a la izquierda)- el resultado es divisible por 11.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 8,493,969

8+9+9+9=35.

4+3+6=13.

35-13=22.

22 es divisible por 11.

Por lo tanto, es divisible por 11.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplos adicionales:

847,667,942
453,896,248
552,749,913

2. Pruebas de divisibilidad

Un número natural es divisible por 12 si

- el número es divisible igualmente por 4 y por 3.

2. Pruebas de divisibilidad

Ejemplo: 376,984,032

32 es divisible por 4: es divisible por 4.
3+7+6+9+8+4+0+3+2=42, un múltiplo de 3: es divisible por 3.
Por lo tanto, es divisible por 12.

3. Criba de Eratóstenes

- Método sistemático para identificar números primos.
- Denominado en honor del geógrafo, poeta, astrónomo y matemático griego (276 - 192 AC).

3. Criba de Eratóstenes

Instrucciones

- Construya una tabla comenzando con el 2.
- Comenzando con el 2, halle y circule los primos y tache los múltiplos de ese primo.
- Continúe para todos los primos menores o iguales a la raíz cuadrada del último número de la lista.

LA CRIBA DE ERATiS TENES (2-100)

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
99	100												

LA CRIBA DE ERATīS TENES (101-224)

		101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126
127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154
155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168
169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182
183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196
197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224

4. Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número natural compuesto puede expresarse de forma única como el producto de números primos (excepto por el orden de los factores).

4. Teorema Fundamental de la Aritmética

Ejercicio: Determine la factorización prima de cada uno de los siguientes números compuestos:

a) 90
b) 504
c) 1,183

4. Teorema Fundamental de la Aritmética

Ejercicio: Determine el número natural más pequeño que sea divisible por todos los números siguientes:
2, 3, 4, 6, 8, 9.

¿Cierto o falso?

- Todo número natural es divisible por 1.
- Ningún número natural es a la vez primo y compuesto.
- No existen números primos pares.
- El 1 es el número primo más pequeño.
- Si 16 divide a un número natural, entonces 2, 4 y 8 también lo dividen.

¿Cierto o falso?

- El número compuesto 50 tiene exactamente dos factorizaciones primas.
- El número primo 53 tiene exactamente dos factores.

Ejercicio

Determine todos los factores de:

a) 12
b) 18
c) 28
d) 63
e) 120
f) 184

Decida si cada uno de los siguientes números es divisible por:
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

a) 315
b) 7,425
c) 1,092
d) 4,488
e) 630
f) 25,025
g) 45,815
h) 5,940
i) 123,456,789
j) 987,654,321

Determine la factorización prima de cada uno de los siguientes números compuestos:

a) 240
b) 300
c) 360
d) 425
e) 663
f) 885
g) 1,280
h) 1,575

Ejercicio

Escriba un número de 6 dígitos que consista de tres dígitos seguidos de los mismos tres dígitos, en el mismo orden. Divídalo por 13. Divida el resultado por 11. Divida el resultado por 7. ¿Qué observa? ¿Por qué piensa que esto ocurre?

5. Números perfectos

Los <u>divisores propios</u> de un número natural incluyen todos los divisores del número excepto el número mismo.

5. Números perfectos

Ejemplo:
Los divisores de 8 son:
1, 2, 4 y 8.
Los divisores propios de 8 son:
1, 2 y 4.

5. Números perfectos

Un <u>número perfecto</u> es un número natural que sea igual a la suma de sus divisores propios.

5. Números perfectos

Comenzando con el 2, coteje todos los números naturales hasta hallar el número perfecto más pequeño.

5. Números perfectos

Ejercicio: Verifique que los siguientes son números perfectos:

a) 28
b) 496
c) 8,128

5. Números perfectos

- Hasta hace una década sólo se conocían 33 números perfectos.
- Todos los números perfectos conocidos son pares.
- Cualquier número perfecto par terminará en 6 ó 28.

6. Números deficientes y abundantes

Un número natural es:

- deficiente si es mayor que la suma de sus divisores propios.
- abundante si es menor que la suma de sus divisores propios.

6. Números deficientes y abundantes

- Un número deficiente no tiene suficiente divisores propios para que la suma de todos sea mayor que él mismo.
- Un número abundante tiene más que suficientes divisores propios para que la suma de todos sea mayor que él mismo.

6. Números deficientes y abundantes

Ejercicio: Decida si el número dado es deficiente o abundante.

a) 8
b) 10
c) 12
d) 36

7. Números amigables

Ejercicio:

Halle y sume los divisores propios de 284.

Ahora, halle y sume los divisores propios de 220.

¿Qué observa?

7. Números amigables

Dos números naturales a y b son amigables si la suma de los divisores propios de a es b, y la suma de los divisores propios de b es a.

7. Números amigables

- El par más pequeño de números amigables es 220 y 284.
- El próximo par que se descubrió fue 17,296 y 18,416.
- En 1866 Nicolo Paganini, de 16 años, descubrió que 1,184 y 1,210 se habían pasado por alto. (Verifíquelo.)

7. Números amigables

Una extensión de la idea de los números amigables son los <u>números sociables</u>, que consisten de una cadena de números en que la suma de los divisores propios de cada número es el número siguiente de la cadena, y la suma de los divisores propios del último número de la cadena es el primer número.

7. Números amigables

- Una cadena de 5 eslabones de números sociables es:

  12,496
  14,288
  15,472
  14,536
  14,264

7. Números amigables

- El número 14,316 comienza una cadena de 28 eslabones de números sociables.
- Una cadena de 3 números sociables se llama un “clan”. Hasta ahora, no se ha encontrado clan alguno.

8. Primos de Mersenne

Un primo de Mersenne es un número primo que se puede escribir de la forma

$$2^p-1,$$

donde p es un número primo.

8. Primos de Mersenne

- El monje francés Marin Mersenne (1588-1648) estudió los números primos de esta forma.
- Halle los primeros 4 primos de Mersenne.
- Los antiguos creían que todos los números de esa forma eran primos.
- Cuando p = 11, resulta 2,047, que no es primo.
- Hasta recientemente, se conocían sólo 33 primos de Mersenne.

9. Conjetura de Goldbach

Christian Goldbach (1690-1764):

“Todo número par mayor de 2 puede escribirse como la suma de dos números primos.”

9. Conjetura de Goldbach

Ejemplos:

$$4 = 2 + 2$$
$$6 = 3 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 5 + 5 = 3 + 7$$

9. Conjetura de Goldbach

Ejercicio: Escriba cada número par siguiente como la suma de dos números primos:

a) 14
b) 18
c) 22
d) 26
e) 32
f) 60

10. Números primos gemelos

Los números primos que difieren por dos se denominan primos gemelos.

Un ejemplo serían el 3 y el 5.

10. Números primos gemelos

Ejercicio: Encuentre cuatro pares de primos gemelos.

10. Números primos gemelos

- Hasta hace poco se desconocía si hay un número infinito de pares de primos gemelos.
- Euclides demostró hace más de 2,000 años que hay un número infinito de números primos.

La demostración de Euclides

- Supón que M = 2x3x5x7 + 1. Al dividir M por c/u de los cuatro primeros primos, el residuo es 1.

La demostración de Euclides

- Para demostrar que el número de números primos es infinito, probemos que no existe un número primo más grande.
- Haremos una demostración por contradicción.

La demostración de Euclides

- Suponga que exite un número primo más grande. Llámelo P.
- Forme el número
  $M = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times P + 1.$
  donde p_1 , p_2 , p_3 , ... son los primos menores o iguales a P.

La demostración de Euclides (cont.)

- M tiene que ser primo o compuesto.
- Si M es primo, es mayor que P, una contradicción.
- Si M es compuesto, debe tener un factor primo, pero ninguno de los primos menores o iguales a P son factores de M, ya que la división por cada uno tendría residuo 1, otra contradicción. [QED]

11. El último "teorema" de Fermat

- Pierre de Fermat (c1601 - 1665)
- "Para $n \geq 3$, no existen números naturales a, b, c tal que $a^n + b^n = c^n$."

11. El último “teorema” de Fermat

- Si n = 2, el teorema de Pitágoras.
- Andrew Wiles, matemático de Princeton, lo demostró en 1993.

¿Cierto o falso?

- Hay un número infinito de números primos.
- Los números primos 2 y 3 son primos gemelos.
- Cualquier número primo debe ser deficiente.

¿Cierto o falso?

- La ecuación 17 + 51 = 68 verifica la conjetura de Goldbach para el número 68.
- El número 2^5-1 es un ejemplo de un primo de Mersenne.
- Un número natural mayor de 1 será uno y solamente uno de los siguientes: deficiente, perfecto o abundante.

Ejercicio

- Existen cuatro números abundantes entre 1 y 25. Hállelos. (Todos son pares y ningún número primo es abundante.)

Ejercicio

- M = 2 + 1 = 3 (3 es primo)
- M = 2x3 + 1 = 7 (7 es primo)
- M = 2x3x5 + 1 = 31 (31 es primo)
- M = 2x3x5x7 + 1 = 211 (211 es primo)
- M = 2x3x5x7x11 + 1 = 2,311 (2,311 es primo)

- M = 2x3x5x7x11x13 + 1 ¿es primo o compuesto?
  Si es compuesto, dé su factorización prima.

12. Máximo común divisor (MCD)

El MCD de un grupo de números naturales es el número natural más grande que es divisor de todos los números en el grupo.

Ejemplo:

MCD (36, 54) = 18

12. Máximo común divisor (MCD)

Método directo para determinar el MCD:

Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Divisores de 54: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54

MCD (36, 54) = 18

12. Máximo común divisor (MCD)

Método de los factores primos para determinar el MCD:

$36 = 2^2 \times 3^2$

$54 = 2^1 \times 3^3$

Ahora, forme el producto de los primos con la potencia más pequeña:

MCD (36, 54) = $2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$

12. Máximo común divisor (MCD)

Ejercicio:

Verifique que el MCD (360, 2700) es 180.

12. Máximo común divisor (MCD)

Ejercicio:

Determine el MCD (720, 1000, 1800).

12. Máximo común divisor (MCD)

Ejercicio:

Determine el MCD (63, 80).

12. Máximo común divisor (MCD)

Si el MCD de dos números es 1, se les denomina <u>primos relativos</u>.

Ejemplo: En el ejercicio anterior, 63 y 80 son primos relativos.

12. Máximo común divisor (MCD)

Método de división por factores primos para determinar el MCD:

1. Escriba los números en fila.
2. Divida los números entre un primo divisor común, primero con 2, luego con 3, etc.
3. Repita el paso anterior con los cocientes.
4. El producto de los primos de los pasos 2 y 3 es el MCD.

12. Máximo común divisor (MCD)

Algoritmo de Euclides para determinar el MCD de dos números.

1. Divida el más grande por el más pequeño.
2. Divida el divisor por el residuo anterior.
3. Continúe este proceso hasta btener residuo 0.
4. El MCD = último residuo positivo.

12. Máximo común divisor (MCD)

Ejercicio: Use el algoritmo de Euclides para verificar que el MCD (90, 168) = 6.

12. Máximo común divisor (MCD)

Ejercicio: Use el algoritmo de Euclides para verificar que el MCD (90, 168) = 6.

13. Mínimo común múltiplo (MCM)

El MCM de un grupo de números naturales es el número natural más pequeño que es un múltiplo de todos los números en el grupo.

Ejemplo: MCM (10, 15) = 30

13. Mínimo común múltiplo (MCM)

Método directo para determinar el MCM:

Múltiplos de 10: 10, 20, <u>30</u>, 40, 50, 60, …

Múltiplos de 15: 15, <u>30</u>, 45, 60, …

MCM (10, 15) = 30

13. Mínimo común múltiplo (MCM)

Método de los factores primos para determinar el MCM:

$20 = 2^2 \times 5^1$ $\qquad$ $75 = 3^1 \times 5^2$

Ahora, forme el producto de todos los primos que aparezcan con la potencia más grande:
MCM (20, 75) = $2^2 \times 3^1 \times 5^2 = 4 \times 3 \times 25 = 300$.

13. Mínimo común múltiplo (MCM)

Ejercicio:

Verifique que el MCM (135, 280, 300) = 37,800.

13. Mínimo común múltiplo (MCM)

Fórmula para el MCM:

MCM (a,b) = ab / MCD (a,b)

Ejemplo: MCM (90, 168) = 90 x 168 / MCD (90, 168).

MCM (90, 168) = 15,120 / 6 = 2,520.

¿Cierto o falso?

- Dos números pares no pueden ser primos relativos.
- Dos primos diferentes deben ser primos relativos.
- Si p es primo, MCD $(p, p^2) = p$.
- Si p es primo, MCM $(p, p^2) = p^3$.

¿Cierto o falso?

- Dos números naturales deben tener por lo menos un factor en común.
- Dos números compuestos pueden ser primos relativos.

14. La sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

14. La sucesión de Fibonacci

- Proviene de un problema famoso publicado en el Liber Abaci, escrito en 1202.
- Su autor fue Leonardo de Pisa, conocido por Fibonacci.
- Cada término de la sucesión se consigue sumando los dos anteriores.

14. La sucesión de Fibonacci

Está definida por la fórmula recursiva (o de recurrencia):

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 3.$$

14. La sucesión de Fibonacci

Ejercicio: Use división larga para hallar 1/89. Observe:

- los primeros dígitos de los residuos sucesivos
- los dígitos del cociente

14. La sucesión de Fibonacci

.01
.001
.0002
.00003
.000005
.0000008
.00000013
.000000021
.0000000034
.00000000055
<u>.000000000089</u>

1 / 89 = .01123599550...

15. La razón dorada

Al hallar los cocientes de los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, surge un patrón. Estos cocientes se aproximan cada vez más al número

$$\phi = 1.6168\ldots$$

llamada la <u>razón dorada</u>.

16. Cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico es un arreglo cuadrado de números con la propiedad de que la suma a lo largo de cada fila, de cada columna y de cada diagonal sea la misma. Ese valor se llama la suma mágica.

16. Cuadrados mágicos

La suma mágica de un cuadrado mágico de tamaño n x n está dada por la fórmula

$$n\,(n^2 + 1)\,/2.$$