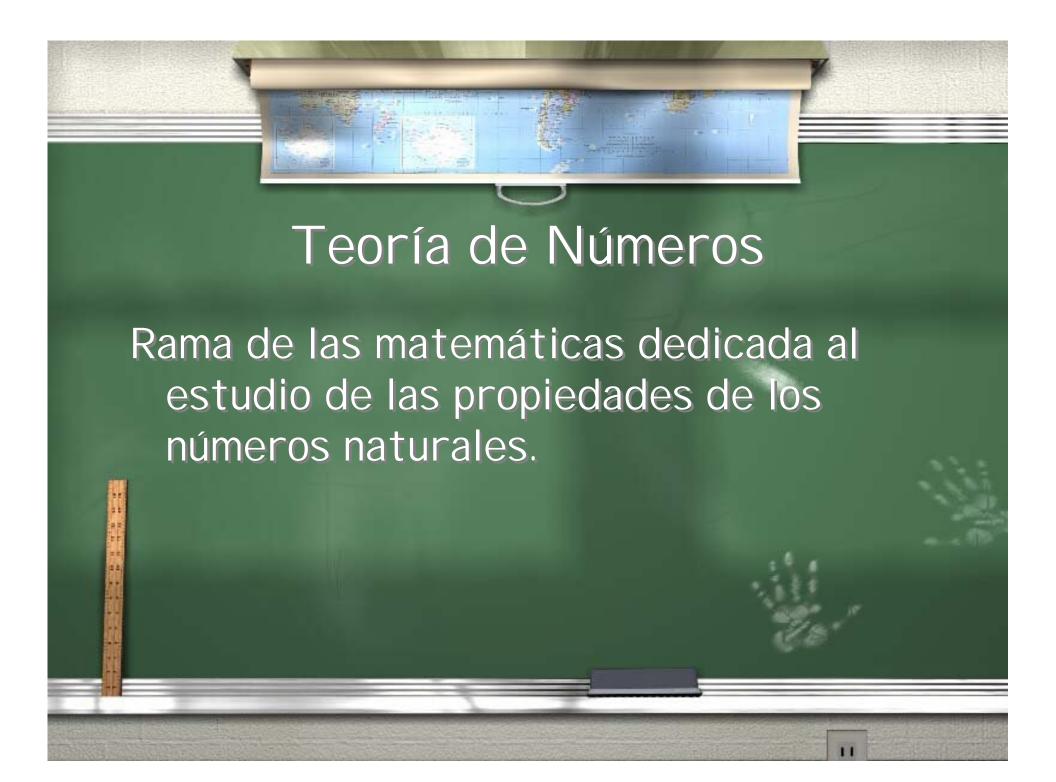




"La matemática es la reina de las ciencias, y la teoría de los números es la reina de las matemáticas."

Karl Friedrich Gauss

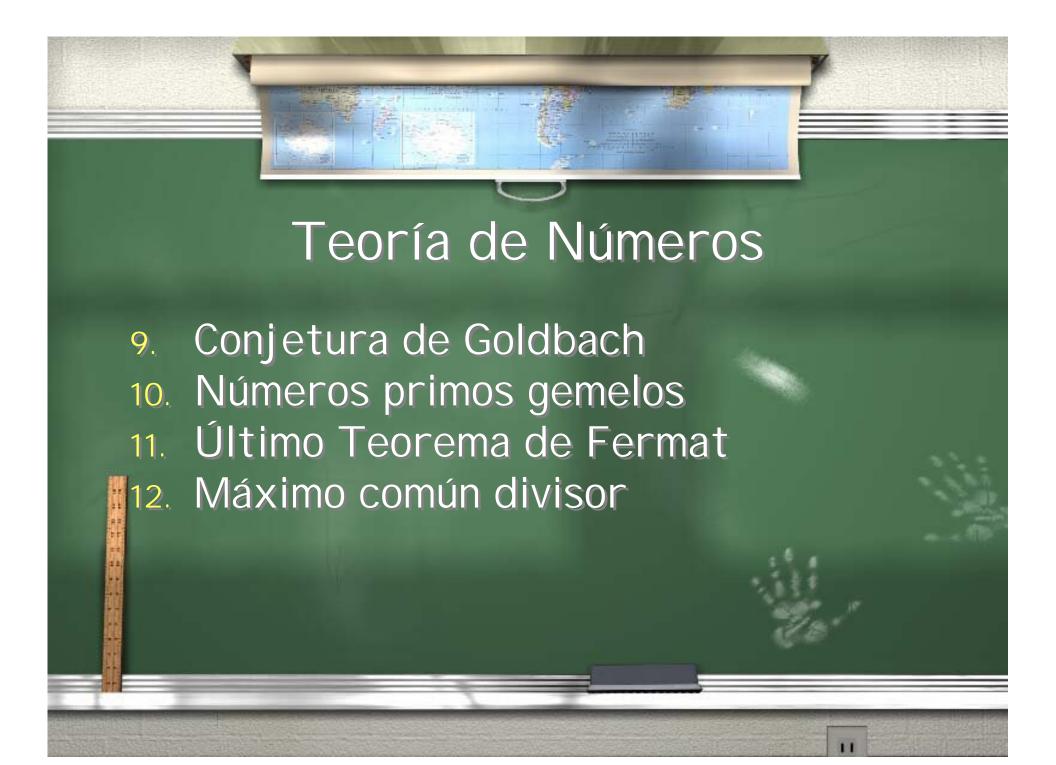


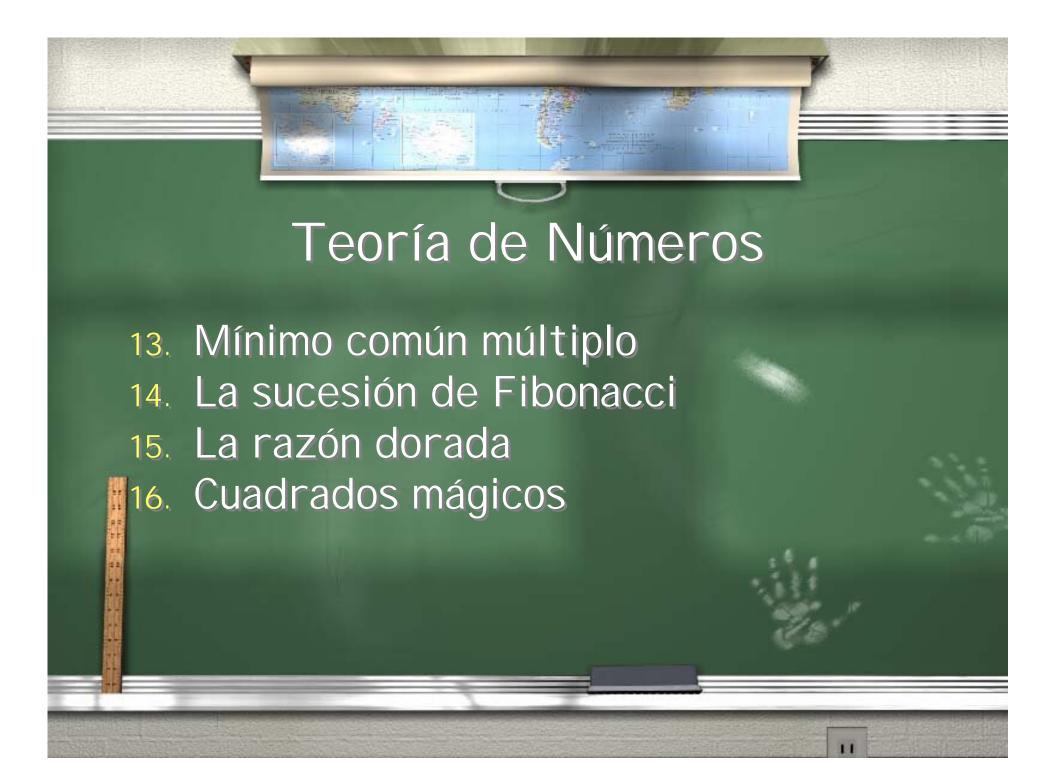


- 1. Números primos y compuestos
- 2. Pruebas de divisibilidad
- 3. Criba de Eratóstenes
- Teorema fundamental de la aritmética



- 5. Números perfectos
- 6. Números deficientes y abundantes
- 7. Números amigables
- 8. Primos de Mersenne







Números naturales (números de conteo o enteros positivos)

{1, 2, 3, 4, ...}



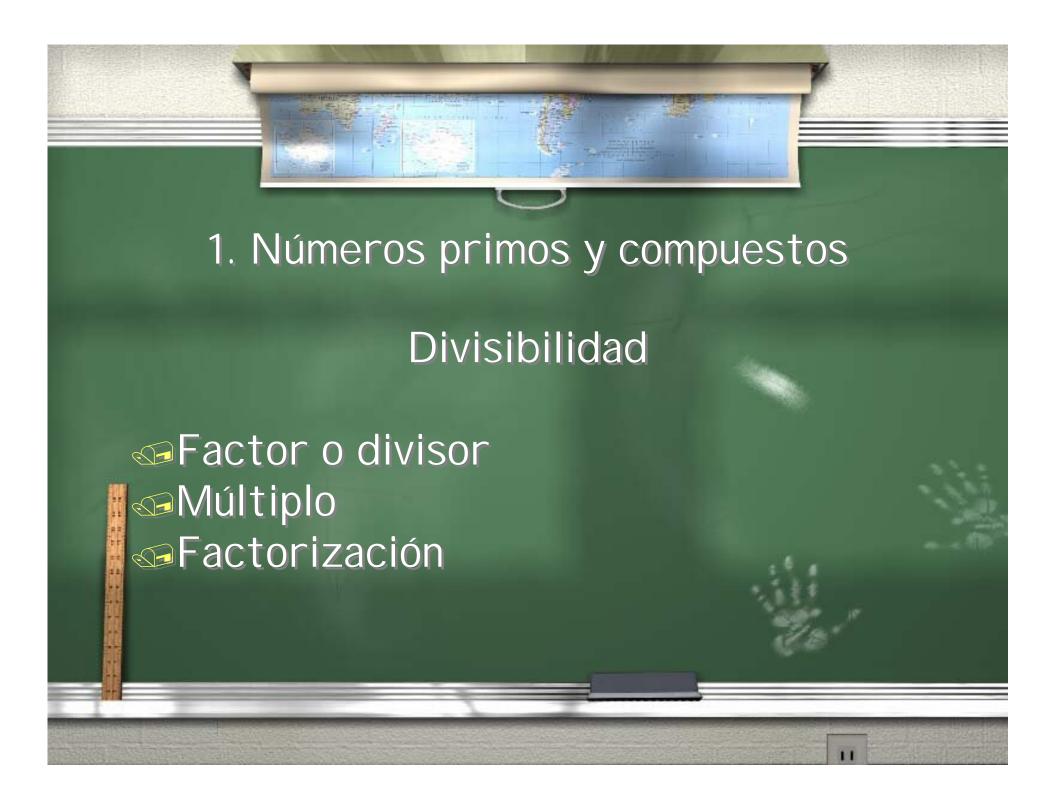
## Divisibilidad

- El número natural a es <u>divisible</u> por el número natural b si existe un número natural k tal que a = bk.
- a es <u>divisible</u> por b si al dividir a por b se obtiene un residuo de O.



## Divisibilidad

- □ Ejemplo: a = 36 es divisible por b = 3 porque existe el número natural k = 12 tal que 36 = 3 x 12
- Ejemplo: 27 no es divisible por 7 porque al dividir 27 por 7, se obtiene residuo 6 0.

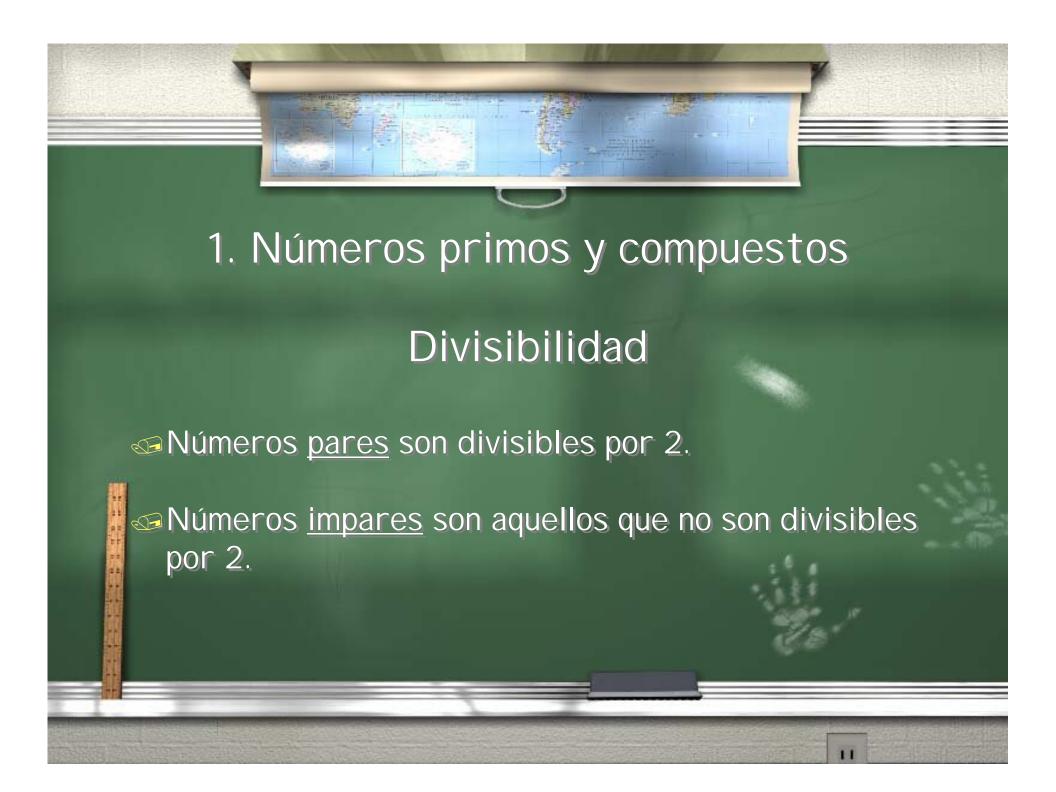


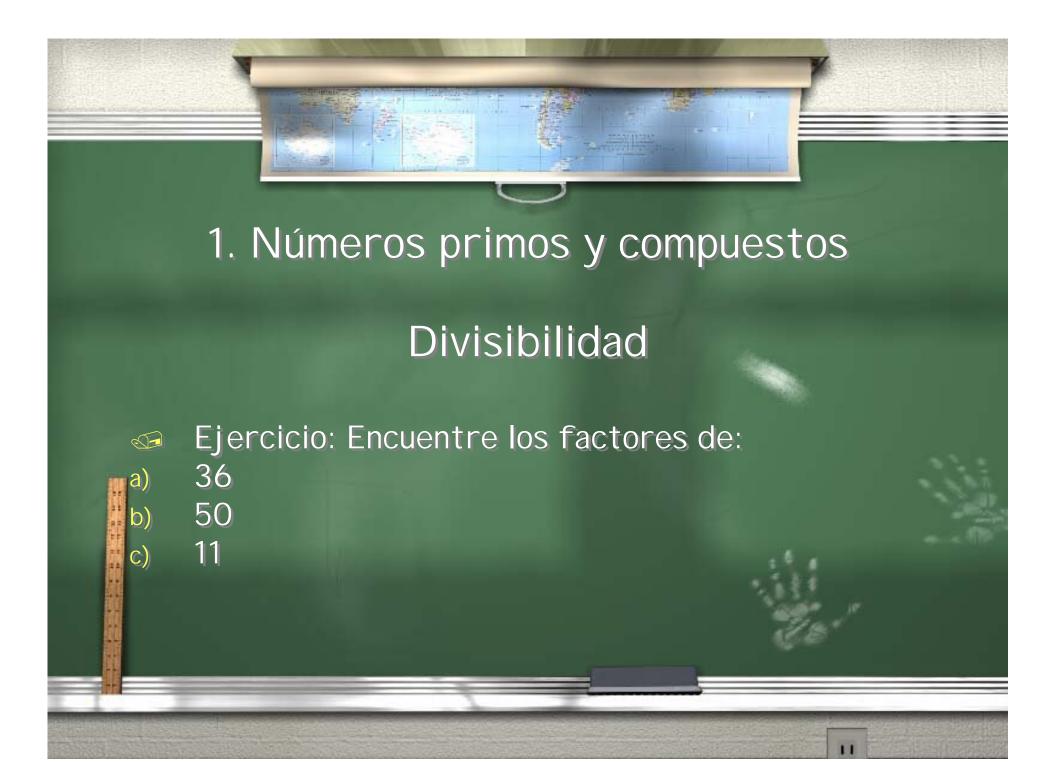


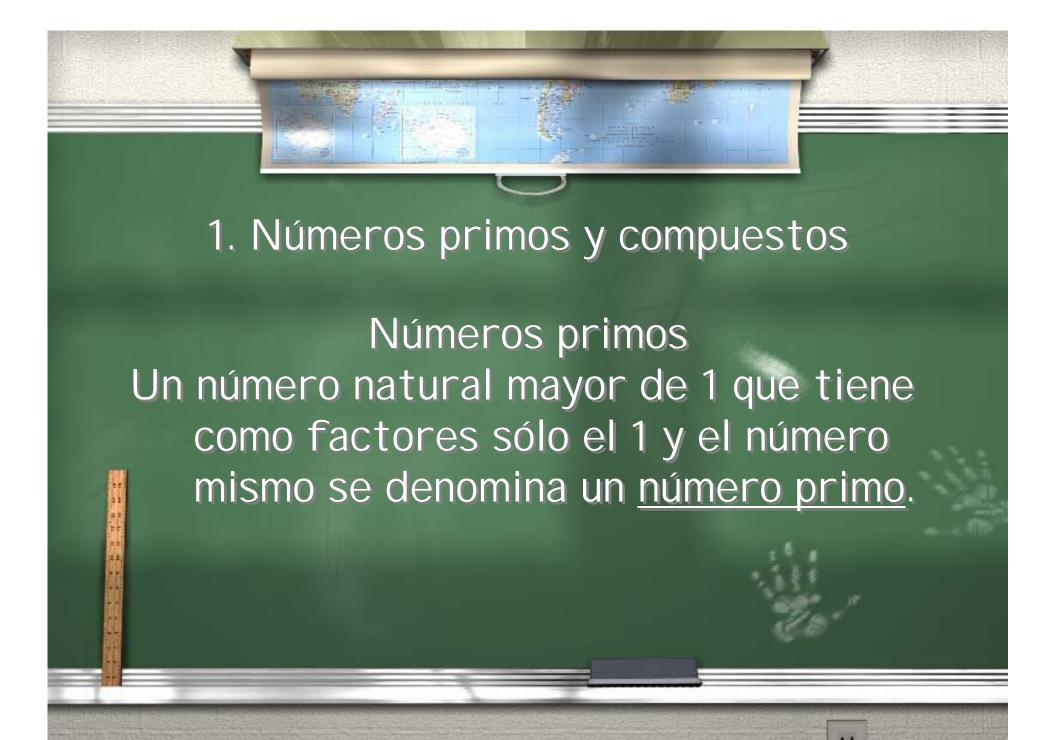
## Divisibilidad

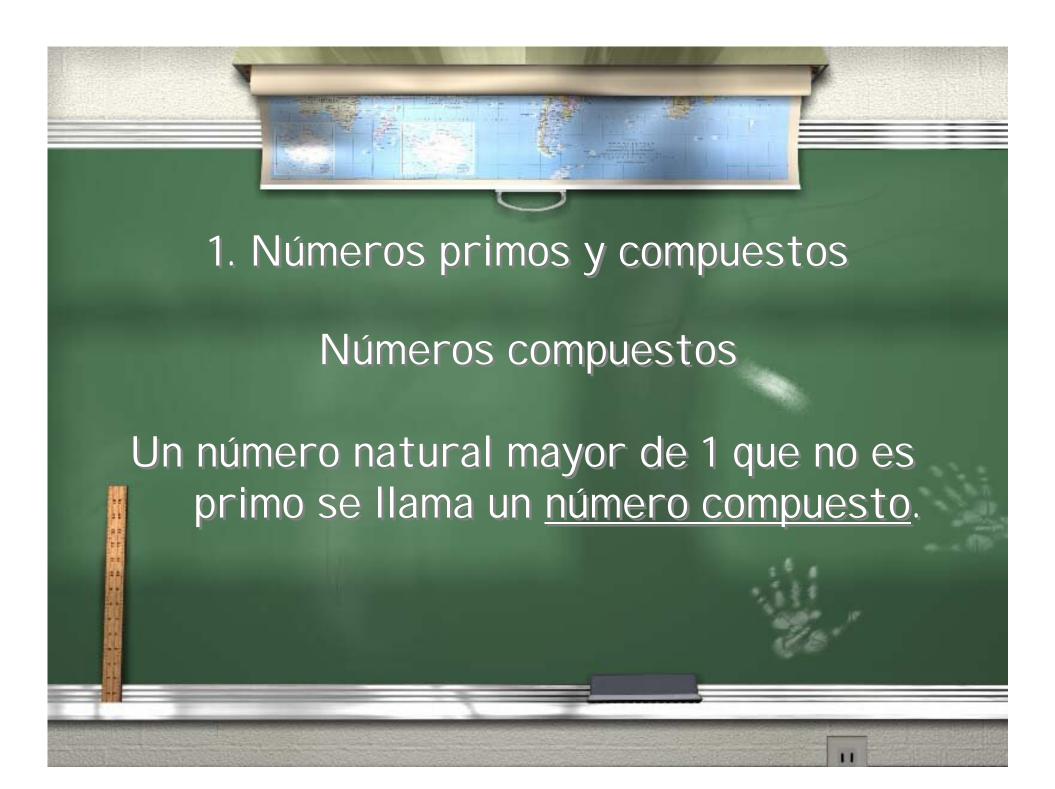
Ejemplo: el número 30 tiene los siguientes:

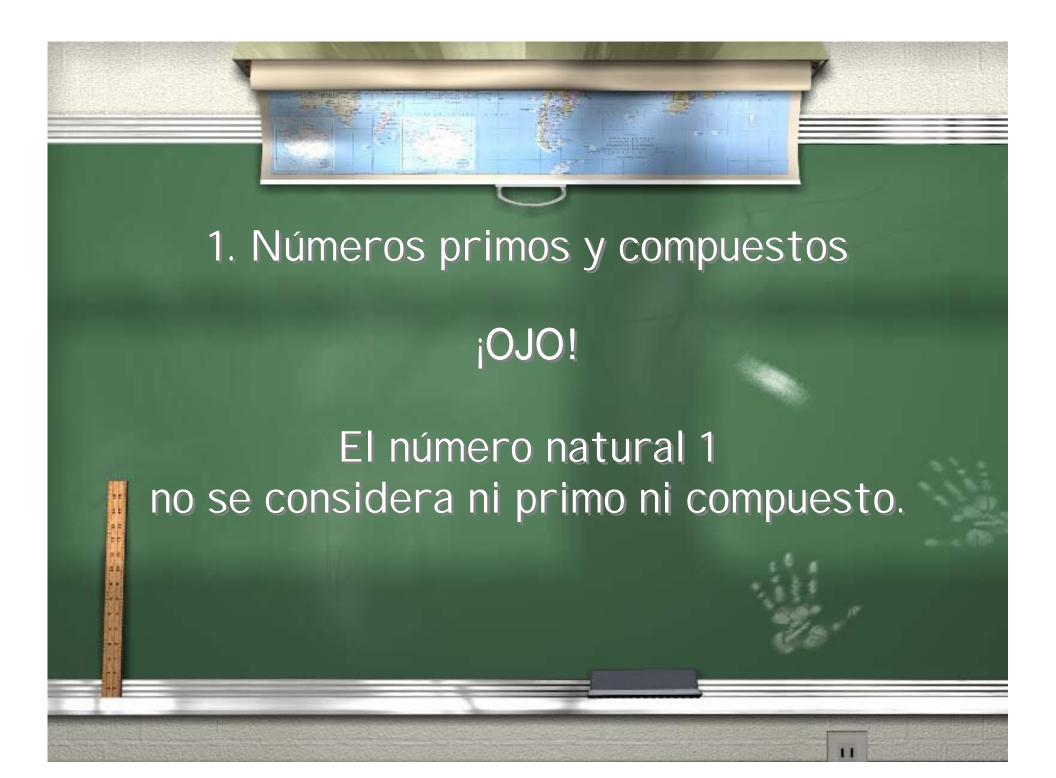
- factores (o divisores): 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
- múltiplos: 30, 60, 90, 120, ...

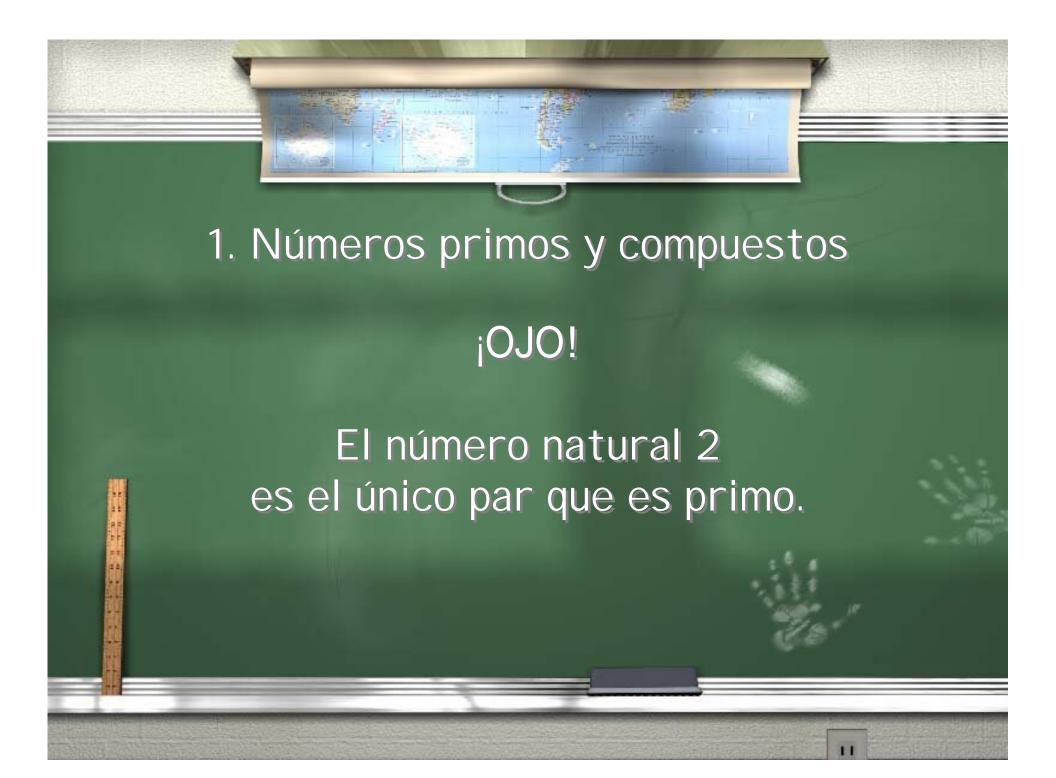


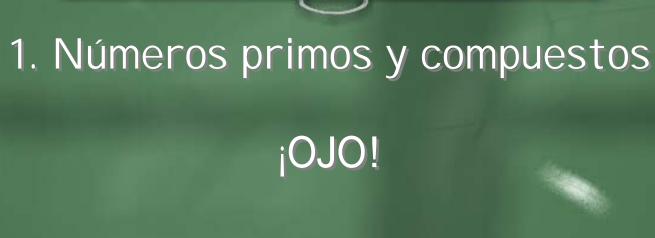




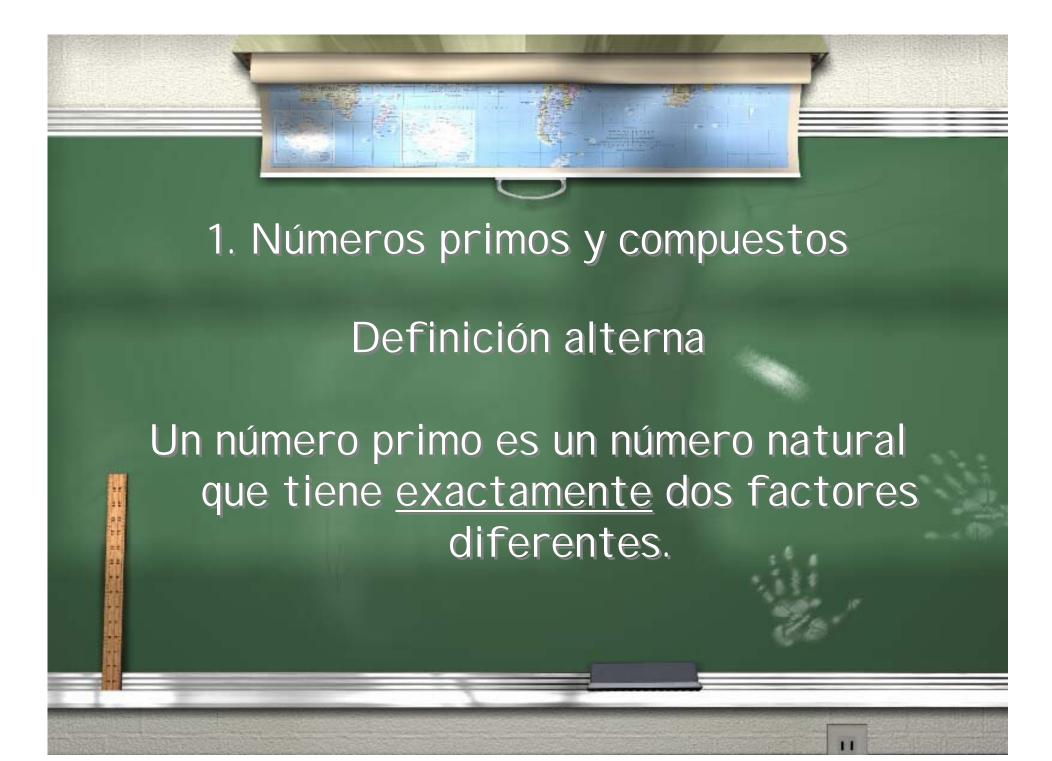








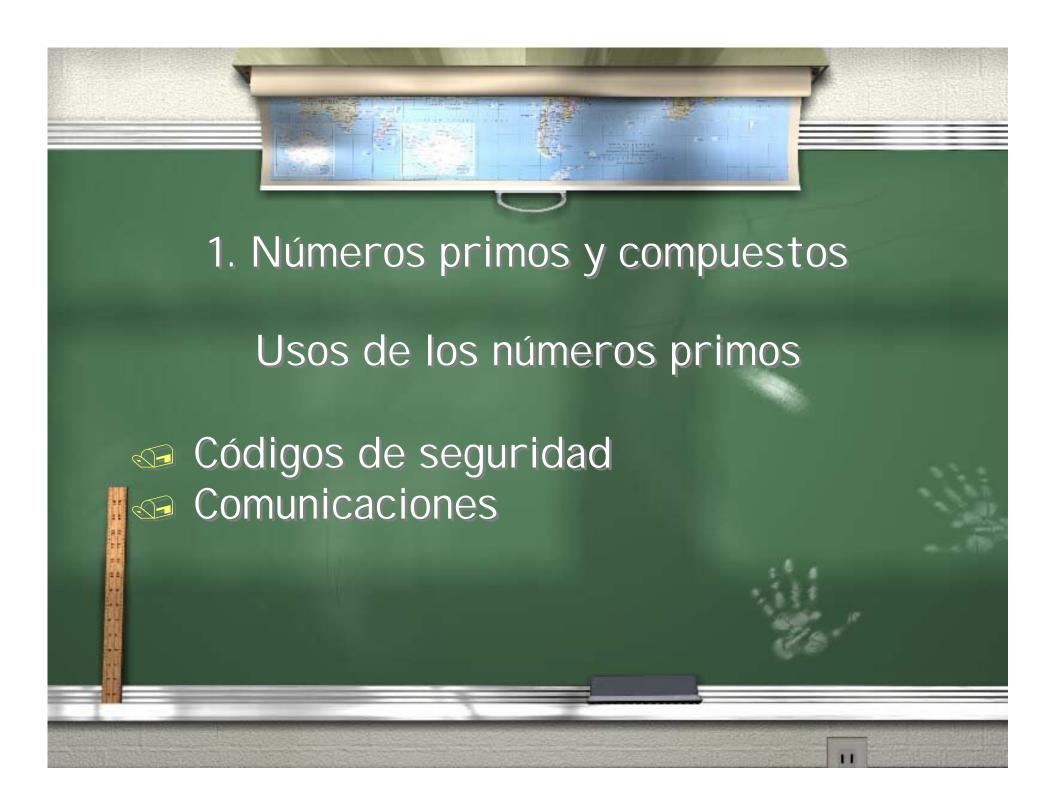
Para efectos de este material, el número O es divisible por cualquier número natural.



1. Números primos y compuestos

Ejemplo: Decida si cada uno de los siguientes números es primo o compuesto.

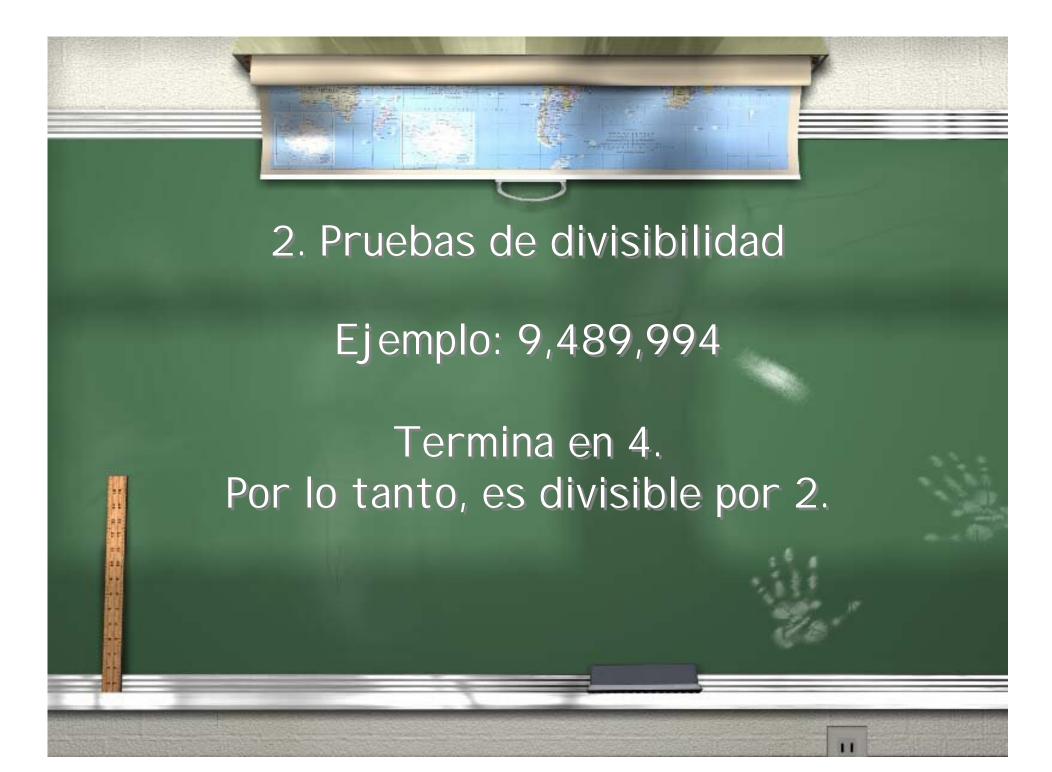
- a) 97
- b) 59,872
- c) 697

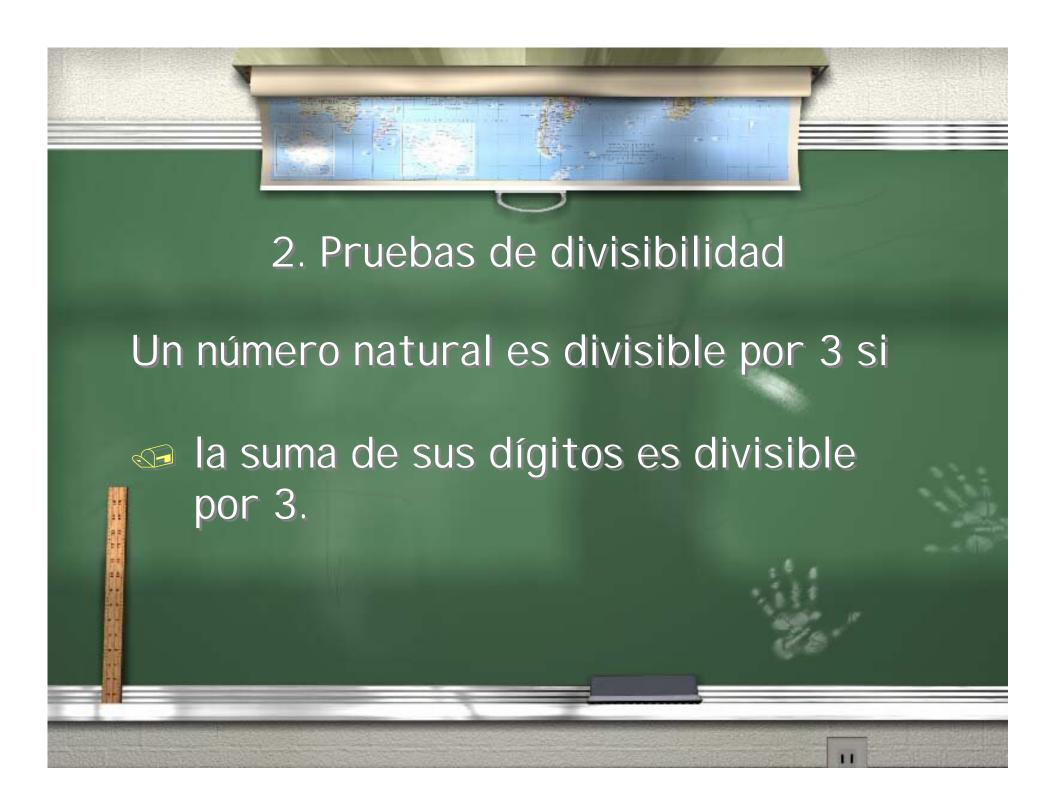




Un número natural es divisible por 2 (es decir, es par) si

termina en 0, 2, 4, 6 u 8 (es decir, su último dígito es par)

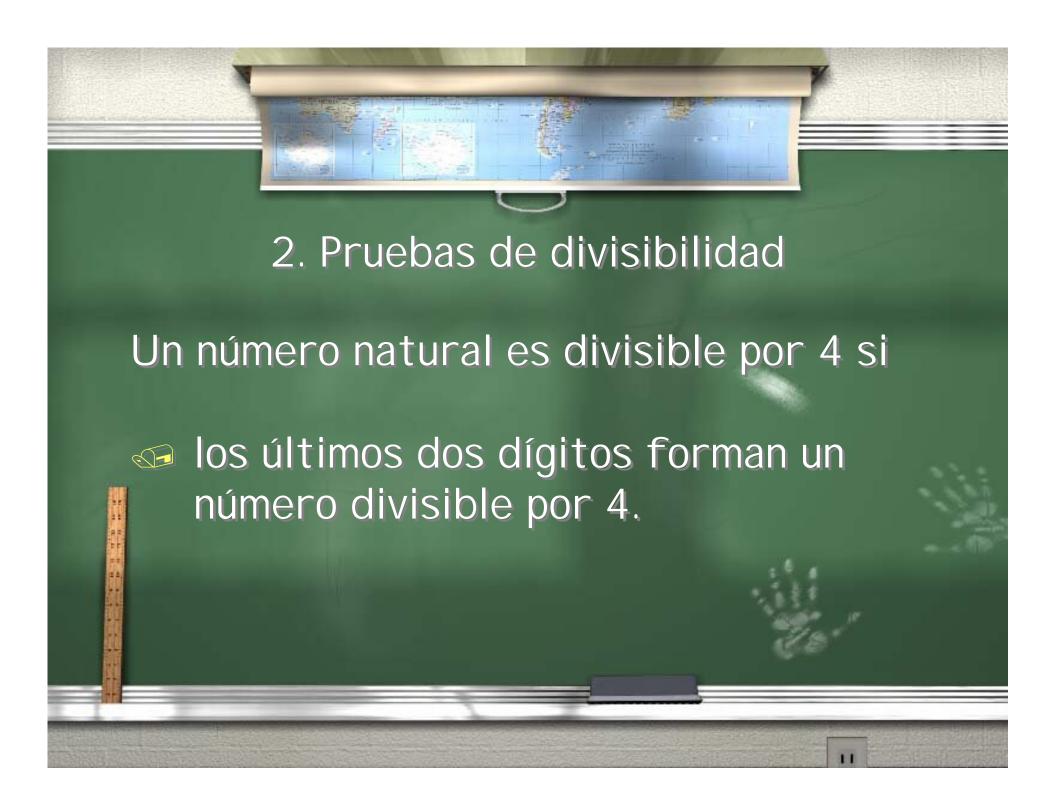


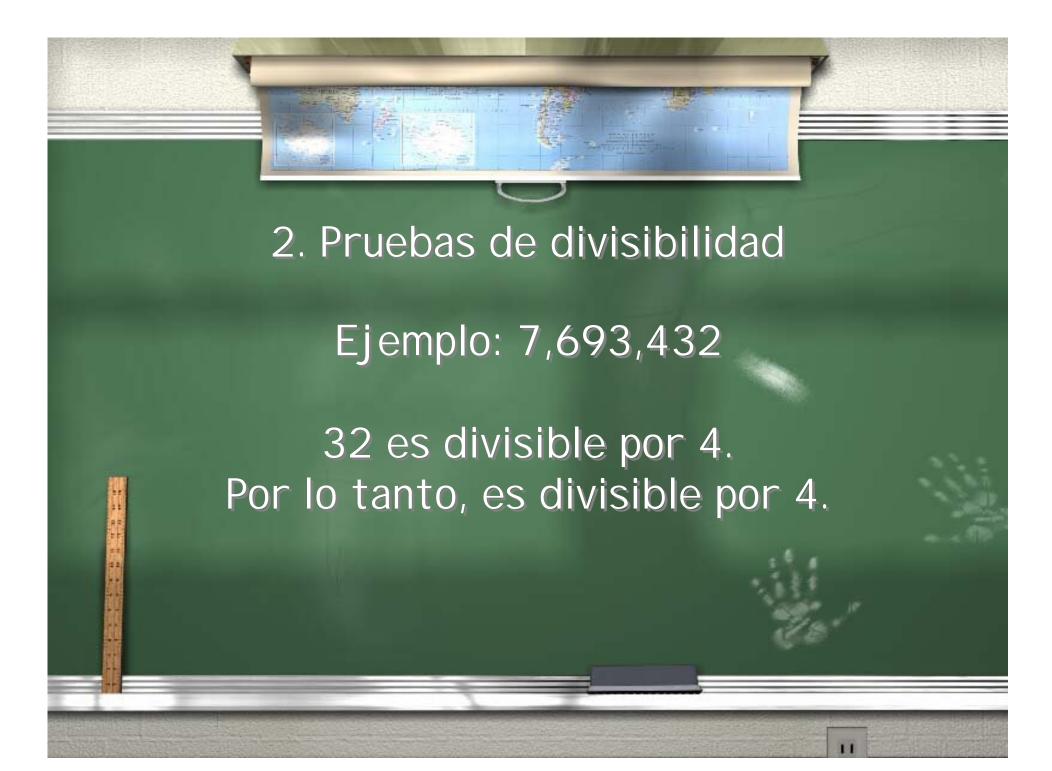


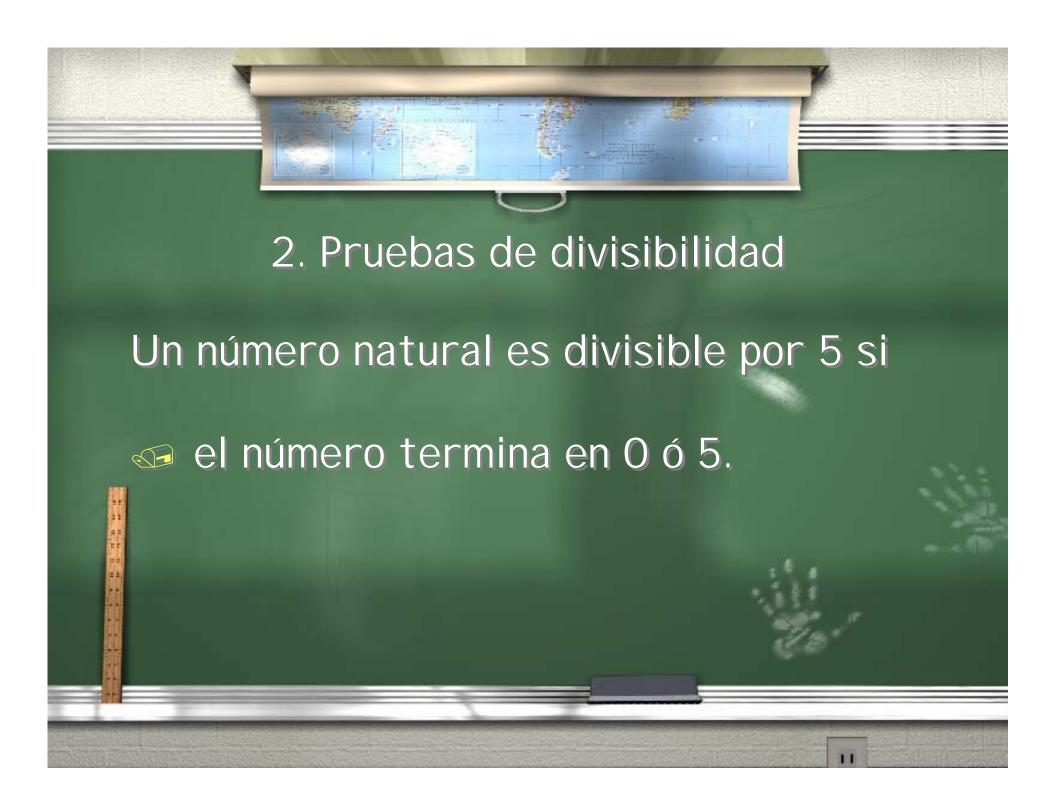


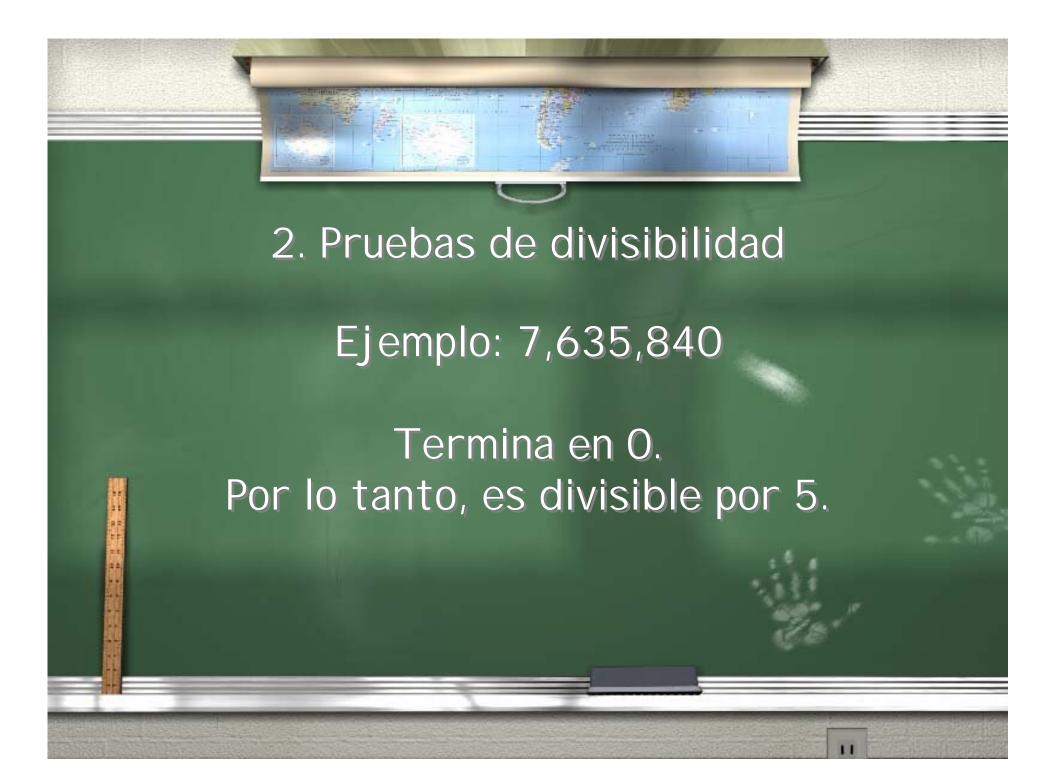
Ejemplo: 897,432

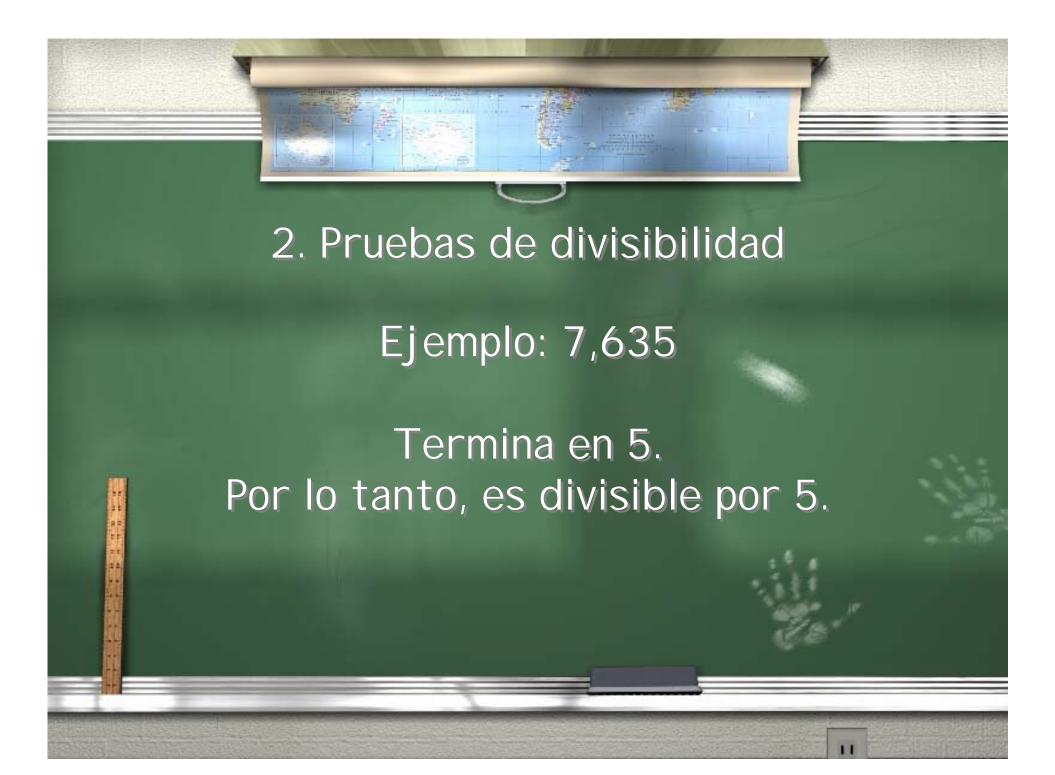
8+9+7+4+3+2=33. 33 es divisible por 3. Por lo tanto, es divisible por 3.

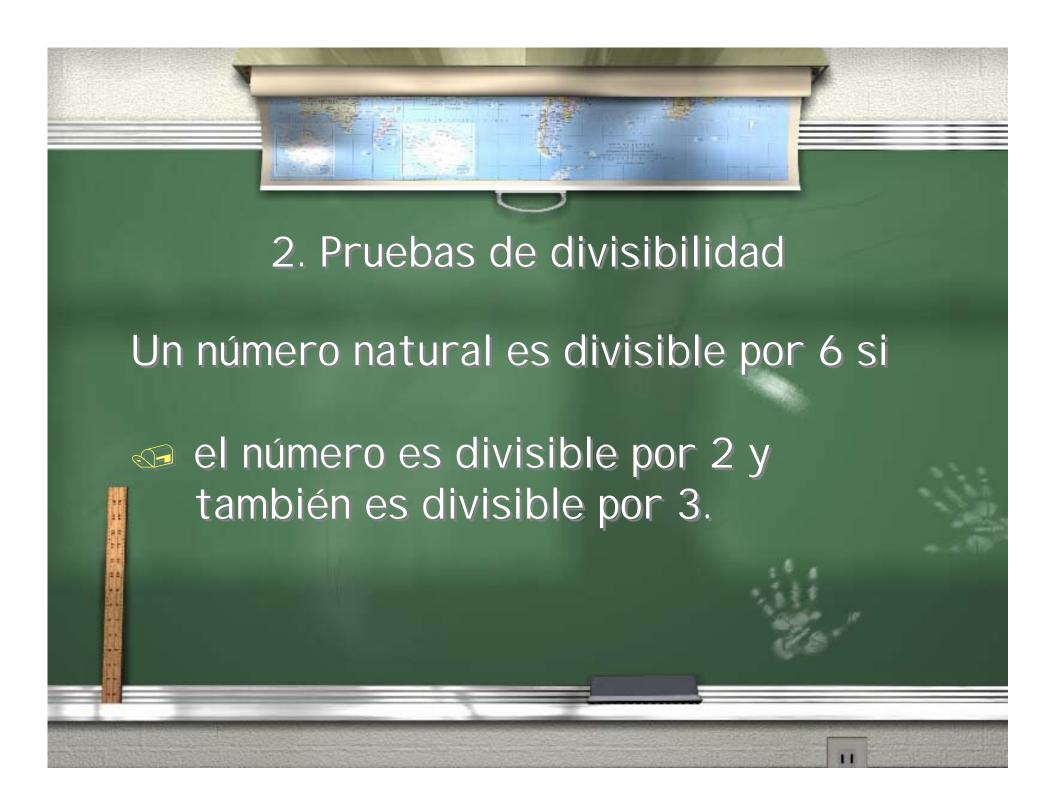














Ejemplo: 27,342

Termina en 2: es divisible por 2. 2+7+3+4+2=18: es divisible por 3. Por lo tanto, es divisible por 6.



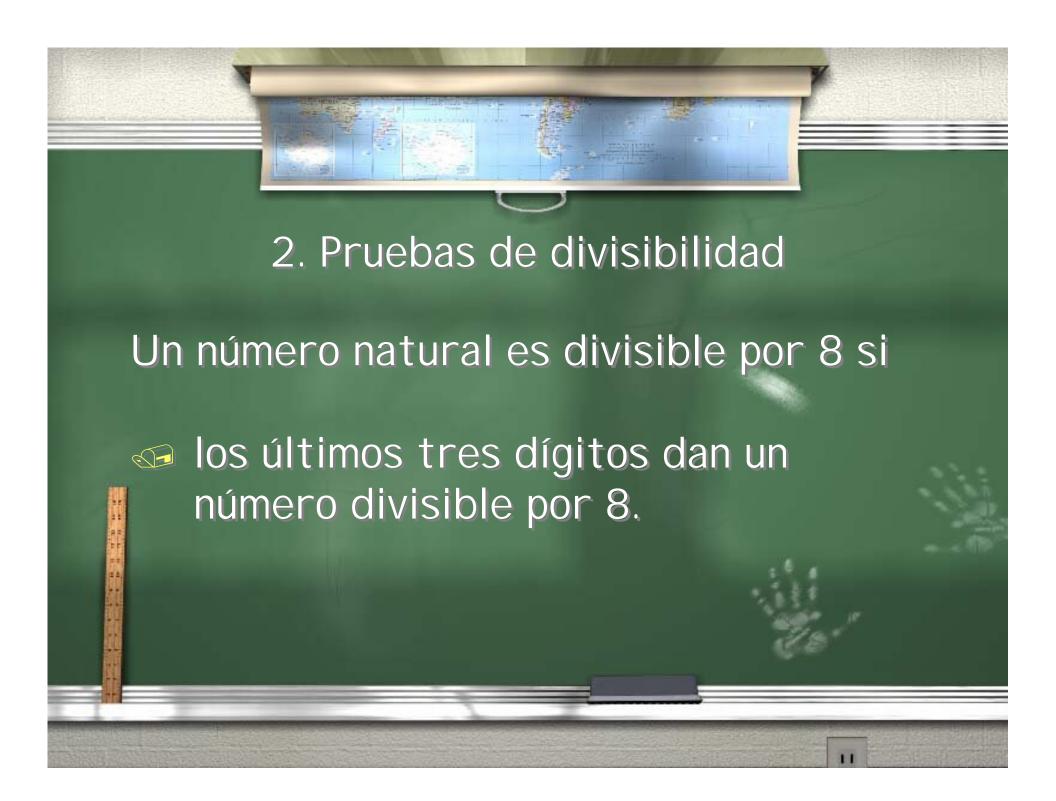
Un número natural es divisible por 7 si al duplicar el último dígito y restar este valor del número original, sin su último dígito, el resultado obtenido es divisible por 7.

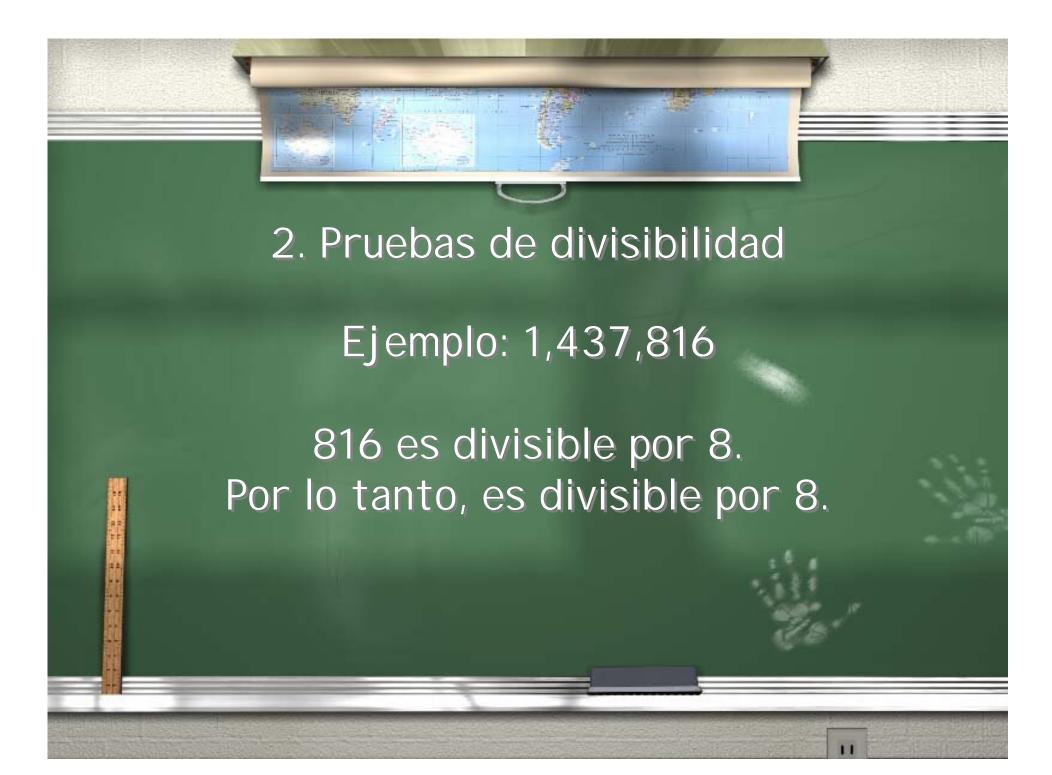


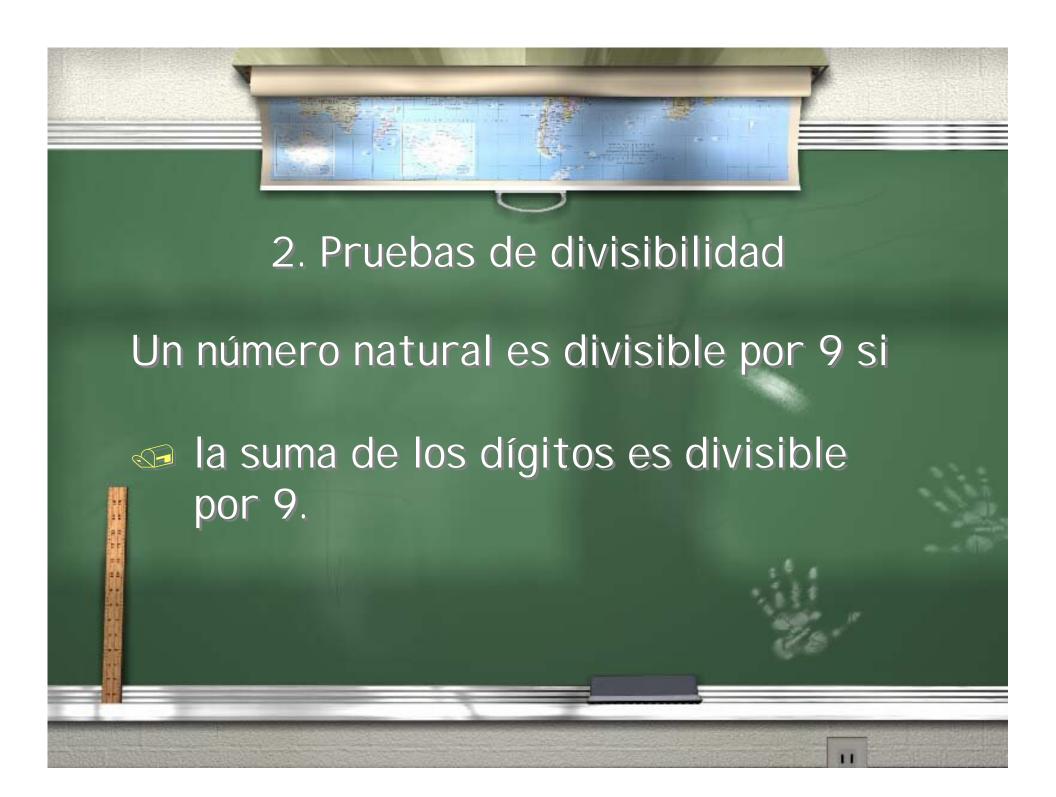
Ejemplo: 784

Al duplicar el 4, obtenemos 8. 78-8=70, un múltiplo de 7. Por lo tanto, es divisible por 7.





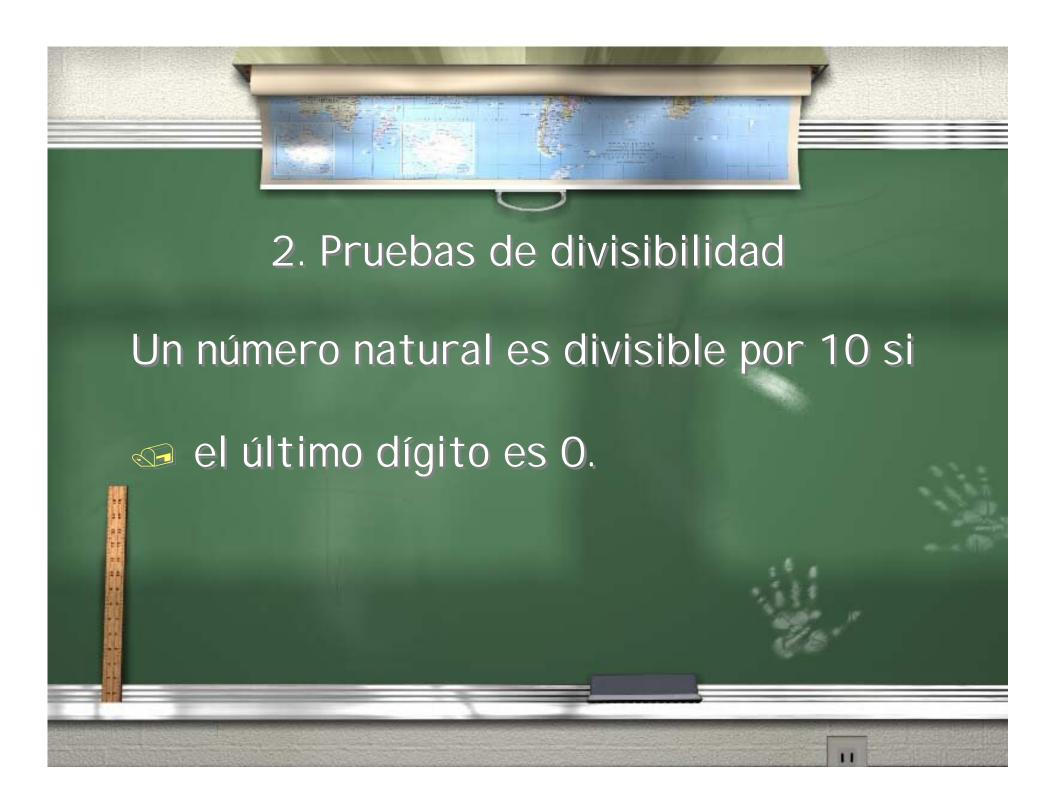


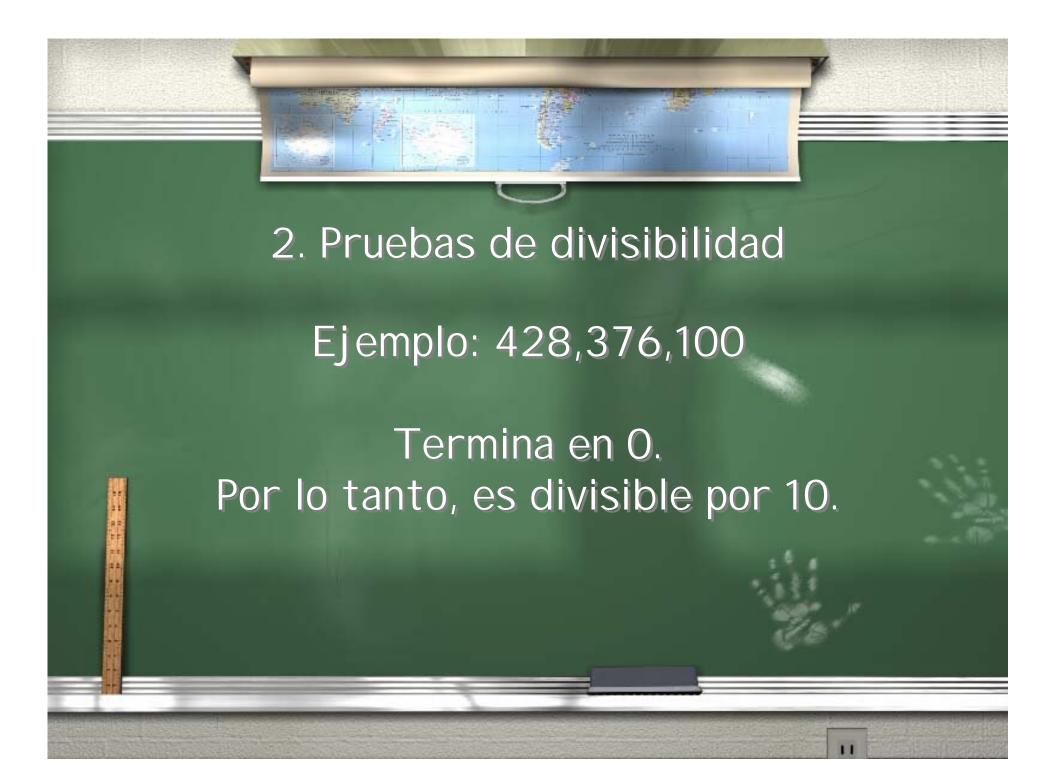




Ejemplo: 428,376,105

4+2+8+3+7+6+1+0+5=36. 36 es divisible por 9. Por lo tanto, es divisible por 9.







Un número natural es divisible por 11 si al restar las siguientes dos sumas -la de los dígitos alternos y la de los demás dígitos (comenzando a la izquierda)- el resultado es divisible por 11.



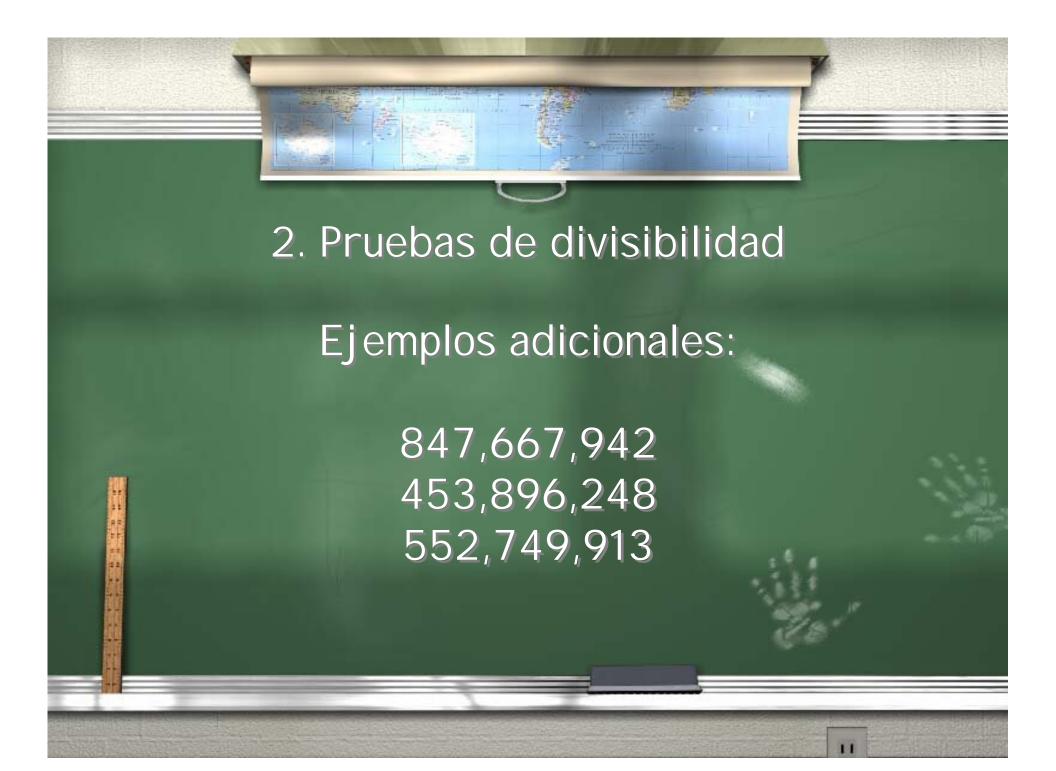
Ejemplo: 8,493,969

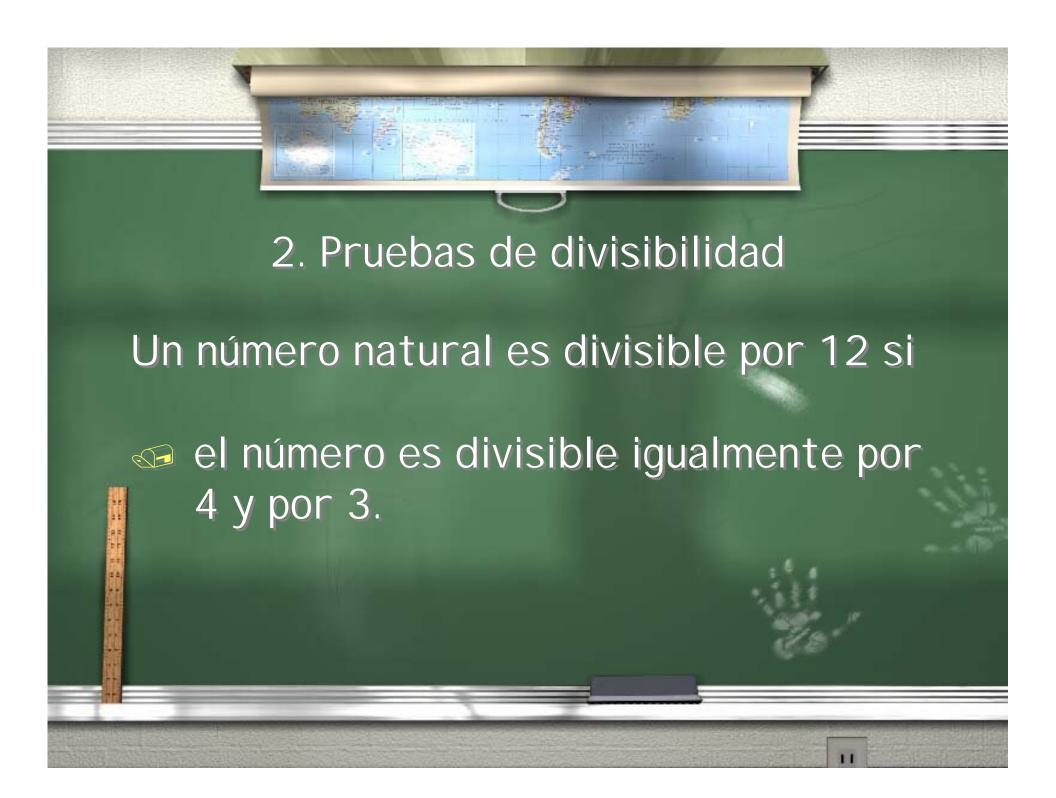
8+9+9+9=35.

4+3+6=13.

35-13=22.

22 es divisible por 11. Por lo tanto, es divisible por 11.







Ejemplo: 376,984,032

32 es divisible por 4: es divisible por 4. 3+7+6+9+8+4+0+3+2=42, un múltiplo de 3: es divisible por 3. Por lo tanto, es divisible por 12.



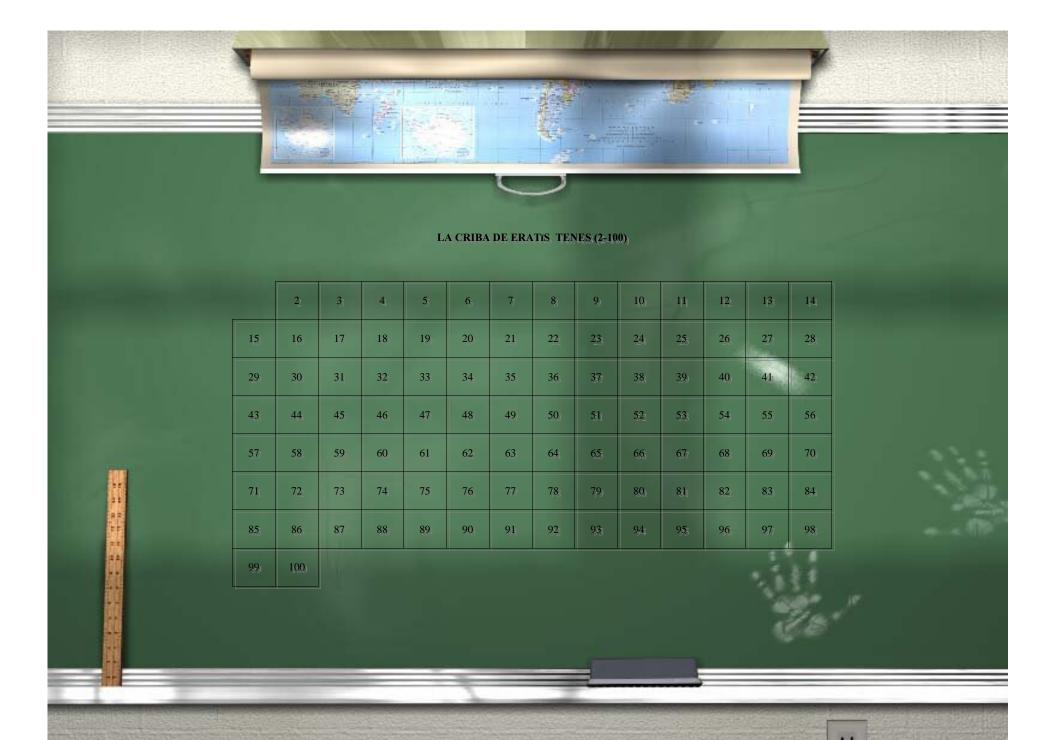
Método sistemático para identificar números primos.

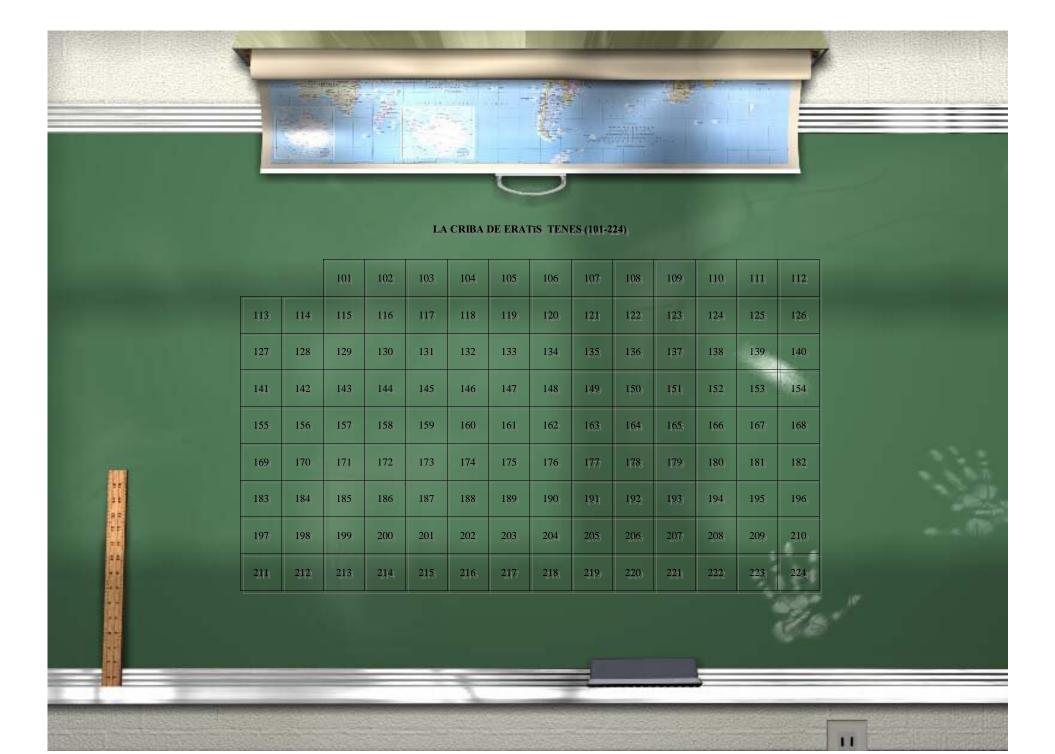
Denominado en honor del geógrafo, poeta, astrónomo y matemático griego (276 - 192 AC).

#### 3. Criba de Eratóstenes

#### Instrucciones

- Construya una tabla comenzando con el 2.
- Comenzando con el 2, halle y circule los primos y tache los múltiplos de ese primo.
- Continúe para todos los primos menores o iguales a la raíz cuadrada del último número de la lista.





# 4. Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número natural compuesto puede expresarse de forma única como el producto de números primos (excepto por el orden de los factores).

# 4. Teorema Fundamental de la Aritmética

Ejercicio: Determine la factorización prima de cada uno de los siguientes números compuestos:

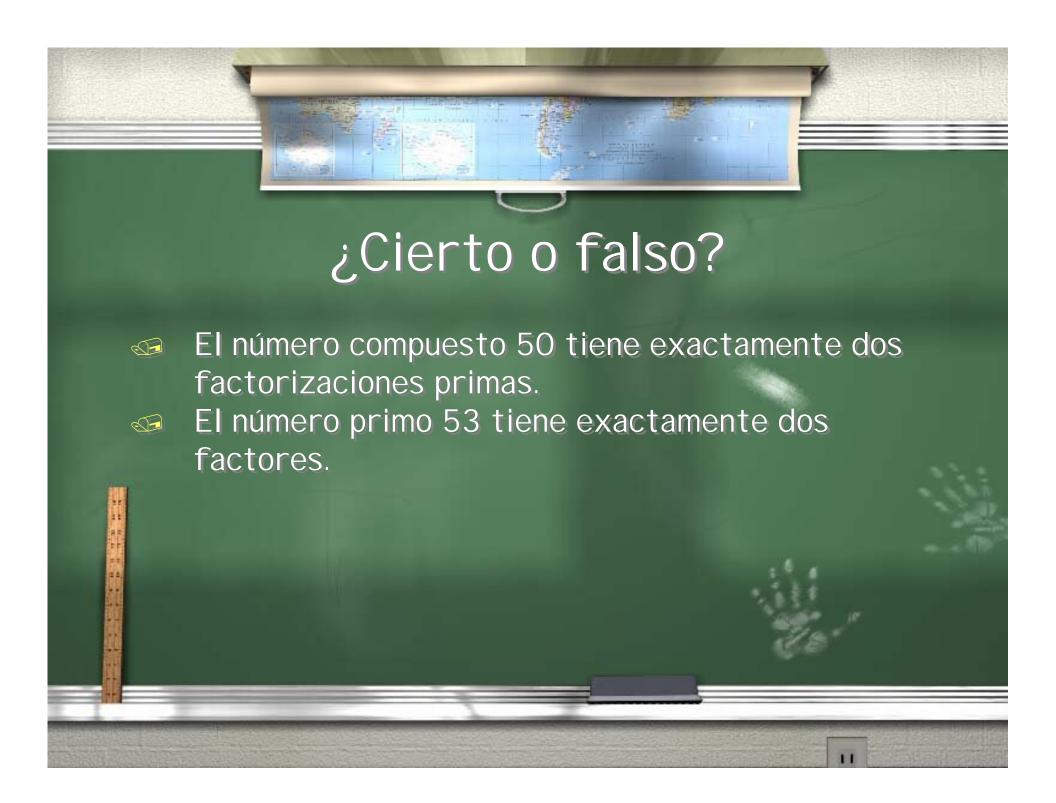
- a) 90
- b) 504
- c) 1,183



Ejercicio: Determine el número natural más pequeño que sea divisible por todos los números siguientes: 2, 3, 4, 6, 8, 9.



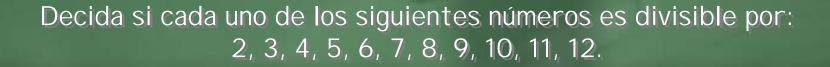
- Todo número natural es divisible por 1.
- Ningún número natural es a la vez primo y compuesto.
- No existen números primos pares.
- El 1 es el número primo más pequeño.
- Si 16 divide a un número natural, entonces 2, 4 y
   8 también lo dividen.



### Ejercicio

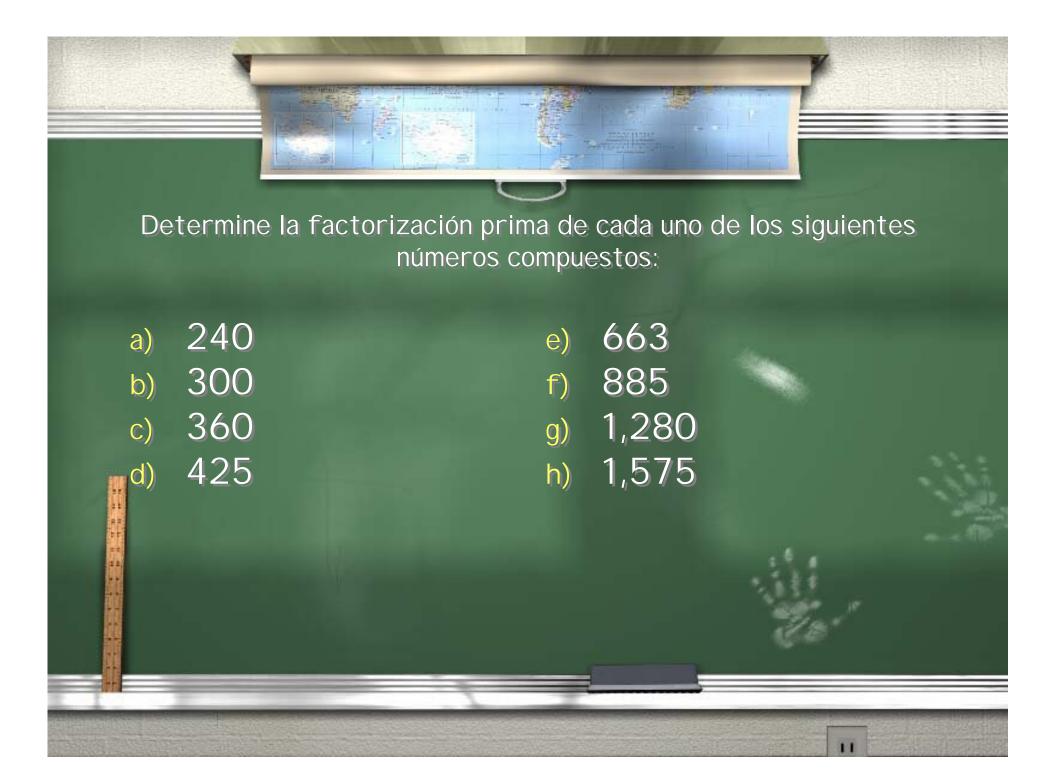
Determine todos los factores de:

- a) 12
- b) 18
- c) 28
- d) 63
- e) 120
- f) 184



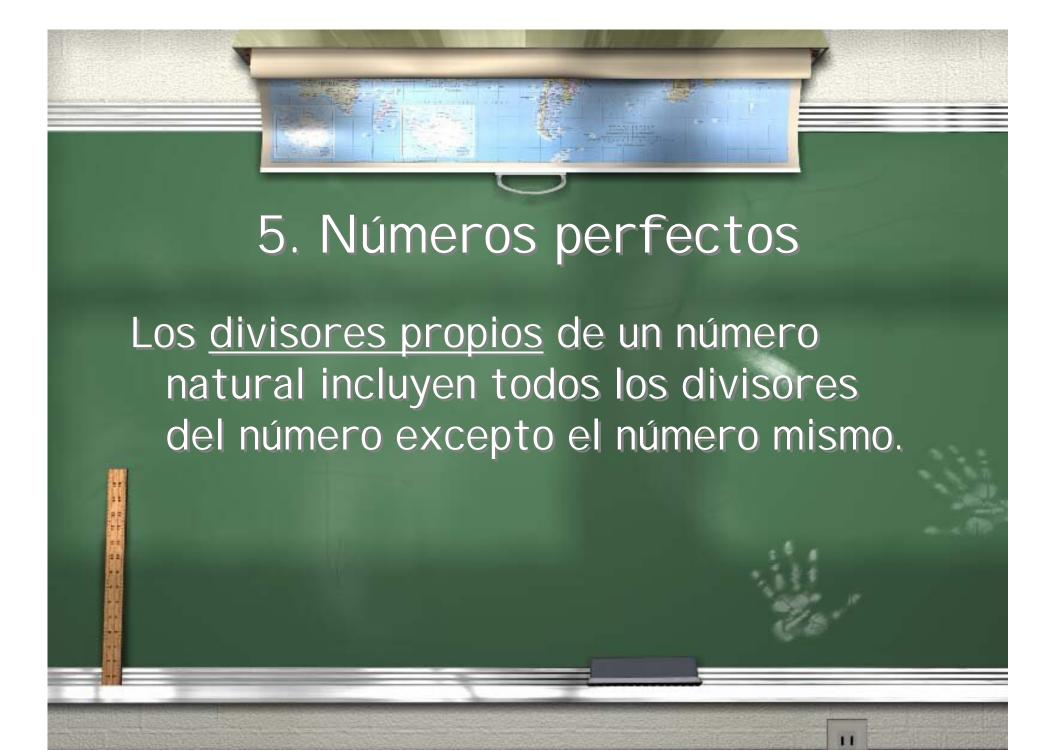
- a) 315
- b) 7,425
- c) 1,092
- d) 4,488
- e) 630

- f) 25,025
- g) 45,815
- h) 5,940
- i) 123,456,789
- j) 987,654,321





Escriba un número de 6 dígitos que consista de tres dígitos seguidos de los mismos tres dígitos, en el mismo orden. Divídalo por 13. Divida el resultado por 11. Divida el resultado por 7. ¿Qué observa? ¿Por qué piensa que esto ocurre?



### 5. Números perfectos

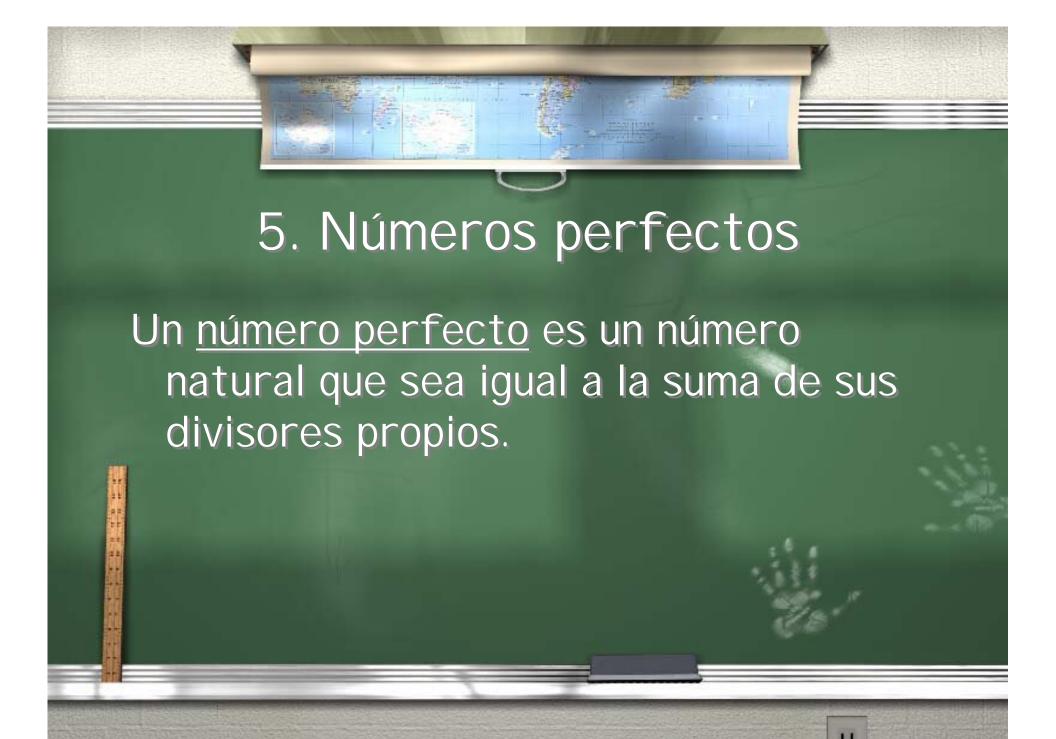
Ejemplo:

Los divisores de 8 son:

1, 2, 4 y 8.

Los divisores propios de 8 son:

1, 2 y 4.





Comenzando con el 2, coteje todos los números naturales hasta hallar el número perfecto más pequeño.

### 5. Números perfectos

Ejercicio: Verifique que los siguientes son números perfectos:

- a) 28
- b) 496
- c) 8,128



- Hasta hace una década sólo se conocían 33 números perfectos.
- Todos los números perfectos conocidos son pares.
- Cualquier número perfecto par terminará en 6 ó 28.



Un número natural es:

- deficiente si es mayor que la suma de sus divisores propios.
- <u>abundante</u> si es menor que la suma de sus divisores propios.



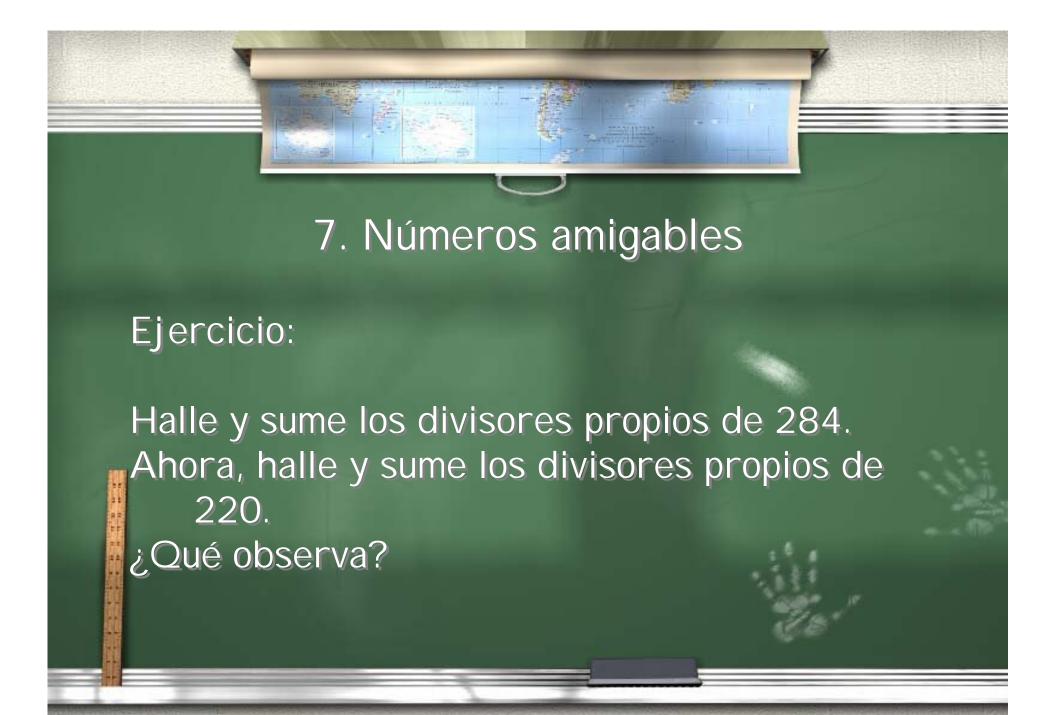
Un número deficiente no tiene suficiente divisores propios para que la suma de todos sea mayor que él mismo.

Un número abundante tiene más que suficientes divisores propios para que la suma de todos sea mayor que él mismo.



Ejercicio: Decida si el número dado es deficiente o abundante.

- a) 8
- b) 10
- c) 12
- d) 36





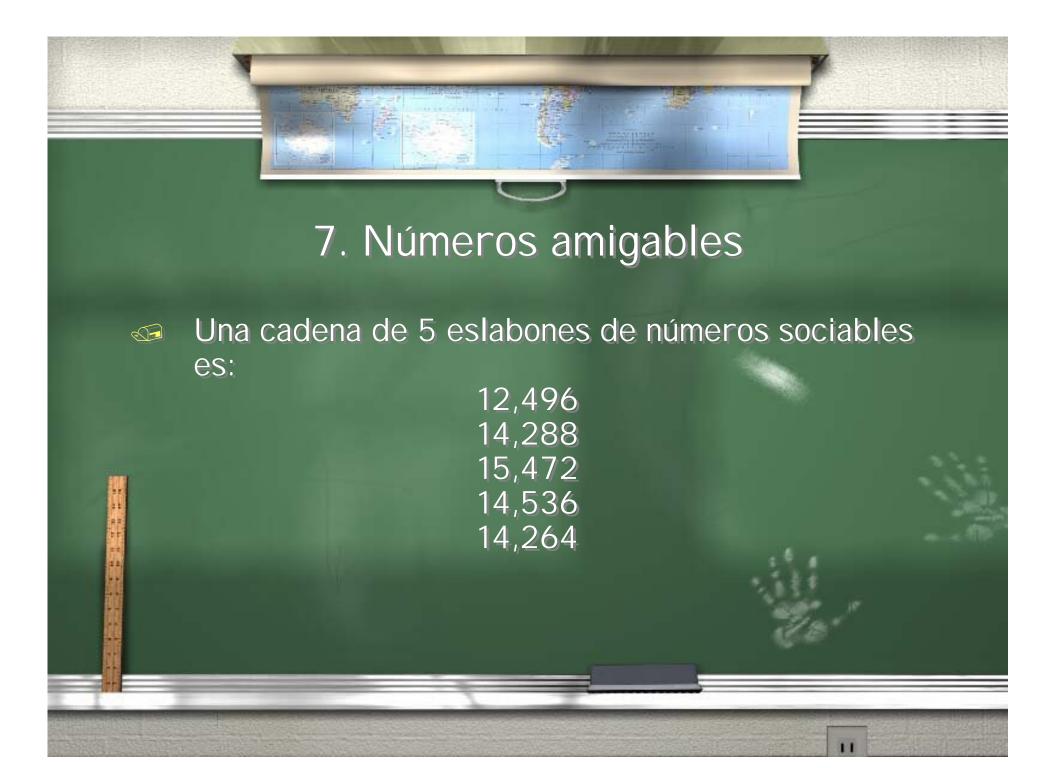
Dos números naturales a y b son <u>amigables</u> si la suma de los divisores propios de a es b, y la suma de los divisores propios de b es a.



- El par más pequeño de números amigables es 220 y 284.
- El próximo par que se descubrió fue 17,296 y 18,416.
- En 1866 Nicolo Paganini, de 16 años, descubrió que 1,184 y 1,210 se habían pasado por alto. (Verifíquelo.)



Una extensión de la idea de los números amigables son los <u>números sociables</u>, que consisten de una cadena de números en que la suma de los divisores propios de cada número es el número siguiente de la cadena, y la suma de los divisores propios del último número de la cadena es el primer número.





- El número 14,316 comienza una cadena de 28 eslabones de números sociables.
  - Una cadena de 3 números sociables se llama un "clan". Hasta ahora, no se ha encontrado clan alguno.



Un <u>primo de Mersenne</u> es un número primo que se puede escribir de la forma

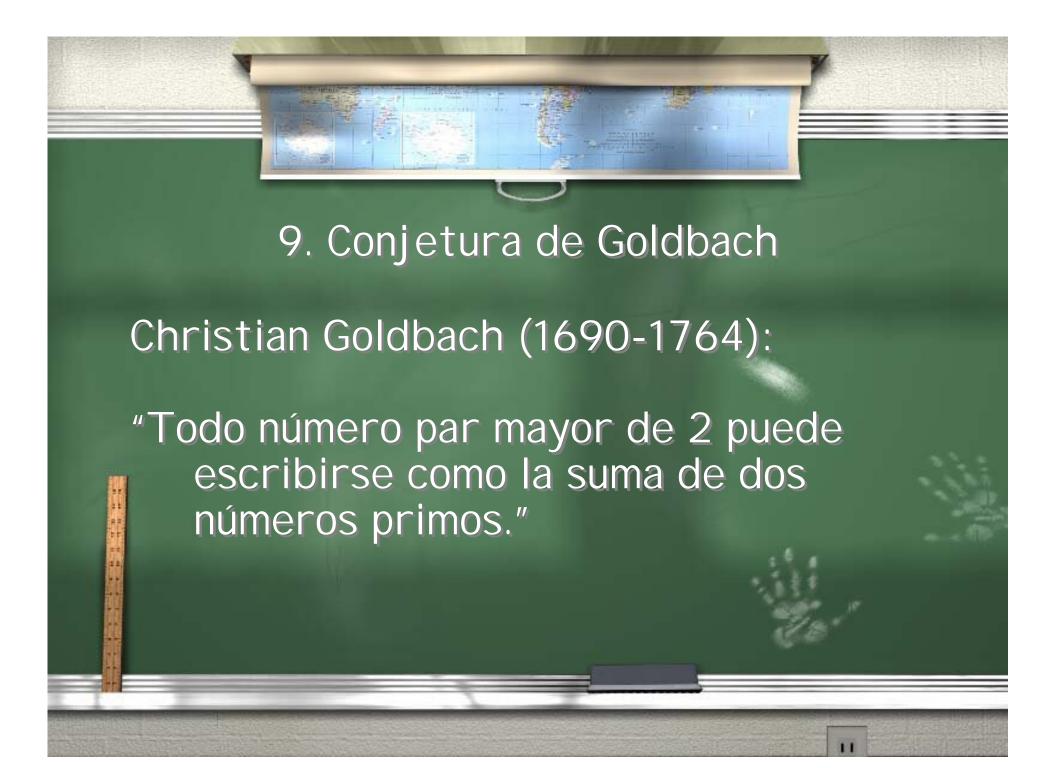
2<sup>p</sup>-1,

donde p es un número primo.



#### 8. Primos de Mersenne

- El monje francés Marin Mersenne (1588-1648) estudió los números primos de esta forma.
- Halle los primeros 4 primos de Mersenne.
- Los antiguos creían que todos los números de esa forma eran primos.
- Cuando p = 11, resulta 2,047, que no es primo.
  - Hasta recientemente, se conocían sólo 33 primos de Mersenne.





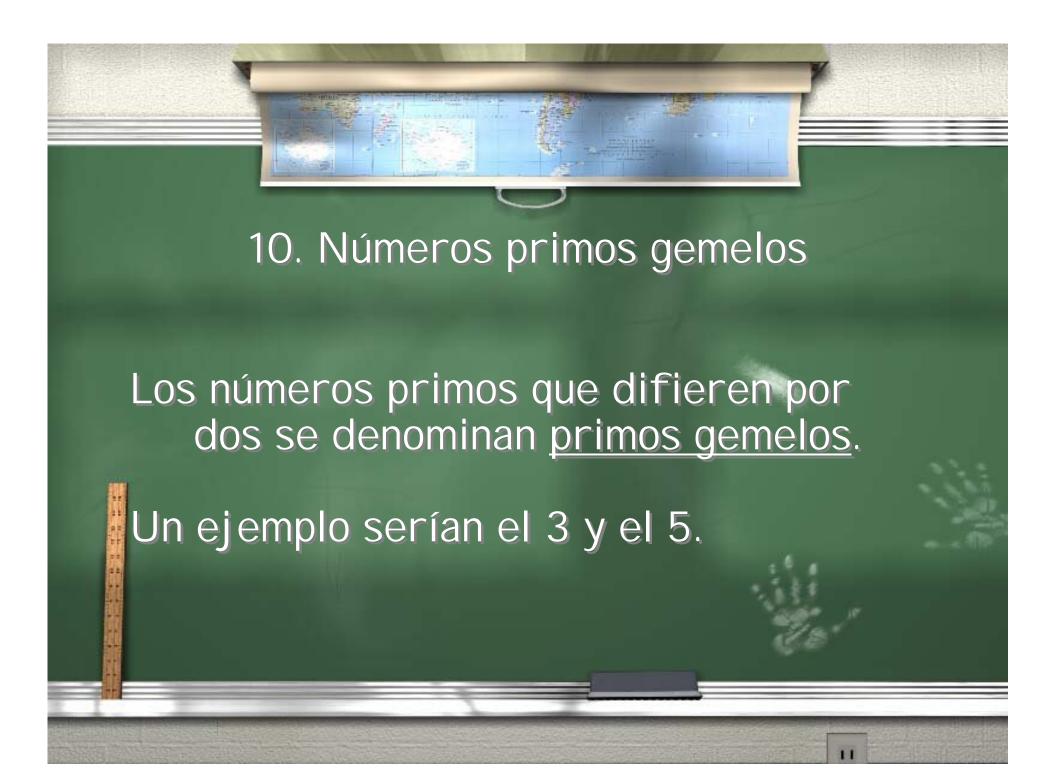
# Ejemplos:

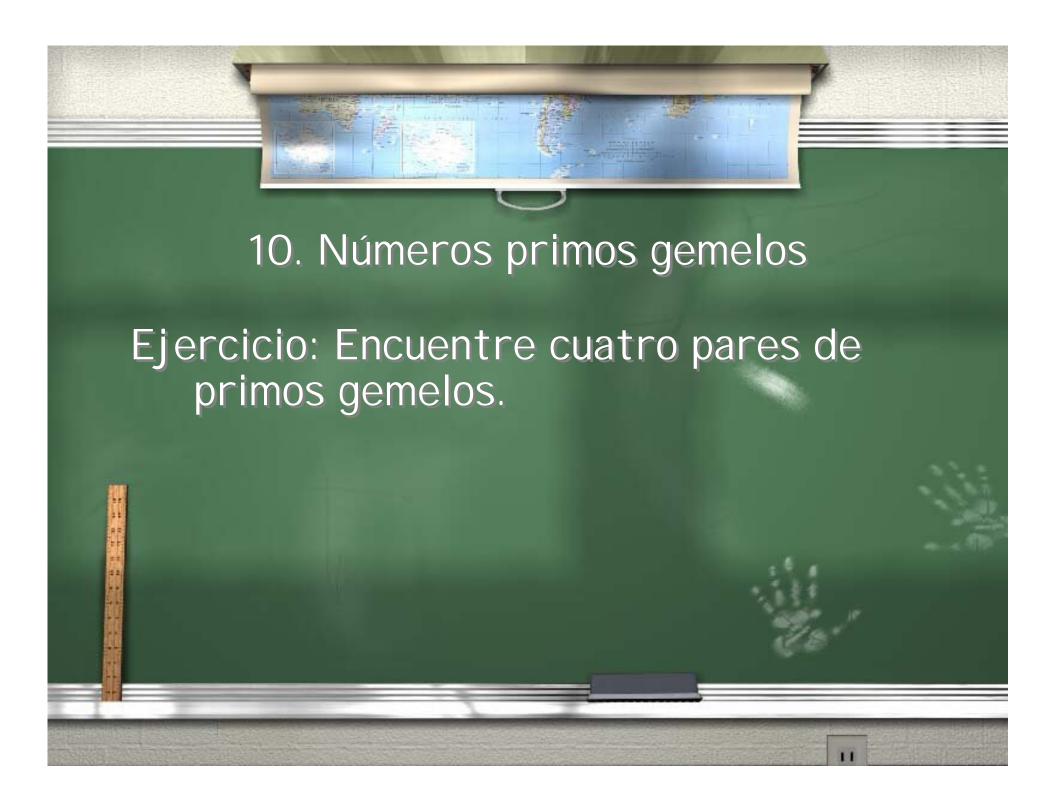
$$4 = 2 + 2$$
 $6 = 3 + 3$ 
 $8 = 3 + 5$ 
 $10 = 5 + 5 = 3 + 7$ 

## 9. Conjetura de Goldbach

Ejercicio: Escriba cada número par siguiente como la suma de dos números primos:

- a) 14
- b) 18
- c) 22
- d) 26
- e) 32
- f) 60

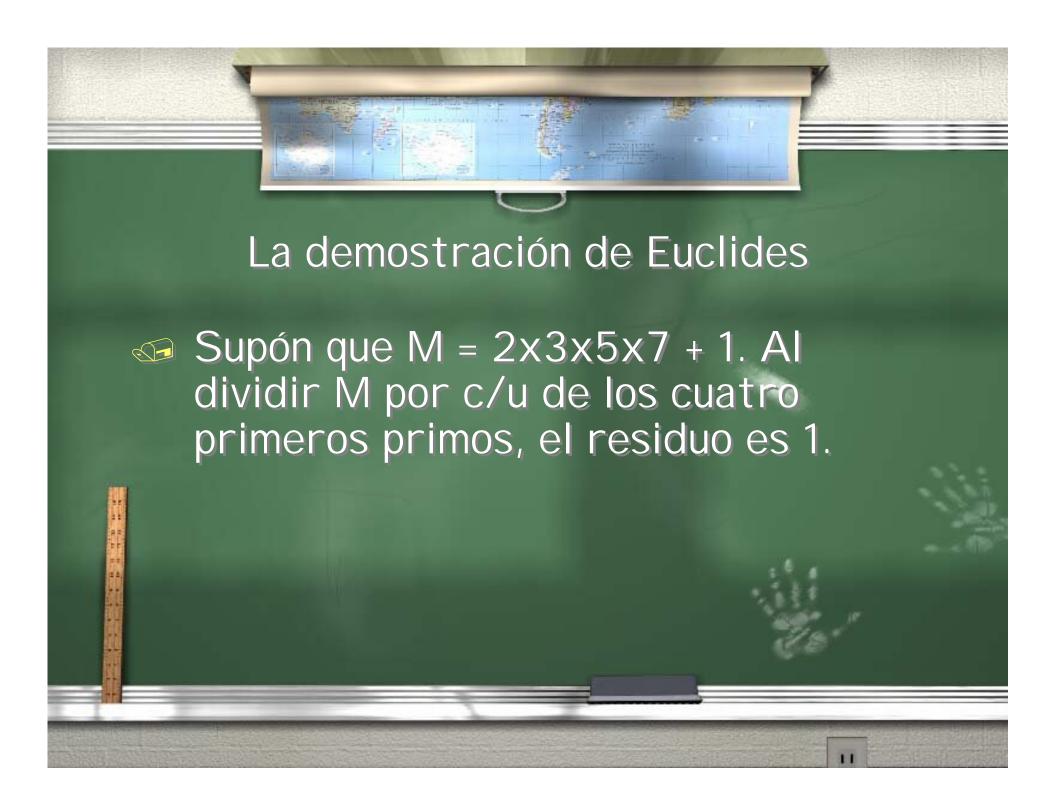






# 10. Números primos gemelos

- Hasta hace poco se desconocía si hay un número infinito de pares de primos gemelos.
  - Euclides demostró hace más de 2,000 años que hay un número infinito de números primos.





Para demostrar que el número de números primos es infinito, probemos que no existe un número primo más grande.

Haremos una demostración por contradicción.



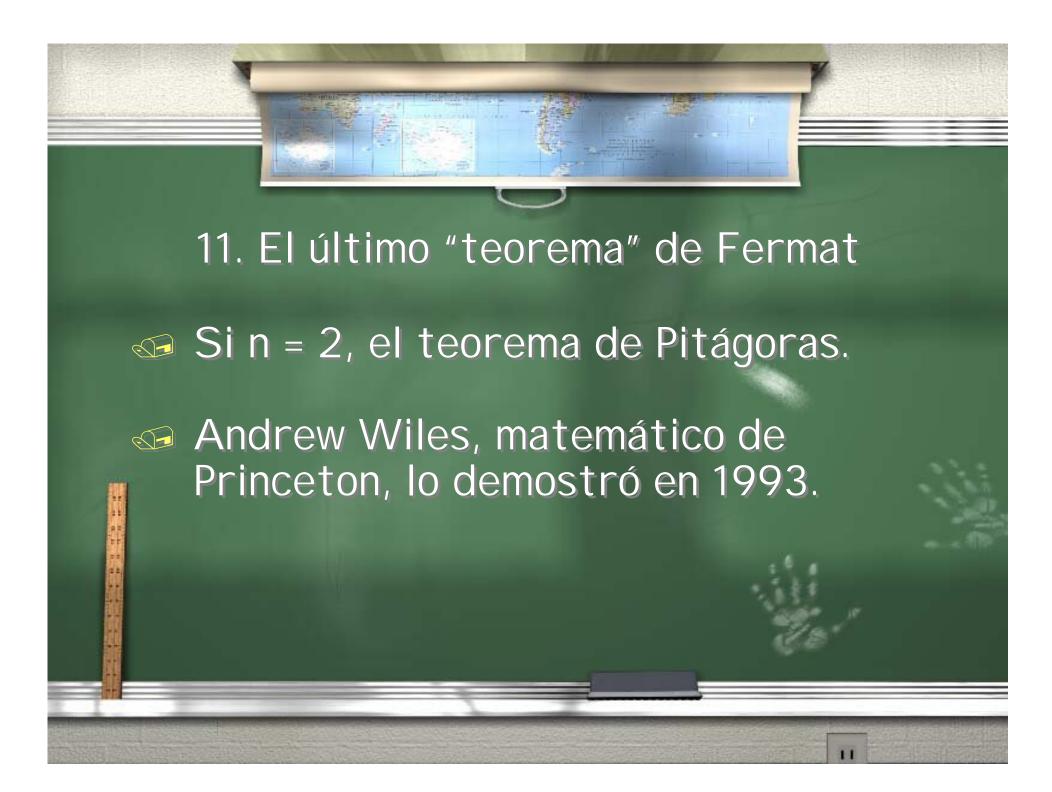
- Suponga que exite un número primo más grande. Llámelo P.
- Forme el número  $M = p_1 \times p_2 \times p_3 \times ... \times P + 1.$  donde  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , ... son los primos menores o iguales a P.

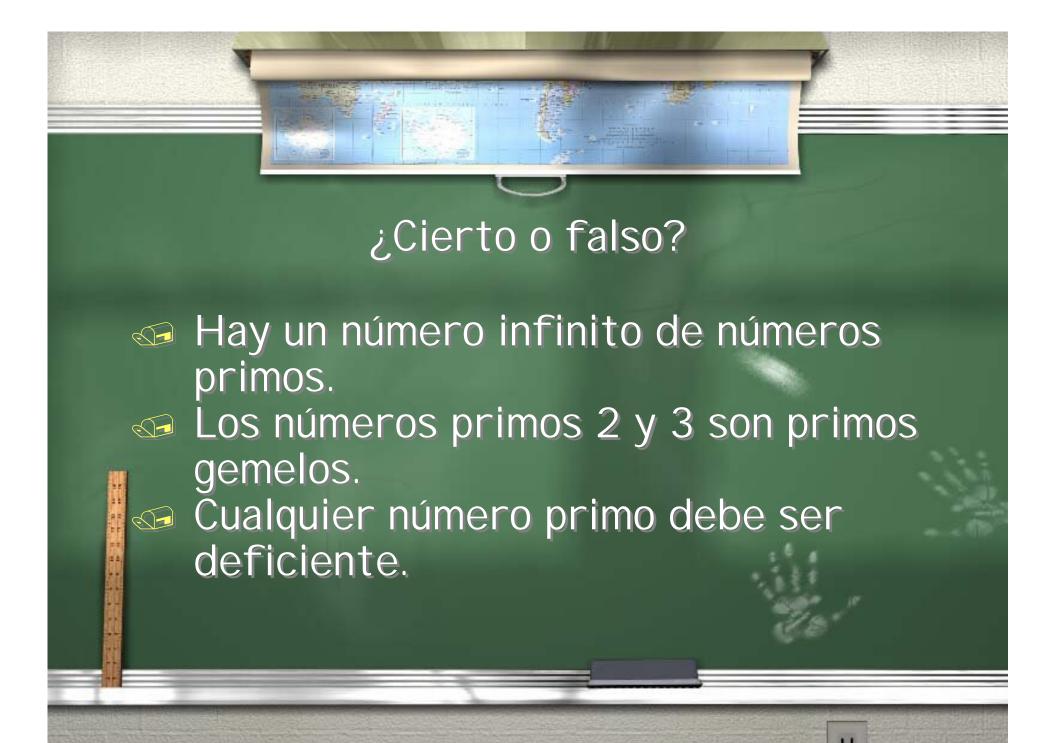


- M tiene que ser primo o compuesto.
- Si M es primo, es mayor que P, una contradicción.
  - Si M es compuesto, debe tener un factor primo, pero ninguno de los primos menores o iguales a P son factores de M, ya que la división por cada uno tendría residuo 1, otra contradicción. [QED]



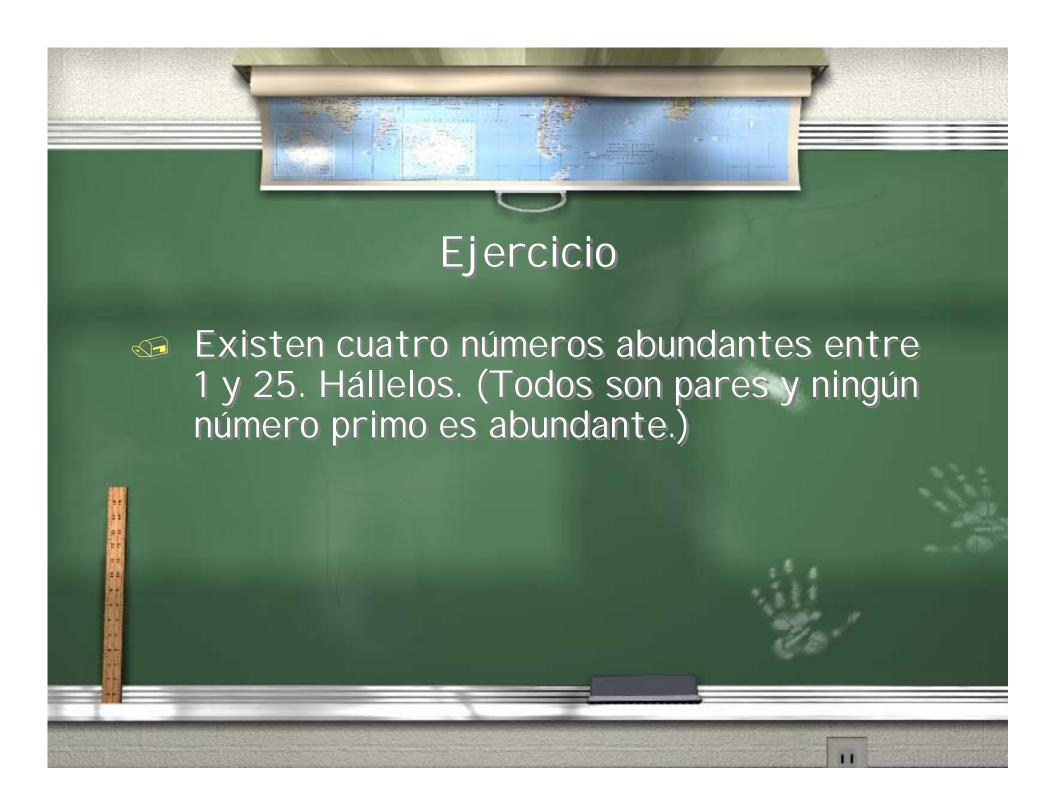
- Pierre de Fermat (c1601 1665)
- "Para n≥3, no existen números naturales a, b, c tal que a<sup>n</sup> + b<sup>n</sup> = c<sup>n</sup>."







- La ecuación 17 + 51 = 68 verifica la conjetura de Goldbach para el número 68.
- El número 2<sup>5</sup>-1 es un ejemplo de un primo de Mersenne.
- Un número natural mayor de 1 será uno y solamente uno de los siguientes: deficiente, perfecto o abundante.



# Ejercicio

$$M = 2 + 1 = 3$$

$$M = 2x3 + 1 = 7$$

$$M = 2x3x5 + 1 = 31$$

$$M = 2x3x5x7 + 1 = 211$$

$$M = 2x3x5x7x11 + 1 = 2,311$$





El MCD de un grupo de números naturales es el número natural más grande que es divisor de todos los números en el grupo.

### Ejemplo:

MCD(36, 54) = 18



Método directo para determinar el MCD:

Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, <u>18, 36</u>

Divisores de 54: 1, 2, 3, 6, 9, <u>18,</u> 27, 54

MCD(36, 54) = 18

### 12. Máximo común divisor (MCD)

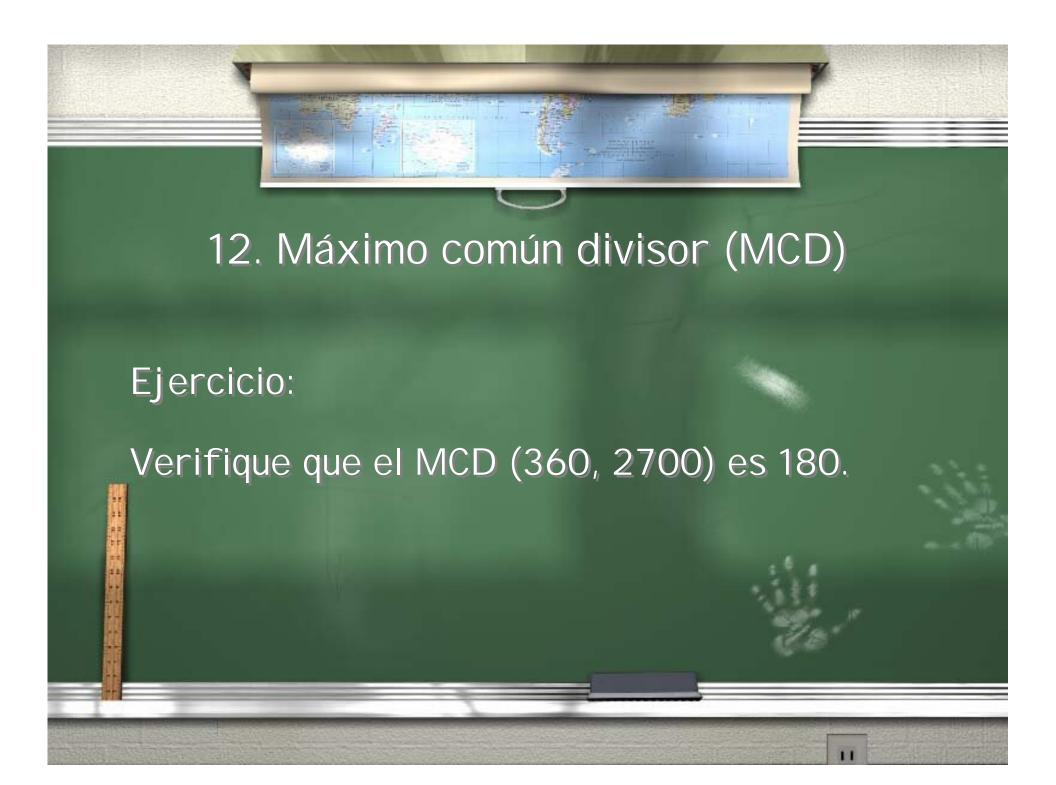
Método de los factores primos para determinar el MCD:

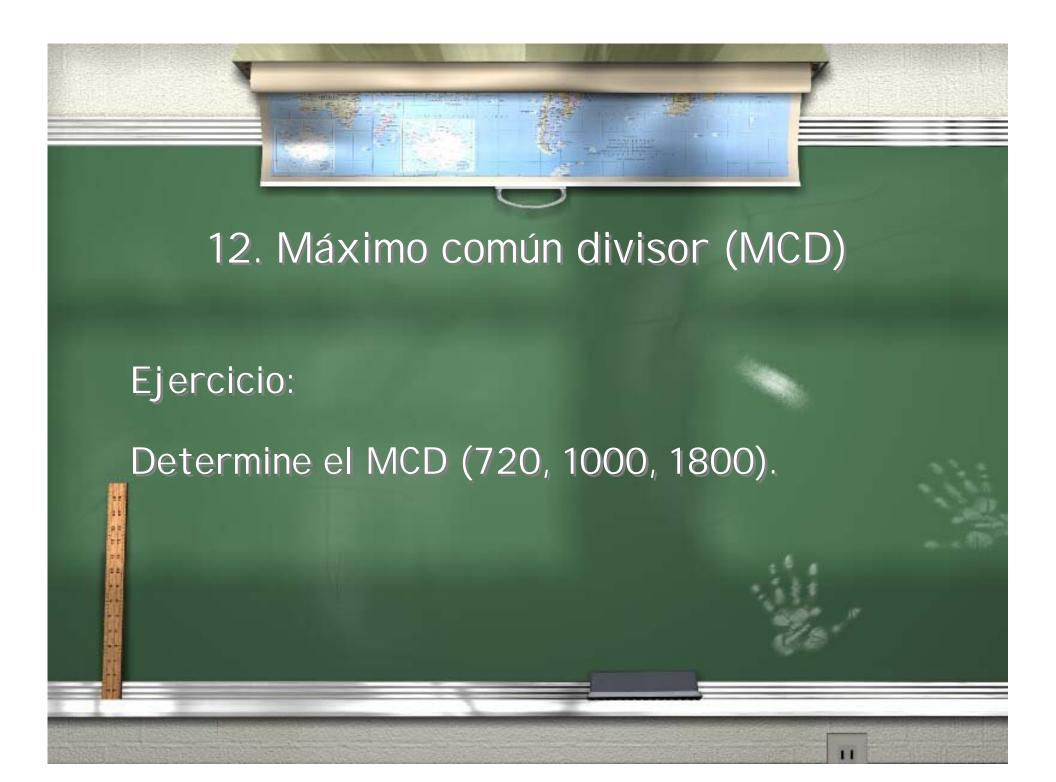
$$36 = 2^2 \times 3^2$$

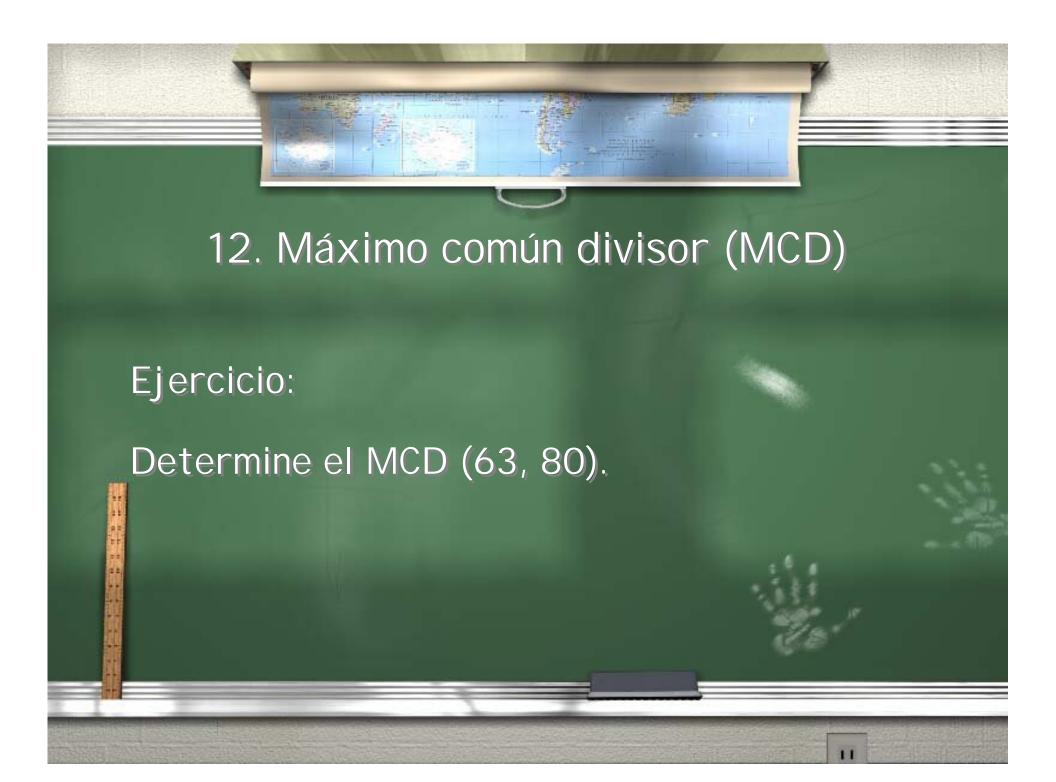
$$54 = 2^1 \times 3^3$$

Ahora, forme el producto de los primos con la potencia más pequeña:

MCD 
$$(36, 54) = 2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$









Si el MCD de dos números es 1, se les denomina <u>primos relativos</u>.

Ejemplo: En el ejercicio anterior, 63 y 80 son primos relativos.



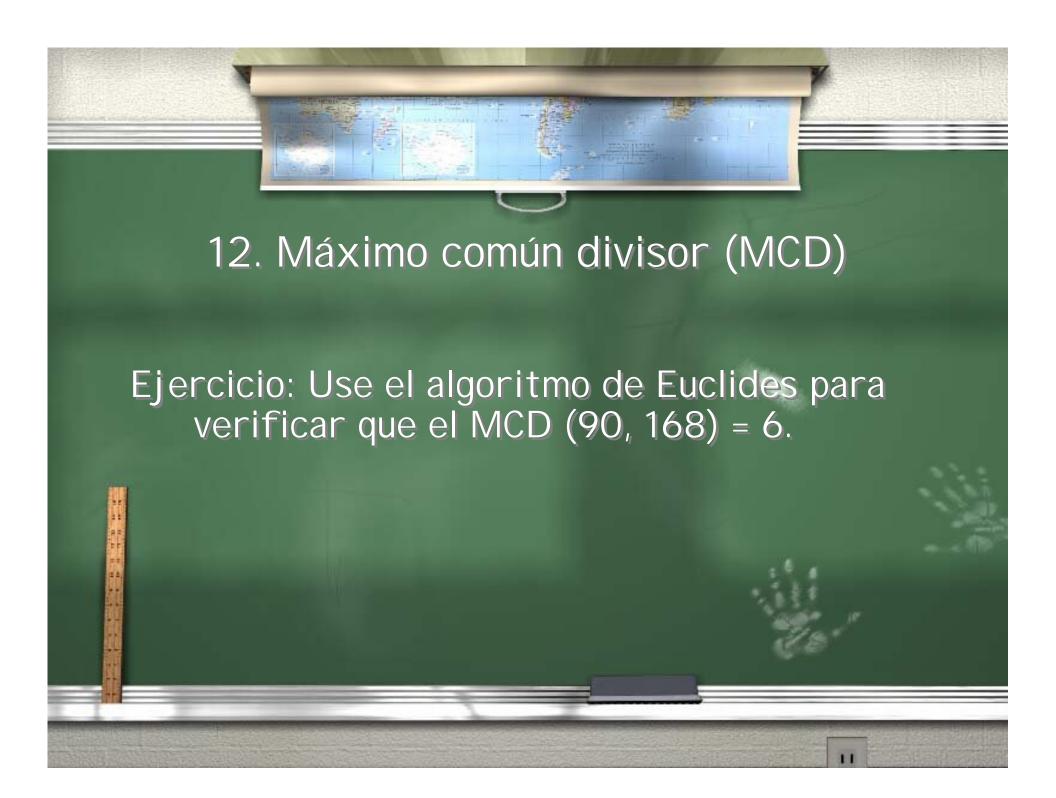
Método de división por factores primos para determinar el MCD:

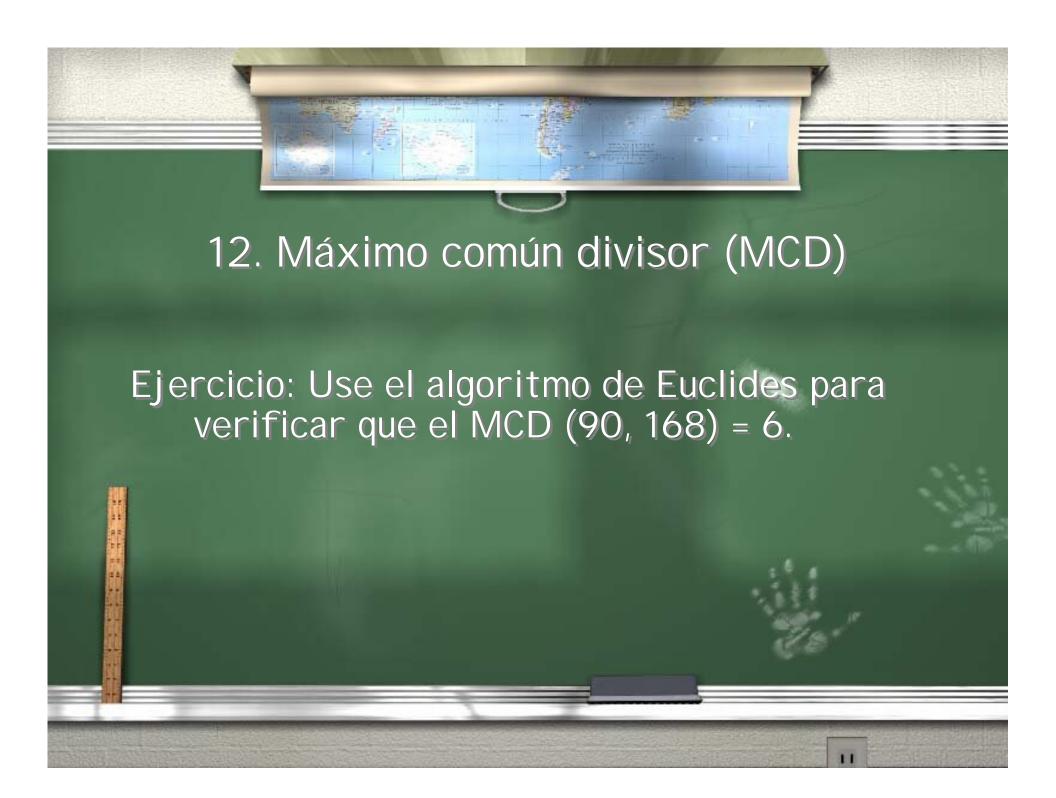
- 1. Escriba los números en fila.
- Divida los números entre un primo divisor común, primero con 2, luego con 3, etc.
- Repita el paso anterior con los cocientes.
- 4. El producto de los primos de los pasos 2 y 3 es el MCD.

### 12. Máximo común divisor (MCD)

Algoritmo de Euclides para determinar el MCD de dos números.

- 1. Divida el más grande por el más pequeño.
- 2. Divida el divisor por el residuo anterior.
- Continúe este proceso hasta btener residuo 0.
- 4. El MCD = último residuo positivo.







El MCM de un grupo de números naturales es el número natural más pequeño que es un múltiplo de todos los números en el grupo.

Ejemplo: MCM (10, 15) = 30



Método directo para determinar el MCM:

Múltiplos de 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...

Múltiplos de 15: 15, <u>30,</u> 45, 60, ...

MCM(10, 15) = 30

### 13. Mínimo común múltiplo (MCM)

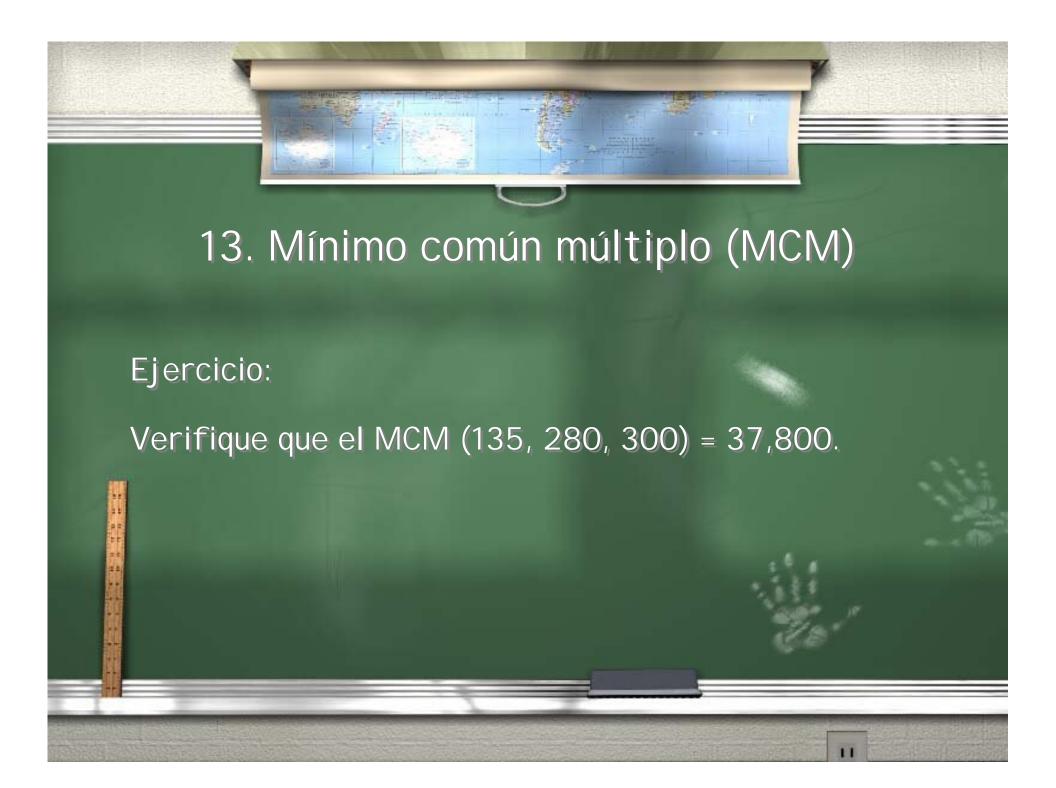
Método de los factores primos para determinar el MCM:

$$20 = 2^2 \times 5^1$$

$$75 = 3^1 \times 5^2$$

Ahora, forme el producto de todos los primos que aparezcan con la potencia más grande:

MCM (20, 75) = 2<sup>2</sup> x 3<sup>1</sup> x 5<sup>2</sup> = 4 x 3 x 25 = 300.



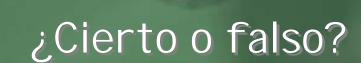


Fórmula para el MCM:

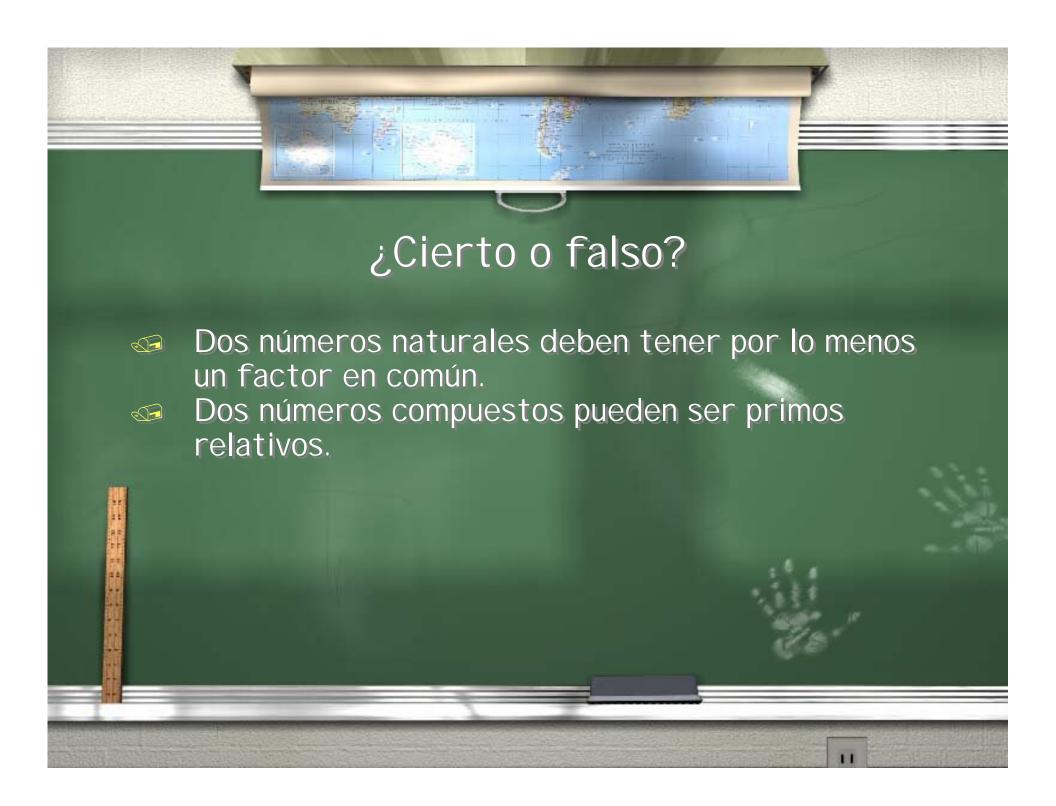
MCM(a,b) = ab / MCD(a,b)

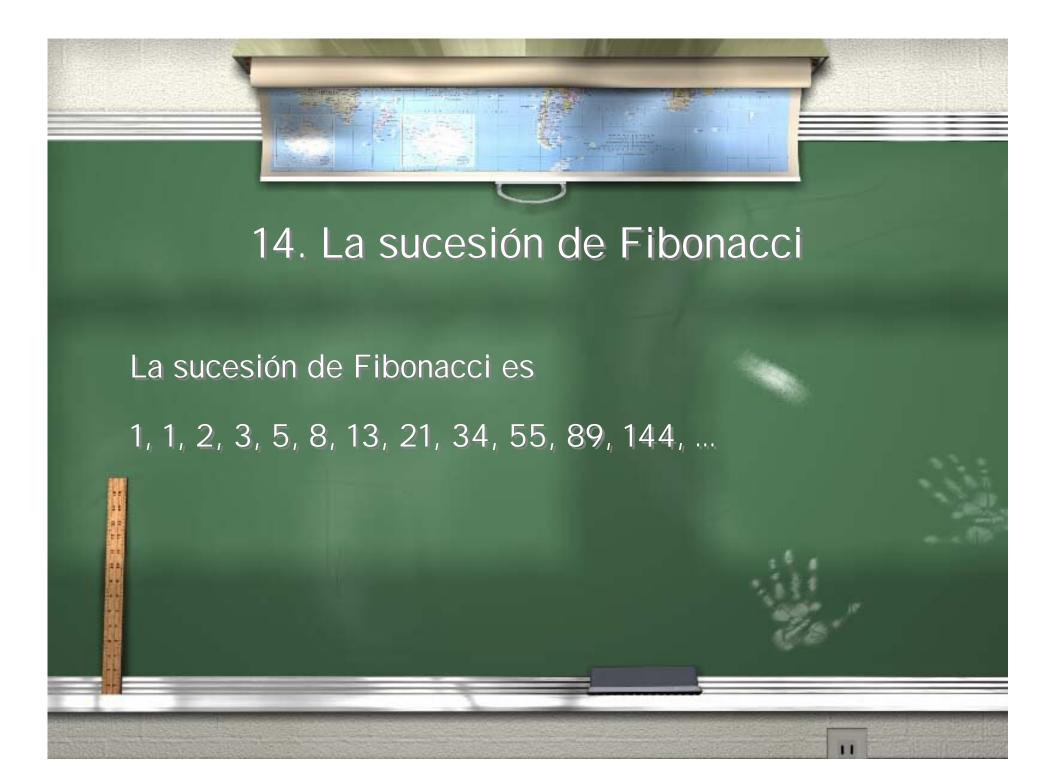
Ejemplo: MCM (90, 168) = 90 x 168 / MCD (90, 168).

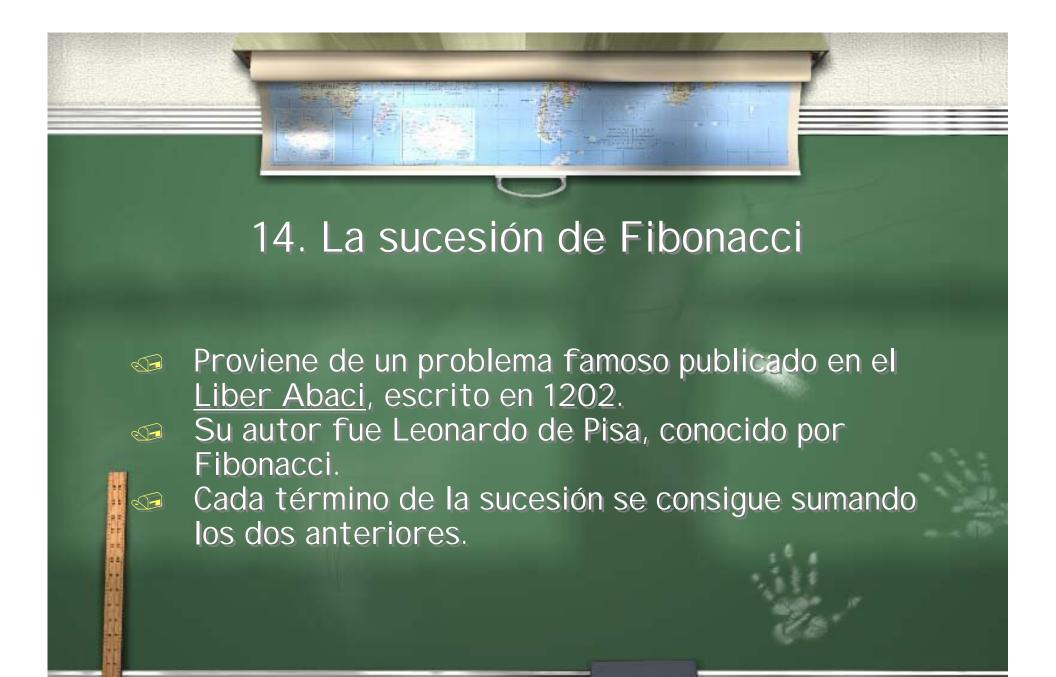
MCM (90, 168) = 15,120 / 6 = 2,520.



- Dos números pares no pueden ser primos relativos.
- Dos primos diferentes deben ser primos relativos.
- Si p es primo, MCD  $(p, p^2) = p$ . Si p es primo, MCM  $(p, p^2) = p^3$ .



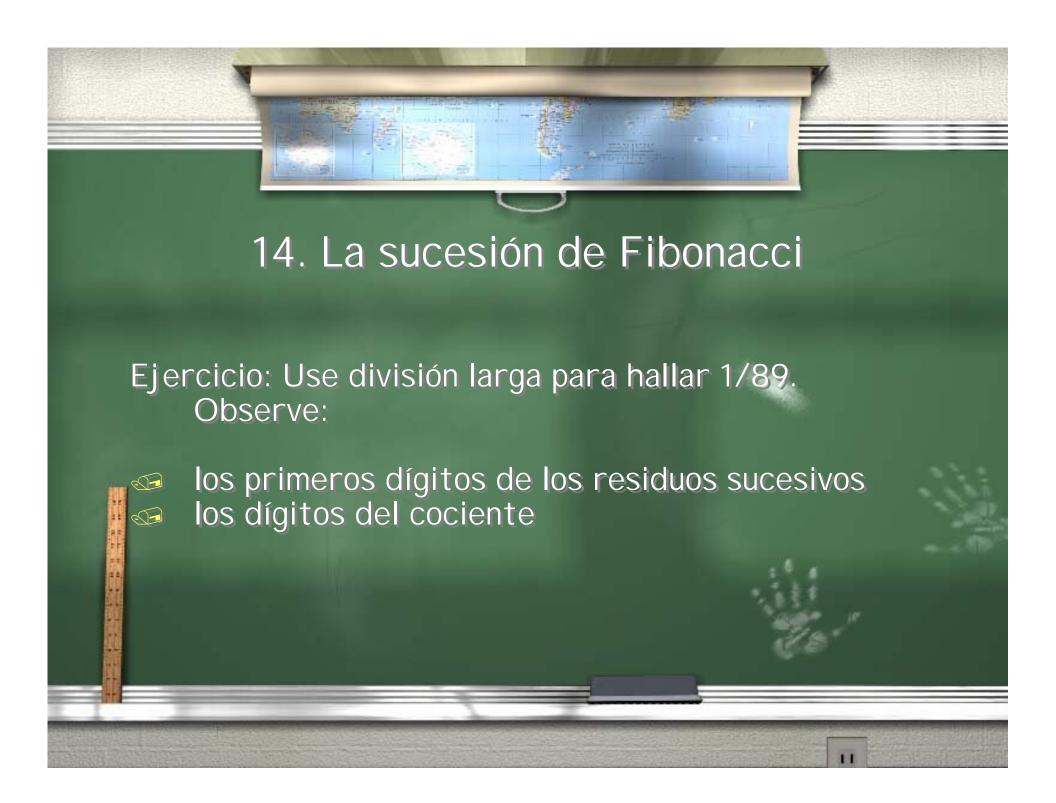


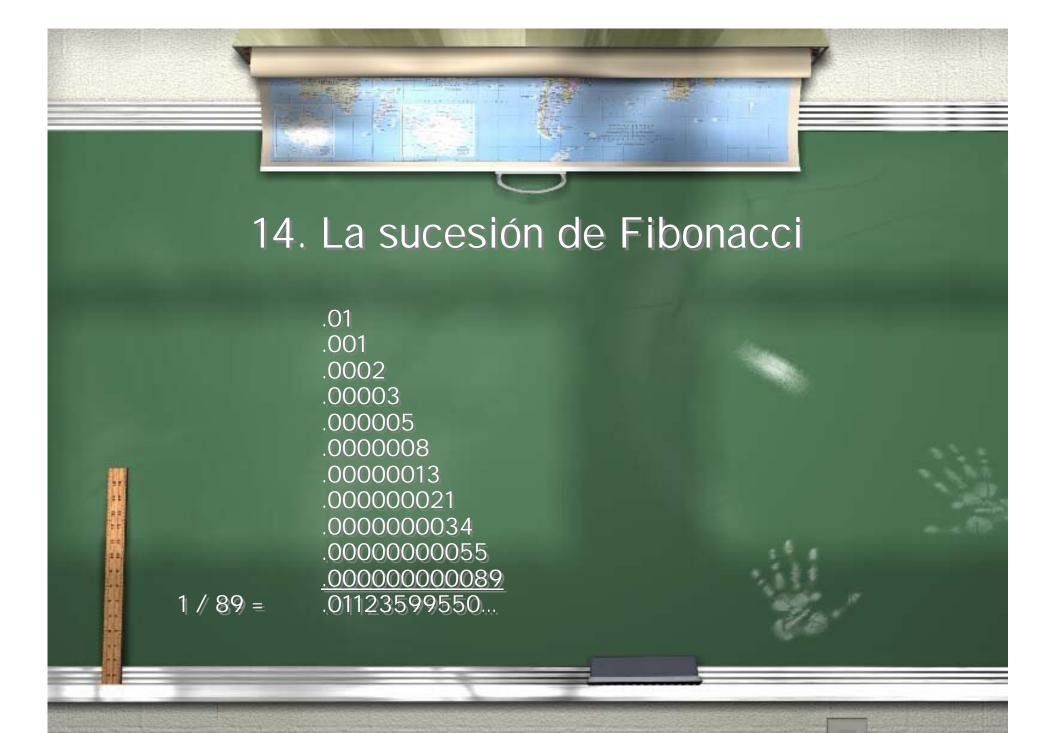


#### 14. La sucesión de Fibonacci

Está definida por la fórmula recursiva (o de recurrencia):

$$F_1 = 1$$
  
 $F_2 = 1$   
 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  para n≥3.







Al hallar los cocientes de los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, surge un patrón. Estos cocientes se aproximan cada vez más al número

 $\phi = 1.6168...$ 

llamada la razón dorada.



Un <u>cuadrado mágico</u> es un arreglo cuadrado de números con la propiedad de que la suma a lo largo de cada fila, de cada columna y de cada diagonal sea la misma. Ese valor se llama la <u>suma mágica</u>.

