

4. Representación de números en coma flotante

Oliverio J. Santana Jaria

Sistemas Digitales
Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas
Curso 2006 – 2006



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS
DE GRAN CANARIA

Introducción

- ❑ Para representar números enteros muy grandes o números fraccionarios muy pequeños es necesario utilizar muchos bits
- ❑ La notación científica es una forma muy útil de expresar estos números sin aumentar demasiado la cantidad de bits usados
- ❑ Los objetivos de este tema son:
 - Introducir la representación de números en coma flotante, que se basa en la notación científica
 - Describir las operaciones básicas de la aritmética utilizando números en coma flotante

Estructura del tema

☐ Introducción

☒ Números en coma flotante

☐ Representación de números binarios en coma flotante

☐ Aritmética binaria en coma flotante

☐ Resumen y bibliografía

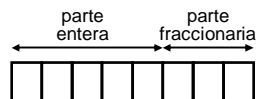
Representación de números en coma flotante

3

Números en coma fija

☐ Los números en coma fija son aquellos números en los que la coma fraccionaria tiene una posición fija

☐ Por ejemplo, si tenemos números de 8 bits podemos dedicar 5 bits a la parte entera y 3 a la fraccionaria



☐ Esto supone una severa limitación

- No podemos usar más de 5 bits para la parte entera aunque la fraccionaria sea cero
- No podemos usar más de 3 bits para la parte fraccionaria aunque la entera sea cero

Representación de números en coma flotante

4

Números en coma flotante

- ❑ El sistema de numeración en coma flotante está basado en la notación científica que se utiliza para representar números muy grandes o muy pequeños
- ❑ Un número en coma flotante tiene tres partes:
 - Signo: indica si el número es positivo o negativo
 - Mantisa: representa la magnitud del número
 - Exponente: indica el desplazamiento de la coma fraccionaria

$$\text{+/- Mantisa} \times \text{Base}^{\text{exponente}}$$

Representación de números en coma flotante

5

Números en coma flotante

- ❑ Los números decimales en coma flotante se normalizan, desplazando la coma fraccionaria de manera que la parte entera del número siempre valga cero

$$241506800 = 0'2415068 \times 10^9$$

- ❑ No es necesario representar la base del número, ya que está implícita en el formato
- ❑ Dado que la parte entera de un número normalizado siempre es cero, tampoco es necesario representarla

signo:	+
mantisa:	2415068
exponente:	9

Representación de números en coma flotante

6

Estructura del tema

- ☐ Introducción
- ☐ Números en coma flotante
- ☐ Representación de números binarios en coma flotante
- ☐ Aritmética binaria en coma flotante
- ☐ Resumen y bibliografía

Representación de números en coma flotante

7

Números binarios en coma flotante

- ☐ El formato utilizado para la representación de números binarios en coma flotante está definido por el estándar 514-1985 ANSI/IEEE
- ☐ Nos centraremos en el formato de simple precisión, que utiliza 32 bits para la representación

signo	exponente	mantisa
1 bit	8 bits	23 bits

- ☐ Existen otros formatos similares pero con distinto número de bits, como el de doble precisión (64 bits)

Representación de números en coma flotante

8

Mantisa en simple precisión

- ❑ La magnitud de un número binario se almacena en la mantisa de forma normalizada

$$0'0000101 \rightarrow 0'101 \times 2^{-4}$$

- ❑ La forma normalizada siempre tiene un 1 en la posición más a la izquierda, por lo que no hay que almacenarlo, está implícito en la representación
- ❑ Incluso podemos aprovechar otro bit si normalizamos el número de manera que el 1 más a la izquierda esté en la parte entera

$$0'0000101 \rightarrow 0'101 \times 2^{-4} \rightarrow 1'01 \times 2^{-5}$$

Representación de números en coma flotante

9

Exponente en simple precisión

- ❑ Para simplificar el formato, sería interesante evitar la necesidad de un bit de signo adicional para representar el exponente
- ❑ Por este motivo, el exponente se representa usando un formato denominado *en exceso*, que consiste en sumar un desplazamiento al valor real del número
 - En los formatos de exponente en coma flotante, este desplazamiento se calcula restando 1 al entero más grande que se pueda representar y luego dividiendo por 2
 - Si utilizamos 8 bits para representar el exponente, hay 2^8 combinaciones posibles, desde 0 hasta 255
 - El desplazamiento será $(255 - 1) / 2 = 127$

Representación de números en coma flotante

10

Exponente en simple precisión

- ❑ El formato de simple precisión tiene un exponente de 8 bits en formato *exceso 127*
- ❑ Este formato se utiliza para representar exponentes con valores entre -126 y 127

exponente = $-126 \rightarrow -126 + 127 = 1 \rightarrow 00000001$
exponente = $-125 \rightarrow -125 + 127 = 2 \rightarrow 00000010$
...
exponente = $0 \rightarrow 0 + 127 = 127 \rightarrow 01111111$
exponente = $1 \rightarrow 1 + 127 = 128 \rightarrow 10000000$
...
exponente = $126 \rightarrow 126 + 127 = 253 \rightarrow 11111101$
exponente = $127 \rightarrow 127 + 127 = 254 \rightarrow 11111110$

Representación de números en coma flotante

11

Casos particulares en simple precisión

- ❑ El valor -127 (00000000) del exponente se reserva para representar dos casos especiales
 - Si la mantisa también es cero se está representando el cero
 - Si la mantisa es distinta de cero se trata de un número no normalizado, es decir, supondremos que el bit implícito de la parte entera no es 1 sino 0, y el exponente es -126
- ❑ El valor 128 (11111111) del exponente se reserva para representar dos casos especiales
 - Si la mantisa es cero se está representando el infinito
 - Si la mantisa es distinta de cero se está representando el resultado de una operación inválida, es decir, el valor no es un número (*NaN – Not a Number*)

Representación de números en coma flotante

12

Ejemplos en simple precisión

- ❑ Utilizaremos como ejemplo el número +1011010010001
- ❑ Se trata de un número positivo, por lo que el bit de signo será un 0
- ❑ El siguiente paso consiste en normalizar el número
 $1011010010001 \rightarrow 1'011010010001 \times 2^{12}$
- ❑ Esto nos permite calcular el valor de la mantisa
mantisa $\rightarrow 011010010001$

Representación de números en coma flotante

13

Ejemplos en simple precisión

- ❑ Ahora falta por calcular el valor del exponente
exponente $\rightarrow 12$
exponente $\rightarrow 12 + 127 = 139$
exponente $\rightarrow 10001011$
- ❑ Con esta información podemos representar el número

1 bit	8 bits	23 bits
0	10001011	01101001000100000000000

Representación de números en coma flotante

14

Ejemplos en simple precisión

- ❑ Ahora haremos un ejemplo en sentido inverso usando el número

1	10010001	100011100010000000000000
---	----------	--------------------------

- ❑ Dado que el bit de signo es 1, el número es negativo
- ❑ La mantisa nos proporciona la magnitud del número

1'10001110001

Representación de números en coma flotante

15

Ejemplos en simple precisión

- ❑ El valor del exponente se calcula de la siguiente forma:

exponente → 10010001

exponente → 145

exponente → $145 - 127 = 18$

- ❑ Con esta información obtenemos el número

$-1'10001110001 \times 2^{18}$

-1100011100010000000

Representación de números en coma flotante

16

Ventajas de la coma flotante

- ☐ El formato en coma flotante se usa para representar valores muy grandes (exponente positivo) o valores muy pequeños (exponente negativo)
- ☐ El formato en coma flotante de simple precisión permite representar números de 128 bits con solo 32
- ☐ El formato es flexible: se puede dedicar cualquier cantidad de bits a la parte entera o a la parte fraccionaria según convenga

Estructura del tema

- ☐ Introducción
- ☐ Números en coma flotante
- ☐ Representación de números binarios en coma flotante
- ☐ Aritmética binaria en coma flotante
- ☐ Resumen y bibliografía

Suma y resta en coma flotante

- ❑ La suma y la resta se llevan a cabo con las reglas habituales, pero los dos exponentes deben ser iguales

- ❑ Antes de operar hay que igualar los exponentes
 - Se desplaza a la derecha la mantisa del número con menor exponente
 - Cada posición desplazada a la derecha implica incrementar en uno el valor del exponente
 - El desplazamiento se repite hasta que los dos números tengan el mismo valor en el exponente

Representación de números en coma flotante

19

Suma en coma flotante

- ❑ En la suma existe la posibilidad de desbordamiento a infinito (*overflow*) del valor de la mantisa

- ❑ El desbordamiento se debe corregir desplazando la mantisa una posición a la derecha y sumando uno al exponente

- ❑ Es importante controlar la posibilidad de que el exponente se desborde al realizar esta operación, ya que obtendríamos un número no representable

Representación de números en coma flotante

20

Resta en coma flotante

- ❑ En la resta existe la posibilidad de obtener un número con uno o varios ceros en los bits más significativos, lo que obligaría a normalizar el resultado
- ❑ La normalización se realiza desplazando la mantisa a la izquierda y restando uno al exponente por cada posición desplazada
- ❑ Es importante controlar la posibilidad de que el exponente se desborde a cero (*underflow*)
 - Una posible solución sería usar el formato no normalizado
 - Si este formato tampoco es suficiente, entonces el número no es representable

Representación de números en coma flotante

21

Multiplicación en coma flotante

- ❑ La multiplicación es más sencilla porque no es necesario que los exponentes sean iguales
 - Las mantisas se multiplican como enteros en coma fija
 - Los exponentes se suman
 - Si cualquiera de los operandos es cero, el resultado también
- ❑ Existe la posibilidad de que sea necesario normalizar el resultado de la multiplicación
- ❑ También es posible que se produzca un desbordamiento a cero o a infinito del exponente, por lo que hay que controlar que el resultado sea representable

Representación de números en coma flotante

22

División en coma flotante

- ❑ La división consiste en dividir las mantisas y restar al exponente del dividendo el exponente del divisor
 - Si el dividendo es cero el resultado es cero
 - Si el divisor es cero se considera desbordamiento
 - Si el dividendo y el divisor son cero, el resultado se identifica como un número desconocido
- ❑ Existe la posibilidad de que sea necesario normalizar el resultado de la división
- ❑ También es posible que se produzca un desbordamiento a cero o a infinito del exponente, por lo que hay que controlar que el resultado sea representable

Estructura del tema

- ❑ Introducción
- ❑ Números en coma flotante
- ❑ Representación de números binarios en coma flotante
- ❑ Aritmética binaria en coma flotante
- ❑ Resumen y bibliografía

Resumen

- ❑ Los números en coma flotante permiten representar números muy grandes o muy pequeños con una cantidad relativamente reducida de bits
- ❑ Existe un formato para representar números binarios en coma flotante, lo que determina cómo se realizan las operaciones aritméticas con ellos
- ❑ Los números en coma flotante son muy frecuentes en las aplicaciones de cálculo numérico, por lo que los ordenadores suelen utilizar unidades separadas específicas para operaciones en coma flotante

Bibliografía

Fundamentos de Sistemas Digitales (7ª edición)

Capítulo 2

Thomas L. Floyd

Prentice Hall, 2000

Principios de Diseño Digital

Capítulo 2

Daniel D. Gajski

Prentice Hall, 1997